

**Università degli studi di Padova**

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

**La stabilità dei punti lagrangiani L4 e L5:  
sviluppi recenti**

**Laureando:** Riccardo Milocco

**Relatore:** Prof. Giancarlo Benettin

Anno accademico 2016-2017

Ai sognatori.

### Abstract

Nel seguente lavoro di tesi si presentano alcuni risultati relativi alla stabilità degli asteroidi troiani nel problema Sole-Giove in prossimità di L4-L5. In particolare come esposto nell' articolo "On the stability of the Trojan asteroids" (Giorgilli&Skokos), riportiamo alcuni metodi ricavati dalla *teoria delle perturbazioni* per descrivere il dominio di stabilità per un tempo dell'ordine dell'età dell'universo. Quindi, si confronterà la regione di stabilità teorica con le posizioni riportate nel catalogo degli asteroidi troiani rilevati il 14/12/94, J.D.=2440700.5.

Si è trovato che solo 4 asteroidi rientrano nel dominio di stabilità. Pertanto, la stima della regione di stabilità è insoddisfacente e va migliorata.

Infine riferendoci alla tesi "New normal form approaches adapted to the Trojan problem" (Paez), illustriamo degli sviluppi recenti con l'individuazione di superfici numeriche per descrivere la dinamica dei suddetti asteroidi. Nel dettaglio, si riuscirà a determinare la dinamica di  $TK_7$  e 1872 Helenos in prossimità di L4-L5 relativamente ai problemi Sole-Terra e Sole-Giove per 500 periodi dei primari.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Metodo Analitico</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Contesto teorico</b>	<b>7</b>
3.1	Problema ristretto circolare piano . . . . .	7
3.2	Punti di equilibrio lagrangiani . . . . .	7
3.3	Verso l'hamiltoniana in forma normale . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Studio della stabilità di L4</b>	<b>12</b>
4.1	Costruzione della forma normale . . . . .	12
4.1.1	Metodo di Birkhoff . . . . .	12
4.1.2	Operatore di Lie . . . . .	13
4.1.3	Applicazione del metodo di Birkhoff . . . . .	14
4.2	Integrali del moto: le azioni . . . . .	16
4.3	Dominio e introduzione di una norma . . . . .	17
4.4	Stima del "tempo di fuga" di un'orbita . . . . .	18
4.4.1	Massimizzazione della velocità delle azioni . . . . .	18
4.5	Risultati . . . . .	20
4.5.1	Risultati generali riguardo il tempo e la regione di stabilità . . . . .	20
4.5.2	Risultati per il problema di stabilità di L4 . . . . .	20
4.5.3	Confronto con gli asteroidi esistenti . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Sviluppi recenti</b>	<b>25</b>
5.0.1	Hamiltoniana "mediata" o in forma normale . . . . .	26
5.0.2	Superfici di livello numeriche . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>30</b>
<b>A</b>	<b>Triangolo risolutivo della trasformata di Lie</b>	<b>32</b>
<b>B</b>	<b>Limitatezza delle funzioni in forma normale</b>	<b>33</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

In meccanica classica date le equazioni di Newton e il principio di unicità di Cauchy, si può determinare univocamente la dinamica di un sistema. Queste equazioni, in realtà, lasciano definita l'orbita descritta dal sistema tramite delle equazioni differenziali del secondo ordine che, in generale, non sono integrabili. Consideriamo, infatti, un modello elementare di  $n$  corpi in interazione attraverso la forza gravitazionale. Ad oggi, solo per  $n = 2$  troviamo un soluzione esplicita del problema. Se passiamo a  $n = 3$  Poincaré e Burns hanno dimostrato, alla fine del XIX secolo, che non esiste alcuna soluzione analitica del problema. Per  $n = 3$ , il problema è con evidenza definito *Problema dei tre corpi*. In questo lavoro di tesi, illustreremo i recenti sviluppi relativi allo studio della stabilità degli equilibri di un caso particolare di questo problema: il *Problema dei tre corpi ristretto circolare piano*. In particolare, analizzeremo in ambito hamiltoniano il modello composto da Sole-Giove (i "primari") e gli asteroidi Troiani.

Si assume, inoltre, che il modello sia "*ristretto*", in quanto il moto degli asteroidi non influisce sul moto dei primari; "*circolare*", poichè il moto dei primari, rispetto al baricentro del sistema, è circolare e non ellittico; e "*piano*", perchè si analizza la dinamica dei Troiani ristretta al piano del moto dei due primari. Ricordiamo che il problema a tre corpi ha cinque punti di equilibrio detti punti lagrangiani: tre stanno sulla direttrice dei due corpi principali anche chiamati "primari"; mentre L4 (*risp.* L5) giace sul terzo vertice superiore (*risp.* inferiore) del triangolo equilatero che ha come altri vertici i due primari (vedi 1.1). Per la loro posizione rispetto ai primari, i primi tre sono detti "collineari" e L4,L5 sono chiamati "punti triangolari".

In questa tesi, esporremo dei metodi analitici per determinare il dominio di stabilità per un tempo dell'ordine dell'età dell'universo in prossimità di L4.

Si noti che L5 ha una trattazione del tutto equivalente a quella sviluppata per L4. Pertanto, tratteremo solo il caso di L4.

Per quanto riguarda la stabilità degli equilibri attraverso il teorema spettrale di Lyapunov, si dimostra che i punti "collineari" L1,L2,L3 sono instabili; mentre per L4 e L5 la trattazione è più complessa.

Anche se verrà trattato con più attenzione nelle sezioni seguenti, è bene già rendere evi-

dente qual è il limite principale dello studio della stabilità di L4 e L5.

Preliminarmente come in [3], ci si è posti in coordinate polari in un sistema di riferimento con l'origine su L4. Secondariamente, si espande in serie di Taylor l'hamiltoniana e si applica il già citato teorema di Lyapunov all'hamiltoniana linearizzata. Definito il parametro <sup>1</sup>

$$\mu := \frac{m_J}{m_J + M_S},$$

si trova che i punti "triangolari" per il sistema completo sono

- instabili per il sistema completo per  $\mu_R \leq \mu \leq 1 - \mu_R$  ( con  $\mu_R \simeq 0.0038$  "limite di Routh");
- altrimenti, la stabilità non è garantita per ogni orbita.

In particolare, troveremo che l'hamiltoniana completa (identificabile come l'energia totale del sistema) non ha un minimo stretto nell'origine. Pertanto, sarà di vitale importanza valutare la dinamica delle orbite data dai termini successivi dell'espansione dell'hamiltoniana completa<sup>2</sup>.

Ciò nonostante, si osservano sperimentalmente due insiemi di asteroidi, detti "Troiani" e "Greci", che giacciono rispettivamente su L4 e L5. Il problema di stabilità è, dunque, di natura analitica. Difatti, non si possiede ancora gli opportuni strumenti matematici per dimostrare la stabilità di ogni orbita nell'intorno di L4 (L5) per un tempo arbitrariamente grande.

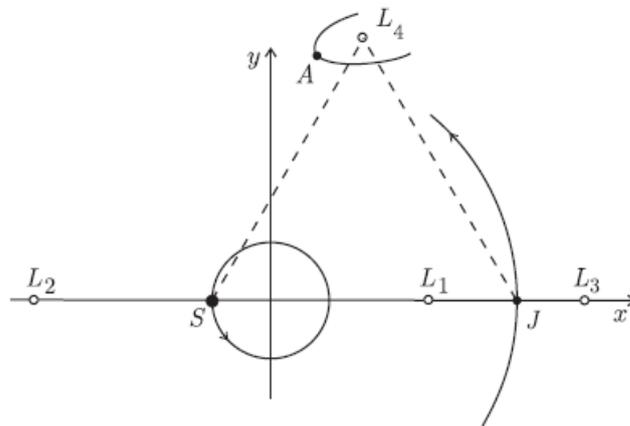


Figura 1.1: I punti di equilibrio lagrangiani nel problema ristretto a tre corpi

L'obiettivo, dunque, sarà quello di considerare il problema di stabilità di L4, nello spirito della teoria di stabilità di Nekhoroshev, per lunghi intervalli di tempo. Per la precisione,

<sup>1</sup> $m_J, M_S$  sono, rispettivamente, la massa di Giove e del Sole

<sup>2</sup>Ricordiamo che se l'hamiltoniana avesse un punto di minimo stretto nell'origine, grazie al *teorema di Lagrange-Dirichlet* potremo concludere che la stabilità di L4 è garantita anche con l'aggiunta dei termini d'ordine superiore che formano l'hamiltoniana completa.

si stimerà la regione dello spazio dove è assicurata la stabilità delle orbite per ordini di tempo dell'età dell'universo. Ricordiamo in ultima istanza che nonostante i rilevanti successi ottenuti di recente, la stabilità di L4-L5 è ancor oggi oggetto di ricerca scientifica.

## Capitolo 2

# Metodo Analitico

Per prima cosa trovata l'hamiltoniana del problema, si è affrontato il problema della stabilità del punto L4 in un preciso intorno nel quale il sistema è linearizzabile. Tuttavia passando alle coordinate normali, si nota che il sistema linearizzato è formato da due oscillatori armonici disaccoppiati di cui uno a frequenza negativa. Quest'ultima condizione, di trascurabile significato per il sistema linearizzato, fa sì che l'hamiltoniana del sistema completo non abbia un punto di minimo in L4. Pertanto come vedremo meglio nella sezione 2.3, non si può concludere che l'aggiunta di termini successivi non infici la stabilità del punto. Sarà indispensabile valutare in che modo i termini di ordine superiore agiscano sulla dinamica del sistema.

Come riportato in [3], illustriamo ulteriori metodi per ottenere delle stime di stabilità.

Il primo riguarda l'individuazione di due integrali primi che sono anche costanti del moto: le azioni. In particolare come previsto dal metodo indiretto di Birkhoff, si pone l'hamiltoniana in forma normale. In questo modo, le azioni nelle coordinate normali sono delle costanti del moto (fino all'ordine di normalizzazione  $r$ ) nel dominio di stabilità.

Il secondo riguarda la definizione di una famiglia di domini di stabilità e una buona norma per stimare la grandezza delle funzioni in gioco (ad. es. la scala di tempo in cui evolvono le azioni  $\dot{I}$ ).

Nel dettaglio si useranno le coordinate polari per descrivere la regione di stabilità. Infatti, da un'analisi numerica si può notare che la proiezione della suddetta regione sul piano dei primari è, in prima approssimazione, un'ellisse con centro in L4 (vedi Figura 2.1).

Per quanto riguarda l'introduzione della norma, rimandiamo la spiegazione all'apposita sezione.

Il terzo riguarda il calcolo del minimo "tempo di fuga", ovvero il minimo intervallo temporale impiegato da un'orbita per uscire dal dominio di stabilità. Grazie a questa stima si otterrà, inoltre, il miglior ordine di espansione dell'hamiltoniana. Infatti dalla teoria di Nekhoroshev, l'espansione in serie che deriva dalla teoria delle perturbazioni classica ha un carattere asintotico.

Pertanto, esiste un valore ottimale tale che il "resto" sia trascurabile.

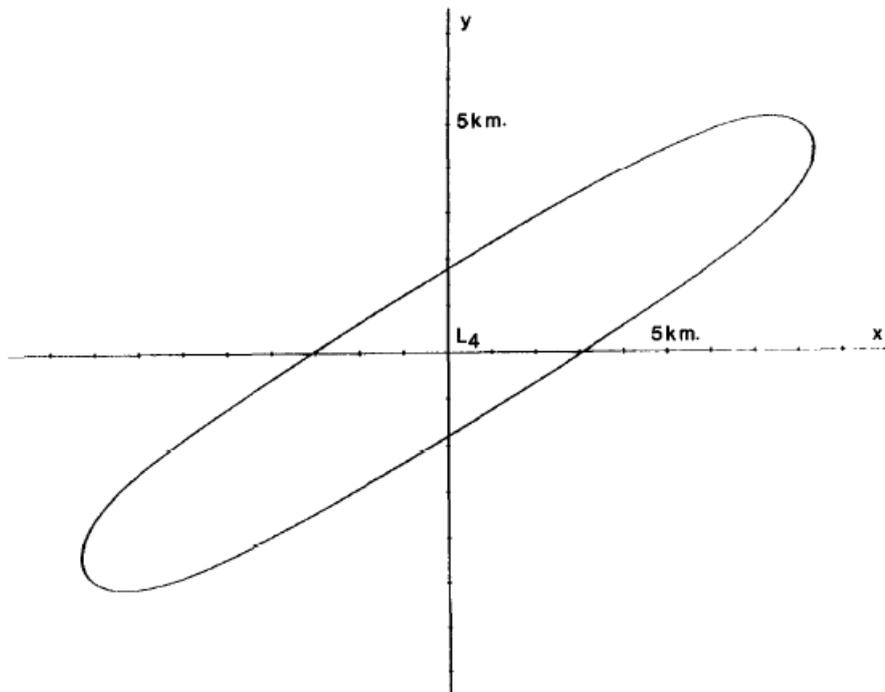


Figura 2.1: Proiezione sul piano cartesiano  $(x, y)$  del dominio di stabilità di  $L_4$  nel modello Sole-Giove senza risonanze[1]

Infine, si confronteranno i risultati ottenuti con l'effettiva regione di stabilità osservata.

