

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE STATISTICHE

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE



*Tesi di laurea*

METODI APPROSSIMATI PER IL CALCOLO DEL RISCHIO  
DI STRUMENTI FINANZIARI DERIVATI: METODOLOGIA  
E ANALISI NUMERICA

Relatore: Ch.mo professore FRANCESCO LISI

Correlatore: Ch.mo professore MICHELE BONOLLO

Laureanda: FRANCESCA VALENTINI

ANNO ACCADEMICO 2002 – 2003



*Ai miei genitori e a Ruggero*



# *Indice*

	<i>pag.</i>
INTRODUZIONE .....	1
<b>Capitolo 1</b>	<b>GLI STRUMENTI FINANZIARI</b>
1.1	Introduzione ..... 5
1.2	Le azioni ..... 6
1.3	Le obbligazioni ..... 7
1.4	Gli strumenti derivati ..... 10
1.4.1	I contratti forward ..... 10
1.4.2	I contratti future ..... 11
1.4.3	I contratti di opzione ..... 13
1.4.4	Gli swap ..... 15
1.4.5	I warrant ..... 16
1.4.6	I covered warrant ..... 16
<b>Capitolo 2</b>	<b>I PRIMI INDICATORI DEL RISCHIO</b>
2.1	La durata finanziaria (duration) ..... 19
2.2	Le “greche” ..... 22
2.2.1	Definizione di differenziale ..... 23

2.2.2	Definizione di $\epsilon$ piccolo .....	23
2.2.3	Definizione di funzione trascurabile .....	24
2.2.4	Definizione di derivata .....	24
2.2.5	Formula di Taylor con il resto di Peano .....	24
2.2.6	Teorema di Taylor con il resto di Lagrange .....	25
2.2.7	Il modello di Black e Scholes .....	26
2.2.8	Le greche di una call e di una put standard .....	27

### **Capitolo 3            IL VALORE A RISCHIO (VALUE AT RISK)**

3.1	Introduzione .....	29
3.2	I modelli per il calcolo del valore a rischio .....	30
3.2.1	L'approccio parametrico .....	31
3.2.1.1	Il valore a rischio di una singola attività finanziaria .....	32
3.2.1.2	L'approccio delta-normal .....	32
3.2.1.3	L'approccio RiskMetrics .....	34
3.2.1.4	L'approccio portafolio-normal .....	37
3.2.1.5	L'approccio delta-gamma .....	37
3.2.2	La simulazione storica .....	40
3.2.3	La simulazione di Monte Carlo .....	42

### **Capitolo 4            L'EXPECTED SHORTFALL**

4.1	Introduzione .....	45
4.2	Costruzione di una misura di rischio .....	48
4.3	Altra definizione di Expected Shortfall .....	50
4.4	Confronto tra Expected Shortfall e valore a rischio nel caso gaussiano .....	52
4.5	Conclusioni .....	53

## **Capitolo 5            L'APPROCCIO DELTA-GAMMA NELLA VARIAZIONE DI VALORE DI UNO STRUMENTO NON LINEARE**

5.1	Introduzione .....	55
5.2	Oggetto del confronto .....	56
5.3	Analisi dei risultati .....	61

CONCLUSIONI .....	69
-------------------	----

### **Appendice**

➤ Appendice A .....	73
➤ Appendice B .....	97
➤ Appendice C .....	101
➤ Appendice D .....	109

BIBLIOGRAFIA .....	117
--------------------	-----

## ***INTRODUZIONE***

I diversi eventi che hanno caratterizzato i mercati finanziari di tutto il mondo negli ultimi decenni hanno portato ad un aumento della volatilità e, quindi, della rischiosità.

Si possono ricordare alcuni provvedimenti come l'accordo Bretton-Woods del 1970 che sancisce l'abolizione della parità fissa dei tassi di cambio, provocando un notevole aumento della volatilità nel mercato monetario; la diffusione di strumenti finanziari complessi, come i titoli strutturati e derivati, in seguito al modello di determinazione del valore delle opzioni (*option pricing*) elaborato da Black e Scholes. Si pensi agli shock che hanno colpito l'economia mondiale come le crisi petrolifere, il crollo dei mercati azionari nell'ottobre del 1987, il collasso del Sistema Monetario Europeo nel Settembre 1992, gli avvenimenti luttuosi e drammatici dell'11 Settembre 2001 che hanno portato ad un aumento della volatilità implicita in alcuni dei principali contratti finanziari.

A seguito di questi avvenimenti l'attenzione rivolta verso la misurazione del rischio diventa via via crescente, come è dimostrato anche in tema di regolazione, basata in gran parte sulle direttive del Comitato di Basilea.

Il Comitato di Basilea fu creato nel 1974 dalle banche centrali dei paesi appartenenti al G10, a seguito di un avvenimento rimasto per molto tempo nella memoria del mercato: il fallimento della tedesca Bankhaus Herstatt. Questo Comitato non legifera, ma formula proposte e linee guida, tuttavia le prime proposte, risalenti al 1988, sono diventate normativa vincolante in oltre 100 paesi.

Alle banche viene imposta da questo Comitato l'applicazione di un modello di misurazione del rischio per garantire l'esistenza di un capitale adeguato a fronte di tutti i rischi che scaturiscono dalle loro attività.



Alternativamente, le banche possono elaborare un sistema interno per la valutazione del rischio in accordo con alcune condizioni stabilite dal Comitato stesso e sottoposto all'approvazione dell'autorità di vigilanza nazionale.

I principali rischi a cui sono sottoposte le istituzioni finanziarie sono il rischio di mercato, il rischio di credito, il rischio di liquidità e il rischio operativo (per approfondimenti si veda Betti (2001)).

Negli ultimi anni le banche hanno cominciato ad occuparsi del rischio di credito e di quello operativo con la comparsa nel 1988 di un documento sull'adeguatezza patrimoniale delle banche, predisposta dal Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria, chiamato Basilea1.

Nel 1999, il Comitato ha deciso di effettuare un secondo giro di consultazioni per una proposta più dettagliata sulla regolamentazione dell'adeguatezza patrimoniale che nella versione finale sostituirà l'Accordo del 1988 e i successivi emendamenti. L'attivazione di questo documento (Basilea2) è prevista nel 2006.

Nella tesi si porrà l'attenzione sul rischio di mercato che ha assunto negli ultimi anni una rilevanza crescente per tutti coloro che stabilmente operano nei mercati finanziari per i motivi elencati precedentemente.

Con il termine rischio di mercato si intende la possibilità che variazioni inattese dei fattori di mercato, quali prezzi azionari, prezzi delle merci, tassi di interesse, tassi di cambio, volatilità dei prezzi, determinino una variazione al rialzo o al ribasso del valore di una posizione o di un portafoglio finanziario.

Gli istituti bancari e finanziari hanno sviluppato modelli statistico-matematici per la misurazione ed il controllo del rischio di mercato. La principale risposta è stata data con l'elaborazione dei modelli Value at Risk (VaR).

Il VaR è diventato una misura standard nell'ambito della misurazione del rischio di mercato, poiché esprime, attraverso un numero, la misura della rischiosità di una posizione in azioni, opzioni, ecc., fissando una soglia per le perdite che verrà superata solo con una probabilità prestabilita.

Un'altra misura del rischio è l'Expected Shortfall che sintetizza in un unico valore la perdita media che un portafoglio o una posizione può subire, in un arco temporale definito, con una certa probabilità.

Si è voluto cercare delle misure di rischio che avessero certe caratteristiche, quali la *semplicità*, ossia devono essere le risposte ad una naturale domanda sul rischio che si incorre con un portafoglio; la *grande applicabilità*, cioè devono poter essere applicate

sia a portafogli, i cui componenti hanno un valore finale lineare, sia a portafogli che contengono strumenti il cui valore finale non è lineare, in quanto dipende dal valore di altre attività; la *completezza*, ossia devono produrre un'unica stima globale per i portafogli esposti a differenti cause di rischio, ma che siano anche *coerenti*, caratteristica che ha assunto importanza dopo l'articolo di Artzner, *et al* (1997).

Altri due indicatori del rischio di mercato sono la durata finanziaria e le "greche", che sono misure di sensibilità (*sensitivity*) del valore di mercato di una posizione (obbligazioni per la durata finanziaria, opzioni per le greche) al mutare del contesto di mercato.

L'oggetto della tesi saranno le greche, la cui importanza si può vedere nel fatto che sono utilizzate nel calcolo del VaR e anche in ambito normativo infatti tutte le banche le devono fornire alla Banca d'Italia che poi sulla base di queste calcola la rischiosità per ogni istituto finanziario.

L'obiettivo della tesi è quello di trovare una buona approssimazione, basata sulle greche, alla variazione di valore di uno strumento finanziario, che ha assunto sempre più importanza negli ultimi anni, cioè l'opzione.

L'importanza di questa approssimazione risiede nel fatto che permette dal punto di vista computazionale un onere inferiore rispetto a quello legato al calcolo del vero valore.

Inoltre questa approssimazione è utile nel calcolo del VaR.



## *Capitolo 1*

### **GLI STRUMENTI FINANZIARI**

#### 1.1 INTRODUZIONE

Il mercato finanziario può essere definito come l'insieme degli organismi, degli strumenti e delle tecniche che favoriscono il trasferimento di mezzi finanziari dagli operatori che presentano un avanzo finanziario agli operatori che evidenziano un disavanzo finanziario. Qui vengono negoziate attività finanziarie quali azioni, obbligazioni, derivati, monete.

I mercati finanziari servono a ridurre i rischi connessi all'evoluzione futura dell'attività economica, ad investire il risparmio sia personale che d'impresa e a raccogliere fondi per investimenti produttivi.

Una classificazione dei mercati finanziari è tra mercato primario e mercato secondario. Il mercato primario individua quel complesso di operazioni attraverso le quali il pubblico dei risparmiatori sottoscrive strumenti finanziari di nuova emissione contro il versamento, a favore dell'emittente, di mezzi finanziari. Il mercato secondario individua il complesso di negoziazioni su strumenti finanziari già in circolazione e collocati presso il pubblico dei risparmiatori. Da tale distinzione si rileva che il mercato primario svolge prevalentemente la funzione di finanziamento degli emittenti di strumenti finanziari, mentre il mercato secondario svolge prevalentemente la funzione di facilitare gli investimenti e i disinvestimenti di strumenti finanziari da parte dei risparmiatori, favorendone la liquidabilità.

Per quanto riguarda il mercato secondario si può distinguere tra mercati regolamentati e mercati non regolamentati. Dove per i primi esistono modalità di negoziazione standardizzate e strutture organizzative assoggettate a specifiche discipline, mentre i secondi sono mercati non ufficiali, paralleli, che sorgono spontaneamente, ma che rivestono comunque una certa importanza.

Nei mercati vengono negoziati diversi strumenti finanziari, che sono contratti che stabiliscono l'entità e le modalità di trasferimenti finanziari fra le parti.

Adesso verranno analizzati singolarmente alcuni di questi strumenti finanziari.

## 1.2 LE AZIONI

Un'azione è un titolo rappresentativo di quote di capitale delle società per azioni e rappresenta la misura della partecipazione del socio nella società. Tutte le azioni devono avere uguale valore nominale. Le azioni sono titoli a reddito variabile in quanto il frutto del prodotto dipende dal livello degli utili conseguiti dalla società e da quella parte di utili che gli amministratori della società deliberano di distribuire agli azionisti. In presenza di utile da distribuire, a ogni azione viene assegnato un dividendo, pagato per lo più in un'unica soluzione dopo l'approvazione del bilancio da parte dell'assemblea dei soci. Assumendo la qualifica di socio, il possessore di azioni acquista, fatte salve le limitazioni previste dalle diverse tipologie di azioni, dei diritti inerenti alla partecipazione nell'amministrazione della società e diritti aventi contenuto economico. I primi consistono nel diritto dell'azionista di intervenire in assemblea, di partecipare con il proprio voto alla formazione della volontà sociale, di prendere parte alla discussione in assemblea e far risultare dal verbale le proprie dichiarazioni, di impugnare le delibere dell'assemblea, di stimolare il collegio sindacale nello svolgimento della funzione di sorveglianza e così via. I diritti di contenuto economico, invece, consistono nel diritto agli utili e al rimborso del capitale.

Al possessore delle azioni spetta inoltre il diritto di opzione che è dato dalla prelazione concessa agli azionisti di sottoscrivere nuove azioni in occasione delle operazioni di aumento del capitale sociale. Tale prelazione gli assicura la tutela della propria quota di partecipazione nella società.

Un altro diritto fondamentale è rappresentato dal diritto di voto: esso consente di partecipare alla formazione della volontà sociale e, di regola, spetta ad ogni azione.

Perciò, se un socio dispone di più azioni, ha diritto a tanti voti quante sono le azioni possedute.

Ci sono diversi tipi di azioni:

- *azioni ordinarie*: assicurano ai possessori la partecipazione diretta alla gestione della società in quanto danno pieno potere di voto, ma offrono minori dividendi
- *azioni privilegiate*: assicurano ai possessori alcuni privilegi nella distribuzione degli utili; il diritto di voto può essere esercitato esclusivamente nel corso delle assemblee straordinarie dei soci
- *azioni di risparmio*: non danno diritto di voto, ma sono dotate di maggiori privilegi nella distribuzione dei dividendi
- *azioni di godimento*: non danno alcun diritto di voto, ma in sede di ripartizione dell'utile sociale possono essere attribuite ai soci ai quali viene rimborsato l'ammontare del capitale corrispondente alle azioni possedute

### 1.3 LE OBBLIGAZIONI

Sono titoli di debito emessi dallo Stato o da imprese al fine di finanziare i propri debiti o i propri progetti; non rappresentano quote di proprietà della società emittente. Hanno una scadenza, in cui si rientra in possesso del capitale prestato.

Tra le obbligazioni più importanti si hanno:

- *obbligazioni a cedola nulla (Zero coupon Bond)*: sono caratterizzate dal fatto che non si hanno versamenti di cedole tra il momento dell'emissione e quello della scadenza dall'emittente ai possessori. Un esempio è dato dai Buoni ordinari del Tesoro (BOT), che rappresentano lo strumento di mercato monetario più noto e sino a pochi anni fa più diffuso. Sono titoli al portatore con durata di tre, sei, oppure dodici mesi. Vengono emessi a un prezzo inferiore alla pari, hanno un prezzo di rimborso pari a 100 e un valore nominale pari al taglio minimo sottoscrivibile di 1000 euro. Il rendimento offerto è determinato dalla differenza tra il prezzo di rimborso e quello di emissione rapportato alla durata. Su tale differenza grava una

tassazione del 12,5% prelevata al momento dell'emissione medesima. Dall'autunno del 1997 il Tesoro ha dato avvio a una riforma della tempistica di emissione che attualmente prevede a fine mese l'emissione dei titoli semestrali e a metà mese quella dei titoli trimestrali e annuali

- *obbligazioni a cedola fissa* (Coupon Bond): si hanno versamenti di cedole costanti in termini nominali, note sin dalla data di emissione ed a date prestabilite. Un esempio è dato dai Buoni del Tesoro pluriennali (BTP) che sono titoli rimborsabili in un'unica soluzione alla scadenza e recanti un tasso nominale fisso, pagabile a cadenza semestrale. L'emissione avviene normalmente a un prezzo sotto la pari e il rimborso è previsto al valore nominale al netto della tassazione del 12,5% calcolata sulla eventuale differenza tra il prezzo del rimborso e il prezzo di collocamento. L'emissione dei BTP viene effettuata con decreti ministeriali, da pubblicarsi nella Gazzetta Ufficiale, sui quali sono indicati gli importi, la durata, le scadenze, le date, il tasso di rendimento, le modalità di assegnazione. I BTP hanno attualmente una durata di 3, 5, 10, 30 anni e vengono emessi con periodicità regolare che vede a inizio mese l'offerta dei BTP a tre e dieci anni ed a metà mese l'offerta delle scadenze a tre, cinque e trenta anni
  
- *obbligazioni a cedola variabile*: il valore delle cedole dipende da una regola di indicizzazione ad un parametro di riferimento. È noto l'ammontare solo della prima cedola. Le date di pagamento sono prestabilite. Un esempio è dato dai Certificati di credito del Tesoro (CCT), che sono titoli che prevedono una prima cedola fissa e sono dotati di un meccanismo di indicizzazione finanziaria delle cedole successive in relazione ai rendimenti dei BOT (emissione precedente). Al valore di volta in volta ricalcolato della cedola si aggiunge una maggiorazione (denominata "*spread*") di entità fissa per l'intera durata del prestito. La loro emissione avviene con cadenza mensile, a un prezzo normalmente sotto la pari e il rimborso è previsto in un'unica soluzione alla scadenza al valore nominale al netto della tassazione del 12,5% calcolata sull'eventuale differenza tra il prezzo del rimborso e il prezzo di collocamento. La durata all'emissione dei CCT è attualmente di sette anni
  
- *obbligazioni strutturate*: sono titoli obbligazionari il cui rimborso e renumerazione sono legati all'andamento di alcuni parametri finanziari, come indici azionari o

panieri di indici azionari, azioni o panieri di azioni, valute. Un esempio è rappresentato da *index/equity linked*. È uno strumento finanziario composto: cioè è un prodotto che deriva dall'unione di un titolo a reddito fisso e di una opzione *call* (vedere pagine successive), acquistata dall'investitore, su un titolo azionario o su un indice di Borsa. Il titolo consente di ottenere un profitto commisurato all'eventuale apprezzamento del sottostante di riferimento, garantendo comunque il rimborso del capitale anche quando il sottostante si sia deprezzato. La componente opzionale può essere di tipo standard o esotico a seconda delle modalità di apprezzamento del sottostante di riferimento. Al riguardo negli ultimi anni queste obbligazioni hanno incorporato opzioni esotiche sempre più complesse, che hanno permesso di tarare i titoli strutturati in oggetto alle specifiche esigenze della clientela o dell'ente emittente con un elevato contenuto di flessibilità operativa

- *obbligazioni convertibili*: rappresentano una categoria di titoli intermedia tra un'obbligazione e un'azione. Esse, infatti, offrono la possibilità all'obbligazionista di mantenere una posizione creditoria nei confronti dell'emittente, oppure di convertire entro un determinato periodo o ad una certa data il titolo obbligazionario in titolo azionario e assumere di conseguenza lo status di socio. La conversione delle obbligazioni convertibili è chiamata diretta quando emittente delle obbligazioni e emittente delle azioni sono la medesima società, invece è detta indiretta quando le obbligazioni sono emesse da un soggetto, tipicamente la banca, e le azioni sono emesse da un'altra società. Il prestito obbligazionario convertibile si distingue inoltre in prestito totalmente convertibile quando l'intero ammontare può essere convertito e prestito parzialmente convertibile quando solo una parte del prestito può essere convertita in azioni. La delibera di emissione del prestito obbligazionario convertibile è presa dall'assemblea straordinaria degli azionisti della società che contestualmente delibera un aumento di capitale per un ammontare corrispondente al valore nominale delle azioni da attribuire in conversione, a meno che la conversione del prestito avvenga in favore di azioni di compendio già esistenti. Il tasso d'interesse nominale dei titoli obbligazionari convertibili è inferiore, a parità di tutte le altre condizioni, a quello di un titolo obbligazionario ordinario; tale differenza esprime il prezzo della facoltà di conversione a favore del possessore delle obbligazioni convertibili



## 1.4 GLI STRUMENTI DERIVATI

I derivati sono strumenti finanziari il cui valore dipende da quello di altre variabili sottostanti. Negli anni recenti, i derivati sono diventati sempre più importanti nel mondo della finanza. I *future* e le opzioni vengono ora negoziati in molte borse. I contratti *forward*, gli *swap* e diversi tipi di opzione vengono regolarmente trattati fuori borsa da istituzioni finanziarie, gestori di fondi e società, nei cosiddetti mercati “OTC” (*over the counter*). Spesso i derivati vengono anche incorporati in emissioni azionarie o obbligazionarie.

I principali strumenti derivati sono: i contratti *forward*, i contratti *future*, i contratti d'opzione, gli *swap*, i *warrant*, i *covered warrant*.

### 1.4.1 I contratti forward

Sono derivati particolarmente semplici. Sono accordi per acquistare o vendere un'attività ad una certa data futura, per un certo prezzo. Di solito vengono stipulati fuori borsa tra due istituzioni finanziarie o tra un'istituzione finanziaria ed uno dei suoi clienti.

Nei contratti *forward*, una delle parti assume una posizione lunga e si impegna a comprare l'attività sottostante ad una specifica data, per un certo prezzo. L'altra parte assume una posizione corta e si impegna a vendere l'attività alla stessa data, per lo stesso prezzo. Il prezzo specificato in questi contratti è chiamato prezzo di consegna. Viene fissato al momento della stipula, in modo che il valore del contratto per entrambe le parti sia nullo. Ciò significa che non costa nulla assumere una posizione lunga o corta.

I contratti *forward* vengono comunemente utilizzati per coprirsi dai rischi di cambio.

Il prezzo *forward*, ad una certa data, è il prezzo di consegna che si determinerebbe se il contratto venisse concluso in quella data.

È importante distinguere tra prezzo *forward* e prezzo di consegna. I due prezzi sono uguali quando il contratto viene concluso ma, in genere, divergono col passare del tempo.

