



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

**FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE**

**CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA DELL'AUTOMAZIONE**

**TESI DI LAUREA**

**CONTROLLO CENTRALIZZATO E DECENTRALIZZATO**

Candidato:  
Luca Moscatelli

Relatore:  
Mauro Bisiacco

*a.a. 2009/2010*

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Controllo Centralizzato</b>	<b>3</b>
2.1	Reazione statica . . . . .	3
2.2	Reazione dinamica . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Controllo Decentralizzato</b>	<b>10</b>
3.1	Reazione decentralizzata statica dalle uscite . . . . .	11
3.2	Reazione decentralizzata dinamica dall'uscita . . . . .	14
3.3	Conclusioni . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Ipotesi sul sistema</b>	<b>18</b>
4.1	Sistemi fortemente connessi . . . . .	18
4.2	Sistema interconnesso . . . . .	19
4.2.1	Reazione decentralizzata dall'uscita per sistemi interconnessi	22
4.2.2	Reazione decentralizzata dallo stato per sistemi interconnessi	26

# 1 Introduzione

L'elaborato vuole studiare innanzitutto le condizioni d'esistenza di un controllore decentralizzato e successivamente cercarne di capire le prestazioni, i vantaggi e gli svantaggi. Per farlo si metterà a confronto il controllo decentralizzato con il più classico controllo centralizzato.

In sistemi di grandi dimensioni adottare una tecnica di controllo che preveda un'unica struttura centrale può risultare molto onerosa in quanto si ha la necessità di dover convogliare tutte le informazioni di cui si ha bisogno in un unico punto ed il controllore non risulterà certo di facile progettazione.

Può essere perciò conveniente, cercare di suddividere l'intero sistema da controllare in vari sottosistemi e quindi attribuire il compito di regolare il sistema ad un certo numero di strutture più semplici, a ciascuna delle quali venga chiesto di svolgere una funzione di controllo limitata ad un unico sottosistema. Altra situazione in cui si può prevedere l'uso del controllo decentralizzato può derivare dalla struttura del sistema, nel quale siano già identificabili sottosistemi fra loro collegati e ciascuno dotato di un controllore locale. È necessario che in fase di progetto, l'azione di questi controllori sia coordinata in modo tale da ottenere prestazioni globali soddisfacenti.

Questo tipo di controllo non può quindi essere applicato ad un qualsiasi sistema, ma a sistemi nei quali siano identificabili sottosistemi fra loro collegati e ciascuno dotato di un controllore locale. E' comunque chiaro che le prestazioni di un controllo decentralizzato non potranno mai risultare superiori a quelle di un controllo centralizzato.

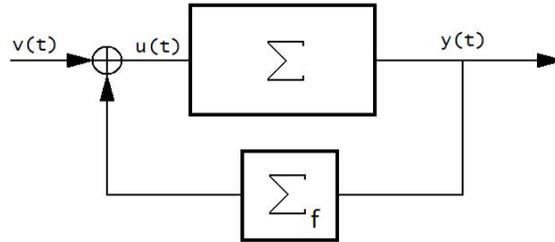


Figura 1: Sistema retroazionato centralizzato

## 2 Controllo Centralizzato

In questo paragrafo si vogliono studiare le opportunità di controllo fornite da una classe di leggi di controllo dall'uscita del sistema vincolato alla particolare struttura di  $\Sigma_f$ . In particolare faremo riferimento ad un sistema dinamico e ad un elemento statico sulla struttura dei quali non si impone alcun vincolo.

Il sistema a cui si farà riferimento è un sistema  $\Sigma = (F, G, H)$  MIMO, lineare tempo invariante, con  $m$  ingressi e  $p$  uscite.

### 2.1 Reazione statica

Consideriamo il sistema di figura (2), in cui si pone sulla catena di reazione dall'uscita del sistema  $\Sigma$ , un elemento di tipo statico. Assumiamo quindi la legge di controllo

$$u(t) = Ky(t) + v(t) \quad (1)$$

con  $K \in \mathbf{R}^{m \times p}$ . Otteniamo così il sistema  $\Sigma_y = (F + GKH, G, H)$ .

Dalla teoria dei sistemi sappiamo che la retroazione statica dall'uscita è un caso speciale della retroazione statica dallo stato. Come tale quindi, il sistema  $\Sigma_y$  è raggiungibile se e solo se è raggiungibile il sistema  $\Sigma^1$ . Inoltre la retroazione dall'uscita conserva anche la proprietà di osservabilità.

Infatti, se:

---

<sup>1</sup>Teorema d'invarianza del sottospazio raggiungibile.

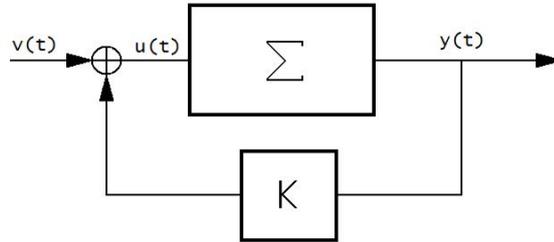


Figura 2: Sistema retroazionato con controllore statico

$$\text{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} zI - (F + GKH) \\ H \end{bmatrix} \quad (2)$$

per ogni  $K$  e per ogni  $z$ , applicando il criterio PBH si verificherebbe che  $\Sigma_y$  è osservabile se e solo se lo è  $\Sigma$ . Dimostriamo quindi l'uguaglianza (2). La matrice PBH di osservabilità del sistema  $\Sigma$  non ha rango pieno se esiste un vettore colonna  $v$  non nullo tale che:

$$\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} v = 0 \quad \begin{cases} (zI - F)v = 0 \\ Hv = 0 \end{cases}$$

Anche per la matrice PBH di osservabilità del sistema retroazionato  $\Sigma_y$  vale lo stesso criterio. Non ha rango pieno se esiste un vettore colonna  $v$  non nullo tale per cui:

$$\begin{bmatrix} zI - (F + GKH) \\ H \end{bmatrix} v = 0 \quad \begin{cases} (zI - F)v - GK(Hv) = (zI - F)v = 0 \\ Hv = 0 \end{cases}$$

Ma allora è evidente osservando i due sistemi che le due matrici hanno sempre lo stesso rango.