# Capitolo 3

## Contesto teorico

Nella sezione I di questo capitolo si procede con l'introduzione dell'hamiltoniana per il problema a tre corpi circolare piano.

Nella sezione II si troveranno i punti di equilibrio del sistema.

Nella sezione III si analizzerà la natura del punto lagrangiano L4.

### 3.1 Problema ristretto circolare piano

Consideriamo un sistema di riferimento corotante con i primari  $(0, q_1, q_2)$ , l'origine situata sul centro di massa del sistema Sole-Giove e l'asse delle ascisse  $q_1$  posto sulla direttrice dei due pianeti orientata verso il Sole. Si assumono, inoltre, unità di misura tali che, denotata

$$\mu = \frac{m}{m + M},$$

la distanza tra i pianeti sia 1, la velocità<sup>1</sup>  $\omega$  di rotazione di Giove sia unitaria, la massa complessiva del sistema sia 1 e la costante gravitazionale  $\mathcal{G}$  sia anch'essa unitaria. Dunque, il Sole avrà massa  $1 - \mu$  e giacerà sempre sul punto  $(\mu, 0)$ ; mentre Giove avrà massa  $\mu$  e si troverà in  $(1 - \mu, 0)$ .

L'hamiltoniana per un asteroide avrà la forma

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_2 p_1 - q_1 p_2 - \frac{1 - \mu}{\sqrt{(q_1 - \mu)^2 + q_2^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(q_1 + 1 - \mu)^2 + q_2^2}} \quad (3.1)$$

### 3.2 Punti di equilibrio lagrangiani

Ponendo uguale a zero ogni derivata parziale di  $H$  si ha

$$\begin{aligned} p_3 = 0, \quad q_3 = 0, \quad p_1 = -q_2, \quad p_2 = q_1, \\ q_2 \left( -1 + \frac{(1 - \mu)}{R^3} + \frac{\mu}{r^3} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

---

<sup>1</sup> $\omega \in \mathbb{R}^3$  t.c.  $\omega^2 a^3 = G(M + m)$

$$-q_1 + \frac{(1-\mu)(q_1+\mu)}{R^3} + \frac{\mu(q_1-q+\mu)}{r^3} \quad (3.3)$$

Risolvendo le 3.2 e 3.3, rispetto a  $q_1$  e  $q_2$ , si ottengono i punti d'equilibrio o punti "lagrangiani": posto  $q_2 = 0$  nella 3.3 otteniamo  $L_1, L_2, L_3$  i punti lagrangiani "collineari"; mentre con  $q_2 \neq 0$  e  $R = r$  si determinano  $L_4$  e  $L_5$  i punti lagrangiani "triangolari". Quest'ultimi, infatti, giacciono rispettivamente sul vertice superiore e inferiore dei due triangoli equilateri speculari rispetto alla base comune Sole-Giove. In conclusione come illustrato in Figura 1.1,  $L_4$  è individuato da

$$q_1 = \frac{(1-2\mu)}{2}, \quad q_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_1 = -q_2, \quad p_2 = q_1$$

### 3.3 Verso l'hamiltoniana in forma normale

In questa sezione espressa l'hamiltoniana  $H$  in coordinati polari con origine in  $L_4$ , andremo a valutare la stabilità di  $L_4$  attraverso il calcolo esplicito degli autovalori della parte lineare di  $H$  [3].

Entrando in merito, il cambio di coordinate è stato ottenuto in tre passi successivi:

1) si trasla l'origine sul Sole (modello eliocentrico) grazie alla trasformazione di coordinate  $\mathcal{T}$  tale che

$$\mathcal{T} := \begin{cases} Q_1 = q_1 - \mu \\ Q_2 = q_2 \\ P_1 = p_1 \\ P_2 = p_2 - \mu \end{cases}$$

dove  $Q_1, Q_2, P_1, P_2$  sono le nuove coordinate eliocentriche.

Osserviamo che la trasformazione  $\mathcal{T}$  può essere ottenuta dalla generatrice

$$W_1(p_1, p_2, Q_1, Q_2) = -(Q_1 + \mu)p_1 - Q_2(p_2 - \mu).$$

Infatti si dimostra che, derivando l'opposto della nostra funzione generatrice ( $-W_1$ ) rispetto alle variabili, ricaviamo la  $\mathcal{T}$  a meno di una immediata inversione. Più formalmente si trova che

$$\begin{cases} q_1 = Q_1 + \mu \\ q_2 = Q_2 \\ P_1 = p_1 \\ P_2 = p_2 - \mu; \end{cases}$$

2) si esegue un cambio alle coordinate polari con  $\mathcal{P}$  tale che

$$\mathcal{P} := \begin{cases} \rho = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2} \\ \theta = \tan\left(\frac{Q_2}{Q_1}\right) \quad \text{se } Q_1 > 0, \quad Q_2 \geq 0 \\ p_\rho = \frac{P_1 Q_1 + P_2 Q_2}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}} \\ p_\theta = P_2 Q_1 - P_1 Q_2 \end{cases}$$

dove  $\rho, \theta, p_\rho, p_\theta$  sono le nuove coordinate polari. Notiamo che  $p_\rho$  è il momento angolare di un punto che si muove di moto circolare sul piano  $(x, y)$ . La suddetta trasformazione è stata ricavata, applicando il metodo esposto precedente alla

$$W_2 = -\rho(P_1 \cos(\theta) + P_2 \sin(\theta)).$$

Quindi,

$$\begin{cases} p_\rho = P_1 \cos(\theta) + P_2 \sin(\theta) \\ p_\theta = \rho(P_2 \cos(\theta) - P_1 \sin(\theta)) \\ Q_1 = \rho \cos(\theta) \\ Q_2 = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

3) Considerando  $\theta$  come una coordinata non periodica, si introduce un sistema di riferimento nell'intorno di L4. Ricordando che in queste coordinate L4 è individuato da  $\rho = 1$ ,  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ,  $p_\rho = 0$ ,  $p_\theta = 1$ , si trasla l'origine sul punto in questione con  $\mathcal{T}'$  tale che

$$\mathcal{T}' := \begin{cases} x = \rho - 1 \\ y = \theta - \pi/3 \\ p_x = p_\rho \\ p_y = p_\theta - 1 \end{cases}$$

dove  $(x, y, p_x, p_y)$  sono le nuove coordinate canoniche. Come nel caso precedente, la  $\mathcal{T}'$  si ottiene dalla  $W_3$

$$W_3 = p_x(\rho - 1) + (p_y + 1)\theta - \frac{\pi}{3}p_y$$

Dalla figura sottostante, diventa chiaro perchè abbiamo utilizzato questo complicato procedimento. Infatti, le nuove coordinate si adattano bene alla descrizione dell'orbita percorsa da un asteroide troiano nei pressi di L4. Osserviamo, infine, che le coordinate date da  $\mathcal{T}'$  sono coordinate polari. Tuttavia in prossimità di L4, le coordinate polari rappresentate in coordinate cartesiane sono ortogonali. Dunque in un intorno di L4, le coordinate polari sono equivalenti alle cartesiane a meno di una rotazione.

Quindi, gli autovalori e gli autovettori di  $H_2(Q_1, Q_2)$  e  $\tilde{H}_2(x, y)$  saranno uguali, a meno di una rotazione.

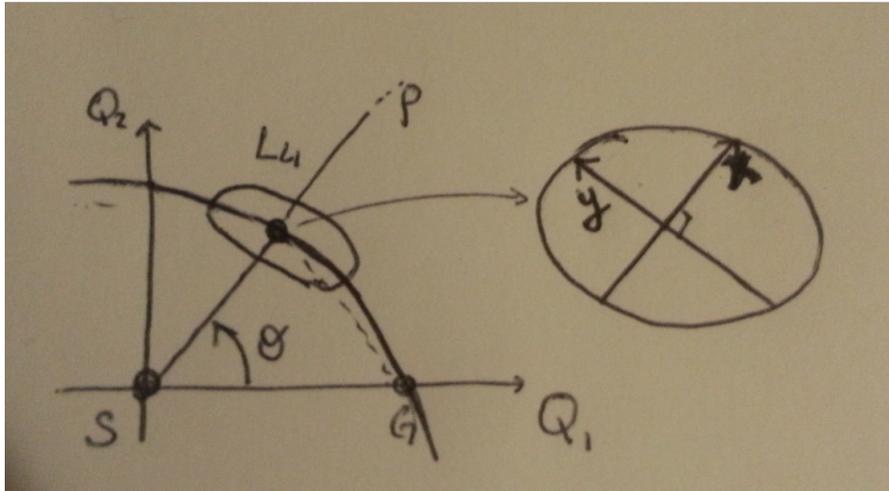


Figura 3.1: Rappresentazione degli spazi delle configurazioni  $(Q_1, Q_2)$ ;  $(\rho, \theta)$ ;  $(x, y)$  con particolare attenzione alle coordinate in un "piccolo" intorno di  $L_4$ .

Date le coordinate  $x, y, p_x, p_y$  e rimossa la " $\sim$ ", l'hamiltoniana assumerà la forma

$$H = \frac{1}{2} \left[ p_x^2 + \left( \frac{p_y + 1}{x + 1} \right)^2 \right] - p_y - \mu(x+1) \cos\left(y + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1 - \mu}{1 + x} - \frac{\mu}{\sqrt{(x+1)^2 + 1 + 2(x+1) \cos\left(y + \frac{\pi}{3}\right)}}$$

4) Si espande l'hamiltoniana in serie di Taylor in un intorno dell'origine, ottenendo uno sviluppo della forma  $H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots$

dove

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - 2xp_y + \left(\frac{1}{2} + \frac{9\mu}{8}\right)x^2 - \frac{9\mu}{8}y^2 + \frac{3\sqrt{3}\mu}{4}xy \quad (3.4)$$

e  $H_s$  per  $s > 2$  è un polinomio omogeneo di grado  $s$  nelle variabili canoniche. Avendo trovato la forma della linearizzata  $H_2$ , se ne calcolano gli autovalori per dare una stima della stabilità del punto.

Notando che essendo  $H_2$  reale, si sa che se  $\lambda$  è autovalore di  $H_2$  lo sarà anche  $\bar{\lambda}$ . In più dato che è simplettica, si trova anche la coppia di autovalori  $-\lambda, -\bar{\lambda}$ .

Dunque se tutti gli autovalori sono immaginari puri, il punto sarà stabile, o anche detto "ellittico"; mentre se almeno un autovalore avrà parte reale negativa, il punto sarà instabile, o "iperbolico". Nel dettaglio, si trova che, definito

$$\mu_R = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{23}{27}} \right) \simeq 0.0385 \quad (\text{"limite di Routh"}) :$$

- se  $\mu \leq \mu_R$ ,  $(1 - \mu) \leq \mu_R$  allora l'equilibrio è "ellittico";
- altrimenti è "iperbolico".

5) Per la teoria delle piccole oscillazioni, in un intorno dell'equilibrio ellittico possiamo introdurre delle coordinate normali tali che la  $H_2$ , sia composta da due oscillatori armonici disaccoppiati.

Dunque per  $\mu \leq \mu_R$  e applicando le nuove coordinate normali  $(x_1, y_1, x_2, y_2)$ ,  $H_2$  assumerà la forma diagonale

$$H_2 = \frac{\omega_1(x_1^2 + y_1^2)}{2} + \frac{\omega_2(x_2^2 + y_2^2)}{2} \quad \omega_1 > 0, \quad \omega_2 < 0 \quad (3.5)$$

dove  $\omega_1, \omega_2$  le frequenze di oscillazione rispetto a L4.

Osserviamo che l'hamiltoniana precedente rappresenta due oscillatori armonici disaccoppiati e, dunque in prima approssimazione, si ritrovano le orbite circolari illustrate in Figura 2.1.