Il valore finale (*payoff*) di un contratto *forward* lungo scritto su una quantità unitaria dell'attività sottostante è:

$$S_t - K \quad (1.1)$$

dove  $K$  è il prezzo di consegna e  $S_t$  è il prezzo spot dell'attività alla scadenza del contratto.

Analogamente, il valore finale di un contratto *forward* corto scritto su una quantità unitaria dell'attività sottostante è:

$$K - S_t \quad (1.2)$$

Questi valori possono essere positivi o negativi.

#### 1.4.2 I contratti future

Sono accordi tra due parti per comperare e vendere un'attività ad una certa data futura, per un certo prezzo. Sono di norma trattati in Borsa. Per rendere possibili le negoziazioni, la Borsa specifica certi aspetti standard del contratto. Dal momento che i due contraenti non necessariamente si conoscono, la Borsa fornisce anche un meccanismo che assicura alle due controparti che il contratto verrà onorato.

Nel *future* non viene specificata una data specifica per la consegna. Il contratto è identificato dal mese di consegna e la Borsa specifica il periodo durante il mese, in cui la consegna deve essere effettuata. Per le merci, il periodo di consegna spesso coincide con l'intero mese. Gli investitori con posizione corte hanno il diritto di scegliere il momento in cui effettuare la consegna all'interno del periodo specificato dalla Borsa. La Borsa specifica la quantità di attività sottostante che deve essere consegnata per ogni contratto, il modo in cui il prezzo *future* deve essere quotato e, a volte, i limiti entro i quali il prezzo può muoversi nel corso di una giornata. Nel caso merci, la Borsa specifica anche la qualità del prodotto e il luogo di consegna.

Le attività sottostanti ai diversi contratti sono rappresentate da un'ampia gamma di merci (*comodity futures*, relativi a beni di consumo primari) e di attività finanziarie (*financial futures*, relativi a depositi e titoli di Stato, valute, indici azionari).

I *financial futures* possono essere distinti in:

- *currency futures*: sono contratti che rappresentano l'impegno alla cessione o all'acquisto a termine valuta a un cambio prefissato. La posizione si chiude con l'effettivo ritiro della valuta in questione alla scadenza dei contratti, oppure tramite la vendita o l'acquisto dei contratti entro tale data
- *interest rate futures*: sono invece dei contratti che rappresentano l'impegno alla cessione o all'acquisto a termine di titoli a tasso fisso con caratteristiche determinate ad un prezzo prefissato. La posizione di tali contratti si chiude con l'effettiva consegna o l'effettivo ritiro dei titoli in questione alla data di scadenza, oppure tramite la vendita o l'acquisto dei contratti entro tale data
- *stock index futures*: sono contratti che rappresentano l'impegno a consegnare o a ritirare a termine una somma in contanti ottenuta moltiplicando la differenza tra il valore dell'indice di Borsa alla chiusura dell'ultimo giorno dei contratti e il prezzo a cui i contratti *future* sono stati originariamente conclusi per un coefficiente costante di valutazione. Gli indici di Borsa sono sostanzialmente delle medie aritmetiche (semplici o ponderate) calcolate facendo riferimento alle quotazioni di un predeterminato paniere di titoli, selezionato fra quelli presenti sul mercato.

Le due maggiori Borse nelle quali si negoziano contratti *future* sono il Chicago Board of Trade (CBOT) e la Chicago Mercantile Exchange (CME). Chicago è la città dove, nel 1972, nacquero i primi contratti relativi a materie prime e bestiame. Anche in Italia sono due i mercati dove vengono scambiati questi contratti: il Mercato Italiano Future (MIF) e il Mercato Italiano dei Derivati (IDEM). Al MIF viene trattato il comparto obbligazionario, si quota il *future* sul BTP e sul RIBOR. All'IDEM vengono scambiati due contratti *future*, il FIB30, ossia il *future* sull'indice di Borsa Mib30, e il MIDEX, ossia il *future* sull'indice di Borsa omonimo. Il debutto di questi contratti si è avuto nel Settembre 1992 con il *future* sui BTP e il 28 Novembre 1994 è stata la volta del Fib30.

### 1.4.3 I contratti di opzione

Vengono trattati nelle borse di tutto il mondo e anche nei mercati *over the counter* da banche e altre istituzioni finanziarie. Le attività sottostanti includono le azioni, gli indici azionari, le valute, le obbligazioni, le merci e i contratti *future*.

Esistono due tipi fondamentali di opzioni: *call* e *put*. Le opzioni *call* danno al portatore il diritto di comprare un'attività entro una certa data, per un certo prezzo.

Le opzioni *put* danno al portatore il diritto di vendere un'attività entro una certa data, per un certo prezzo. Il prezzo indicato nel contratto è detto prezzo d'esercizio (*strike price*); la data indicata nel contratto è detta data di scadenza (*maturity*).

Si distinguono in opzioni europee, cioè quelle che possono essere esercitate solo alla scadenza, e opzioni americane che invece possono essere esercitate in ogni momento durante la loro vita.

Le opzioni europee sono in genere più facili da analizzare e alcune proprietà di quelle americane sono spesso dedotte da quelle delle corrispondenti opzioni europee.

Un'opzione può anche essere detta:

- *in the money*: se la differenza tra prezzo d'esercizio e prezzo di mercato del bene sottostante è a favore del detentore dell'opzione, per cui l'esercizio di questa comporterebbe un'entrata di cassa
- *out of the money*: se la differenza fra prezzo d'esercizio e prezzo di mercato del bene sottostante è a sfavore del titolare dell'opzione, per cui non si ha esercizio
- *at the money*: se prezzo d'esercizio e prezzo di mercato del sottostante sono circa uguali.

Si deve enfatizzare che le opzioni danno al portatore il diritto e non il dovere di fare qualcosa. Bisogna notare che per acquistare un contratto di opzione si sostiene un costo.

Le opzioni appena descritte sono chiamate standard. Negli anni recenti, le banche e le altre istituzioni finanziarie hanno usato molta immaginazione per creare derivati non standard che vadano incontro alle necessità della clientela. Talvolta, questi derivati vengono venduti direttamente dalle istituzioni finanziarie ai propri clienti societari. In

altre occasioni, vengono inglobati in emissioni obbligazionarie o azionarie al fine di renderle più attraenti per gli investitori. Alcuni derivati fuori standard sono semplici portafogli di due o più *call* e *put* standard. Altri sono molto più complessi. La possibilità di creare nuovi derivati sembra essere senza limite. Questi tipi di derivati sono chiamati opzioni esotiche.

Un tipo di opzioni esotiche sono le opzioni con barriera.

Le opzioni con barriera sono opzioni il cui valore finale dipende dal fatto che il prezzo dell'attività sottostante raggiunga o meno, in un certo periodo di tempo, un dato livello, chiamato appunto barriera.

Possono essere distinte in opzioni "soggette a cancellazione" (*knock-out options*) e "in attesa di validazione" (*knock-in options*). Le prime cessano di esistere quando il prezzo dell'attività sottostante raggiunge una certa barriera. Le seconde iniziano ad esistere solo quando il prezzo dell'attività sottostante raggiunge una certa barriera.

Si hanno diversi tipi di opzioni barriera:

- le *down-and-out call (put)*: sono opzioni *knock-out*. Si tratta di *call (put)* che cessano di esistere quando il prezzo dell'attività sottostante scende fino a raggiungere una certa barriera,  $H$  ( $H < S$  (prezzo del sottostante))
- le *down-and-in call (put)*: rappresentano le corrispondenti opzioni *knock-in*. Si tratta di *call (put)* ordinarie che iniziano ad esistere solo quando il prezzo dell'attività sottostante scende fino a  $H$  ( $H < S$ )
- le *up-and-out call (put)*: sono anch'esse opzioni *knock-out*. Si tratta di *call (put)* che cessano di esistere quando il prezzo dell'attività sottostante sale fino a  $H$  ( $H > S$ )
- le *up-and-in call (put)*: sono le corrispondenti opzioni *knock-in*. Si tratta di *call (put)* che iniziano ad esistere solo quando il prezzo dell'attività sottostante sale fino a  $H$  ( $H > S$ ).

#### 1.4.4 Gli swap

Sono accordi privati tra due società per scambiarsi dei futuri pagamenti. L'accordo definisce le date in cui i pagamenti vengono scambiati e il modo in cui devono essere calcolati.

I due principali tipi di *swap* sono: su tassi d'interesse (*interest rate swap*) e su valute (*currency swap*).

Lo *swap* su tassi d'interesse consiste in: una parte, B, si mette d'accordo con la controparte A per pagarle, per un certo numero di anni e sulla base di un capitale di riferimento detto capitale nozionale, un tasso fisso predeterminato. A sua volta, la parte A si impegna a pagare alla parte B, sullo stesso capitale nozionale e per lo stesso periodo di tempo, un tasso variabile. Le valute in cui sono espressi i due insiemi di pagamenti sono le stesse.

Nella sua forma più semplice, lo *swap* su valute comporta lo scambio del capitale e degli interessi a tasso fisso di un prestito denominato in una valuta contro il capitale e gli interessi a tasso fisso di un prestito denominato in un'altra valuta.

Occorre specificare il capitale in ciascuna delle due valute. Di solito, i capitali, vengono scambiati all'inizio e alla fine dello *swap* e sono scelti in modo tale da essere approssimativamente equivalenti in base al tasso di cambio corrente all'inizio dello *swap*.

Un esempio chiarisce la dinamica dell'operazione di *swap*: si ipotizzi che la società X abbia in corso un finanziamento passivo a tasso fisso dell'11% con vita residua di 5 anni. La società Y risulta, al contrario, indebitata sulla medesima scadenza a tasso variabile pari all'Euribor a 6 mesi. Il capitale di debito per entrambe le società sia pari a 10 milioni di euro. Si ipotizzi, inoltre, che la società X desideri trasformare il tasso passivo da fisso a variabile (in base o ad attese di riduzione dei tassi o per valutazioni inerenti alla composizione del proprio attivo) e che parallelamente la società Y, per motivazioni opposte, ritenga conveniente essere indebitata a tasso fisso.

L'*interest rate swap* permette alle due società di convertire il proprio indebitamento nel tasso desiderato. Infatti la società X si impegnerà a versare alla controparte un flusso di interessi pari all'Euribor a 6 mesi di volta in volta determinato e, specularmente, la società Y si impegnerà a versare alla società X gli interessi relativi all'ammontare definito nella misura dell'11%. Alla scadenza di ciascun periodo di maturazione degli interessi i flussi reali di pagamento saranno determinati dal saldo dei due ammontari.

### 1.4.5 I warrant

Sono opzioni emesse da una società o da un'istituzione finanziaria. Si presentano come titoli al portatore che danno, contro il pagamento di un premio, il diritto alla sottoscrizione, alla vendita (o all'acquisto) alla (o entro la) data di scadenza, di un certo quantitativo di titoli azionari, obbligazioni societarie o valute, ad un prezzo prefissato. Quando il diritto è esercitabile solo ad una certa data (*expiration date*) si parla di *warrant* europeo, al contrario se il diritto è esercitabile in qualsiasi giorno compreso tra la data di emissione e la data di scadenza si parla di *warrant* americano.

Vengono scritti dalle società sui loro stessi titoli. In caso di esercizio, le società emettono nuove azioni che vendono, al prezzo d'esercizio, ai possessori dei *warrant*. Pertanto, l'esercizio comporta l'aumento del numero delle azioni in circolazione. I *warrant* sono opzioni *call* che vengono spesso emesse contestualmente a delle obbligazioni, per far sì che queste risultino più interessanti per i risparmiatori. Tipicamente, i *warrant* scadono dopo un certo numero di anni. Una volta emessi, vengono negoziati separatamente dalle obbligazioni alle quali erano stati originariamente uniti.

Spesso è previsto che il *warrant* possa essere esercitato anticipatamente solo in una parte della sua vita e a volte il prezzo d'esercizio aumenta con il passare del tempo. È contrattabile nel Mercato telematico azionario (Mta).

### 1.4.6 I covered warrant

Sono strumenti diversi dai *warrant*, attraverso i quali il sottoscrittore, contro il pagamento di un premio, acquisisce l'opzione di vendere (*put covered warrant*) o di acquistare (*call covered warrant*) alla (di tipo europeo) o entro la data di scadenza (di tipo americano), un certo quantitativo di attività sottostante, ad un prezzo stabilito (*strike price*).

Sono strumenti derivati perché il loro valore corrente deriva dall'andamento di un'attività finanziaria alla quale essi si riferiscono. Possono avere diverse attività sottostanti quali: indici azionari, tassi d'interesse, rapporti di cambio, titoli di stato ed azioni.

Riferendosi ad attività finanziarie di diversa natura non sempre raggiungono la scadenza con la consegna fisica dei titoli, ma liquidano solamente un differenziale monetario tra il valore dell'attività ed il prezzo di esercizio.

Con questi strumenti assume rilevanza il concetto di multiplo, che è definito come il numero di unità dell'attività sottostante che sono acquisibili (o vendibili) esercitando un *covered warrant*. Ad esempio, se il multiplo è pari a  $1/20$  ciò significa che servono 20 *covered warrant* per acquistare un'unità dell'attività sottostante.

La loro negoziazione avviene presso il Mercato telematico azionario.





## Capitolo 2

# I PRIMI INDICATORI DEL RISCHIO

### 2.1 LA DURATA FINANZIARIA (DURATION)

Gli investimenti in titoli obbligazionari sono soggetti al rischio del tasso di interesse che è dato dal cambiamento del prezzo di mercato di un determinato investimento a seguito del mutare del rendimento richiesto dagli investitori.

Un semplice approccio alla gestione del rischio del tasso d'interesse è rappresentato dalla durata finanziaria (*duration*).

Essa è la media ponderata delle scadenze di ciascun flusso di cassa associato a un titolo obbligazionario, dove il fattore di ponderazione è dato dall'incidenza del valore attuale di ciascun flusso di cassa sul valore attuale complessivo del titolo.

In formula:

$$D = \frac{\sum_t tF_t(1+r)^{-t}}{P} \quad (2.1)$$

dove:

D = durata finanziaria

t = 1, ..., n, indica la scadenza di riscossione dei flussi di cassa (cedole o rimborso del capitale) di cui è caratterizzato un titolo obbligazionario

$\sum_t$  = sommatoria rispetto a t

$F_t$  = flussi di cassa derivanti dal titolo al tempo t

$(1 + r)^{-t}$  = fattore di sconto al tasso r

P = prezzo del titolo, che è dato dalla sommatoria dei flussi attualizzati  $\sum_t F_t (1 + r)^{-t}$ .

Essa quindi misura il tempo che il portatore di un'obbligazione deve attendere, in media, prima di ricevere capitale e interessi.

La durata finanziaria è pari alla durata anagrafica per i titoli privi di cedola dal momento che per questi esiste un solo flusso in entrata che quindi ha ponderazione pari al 100%.

Invece è sempre inferiore alla durata anagrafica nel caso di titoli muniti di cedola; per tali titoli inoltre è compresa fra la scadenza della prima cedola e la data di integrale rimborso.

A parità di scadenza e di altre condizioni, la durata finanziaria è più elevata per i titoli con cedola relativamente bassa, dal momento che, in tal caso, tende ad essere maggiore l'importanza relativa, in termini di valore attuale, dei flussi più remoti, in particolare del prezzo del rimborso.

La durata finanziaria è quindi, in primo luogo, un indicatore corretto della durata di un titolo obbligazionario; inoltre, come precedentemente detto, è un indice di rischio del tasso d'interesse.

Tale circostanza deriva dal fatto che la durata finanziaria esprime la sensibilità del prezzo di un titolo a tasso fisso rispetto al variare del rendimento in quanto è ricavabile sulla base della seguente relazione, basata sulla derivata prima (rispetto al rendimento) della funzione che esprime il prezzo in funzione del rendimento:

$$D = - \frac{dP/P}{d(1+r)/(1+r)} \quad (2.2)$$

Il secondo membro della relazione esprime in termini analitici l'elasticità puntuale del prezzo di un titolo obbligazionario al variare del rendimento. Pertanto un'elevata durata finanziaria è indice di elevata sensibilità del prezzo del titolo al variare del tasso di rendimento di mercato e viceversa.

Di solito si impiega, invece della durata finanziaria, la durata finanziaria modificata (*modified duration*):

$$M_D = \frac{D}{1+r}. \quad (2.3)$$

Infatti la relazione (2.2) può essere scritta come:

$$\frac{dP}{P} = -D \frac{d(1+r)}{1+r} \quad (2.4)$$

dalla quale deriva

$$\frac{dP}{P} = -M_D \cdot d(1+r) \quad (2.5)$$

Il valore della durata finanziaria, come detto, fornisce l'elasticità puntuale del prezzo di un titolo obbligazionario al variare del rendimento; per variazioni discrete dei rendimenti la durata finanziaria consente di stimare, con un grado di approssimazione sempre più ampio all'amplificarsi della variazione del rendimento, la variazione del prezzo di un titolo obbligazionario al variare del rendimento. In altre parole

$$\frac{\Delta P}{P} \cong -M_D \cdot \Delta r \quad (2.6)$$

ovvero

$$\frac{\Delta P}{P} \cong -\frac{D}{(1+i)} \cdot \Delta r \quad (2.7)$$

dove:

$\Delta P$  è la differenza di prezzo (e quindi  $\Delta P/P$  per variazione percentuale di prezzo).

$\Delta r$  è la variazione del tasso d'interesse.

La durata finanziaria porta a sottostimare (sovrastimare) gli aumenti (le riduzioni) di prezzo del titolo obbligazionario connessi con una riduzione (aumento) del rendimento richiesto. L'errore che si compie impiegando la durata finanziaria per stimare le variazioni di prezzo è tanto maggiore quanto maggiore è la variazione dei rendimenti rispetto al rendimento corrente; quindi l'approssimazione della variazione di prezzo che deriva dall'applicazione della durata finanziaria è accettabile solo per variazioni di ridotto ammontare del rendimento.

Il motivo di tale errore consiste nel fatto che la relazione che lega prezzo del titolo obbligazionario e rendimento effettivo dello stesso è di tipo curvilineo, mentre la durata finanziaria esprime la retta tangente a tale curva nel punto identificato dal rendimento corrente del titolo. Più ci si allontana dal punto di tangenza, maggiore è l'errore che si compie approssimando la curva per mezzo di una retta. L'errore, oltre che proporzionale al divario dei tassi di rendimento, è tanto maggiore quanto più convessa è la curva che rappresenta la relazione fra prezzo e rendimento.

## 2.2 LE "GRECHE"

Le istituzioni finanziarie che vendono ai clienti opzioni o altri derivati, nel mercato *over the counter*, si trovano a dover affrontare il problema della gestione del rischio che è ad essi associato. Se le opzioni sono uguali a quelle che vengono trattate in Borsa, le istituzioni finanziarie possono ricomprare in Borsa le stesse opzioni che hanno venduto ai clienti, neutralizzando così la loro esposizione. Invece, quando le opzioni vengono adattate alle necessità dei clienti e non corrispondono ai prodotti standardizzati trattati in Borsa, la copertura dell'esposizione è molto più difficile.

Per risolvere il problema è possibile usare le cosiddette "lettere greche" o più semplicemente "greche". Ogni greca misura una diversa dimensione del rischio di una posizione su opzioni. L'obiettivo degli operatori è quello di gestire le greche in modo che tutti i rischi siano accettabili.

Le greche sono *delta*, *gamma*, *theta*, *rho*, *vega*.

Il delta ( $\Delta$ ) di un'opzione è definito come derivata del prezzo dell'opzione rispetto al prezzo dell'attività sottostante.

Il gamma ( $\gamma$ ) di un'opzione è la derivata del delta dell'opzione rispetto al prezzo dell'attività sottostante, ossia la derivata seconda del valore dell'opzione rispetto al prezzo dell'attività sottostante.

Il theta ( $\Theta$ ) di un'opzione è la derivata del valore dell'opzione rispetto al tempo.

Il rho ( $\rho$ ) di un'opzione è la derivata del valore dell'opzione rispetto al tasso d'interesse.

Il vega di un'opzione è la derivata del valore dell'opzione rispetto alla volatilità dell'attività sottostante.

Per comprendere il concetto di greca e il suo utilizzo è necessario fornire una definizione di differenziale e di espansione in serie di Taylor.

### 2.2.1 Definizione di differenziale

Sia  $I$  un intervallo,  $f : I \rightarrow \oplus$  una funzione e  $x_0$  un punto di  $I$ . Si dice che  $f$  è differenziabile in  $x_0$ , se esiste una funzione lineare  $x \rightarrow L(x) = a \exists x$  ( $a \in \oplus$ ) tale che per  $x \rightarrow x_0$

$$f(x) - f(x_0) - a(x - x_0) = o(x - x_0). \quad (2.8)$$

Se  $f$  è differenziabile in  $x_0$  la funzione lineare  $L : \oplus \rightarrow \oplus$ ,  $L(x) = a \exists x$ , per cui vale (2.8) si chiama differenziale di  $f$  in  $x_0$  ed è indicata con  $d f(x_0)$ ; il suo valore  $ah$  nel punto  $h \in \oplus$  sarà indicato con  $d f(x_0)(h)$ .

Un teorema importante dice che la condizione necessaria e sufficiente affinché  $f : I \rightarrow \oplus$  sia differenziabile in  $x_0$  è che sia derivabile in  $x_0$ .