**Osservazione 1** *Tramite reazione statica dall'uscita si possono allocare solo gli autovalori relativi al sottosistema raggiungibile e osservabile*

Ciò è dimostrabile, partendo dalla decomposizione canonica del sistema  $\Sigma$

$$(A, B, C) = \left( \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [C_1 \ 0 \ C_3 \ 0] \right) \quad (3)$$

Dalla struttura di (3) si possono individuare i seguenti sottosistemi:

- $(A_{11}, B_1, C_1)$  raggiungibile e osservabile
- $(A_{22}, B_2, 0)$  raggiungibile e non osservabile
- $(A_{33}, 0, C_3)$  non raggiungibile e osservabile
- $(A_{44}, 0, 0)$  non raggiungibile e non osservabile

La matrice del sistema retroazionato è:

$$A + BKC = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1KC_1 & 0 & A_{13} + B_1KC_3 & 0 \\ A_{21} + B_2KC_1 & A_{22} & A_{23} + B_2KC_3 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Dalla struttura della matrice  $(A + BKC)$  si ricava facilmente che, il suo polinomio caratteristico è:

$$\Delta_{A+BKC}(z) = \det(zI - A_{11} - B_1KC_1)\det(zI - A_{22})\det(zI - A_{33})\det(zI - A_{44})$$

Dalle osservazioni fatte precedentemente sappiamo che i sottosistemi di (4) mantengono le stesse proprietà di raggiungibilità e di osservabilità dei sottosistemi di (3). Ma allora, da  $\Delta_{A+BKC}(z)$  possiamo verificare la veridicità dell'osservazione 1. Infatti,  $\Delta_{A+BKC}(z)$ , mette in evidenza come gli unici autovalori che possono essere modificati siano proprio quelli del sottosistema raggiungibile e osservabile  $(A_{11}, B_1, C_1)$ .

Tali autovalori variano al variare di  $K$  ed inoltre non saranno quasi mai allocabili arbitrariamente.

**ESEMPIO 1** Consideriamo il sistema SISO:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

*completamente raggiungibile e osservabile. Quindi dall'osservazione 1 ci aspettiamo di poter allocare entrambi gli autovalori.*

Utilizzando la legge di controllo (1) la matrice di sistema diventa:

$$F + GkH = \begin{bmatrix} -3 + k & k \\ k & 2 + k \end{bmatrix}$$

Gli autovalori della nuova matrice di stato sono dati dalla soluzione dell'equazione:

$$\Delta_{F+GkH} = s^2 + s(1 - 2k) - 6 - k = 0$$

Al variare di  $k$ , l'equazione fornisce i due nuovi poli. È chiaro che possiamo imporre solo uno dei due poli che vogliamo allocare. Infatti siano  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  due generici autovalori che vogliamo imporre. L'equazione:

$$s^2 + s(1 - 2k) - 6 - k = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)$$

in un'unica variabile  $k$ , permette di imporre solo uno dei due autovalori mentre il secondo sarà imposto dall'equazione stessa.

Dall'osservazione 1 si deduce che, se il sistema non è completamente raggiungibile, qualunque sia la matrice  $K \in \mathbf{R}^{m \times p}$ , ci saranno sempre degli autovalori della matrice  $(F+GKH)$  che rimangono fissi. Gli autovalori che non possiamo allocare sono gli zeri di un polinomio, definito polinomio fisso centralizzato.

**Definizione 1 (Polinomio fisso centralizzato)** Il massimo comune divisore dei polinomi caratteristici del sistema  $(F+GKH, G, H)$  ottenuti per reazione dall'uscita al variare della matrice  $K$  è definito come polinomio fisso centralizzato di  $\Sigma$  ed è indicato con:

$$\phi_c(z) = \text{MCD } \det(zI - F - GKH) \quad (5)$$

$$K \in \mathbf{R}^{m \times p}$$

Data l'invarianza del polinomio caratteristico alle trasformazioni di similarità, gli zeri di  $\phi_c(z)$ , sono l'insieme degli autovalori dei sottosistemi non raggiungibili e/o non osservabili

$$\phi_c(z) = \det(zI - A_{22})\det(zI - A_{33})\det(zI - A_{44})$$

**ESEMPIO 2** Consideriamo il sistema SISO:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

non raggiungibile e completamente osservabile. La matrice  $F$  è in forma standard di raggiungibilità. L'autovalore del sistema raggiungibile e osservabile è l'autovalore  $\lambda = 1$  con molteplicità due, mentre l'autovalore  $\lambda = 3$  è l'autovalore del

sistema non raggiungibile e osservabile. Dalla definizione 1 otteniamo il polinomio fisso centralizzato

$$\phi_c(z) = (z - 3)$$

Sia:

$$\Delta_{F+GkH}(z) = (z - 3)(z^2 - 2z + z - 2k)$$

il polinomio caratteristico del sistema retroazionato con reazione statica. É evidente come  $(z-3)$  sia il massimo comune divisore di tutti i polinomi caratteristici ottenuti al variare di  $k$ .

## 2.2 Reazione dinamica

Dato il sistema  $\Sigma$  consideriamo il sistema ottenuto retroazionando l'uscita di  $\Sigma$  tramite il controllore dinamico  $\Sigma_f = (F_f, G_f, H_f)$  con  $p$  ingressi e  $m$  uscite come mostrato in figura 1. Si vuole studiare come la struttura di  $\Sigma_f$  può influire sulle proprietà dinamiche del sistema complessivo.

Facendo sempre riferimento alla decomposizione canonica, equazione (3), e alla struttura del sistema globale<sup>2</sup>, otteniamo l'equazione di aggiornamento dello stato:

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ x_4(t+1) \\ x_5(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 & B_1 H_f \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & B_2 H_f \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} & 0 \\ G_f C_1 & 0 & G_f C_3 & 0 & F_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il cui polinomio caratteristico è:

$$\Delta_{A+BKC} = \det \left( zI - \begin{bmatrix} A_{11} & B_1 H_f \\ G_f C_1 & F_f \end{bmatrix} \right) \det(zI - A_{22}) \det(zI - A_{33}) \det(zI - A_{44})$$

<sup>2</sup>Siano  $\Sigma_1 = (A, b, C)$  e  $\Sigma_2 = (E, f, G)$  due sistemi collegati in retroazione, con  $\Sigma_1$  nella catena diretta. Si verifica facilmente che il sistema complessivo  $\Sigma$  è descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} A & bG \\ fC & E \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Dal polinomio caratteristico si deduce una similarità con il caso della retroazione statica dall'uscita. Si hanno, anche in questo caso, una serie di autovalori che non variano qualsiasi sia  $\Sigma_f$  e, come nel caso della reazione statica, questi autovalori sono quelli dei sottosistemi raggiungibili e/o osservabili. Gli unici autovalori allocabili dal progettista, sono quelli del sottosistema raggiungibile e osservabile  $(A_{11}, B_1, C_1)$ . Essi, però, al contrario della retroazione statica, sono allocabili arbitrariamente in tutto il piano complesso tramite il controllore  $\Sigma_f$  di dimensione  $n_1$ , dove  $n_1$  è la dimensione del sottosistema raggiungibile e osservabile.

**ESEMPIO 3** Consideriamo il sistema

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con un'ingresso e un'uscita.

Il sistema è raggiungibile e osservabile e quindi il polinomio fisso centralizzato è pari ad uno. Si possono allocare tutti gli autovalori del sistema retroazionato.