Come riportato in [3], la trasformazione alle coordinate normali è lineare e data dalla matrice simplettica

$$C = (e_1 m_1^{-\frac{1}{2}}, e_2 m_2^{-\frac{1}{2}}, f_1 m_1^{-\frac{1}{2}}, f_2 m_2^{-\frac{1}{2}})$$

dove i vettori colonna reali sono dati dalla

$$e_j + i f_j = \begin{pmatrix} \frac{8\omega_j^2 + 4\sqrt{3}\alpha + 9}{8} \\ \frac{16i\omega_j + 4\alpha + 3\sqrt{3}}{8} \\ i\omega_j \frac{8\omega_j^2 + 4\sqrt{3}\alpha}{8} \\ i\omega_j \frac{4\alpha + 3\sqrt{3}}{8} + \frac{4\alpha\sqrt{3} + 9}{4} \end{pmatrix}$$

e costanti  $m_j (j = 1, 2)$  date dalla  $m_j = \bar{\omega}_j D_j$ ,

$$D_j = \left( \frac{8\omega_j^2 + 4\sqrt{3}\alpha}{8} \right)^2 - 2 \left( \sqrt{3}\alpha + \frac{9}{4} \right) + \left( \frac{4\alpha + 3\sqrt{3}}{8} \right)^2$$

e  $\omega_1^2, \omega_2^2, \alpha$  sono definite come

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{27}{4} + 4\alpha^2}, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{27}{4} + 4\alpha^2}, \quad \alpha = -\frac{(1 - 2\mu)e\sqrt{3}}{4}$$

Si noti che per avere  $m_j > 0$ , condizione necessaria affinché  $C$  sia simplettica, basta imporre che  $\omega_1 > 0, \omega_2 < 0$ . Quest' ultima condizione fa sì che l'origine non sia più un punto di minimo assoluto per l'hamiltoniana  $H$  del sistema completo: precisamente L4 è punto di sella e non si può applicare il *teorema di Lagrange-Dirichlet* per dimostrare la stabilità. Quindi, a differenza di un sistema con  $H$  definita positiva, l'aggiunta di termini di  $O(q^3)$  sarà fondamentale per determinare la natura del punto sotto la dinamica di  $H$ .

# Capitolo 4

## Studio della stabilità di L4

In questo capitolo, riportiamo il metodo analitico di [3] per ottenere delle stime di stabilità di L4. Infatti, l'analisi condotta fino ad ora è risultata insoddisfacente.

Nella prima sezione si pone l'hamiltoniana nella forma normale di Birkhoff per trovare due integrali del moto.

Nelle sezioni II, III si studiano, rispettivamente, il dominio di stabilità nonché l'introduzione di una buona norma; e, "valutando il tempo di fuga", il miglior ordine di espansione dell'hamiltoniana perturbata.

Infine nella sezione IV, si analizzano i risultati ottenuti con i dati sperimentali.

### 4.1 Costruzione della forma normale

#### 4.1.1 Metodo di Birkhoff

In questa parte, richiameremo i punti salienti della costruzione normale di Birkhoff per poi applicarla al nostro problema. Scopo di questa manipolazione è trovare una forma dell'hamiltoniana che, in condizioni di non risonanza per le frequenze  $\omega := (\omega_1, \omega_2)$  di  $H_2$ , permetta di determinare facilmente delle costanti del moto. In particolare, vogliamo risolvere l'equazione

$$\{H, \Phi\} = 0, \quad (4.1)$$

dove  $\Phi$  sono gli integrali del moto.

In accordo con il "*metodo indiretto di Birkhoff*", si trasforma l'hamiltoniana di partenza  $H$  nella cosiddetta "*forma normale di Birkhoff*  $H^{(r)}$ ".

Precisamente,  $H^{(r)}$  è "*in forma normale di Birkhoff (all'ordine  $r$ )*" se assume lo sviluppo

$$H^{(r)} = H_2 + Z_3 + Z_4 + \dots + Z_r + \mathcal{R}^{(r+1)}$$

dove  $H_2$  è diagonale,  $Z_r$  dipende solo delle azioni  $I_j$  con  $Z_r = I_j^r = \left(\frac{x_j^2 + y_j^2}{2}\right)^r$  e  $\mathcal{R}^{(r+1)}$  è il "resto": lo sviluppo successivo della serie partendo dall'ordine  $r+1$ . Siccome il resto non

è in forma normale, esso sarà formato da una combinazione delle diverse azioni  $I_j$ . Dunque otterremo che la 4.1, dopo l'applicazione del "metodo indiretto di Birkhoff", si trasformerà nella  $\{H^{(r)}, \tilde{\Phi}\} = 0$ .

Ricordando, in aggiunta, che  $\{I_j, F(I_j)\} = 0$  per ogni  $F$  reale, vedremo che le costanti del moto cercate saranno proprio le azioni<sup>1</sup>

### 4.1.2 Operatore di Lie

Identificato l'obbiettivo, introduciamo l'operatore  $T_\chi$ , detto "operatore di Lie", che ci permetterà di trovare la forma normale  $H^{(r)}$  fino all'ordine  $r$ .

**Definizione 4.1.** Sia  $\Pi$  lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei, definiamo la successione di polinomi omogenei di grado  $s$  come  $\chi := \{\chi_s\}_{s \geq 3}$ , con  $\chi_s \in \Pi$ . Definiamo, inoltre,  $E \in \Pi$  e  $T_\chi : \Pi \rightarrow \Pi$  "operatore di Lie" tale che

$$T_\chi E = \sum_{s \geq 0} E_s$$

$$E_0 = 1, \quad E_s = \sum_{j=1}^s \frac{j}{s} L_{\chi_{j+2}} E_{s-j}$$

dove  $L_\chi * = \{\chi, *\}$  è la derivata di Lie di  $*$  rispetto a  $\chi$  detta "hamiltoniana generatrice della forma normale (fino) all'ordine  $s$ "

**Proposizione 1.** Come riportato in [2], l'operatore  $T_\chi$  definito nella 4.1 ha le seguenti proprietà:

1. è lineare, ovvero  $T_\chi(\alpha v + \beta w) = \alpha T_\chi v + \beta T_\chi w$ , dove  $\alpha, \beta$  sono numeri reali e  $v, w$  possono essere sia funzioni reali che campi vettoriali;
2. conserva il prodotto, ossia  $T_\chi(f \cdot g) = T_\chi f \cdot T_\chi g$ , ove  $f, g$  sono funzioni;
3. preserva le parentesi di Poisson tra campi vettoriali:  $\{T_\chi v, w\} = \{T_\chi v, T_\chi w\}$  con  $v, w$  campi vettoriali;
4. invertibile:

$$T_\chi^{-1} := \sum_{j=1}^s G_j$$

$$G_0 = E_0 \quad G_s = - \sum_{j=1}^s \frac{j}{s} G_{s-j} L_{\chi_j}$$

<sup>1</sup>Precisamente indicate con  $(x, y)$  e  $(x', y')$  le coordinate prima e dopo la costruzione della forma normale, le azioni sono integrali primi per il sistema in forma normale,  $\{(H_2 + \dots + Z_r)(x', y'), I_j'(x', y')\} = 0$ .

**Osservazione 1.** Data la conservazione delle parentesi di Poisson[2],  $T_\chi$  genera una trasformazione alle nuove coordinate canoniche  $(x', y') \in \Pi$  della forma

$$x' = T_{\chi^{(r)}}x, \quad y' = T_{\chi^{(r)}}y \quad (4.2)$$

**Osservazione 2.** Sia  $f$  come sopra e  $(x, y), (x', y')$  rispettivamente le nuove e vecchie coordinate, allora

$$f(x, y)|_{(x,y)=T_\chi^{-1}(x',y')} = (T_\chi^{-1}f)(x', y') \quad \text{per } (x', y'), (x, y), f \in \Pi \quad (4.3)$$

### 4.1.3 Applicazione del metodo di Birkhoff

Definito  $T_\chi$ , dimostreremo che se  $H^{(r)}$  è l'hamiltoniana in forma normale e  $H$  l'hamiltoniana di partenza allora, come riportato in [2],

$$T_{\chi^{(r)}}H^{(r)} = H \quad (4.4)$$

Il problema, quindi, è trovare opportune successioni  $\{\chi_s\}_s$  e  $\{Z_s\}_s$  ( $s \in [3, r]$ ) tali che sia soddisfatta la 4.4. Tuttavia per  $\omega$  non risonanti,  $\chi_s$  e  $Z_s$  si determinano contemporaneamente, risolvendo l'equazione 4.4 rispetto alle incognite  $\chi_s$  e  $Z_s$ .

Preliminarmente ricordando la definizione 4.1 e esplicitando la 4.4,

$$\sum_{s \geq 3} E_s(H_2 + Z_3 + \dots + Z_r + \mathcal{R}^{(r)}) = H_2 + H_3 + \dots$$

Osserviamo che  $E_s$  contiene la successione  $\{\chi_3, \dots, \chi_{s+2}\}$  e data  $g$  di ordine  $r$ , allora  $E_s g$ , tenendo conto dell'azione della parentesi di Poisson, è di ordine  $s + r$ .

Uguagliando ora ogni ordine nell'equazione precedente, si riesce a generare una famiglia di equazioni che si risolvono in maniera "gerarchica"<sup>2</sup>. Infatti dall'osservazione precedente e definendo  $Z_{s-k}^k := E_k Z_{s-k}$ , si ottiene

$$\begin{cases} Z_2 = H_2 \\ Z_s = H_s - \sum_{k=1}^{s-2} Z_{s-k}^k \quad s=3, \dots, r \end{cases}$$

Notiamo che dalle equazioni precedenti si verifica che  $Z_{s-2}$  contiene le hamiltoniane generatrici  $\{\chi_3, \dots, \chi_s\}$  ed è l'unico termine con  $\chi_s$ . Pertanto, il sistema precedente si può scrivere nella forma

$$Z_s - \mathcal{L}_{H_2} \chi_s = H_s + Q_s \quad s = 2, \dots, r$$

ove  $\mathcal{L}_{H_2} * = \{H_2, *\}$  e  $Q_s$  è un polinomio di ordine  $s$ , dipendente da  $\chi_t$  e  $Z_t$  con  $t = 1, \dots, s-1$ .

<sup>2</sup>Una rappresentazione grafica dello schema risolutivo è riportata in appendice.

Detto, quindi,  $P_s^{(s-1)} := H_s + Q_s$  il polinomio di ordine  $s$  totalmente determinato dagli  $s - 1$  passi precedenti, osserviamo che

$$\mathcal{L}_{H_2}\chi_s = Z_s - P_s^{(s-1)} \quad (4.5)$$

e ora, avendo già ottenuto ai passi precedenti le variabili all'ordine  $s - 1$ , si riescono a determinare  $\chi_s$  e  $Z_s$ .

A questo punto sviluppando la derivata di Lie della 4.5 nelle variabili  $(x_1, x_2)$  e momenti coniugati  $(y_1, y_2)$ , notiamo che la 4.5 non è risolvibile. Per ovviare al problema, si applica la trasformazione alle coordinate (da [2])  $(\xi_j, \eta_j)$  (per  $j = 1, 2$ ) della forma

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_j + i\eta_j), \quad y_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_j - i\eta_j), \quad \text{per } j = 1, 2 \quad (4.6)$$

con inversa

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j - iy_j), \quad \eta_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(-ix_j + y_j), \quad \text{per } j = 1, 2.$$

Osserviamo che nelle nuove coordinate

$$H_2 = i(\omega_1\xi_1\eta_1 + \omega_2\xi_2\eta_2);$$

mentre le azioni

$$I_j(\xi_j, \eta_j) = i\omega_j\eta_j\xi_j \quad \text{con } j = 1, 2.$$

A questo punto per alleggerire la notazione, chiamiamo  $(\xi, \eta) := (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ ,  $k := (k_1, k_2)$ ,  $l := (l_1, l_2)$ . Inoltre,  $(\xi^k\eta^l) := \xi_1^{k_1}\eta_1^{l_1}\xi_2^{k_2}\eta_2^{l_2}$  e  $\omega := (\omega_1, \omega_2)$ .

Dunque  $(\xi, \eta)$ , costituisce una base per l'operatore  $\mathcal{L}_{H_2}$ .

Infatti,

$$\mathcal{L}_{H_2}\xi^k\eta^l = i \sum_{k,l} \omega \cdot (k - l)\xi^k\eta^l.$$

Successivamente sviluppando il membro di sinistra nelle nuove variabili, la 4.5 diventa

$$\{H_2, \chi_s\} = i[\omega_1(\xi_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \eta_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \eta_1}) + \omega_2(\xi_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_2} - \eta_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \eta_2})]\chi_s = Z_s - P_s^{(s-1)}. \quad (4.7)$$

Per capire meglio come procedere nel calcolo della forma normale, prendiamo ora il primo termine significativo della 4.5. Dato che per  $s = 2$  si verifica che  $Z_2 = H_2$ , scegliamo  $s = 3$  e scomponiamo  $\chi_3$  nella base  $(\xi, \eta)$  di  $\mathcal{L}_{H_2}$ :

$$\chi_3 = \sum_{|k+l|=3} C_{k,l} \xi^k\eta^l \quad (4.8)$$

ove  $\mathcal{C}_{k,l} \in \mathbb{C}$ .