Per comprendere meglio la definizione di differenziale si devono spiegare alcuni concetti.

### 2.2.2 Definizione di o piccolo

Si dice che  $f$  è o piccolo di  $g$  per  $x$  che tende a  $x_0$  e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \quad (2.9)$$

quando  $f$  è trascurabile rispetto a  $g$  per  $x$  tendente a  $x_0$ .

### 2.2.3 Definizione di funzione trascurabile

Una funzione  $f$  è trascurabile rispetto ad una funzione  $g$  per  $x$  tendente a  $x_0$ , quando esiste una funzione  $h$  tale che:

$$f = g \cdot h \quad (2.10)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0. \quad (2.11)$$

### 2.2.4 Definizione di derivata

Si dice che la funzione  $f$  è derivabile in  $x_0$  se il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad (2.12)$$

esiste come numero reale finito. Il numero  $f'(x_0)$  è detto derivata di  $f$  in  $x_0$ . La funzione  $f'$ , avente come dominio l'insieme dei valori in cui  $f$  è derivabile e il cui valore in  $x_0$  è uguale a  $f'(x_0)$ , è chiamata derivata di  $f$ .

### 2.2.5 Formula di Taylor con il resto di Peano

Siano  $n$  un numero naturale  $\geq 1$  e  $f$  una funzione definita in un intorno di un punto  $c$  e derivabile  $n$  volte in  $c$ . Allora esiste uno e un solo polinomio  $P$  di grado  $\leq n$  che verifica la

$$f(x) = P(x) + o(x - c)^n \text{ per } x \rightarrow c. \quad (2.13)$$

Questo è anche l'unico polinomio di grado  $\leq n$  tale che

$$P^{(k)}(c) = f^{(k)}(c) \text{ per } 0 \leq k \leq n \quad (2.14)$$

ed è dato dalla formula

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k. \quad (2.15)$$

Sostituendo l'espressione (2.15) di  $P$  nella (2.13) otteniamo la cosiddetta formula di Taylor con il resto di Peano

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + o(x-c)^n \quad \text{per } x \rightarrow c \quad (2.16)$$

ove il cosiddetto resto, del quale si evidenzia la proprietà di essere  $o(x-c)^n$ , è la differenza tra  $f$  e il polinomio.

La proprietà di Peano del resto della formula di Taylor è di carattere locale e non può essere utilizzata per ottenere alcuna informazione di tipo quantitativo sui valori della funzione. Ossia dà informazioni solo di tipo asintotico.

### 2.2.6 Teorema di Taylor con il resto di Lagrange

Sia  $I$  un intervallo,  $n \in \mathbb{N}$  e  $f$  una funzione derivabile  $n+1$  volte in  $I$ . Allora per ogni coppia di punti  $c$  e  $x$  di  $I$  esiste almeno un punto  $\xi$  compreso tra  $c$  e  $x$  tale che

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad (2.17)$$

dove  $P_n(x)$  è il polinomio di Taylor di grado  $n$  relativo a  $f$  intorno al punto  $x=c$

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k \quad (2.18)$$

e  $R_n(x)$  è il resto di Lagrange che è dato da

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}. \quad (2.19)$$

Questo teorema può essere esteso anche a funzioni che hanno le derivate di tutti gli ordini.



Se si può mostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad (2.20)$$

per tutti gli  $x$  in qualche intervallo  $I$ , allora si può concludere che per  $x$  in  $I$ ,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k \quad (2.21)$$

cioè può essere espressa come somma di una serie infinita di termini che sono potenze intere positive di  $(x - c)$  moltiplicate per una costante e la serie converge per tutti gli  $x$  in  $I$ . Tali polinomi “di grado infinito” sono chiamati serie di potenze o serie di Taylor.

### 2.2.7 Il modello di Black e Scholes

Per calcolare il valore delle greche è necessario conoscere il valore dell'opzione. La valutazione finanziaria di un'opzione può essere effettuata per mezzo del modello sviluppato da Black e Scholes. Il modello di Black e Scholes, nella sua formulazione base, poggia sui seguenti assunti:

- il prezzo dello strumento sottostante è continuo
- il tasso di interesse privo di rischio, a breve, è noto e costante per tutte le scadenze
- la varianza dei profitti è costante
- i mercati dei capitali sono perfetti (sono cioè possibili vendite allo scoperto, senza costi di transizione né tasse, e i mercati operano continuamente).

Il processo stocastico che genera i profitti può essere modellizzato utilizzando il “*moto geometrico browniano*”: in ogni intervallo di tempo arbitrario  $dt$ , il logaritmo dei profitti ha una distribuzione normale con media  $\mu dt$  e varianza  $\sigma^2 dt$ . In questo modo il profitto totale può essere descritto come

$$\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz \quad (2.22)$$

dove  $dz$  è una distribuzione normale con media zero e varianza  $dt$ .

Basandosi su queste premesse, nel 1973 Black e Scholes derivarono la famosa equazione per le opzioni europee, successivamente estesa da Merton al caso di opzioni su azioni che pagano un dividendo continuo.

## 2.2.8 Le greche di una call e di una put standard

Le formule di Black e Scholes del prezzo,  $c$ , di una *call* europea e del prezzo,  $p$ , di una *put* europea su un titolo che paga un dividendo continuo sono:

$$c = Se^{-qt}N(d_1) - Ke^{-rt}N(d_1 - \sigma\sqrt{t}) \quad (2.23)$$

$$p = Ke^{-rt}[N(d_1 - \sigma\sqrt{t}) - 1] - Se^{-qt}[N(d_1) - 1] \quad (2.24)$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \quad (2.25)$$

$N(a)$  = funzione di distribuzione di una variabile normale con media nulla e deviazione standard pari a uno.

$S$  = prezzo del sottostante

$K$  = prezzo d'esercizio (*strike price*)

$r$  = tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente

$q$  = dividendo (*dividend yield*)

$\sigma$  = volatilità del prezzo del sottostante

$t$  = vita residua dell'opzione, espressa in frazione d'anno

Il valore delle greche per queste opzioni è:

$$\Delta_c = e^{-qt}N(d_1)$$

$$\Delta_p = e^{-qt}(N(d_1) - 1)$$

$$\gamma_{c,p} = \frac{e^{-qt} N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{t}}$$

$$\Theta_c = -\frac{e^{-qt} S \cdot N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{t}} + qSe^{-qt} N(d_1) - rKe^{-rt} N(d_1 - \sigma\sqrt{t})$$

$$\Theta_p = -\frac{e^{-qt} S \cdot N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{t}} - qSe^{-qt} [N(d_1) - 1] + rKe^{-rt} [N(d_1 - \sigma\sqrt{t}) - 1]$$

$$\rho_c = Kte^{-rt} N(d_1 - \sigma\sqrt{t})$$

$$\rho_p = -Kte^{-rt} [N(d_1 - \sigma\sqrt{t}) - 1]$$

$$vega_{c,p} = S\sqrt{t} \cdot e^{-qt} N'(d_1)$$

Si rimanda all'appendice A per il *pricing* delle opzioni con barriera e per il valore delle greche, delta e gamma, di queste opzioni.

## *Capitolo 3*

### **IL VALORE A RISCHIO (VALUE AT RISK)**

#### 3.1 INTRODUZIONE

Questa metodologia fu sviluppata per sintetizzare in un unico numero tutte le informazioni relative ai rischi di un portafoglio, in modo che i calcoli fossero relativamente semplici, relativamente rapidi e facilmente comunicabili e comprensibili da manager di formazione non tecnica.

Il *Value at Risk* (VaR) è una grandezza di natura statistica, e misura la massima perdita associata ad un portafoglio di attività finanziarie che, con un determinato livello di confidenza  $\alpha$ , potrà verificarsi detenendo il portafoglio a posizioni inalterate. Più precisamente, data una probabilità del  $(1-\alpha)\%$  e un periodo di  $t$  giorni, il VaR è la perdita che ci si aspetta venga ecceduta solo con una probabilità dell' $\alpha\%$  nei prossimi  $t$  giorni.

Il VaR ha rappresentato un significativo passo in avanti in riferimento alle greche che sono le più tradizionali misure basate sulla sensibilità delle variabili di mercato. Questo perché il VaR:

1. si applica ad ogni strumento finanziario ed è espresso nella stessa unità di misura, cioè “soldi persi”. Al contrario, le greche sono misure create ad hoc per specifici strumenti o variabili di rischio e sono espresse in differenti unità di misura

2. include una stima degli eventi futuri e permette di trasformare in un singolo numero il rischio di un portafoglio. Le greche, al contrario, sono misure che dicono di quanto varia lo strumento finanziario a fronte della variazione di una variabile da cui dipende.

Nel caso di portafogli complessi esposti a molte variabili di rischio, il calcolo del VaR sotto l'aspetto computazionale può essere molto arduo. Quindi si rende necessario ricorrere ad assunzioni, a volte anche forti, sia sulla dipendenza funzionale degli strumenti finanziari che sulle distribuzioni di probabilità.

Al momento dell'interpretazione dei risultati finali e nel loro uso è necessaria la consapevolezza delle ipotesi che sono state fatte, ossia che il risultato ottenuto è relativo al livello di confidenza scelto e al periodo di tempo considerato.

### 3.2 I MODELLI PER IL CALCOLO DEL VALORE A RISCHIO

Il VaR è un percentile della distribuzione Profitti e Perdite.

Se  $(1-\alpha)\%$  è un livello di confidenza e  $x^{(\alpha)}$  è l' $\alpha$ -esimo percentile della distribuzione di probabilità del cambiamento di valore della posizione (ossia Profitti e Perdite),  $\Delta V = V_T - V_t$ , dove  $V_t$  è il valore in  $t$  di un portafoglio e  $V_T$  è il suo valore aleatorio a una data futura  $T$ , si ha che:

$$\Pr(\Delta V \leq x^{(\alpha)}) = \alpha. \quad (3.1)$$

Il VaR al livello  $(1-\alpha)$  è dato da:

$$VaR^{(1-\alpha)} = x^{(\alpha)} \quad (3.2)$$

ossia è il quantile della distribuzione che lascia alla sua sinistra l' $\alpha\%$  di probabilità.

Tre dei possibili metodi per il calcolo del valore a rischio sono:

- l'approccio parametrico (anche detto approccio varianza/covarianza o analitico)
- la simulazione storica

➤ la simulazione di Monte Carlo

L'approccio parametrico è quello che più si avvicina alle definizioni e ai concetti derivati dalla moderna teoria di portafoglio in quanto esprime il *Value at Risk* come multiplo di deviazioni di profitti (o delle perdite) del portafoglio. In generale, viene utilizzato in presenza di portafogli composti da strumenti finanziari con *payoff* lineari (ad esempio obbligazioni o depositi), mentre la simulazione di Monte Carlo è preferita nel caso di portafogli i cui strumenti sono caratterizzati da dipendenze non-lineari (come le opzioni). La simulazione storica si pone in una posizione intermedia.

La simulazione di Monte Carlo è, in genere, l'approccio che viene preferito. Tuttavia, quando i portafogli in oggetto sono caratterizzati da rischi non-lineari poco significativi l'approccio parametrico può rappresentare una buona approssimazione.

Si illustrano le caratteristiche generali dei tre metodi di calcolo.

### 3.2.1 L'approccio parametrico

Si assume che le variazioni dei parametri di mercato si distribuiscano in modo normale. Da ciò deriva che la media e la varianza della distribuzione dei valori di portafoglio possono essere calcolate a partire dalla media e dalla varianza dei parametri di mercato sottostanti.

Il concetto del *Value at Risk* si basa su alcune semplici considerazioni:

- il rischio totale si compone del rischio non-sistematico o specifico che può essere ridotto per mezzo della diversificazione e il rischio sistematico o di mercato che non può essere diversificato (si veda Statman (1987))
- per misurare il rischio, nel caso dell'approccio parametrico, si deve assumere che la distribuzione di probabilità dei rendimenti segua una forma normale
- una distribuzione normale si caratterizza per due soli parametri: la media, che indica la posizione del centro della campana gaussiana e la deviazione standard, che indica invece la sua forma più o meno appiattita.

All'approccio parametrico appartengono diversi metodi, che verranno trattati singolarmente.

### 3.2.1.1 Il valore a rischio di una singola attività finanziaria

Il valore a rischio per un singolo bene è espresso dalla seguente formula:

$$VaR = V \cdot \Delta \cdot N^{-1}(1-\alpha) \cdot \sigma \sqrt{t} \quad (3.3)$$

dove  $V$  è il valore del bene,  $\sigma \sqrt{t}$  è la misura della volatilità, espressione che è legata all'ipotesi di indipendenza dei rendimenti,  $\Delta$  è una greca che rappresenta la sensibilità dell'attività finanziaria a variazioni del fattore di mercato nei confronti del quale l'attività è esposta,  $N^{-1}(z)$  è l'inversa della distribuzione normale standard cumulativa, ossia il quantile della normale,  $(1-\alpha)$ , come già visto, è il livello di confidenza desiderato.

Si supponga di voler misurare il valore a rischio connesso a una posizione in un Btp decennale con valore di mercato pari a 50 mila euro, con durata finanziaria (*duration*) modificata pari a 6. Volendo ottenere una misura di rischio giornaliero con un livello di confidenza del 99% ( $N^{-1}(1-\alpha)$  è quindi pari a 2,33) e avendo stimato una volatilità giornaliera del tasso decennale del 0,15%, si ha:

$$VaR = 50000 \cdot 6 \cdot 2,33 \cdot 0,0015 = 1050$$

Un VaR di 1050 euro indica che detenendo il Btp decennale a posizioni inalterate per un giorno la massima perdita che si potrebbe sopportare non risulterà maggiore, nel 99% dei casi, a 1050 euro.

### 3.2.1.2 L'approccio delta-normal

Per calcolare il rischio di un portafoglio di più attività finanziarie si considerano i coefficienti di correlazione fra i rendimenti dei diversi fattori di mercato coinvolti. Questo approccio parte dall'analisi della volatilità dei rendimenti dei fattori di mercato e ipotizza che tali rendimenti siano distribuiti normalmente. Ossia prevede che il VaR di un portafoglio di  $N$  posizioni sia misurato sulla base dei coefficienti di correlazione fra i rendimenti dei diversi fattori di mercato:

$$VaR = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (V_i \cdot \Delta_i \cdot N^{-1} (1-\alpha) \cdot \sigma_i \sqrt{t}) \cdot (V_j \cdot \Delta_j \cdot N^{-1} (1-\alpha) \cdot \sigma_j \sqrt{t}) \rho_{ij}} \quad (3.4)$$

dove  $\rho_{ij}$  rappresenta il coefficiente di correlazione fra il rendimento del fattore di mercato  $i$  e il rendimento del fattore di mercato  $j$ , la sua espressione è la seguente:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \quad (3.5)$$

dove  $\sigma_{ij}$  è la covarianza tra il rendimento dello strumento  $i$  e il rendimento dello strumento  $j$ ,  $\sigma_i$  e  $\sigma_j$  sono rispettivamente la varianza dello strumento  $i$  e dello strumento  $j$ . Questo è un indice normalizzato che se assume valore 1 indica dipendenza lineare esatta con coefficiente angolare positivo e, viceversa se assume valore  $-1$  indica dipendenza lineare esatta con coefficiente negativo. Se assume valore 0 significa che le due variabile sono incorrelate in senso forte.

Quando si ha un portafoglio reale composto da numerose posizioni, diviene più agevole ricorrere all'algebra matriciale per il calcolo del rischio. Si consideri un portafoglio composta da tre posizioni, A, B e C, rispettivamente caratterizzate da valore a rischio pari a  $VaR_A$ ,  $VaR_B$ ,  $VaR_C$ .

I valori a rischio relativi alle singole posizioni possono essere espressi in forma vettoriale come:

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} VaR_A \\ VaR_B \\ VaR_C \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

I coefficienti di correlazione relativi ai rendimenti dei tre fattori di mercato rilevanti possono essere espressi in forma matriciale nel seguente modo:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{AB} & \rho_{AC} \\ \rho_{BA} & 1 & \rho_{BC} \\ \rho_{CA} & \rho_{CB} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Il valore a rischio del portafoglio può, a questo punto, esprimersi come:



$$VaR = \sqrt{\tilde{V} \cdot C \cdot \tilde{V}^T} \quad (3.8)$$

dove  $\tilde{V}^T$  rappresenta il trasposto del vettore  $\tilde{V}$ .

L'approccio delta-normal ipotizza che solo i rendimenti dei fattori di mercato siano caratterizzati da una distribuzione normale congiunta e non anche i prezzi delle posizioni.

### 3.2.1.3 L'approccio RiskMetrics

Questo approccio alla gestione del rischio di mercato, introdotto nel 1994 dalla banca d'affari americana J. P. Morgan, è essenzialmente la combinazione di una metodologia analitica per la misurazione del rischio finanziario e dei corrispondenti dati statistici necessari per l'applicazione del metodo e per il calcolo del valore a rischio. Pur sottoposta a numerose critiche relative alle ipotesi utilizzate e alle tecniche di calcolo proposte, questa metodologia si è affermata in breve tempo fino a divenire lo standard di mercato per la misurazione del VaR.

Si ha una serie di ipotesi e semplificazioni che limitano la validità dell'approccio RiskMetrics e che devono pertanto essere tenute in considerazione.

La prima assunzione semplificatrice è sulle distribuzioni normali delle variazioni nei rendimenti e nel valore del portafoglio. Essa consente di tradurre facilmente qualsiasi livello di confidenza scelto per il calcolo del VaR in una specifica frazione di deviazioni standard. Tuttavia la distribuzione dei rendimenti del portafoglio può risultare anche notevolmente diversa da quella normale quindi il VaR non risulta più un semplice multiplo della deviazione standard dei rendimenti del portafoglio.

L'ipotesi che l'esposizione del portafoglio al rischio di mercato possa essere stimata assumendo una distribuzione normale si basa, oltre che sull'assunzione di rendimenti per le singole attività finanziarie distribuiti normalmente, anche sull'assunzione di linearità nella relazione tra questi ultimi e il rendimento del portafoglio aggregato della banca. Ciò non risulta valido nel caso in cui il portafoglio in oggetto contenga opzioni. Infatti la relazione tra il prezzo dell'attività sottostante e il prezzo dell'opzione non è di tipo lineare, di conseguenza la distribuzione dei rendimenti non risulta normale anche nel caso in cui lo fosse quella dei rendimenti delle attività sottostanti.

La seconda semplificazione prevede la costanza nel tempo delle volatilità e delle correlazioni stimate sulla base dei dati storici. In realtà, le variabilità e le correlazioni non sono costanti nel tempo e possono cambiare anche in modo significativo, in particolare durante periodi di estrema instabilità dei mercati finanziari (si veda Gallo e Pacini (2002)).

La terza ipotesi semplificatrice riguarda il concetto di mappatura dei flussi di cassa (*cash flow mapping*), ovvero la descrizione dei futuri flussi di cassa per ciascuna delle attività finanziarie contenute in portafoglio. RiskMetrics assume che i flussi attivi e passivi avvengano solamente in un numero discreto e limitato di punti (nodi o vertici o buckets) lungo l'asse temporale e che siano tutti di natura deterministica.

Un esempio di gruppo di vertici è:

*1m 3m 6m 1a 2a 3a 4a 5a 7a 9a 10a 15a 20a 30a.*

Mappare un flusso di cassa significa separarlo tra due adiacenti vertici.

La figura mostra come un flusso di cassa attuale riferito al 6anno è separato in flussi di cassa sintetici riferiti ai vertici di 5anni e 7anni.

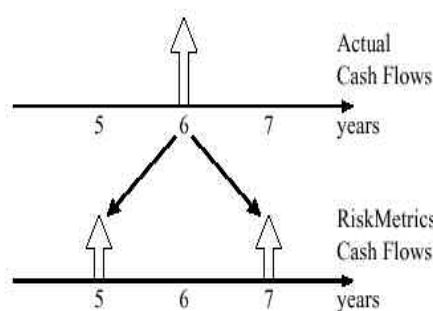


Figura 3.1. Esempio di mappatura dei flussi di cassa

Dopo la mappatura, un portafoglio di strumenti finanziari è trasformato in un portafoglio di flussi di cassa standard.

La mappatura comincia con l'interpolazione lineare dei tassi d'interesse, cioè:

$$z_t = \alpha z_L + (1-\alpha) z_R \quad (3.9)$$

dove  $\alpha = \frac{t_R - t}{t_R - t_L}$ ,  $t$  è la scadenza di un titolo obbligazionario privo di cedole (*zero-coupon bond*),  $t_L$  e  $t_R$  sono i vertici adiacenti sinistro e destro,  $z_L$  e  $z_R$  sono i corrispondenti tassi di rendimento del titolo privo di cedole (*zero rates*) ai vertici sinistro e destro.