Consideriamo il controllore  $\Sigma_f = (F_f, g_f, H_f)$  di dimensione 2. Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è:

$$\det \begin{bmatrix} zI - F & GH_f \\ g_f H & zI - F_f \end{bmatrix} = d(z)q(z) - n(z)p(z)$$

con:

$$\begin{aligned} n(z) &= H \operatorname{adj}(zI - F)G \\ d(z) &= \det(zI - F) \\ p(z) &= H_f \operatorname{adj}(zI - F_f)g_f \\ q(z) &= \det(zI - F_f) \end{aligned}$$

dove  $p(z)$  e  $n(z)$  sono noti. Sia ora  $\Delta(z)$  un qualsiasi polinomio di quarto grado, esisteranno sempre soluzioni proprie di  $q(z)$  e  $p(z)$  che risolvono l'equazione diofantea:

$$\Delta(z) = d(z)q(z) - n(z)p(z)$$

Vogliamo rendere stabile il nostro sistema complessivo e per farlo si vogliono avere come autovalori  $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$  e  $\lambda_3 = 0$  con molteplicità due, ottenendo così il polinomio caratteristico del sistema retroazionato pari ad:

$$\Delta(z) = z^2 \left( z - \frac{1}{2} \right) \left( z + \frac{1}{2} \right)$$

Dalla soluzione dell'equazione diofantea otteniamo i polinomi:

$$q(z) = z^2 + 2z + 4.75$$

$$p(z) = -11.5z - 4.75$$

*Il controllore  $\Sigma_f$  è descritto quindi dalle matrici:*

$$F = \begin{bmatrix} -2 & -4.75 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad H = [ -11.5 \quad -4.75 ]$$

### 3 Controllo Decentralizzato

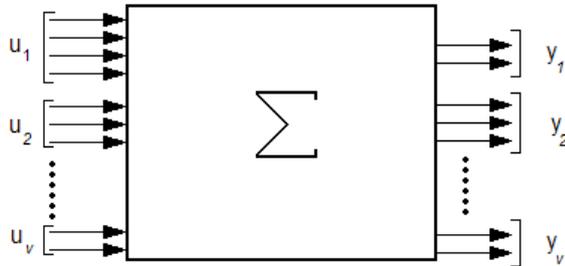


Figura 3:

Consideriamo di lavorare su un sistema  $\Sigma = (F, G, H)$

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \quad (6)$$

MIMO, tempo invariante, con  $m$  ingressi e  $p$  uscite e di suddividere gli ingressi in  $v$  gruppi ciascuno dei quali è formato da  $m_1, m_2, \dots, m_v$  ingressi e di suddividere le uscite in  $v$  gruppi ciascuno dei quali costituito da  $p_1, p_2, \dots, p_v$  uscite ottenendo così i vettori di ingresso e di uscita:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_v(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} \} m_1 \\ \} m_2 \\ \vdots \\ \} m_v \end{matrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_v(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} \} p_1 \\ \} p_2 \\ \vdots \\ \} p_v \end{matrix}$$

Anche le matrici  $G$  e  $H$  saranno suddivise in modo conforme:

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & \dots & G_v \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \dots \\ H_v \end{bmatrix}$$

Ogni  $k$ -esimo gruppo di uscite e di ingressi forma il cosiddetto  $k$ -esimo canale del sistema.

Vogliamo studiare le condizioni di esistenza dei controllori decentralizzati. Studieremo due tipi di controlli, il controllo statico decentralizzato e il controllore dinamico decentralizzato.

### 3.1 Reazione decentralizzata statica dalle uscite

Per ogni canale applichiamo la legge di controllo:

$$u_i(t) = k_i y_i(t) + v_i(t)$$

con  $i=1,2,3,\dots,v$  e  $k_i \in \mathbf{R}^{m_i \times p_i}$ , che può essere espressa globalmente dalla relazione

$$u(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_v \end{bmatrix}}_K y(t) + v(t)$$

La reazione statica dall'uscita di ogni canale impone che la matrice  $K$  sia una matrice con struttura diagonale a blocchi. Indichiamo con  $\mathbb{k}$  la famiglia delle matrici con struttura diagonale a blocchi di dimensione  $m * p$ . Essendo  $\mathbb{k} \subset \mathbf{R}^{m \times p}$  è evidente che il controllo decentralizzato è un caso particolare del controllo centralizzato e quindi anche per il controllo decentralizzato sarà definito un polinomio fisso decentralizzato.

**Definizione 2 (Polinomio fisso decentralizzato)** *Il polinomio*

$$\phi_D(z) = MCD \det(zI - F - GKH) \quad (7)$$

$K \in \mathbb{k}$

*è detto polinomio fisso decentralizzato.*

Gli zeri di  $\phi_D$  corrispondono agli autovalori del sistema globale che sono invarianti per reazione decentralizzata statica dall'uscita per ogni  $K \in \mathbb{k}$ .

$\phi_D$  è un divisore proprio di  $\phi_C$ .

Il calcolo di  $\phi_D$  risulta più complicato rispetto a quello del caso decentralizzato ed esistono due metodi per calcolarlo

#### Primo metodo

1. Si pone  $K=0$  e si calcolano gli zeri  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  del polinomio caratteristico della matrice  $F$ , fra i quali sono compresi gli zeri di  $\phi_D$ .

2. per ciascun zero  $\lambda_i$  si calcola

$$\det(\lambda_i I - F - GKH)$$

con  $K \in \mathbb{K}$ . Si ottiene quindi un polinomio negli elementi  $k_{ij}$  di  $K$ . Se tale polinomio è identicamente nullo  $\lambda_i$  è uno zero del polinomio fisso decentralizzato. Al contrario esiste una matrice  $\bar{K} \in \mathbb{K}$  tale che  $\det(\lambda_i I - F - G\bar{K}H) \neq 0$  e  $\lambda_i$  non è uno zero di  $\phi_D$ .

**ESEMPIO 4** Consideriamo il sistema discreto  $\Sigma_e = (F_e, G_e, H_e)$  con matrici:

$$F_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad G_e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema è completamente raggiungibile e osservabile e quindi il suo polinomio fisso centralizzato è pari ad uno. Vogliamo calcolare il polinomio fisso decentralizzato con il primo metodo. Per prima cosa calcoliamo gli autovalori della matrice  $F_e$ . È una matrice diagonale e quindi gli autovalori sono gli elementi lungo la diagonale  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 2$  e  $\lambda_4 = \frac{1}{8}$ .

Il sistema  $\Sigma_e$  ha tre ingressi e tre uscite, quindi la famiglia di matrici  $\mathbb{K}$  è formata da tutte le matrici diagonali di dimensione  $3 \times 3$ . Considerando una generica matrice diagonale:

$$K = \text{diag}\{k_1, k_2, k_3\}$$

risulta:

$$F_e + G_e K H_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + k_1 & k_2 & k_3 & k_2 \\ k_1 & 1 + k_2 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 2 + k_3 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è:

$$\Delta_{F_e + G_e K H_e}(z) = \left(z - \frac{1}{8}\right)(z - 2 - k_3) \left[ z^2 - z \left( \frac{3}{2} + k_1 + k_2 \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} k_2 + k_1 \right]$$

L'unico autovalore per il quale il polinomio caratteristico è identicamente nullo è l'autovalore  $\lambda_4$ , e sarà quindi, anche l'unico zero del polinomio fisso decentralizzato

$$\phi_D(z) = \left(z - \frac{1}{8}\right).$$

### Secondo metodo

Il secondo metodo è basato sul teorema formulato da Anderson e Clements che utilizza i concetti di matrice di sistema e sottosistema complementare.