Ora, il membro di destra della 4.7 è noto, in quanto  $P_3^{(2)}$  per definizione è formato da  $H_3$  e  $Q_3$ ; mentre,  $Z_3$  vogliamo che dipenda solo dalle azioni.

Formalmente,

$$\begin{cases} P_s^{(s-1)} = \sum_{|k+l|=s} \mathcal{A}_{k,l} \xi^k \eta^l, & k \neq l \\ Z_s = \sum_{|k+l|=s} \mathcal{A}_{k,l} \xi^k \eta^l, & k = l \end{cases}$$

ove i coefficienti  $\mathcal{A}_{k,l} \in \mathbb{C}$  sono determinati dalla trasformazione 4.6. Unendo tutti gli sviluppi ottenuti finora,

$$\mathcal{L}_{H_2} \chi_3 = i \sum_{|k+l|=3} \omega \cdot (k-l) \mathcal{C}_{k,l} \xi^k \eta^l = \sum_{|k+l|=3} \mathcal{A}_{k,l} \xi^k \eta^l. \quad (4.9)$$

Dunque dalla 4.9 in condizioni di non risonanza  $(k-l) \cdot \omega \neq 0$  si possono ricavare i coefficienti  $\mathcal{C}_{k,l}$  e, sostituendo nella 4.8, ottenere l'hamiltoniana generatrice

$$\chi_3 = \sum_{|k+l|=3} \frac{\mathcal{A}_{k,l}}{i(k-l) \cdot \omega} \xi^k \eta^l \quad k \neq l.$$

Notiamo che per  $k = l$  il membro di sinistra della 4.7 è identicamente nullo. D'altra parte ricordiamo che la forma dell'hamiltoniana trasformata per  $j = k$  è pari alla  $Z_s$ .

In conclusione abbiamo dimostrato che, applicando l'operatore di Lie all'hamiltoniana in forma normale  $H^{(r)}$ , riusciamo ad ottenere l'hamiltoniana iniziale  $H$ , a patto di rispettare la "gerarchia" definita dall'operatore di Lie.

## 4.2 Integrali del moto: le azioni

Per quanto visto nelle sezioni precedenti,  $H^{(r)}(x', y') = T_{\chi^{(r)}}^{-1} H$  è in forma normale fino all'ordine  $r$ . Dunque,  $H^{(r)}$  ammette due (quasi) costanti del moto della forma

$$I'_j(x', y') = \frac{x_j'^2 + y_j'^2}{2} \quad j = 1, 2.$$

Infatti,

$$\dot{I}'_j = \{I'_j, \mathcal{R}^{(r)}\} \neq 0 \quad (4.10)$$

e dunque le azioni per l'hamiltoniana  $H^{(r)}$  sono costanti del moto fino all'ordine  $r$ -esimo.

### 4.3 Dominio e introduzione di una norma

In questa sezione individuato il dominio di stabilità, si introdurrà una norma su di esso [3].

Fissate due costanti positive  $R_1$  e  $R_2$ , consideriamo la famiglia di domini

$$\Delta_{\rho R} := \{(x, y) \in R^4 : x_j^2 + y_j^2 \leq (\rho R_j)^2\} \quad \text{per } j = 1, 2$$

dove  $\rho$  è un parametro positivo.

Inoltre, sia  $f$  un polinomio di grado  $s$  in  $(x, y)$  di cui si vuole trovare il massimo assoluto sul dominio  $\Delta_{\rho R}$  per fissati  $\rho$  e  $R$ .

Siamo interessati, dunque, a trovare

$$|f|_{\rho R} = \sup_{\Delta_{\rho R}} |f(x, y)|.$$

Formalmente, si vuole determinare la *sup-norma* di  $f$  sul dominio  $\Delta_{\rho R}$ . In più, notiamo che la *sup-norma* precedente non è perfettamente ottimizzata per dei calcoli numerici. D'altra parte in [3], si riesce a trovare una nuova norma  $\|f\|_{\rho R}$  molto più facile da stimare e tale che  $\|f\|_{\rho R} \geq |f|_{\rho R}$ . Pertanto grazie alla  $\|f\|_{\rho R}$ , si può ottenere una valida stima di  $|f|_{\rho R}$ .

Per introdurre la nuova norma  $\|f\|_{\rho R}$ , riportiamo i diversi passaggi sviluppati in [3].

In primis per i seguenti calcoli ci si pone nelle coordinate  $(\xi_j, \eta_j)$  (con  $j = 1, 2$ ) date dalla 4.6.

Il polinomio trasformato  $f(\xi, \eta)$  nelle nuove variabili è ancora un polinomio omogeneo<sup>3</sup> di grado  $s$  che si può sviluppare nella serie formale

$$f(\xi, \eta) = \sum_{j_1+j_2+k_1+k_2=s} \mathcal{C}_{j_1 j_2 k_1 k_2} \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \eta_1^{k_1} \eta_2^{k_2}$$

dove  $\mathcal{C}_{j_1 j_2 k_1 k_2}$  sono coefficienti complessi ottenuti dalla trasformazione di coordinate. Dunque considerando la seguente norma sullo spazio  $\Pi$

$$\|f\|_{\rho R} := \sup_{(x, y) \in \Delta_{\rho R}} \sum_{j_1+j_2+k_1+k_2=s} |\mathcal{C}_{j_1 j_2 k_1 k_2}| |\xi_1|^{j_1} |\xi_2|^{j_2} |\eta_1|^{k_1} |\eta_2|^{k_2}.$$

notiamo che

$$|f|_{\rho R} \leq \|f\|_{\rho R}, \quad (4.11)$$

Osserviamo che nelle coordinate  $(\xi_j, \eta_j)$

$$(x_j, y_j) \in \Delta_{\rho R} \quad \text{sse} \quad 0 \leq |\xi_j| \leq \frac{\rho R_j}{\sqrt{2}}, 0 \leq |\eta_j| \leq \frac{\rho R_j}{\sqrt{2}}$$

<sup>3</sup>il cambio di coordinate 4.6 non cambia il grado delle variabili  $(x_j, y_j)$

Quindi poste  $|\xi_1| = \frac{\rho R_1}{\sqrt{2}} = |\eta_1|$  e  $|\xi_2| = \frac{\rho R_2}{\sqrt{2}} = |\eta_2|$ ,

$$\|f\|_{\rho R} = \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)^s \sum_{j_1+j_2+k_1+k_2=s} |\mathcal{C}_{j_1 j_2 k_1 k_2}| R_1^{j_1+k_1} R_2^{j_2+k_2} \quad (4.12)$$

La norma 4.12 risulta così ben definita sia sullo spazio delle vecchie coordinate  $(x, y)$  che in quello delle nuove  $(x', y')$ . Inoltre come vedremo,  $\rho, R_1, R_2$  saranno dati dal problema; mentre i coefficienti  $\mathcal{C}_{j_1 j_2 k_1 k_2}$  derivano dal cambiamento di coordinate 4.6. Quindi, la norma  $\|f\|_{\rho R}$  così definita è facile da calcolare.

Ricordiamo, infine, un'importante proprietà che discende direttamente dalla definizione:  $\|f\|_{\rho R} = \rho^s \|f\|_R$ .

## 4.4 Stima del "tempo di fuga" di un'orbita

Introdotti il dominio e una buona norma su di esso, si può determinare ([3]) la grandezza di un polinomio omogeneo  $f$  che, in questo caso, sarà la scala di tempo in cui evolvono le azioni  $\dot{I}_j$ . Di conseguenza massimizzata  $\dot{I}_j$ , si vuole trovare una stima del minimo "tempo di fuga", ovvero il minimo intervallo temporale che impiega un'orbita per uscire dal dominio di stabilità.

### 4.4.1 Massimizzazione della velocità delle azioni

Per questa trattazione, è utile porsi in coordinate normali.

Consideriamo che  $(x', y') \in \Delta'_{\rho R}$  sse  $I'_j \leq (\rho R_j)^2/2$  ove  $I'_j = \frac{(x_j'^2 + y_j'^2)}{2}$ .

Si supponga, per cominciare, che per un certo dato iniziale l'orbita stia nel dominio  $\Delta_{\rho_0 R}$  con  $\rho_0$  parametro fissato. Nello spirito della definizione di stabilità secondo Lyapunov, si sceglie un dominio più grande  $\Delta_{\rho R}$  con  $\rho > \rho_0$  dove si valuterà il "tempo di fuga". Dunque omettendo l'apice ' per comodità di notazione e ricordando che

$$|I_j(t) - I_j(0)| \leq \sup_{\Delta_{\rho R}} |\dot{I}_j| |t|$$

si vuole determinare la quantità

$$\tau_r(\rho_0, \rho) = \min_{j=1,2} \frac{R_j^2(\rho^2 - \rho_0^2)}{2 \sup_{\Delta_{\rho R}} |\dot{I}_j|} \quad (4.13)$$

dove  $\tau_r(\rho_0, \rho)$  è il minimo "tempo di fuga".

In particolare avendo già scelto i parametri  $\rho$  e  $\rho_0$ , dobbiamo calcolare il denominatore della 4.13.

Da quanto visto nella sezione 3.2, le azioni sono costanti del moto fino all'ordine r-esimo.

In particolare dalla 4.10, le azioni sono mosse solo dal "resto" della costruzione in forma normale.

Pertanto, si sviluppa in serie il "resto":

$$\mathcal{R}^{(r)} = H_{r+1}^{(r)} + H_{r+2}^{(r)} + \dots$$

Un calcolo completo del "resto" è chiaramente impraticabile, dato che non esiste un limite superiore all'espansione di  $\mathcal{R}^{(r)}$ . Tuttavia come mostrato in [1], se  $\rho \leq R^*/2$  dove  $R^* > 1$  è il raggio di convergenza della serie a  $\rho$  fissato, allora

$$\sup_{\Delta_{\rho R}} |\dot{I}_j| < 2 \|\{I_j, H_{r+1}^{(r)}\}\|_{\rho R} \quad (4.14)$$

Infatti dalla Proposizione 2 (riportata in appendice), si osserva che per un'hamiltoniana limitata  $H$ , il resto  $\mathcal{R}_s^{(r)}$  è una funzione decrescente rispetto al grado  $s$ .

In dettaglio, dalla 2 si ha che

$$\|H_s\|_R < (R^*)^{r+1-s} \|H_{r+1}\|_R.$$

Ricordando le proprietà della norma,

$$\|H_s\|_{\rho R} = \rho^s \|H_s\|_R < \rho^s (R^*)^{r+1-s} \|H_{r+1}\|_R.$$

In più scelto  $\rho \leq \frac{R^*}{2}$ , otteniamo che

$$\|H_s\|_{\rho R} < \rho^{s-(r+1)} (R^*)^{r+1-s} \|H_{r+1}\|_{\rho R} = \left(\frac{1}{2}\right)^{s-(r+1)} \|H_{r+1}\|_{\rho R}.$$

Infine sommando tutti i termini  $\|H_s\|_R$  e osservando che per  $s \geq r+1$  il membro di destra è una successione geometrica,

$$\sum_{s>r} \|H_s\|_R < 2 \|H_{r+1}\|_{\rho R}.$$

Dunque abbiamo dimostrato che

$$\sup_{\Delta_{\rho R}} |\dot{I}_j| < 2 \|\{I_j, H_{r+1}^{(r)}\}\|_{\rho R}.$$

Inserendo ora la 4.14 nella 4.13, il "tempo di fuga" è

$$\tau_r(\rho_0, \rho) = \min_{j=1,2} \frac{R_j^2(\rho^2 - \rho_0^2)}{4\rho^{r+1} \|\{I_j, H_{r+1}^{(r)}\}\|_R} \quad (4.15)$$

Tuttavia, osserviamo facilmente che questa stima dipende dall'ordine di normalizzazione, dal raggio  $\rho$  del dominio finale e da  $\rho_0$  di quello iniziale. Intuitivamente, il tempo di fuga

dovrà dipendere solo dal dato iniziale. Pertanto in [3], si ottimizza il suddetto intervallo temporale rispettivamente per  $\rho$  e  $r$ :

i) si cerca il massimo valore del tempo per  $r$  fissato e lo inseriamo nella precedente espressione di  $\tau_r(\rho_0, \rho)$ . Dai calcoli svolti si trova che tale valore è

$$\rho = \rho_0 \sqrt{\frac{r+1}{r-1}}$$

ii) rimosso il vincolo su  $r$ , si massimizza il tempo per  $r$  che va da 3 a  $\tilde{r}_{opt}$ .