Per preservare il valore attuale  $V_t$  del flusso di cassa, dovremmo avere la seguente equivalenza:

$$V_t = e^{-z_t t} = W_L e^{-z_L t_L} + W_R e^{-z_R t_R} + C. \quad (3.10)$$

La mappatura del flusso di cassa dovrebbe anche preservare la sensitività del valore attuale di cambio nei tassi di rendimento per i due vicini vertici. Questo è equivalente a prendere la derivata parziale di (3.10) rispetto a  $z_L$  e  $z_R$  mentre tenere  $W_R$ ,  $W_L$  e  $C$  costanti. Ciò che si ottiene è:

$$W_L = \alpha \frac{t}{t_L} e^{-z_L t_L} e^{-z_t t} \quad (3.11)$$

$$W_R = (1 - \alpha) \frac{t}{t_R} e^{-z_R t_R} e^{-z_t t} \quad (3.12)$$

$$C = -\frac{(t - t_L)(t_R - t)}{t_R t_L}. \quad (3.13)$$

Quindi l'ammontare di  $V_t$  euro investiti in un titolo obbligazionario privo di cedole con scadenza al tempo  $t$  può essere rappresentato da un portafoglio di  $\left(\alpha \frac{t}{t_L} V_t\right)$  euro (il valore attuale di  $W_L$ ) investiti in un titolo obbligazionario con scadenza uguale al vertice sinistro,  $\left[(1 - \alpha) \frac{t}{t_R}\right]$  euro (il valore attuale di  $W_R$ ) investiti in un titolo obbligazionario con scadenza uguale al vertice destro, e una posizione di contante di  $\left[-\frac{(t - t_L)(t_R - t)}{t_R t_L}\right]$ .

### 3.2.1.4 L'approccio portafoglio-normal

Questo approccio calcola il VaR di un portafoglio composto da più posizioni di rischio partendo direttamente dalla volatilità del rendimento del portafoglio, senza scomporre quest'ultimo nelle sue componenti principali. Si basa sull'ipotesi che il rendimento del portafoglio sia distribuito normalmente. Tale ipotesi è giustificata in uno dei seguenti casi:

- a. se il portafoglio è composto da un numero elevato di posizioni la cui distribuzione, al limite, tende a una normale
- b. se i rendimenti del portafoglio sono effettivamente distribuiti normalmente e la composizione del portafoglio resta costante
- c. se il portafoglio è composto da un insieme di posizioni ognuna delle quali è caratterizzata da un rendimento distribuito normalmente.

### 3.2.1.5 L'approccio delta-gamma

Nel misurare il VaR di una singola attività così come quello relativo a un intero portafoglio, è possibile considerare la derivata prima (delta,  $\Delta$ ) e seconda (gamma o convessità,  $\gamma$ ) del prezzo rispetto al rendimento del fattore di mercato rilevante.

L'espressione del VaR per la singola attività è la seguente:

$$VaR_i = V_i \cdot \left( \Delta_i \cdot N^{-1}(1-\alpha) \cdot \sigma_i + \frac{\gamma}{2} \cdot (N^{-1}(1-\alpha))^2 \cdot \sigma_i^2 \right) \quad (3.14)$$

che deriva dallo sviluppo in serie di Taylor.

Questo approccio presenta un livello di precisione maggiore nel calcolo del VaR per quelle posizioni che presentano una relazione non-lineare rispetto ai fattori di mercato, come le posizioni in titoli obbligazionari o in opzioni.

L'approccio delta-gamma risulta alquanto complesso se nel calcolare il VaR delle singole posizioni si utilizza la volatilità del valore di mercato anziché la volatilità del fattore di rischio.

I tre aspetti più importanti dell'approccio varianze-covarianze sono:

- la scelta del livello di confidenza
- la scelta del periodo temporale di riferimento
- la stima della volatilità.

Il livello di confidenza  $(1-\alpha)$  definisce il grado di avversione al rischio della singola istituzione finanziaria, esprime implicitamente il livello di protezione dai movimenti avversi dei fattori di mercato che si intende ottenere. Dato che l'approccio parametrico ricorre all'ipotesi di distribuzione normale dei rendimenti, la soluzione di tale problema si traduce nell'utilizzo di un determinato multiplo della deviazione standard come misura dello scenario pessimistico e dunque per la determinazione della massima perdita potenziale.

Tipicamente si scelgono per  $(1-\alpha)$  valori del 95% o del 99%: più ampio è il livello di confidenza adottato ( $(1-\alpha) = 95\%$  stabilisce un intervallo di confidenza più ampio di  $(1-\alpha) = 99\%$ ), maggiore è la precisione del VaR nel fornire una stima del rischio, ma minore è il contributo del VaR in termini informativi, dato che viene esclusa una gamma più ristretta di valori.

Il periodo temporale di riferimento ( $t$ ) di solito è pari a 1 giorno, 2 settimane lavorative (10 giorni) o un mese. L'ipotesi fondamentale è che la composizione del portafoglio resti immutata nell'arco temporale considerato: perciò, la scelta dell'orizzonte temporale dipende dalla frequenza con cui il portafoglio è sottoposto a movimentazioni e dal periodo necessario per la liquidazione del portafoglio. Ovviamente per ottenere la stima del VaR con periodo di riferimento di un giorno si utilizzeranno stime della volatilità giornaliera. Per trasformare la volatilità giornaliera in una volatilità relativa ad un periodo più lungo, senza ricalcolare tutte le variazioni, si utilizza la seguente formula:

$$\sigma_t = \sigma_g \cdot \sqrt{t} \quad (3.15)$$

dove

$\sigma_t$  = volatilità relativa al periodo  $t$

$\sigma_g$  = volatilità giornaliera

$t$  = periodo temporale per il quale si vuole calcolare la volatilità.

In altre parole il passaggio dalla volatilità giornaliera a quella settimanale o mensile può essere effettuato moltiplicando la prima per la radice quadrata del numero di giorni di negoziazione presenti nell'arco temporale considerato. Tale passaggio trova giustificazione nell'ipotesi di indipendenza o di non correlazione seriale dei rendimenti giornalieri che compongono il periodo  $t$ .

La stima della volatilità dei fattori di mercato, o delle posizioni è un aspetto piuttosto critico. Volendo solo accennare il problema, si possono raggruppare in tre principali categorie i metodi utilizzati per la stima della volatilità.

La prima categoria è rappresentata dai modelli basati sulle volatilità e correlazioni storiche che utilizzano tali stime come previsione di volatilità e correlazione future.

Tali modelli, molto diffusi per la loro semplicità, presentano lo svantaggio di ipotizzare una distribuzione stabile nel tempo, in contrasto con l'evidenza empirica.

Il secondo metodo utilizzato per la previsione di volatilità e correlazioni è rappresentato dai modelli della famiglia GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), i quali ipotizzano che le volatilità e le correlazioni siano variabili nel tempo. Con questi modelli dai dati storici si possono costruire poi delle previsioni per le volatilità future.

Infine, il terzo criterio è rappresentato dall'utilizzo delle previsioni delle volatilità e delle correlazioni implicite nei prezzi dell'opzione. Ossia dal prezzo delle opzioni si ricava una stima della volatilità che altro non è che la previsione del mercato relativa alla volatilità che si manifesterà nel corso della vita dell'opzione.

Alla base dell'approccio parametrico vi sono due ipotesi relative ai rendimenti dei fattori di mercato:

- varianza costante (omoschedasticità)
- distribuzione normale.

Tali ipotesi sono spesso smentite dal comportamento reale delle variabili finanziarie.

La volatilità, ad esempio dei titoli azionari quotati in borsa, si può osservare come non sia costante nel tempo. Infatti essa subisce delle fluttuazioni significative. Tale fenomeno, indicato con il termine di *volatility clustering*, sta ad indicare che i fattori di

mercato presentano spesso periodi di maggiore volatilità che possono anche persistere per periodi prolungati.

L'ipotesi di normalità della distribuzione dei rendimenti è stata oggetto di critiche basate sulle seguenti conclusioni empiriche:

- le distribuzioni dei rendimenti delle attività finanziarie presentano generalmente delle code più spesse (*fat tails*) di quelle proprie della normale. Tale caratteristica prende il nome di leptocurtosi
- il picco intorno alla media è generalmente più elevato di quello di una distribuzione normale, ossia la probabilità di ottenere risultati molto più vicini alla media è più elevata di quella nel caso di distribuzione normale. Tale fenomeno prende il nome di leptocurtosi
- le variazioni di prezzo, e conseguentemente i rendimenti, delle attività finanziarie sono generalmente distribuite in modo non perfettamente simmetrico. Tale fenomeno prende il nome di asimmetria, che in genere sarà negativa.

### 3.2.2 La simulazione storica

Questo metodo non richiede alcuna assunzione riguardo la distribuzione di probabilità dei rendimenti. In un modello di simulazione storica si ipotizza che i potenziali cambiamenti nei rendimenti siano ben rappresentati dalla loro distribuzione empirica storica, cioè dai cambiamenti registrati in un periodo passato. Inoltre non richiede alcuna mappatura dei flussi di cassa per ridurre la dimensionalità dei dati.

All'interno della simulazione storica esistono due misure del VaR: il VaR parametrico e quello non parametrico.

In entrambi i tipi di VaR esistono alcune fasi che devono essere necessariamente effettuate, cioè:

- a. la scelta del periodo di detenzione (*holding period*)
- b. il calcolo statistico – utilizzando una base storica formata da  $n$  rendimenti passati – delle variazioni di valore intervenute nel periodo di detenzione

- c. l'applicazione di tali variazioni storiche al valore corrente del portafoglio, ottenendo così  $n$  ipotetici cambiamenti di valore
- d. la scelta del livello di confidenza

Nel calcolo del VaR parametrico le fasi che devono essere effettuate sono:

- e. il calcolo della media e della deviazione standard delle variazioni storiche di valore del portafoglio ottenute in c.
- f. la sottrazione dalla media del numero di deviazioni standard necessarie per ottenere il livello di confidenza prescelto.

Nel caso di VaR non-parametrico, si effettueranno invece le seguenti fasi:

- g. ordinamento delle variazioni di portafoglio ipotetiche calcolate in c. dal risultato migliore al risultato peggiore
- h. stima della massima perdita potenziale: ad esempio se il livello di confidenza prescelto è il 95%, si considererà il valore corrispondente al 97,5° percentile dell'ordinamento effettuato in g.

I pregi della simulazione storica sono che è estremamente semplice, non devono essere svolte stime dei parametri, i dati delle serie storiche non debbono essere elaborati. La distribuzione empirica dei fattori di mercato è catturata nella sua integrità. Inoltre vengono superati i problemi posti da non linearità e non monotonicità dei payoff.

Un limite della simulazione storica è costituito dall'ipotesi implicita che i dati storici costituiscano le realizzazioni di distribuzioni indipendenti e identicamente distribuite.

Ma se la distribuzione sottostante dei rendimenti dei fattori di mercato non è costante nel tempo, non è possibile considerare la distribuzione empirica come una sua rappresentazione. Un secondo limite è legato alla lunghezza della serie storica di riferimento. In genere le serie contengono poche osservazioni, ciò provoca una scarsa definizione delle code della distribuzione empirica di probabilità. Ma incrementare il più possibile la lunghezza della serie storica di riferimento può essere negativo per



motivi legati alla stabilità della distribuzione. Un ultimo problema derivante dall'utilizzo dei metodi di simulazione storica è relativo all'intensità di calcolo richiesta. Questa risulterà tanto maggiore quanto più numerosi e complessi sono gli strumenti in portafoglio e quanto più elevato è il numero dei fattori di mercato cui il portafoglio risulta sensibile.

### 3.2.3 La simulazione di Monte Carlo

Questo metodo consiste nel simulare diverse volte il valore dei singoli elementi costituenti il portafoglio.

Per il calcolo del valore teorico del portafoglio spesso si utilizza in prima approssimazione l'espansione in serie di Taylor. In base ad essa, il valore di un bene avente caratteristiche di non linearità, può essere approssimato come:

$$\text{rivalutazioneportafoglio} = \Delta \cdot \Delta S + 0,5 \cdot \gamma \cdot \Delta S^2 + \text{vega} \cdot \Delta \sigma + \rho \cdot \Delta r + \Theta \quad (3.16)$$

dove  $\Delta S = S_t - S_{t-1}$  è la variazione simulata del valore del bene,  $\Delta \sigma = \sigma_t - \sigma_{t-1}$  è la variazione simulata della volatilità del bene,  $\Delta r = r_t - r_{t-1}$  è la variazione simulata dei tassi di interesse,  $\Delta$ ,  $\gamma$ , *vega*,  $\rho$  e  $\Theta$  sono le greche, cioè le derivate parziali di funzioni non-lineari, tipiche di strumenti con opzionalità.

L'approccio richiede le seguenti fasi di calcolo:

1. simulazione delle variazioni di tutti i parametri di mercato rilevanti (tassi, prezzi, volatilità), che avviene attraverso l'utilizzo di modelli matematico-statistici (ad esempio il modello di Vasicek che permette di stimare l'andamento dei tassi d'interesse nel tempo)
2. calcolo delle variazioni del valore di portafoglio per ciascuno degli scenari simulati, in base a un certo algoritmo di rivalutazione (come ad esempio l'espansione in serie di Taylor)
3. ripetizione dei passi 1. e 2. per un certo numero di volte (in genere 10000 volte), al fine di ottenere una distribuzione delle variazioni del valore di portafoglio

4. ordinamento dei risultati di cui al punto 3.: il valore a rischio è il percentile legato al livello di confidenza scelto.

Quindi, la simulazione di Monte Carlo genera delle rappresentazioni di variabili casuali, trasforma questi numeri in altrettanti scenari di mercato e li applica, attraverso la rivalutazione, al portafoglio, al fine di generare una distribuzione di profitti e perdite.

La simulazione di Monte Carlo è indicata per catturare gli impatti non-lineari dei parametri, consente di utilizzare diverse distribuzioni di probabilità empiriche, inoltre è in grado di generare un'ampia scelta di possibili scenari evolutivi per ciascuna delle variabili rilevanti. Tra i lati negativi occorre porre la complessità matematica e gli elevati tempi computazionali ad essa legati.



## Capitolo 4

# L'EXPECTED SHORTFALL

### 4.1 INTRODUZIONE

Con l'aumento dell'importanza della misurazione del rischio, nasce la necessità di vedere quali proprietà dovrebbe avere una statistica di un portafoglio in modo tale da essere considerata una buona misura di rischio.

Infatti, fu pubblicato un articolo da Artzner, *et al* (1997), in cui veniva affrontato per la prima volta il problema della definizione di una misura coerente di rischio.

La definizione di misura coerente di rischio è la seguente:

si consideri un insieme  $V$  di variabili casuali a valori reali; una funzione  $p: V \rightarrow \oplus$  è chiamata misura di rischio se è:

- i. *monotona*:  $X, Y \in V, X \leq Y \Rightarrow p(Y) \leq p(X)$
- ii. *sub-additiva*:  $X, Y, X+Y \in V \Rightarrow p(X+Y) \leq p(X) + p(Y)$
- iii. *omogenea positiva*:  $X \in V, h > 0, hX \in V \Rightarrow p(hX) = h * p(X)$
- iv. *invariante traslazionale*:  $X \in V, a \in \oplus \Rightarrow p(X+a) = p(X) - a$

Sorprendentemente il VaR, la misura del rischio adottata come miglior procedura da moltissime banche, non è sempre una misura coerente di rischio perché non soddisfa, nel caso di distribuzioni diverse da quella gaussiana, l'assioma di sub-additività.

Questa proprietà esprime il fatto che un portafoglio composto da sottoportafogli avrà un ammontare di rischio che è al più la somma dell'ammontare di rischio dei suoi singoli sottoportafogli.

Il rischio globale di un portafoglio è la somma dei rischi delle sue parti solamente nel caso in cui le cause di questi rischi agiscono nella stessa direzione. In tutti gli altri casi il rischio globale sarà minore della somma dei suoi rischi parziali e questo grazie alla diversificazione del rischio.

Per una misura sub-additiva, la diversificazione conduce sempre a una riduzione del rischio, mentre per le misure che violano questo assioma, la diversificazione produce un incremento nel loro valore quando i rischi parziali sono provocati da eventi che non hanno un andamento esattamente concorde.

Un'altra critica al VaR è che non fornisce una stima per l'ampiezza delle perdite in quegli scenari dove la soglia del VaR è superata.

Quindi nasce l'esigenza di trovare una misura alternativa al VaR che sia coerente anche nel caso di distribuzioni non normali.

L'Expected Shortfall (ES) è una misura sub-additiva del rischio che descrive quanto le perdite sono ampie, in media, quando esse eccedono il livello del VaR.

Il seguente esempio tratto da Acerbi, *et al* (2001) mostra come ES rispetta il principio di sub-additività mentre il VaR non lo rispetta:

<b>Probabilità</b>	<b>Portafoglio A</b>	<b>Portafoglio B</b>	<b>Portafoglio A+B</b>
3%	70	100	170
2%	90	100	190
3%	100	70	170
2%	100	90	190
90%	100	100	200
Valore iniziale	98,9	98,9	197,8
VaR 5%	8,9	8,9	27,8
ES 5%	20,9	20,9	27,8

Si nota come il VaR ottenuto dal portafoglio somma è maggiore della somma dei VaR dei singoli sub-portafogli. Si osserva anche che ES dà risultati opposti e questi sono sub-additivi.

ES fornisce ulteriori informazioni circa la coda della distribuzione Profitti e Perdite (*Profit and Loss*). Matematicamente, possiamo definire l'Expected Shortfall come la media condizionata delle perdite di un portafoglio dato che esse sono maggiori del VaR.

Sia, come nel capitolo precedente,  $\Delta V = V_T - V_t$  il cambiamento di valore della posizione, ossia Profitti e Perdite, dove  $V_t$  è il valore in  $t$  di un portafoglio e  $V_T$  è il suo valore aleatorio a una data futura  $T$ , allora ES può essere scritto come segue:

$$\text{Expected Shortfall} = E[\Delta V \mid \Delta V < \text{VaR}] \quad (4.1)$$

Anche se l'Expected Shortfall non è al momento usato ampiamente come il VaR, è una statistica utile che fornisce importanti informazioni aggiuntive. In particolare, permette il confronto diretto delle code delle due distribuzioni. Si può pensare ad ES come una misura media di quanto pesante è la coda della distribuzione.

ES ha anche alcune proprietà desiderabili che al VaR mancano. Ad esempio, sotto alcune condizioni tecniche, ES è una funzione convessa dei pesi del portafoglio, queste proprietà lo rendono estremamente utile nel risolvere problemi di ottimizzazione quando si vuole minimizzare il rischio soggetto a certi vincoli.

Per comprendere meglio che cos'è il valore a rischio e l'Expected Shortfall e la loro differenza si può osservare il seguente grafico:

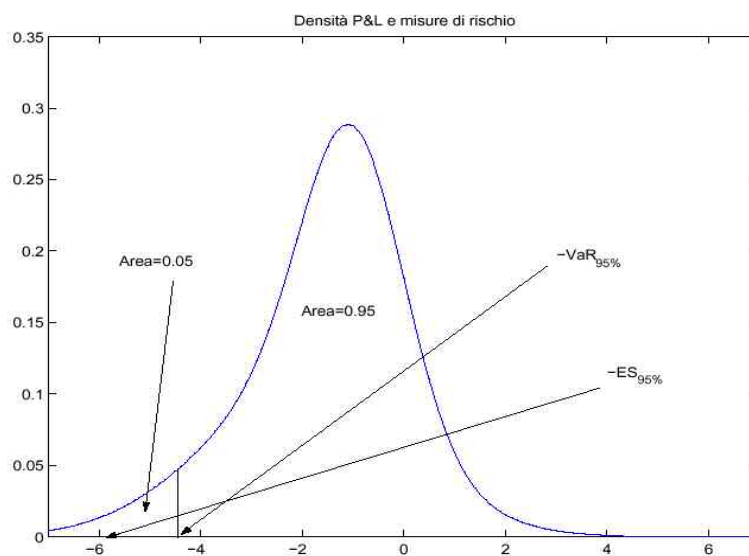


Figura 4.2. Il VaR e l'ES nella distribuzione Profitti e Perdite

## 4.2 COSTRUZIONE DI UNA MISURA DI RISCHIO

Le formule dell'ES tratte da Acerbi e Tasche (2001) sono state riportate a meno del segno, che non cambia il loro significato ma solo il punto di vista con cui si guardano le cose.

ES risponde alla domanda di quale entità sia la perdita media che si incorre nell' $\alpha\%$  dei casi peggiori del portafoglio considerato.

ES rappresenta un metodo differente dal VaR per misurare il rischio di mercato.

Ora ci si occupa della determinazione della stima di questa misura di rischio.

Sia  $X$  la variabile casuale che descrive il valore futuro del profitto o la perdita di un portafoglio su un certo fissato orizzonte temporale  $t$  da oggi, sia  $\alpha \in (0,1)$  la percentuale che rappresenta un campione di casi peggiori per il portafoglio che vogliamo analizzare e sia  $x^{(\alpha)} = \sup \{X \mid P[X \leq x] \leq \alpha\}$  il quantile della distribuzione.

Vi è anche un'altra statistica che risponde alla precedente domanda, cioè il valore atteso condizionato sotto il quantile o il "*tail conditional expectation*" (TCE):

$$TCE^{(\alpha)} = E[X \mid X \leq x^{(\alpha)}] \quad (4.2)$$

ma solo nel caso in cui ci si restringe a funzioni di distribuzione del portafoglio continue. Infatti per distribuzioni generali può violare la condizione di sub-additività.