**Definizione 3 (Matrice di sistema)** Si definisce matrice di sistema associata a un sistema  $\Sigma = (F, G, H)$  la matrice polinomiale

$$M(z) = \begin{bmatrix} zI - F & G \\ H & 0 \end{bmatrix}$$

**Definizione 4 (Sottosistema complementare)** Un sottosistema complementare di un sistema  $\Sigma$  a  $v$  canali, si ottiene da  $\Sigma$  assumendo come ingressi quelli corrispondenti ad un certo numero di canali e come uscite quelle corrispondenti agli altri canali.

**TEOREMA 1 (Anderson, Clements)** Condizione necessaria e sufficiente perché  $\lambda$  sia zero del polinomio fisso decentralizzato di un sistema  $\Sigma = (F, G, H)$  a  $v$  canali e di dimensione  $n$ , è che la matrice di sistema, di almeno un sottosistema complementare di  $\Sigma$ , abbia in  $\lambda$  rango minore di  $n$ .

**ESEMPIO 5** Consideriamo il sistema discreto dell'esempio 4. Siano i vettori colonna  $g_1, g_2$  e  $g_3$  rispettivamente la prima, la seconda e la terza colonna della matrice  $G_e$  e i vettori riga  $h_1, h_2$  e  $h_3$  rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga della matrice  $H_e$ .

I possibili sottosistemi complementari sono:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left( F_e, g_1, \begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \right) & \Sigma_2 &= \left( F_e, g_2, \begin{bmatrix} h_1 \\ h_3 \end{bmatrix} \right) & \Sigma_3 &= \left( F_e, g_2, \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \right) \\ \Sigma_4 &= (F_e, [g_1, g_2], h_3) & \Sigma_5 &= (F_e, [g_1, g_3], h_2) & \Sigma_6 &= (F_e, [g_2, g_3], h_1) \end{aligned}$$

Per il teorema di Anderson, Clements dobbiamo cercare se esiste almeno una matrice di sistema di uno dei sei sottosistemi complementari che abbia, per uno dei quattro autovalori, rango minore della dimensione della matrice  $F_e$ . Ciò si verifica soltanto per la matrice di sistema del sottosistema complementare  $\Sigma_4$ . La sua matrice sistema è:

$$M_4(z) = \begin{bmatrix} zI - F & [g_1, g_2] \\ h_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z - \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & z - 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & z - 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z - \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

il cui rango valutato per l'autovalore  $\lambda_4 = \frac{1}{8}$  è uguale a 3. Abbiamo così verificato lo stesso risultato ottenuto nell'esempio 4.

Il primo metodo, come dimostrano gli esempi, richiede certamente un numero di calcoli nettamente minore e risulta per questo motivo più veloce.

### 3.2 Reazione decentralizzata dinamica dall'uscita

Il problema che si vuole affrontare in questo paragrafo è quello di trovare le condizioni che permettano di individuare  $v$  compensatori dinamici collegati in retroazione dall'uscita di ogni canale che stabilizzino il sistema (6). Le leggi di controllo sono generate da sistemi dinamici  $(S_i, P_i, Q_i, R_i)$  di equazioni:

$$\begin{cases} w_i(t+1) = S_i w_i(t) + P_i y_i(t) \\ u_i(t) = Q_i w_i(t) + R_i y_i(t) \end{cases} \quad (8)$$

con  $i = 1, 2, \dots, v$  e dove  $w_i(t)$  sono gli stati dell' $i$ -esimo compensatore dinamico,  $S_i, P_i, Q_i$  e  $R_i$  sono matrici reali di appropriate dimensioni e la  $\dim(S_i)$  fornisce l'ordine dell' $i$ -esimo compensatore.

Le condizioni necessarie per l'esistenza di questi tipi di controllori sono state riassunte da Wang e Davison in questo teorema:

**TEOREMA 2 (Wang, E.J.Davison)** *Il polinomio caratteristico  $\Delta(z)$  del sistema complessivo ottenuto applicando una legge di reazione decentralizzata dinamica dall'uscita è esprimibile nella forma*

$$\Delta(z) = \phi_D(z)\psi(z)$$

*ovvero come prodotto del fattore  $\phi_D(z)$ , indipendentemente dalla legge di reazione, e di un fattore  $\psi(z)$  i cui zeri dipendono dalla legge di reazione e possono essere allocati in una prefissata arbitraria regione del piano complesso, aperta e simmetrica rispetto all'asse reale, pur di scegliere compensatori di ordine sufficientemente elevato.*

Dal teorema di Wang e E.J.Davison si deduce, che condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un compensatore dinamico decentralizzato è che tutti gli zeri del polinomio fisso decentralizzato  $\phi_D(z)$  siano asintoticamente stabili.

**ESEMPIO 6** Consideriamo il sistema  $\Sigma_e = (F, G, H)$  con matrici:

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Essendo il sistema completamente raggiungibile e osservabile avremo allora:

$$\phi_c(z) = 1$$

Consideriamo ora una reazione decentralizzata statica dall'uscita a 3 canali ( $v = 3$ ) con matrice di reazione:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio fisso decentralizzato. Sia

$$F + GKH = \begin{bmatrix} 3 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 1 + k_1 & k_2 & 0 \\ 0 & k_1 & \frac{1}{2} & 0 \\ k_3 & 0 & 0 & k_3 - 4 \end{bmatrix}$$

il cui determinante è:

$$\Delta_{F+GKH}(z) = (z - k_3 + 4)(z - 3) \left[ z^2 - \left( \frac{3}{2} + k_1 \right) z + \frac{1}{2} + \frac{k_1}{2} - k_1 k_2 \right]$$

Essendo  $F$  una matrice diagonale i suoi autovalori sono gli elementi lungo la diagonale principale  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = \frac{1}{2}$  e  $\lambda_4 = -4$ . Sfruttando il primo metodo del paragrafo 3.1, calcoliamo il polinomio fisso decentralizzato. L'unico autovalore per cui il determinante di  $\Delta_{F+GKH}(z)$  è identicamente nullo è  $\lambda_1 = 3$ . Quindi il polinomio fisso decentralizzato è:

$$\phi_c(z) = (z - 3)$$

Avendo l'autovalore  $\lambda_1 = 3$  modulo maggiore di uno, non esiste un controllo decentralizzato sia dinamico che statico che stabilizzi il sistema.

Al contrario nell'esempio 4, in cui lo zero del polinomio caratteristico è  $\frac{1}{8}$ , lo zero è asintoticamente stabile ed allora secondo il teorema (2) esiste il controllo decentralizzato dinamico che rende stabile l'intero sistema. Ma mentre nel caso centralizziamo possiamo allocare tutti gli autovalori, poichè  $\phi_c(z)=1$ , con la reazione decentralizzata possiamo allocare solo 3 autovalori su 4.

**ESEMPIO 7** Consideriamo il sistema discreto dell'esempio 4.

Essendo il modulo dello zero del polinomio caratteristico minore di uno, allora esiste un controllore decentralizzato che stabilizza il sistema globale.