In questo modo come in [3], si ottiene la seguente stima del "tempo di fuga" che dipende con evidenza solo da  $\rho_0$ :

$$T(\rho_0) := \max_{3 \leq r \leq \tilde{r}} \sup_{\rho_0 > \rho} \tau_r(\rho_0, \rho)$$

## 4.5 Risultati

### 4.5.1 Risultati generali riguardo il tempo e la regione di stabilità

In questa parte, analizzeremo i risultati generali per il nostro problema, in modo capire quale sia il comportamento del "tempo di fuga" e dell'ordine ottimale  $\tilde{r}_{opt}$  al variare dei parametri. Per il caso Sole-Giove si trova  $\mu = 9.5387536 \cdot 10^{-4}$ ,  $\omega_1 = 9.9675752552 \cdot 10^{-1}$ ,  $\omega_2 = -8.0463875837 \cdot 10^{-2}$ .

Notando che la 4.12 dipende da  $R_1, R_2$  per una trattazione generale (vedi [3]), si pone  $R_1 = 1 = R_2$ . In definitiva, il problema ora ha come unica variabile il parametro  $\rho_0$  corrispondente al dominio iniziale.

La figura Figura 4.1 illustra l'andamento del "tempo di fuga" e di  $\tilde{r}_{opt}$  in funzione del raggio  $\rho_0$  del dominio iniziale. Notiamo che il primo grafico è composto da segmenti rettilinei che diminuiscono la loro pendenza al diminuire di  $\tilde{r}_{opt}$ . Infatti dalla 4.15,

$$\text{Log}T(\rho_0) \sim -m \text{Log}(\rho_0) + q$$

dove  $m = \frac{1}{2\rho^{r+1} \|\{I_j, H_{r+1}^{(r)}\}\|_{\mathcal{R}}}$  e  $q = \text{cost}$ . L'andamento decrescente del "tempo di fuga" è consistente con quanto ci si aspetta. Infatti per un dato iniziale più vicino a L4, il tempo impiegato dall'orbita per uscire dal dominio  $\Delta_{\rho R}$  sarà maggiore di un dato iniziale localizzato in una zona più esterna. Per la precisione, notiamo che l'andamento di  $T$  va come  $\rho_0^{-r_{opt}}$ . Infatti se  $\rho_0$  decresce, ma aumenta  $r_{opt}$  il "tempo di fuga" cresce esponenzialmente.

### 4.5.2 Risultati per il problema di stabilità di L4

In questa sezione determinato  $\rho_0$ , riportiamo come si è determinato il dominio di stabilità di L4 per tempi dell'ordine dell'età dell'universo in [3].

Dalla scelta delle unità di misura,  $\omega = 1$ , la nostra unità di tempo è  $\mathcal{T} = \frac{T_{Jup}}{2\pi}$  dove  $T_{Jup}$  indica il periodo di rivoluzione di Giove attorno al Sole.

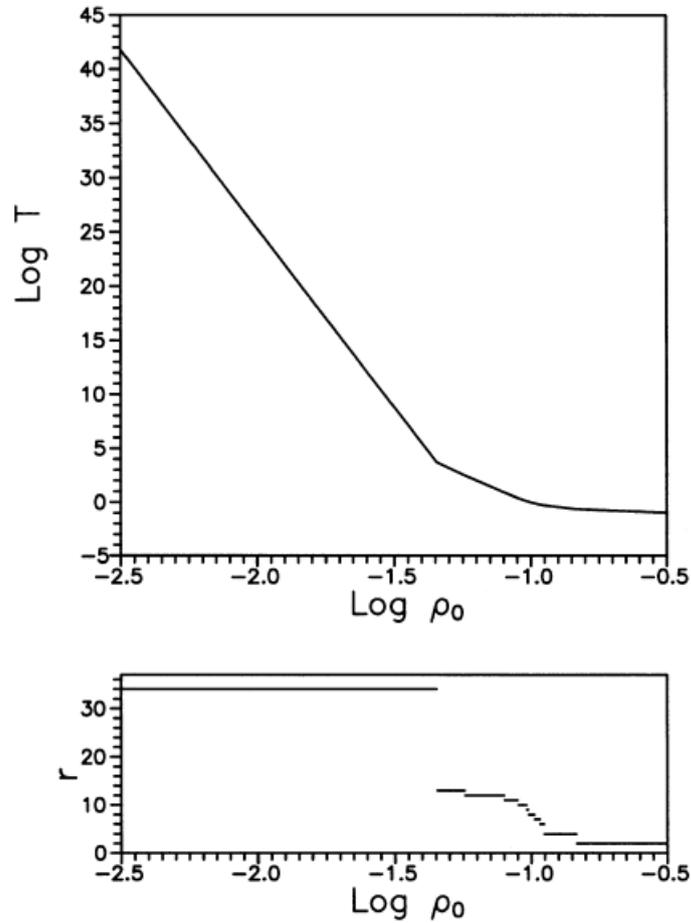


Figura 4.1: Andamento del "tempo di fuga" e dell'ordine ottimale  $\tilde{r}_{opt}$  in funzione di  $\rho_0$  ([3])

In questa scala di tempo, discende che l'età dell'universo ( $14 \cdot 10^9$  anni) è  $10^{10}\mathcal{T}$  a cui corrisponde, come è illustrato in 4.1,  $Log(\rho_0) = -1.536$  e di conseguenza  $\rho_0 = 2.911 \cdot 10^{-2}$ . Osserviamo che  $\rho_0$  è stato stimato attraverso l'analisi del problema in coordinate normali  $(x', y')$ . Pertanto, per darne un significato fisico dovremo riportare il problema in coordinate polari. Utilizzando l'inversa della 4.2, si può valutare la grandezza del dominio

$$\Delta_{\rho_0 R} = T_{\chi(r)}^{-1} \Delta'_{\rho_0 R}$$

dove ' indica il dominio nelle coordinate normali.

Notiamo che per definizione  $\Delta'_{\rho_0 R}$  è un disco multidimensionale e, dato che l'operatore di Lie è ben definito su tutto il dominio e vale la 4.3, la regione  $\Delta_{\rho_0 R}$  sarà prossima ad

un disco multidimensionale [3]. Infatti,

$$T_{\chi^{(\tilde{r})}}^{-1} \Delta'_{\rho_0 R} = T_{\chi^{(\tilde{r})}}^{-1} \left( \frac{x_j'^2 + y_j'^2}{2} \right) = \frac{x_j^2 + y_j^2}{2}$$

Dunque, il raggio  $\rho$  nelle coordinate polari avrà la forma

$$\rho = \sqrt{(\rho_0^2 - 2|I_j - I_j'|)} \quad (4.16)$$

ove  $I_j$  è l'azione in coordinate polari; mentre  $I_j'$  e  $\rho_0$  sono espressi in coordinate normali.

Ricordando che  $I_j = \frac{(x_j^2 + y_j^2)}{2}$ ,  $I_j' = \frac{(x_j'^2 + y_j'^2)}{2}$ , sappiamo dalla 4.3 che

$$I_j(x, y)|_{x=T_{\chi}^{-1}(x', y')} = (T_{\chi}^{-1} I_j)(x', y').$$

In più, il termine di destra della precedente equazione si può espandere in serie con al primo termine proprio l'azione  $I_j'$ .

Quindi ricordando la 4.11,

$$|I_j - I_j'|_{\rho_0 R} \leq \|I_j - I_j'\|_{\rho_0 R} = \rho_0^3 \|\Phi_j^{(3)}\|_R + \dots + \rho_0^{\tilde{r}} \|\Phi_j^{(\tilde{r})}\|_R < 2 \|\Phi_j^{(3)}\|_{\rho_0 R}.$$

Ancora una volta grazie alla Proposizione 2 e seguendo lo stesso procedimento della 4.10, l'ultima disuguaglianza è verificata con  $\rho_0 \leq \frac{R^*}{2}$ . In più dati gli operatori  $E_k$  e il valore precedente di  $\rho_0$  si è trovato in [3] che

$$|I_1 - I_1'|_{\rho_0 R} \simeq 5.032 \cdot 10^{-5} < 0.110 I_1'$$

e

$$|I_2 - I_2'|_{\rho_0 R} \simeq 1.834 \cdot 10^{-4} < 0.217 I_2'.$$

Dalla 4.16, concludiamo che il minimo dominio di stabilità si ha per

$$\rho = \sqrt{(\rho_0^2 - 2|I_2 - I_2'|)} \simeq 2.192 \cdot 10^{-2}.$$

Dato inoltre  $\rho_{Jup} = 1.718342 \cdot 10^{-1}$  ( la distanza L4-Giove ), osserviamo che il dominio di stabilità è circa 0.127 volte la distanza  $\rho_{Jup}$ .

### 4.5.3 Confronto con gli asteroidi esistenti

Riportiamo da [3], il confronto dei risultati ottenuti analiticamente con gli asteroidi classificati nel catalogo degli asteroidi del 14/12/94, J.D.=2440700.5. A questo punto si adattano i raggi  $R_j$  per il calcolo della norma 4.12 rispetto al dato iniziale di ogni asteroide, ponendo  $R_j = \sqrt{(x_j^2 + y_j^2)}$   $j = 1, 2$ .

Il confronto sviluppato è riportato in tabella (Figura 4.2 e Figura 4.3). Notiamo, dalla definizione del dominio, che un determinato asteroide appartiene alla regione di stabilità sse  $\rho_0 \geq 1$ . Dunque, solo quattro asteroidi stanno nel dominio stimato; mentre la gran parte di essi si trova al di fuori da esso. Il risultato ottenuto è, in ultima istanza, insoddisfacente e va migliorato.