Si suppone di avere un numero  $n$  di realizzazioni  $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$  di una variabile casuale  $X$ , si deve ordinare il campione in modo crescente e fare la media dei primi  $\alpha\%$  valori. Dopo aver fatto questo si definisce l'ordine delle statistiche  $X_1 \leq \dots \leq X_n$  come i valori ordinati di  $n$ -tuple  $(X_1, \dots, X_n)$  e si approssima il numero degli  $\alpha\%$  elementi nel campione attraverso  $w = [n\alpha] = \max \{m \mid m \leq n\alpha, m \in \mathfrak{N}\}$ , ossia la parte intera di  $n\alpha\%$ , una scelta che per un  $n$  grande può essere cambiata con altri interi arrotondando o troncando vicino ad  $n\alpha\%$ .

L'insieme degli  $\alpha\%$  casi peggiori è quindi rappresentato dal più piccolo  $w$  dei risultati  $(X_1, \dots, X_n)$ . Si può definire il seguente stimatore naturale per  $\alpha$ -quantile  $x^{(\alpha)}$ :

$$x_n^{(\alpha)}(X) = X_{w:n} \quad (4.3)$$

Il naturale stimatore per la perdita media nell' $\alpha\%$  dei casi peggiori è dato semplicemente da:

$$ES_n^{(\alpha)}(X) = \frac{\sum_{i=1}^w X_{i:n}}{w} = \text{media degli } \alpha\% \text{ pi\`u piccoli risultati } X_i. \quad (4.4)$$

Si nota che lo stimatore per  $TCE^{(\alpha)}$  è:

$$TCE_n^{(\alpha)} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \cdot \mathbf{1}_{\{X_i \leq X_{w:n}\}}}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \leq X_{w:n}\}}} = \text{media di tutti } X_i \leq x_n^{(\alpha)}. \quad (4.5)$$

È semplice vedere che  $ES_n^{(\alpha)}$  è sub-additivo per ogni fissato  $n$ . Considerando due variabili  $X$  e  $Y$  e un numero di realizzazioni simultanee  $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1, \dots, n}$ , si può provare facilmente la sub-additività di  $ES_n^{(\alpha)}$ :

$$ES_n^{(\alpha)}(X + Y) = \frac{\sum_{i=1}^w (X + Y)_{i:n}}{w} \leq \frac{\sum_{i=1}^w X_{i:n} + Y_{i:n}}{w} = ES_n^{(\alpha)}(X) + ES_n^{(\alpha)}(Y). \quad (4.6)$$

Una dimostrazione simile potrebbe fallire per  $TCE_n^{(\alpha)}$ .

Ora si può espandere la definizione di ES:

$$\begin{aligned} ES_n^{(\alpha)}(X) &= \frac{\sum_{i=1}^w X_{i:n}}{w} = \frac{\sum_{i=1}^n X_{i:n} \cdot \mathbf{1}_{\{i \leq w\}}}{w} = \\ &= \frac{1}{w} \left( \sum_{i=1}^n X_{i:n} \cdot \mathbf{1}_{\{X_{i:n} \leq X_{w:n}\}} - \sum_{i=1}^n X_{i:n} (\mathbf{1}_{\{X_{i:n} \leq X_{w:n}\}} - \mathbf{1}_{\{i \leq w\}}) \right) = \\ &= \frac{1}{w} \left( \sum_{i=1}^n X_i \cdot \mathbf{1}_{\{X_i \leq X_{w:n}\}} - X_{w:n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{1}_{\{X_{i:n} \leq X_{w:n}\}} - \mathbf{1}_{\{i \leq w\}}) \right) = \\ &= \frac{n}{w} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \cdot \mathbf{1}_{\{X_i \leq X_{w:n}\}} - X_{w:n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_{i:n} \leq X_{w:n}\}} - \frac{w}{n} \right) \right). \quad (4.7) \end{aligned}$$



Se si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{w:n} = x^{(\alpha)} \quad (4.8)$$

con probabilità uno, dovrebbe essere facile concludere che con probabilità uno si ha anche:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ES_n^{(\alpha)}(X) = \frac{1}{\alpha} \left( E[X 1_{\{X \leq x^{(\alpha)}\}}] - x^{(\alpha)} (P[X \leq x^{(\alpha)}] - \alpha) \right). \quad (4.9)$$

L'equazione (4.8) non è valida in generale, tuttavia è stato dimostrato da Acerbi, Tasche (2001) che l'equazione (4.9) è più robusta e infatti vale in generale.

Si può ora dare la seguente definizione di ES:

sia  $X$  il profitto-perdita di un portafoglio su uno specifico orizzonte temporale  $t$  e sia  $\alpha \in (0,1)$  un fissato livello di probabilità, l' $ES^{(\alpha)}$  di un portafoglio è definito come segue:

$$ES^{(\alpha)}(X) = \frac{1}{\alpha} \left( E[X \cdot 1_{\{X \leq x^{(\alpha)}\}}] - x^{(\alpha)} (P[X \leq x^{(\alpha)}] - \alpha) \right). \quad (4.10)$$

Questa definizione fornisce una misura del rischio che soddisfa perfettamente tutti gli assiomi della definizione di misura di rischio. Questa formulazione è stata introdotta per la prima volta da Acerbi, *et al* (2001), dove è stata data una dimostrazione generale di sub-additività, la quale non è basata sul  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  della precedente prova (4.6) di sub-additività di  $ES_n^{(\alpha)}$ .

Nell'equazione (4.10), il termine  $x^{(\alpha)} (P[X \leq x^{(\alpha)}] - \alpha)$  deve essere interpretato come la parte eccessiva da sottrarre al valore atteso  $E[X \cdot 1_{\{X \leq x^{(\alpha)}\}}]$ , dove  $\{X \leq x^{(\alpha)}\}$  ha probabilità maggiore di  $\alpha$ . Quando al contrario  $P[X \leq x^{(\alpha)}] = \alpha$ , poiché si ha sempre una distribuzione di probabilità continua, il termine sparisce e quindi si ha che  $ES^{(\alpha)} = TCE^{(\alpha)}$ .

### 4.3 ALTRA DEFINIZIONE DI EXPECTED SHORTFALL

La semplicità di  $ES^{(\alpha)}$  può essere apprezzata solo non definendolo come una combinazione di valori attesi. Esiste infatti una rappresentazione che rivela in modo

molto più trasparente la diretta dipendenza dal parametro  $\alpha$  e dalla funzione di distribuzione  $F(x) = P(X \leq x)$ . Infatti introducendo la funzione inversa generalizzata di  $F(x)$ :

$$F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x \mid F(x) \geq p\} \quad (4.11)$$

si può mostrare che  $ES^{(\alpha)}$  può essere facilmente espresso come la media di  $F^{\leftarrow}(p)$  in un livello di confidenza  $p \in (0, \alpha]$ :

$$ES^{(\alpha)}(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} F^{\leftarrow}(p) dp. \quad (4.12)$$

Questa è la più importante definizione di  $ES^{(\alpha)}$ . La trattabilità matematica di questa definizione la fa particolarmente adatta per lo studio delle proprietà analitiche di  $ES^{(\alpha)}$ . Per esempio la continuità in  $\alpha$ , che è una proprietà che il VaR non condivide, è evidente in (4.12) mentre non è ovvia in (4.10).

Una espressione alternativa ed equivalente alla (4.10) è stata recentemente formulata da Rockafellar, Uryasev (2001), dove la terminologia “ $\alpha$ -conditional VaR” è adottata per  $ES^{(\alpha)}$ :

$$ES^{(\alpha)} = TCE^{(\alpha)} + (\lambda - 1) (TCE^{(\alpha)} - VaR^{(\alpha)}) \quad (4.13)$$

con  $\lambda = \frac{P[X \leq x^{(\alpha)}]}{\alpha} \geq 1$ . Questa relazione, che può essere facilmente derivata da (4.10) moltiplicando e dividendo per  $P[X \leq x^{(\alpha)}]$ , permette di mettere in evidenza che in generale  $ES^{(\alpha)} \geq TCE^{(\alpha)}$ .

Qui per il VaR è stata utilizzata una definizione differente da quella data nel capitolo precedente, ma analoga. Il VaR di un portafoglio è definito come la perdita minima che esso può subire in un determinato orizzonte temporale nell' $\alpha\%$  dei casi peggiori.

#### 4.4 CONFRONTO TRA EXPECTED SHORTFALL E VALORE A RISCHIO NEL CASO GAUSSIANO

Confrontiamo ora i valori assunti dal VaR e dall'ES nel caso gaussiano per alcuni livelli di confidenza.

L'espressione del VaR nel caso gaussiano è la seguente:

$$VaR = \sigma \cdot x^{(\alpha)} \quad (4.14)$$

dove  $x^{(\alpha)}$  è il quantile della normale standardizzata.

Mentre l'espressione per ES sempre nel caso gaussiano è:

$$ES^{(\alpha)} = \sigma \cdot \frac{\int_{-\infty}^{-x^{(\alpha)}} x \cdot f(x) dx}{\alpha} \quad (4.15)$$

questa formula è uguale allo stimatore che era stato precedentemente indicato con  $TCE^{(\alpha)}$ .

Ponendo  $\sigma = 1$ , i risultati che si ottengono sono:

$\alpha$	VaR	ES
0,05	1,65	2,06
0,01	2,33	2,67
0,001	3,10	3,37

Si può quindi mostrare che se la distribuzione è normale, ES e VaR sono legati da una relazione di proporzionalità. In entrambi i casi si tratta di multipli della volatilità del portafoglio.

Invece, se la distribuzione è non normale, posizioni diverse possono essere caratterizzate, a parità di VaR, da ES estremamente differenti.

ES assume sempre un valore più alto rispetto al VaR, come si può osservare dal seguente grafico:

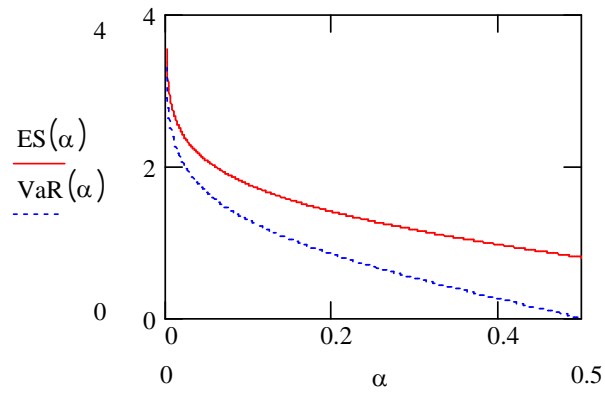


Figura 4.1. Confronto tra i valori assunti dall'ES e dal VaR

## 4.5 CONCLUSIONI

L'ES è un modello della classe delle misure coerenti del rischio che ci permette di non rinunciare ai vantaggi del VaR. Infatti ES è:

- *universale*: può essere applicato ad ogni strumento e ad ogni causa sottostante del rischio
- *completo*: produce un'unica, globale stima per portafogli esposti a differenti cause di rischio
- *un semplice concetto*: è la risposta ad una naturale domanda sul rischio che si incorre con un portafoglio.

Un aspetto interessante dell'ES è che se una banca decide di utilizzarlo per calcolare il rischio dei suoi portafogli è sufficiente che modifichi il suo sistema di *Risk-Management* basato sul VaR. Inoltre questa modifica può essere fatta con un piccolo sforzo computazionale, incentivando quindi le banche ad utilizzare questo strumento.



## Capitolo 5

# L'APPROCCIO DELTA-GAMMA NELLA VARIAZIONE DI VALORE DI UNO STRUMENTO NON LINEARE

### 5.1 INTRODUZIONE

Nei capitoli precedenti si è cercato di definire diverse misure del rischio di mercato, ora si riprendono in considerazione le greche, al fine di trovare una buona approssimazione alla variazione di valore dell'opzione, strumento non lineare che ha avuto un rapido sviluppo negli ultimi anni.

Si è rivolta l'attenzione al problema della ricerca di un'approssimazione della vera variazione del valore di uno strumento finanziario anche per motivi computazionali. Infatti se per determinare la variazione si utilizzasse il vero valore sarebbe necessario calcolare due *pricing*, quello di oggi e quello quando è trascorso un certo periodo. Se invece si utilizza un valore approssimato è sufficiente il calcolo di un solo *pricing* e il calcolo di una o due derivate. L'onere computazionale in questo caso è quindi minore.

Un software che gestisce una grande quantità di dati, come in questo caso, deve avere come caratteristica l'efficienza, ossia la capacità di svolgere operazioni utilizzando un insieme di risorse (tempo e spazio) che siano accettabili per l'utente. Quindi il software è efficiente quando utilizziamo un'approssimazione della vera

variazione. Si sarà maggiormente convinti della sua utilizzazione quando si vedranno i buoni risultati ottenuti.

Lo strumento, utilizzato per trovare un'approssimazione alla variazione, è l'approccio delta-gamma. Questo approccio assume, che il cambiamento di valore di uno strumento, soggetto a dinamiche non lineari, possa essere approssimato dal *delta* (la derivata prima del valore dell'opzione in relazione allo strumento sottostante) e dal *gamma* (la derivata seconda del valore dell'opzione con riferimento allo strumento sottostante). La formulazione di tale approccio delta-gamma è la seguente:

$$\Delta P = \Delta \cdot \Delta S + \frac{1}{2} \gamma \cdot \Delta S^2 \quad (5.1)$$

dove:

$\Delta P$  = variazione del prezzo dell'opzione

$\Delta S$  = variazione del prezzo del sottostante

$\Delta$  e  $\gamma$  sono rispettivamente le greche delta e gamma.

Il metodo in questione introduce un'approssimazione analitica alla relazione di non linearità, adottando l'espansione in serie di Taylor.

Esistono approcci più generali, che tendono a considerare anche le altre greche come il *vega* (la derivata prima rispetto alla volatilità), il *rho* (la derivata prima rispetto ai tassi di interesse) e il *theta* (la derivata prima rispetto al tempo a scadenza).

C'è anche un approccio più semplice, chiamato metodo delta, che è localmente lineare. La sua espressione è la seguente:

$$\Delta P = \Delta \cdot \Delta S . \quad (5.2)$$

L'importanza di queste misure di rischio la si può vedere nel fatto che tutte le banche devono, per normativa, fornire alla Banca d'Italia, il delta, il gamma e il vega al fine di calcolare l'indice di rischio delle singole banche.

## 5.2 OGGETTO DEL CONFRONTO

La verifica empirica riguarda il confronto tra la variazione approssimata del valore dell'opzione, ottenuta con l'approccio delta e con quello delta-gamma, con la vera

variazione. In seguito si valuterà la necessità di ricorrere all'utilizzo anche di altre greche.

Si è deciso di verificare la bontà di queste approssimazioni per le opzioni standard e per un tipo di opzione non standard. Tra le molte *opzioni non-standard* la scelta è ricaduta sulle *opzioni barriera*, sono opzioni che cessano o iniziano ad esistere quando il prezzo del sottostante raggiunge una certa barriera (bisogna prestare attenzione al fatto che barriera e *strike* sono due cose differenti). Le opzioni barriera sono molto diffuse e hanno avuto un grande successo, dovuto al fatto che pur garantendo funzionalità analoghe a quelle offerte dalle opzioni standard, richiedono nel contempo un minor esborso in termini di premio.

Si sono considerate solo le opzioni *call* e non anche le *put*, in quanto per la *call-put parity* ciò che vale per le *call* vale anche per le *put*.

Infatti la relazione *call-put parity* afferma che:

$$put = call - \text{prezzo del sottostante} + \text{valore attuale del prezzo d'esercizio.} \quad (5.3)$$

Quindi gli stessi problemi che si incontrano con la *call*, si riscontrano anche con la *put*.

Le opzioni barriera presentano un *payoff* molto più non lineare rispetto a quello di un'opzione standard come si può osservare dal seguente grafico:

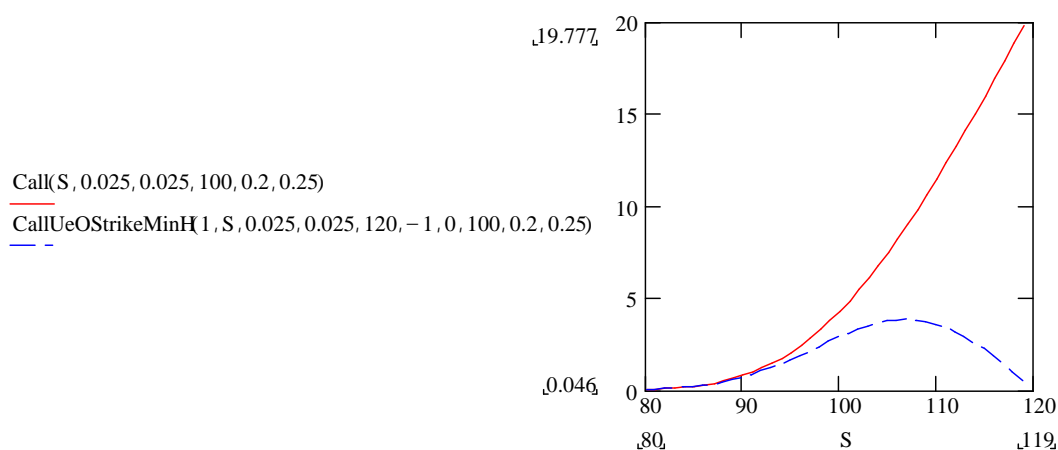


Figura 5.1. Confronto *pricing* di una *call* standard con una *call* barriera



Il software matematico utilizzato è Mathcad 2000i in ambiente Windows 98, che è uno strumento per il calcolo numerico e simbolico. Questo software è caratterizzato da facilità d'uso nella scrittura degli algoritmi matematici e per essere particolarmente versatile, infatti il suo utilizzo è simile a quello di un linguaggio di programmazione, e ciò ha permesso la dichiarazione e l'assegnazione delle variabili considerate nell'analisi.

Si è considerato il caso in cui ci sia un aumento dall'1% al 4% del prezzo del sottostante.

Il confronto è stato effettuato per i casi *in the money* (prezzo d'esercizio pari a 100 e ad esempio prezzo del sottostante pari a 110), *at the money* (prezzo d'esercizio pari a 100 e ad esempio prezzo del sottostante pari 100), *out the money* (prezzo d'esercizio pari a 100 e ad esempio prezzo del sottostante pari a 90) per tutte le opzioni tranne per quelle la cui definizione non lo permetteva.

Per il calcolo del valore dell'opzione gli elementi da considerare sono:

- la *volatilità*, che è stata fatta variare dal 10% al 35%, in particolare i valori che ha assunto sono stati 10%, 20% e 35%
- il *tasso d'interesse*, che è stato fissato pari al 2,5%. Non è stato fatto variare perché si è osservato che il suo cambiamento ha poco impatto sul valore dell'opzione
- il *prezzo d'esercizio*, che è stato fissato pari a 100
- il *dividendo*, che è stato posto pari a zero, perché si sta facendo un confronto con opzioni e quindi il sottostante dell'opzione non è necessariamente un'azione. Inoltre il dividendo assume sempre un valore piccolo
- la *vita residua*, che si è considerata quando è lunga, ossia pari a 1 (un anno), e quando è breve, ossia pari a 0,25 (tre mesi)
- la *barriera*, il cui valore è stato stabilito a seconda del tipo di opzione considerata. Ad esempio nel caso della *call up-and-out*  $S < H$  e  $K < H$  la barriera deve assumere un valore molto più alto del prezzo del sottostante e del prezzo d'esercizio, altrimenti il valore dell'opzione è prossimo a zero
- il *rebate*, che è una specie di "premio di consolazione" per il caso in cui i movimenti del sottostante si rivelino del tutto sfavorevoli per il detentore del contratto. È stato

fissato pari zero, perché è una costante moltiplicata per una probabilità, che è rappresentata da una normale, e si sa già che i due approcci riescono ad approssimare bene la distribuzione normale.

Da notare che alcuni input sono stati impostati mentre altri sono stati fatti variare questo perché alcuni erano più importanti di altri nel calcolo del valore dello strumento finanziario.

Si è scelto di considerare solo alcuni valori per gli input perché si voleva osservare quanto l'approssimazione della variazione del prezzo dell'opzione, ottenuta con i due approcci era buona in determinate situazioni, ad esempio quando l'opzione è *in, out, at-the-money*, quando c'è una variazione della volatilità, quando la vita residua dell'opzione è pari a 1 e quando è pari a 0,25, quando la variazione del sottostante è elevata, quando la barriera assume un valore prossimo o lontano rispetto allo *strike*.

Non si sono utilizzati dei valori veri perché nel calcolo del valore dell'opzione quello importante non è il valore del prezzo del sottostante e del prezzo d'esercizio ma il loro rapporto, come si può vedere nella formula (2.25) della definizione dell'argomento della distribuzione normale.

Per le opzioni barriera non viene considerato il caso *up-and-out* con  $S < H$  e  $K \geq H$  e il caso *up-and-in* con  $S < H$  e  $K \geq H$ , perché l'opzione è sempre *out-the-money*, ossia assume sempre valori prossimi allo zero.