Sia:

$$\Delta_{F_e+G_eKH_e}(z) = \left(z - \frac{1}{8}\right)(z - 2 - k_3) \left[ z^2 - z \left( \frac{3}{2} + k_1 + k_2 \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k_2 + k_1 \right]$$

il determinante della matrice del sistema retroazionato, possiamo stabilizzare il sistema andando a cercare i valori di  $k_1, k_2$  e  $k_3$  in modo tale da ottenere radici del polinomio con modulo minore di uno. Scegliamo  $k_3 = -\frac{7}{4}$  in modo tale da avere uno zero in  $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ . Condizione necessaria perchè entrambe le radici di un polinomio del secondo ordine  $z^2 + \alpha z + \beta$  abbiano modulo minore di uno è che sia  $|\alpha| < 2$  e  $|\beta| < 1$ . Per ottenere due gli autovalori  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$  stabili, dobbiamo scegliere dei valori di  $k_1, k_2$  che risolvano il sistema:

$$\begin{cases} |-\frac{1}{2} - k_1 - k_2| < 2 \\ |\frac{1}{2} + \frac{1}{2}k_2 + k_1| < 1 \end{cases}$$

Consideriamo ad esempio i valori  $k_2 = \frac{1}{2}$  e  $k_1 = -\frac{1}{2}$  in modo tale da ottenere autovalori  $\lambda_3 = -0.331$  e  $\lambda_4 = -0.1669$ .

### 3.3 Conclusioni

Dalla teoria e dagli esempi fin qui considerati possiamo trarre alcune conclusioni:

- il controllo centralizzato lascia invariati gli autovalori dei sistemi non raggiungibili e/o non osservabili, invece il controllo decentralizzato oltre a lasciare invariati questi ultimi ne lascia invariati anche altri (come si può notare dall'esempio 6).
- una seconda sostanziale differenza fra i due controlli riguarda il compensatore dinamico. In un sistema centralizzato questo tipo di compensatore permette di allocare gli autovalori in qualsiasi punto del piano complesso. Al contrario nel controllo decentralizzato ciò non è possibile, in quanto, come esprime il teorema 2, il compensatore alloca gli autovalori non fissi in posizioni arbitrariamente prossime ad ogni prefissato insieme simmetrico di punti del piano complesso.

## 4 Ipotesi sul sistema

Finora abbiamo considerato sistemi generici da controllare senza porci alcuna domanda sulle loro proprietà.

Consideriamo ora delle specifiche classe di sistemi, per le quali si faranno delle ipotesi sulla struttura dei collegamenti tra i vari sottosistemi e studieremo come, per questi sottosistemi, la progettazione dei compensatori decentralizzati si semplifica permettendoci di avere così una migliore comprensione delle potenzialità del controllo. Consideriamo due tipologie di sistemi quelli fortemente connessi e quelli interconnessi.

### 4.1 Sistemi fortemente connessi

Definiamo innanzitutto i concetti di sistema fortemente connesso e di sistema completo a  $v$  canali.

**Definizione 5 (Sistema fortemente connesso)** *Un sistema  $\Sigma$  è fortemente connesso se le matrici di trasferimento di tutti i sistemi complementari sono diverse da zero.*

**Definizione 6 (Sistema completo a  $v$  canali)** *Un sistema  $\Sigma$  fortemente connesso e che abbia polinomio fisso decentralizzato uguale ad 1 ( $\phi_D(z) = 1$ ) è detto completo a  $v$  canali.*

**Osservazione 2 (Tecnica di Morse)** *Se un sistema  $\Sigma$  è raggiungibile, osservabile e a  $v$  canali può essere reso raggiungibile e osservabile con un solo canale utilizzando una sola reazione statica se e solo se è completo a  $v$  canali.*

La tecnica di Morse permette di controllare sistemi raggiungibili, osservabili e completi a  $v$  canali in due passi.

Sfruttando l'osservazione 2, si rende il sistema raggiungibile e osservabile con reazione statica da un solo canale. Successivamente si allocano tutti gli autovalori del sistema applicando un controllo centralizzato dinamico, con ordine pari a  $n$ , reazionando solo le uscite del canale utilizzato precedentemente.

Questa tecnica può essere utilizzata anche in sistemi non completamente raggiungibili e osservabili se il sottosistema raggiungibile e osservabile è completo a  $v$  canali. La prima reazione renderà questo sottosistema raggiungibile e osservabile

da un solo canale mentre la reazione con il compensatore dinamico permetterà di allocare gli autovalori del solo sottosistema raggiungibile e osservabile.

**ESEMPIO 8** Consideriamo il sistema:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [G_1 \quad G_2] \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

che è raggiungibile e osservabile a due canali ma non è raggiungibile nè osservabile con nessuno dei due canali. Siano:

$$\Sigma_1 = (F, G_1, H_2) \quad \Sigma_2 = (F, G_2, H_1)$$

i due sistemi complementari. Le due matrici di trasferimento di tali sistemi sono diverse da zero e quindi il sistema è fortemente connesso. Con uno dei due metodi per il calcolo del polinomio fisso decentralizzato, si può facilmente verificare che  $\phi_D(z)=1$  e quindi il sistema è anche completo a 2 canali. Applichiamo ora la tecnica vista nel paragrafo precedente. Sfruttando l'osservazione 2 possiamo rendere il nostro sistema raggiungibile e osservabile con un solo canale. Essendo il sistema completo a 2 canali, allora deve esistere una matrice diagonale  $K$ ,  $K=\text{diag}\{k_1 \ k_2\}$ , tale che i sistemi

$$\Sigma_a = (F + GKH, G_1, H_2) \quad \Sigma_b = (F + GKH, G_2, H_1)$$

siano raggiungibili e osservabili. Si ha infatti:

$$F + GKH = \begin{bmatrix} 1 & k_2 & 1 \\ k_1 & 0 & k_1 \\ 1 & k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

e le matrici di raggiungibilità e osservabilità dei sistemi  $\Sigma_a$  e  $\Sigma_b$  hanno rango pieno se le costanti  $k_1$  e  $k_2$  sono diverse da 0.

Per poter ora allocare gli autovalori basta costruire un compensatore dinamico per il sistema  $\Sigma_a$  o per il sistema  $\Sigma_b$ .