88181612	$3.130230 \cdot 10^{-2}$	$2.101250 \cdot 10^{-3}$	1.487790	33	4348	$1.265200 \cdot 10^{-1}$	$7.450120 \cdot 10^{-2}$	$2.977800 \cdot 10^{-1}$	34
89211605	$3.314960 \cdot 10^{-2}$	$1.959370 \cdot 10^{-2}$	1.135130	34	4827	$5.760190 \cdot 10^{-2}$	$1.213100 \cdot 10^{-1}$	$2.868400 \cdot 10^{-1}$	34
41790004	$1.651660 \cdot 10^{-2}$	$3.106310 \cdot 10^{-2}$	1.100990	34	4722	$1.354100 \cdot 10^{-1}$	$8.204770 \cdot 10^{-2}$	$2.755600 \cdot 10^{-1}$	34
1870	$3.871410 \cdot 10^{-2}$	$1.717610 \cdot 10^{-2}$	1.048060	33	1173	$1.600900 \cdot 10^{-1}$	$4.983620 \cdot 10^{-2}$	$2.721800 \cdot 10^{-1}$	32
2357	$4.234620 \cdot 10^{-2}$	$2.850950 \cdot 10^{-2}$	$8.470200 \cdot 10^{-1}$	34	10240002	$8.412220 \cdot 10^{-2}$	$1.368200 \cdot 10^{-1}$	$2.434500 \cdot 10^{-1}$	34
5257	$3.183610 \cdot 10^{-2}$	$4.242410 \cdot 10^{-2}$	$7.504500 \cdot 10^{-1}$	34	2594	$9.109540 \cdot 10^{-2}$	$1.393500 \cdot 10^{-1}$	$2.360100 \cdot 10^{-1}$	34
88181912	$7.083260 \cdot 10^{-2}$	$6.687100 \cdot 10^{-3}$	$6.597200 \cdot 10^{-1}$	33	4829	$6.679660 \cdot 10^{-2}$	$1.486500 \cdot 10^{-1}$	$2.358500 \cdot 10^{-1}$	34
5233	$4.163300 \cdot 10^{-2}$	$4.662950 \cdot 10^{-2}$	$6.495000 \cdot 10^{-1}$	34	88180812	$1.671900 \cdot 10^{-1}$	$9.927530 \cdot 10^{-2}$	$2.247200 \cdot 10^{-1}$	34
4708	$7.099190 \cdot 10^{-2}$	$1.894850 \cdot 10^{-2}$	$6.275300 \cdot 10^{-1}$	32	4754	$4.806640 \cdot 10^{-2}$	$1.677300 \cdot 10^{-1}$	$2.157600 \cdot 10^{-1}$	34
88181311	$3.914500 \cdot 10^{-2}$	$5.262120 \cdot 10^{-2}$	$6.063800 \cdot 10^{-1}$	34	4707	$1.470000 \cdot 10^{-1}$	$1.294500 \cdot 10^{-1}$	$2.138800 \cdot 10^{-1}$	34
1871	$5.121390 \cdot 10^{-2}$	$4.691570 \cdot 10^{-2}$	$6.000700 \cdot 10^{-1}$	34	43170004	$1.345900 \cdot 10^{-1}$	$1.403400 \cdot 10^{-1}$	$2.106900 \cdot 10^{-1}$	34
31080004	$7.002890 \cdot 10^{-2}$	$2.745100 \cdot 10^{-2}$	$5.956600 \cdot 10^{-1}$	32	89210305	$1.881300 \cdot 10^{-1}$	$1.057300 \cdot 10^{-1}$	$2.032200 \cdot 10^{-1}$	34
94031908	$1.443780 \cdot 10^{-2}$	$6.123500 \cdot 10^{-2}$	$5.928600 \cdot 10^{-1}$	34	88182012	$1.910400 \cdot 10^{-1}$	$1.094400 \cdot 10^{-1}$	$1.989500 \cdot 10^{-1}$	34
2674	$6.527500 \cdot 10^{-2}$	$3.592170 \cdot 10^{-2}$	$5.894200 \cdot 10^{-1}$	34	4805	$1.221800 \cdot 10^{-1}$	$1.606700 \cdot 10^{-1}$	$1.974600 \cdot 10^{-1}$	34
88180412	$7.829610 \cdot 10^{-2}$	$1.451120 \cdot 10^{-2}$	$5.876200 \cdot 10^{-1}$	32	5511	$1.328100 \cdot 10^{-1}$	$1.631800 \cdot 10^{-1}$	$1.908600 \cdot 10^{-1}$	34
88180710	$5.420360 \cdot 10^{-2}$	$5.338740 \cdot 10^{-2}$	$5.425600 \cdot 10^{-1}$	34	89211505	$1.139400 \cdot 10^{-1}$	$1.739200 \cdot 10^{-1}$	$1.890100 \cdot 10^{-1}$	34
88191102	$9.320020 \cdot 10^{-2}$	$1.316370 \cdot 10^{-2}$	$4.979700 \cdot 10^{-1}$	33	20350004	$1.754200 \cdot 10^{-1}$	$1.475100 \cdot 10^{-1}$	$1.838900 \cdot 10^{-1}$	34
88182510	$8.859670 \cdot 10^{-2}$	$3.638490 \cdot 10^{-2}$	$4.658500 \cdot 10^{-1}$	32	884	$1.441100 \cdot 10^{-1}$	$1.686700 \cdot 10^{-1}$	$1.820300 \cdot 10^{-1}$	34
2207	$1.747150 \cdot 10^{-2}$	$8.093470 \cdot 10^{-2}$	$4.487900 \cdot 10^{-1}$	34	2893	$1.219200 \cdot 10^{-1}$	$1.871300 \cdot 10^{-1}$	$1.758800 \cdot 10^{-1}$	34
89201902	$7.247770 \cdot 10^{-2}$	$6.844550 \cdot 10^{-2}$	$4.163900 \cdot 10^{-1}$	34	1872	$8.983270 \cdot 10^{-2}$	$2.039900 \cdot 10^{-1}$	$1.723100 \cdot 10^{-1}$	34
94031500	$4.552550 \cdot 10^{-2}$	$8.358320 \cdot 10^{-2}$	$4.075300 \cdot 10^{-1}$	34	90202212	$2.078400 \cdot 10^{-1}$	$6.032100 \cdot 10^{-1}$	$5.963150 \cdot 10^{-2}$	34
89212405	$3.008840 \cdot 10^{-2}$	$8.992360 \cdot 10^{-2}$	$4.005000 \cdot 10^{-1}$	34	2895	$1.843700 \cdot 10^{-1}$	$6.294600 \cdot 10^{-1}$	$5.746530 \cdot 10^{-2}$	34
89211705	$6.369570 \cdot 10^{-2}$	$8.261660 \cdot 10^{-2}$	$3.826400 \cdot 10^{-1}$	34	5120	$2.533600 \cdot 10^{-1}$	$6.210100 \cdot 10^{-1}$	$5.713580 \cdot 10^{-2}$	34
5907	$9.759570 \cdot 10^{-2}$	$6.062860 \cdot 10^{-2}$	$3.790100 \cdot 10^{-1}$	34	3451	$2.285800 \cdot 10^{-1}$	$6.288900 \cdot 10^{-1}$	$5.705220 \cdot 10^{-2}$	34
88181411	$9.442780 \cdot 10^{-2}$	$6.523500 \cdot 10^{-2}$	$3.757900 \cdot 10^{-1}$	34	4791	$1.298900 \cdot 10^{-1}$	$6.811600 \cdot 10^{-1}$	$5.332690 \cdot 10^{-2}$	34
4792	$1.091900 \cdot 10^{-1}$	$5.448570 \cdot 10^{-2}$	$3.617700 \cdot 10^{-1}$	34	4709	$1.737100 \cdot 10^{-1}$	$6.851900 \cdot 10^{-1}$	$5.294080 \cdot 10^{-2}$	34
88180811	$1.160100 \cdot 10^{-1}$	$5.001570 \cdot 10^{-2}$	$3.519900 \cdot 10^{-1}$	33	3317	$3.085000 \cdot 10^{-1}$	$7.051000 \cdot 10^{-1}$	$4.989590 \cdot 10^{-2}$	34
3240	$1.362500 \cdot 10^{-1}$	$2.751300 \cdot 10^{-2}$	$3.359200 \cdot 10^{-1}$	32	4867	$2.331200 \cdot 10^{-1}$	$7.362600 \cdot 10^{-1}$	$4.901550 \cdot 10^{-2}$	34
5638	$1.079900 \cdot 10^{-1}$	$8.124580 \cdot 10^{-2}$	$3.162000 \cdot 10^{-1}$	34	1867	$2.169200 \cdot 10^{-1}$	$7.582500 \cdot 10^{-1}$	$4.773260 \cdot 10^{-2}$	34
43690004	$1.018300 \cdot 10^{-1}$	$9.101430 \cdot 10^{-2}$	$3.061600 \cdot 10^{-1}$	34	88172500	$2.429700 \cdot 10^{-1}$	$9.020800 \cdot 10^{-1}$	$4.017310 \cdot 10^{-2}$	34
31630002	$1.430300 \cdot 10^{-1}$	$4.449490 \cdot 10^{-2}$	$3.046700 \cdot 10^{-1}$	32	1208	$3.619200 \cdot 10^{-1}$	$9.975700 \cdot 10^{-1}$	$3.597040 \cdot 10^{-2}$	34
					2363	$2.937300 \cdot 10^{-1}$	$1.012520$	$3.573360 \cdot 10^{-2}$	34

Figura 4.2: Tabella riassuntiva dei risultati analitici ottenuti(1). Nella prima colonna si trova il numero dell'asteroide; nella seconda e nella terza rispettivamente i valori di  $R_1$  e  $R_2$ ; nella terza il valore di  $\rho_0$ ; mentre nell'ultima l'ordine ottimale dell'espansione in serie

88181213	$1.130100 \cdot 10^{-1}$	$2.026600 \cdot 10^{-1}$	$1.673900 \cdot 10^{-1}$	34
51910004	$1.823100 \cdot 10^{-1}$	$1.740300 \cdot 10^{-1}$	$1.644500 \cdot 10^{-1}$	34
4828	$5.293490 \cdot 10^{-2}$	$2.216600 \cdot 10^{-1}$	$1.637500 \cdot 10^{-1}$	34
5130	$5.491180 \cdot 10^{-2}$	$2.227200 \cdot 10^{-1}$	$1.629200 \cdot 10^{-1}$	34
5476	$9.824540 \cdot 10^{-2}$	$2.389300 \cdot 10^{-1}$	$1.483600 \cdot 10^{-1}$	34
88181410	$7.307780 \cdot 10^{-2}$	$2.659600 \cdot 10^{-1}$	$1.362000 \cdot 10^{-1}$	34
88191602	$2.174600 \cdot 10^{-1}$	$2.189900 \cdot 10^{-1}$	$1.333500 \cdot 10^{-1}$	34
2223	$7.393250 \cdot 10^{-2}$	$2.835900 \cdot 10^{-1}$	$1.278500 \cdot 10^{-1}$	34
40350004	$5.551710 \cdot 10^{-2}$	$2.853600 \cdot 10^{-1}$	$1.272900 \cdot 10^{-1}$	34
88180813	$1.353000 \cdot 10^{-1}$	$2.759800 \cdot 10^{-1}$	$1.255000 \cdot 10^{-1}$	34
2241	$6.331600 \cdot 10^{-2}$	$2.929700 \cdot 10^{-1}$	$1.239700 \cdot 10^{-1}$	34
6002	$1.724500 \cdot 10^{-1}$	$2.683600 \cdot 10^{-1}$	$1.230000 \cdot 10^{-1}$	34
88192301	$8.331460 \cdot 10^{-2}$	$2.981600 \cdot 10^{-1}$	$1.214500 \cdot 10^{-1}$	34
3708	$2.174100 \cdot 10^{-1}$	$2.654700 \cdot 10^{-1}$	$1.171100 \cdot 10^{-1}$	34
88190103	$1.383900 \cdot 10^{-1}$	$3.006200 \cdot 10^{-1}$	$1.162400 \cdot 10^{-1}$	34
88181810	$1.248200 \cdot 10^{-1}$	$3.104200 \cdot 10^{-1}$	$1.144900 \cdot 10^{-1}$	34
87171400	$1.661600 \cdot 10^{-1}$	$3.084000 \cdot 10^{-1}$	$1.106500 \cdot 10^{-1}$	34
88191003	$1.184300 \cdot 10^{-1}$	$3.296100 \cdot 10^{-1}$	$1.089100 \cdot 10^{-1}$	34
5119	$1.935700 \cdot 10^{-1}$	$3.044200 \cdot 10^{-1}$	$1.086700 \cdot 10^{-1}$	34
88180512	$2.171600 \cdot 10^{-1}$	$2.968600 \cdot 10^{-1}$	$1.079300 \cdot 10^{-1}$	34
88190703	$1.325300 \cdot 10^{-1}$	$3.294100 \cdot 10^{-1}$	$1.078800 \cdot 10^{-1}$	34
1172	$1.178100 \cdot 10^{-1}$	$3.436400 \cdot 10^{-1}$	$1.046900 \cdot 10^{-1}$	34
31040004	$1.007800 \cdot 10^{-1}$	$3.769800 \cdot 10^{-1}$	$9.614220 \cdot 10^{-2}$	34
4715	$1.572100 \cdot 10^{-1}$	$3.739900 \cdot 10^{-1}$	$9.453910 \cdot 10^{-2}$	34
4832	$2.347900 \cdot 10^{-1}$	$3.473200 \cdot 10^{-1}$	$9.399910 \cdot 10^{-2}$	34
90221206	$2.372900 \cdot 10^{-1}$	$4.004800 \cdot 10^{-1}$	$8.377690 \cdot 10^{-2}$	34
1873	$6.303730 \cdot 10^{-2}$	$4.416100 \cdot 10^{-1}$	$8.205510 \cdot 10^{-2}$	34
88180701	$2.256900 \cdot 10^{-1}$	$4.698200 \cdot 10^{-1}$	$7.394110 \cdot 10^{-2}$	34
41010004	$1.736500 \cdot 10^{-1}$	$4.898900 \cdot 10^{-1}$	$7.333020 \cdot 10^{-2}$	34
617	$2.613400 \cdot 10^{-1}$	$4.619700 \cdot 10^{-1}$	$7.324830 \cdot 10^{-2}$	34
88181510	$1.879700 \cdot 10^{-1}$	$5.021700 \cdot 10^{-1}$	$7.132770 \cdot 10^{-2}$	34
88182511	$2.228500 \cdot 10^{-1}$	$5.151500 \cdot 10^{-1}$	$6.839150 \cdot 10^{-2}$	34

Figura 4.3: Tabella riassuntiva dei risultati analitici ottenuti(2).

## Capitolo 5

# Sviluppi recenti

Fino a questo punto, abbiamo affrontato il problema di stabilità facendo riferimento ad articoli precedenti al 2000. In questo capitolo senza alcuna pretesa di completezza formale, vogliamo esporre alcuni risultati più moderni riportati in [4].

Nel dettaglio, illustriamo delle stime numeriche per la descrizione delle orbite dei suddetti asteroidi.