I passi seguiti nell'analisi sono il calcolo del *pricing* delle opzioni, la determinazione della loro vera variazione dovuta all'aumento del prezzo del sottostante, il calcolo della variazione approssimata ottenuta utilizzando i due approcci, infine la determinazione degli errori relativi percentuali per ogni metodo, la cui espressione è la seguente:

$$Errore = \left| \frac{\text{ValoreVero} - \text{ValoreApprossimato}}{\text{ValoreVero}} \right| \cdot 100. \quad (5.4)$$

*In particolare per il calcolo del pricing si deve definire in un primo momento le variabili utili all'analisi, successivamente si assegnano dei valori agli input necessari al calcolo di queste variabili. Infine queste variabili sono richiamate e il programma Mathcad restituisce il loro valore.*

Per capire meglio come funziona Mathcad si veda il seguente esempio:

- definizione della variabile di interesse:

$$\text{Call}(S, b, r, K, \sigma, t) := S \cdot e^{(b-r) \cdot t} \cdot \text{cnorm}(d1(S, K, \sigma, t, b)) - K \cdot e^{-r \cdot t} \cdot \text{cnorm}(d2(S, K, \sigma, t, b))$$

- assegnazione agli input di un valore:

$$\sigma := 0.35 \quad t := 1 \quad S := 110 \quad r := 0.025 \quad K := 100 \quad b := 0.025$$

- si richiama la variabile e il programma restituisce il valore:

$$\text{Call}(S, b, r, K, \sigma, t) = 21.483 \blacksquare$$

Prima di passare all'analisi risulta utile chiarire i due approcci e in particolare che cosa misurano le due greche, delta e gamma, considerate.

Il delta misura la variazione istantanea del prezzo della *call* per ogni variazione unitaria del prezzo del sottostante (ad esempio il sottostante aumenta di 10, se il delta è 0,2 il valore della *call* aumenta di 2).

Per le opzioni *call* standard, si può affermare che:

- è crescente rispetto al sottostante
- è decrescente rispetto allo *strike*
- il tempo ha effetti contrastanti dipende se l'opzione è *in* o *out-the-money*
- la volatilità ha effetti contrastanti dipende se l'opzione è *in* o *out-the-money*.

Il gamma è il tasso di variazione del delta: è massimo quando sottostante e *strike* assumono lo stesso valore. In pratica, se ad esempio il gamma è molto piccolo, questo vuol dire che il delta risponde lentamente alle variazioni del prezzo, e gli aggiustamenti per mantenere il portafoglio neutrale rispetto al delta, non andranno fatti di frequente.

Per le opzioni *call* standard, si può affermare che:

- le opzioni *out* o *in-the-money* hanno un gamma piccolo, perché non sono sensibili a cambiamenti del sottostante
- le opzioni *at-the-money* per le quali vi è una scadenza abbastanza vicina hanno un gamma elevato, riflettendo il fatto che l'opzione può essere vicina all'esercizio o meno
- un gamma basso, indica che il delta dell'opzione cambia lentamente per un dato cambiamento del prezzo del sottostante. Al contrario, un gamma alto, indica che il delta è molto sensibile.

Il gamma è in pratica una misura della convessità dell'opzione.

Queste proprietà non valgono in generale per le opzioni barriera. Inoltre il delta può assumere valori maggiori di uno o negativi (mentre per la *call* standard assume valori tra zero e uno), e il gamma può assumere anche valori negativi (mentre per la *call* standard assume solo valori positivi).

### 5.3 ANALISI DEI RISULTATI

Dopo aver illustrato le modalità con le quali è stato realizzato il confronto dei due approcci con la vera variazione di valore dell'opzione, è possibile elencarne i risultati.

Questi confronti vengono fatti in termini di:

- errore relativo percentuale
- errore assoluto (  $|valore\ vero - valore\ approssimato|$  ) nel caso in cui i valori dell'opzione siano molto piccoli, ossia quando l'errore relativo percentuale diventa fuorviante.

Nel caso in cui manchi poco alla scadenza del contratto d'opzione si compie un errore maggiore rispetto al caso in cui manchi tanto tempo. Questo è giustificato dal fatto che il *pricing* di un'opzione è dato dalla somma di due elementi, uno è il valore intrinseco (*intrinsic value*) e l'altro è il *time value*.

Il valore intrinseco è definito come il massimo tra zero e il valore che l'opzione avrebbe se fosse esercitata immediatamente.

Il *time value* è dato dalla differenza tra il valore dell'opzione e il valore intrinseco. Rappresenta quanto un investitore è disposto a pagare, oltre al valore intrinseco, nella speranza che il sottostante si muova concordemente con la posizione presa, facendo così aumentare di valore l'opzione detenuta.

All'avvicinarsi della scadenza dell'opzione, ossia quando diminuiscono le possibilità di esercitare con profitto l'opzione, il *time value* si riduce progressivamente fino ad essere pari a zero alla scadenza del contratto.

Quindi nel caso in cui alla scadenza dell'opzione manchi molto tempo il *time value*, che costituisce la parte non lineare, ha più rilevanza nel valore complessivo dello strumento finanziario e perciò meglio si applicano i modelli.

Si può osservare che con valori elevati della volatilità si ottengono errori minori. Per capire la causa di ciò si possono osservare i grafici sotto riportati per l'opzione *call* standard e per alcuni tipi di opzioni barriera in cui si pongono a confronto i valori del loro *pricing*, mantenendo costanti tutti gli elementi tranne la volatilità.

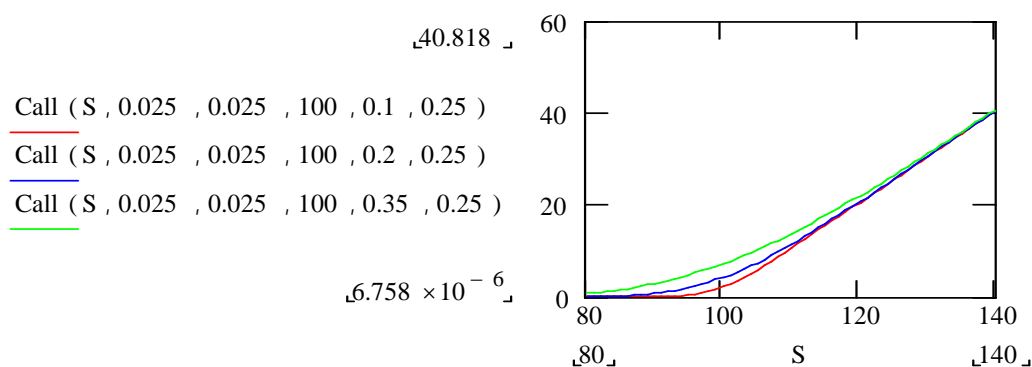


Figura 5.2. Confronto *pricing* di una *call* standard con volatilità differenti

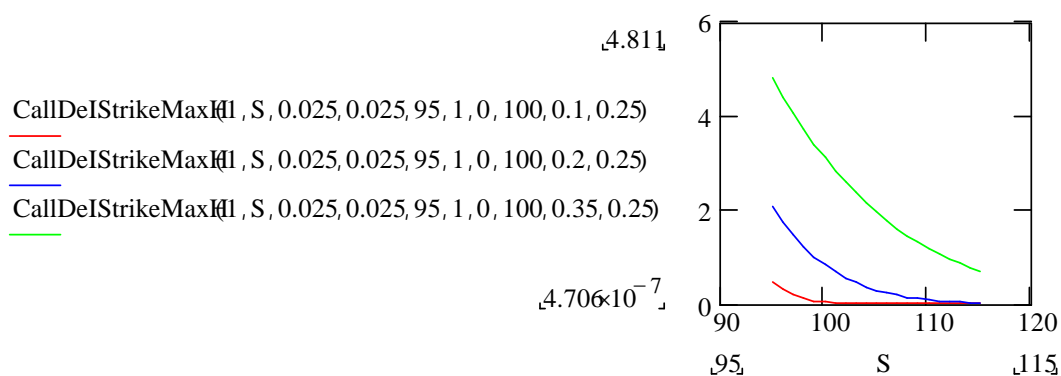


Figura 5.3. Confronto *pricing* di una *down-and-in*  $S > H$  e  $K \leq H$  con volatilità differenti

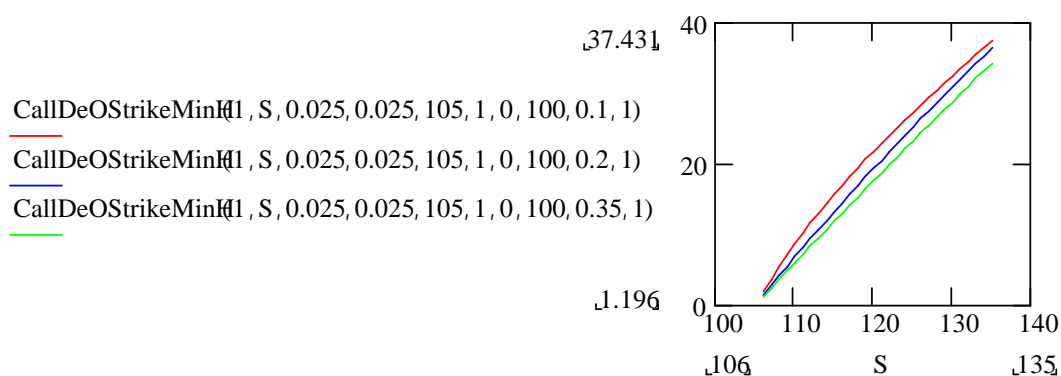


Figura 5.4. Confronto *pricing* di una *down-and-out*  $S > H$  e  $K \leq H$  con volatilità differenti

Si nota che i grafici del *pricing* all'aumentare della volatilità diventano più convessi nel caso di una *call* standard e di una *call knock-in*, mentre nel caso di una *call knock-out* diventano più concavi, e quindi meglio si adattano le approssimazioni del secondo ordine.

Per comprendere ancora meglio per quale motivo con valori elevati della volatilità si commettono errori maggiori, bisogna considerare il fatto che la volatilità, che ha impatto solo sul *time value* dell'opzione e non in quello intrinseco, quando è elevata fa sì che ci siano maggiori probabilità che l'opzione venga esercitata, quindi il *time value* ha un peso considerevole nel valore dell'opzione.

Quando la variazione del prezzo del sottostante è elevata, ad esempio dell'ordine del 4%, viene commesso un errore maggiore, questo perché i due approcci si basano sull'approssimazione in serie di Taylor che vale per variazioni infinitesime.

In genere l'errore assoluto minore viene commesso quando le opzioni sono *out* o *at-the-money*, ciò è dovuto al fatto che in questi casi il valore dell'opzione è costituito dalla sola componente temporale, dal momento che il valore intrinseco è prossimo a zero.

Quindi gli approcci si adattano meglio in queste situazioni, in cui il valore dell'opzione è dato da un elemento non lineare.

Quando la barriera è vicina (o uguale) al prezzo d'esercizio, l'errore si modifica rispetto al caso in cui la barriera assuma un valore diverso dal prezzo d'esercizio. Per esempio si consideri la *call down-and-out*  $S > H$  e  $K \geq H$ , se la barriera assume un valore molto più piccolo del prezzo d'esercizio, allora questa non influisce nel *pricing* dell'opzione. Al contrario se si pone  $H = K$  (o se comunque i valori sono molti vicini) la barriera influisce in modo tale da rendere il *pricing* irregolare, quindi con l'approccio delta-gamma si otterranno degli errori minori.

L'approccio delta-gamma, come si può osservare dai seguenti grafici, determina sempre errori minori rispetto all'approccio delta.

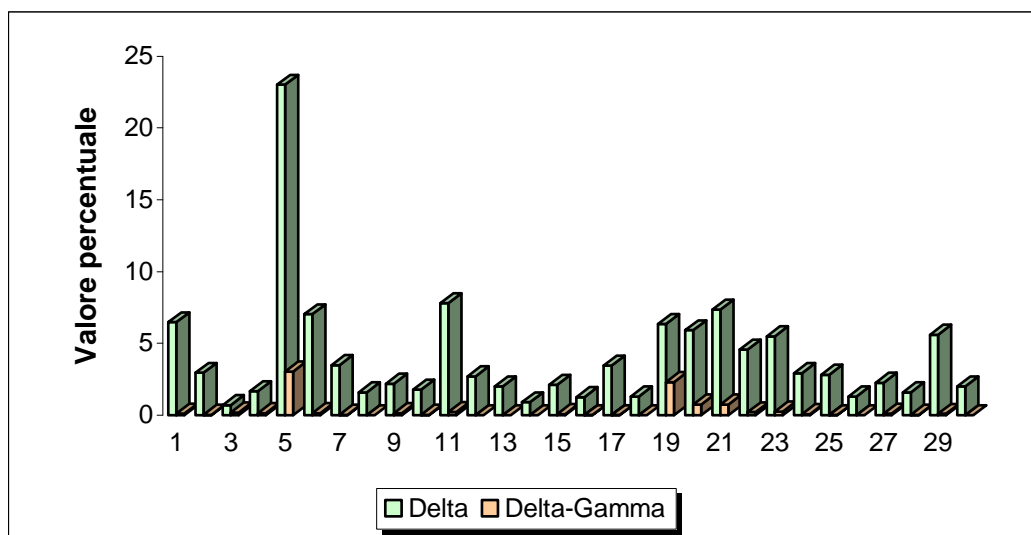


Figura 5.5. Confronto degli errori dei due approcci per la *call* standard

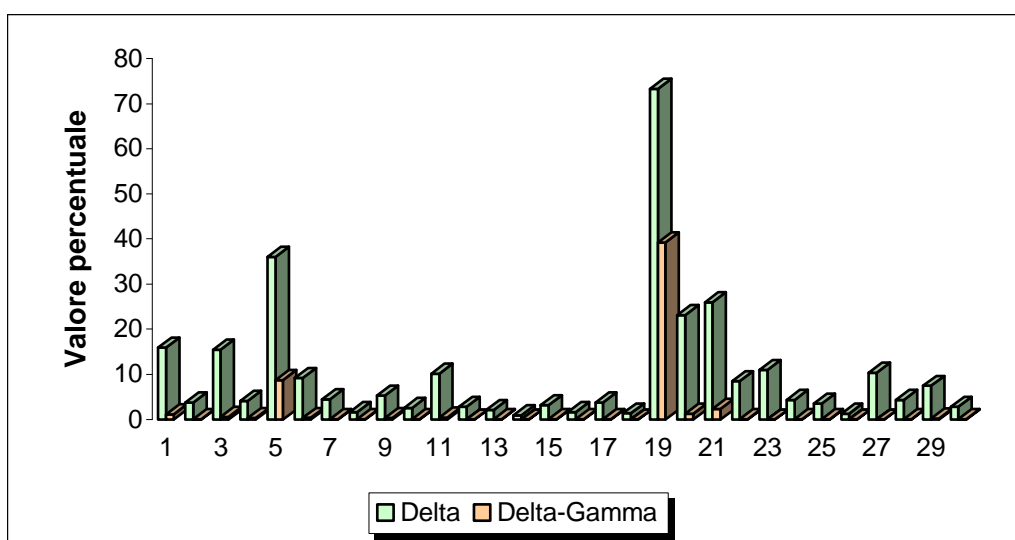


Figura 5.6. Confronto degli errori dei due approcci per la *call up-and-in*  $S > H$  e  $K < H$

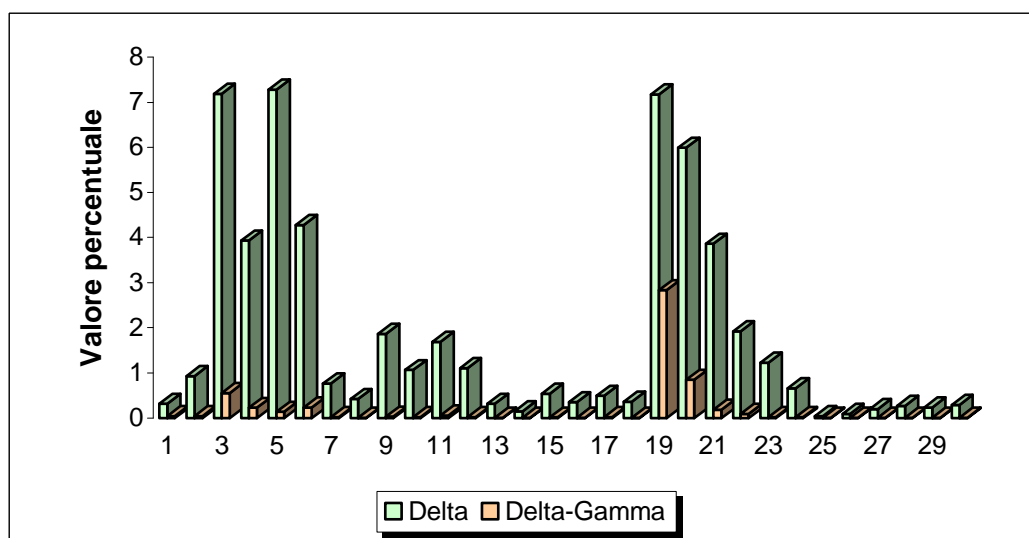


Figura 5.7. Confronto degli errori dei due approcci per la *down-and-out*  $S > H$  e  $K \leq H$

Il motivo di questo lo si può capire osservando il *pricing* delle *call* standard e non standard (figura 5.1.) che hanno una forma che ricorda una parabola.

In alcuni casi con le opzioni *knock-in* e quando l'opzione *call* standard è *out-the-money* (quindi il suo valore è quasi zero), vengono commessi degli errori relativi percentuali piuttosto elevati, che non stanno ad indicare che gli approcci non sono in grado di spiegare bene la vera variazione. Ma sono dovuti al fatto che i valori delle opzioni sono molto vicini allo zero e quindi l'errore relativo percentuale diventa fuorviante.



Il fatto che con l'errore relativo vengano commessi degli errori elevati non deve preoccupare, in quanto i modelli considerati non si basano sulla variazione relativa del sottostante, ma semplicemente sulla variazione dei prezzi.

Anche in alcuni casi con l'opzione *call up-and-out* con  $S < H$  e  $K < H$  vengono commessi grandi errori ciò è dovuto al fatto che il *pricing* dell'opzione (vedere figura 5.1.) è molto non lineare, quindi l'approccio delta risulta non adatto, quello delta-gamma riesce ad approssimare meglio ma non come con gli altri tipi di opzioni.

Con le opzioni *down-and-out* con  $S > H$  e  $K \geq H$  e con le *down-and-out* con  $S > H$  e  $K \leq H$ , l'approssimazione ottenuta con i due approcci è molto buona infatti per le prime l'errore medio nel caso del modello delta è pari a 1,4% e con quello delta-gamma è pari allo 0,2%, per le seconde si ha nel caso delta errore pari al 1,8% e per l'approccio delta-gamma errore pari a 0,2%.

Adesso si vogliono confrontare gli errori commessi dalla *call* standard e dalle *call* barriera (considerando tutti i vari tipi assieme), per questo si calcola il loro valore medio per ognuno degli approcci.

	Errore medio % con approccio delta	Errore medio % con approccio delta-gamma
Call standard	4,02%	0,298%
Call barriera	9,73%	1,54%

Si osserva che con la *call* standard con entrambi i metodi l'errore è minore rispetto alle opzioni barriera considerate assieme. Si ha anche che l'approccio delta-gamma riesce ad approssimare meglio il vero valore della variazione, infatti vengono commessi errori piuttosto piccoli.

Questi errori, in realtà, sono inferiori, infatti si è fatta la media considerando anche i casi in cui l'opzione ha valore prossimo a zero e quindi l'errore in questi casi può risultare molto elevato anche se in realtà la variazione è piccolissima. Allora si riporta l'errore medio considerando solo i casi in cui il valore dell'opzione è superiore a uno:

	Errore medio % con approccio delta	Errore medio % con approccio delta-gamma
Call standard	3,21%	0,2%
Call barriera	7,39%	0,49%

L'errore dell'approccio delta con le opzioni barriera l'errore è comunque ancora relativamente elevato, questo perché si fa la media con l'opzione *up-and-out*  $S < H$  e  $K < H$  che non risulta ben approssimata dall'approccio delta, come visto precedentemente.

L'importanza di delta e gamma si può vedere anche nel calcolo del valore a rischio. Come detto nei capitoli precedenti due modi per calcolare il VaR sono:

$$VaR = V_i \cdot \Delta_i \cdot N^{-1}(1-\alpha) \cdot \sigma_i \sqrt{t}$$

e

$$VaR_i = V_i \cdot \left( \Delta_i \cdot N^{-1}(1-\alpha) \cdot \sigma_i \sqrt{t} + \frac{\gamma}{2} \cdot (N^{-1}(1-\alpha))^2 \cdot \sigma_i^2 t \right)$$

dove  $V$  è il valore dello strumento finanziario,  $\sigma\sqrt{t}$  è la misura della volatilità,  $\Delta$  e  $\gamma$  sono rispettivamente delta e gamma,  $N^{-1}(z)$  è il quantile della normale standard,  $(1-\alpha)$ , è il livello di confidenza,  $t$  è il periodo di detenzione.

Queste due metodologie del calcolo del VaR non sono altro che due approssimazioni, infatti il vero valore del VaR è dato da:

$$VaR = \left( \sum_{i=1}^n q_i \cdot V_i \right) - \left( \sum_{i=1}^n q_i \cdot P_i \right) \quad (5.4)$$

dove  $P$  è il valore dello strumento nel caso in cui il valore del sottostante sia pari a:

$$St = S \cdot (1 - \sigma\sqrt{t} \cdot N^{-1}(1-\alpha)) \quad (5.5)$$

Come nel caso della variazione di valore al calcolo del vero valore si preferiscono dei metodi approssimati perché per determinare il vero valore è necessario il calcolo di due *pricing* mentre per le approssimazioni è sufficiente il calcolo di un *pricing* e di una o due derivate di questo. Quindi nei metodi approssimati l'onere computazionale è minore.