## 4.2 Sistema interconnesso

Un sistema interconnesso  $\Sigma$  è un sistema costituito da vari sottosistemi  $\Sigma_i$ , in cui i legami tra i vari sottosistemi, sono espressi in modo statico dalle reazioni lineari fra

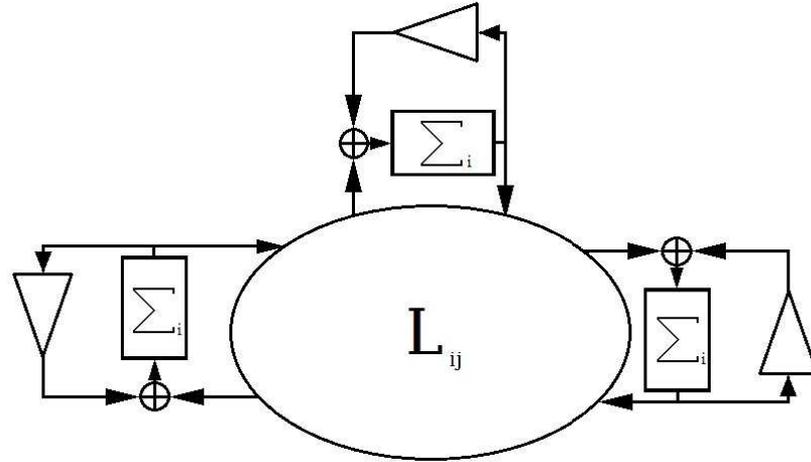


Figura 4: Sistema interconnesso

i segnali di ingresso e di uscita e non sono presenti iterazioni dirette tra le variabili di stato dei vari sottosistemi.

Le equazioni dei sottosistemi  $\Sigma_i$  sono

$$\begin{cases} x_i(t+1) = F_i x_i(t) + G_i a_i(t) \\ y_i(t) = H_i x_i(t) \end{cases} \quad (9)$$

dove gli ingressi  $a_i$  sono le interconnessioni:

$$a_i(t) = \sum_{j=1 \text{ and } j \neq i}^v L_{ij} y_j(t) + u_i \quad (10)$$

con  $i=1, \dots, v$ .

Siano:

$$a(t) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_v \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_v \end{bmatrix} \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_v \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_v \end{bmatrix} \quad (11)$$

gli ingressi dei sottosistemi  $\Sigma_i$ , gli ingressi, gli stati e le uscite del sistema  $\Sigma$ .

Possiamo riscrivere le equazioni (9) e (10) in maniera più compatta:

$$\begin{aligned}
 x(t+1) &= \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_v \end{bmatrix}}_{\bar{F}} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G_v \end{bmatrix}}_G a(t) \\
 y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} H_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H_v \end{bmatrix}}_H x(t) \\
 a(t) &= u(t) + \begin{bmatrix} 0 & L_{12} & \dots & L_{1v} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{v1} & L_{v2} & \dots & 0 \end{bmatrix} y(t) = u(t) + Ly(t)
 \end{aligned} \tag{12}$$

Dalle formule sopra riportate possiamo riscrivere il sistema interconnesso come il sistema generico (6)

$$\begin{aligned}
 x(t+1) &= \bar{F}x(t) + Ga(t) \\
 &= \bar{F} + G(u(t) + Ly(t)) \\
 &= (\bar{F} + GLH)x(t) + u(t)
 \end{aligned}$$

dove la matrice  $\bar{F} + GLH$  assume la forma:

$$\bar{F} + GLH = \begin{bmatrix} F_1 & G_1L_{12}H_2 & \dots & G_1L_{1v}H_v \\ G_2L_{21}H_1 & F_2 & \dots & G_2L_{2v}H_v \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_vL_{v1}H_1 & G_vL_{v2}H_2 & \dots & F_v \end{bmatrix} = F$$

Il sistema  $\Sigma$  è rappresentato quindi dalle equazioni:

$$\begin{aligned}
 x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\
 y(t) &= Hx(t)
 \end{aligned} \tag{13}$$

Nei sistemi interconnessi le uscite del sistema, come si può dedurre dalle equazioni (12), corrispondono alle uscite di tutti i sottosistemi componenti e gli ingressi corrispondono a tutti i  $v$  gruppi  $u_1, \dots, u_v$  che costituiscono gli ingressi esterni ai vari sottosistemi.

**Osservazione 3** Un sistema  $\Sigma$  è raggiungibile o osservabile se e solo se sono rispettivamente raggiungibili o osservabili tutti i sottosistemi componenti  $\Sigma_i$ .

Proviamo a dimostrare la veridicità dell'osservazione sulla raggiungibilità. Dobbiamo verificare che se  $\Sigma$  è raggiungibile lo sono anche  $\Sigma_i$  e viceversa.

Supponiamo che  $\Sigma$  sia raggiungibile. Allora dato uno stato  $x_f = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_v^T]^T$  esiste un ingresso  $u(\cdot) = [u_1^T(\cdot), u_2^T(\cdot), \dots, u_v^T(\cdot)]^T$  che porta il sistema globale dallo stato 0 allo stato  $x$ . Sia  $y(\cdot) = [y_1^T(\cdot), y_2^T(\cdot), \dots, y_v^T(\cdot)]$  l'uscita di  $\Sigma$ , gli ingressi

$$a_i(\cdot) = \sum_{j=1 \text{ and } j \neq i}^v L_{ij} y_j(\cdot) + u_i(\cdot) \quad (14)$$

con  $i=1, \dots, v$  portano i sistemi  $\Sigma_i$  negli stati  $x_i$ .

Supponiamo ora che siano raggiungibili i sistemi  $\Sigma_i$ . Siano  $a_1, a_2, \dots, a_v$  gli ingressi che, nell'intervallo  $[0, t]$ , portano i sistemi  $\Sigma_i$  negli stati  $x_1, x_2, \dots, x_v$  e siano  $y_1, y_2, \dots, y_v$  le uscite corrispondenti. Allora l'ingresso

$$u(\cdot) = \begin{bmatrix} a_1(\cdot) \\ a_2(\cdot) \\ \vdots \\ a_v(\cdot) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & L_{12} & \dots & L_{1v} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{v1} & L_{v2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(\cdot) \\ y_2(\cdot) \\ \vdots \\ y_v(\cdot) \end{bmatrix} \quad (15)$$

porta lo stato di  $\Sigma$  da 0 in  $x_f$ .

#### 4.2.1 Reazione decentralizzata dall'uscita per sistemi interconnessi

Si vuole ora applicare ad un sistema interconnesso un controllo decentralizzato. Essendo la struttura di un sistema interconnesso già suddivisa in vari sottosistemi, identificheremo come canali gli ingressi e le uscite di ciascun sottosistema e andremo ad applicare il controllo decentralizzato con riferimento a questi canali.

Nelle conclusioni del paragrafo 3.3, si era individuato come limite più vincolante del controllo decentralizzato, il minor numero di autovalori che, in genere, si possono allocare rispetto al controllo centralizzato.

Per i sistemi interconnessi questo limite non è presente in quanto il polinomio fisso centralizzato  $\phi_c(z)$  e il polinomio fisso decentralizzato  $\phi_D(z)$  risultano uguali. Questo implica, che l'utilizzo di un controllo decentralizzato per questa tipologia di sistemi permette di allocare lo stesso numero di autovalori del controllo centralizzato.

**TEOREMA 3 (Saeks)** Per i sistemi interconnessi della forma (12) e (13) si ha

$$\phi_c(z) = \phi_D(z) = \prod_{i=1}^v \phi_{ic}(z)$$

dove  $\phi_{ic}(z), i=1, \dots, v$  sono i polinomi fissi centralizzati dei sottosistemi componenti.