Osserviamo preliminarmente che nel sistema di riferimento sinodico corotante con i primari, l'energia e il momento angolare totali non sono delle costanti del moto, in quanto i termini dipendenti dalla velocità nella forza di Coriolis non sono contenuti nell'hamiltoniana del sistema.

Tuttavia attraverso una semplice manipolazione delle equazioni del moto, si può trovare l'unico integrale primo del problema  $C_J$ , detto *integrale di Jacobi*.

Esplicitamente,  $C_J = 2U - v_2^2$  ove  $v_2$  è la velocità dell'asteroide.

Dato che  $v_2^2 \geq 0$ , le orbite descritte dalle equazioni del moto, di cui sopra, saranno sempre vincolate a rimanere al di fuori alla "superficie di velocità zero"  $C_{J_0} := 2U$  con velocità  $v_2^2 = 0$ . Quindi, si è trovata una preliminare limitazione nello spazio delle configurazioni delle orbite.

In secondo luogo dal calcolo degli autovalori  $\lambda_i$ , ( $i = 1, \dots, 4$ ) del sistema linearizzato, si ha che, per il parametro di massa  $\mu$  piccolo,  $\lambda_{1,2} := \pm i \sqrt{\frac{27}{4}} \mu = \pm i \omega_s \propto \mu$ ; mentre  $\lambda_{3,4} := \pm i(1 - \frac{27}{8} \mu) = \pm i \omega_f \sim \pm i$  ove "f" sta per "fast" e "s" sta per "sinodico".

Dalle approssimazioni ottenute piccolo degli autovalori  $\lambda_i$  per  $\mu$ , notiamo che  $\omega_f \sim 1$  è la frequenza dell'angolo veloce; mentre  $\omega_s \propto \mu$  identifica l'angolo lento.

Dunque, il moto dell'asteroide si può descrivere come due oscillatori armonici disaccoppiati con frequenze diverse: il primo con frequenza  $\omega_s$  (lenta) individua il moto di un punto ( il "centro di guida" ) attorno a L4; invece il secondo, identificato da  $\omega_f$  (veloce), rappresenta l'oscillazione dell'asteroide attorno al "centro di guida".

Per una comprensione più immediata di quanto detto finora, facciamo riferimento alle figure 5.1.

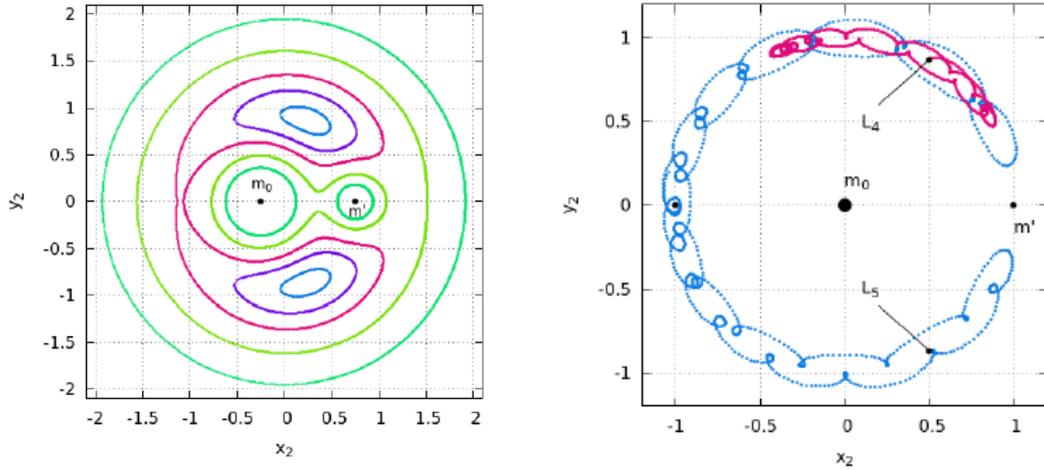
(a) "curve di velocità zero" al variare di  $C_J$ .(b) Moto di un asteroide nei pressi di  $L_4$ .

Figura 5.1: In Fig.(a) sono rappresentate le "curve di velocità zero" per  $\mu = 0.25$ : con  $C_{J_i} = 2.85$  troviamo nell'orbita più vicina a  $L_4$ ; mentre quella più esterna è identificata da  $C_{J_e} = 4.80$ . Osserviamo che per  $C_J$  "piccolo" ("curve di velocità zero" in blu, viola e rosa) le orbite, con velocità non nulla, sono vincolate all'esterno della regione racchiusa dalle curve di velocità zero. Al crescere di  $C_J$  ("curve di velocità zero" in verde e azzurro), si nota la formazione di una regione interna, nei pressi dei primari, e di una esterna che circonda i corpi di massa maggiore. Il moto, per quanto detto, è vincolato ad una delle due regioni non comunicanti.

Fig.(b): esempi di orbite per  $\mu = 0.001$  nel sistema sinodico. L'orbita in blue (orbita "a ferro di cavallo") è relativa alle condizioni iniziali  $(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2) = (-0.97668, 0, 0, -0.06118)$ . In rosa è illustrato un esempio della caratteristica orbita "a larva" con condizioni iniziali  $(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2) = (0.507, 0.87402, 0, 0)$ .

### 5.0.1 Hamiltoniana "mediata" o in forma normale

Avendo ora una buona comprensione del moto di un asteroide vicino a  $L_4$ , nello spirito del "principio della media" vogliamo osservare in che misura si può eliminare l'angolo veloce relativo a  $\omega_f$ , ottenendo così un'hamiltoniana integrabile a un grado di libertà<sup>1</sup>. Più in dettaglio come ampiamente esposto in [4], si applicano diverse manipolazioni algebriche per ottenere un'hamiltoniana indipendente dal tempo e espressa in coordinate simili alle coordinate di Poincarè. Ricordiamo che in queste coordinate,  $\rho$  rappresenta il momento angolare dell'asteroide coniugato all'angolo di rotazione  $\tau$  e che il momento angolare di  $L_4$  è  $\rho_{L_4} = 0$ .

<sup>1</sup>Questo progetto, in realtà, è una vecchia conoscenza. Infatti riaccordandoci con la parte precedente della tesi, si sta trasformando l'hamiltoniana di partenza nella forma normale di Birkhoff.

L'hamiltoniana, quindi, assume la forma

$$H(\rho, \xi, \tau, \eta) = -\frac{1}{2[1 + \rho + \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)]^2} - 1 - \rho - \mu R(\rho, \xi, \tau, \eta)$$

ove  $R$  è una funzione nota delle variabili di Poincaré.

Con evidenza, assumendo che  $\mu, \rho, \Gamma := \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$  siano piccole in un intorno di L4, ritroviamo che  $\dot{\tau} \simeq 0 + \dots$ ,  $\dot{M} = \frac{\partial H}{\partial \Gamma} \simeq 1 + \dots$ .

A questo punto per porre in forma normale  $H$  fino al grado  $R_1 + R_2$ , applichiamo la trasformazione di [4]

$$H^{(R_1, R_2)} = \exp(\mathcal{L}_{\mu^{R_1} \chi_{R_2}^{(R_2)}}) H^{(R_1, R_2-1)} \quad (5.1)$$

e quindi partendo da  $H^{(1,0)}$  troviamo attraverso delle iterazioni successive  $H^{(R_1, R_2)}$ . Dunque, l'hamiltoniana in forma normale sarà

$$H^{(R_1, R_2)} = \mathcal{Z}^{(R_1, R_2)}(\rho, \frac{\eta^2 + \xi^2}{2}, \tau) + \mathcal{R}^{(R_1, R_2)}(\rho, \xi, \tau, \eta)$$

dove  $\mathcal{Z}^{(R_1, R_2)}$  è la parte normale; mentre  $\mathcal{R}^{(R_1, R_2)}$  è il resto.

Infine come visto nella 4.2, ricordiamo che l'operatore  $\exp$  usato nella 5.1 genera un trasformazione canonica alle coordinate normalizzate prossima all'identità (per maggiori dettagli si veda [4]).

### 5.0.2 Superfici di livello numeriche

Dato che le due hamiltoniane  $H$  e  $\mathcal{Z}$  hanno rispettivamente 2 e 1 grado di libertà, si sono confrontate  $H$  e  $\mathcal{Z}$  grazie ad una sezione dei moti con una superficie di livello trasversale alle traiettorie ("*sezione di Poincaré*").

In primis come esposto in [4], si sono individuate le coordinate di un corpo troiano arbitrario (detto "*corpo generatore*") dal catalogo degli asteroidi. Successivamente, si sono trasformate nelle coordinate normali ottenendo il set  $(\rho_{cg}, \xi_{cg}, \tau_{cg}, \eta_{cg})$ . In più ottenuto dal catalogo  $C_{J_{cb}}$  e fissati  $(\rho_{cg}, \eta_{cg})$ , si sono ottenuti i valori di  $(\tau, \xi)$  tale che sia  $C_J = C_{J_{cg}}$ . A questo punto, queste orbite sono state integrate per un breve intervallo di tempo fino a raggiungere la condizione di livello  $\eta = 0$ . Questa condizione è di vitale importanza per poter applicare il confronto tra le due hamiltoniane in questione. Infatti  $\eta = 0$  corrisponde esattamente ad un periodo dell'angolo veloce e, dunque, il ritratto in fase di  $H$ , vincolato a  $\eta = 0$ , rappresenta la dinamica del grado di libertà *sinodico* che è esattamente quello descritto da  $\mathcal{Z}$ . Il confronto grafico è, pertanto, un buon metodo per valutare l'accordo delle due hamiltoniane. Osserviamo per  $\eta = 0$ , la coordinata  $\tau$  diventa la distanza angolare tra la direttrice dei primari e il pericentro dell'ellisse del corpo troiano; mentre le altre coordinate rimangono invariate.

Per calcolare la superficie di livello (vedi [4]) di  $H$  fissati  $\eta = 0$  e  $\mu$  (dato dal problema), si calcola l'energia  $H_{L4}$  di L4, ricordando che  $\tau = \pi/3, \rho = \eta = \xi = 0$ . Ora posta la condizione di livello  $\eta = 0$ , si variano  $\tau, \xi$  per trovare tutti i punti, nell'intorno di L4,

tali che  $H = H_{L4}$ . Osserviamo, inoltre, che in queste coordinate  $H$  è integrale del moto. In seguito espressa  $H$  nelle vecchie coordinate baricentriche, si integrano le sue equazioni di Hamilton con integratore Runge-Kutta, in un tempo pari a 500 periodi dei primari ( $6 \cdot 10^3$  anni). Infine durante questa integrazione, si selezionano solo i punti contenuti nella superficie di livello con  $\eta = 0$ .

Per quanto riguarda la superficie numerica di  $\mathcal{Z}$  riportiamo il seguente metodo analitico approfondito in [4].

Considerato il set delle condizioni iniziali in forma normale  $(\rho_{cg}^{(3,5)}, \xi_{cg}^{(3,5)}, \tau_{cg}^{(3,5)}, \eta_{cg}^{(3,5)})$ , si sono ottenute le equazioni di hamilton<sup>2</sup> derivate dall'hamiltoniana normalizzata fino all'ordine  $R_1 = 3, R_2 = 5$ :

$$\dot{\rho} = -\frac{\partial \mathcal{Z}^{(3,5)}}{\partial \tau}, \quad \dot{\tau} = -\frac{\partial \mathcal{Z}^{(3,5)}}{\partial \rho}.$$

Dunque integrando le equazioni precedenti fino ad ottenere 2000 punti, è stato possibile determinare le orbite dell'hamiltoniana normalizzata. In particolare, queste ultime giacciono sulle curve di livello date dalle condizioni iniziali normalizzate corrispondenti a  $\frac{\eta^{(3,5)} + \xi^{(3,5)}}{2} =: C$ . Imponendo ora il vincolo  $\eta = 0$ , si ridefinisce  $\xi^{(3,5)} = \sqrt{2C}$ . Infine riportando le orbite nelle coordinate iniziali  $(\rho, \xi, \tau, \eta)$  grazie alla trasformazione canonica derivata dalla 5.1, è stato possibile applicare il confronto tra le due hamiltoniane che descrivono il problema.