## ***CONCLUSIONI***

L'obiettivo che ci si era prefissati con questo lavoro, e che è stato raggiunto, è quello di trovare una buona approssimazione alla variazione di valore dell'opzione, strumento finanziario caratterizzato da un valore finale non lineare. Sono state considerate sia le opzioni standard che quelle non standard, in particolare quelle con barriera.

L'approccio utilizzato per approssimare il vero valore è basato sulle greche, delta e gamma, da cui prende il nome di approccio delta-gamma.

Dall'analisi effettuata è risultato che gli errori compiuti con l'approccio delta-gamma non sono molto elevati (infatti sono dello 0,2% per l'opzione *call* standard e dello 0,49% per l'opzione non standard) quindi può essere considerato un buon metodo di approssimazione della variazione del valore delle opzioni, anche se può diventare fuorviante nel caso di opzioni prossime alla scadenza.

Questa approssimazione ci permette di lavorare da una parte con dati accurati e dall'altra ci permette di svolgere i calcoli in maniera più veloce, infatti non è necessario il calcolo di due *pricing*, che richiederebbero un notevole onere computazionale.

Dai risultati ottenuti è emerso che la volatilità ha una certa importanza nella determinazione del valore dell'opzione quindi un'eventuale estensione a questa analisi può essere fatta considerando nell'approssimazione della variazione anche la greca *vega*, ossia la derivata del valore dell'opzione prima rispetto alla volatilità.

L'espressione del modello diventa la seguente:

$$\Delta P = \Delta \cdot \Delta S + \frac{1}{2} \gamma \cdot \Delta S^2 + vega \cdot \Delta \sigma$$

dove con  $\Delta\sigma$  indichiamo la variazione della volatilità.

Un'altra estensione è quella di valutare la bontà del approccio delta-gamma anche per altre opzioni esotiche non standard molto diffuse, come le “*Best of*”, ossia opzioni scritte su due o più attività rischiose o le *Asiatiche*, ossia opzioni il cui valore finale dipende dal prezzo medio del sottostante o dal prezzo medio d'esercizio (per approfondimenti si vedano Rubinstein (1991) e Hull (2000)).

## **APPENDICE**



## Appendice A

Nelle pagine successive è riportato il pricing e le greche delta e gamma, da me calcolate, delle opzioni con barriera. Alcune di queste verranno utilizzate nell'analisi svolta.





Legenda:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$x_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{H}\right)}{\sigma\sqrt{t}} + \lambda\sigma\sqrt{t}$$

$$y = \frac{\ln\left(\frac{H^2}{S_0 K}\right)}{\sigma\sqrt{t}} + \lambda\sigma\sqrt{t}$$

$$y_1 = \frac{\ln\left(\frac{H}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{t}} + \lambda\sigma\sqrt{t}$$

$$z = \frac{\ln\left(\frac{H}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{t}} + \eta\sigma\sqrt{t}$$

$$\lambda = \frac{r - q + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2}$$

$$\eta = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}$$

$N(a)$  = funzione di distribuzione di una variabile normale con media nulla e deviazione standard pari a uno.

$S_0$  = prezzo del titolo al tempo zero

$K$  = prezzo d'esercizio (strike price)

$r$  = tasso d'interesse privo di rischio composto continuamente

$q$  = dividendo (dividend yield)

$\sigma$  = volatilità sul prezzo dell'azione

$t$  = vita residua dell'opzione

$X$  = rimborso (rebate)

$H$  = barriera

➤ call down-and-out con  $S > H$  e  $K \geq H$

$$c_{dao} = S_0 e^{-qt} N(d_1) - K e^{-rt} N(d_1 - \sigma\sqrt{t}) - S_0 e^{-qt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} N(y) +$$

$$+ K e^{-rt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} N(y - \sigma\sqrt{t}) + X \left[ \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\lambda-1+\eta} N(z) + \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\lambda-1-\eta} N(z - 2\eta\sigma\sqrt{t}) \right]$$

$$\Delta = e^{-qt} N(d_1) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} (1 - 2\lambda) e^{-qt} N(y) - K e^{-rt} (2\lambda - 2) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda-1}} N(y - \sigma\sqrt{t}) +$$

$$- X \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta}} (\lambda - 1 + \eta) N(z) - X \frac{H^{\lambda-1-\eta}}{S_0^{\lambda-\eta}} (\lambda - 1 - \eta) N(z - 2\eta\sigma\sqrt{t}) +$$

$$- 2X \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\lambda-1+\eta} \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

$$\gamma = e^{-qt} \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} + \frac{H^{2\lambda}}{S_0^{2\lambda+1}} 2\lambda(1 - 2\lambda) e^{-qt} N(y) +$$

$$+ K e^{-rt} (2\lambda - 2)(2\lambda - 1) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} N(y - \sigma\sqrt{t}) +$$

$$- \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} e^{-qt} \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} + X \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+1+\eta}} (\lambda - 1 + \eta)(\lambda + \eta) N(z) +$$

$$+ X \frac{H^{\lambda-1-\eta}}{S_0^{\lambda+1-\eta}} (\lambda - 1 - \eta)(\lambda - \eta) N(z - 2\eta\sigma\sqrt{t}) +$$

$$+ 2X \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta}} \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \left[ 2\lambda + \eta - 1 - \frac{z}{\sigma\sqrt{t}} \right]$$

➤ call down-and-in con  $S > H$  e  $K \geq H$

$$c_{dai} = S_0 e^{-qt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} N(y) - K e^{-rt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} N(y - \sigma\sqrt{t}) + X e^{-rt} N(x_1 - \sigma\sqrt{t}) +$$

$$- X e^{-rt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} N(y_1 - \sigma\sqrt{t})$$

$$\Delta = \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} (1 - 2\lambda) e^{-qt} N(y) + K e^{-rt} (2\lambda - 2) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda-1}} N(y - \sigma\sqrt{t}) + \frac{X}{H} \frac{e^{-qt}}{\sigma\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{1}{2}x_1^2}}{\sqrt{2\pi}} +$$

$$+ X e^{-rt} (2\lambda - 2) \frac{H^{\lambda-2}}{S_0^{2\lambda-1}} N(y_1 - \sigma\sqrt{t}) + X \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-1} e^{-qt} \frac{1}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2}$$

$$\gamma = -\frac{H^{2\lambda}}{S_0^{2\lambda+1}} 2\lambda(1 - 2\lambda) e^{-qt} N(y) - K e^{-rt} (2\lambda - 2)(2\lambda - 1) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} N(y - \sigma\sqrt{t}) +$$

$$+ \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} e^{-qt} \frac{1}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} - \frac{X}{H} \frac{e^{-qt} x_1}{\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} +$$

$$- X e^{-rt} \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} (2\lambda - 2)(2\lambda - 1) N(y_1 - \sigma\sqrt{t}) +$$

$$- X e^{-qt} \frac{H^{2\lambda-1}}{S_0^{2\lambda}} \frac{1}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \left[ 4\lambda - 2 - \frac{y_1}{\sigma\sqrt{t}} \right]$$

➤ call down-and-out con  $S > H$  e  $K \leq H$

$$c_{dao} = S_0 e^{-qt} N(x_1) - Ke^{-rt} N(x_1 - \sigma\sqrt{t}) - S_0 e^{-qt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} N(y_1) +$$

$$+ Ke^{-rt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} N(y_1 - \sigma\sqrt{t}) + X \left[ \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\lambda-1+\eta} N(z) + \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\lambda-1-\eta} N(z - 2\eta\sigma\sqrt{t}) \right]$$

$$\Delta = e^{-qt} N(x_1) + e^{-qt} \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \left(1 - \frac{K}{H}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} (1 - 2\lambda) e^{-qt} N(y_1) +$$

$$+ e^{-qt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-1} \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} (H - K) - Ke^{-rt} (2\lambda - 2) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda-1}} N(y_1 - \sigma\sqrt{t}) +$$

$$- X \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta}} (\lambda - 1 + \eta) N(z) - X \frac{H^{\lambda-1-\eta}}{S_0^{\lambda-\eta}} (\lambda - 1 - \eta) N(z - 2\eta\sigma\sqrt{t}) +$$

$$- 2X \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\lambda-1+\eta} \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

$$\gamma = e^{-qt} \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \left[ 1 - \frac{x_1}{\sigma\sqrt{t}} \left(1 - \frac{K}{H}\right) \right] + e^{-qt} \frac{H^{2\lambda}}{S_0^{2\lambda+1}} 2\lambda(1 - 2\lambda) N(y_1) +$$

$$+ e^{-qt} \frac{H^{2\lambda-1}}{S_0^{2\lambda}} \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \left[ \frac{y_1}{\sigma\sqrt{t}} (H - K) + H(1 - 4\lambda) + 2K(2\lambda - 1) \right] +$$

$$+ Ke^{-rt} (2\lambda - 2)(2\lambda - 1) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} N(y_1 - \sigma\sqrt{t}) + X \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+1+\eta}} (\lambda - 1 + \eta)(\lambda + \eta) N(z) +$$

$$+ X \frac{H^{\lambda-1-\eta}}{S_0^{\lambda+1-\eta}} (\lambda - 1 - \eta)(\lambda - \eta) N(z - 2\eta\sigma\sqrt{t}) +$$

$$+ 2X \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta}} \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \left[ 2\lambda + \eta - 1 - \frac{z}{\sigma\sqrt{t}} \right]$$

➤ call down-and-in con  $S > H$  e  $K \leq H$

$$c_{dai} = S_0 e^{-qt} N(d_1) - K e^{-rt} N(d_1 - \sigma\sqrt{t}) - S_0 e^{-qt} N(x_1) + K e^{-rt} N(x_1 - \sigma\sqrt{t}) +$$

$$+ S_0 e^{-qt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} N(y_1) - K e^{-rt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} N(y_1 - \sigma\sqrt{t}) + X e^{-rt} N(x_1 - \sigma\sqrt{t}) +$$

$$- X e^{-rt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} N(y_1 - \sigma\sqrt{t})$$

$$\Delta = e^{-qt} N(d_1) - e^{-qt} N(x_1) - e^{-qt} \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \left(1 - \frac{K}{H}\right) + \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} (1 - 2\lambda) e^{-qt} N(y_1) +$$

$$- e^{-qt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-1} \frac{1}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} (H - K) + K e^{-rt} (2\lambda - 2) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda-1}} N(y_1 - \sigma\sqrt{t}) +$$

$$+ \frac{X}{H} \frac{e^{-qt}}{\sigma\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{1}{2}x_1^2}}{\sqrt{2\pi}} + X e^{-rt} (2\lambda - 2) \frac{H^{\lambda-2}}{S_0^{\lambda-1}} N(y_1 - \sigma\sqrt{t}) +$$

$$+ X \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-1} \frac{e^{-qt}}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2}$$

$$\gamma = \frac{e^{-qt}}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{1}{2}d_1^2}}{\sqrt{2\pi}} - \frac{e^{-qt}}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{1}{2}x_1^2}}{\sqrt{2\pi}} \left[1 - \frac{x_1}{\sigma\sqrt{t}} \left(1 - \frac{K}{H}\right)\right] - e^{-qt} \frac{H^{2\lambda}}{S_0^{2\lambda+1}} 2\lambda(1 - 2\lambda) N(y_1) +$$

$$- e^{-qt} \frac{H^{2\lambda-1}}{S_0^{2\lambda}} \frac{1}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \left[\frac{y_1}{\sigma\sqrt{t}} (H - K) + H(1 - 4\lambda) + 2K(2\lambda - 1)\right] +$$

$$- K e^{-rt} (2\lambda - 2)(2\lambda - 1) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} N(y_1 - \sigma\sqrt{t}) - \frac{X}{H} \frac{e^{-qt} x_1}{\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} +$$

$$- X e^{-rt} \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} (2\lambda - 2)(2\lambda - 1) N(y_1 - \sigma\sqrt{t}) - X e^{-qt} \frac{H^{2\lambda-1}}{S_0^{2\lambda}} \frac{1}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \left[4\lambda - 2 - \frac{y_1}{\sigma\sqrt{t}}\right]$$

➤ *call up-and-out con  $S < H$  e  $K \geq H$*

$$c_{uao} = X \left[ \left( \frac{H}{S_0} \right)^{\lambda-1+\eta} N(-z) + \left( \frac{H}{S_0} \right)^{\lambda-1-\eta} N(-z + 2\eta\sigma\sqrt{t}) \right] =$$

$$= X \left[ \left( \frac{H}{S_0} \right)^{\lambda-1+\eta} (1 - N(z)) + \left( \frac{H}{S_0} \right)^{\lambda-1-\eta} (1 - N(z - 2\eta\sigma\sqrt{t})) \right]$$

$$\Delta = -X \left[ (\lambda - 1 + \eta) \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta}} (1 - N(z)) + (\lambda - 1 - \eta) \frac{H^{\lambda-1-\eta}}{S_0^{\lambda-\eta}} (1 - N(z - 2\eta\sigma\sqrt{t})) \right] +$$

$$+ 2X \left( \frac{H}{S_0} \right)^{\lambda-1+\eta} \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

$$\gamma = X(\lambda - 1 + \eta)(\lambda + \eta) \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta+1}} (1 - N(z)) +$$

$$+ X(\lambda - 1 - \eta)(\lambda - \eta) \frac{H^{\lambda-1-\eta}}{S_0^{\lambda-\eta+1}} (1 - N(z - 2\eta\sigma\sqrt{t})) +$$

$$+ 2X \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta}} \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \left( 1 - 2\lambda - \eta + \frac{z}{\sigma\sqrt{t}} \right)$$

➤ *call up-and-in con  $S < H$  e  $K \geq H$*

$$\begin{aligned}
 c_{uai} &= S_0 e^{-qt} N(d_1) - K e^{-rt} N(d_1 - \sigma\sqrt{t}) + X e^{-rt} \left[ N(-x_1 + \sigma\sqrt{t}) - \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} N(y_1 - \sigma\sqrt{t}) \right] = \\
 &= S_0 e^{-qt} N(d_1) - K e^{-rt} N(d_1 - \sigma\sqrt{t}) + \\
 &\quad + X e^{-rt} \left[ (1 - N(x_1 - \sigma\sqrt{t})) - \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} (1 - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= e^{-qt} N(d_1) - e^{-qt} \frac{X}{H} \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} + X e^{-rt} (2\lambda - 2) \frac{H^{\lambda-2}}{S_0^{\lambda-1}} [1 - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] - \\
 &\quad - X \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-1} e^{-qt} \frac{1}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma &= e^{-qt} \frac{1}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} + e^{-qt} \frac{X}{H} \frac{x_1}{\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} + \\
 &\quad - X e^{-rt} \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} (2\lambda - 2)(2\lambda - 1) [1 - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{X e^{-qt}}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{H^{2\lambda-1}}{S_0^{2\lambda}} \frac{e^{-\frac{1}{2}y_1^2}}{\sqrt{2\pi}} \left[ 4\lambda - 2 - \frac{y_1}{\sigma\sqrt{t}} \right]$$



➤ call up-and-in con  $S < H$  e  $K < H$

$$\begin{aligned}
 c_{uai} &= S_0 e^{-qt} N(x_1) - K e^{-rt} N(x_1 - \sigma\sqrt{t}) - S_0 e^{-qt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} [N(-y) - N(-y_1)] + \\
 &+ K e^{-rt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} [N(-y + \sigma\sqrt{t}) - N(-y_1 + \sigma\sqrt{t})] + X e^{-rt} N(-x_1 + \sigma\sqrt{t}) + \\
 &- X e^{-rt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} N(-y_1 + \sigma\sqrt{t}) = S_0 e^{-qt} N(x_1) - K e^{-rt} N(x_1 - \sigma\sqrt{t}) + \\
 &- S_0 e^{-qt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} [-N(y) + N(y_1)] + \\
 &+ K e^{-rt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} [-N(y + \sigma\sqrt{t}) + N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] + \\
 &+ X e^{-rt} [1 - N(x_1 - \sigma\sqrt{t})] - X e^{-rt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} [1 - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] \\
 \\
 \Delta &= e^{-qt} N(x_1) + e^{-qt} \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \left(1 - \frac{K}{H}\right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} (1 - 2\lambda) e^{-qt} [-N(y) + N(y_1)] + \\
 &+ \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-1} \frac{e^{-qt}}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{1}{2}y_1^2}}{\sqrt{2\pi}} (H - K) + \\
 &- K e^{-rt} (2\lambda - 2) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda-1}} [-N(y - \sigma\sqrt{t}) + N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] - \frac{X}{H} \frac{e^{-qt}}{\sigma\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{1}{2}x_1^2}}{\sqrt{2\pi}} + \\
 &+ X e^{-rt} (2\lambda - 2) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda-1}} [1 - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] - X \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-1} \frac{e^{-qt}}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{1}{2}y_1^2}}{\sqrt{2\pi}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma = & \frac{e^{-qt}}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \left[ 1 - \frac{x_1}{\sigma \sqrt{t}} \left( 1 - \frac{K}{H} \right) \right] + e^{-qt} \frac{H^{2\lambda}}{S_0^{2\lambda+1}} 2\lambda(1-2\lambda)[-N(y) + N(y_1)] + \\
 & + \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} \frac{e^{-qt}}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} + \\
 & + \frac{H^{2\lambda-1}}{S_0^{2\lambda}} \frac{e^{-qt}}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{1}{2}y_1^2}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{y_1}{\sigma \sqrt{t}} (H - K) + H(1-4\lambda) + 2K(2\lambda-1) \right] + \\
 & + Ke^{-rt} (2\lambda-2)(2\lambda-1) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} [-N(y - \sigma \sqrt{t}) + \\
 & + N(y_1 - \sigma \sqrt{t})] + \frac{X}{H} \frac{e^{-qt} x_1}{\sigma \sqrt{t}} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} + \\
 & - Xe^{-rt} \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} (2\lambda-2)(2\lambda-1) [1 - N(y_1 - \sigma \sqrt{t})] + \\
 & + \frac{Xe^{-qt}}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{H^{2\lambda-1}}{S_0^{2\lambda}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \left[ 4\lambda - 2 - \frac{y_1}{\sigma \sqrt{t}} \right]
 \end{aligned}$$

➤ *call up-and-out con  $S < H$  e  $K < H$*

$$\begin{aligned}
 c_{uao} &= S_0 e^{-qt} N(d_1) - Ke^{-rt} N(d_1 - \sigma\sqrt{t}) - S_0 e^{-qt} N(x_1) + Ke^{-rt} N(x_1 - \sigma\sqrt{t}) + \\
 &+ S_0 e^{-qt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} [N(-y) - N(-y_1)] + \\
 &- Ket \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} [N(-y + \sigma\sqrt{t}) - N(-y_1 + \sigma\sqrt{t})] + \\
 &+ X \left[ \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\lambda-1+\eta} N(-z) + \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\lambda-1-\eta} N(-z + 2\eta\sigma\sqrt{t}) \right] = \\
 &= S_0 e^{-qt} N(d_1) - Ke^{-rt} N(d_1 - \sigma\sqrt{t}) + \\
 &- S_0 e^{-qt} N(x_1) + Ke^{-rt} N(x_1 - \sigma\sqrt{t}) + S_0 e^{-qt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} [-N(y) + N(y_1)] + \\
 &+ Ke^{-rt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} N(y + \sigma\sqrt{t}) - Ke^{-rt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} N(y_1 - \sigma\sqrt{t}) + \\
 &+ X \left[ \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\lambda-1+\eta} (1 - N(z)) + \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\lambda-1-\eta} (1 - N(z - 2\eta\sigma\sqrt{t})) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= e^{-qt} N(d_1) - e^{-qt} N(x_1) - e^{-qt} \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \left(1 - \frac{K}{H}\right) + \\
 &+ \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} (1 - 2\lambda) e^{-qt} [-N(y) + N(y_1)] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-1} \frac{e^{-qt}}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} (H - K) + \\
& + Ke^{-rt} (2\lambda - 2) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda-1}} [-N(y - \sigma\sqrt{t}) + N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] + \\
& - X \left[ (\lambda - 1 + \eta) \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta}} (1 - N(z)) + (\lambda - 1 - \eta) \frac{H^{\lambda-1-\eta}}{S_0^{\lambda-\eta}} (1 - N(z - 2\eta\sigma\sqrt{t})) \right] + \\
& + 2X \left( \frac{H}{S_0} \right)^{\lambda-1+\eta} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \\
\gamma = & e^{-qt} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} - e^{-qt} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \left[ 1 - \frac{x_1}{\sigma\sqrt{t}} \left( 1 - \frac{K}{H} \right) \right] + \\
& - e^{-qt} \frac{H^{2\lambda}}{S_0^{2\lambda+1}} 2\lambda(1 - 2\lambda) [-N(y) + N(y_1)] - \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} e^{-qt} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} + \\
& - \frac{H^{2\lambda-1}}{S_0^{2\lambda}} e^{-qt} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \left[ \frac{y_1}{\sigma\sqrt{t}} (H - K) + H(1 - 4\lambda) + 2K(2\lambda - 1) \right] + \\
& - Ke^{-rt} (2\lambda - 2)(2\lambda - 1) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} [-N(y - \sigma\sqrt{t}) + N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] + \\
& + X(\lambda - 1 + \eta)(\lambda + \eta) \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta+1}} (1 - N(z)) + \\
& + X(\lambda - 1 - \eta)(\lambda - \eta) \frac{H^{\lambda-1-\eta}}{S_0^{\lambda-\eta+1}} (1 - N(z - 2\eta\sigma\sqrt{t})) + \\
& + 2X \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta}} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \left( 1 - 2\lambda - \eta + \frac{z}{\sigma\sqrt{t}} \right)
\end{aligned}$$