**Dimostrazione**

Inizialmente dimostriamo la seconda uguaglianza. Dalla (5) e dalle equazioni (12) e (13) possiamo scrivere le seguenti eguaglianze:

$$\begin{aligned} \phi_c(z) &= \underset{K \in \mathbf{R}^{m \times p}}{MCD \det(zI - F - GKH)} \\ &= \underset{K \in \mathbf{R}^{m \times p}}{MCD \det(zI - \bar{F} - G(L + K)H)} \\ &= \underset{K \in \mathbf{R}^{m \times p}}{MCD \det(zI - \bar{F} - G\bar{k}H)} \\ &= \bar{\phi}_c(z) \end{aligned}$$

dove  $\bar{\phi}_c(z)$  rappresenta il polinomio fisso centralizzato del sistema (12). Gli zeri di  $\bar{\phi}_c(z)$  sono quindi gli autovalori dei sottosistemi non raggiungibili e/o non osservabili del sistema (12). Supponendo che i sottosistemi siano in forma di decomposizione canonica e sapendo che  $\bar{F}$  è una matrice diagonale a blocchi allora si verifica facilmente che, gli autovalori dei sottosistemi non raggiungibili e/o non osservabili di  $\bar{F}$  sono gli autovalori dei sottosistemi non raggiungibili e/o non osservabili dei sistemi  $\sum_i$ .

Per dimostrare la prima uguaglianza basterà verificare che, se  $\lambda$  non è zero di  $\phi_c(z)$  allora non è zero neanche di  $\phi_D(z)$ . Prendiamo il caso di un sistema decentralizzato a due canali:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} F_1 & G_1 L_{12} H_2 \\ G_2 L_{21} H_1 & F_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi dimostrare che se  $\det(\lambda I - F - GKH) \neq 0$  per qualche  $K \in \mathbf{R}^{m \times p}$ , allora anche  $\det(\lambda I - F - GK_d H)$  con  $K_d \in \mathbb{K}$  è diverso da zero. Sia il determinante:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - F - GKH) &= \tag{16} \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda I - F_1 - G_1 K_{11} H_1 & -G_1 L_{12} H_2 - G_1 K_{12} H_2 \\ G_2 L_{21} H_1 - G_2 K_{21} H_1 & \lambda I - F_2 - G_2 K_{22} H_2 \end{bmatrix} = \\ &= \det(\lambda I - F_1 - G_1 K_{11} H_1) \\ &\quad \det(\lambda I - F_2 - \widetilde{K}_2 H_2 - G_2 L_{21} H_1 (\lambda I - F_1 - G_1 K_{11} H_1)^{-1} G_1 L_{12} H_2) \neq 0 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_2 &= K_{22} + K_{21}H_1(\lambda I - F_1 - G_1K_{11}H_1)^{-1}G_1K_{12} + \\ &+ K_{21}H_1(\lambda I - F_1 - G_1K_{11}H_1)^{-1}G_1L_{12} + L_{21}H_1(\lambda I - F_1 - G_1K_{11}H_1)^{-1}G_1K_{12} \end{aligned}$$

Se poniamo

$$K_d \cong \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & \widetilde{K}_2 \end{bmatrix}$$

sviluppando il determinante  $\det(\lambda I - F - GK_dH)$  si ottiene l'ultimo membro dell'equazione (16). Ciò dimostra che data la matrice di reazione  $K_d \in \mathbb{k}$  il determinante del sistema reazionato,  $\det(zI - F - GK_dH)$ , non si annulla in  $\lambda$ .

Poiché sono uguali i polinomi fissi centralizzati e decentralizzati dal teorema di Wang e Davison, Teorema 2, si può dedurre che gli autovalori di un sistema interconnesso, raggiungibile e osservabile, sono allocabili in preassegnate regioni del piano complesso mediante compensatori decentralizzati dinamici. E quindi, essendo  $\phi_c(z) = \phi_D(z) = 1$ , tali sistemi sono sempre stabilizzabili con reazione dall'uscita.

Inoltre sempre dal teorema 3 si deduce che i sistemi interconnessi sono completi se e solo se sono fortemente connessi e se i sottoinsiemi  $\Sigma_i$  sono raggiungibili e osservabili. Infatti la minimalità dei sottoinsiemi equivale alla minimalità di  $\Sigma$  e quest'ultima garantisce che  $\Phi_D(z) = \Phi_c(z) = 1$ . Per sistemi interconnessi, che sono fortemente interconnessi è applicabile la tecnica di allocazione esposta nel paragrafo 4.1.

**ESEMPIO 9** Consideriamo il sistema interconnesso di figura 5 dove i due sistemi hanno dimensione 1

$$\Sigma_a = (f_a, g_a, h_a) = (\frac{1}{2}, 1, 1) \quad \Sigma_b = (f_b, g_b, h_b) = (2, 1, -1)$$

Sia  $\Sigma_a$  che  $\Sigma_b$  sono raggiungibili e osservabili, quindi entrambi i sistemi hanno polinomio fisso centralizzato pari ad 1 ( $\phi_{ca}(z) = \phi_{cb}(z) = 1$ ).

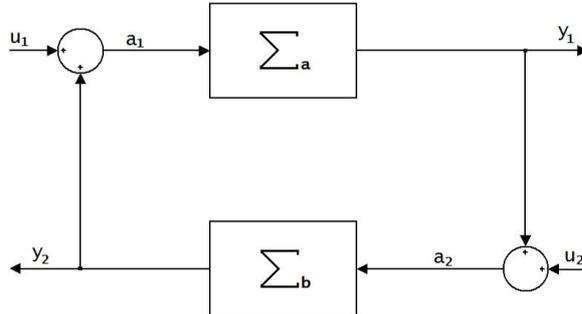


Figura 5: Esempio di sistema interconnesso

Dal teorema di Saeks ci aspettiamo di ottenere un polinomio fisso decentralizzato e centralizzato del sistema interconnesso pari ad uno. Calcoliamo le matrici del sistema interconnesso.  $\bar{F}$ ,  $G$  e  $H$  sono le matrici diagonali che hanno lungo la diagonale principale le corrispondenti matrici dei due sistemi,  $L$  sarà anch'essa una matrice diagonale con '0' lungo la diagonale principale e '1' lungo quello secondaria.

Il sistema interconnesso è quindi descritto dalle equazioni:

$$x(t+1) = (\bar{F} + GLH)x(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

È facilmente verificabile che il sistema interconnesso è raggiungibile e osservabile ed ha quindi, come ci aspettavamo, polinomio fisso centralizzato uguale ad uno ( $\phi_c(z) = 1$ ).

Calcoliamo ora il polinomio fisso decentralizzato. Consideriamo  $K$  una qualsiasi matrice diagonale di dimensioni  $2 \times 2$ . La matrice di sistema che otteniamo avrà quindi la forma:

$$F_k = \bar{F} + G(L + K)H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + k_1 & -1 \\ 1 & 2 - k_2 \end{bmatrix}$$

e il polinomio caratteristico è:

$$\Delta_{F_k} = z^2 + z(k_2 - k_1 - \frac{3}{2}) + 2 - \frac{1}{2}k_2 + 2k_1 - k_1k_2$$

Qualsiasi siano gli autovalori della matrice di sistema  $\bar{F} + GLH$ , è evidente che  $\Delta_{F_k}$  non sarà mai identicamente nullo, e quindi il polinomio fisso decentralizzato sarà pari ad uno, come sostenuto dal teorema di Saeks ( $\phi_D(z) = 1$ ).