---

<sup>2</sup>Abbiamo rimosso l'apice per semplicità di notazione

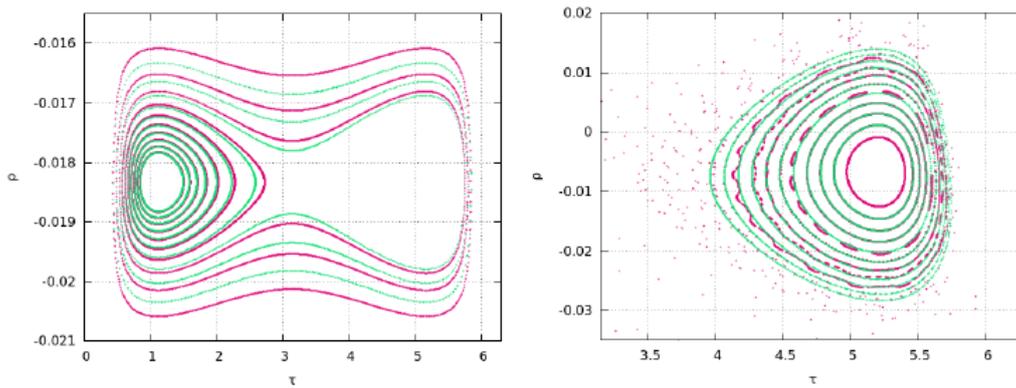


Figura 5.2: Confronti tra le curve di livello prodotto dall'hamiltoniana mediata  $Z^{(3,5)}$  (in azzurro) di quella completa  $H$  (in rosa) per il problema Sole-Terra (a sinistra) e Sole-Giove nei pressi di  $L_5$  (a destra). Nel caso Sole-Terra ( $\mu = 0.3 \cdot 10^{-5}$ ), il "corpo generatore" è l'asteroide terrestre 2010  $TK_7$  con ( $\rho_{cg} = -1.840144710^{-2}$ ,  $\xi_{cg} = -0.1530054$ ,  $\tau_{cg} = 3.5736334$ ,  $\eta_{cg} = -0.1152511$ ); invece per Sole-Giove ( $\mu = 0.95 \cdot 10^{-3}$ ) il "corpo generatore" è l'asteroide troiano 1872 Helenos con ( $\rho_{cg} = -0.383673510^{-2}$ ,  $\xi_{cg} = -0.1104177$ ,  $\tau_{cg} = 5.6716748$ ,  $\eta_{cg} = -0.0154226$ ). Le immagini palesano il fatto che minore è il valore del parametro di massa  $\mu$  maggiore sarà l'accordo delle due hamiltoniane. Inoltre osservando che nei due problemi  $\rho$  non è centrato in zero, troviamo che nel caso Sole-Terra si riescono a descrivere le orbite "a larva" e "a ferro di cavallo"; invece, nel caso Sole-Giove ritroviamo le librazioni (orbite rosa) della figura 5.1.

## Capitolo 6

# Conclusioni

In questo lavoro di tesi abbiamo analizzato il problema della stabilità di L4/L5 nel "*problema ristretto a tre corpi circolare piano*". In particolare, nel Capitolo 2 abbiamo presentato, con riferimento a [3], il contesto teorico del problema esprimendo l'hamiltoniana 3.1 nel un sistema di coordinate adattato al problema  $(x, y, p_x, p_y)$ . In seguito determinati gli autovalori della linearizzata 3.4, abbiamo osservato che l'equilibrio presentava una duplice natura a seconda del valore del parametro di massa  $\mu$ . Infatti, si trova che, definito

$$\mu_R = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{23}{27}} \right) \simeq 0.0385 \quad (\text{"limite di Routh"}) :$$

- se  $\mu \leq \mu_R$ ,  $(1 - \mu) \leq \mu_R$  allora l'equilibrio è "ellittico";
- altrimenti è "iperbolico".

Tuttavia se la natura "iperbolica" è sufficiente per definire l'instabilità del sistema completo, il fatto che l'equilibrio sia "ellittico", per la 3.4, non si può estendere all'hamiltoniana  $H$  comprendente i termini di ordine superiore. In dettaglio, osserviamo che la 3.5 non presenta un minimo stretto nell'origine (L4). Dunque, non si può concludere che l'aggiunta di termini di ordine maggiore non infici la stabilità del punto per l'hamiltoniana completa. Nel Capitolo 3, abbiamo illustrato alcuni passi successivi per ottenere delle stime di stabilità per un tempo dell'ordine dell'età dell'universo ( $14 \cdot 10^9$  anni). Citando sia [3] che [1], si è trasformata l'hamiltoniana di partenza  $H$  nella "*forma normale di Birkhoff*"  $H^{(r)} = H_2 + \dots + Z_r + \mathcal{R}^{(r+1)}$  in modo da ottenere che per la parte hamiltoniana di ordine (strettamente) inferiore a  $r + 1$  le azioni fossero esattamente integrali del moto. Dunque notato che le azioni sono mosse solo dalla parte del resto  $\mathcal{R}^{(r+1)}$  nello spirito della stabilità secondo Lyapunov, si è determinato il minimo "*tempo di fuga*" di un'orbita nell'intorno di L4:

$$T(\rho_0) := \max_{3 \leq r \leq \bar{r}} \sup_{\rho_0 > \rho} \tau_r(\rho_0, \rho)$$

ove  $\rho_0$  è il raggio del dominio iniziale.

Ottenuto nelle coordinate "fisiche" il dominio di stabilità con  $T(\rho) = 14 \cdot 10^9$ , si è adattato il metodo analitico sviluppato per un confronto diretto con la regione di stabilità

---

dei troiani determinata sperimentalmente dal catalogo degli asteroidi rilevati il 14/12/94, J.D.=2440700.5.

Notiamo che solo 4 asteroidi del catalogo rientrano pienamente nella regione di stabilità trovata. Gli altri sono solo empiricamente stabili, in quanto la regione di stabilità determinata analiticamente non li comprende. Il risultato di stabilità, dunque, non è ottimale e va perfezionato.

Infine nel Capitolo 4, abbiamo illustrato alcuni sviluppi più recenti (2015) per lo studio delle orbite in prossimità di L4 (vedi [4]). Nel dettaglio, si sono passati in rassegna alcuni risultati per ottenere un'analisi numerica delle traiettorie seguite da un asteroide troiano. I metodi analitici utilizzati comprendono l'individuazione della "*supercifre di velocità zero*"; la scomposizione del moto in due oscillatori armonici con frequenze  $\omega_s$  (lenta) e  $\omega_f$  (veloce) e il confronto grafico tra l'hamiltoniana mediata  $\mathcal{Z}^{(R_1, R_2)}$  e quella completa  $H$  per un tempo di integrazione pari a 500 periodi dei primari ( $6 \cdot 10^3$  anni). L'ultimo confronto analitico è stato applicato al problema Sole-Giove e Sole-Terra, partendo dalle condizioni iniziali dettate, rispettivamente, dagli asteroidi troiani  $TK_7$  e 1872 Helenos. In più grazie alla già citata integrazione delle equazioni del moto, abbiamo ottenuto la dinamica  $TK_7$  e 1872 Helenos in prossimità di L4-L5 dei corrispondenti problemi.

## Appendice A

# Triangolo risolutivo della trasformata di Lie

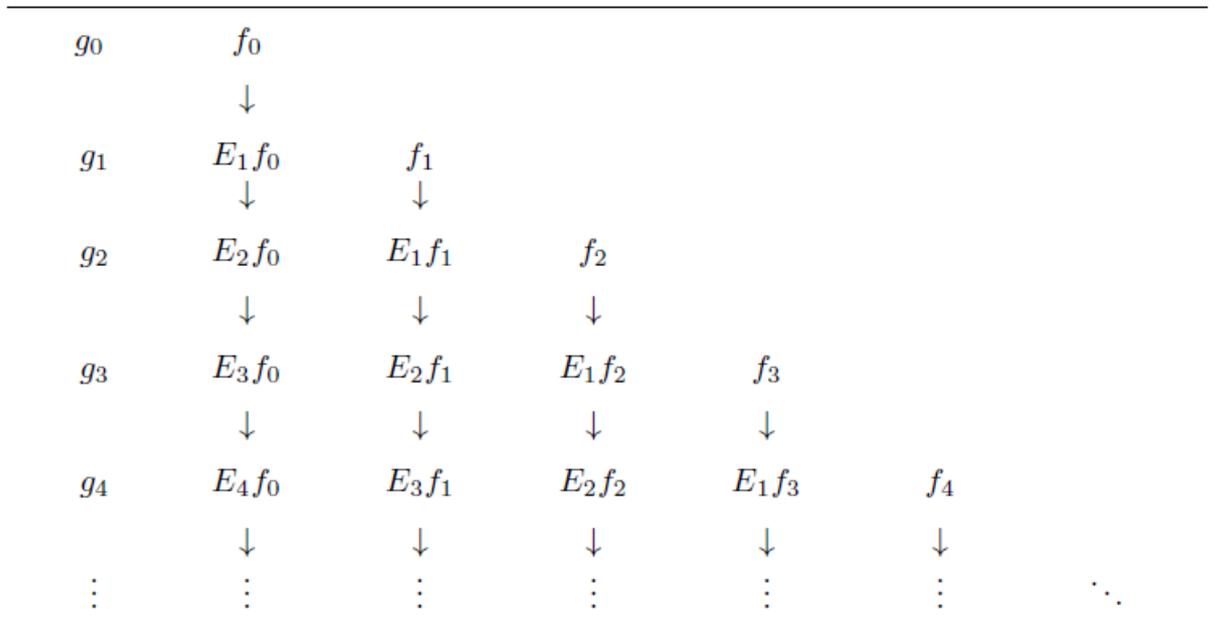


Figura A.1: Schema del processo risolutivo del sistema  $g = T_\chi f$ .

In dettaglio,  $f$ ,  $g$  sono funzioni reali e il loro ordine  $k$ -esimo è identificato da  $f_k$ ,  $g_k$ . In più, osserviamo che nelle "righe" si sono allineati i termini con dello stesso ordine; mentre in "colonna" si trovano i termini generati da  $T_\chi f_k$ . Pertanto, la risoluzione del sistema di equazioni  $g_k = T_\chi f_k$  avviene dalla prima riga, dalla quale si ricavano i termini  $k-1$ -esimi, per poi procedere verso il basso.

## Appendice B

# Limitatezza delle funzioni in forma normale

In questa parte, riportiamo un importante risultato per una particolare forma dell'hamiltoniana iniziale  $H$ .

Infatti se la suddetta hamiltoniana è limitata, si riesce a dare una stima della grandezza del "resto" nel dominio di convergenza di  $H$  (vedi [1]):

**Proposizione 2.** *Sia  $H = \sum_{k \geq 2} H_k$  un'hamiltoniana con  $n$  gradi di libertà e  $H_2$  dipendente dalle sole azioni  $I_j$ ,  $j = 1, 2$ . Si supponga, inoltre, che  $\|H_k\| \leq c^{k-2}d$ ,  $k \geq 3$ . Dato il modulo  $\mathcal{M}$  contenente il modulo di risonanza  $\mathcal{M}_\omega$  di  $H_2$ , e assumiamo che le frequenze  $\omega_j$ ,  $j = 1, 2$  di  $H_2$  rispettino la "condizione diofantea", ossia siano tali che*

$$|k \cdot \omega_j| \geq \alpha_r > 0, \quad j = 1, 2$$

dove  $\alpha_r > 0$  e per ogni  $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathcal{M}$  e  $|k| \leq r$  per un fissato intero positivo  $r$ .

Si consideri, in più, l'hamiltoniana trasformata  $Z_r + \mathcal{R}^{(r)} = T_{\chi^{(r)}}^{-1}H$  in forma normale fino all'ordine  $r$  e convergente in ogni disco multidimensionale  $D_R$  di raggio  $R < R_r^*$  con

$$R_r^* := \left[ \left(9 + \frac{32}{5}r\right) \frac{d}{\alpha_r} + \left(1 + \frac{32}{5}r\right) \right]^{-1} c^{-1}.$$

Dunque, per  $s > r$ ,

$$\|\mathcal{R}_s^{(r)}\| \leq \left(\frac{d}{c}\right) (R_r^*)^{1-s},$$

e quindi il "resto" complessivo  $\mathcal{R}^{(r)}$  ristretto a  $D_R$  si ha che

$$|\mathcal{R}^{(r)}| < \frac{d}{c} \left(\frac{R}{R_r^*}\right)^r R \left(\frac{R}{R_r^*}\right)^{-1}.$$

# Bibliografia

- [1] Fontich Galgani Simò Giorgilli, Delshams. Eff. stability for a hamiltonian system near an elliptic equilibrium point, with an application to the rtbp. *J. Of Differential Equations*, 1989.
- [2] Galgani Giorgilli. Formal integral for an autonomous hamiltonian system near an equilibrium point. *Cel. Mechanics*, 1977.
- [3] Skokos C. Giorgilli A. On the stability of the troian asteroids. *Astron. and astrophysics*, 1997.
- [4] Rocío Isabel Páez. New normal form approaches adapted to the trojan problem (2015).