#### 4.2.2 Reazione decentralizzata dallo stato per sistemi interconnessi

Si può ricorrere alla reazione decentralizzata dallo stato quando sono accessibili tutti gli stati di ogni sottosistema  $\Sigma_i$ . Quando essi sono accessibili per ciascun sottosistema si può applicare la reazione statica:

$$u_i(t) = K_i x_i(t) + v_i(t)$$

con  $i=1, \dots, v$ .

Possiamo riscrivere le leggi di controllo in forma più compatta

$$u(t) = Kx(t) + v(t)$$

dove  $K$ , la matrice di reazione, è una matrice diagonale a blocchi. La matrice del sistema complessivo assume la forma

$$F + GK = \begin{bmatrix} F_1 + G_1 K_1 & G_1 L_{12} H_2 & \dots & G_1 L_{1v} H_v \\ G_2 L_{21} H_1 & F_2 + G_2 K_2 & \dots & G_2 L_{2v} H_v \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_v L_{v1} H_1 & G_v L_{v2} H_2 & \dots & F_v K_v \end{bmatrix} \quad (17)$$

mentre le matrici  $G$  ed  $H$  mantengono sempre la forma diagonale a blocchi come quelle del sistema (12).

Se i sistemi  $\Sigma_i$  sono raggiungibili, allora è possibile allocare gli autovalori delle matrici  $F_i + G_i K_i$  dei vari sottosistemi. Al contrario però, poiché i blocchi non diagonali della matrice  $F+GK$  non variano al variare della matrice  $K$ , gli autovalori di (17) non sono allocabili arbitrariamente. È possibile però, effettuare la stabilizzazione per un sistema continuo.

**TEOREMA 4 (Sezer, Hüseyin)** *Sia  $\Sigma$  un sistema continuo interconnesso e raggiungibile. Esiste allora una reazione decentralizzata statica dello stato che stabilizza il sistema.*

Proviamo ora ad esaminare una semplice situazione nella quale verifichiamo la veridicità del teorema di Sezer e Hüseyin. Consideriamo un sistema interconnesso

costituito da sistemi  $\Sigma_i$  di dimensione uno. I vari blocchi della matrice (17) sono di dimensioni uno e poiché le varie  $G_i$  sono diverse da zero, per l'ipotesi di raggiungibilità del sistema interconnesso, al variare di  $K_i$  gli scalari  $F_i + G_i K_i$  sono arbitrari. La stabilizzabilità dell'intero sistema è conseguenza del teorema di Gershgorin, in base al quale gli autovalori di  $F+GK$  sono contenuti nella unione dei dischi di centro  $F_i + G_i K_i$  e raggio  $\sum_{j \neq i}^v |G_i L_{ij} H_j|$  con  $i=1, \dots, v$ , pur di scegliere gli scalari  $K_i$  in modo da rendere sufficientemente negativi i centri dei dischi. I dischi e quindi gli autovalori risultano tutti contenuti nel semipiano sinistro dello spazio complesso.

**ESEMPIO 10** Consideriamo il sistema interconnesso di figura (5) in cui i sistemi  $\Sigma_a$  e  $\Sigma_b$  sono i sistemi continui:

$$\Sigma_a = (f_a, g_a, h_a) = (-3, -1, 1) \quad \Sigma_b = (f_b, g_b, h_b) = (1, 1, -1)$$

raggiungibili e osservabili. Le equazioni (13) che descrivono il sistema interconnesso sono:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Si applichi ora una reazione decentralizzata dello stato con matrice  $K$  di reazione, la matrice diagonale:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}$$

La matrice (17) risulta:

$$F + GK = \begin{bmatrix} -3 + K_1 & 1 \\ 1 & 1 + K_2 \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora come valori di  $K$ ,  $K_1 = 2$  e  $K_2 = -5.5$ , che ci garantiscono come centri delle circonferenze i punti  $(-5,0)$  e  $(-4.5,0)$ . In questo modo le due circonferenze, entrambe di raggio uno, sono contenute nel semipiano reale negativo, garantendo così la stabilità del sistema interconnesso retroazionato. Gli autovalori della matrice sono  $\lambda_1 = -5.7808$  e  $\lambda_2 = -3.7192$ , entrambi asintoticamente stabili e come si può vedere dalla figura (6) contenuti nell'unione delle due circonferenze.

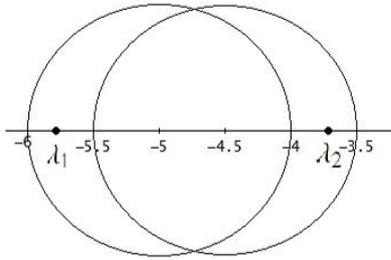


Figura 6: Posizione autovalori

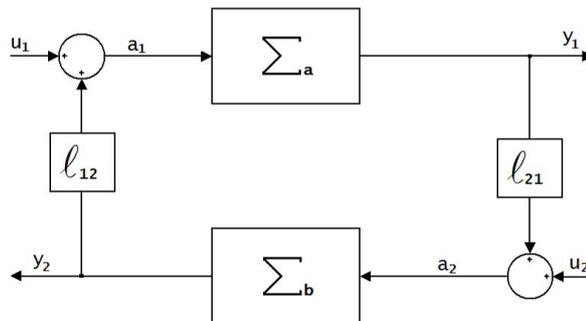


Figura 7: Sistema interconnesso dell'esempio 11

Il risultato ottenuto nel teorema 4 non vale per i sistemi discreti, come si può verificare dal seguente esempio.

**ESEMPIO 11** Consideriamo il sistema discreto di figura 7 dove  $\Sigma_a$  e  $\Sigma_b$  sono i sistemi:

$$\Sigma_a = (2, 1, 1) \quad \Sigma_b = (2, 1, 1)$$

Il sistema complessivo sarà quindi caratterizzato dalle matrici:

$$F = \begin{bmatrix} 2 & l_{12} \\ l_{21} & 2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Retroazionando il sistema dallo stato si ottiene un sistema il cui polinomio caratteristico è:

$$z^2 + z(-4 - k_1 - k_2) + 4 + 2(k_1 + k_2) + k_1k_2 - l_{12}l_{21}$$

*Affinché le radici del polinomio caratteristico abbiano modulo minore di uno è necessario che  $k_1$  e  $k_2$  risolvano il sistema:*

$$\begin{cases} -6 < k_1 + k_2 < -2 \\ -5 + l_{12}l_{21} < 2(k_2 + k_1) + k_1k_2 < -3 + l_{12}l_{21} \end{cases}$$

*Se il prodotto  $l_{12}l_{21}$  è maggiore di 2, il sistema non ammette soluzione per  $k_1$   $k_2$  reali, e quindi il sistema non può essere stabilizzato con reazione decentralizzata statica dallo stato.*