➤ put up-and-in con  $S < H$  e  $K \leq H$

$$\begin{aligned}
 p_{uai} = & -S_0 e^{-qt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} N(-y) + K e^{-rt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} N(-y + \sigma\sqrt{t}) + X e^{-rT} N(-x_1 + \sigma\sqrt{t}) + \\
 & - X e^{-rt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} N(-y_1 + \sigma\sqrt{t}) = -S_0 e^{-qt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} [1 - N(y)] + \\
 & + K e^{-rt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} [1 - N(y - \sigma\sqrt{t})] + X e^{-rT} [1 - N(x_1 - \sigma\sqrt{t})] + \\
 & - X e^{-rt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} [1 - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta = & - \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} (1 - 2\lambda) e^{-qt} [1 - N(y)] - K e^{-rt} (2\lambda - 2) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda-1}} [1 - N(y - \sigma\sqrt{t})] + \\
 & - \frac{X}{H} \frac{e^{-qt}}{\sigma\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{1}{2}x_1^2}}{\sqrt{2\pi}} + X e^{-rt} (2\lambda - 2) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda-1}} [1 - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] - X \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-1} \frac{e^{-qt}}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{1}{2}y_1^2}}{\sqrt{2\pi}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma = & \frac{H^{2\lambda}}{S_0^{2\lambda+1}} 2\lambda(1 - 2\lambda) e^{-qt} [1 - N(y)] + K e^{-rt} (2\lambda - 2)(2\lambda - 1) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} [1 - N(y - \sigma\sqrt{t})] + \\
 & + \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} e^{-qt} \frac{1}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} + e^{-qt} \frac{X}{H} \frac{x_1}{\sigma\sqrt{T}} \frac{1}{S_0 \sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -Xe^{-rt} \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} (2\lambda-2)(2\lambda-1)[1-N(y_1-\sigma\sqrt{t})] + \\
 & + \frac{Xe^{-qt}}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{H^{2\lambda-1}}{S_0^{2\lambda}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \left[ 4\lambda-2-\frac{y_1}{\sigma\sqrt{t}} \right]
 \end{aligned}$$

➤ put up-and-out con  $S < H$  e  $K \leq H$

$$\begin{aligned}
 p_{uao} &= Ke^{-rt} N(-d_1 + \sigma\sqrt{t}) - S_0 e^{-qt} N(-d_1) + S_0 e^{-qt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} N(-y) + \\
 & - Ke^{-rt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} N(-y + \sigma\sqrt{t}) + \\
 & + X \left[ \left( \frac{H}{S_0} \right)^{\lambda-1+\eta} N(-z) + \left( \frac{H}{S_0} \right)^{\lambda-1-\eta} N(-z + 2\eta\sigma\sqrt{t}) \right] = \\
 & = Ke^{-rt} [1 - N(d_1 - \sigma\sqrt{t})] - S_0 e^{-qt} [1 - N(d_1)] + S_0 e^{-qt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} [1 - N(y)] + \\
 & - Ke^{-rt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} [1 - N(y - \sigma\sqrt{t})] + \\
 & + X \left[ \left( \frac{H}{S_0} \right)^{\lambda-1+\eta} (1 - N(z)) + \left( \frac{H}{S_0} \right)^{\lambda-1-\eta} (1 - N(z - 2\eta\sigma\sqrt{T})) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= e^{-qt} [N(d_1) - 1] + \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} (1 - 2\lambda) e^{-qt} [1 - N(y)] + \\
 & + Ke^{-rt} (2\lambda - 2) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda-1}} [1 - N(y - \sigma\sqrt{t})] + \\
 & - X \left[ (\lambda - 1 + \eta) \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta}} (1 - N(z)) + (\lambda - 1 - \eta) \frac{H^{\lambda-1-\eta}}{S_0^{\lambda-\eta}} (1 - N(z - 2\eta\sigma\sqrt{t})) \right] +
 \end{aligned}$$

$$+ 2X \left( \frac{H}{S_0} \right)^{\lambda-1+\eta} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{e^{-qt}}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} - \frac{H^{2\lambda}}{S_0^{2\lambda+1}} 2\lambda(1-2\lambda)e^{-qt} [1-N(y)] - \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} \frac{e^{-qt}}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} + \\ & - Ke^{-rt} (2\lambda-2)(2\lambda-1) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} [1-N(y-\sigma\sqrt{t})] + \\ & + X(\lambda-1+\eta)(\lambda+\eta) \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta+1}} (1-N(z)) + \\ & + X(\lambda-1-\eta)(\lambda-\eta) \frac{H^{\lambda-1-\eta}}{S_0^{\lambda-\eta+1}} (1-N(z-2\eta\sigma\sqrt{t})) + \\ & + 2X \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta}} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \left( 1-2\lambda-\eta + \frac{z}{\sigma\sqrt{t}} \right) \end{aligned}$$

➤ put up-and-out con  $S < H$  e  $K \geq H$

$$\begin{aligned} P_{uao} = & -S_0 e^{-qt} N(-x_1) + Ke^{-rt} N(-x_1 + \sigma\sqrt{t}) + S_0 e^{-qt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} N(-y_1) + \\ & - Ke^{-rt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} N(-y_1 + \sigma\sqrt{t}) + \\ & + X \left[ \left( \frac{H}{S_0} \right)^{\lambda-1+\eta} N(-z) + \left( \frac{H}{S_0} \right)^{\lambda-1-\eta} N(-z + 2\eta\sigma\sqrt{t}) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -S_0 e^{-qt} [1 - N(x_1)] + K e^{-rt} [1 - N(x_1 - \sigma\sqrt{t})] + S_0 e^{-qt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} [1 - N(y_1)] + \\
 & -K e^{-rt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} [1 - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] + X \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\lambda-1+\eta} [1 - N(z)] + \\
 & + X \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\lambda-1-\eta} [1 - N(z - 2\eta\sigma\sqrt{t})]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta = & -e^{-qt} [1 - N(x_1)] + \frac{e^{-qt}}{\sigma\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{1}{2}x_1^2}}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{K}{H}\right) + \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} (1 - 2\lambda) e^{-qt} [1 - N(y_1)] + \\
 & + e^{-qt} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-1} \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} (H - K) + \\
 & + K e^{-rt} (2\lambda - 2) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda-1}} [1 - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] + \\
 & - X \left[ (\lambda - 1 + \eta) \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta}} (1 - N(z)) + (\lambda - 1 - \eta) \frac{H^{\lambda-1-\eta}}{S_0^{\lambda-\eta}} (1 - N(z - 2\eta\sigma\sqrt{t})) \right] + \\
 & + 2X \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\lambda-1+\eta} \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \\
 \\
 \gamma = & e^{-qt} \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \left[ 1 - \frac{x_1}{\sigma\sqrt{t}} \left(1 - \frac{K}{H}\right) \right] - e^{-qt} \frac{H^{2\lambda}}{S_0^{2\lambda+1}} 2\lambda(1 - 2\lambda) [1 - N(y_1)] + \\
 & + e^{-qt} \frac{H^{2\lambda-1}}{S_0^{2\lambda}} \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \left[ \frac{y_1}{\sigma\sqrt{t}} (H - K) + H(1 - 4\lambda) + 2K(2\lambda - 1) \right] + \\
 & - K e^{-rt} (2\lambda - 2)(2\lambda - 1) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} [1 - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] + \\
 & + X(\lambda - 1 + \eta)(\lambda + \eta) \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta+1}} (1 - N(z)) +
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + X(\lambda - 1 - \eta)(\lambda - \eta) \frac{H^{\lambda-1-\eta}}{S_0^{\lambda-\eta+1}} (1 - N(z - 2\eta\sigma\sqrt{t})) + \\
 & + \frac{2X}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \left( 1 - 2\lambda - \eta + \frac{z}{\sigma\sqrt{t}} \right)
 \end{aligned}$$

➤ *put up-and-in con  $S < H$  e  $K \geq H$*

$$\begin{aligned}
 p_{uai} & = Ke^{-rt}N(-d_1 + \sigma\sqrt{t}) - S_0e^{-qt}N(-d_1) + S_0e^{-qt}N(-x_1) - Ke^{-rt}N(-x_1 + \sigma\sqrt{t}) + \\
 & - S_0e^{-qt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} N(-y_1) + Ke^{-rt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} N(-y_1 + \sigma\sqrt{t}) + Xe^{-rt}N(-x_1 + \sigma\sqrt{t}) + \\
 & - Xe^{-rt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} N(-y_1 + \sigma\sqrt{t}) = Ke^{-rt}[1 - N(d_1 - \sigma\sqrt{t})] - S_0e^{-qt}[1 - N(d_1)] + \\
 & + S_0e^{-qt}[1 - N(x_1)] - Ke^{-rt}[1 - N(x_1 - \sigma\sqrt{t})] - S_0e^{-qt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} [1 - N(y_1)] + \\
 & + Ke^{-rt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} [1 - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] + Xe^{-rt}[1 - N(x_1 - \sigma\sqrt{t})] + \\
 & - Xe^{-rt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} [1 - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})]
 \end{aligned}$$

$$\Delta = e^{-qt}[N(d_1) - 1] + e^{-qt}[1 - N(x_1)] +$$

$$- \frac{e^{-qt}}{\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \left( 1 - \frac{K}{H} \right) - \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} (1 - 2\lambda)e^{-qt}[1 - N(y_1)] +$$

$$\begin{aligned}
& -e^{-qt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-1} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} (H - K) + \\
& -Ke^{-rt} (2\lambda - 2) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda-1}} [1 - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] + \\
& -\frac{X}{H} \frac{e^{-qt}}{\sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} + Xe^{-rt} (2\lambda - 2) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda-1}} [1 - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] + \\
& -X \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-1} \frac{e^{-qt}}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \\
\gamma = & \frac{e^{-qt}}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} - \frac{e^{-qt}}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \left[ 1 - \frac{x_1}{\sigma\sqrt{t}} \left( 1 - \frac{K}{H} \right) \right] + \\
& + e^{-qt} \frac{H^{2\lambda}}{S_0^{2\lambda+1}} 2\lambda(1 - 2\lambda) [1 - N(y_1)] + \\
& -e^{-qt} \frac{H^{2\lambda-1}}{S_0^{2\lambda}} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \left[ \frac{y_1}{\sigma\sqrt{t}} (H - K) + H(1 - 4\lambda) + 2K(2\lambda - 1) \right] + \\
& + Ke^{-rt} (2\lambda - 2)(2\lambda - 1) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} [1 - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] + \\
& + e^{-qt} \frac{X}{H} \frac{x_1}{\sigma \sqrt{t}} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} + \\
& -Xe^{-rt} \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} (2\lambda - 2)(2\lambda - 1) [1 - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] + \\
& + \frac{Xe^{-qt}}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{H^{2\lambda-1}}{S_0^{2\lambda}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \left[ 4\lambda - 2 - \frac{y_1}{\sigma\sqrt{t}} \right]
\end{aligned}$$

➤ *put down-and-out con  $S > H$  e  $K \leq H$*

$$P_{dao} = X \left[ \left( \frac{H}{S_0} \right)^{\lambda-1+\eta} N(z) + \left( \frac{H}{S_0} \right)^{\lambda-1-\eta} N(z-2\eta\sigma\sqrt{t}) \right]$$

$$\begin{aligned} \Delta = & -X \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta}} (\lambda-1+\eta) N(z) - X \frac{H^{\lambda-1-\eta}}{S_0^{\lambda-\eta}} (\lambda-1-\eta) N(z-2\eta\sigma\sqrt{t}) + \\ & -2X \left( \frac{H}{S_0} \right)^{\lambda-1+\eta} \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma = & X \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+1+\eta}} (\lambda-1+\eta)(\lambda+\eta) N(z) + X \frac{H^{\lambda-1-\eta}}{S_0^{\lambda+1-\eta}} (\lambda-1-\eta)(\lambda-\eta) N(z-2\eta\sigma\sqrt{t}) + \\ & + 2X \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta}} \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \left[ 2\lambda+\eta-1-\frac{z}{\sigma\sqrt{t}} \right] \end{aligned}$$

➤ put down-and-in con  $S > H$  e  $K \leq H$

$$p_{dai} = Ke^{-rt}N(-d_1 + \sigma\sqrt{t}) - S_0e^{-qt}N(-d_1) + Xe^{-rt}N(x_1 - \sigma\sqrt{t}) +$$

$$- Xe^{-rt}\left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2}N(y_1 - \sigma\sqrt{t}) =$$

$$= Ke^{-rt}[1 - N(d_1 - \sigma\sqrt{t})] - S_0e^{-qt}[1 - N(d_1)] +$$

$$+ Xe^{-rt}\left[N(x_1 - \sigma\sqrt{t}) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2}N(y_1 - \sigma\sqrt{t})\right]$$

$$\Delta = e^{-qt}[N(d_1) - 1] + \frac{X}{H}e^{-qt}\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x_1^2} + Xe^{-rt}(2\lambda - 2)\frac{H^{\lambda-2}}{S_0^{\lambda-1}}N(y_1 - \sigma\sqrt{t}) +$$

$$+ X\left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-1}e^{-qt}\frac{1}{S_0\sigma\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y_1^2}$$

$$\gamma = e^{-qt} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} - \frac{X}{H} e^{-qt} x_1 \frac{1}{\sigma \sqrt{t}} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} +$$

$$-Xe^{-rt} \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} (2\lambda-2)(2\lambda-1)N(y_1 - \sigma\sqrt{t}) - Xe^{-qt} \frac{H^{2\lambda-1}}{S_0^{2\lambda}} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \left[ 4\lambda - 2 - \frac{y_1}{\sigma\sqrt{t}} \right]$$

➤ *put down-and-in*  $S > H$  e  $K < H$

$$p_{dai} = -S_0 e^{-qt} N(-x_1) + Ke^{-rt} N(-x_1 + \sigma\sqrt{t}) + S_0 e^{-qt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} [N(y) - N(y_1)] +$$

$$- Ke^{-rt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} [N(y - \sigma\sqrt{t}) - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] + Xe^{-rt} N(x_1 - \sigma\sqrt{t}) +$$

$$- Xe^{-rt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} N(y_1 - \sigma\sqrt{t}) = -S_0 e^{-qt} [1 - N(x_1)] + Ke^{-rt} [1 - N(x_1 - \sigma\sqrt{t})] +$$

$$+ S_0 e^{-qt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} [N(y) - N(y_1)] - Xe^{-rt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} [N(y - \sigma\sqrt{T}) - N(y_1 - \sigma\sqrt{T})] +$$

$$+ Xe^{-rt} N(x_1 - \sigma\sqrt{t}) - Xe^{-rt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} N(y_1 - \sigma\sqrt{t})$$

$$\Delta = -e^{-qt} [1 - N(x_1)] + \frac{e^{-qt}}{\sigma\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{1}{2}x_1^2}}{\sqrt{2\pi}} \left( 1 - \frac{K}{H} \right) + \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} (1 - 2\lambda) e^{-qt} [N(y) - N(y_1)] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-1} e^{-qt} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} (H - K) + \\
 & + Ke^{-rt} (2\lambda - 2) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda-1}} [N(y - \sigma\sqrt{t}) - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] + \\
 & + \frac{X}{H} e^{-qt} \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} + Xe^{-rt} (2\lambda - 2) \frac{H^{\lambda-2}}{S_0^{\lambda-1}} N(y_1 - \sigma\sqrt{t}) + \\
 & + X \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-1} e^{-qt} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma = & e^{-qt} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \left[ 1 - \frac{x_1}{\sigma\sqrt{t}} \left( 1 - \frac{K}{H} \right) \right] - e^{-qt} \frac{H^{2\lambda}}{S_0^{2\lambda+1}} 2\lambda(1 - 2\lambda) [N(y) - N(y_1)] + \\
 & + \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} e^{-qt} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} + \\
 & + \frac{H^{2\lambda-1}}{S_0^{2\lambda}} e^{-qt} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \left[ \frac{y_1}{\sigma\sqrt{t}} (H - K) + H(1 - 4\lambda) + 2K(2\lambda - 1) \right] + \\
 & - Ke^{-rt} (2\lambda - 2)(2\lambda - 1) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} [N(y - \sigma\sqrt{t}) - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] + \\
 & - \frac{X}{H} \frac{e^{-qt} x_1}{\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} + \\
 & - Xe^{-rt} \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} (2\lambda - 2)(2\lambda - 1) N(y_1 - \sigma\sqrt{t}) + \\
 & - \frac{Xe^{-qt}}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{H^{2\lambda-1}}{S_0^{2\lambda}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \left[ 4\lambda - 2 - \frac{y_1}{\sigma\sqrt{t}} \right]
 \end{aligned}$$

➤ *put down-and-out con  $S > H$  e  $K > H$*

$$\begin{aligned}
 p_{dao} &= Ke^{-rt}N(-d_1 + \sigma\sqrt{t}) - S_0e^{-qt}N(-d_1) + S_0e^{-qt}N(-x_1) - Ke^{-r}N(-x_1 + \sigma\sqrt{t}) + \\
 &\quad - S_0e^{-qt}\left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} [N(y) - N(y_1)] + Ke^{-rt}\left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} [N(y - \sigma\sqrt{t}) - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] + \\
 &\quad + X \left[ \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\lambda-1+\eta} N(z) + \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\lambda-1-\eta} N(z - 2\eta\sigma\sqrt{t}) \right] = \\
 &= Ke^{-rt} [1 - N(d_1 - \sigma\sqrt{t})] - S_0e^{-qt} [1 - N(d_1)] + \\
 &\quad + S_0e^{-qt} [1 - N(x_1)] - Ke^{-rt} [1 - N(x_1 - \sigma\sqrt{t})] + \\
 &\quad - S_0e^{-qt}\left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} [N(y) - N(y_1)] + Ke^{-rt}\left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} [N(y - \sigma\sqrt{t}) - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] + \\
 &\quad + X \left[ \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\lambda-1+\eta} N(z) + \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\lambda-1-\eta} N(z - 2\eta\sigma\sqrt{t}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= e^{-qt} [N(d_1) - 1] + e^{-qt} [1 - N(x_1)] - e^{-qt} \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \left(1 - \frac{K}{H}\right) + \\
 &\quad - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} (1 - 2\lambda)e^{-qt} [N(y) - N(y_1)] - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-1} \frac{e^{-qt}}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} (H - K) + \\
 &\quad - Ke^{-rt} (2\lambda - 2) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda-1}} [N(y - \sigma\sqrt{t}) - N(y_1 - \sigma\sqrt{t})] + \\
 &\quad - X \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta}} (\lambda - 1 + \eta) N(z) - X \frac{H^{\lambda-1-\eta}}{S_0^{\lambda-\eta}} (\lambda - 1 - \eta) N(z - 2\eta\sigma\sqrt{t}) + \\
 &\quad - 2X \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\lambda-1+\eta} \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma = & e^{-qt} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_i^2} - e^{-qt} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_i^2} \left[ 1 - \frac{x_i}{\sigma \sqrt{t}} \left( 1 - \frac{K}{H} \right) \right] + \\
 & + e^{-qt} \frac{H^{2\lambda}}{S_0^{2\lambda+1}} 2\lambda(1-2\lambda)[N(y) - N(y_1)] - e^{-qt} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} + \\
 & - e^{-qt} \frac{H^{2\lambda-1}}{S_0^{2\lambda+1}} \frac{1}{\sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_i^2} \left[ \frac{y_i}{\sigma \sqrt{t}} (H - K) + H(1 - 4\lambda) + 2K(2\lambda - 1) \right] + \\
 & + Ke^{-rt} (2\lambda - 2)(2\lambda - 1) \frac{H^{2\lambda-2}}{S_0^{2\lambda}} [N(y - \sigma \sqrt{t}) - N(y_1 - \sigma \sqrt{t})] + \\
 & + X \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+1+\eta}} (\lambda - 1 + \eta)(\lambda + \eta) N(z) + X \frac{H^{\lambda-1-\eta}}{S_0^{\lambda+1-\eta}} (\lambda - 1 - \eta)(\lambda - \eta) N(z - 2\eta \sigma \sqrt{t}) + \\
 & + 2X \frac{H^{\lambda-1+\eta}}{S_0^{\lambda+\eta}} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \left[ 2\lambda + \eta - 1 - \frac{z}{\sigma \sqrt{t}} \right]
 \end{aligned}$$



## Appendice B

Dimostrazione della sub-additività per l'Expected Shortfall

**Sia  $F(x)$  una distribuzione di probabilità di una variabile casuale  $X$**

$$F(x) = \text{Prob}(X \leq x) \quad (1)$$

e per alcune probabilità  $q \in (0,1)$  sia definito il  $q$ -quantile

$$x_q = \inf\{x \mid F(x) \geq q\}. \quad (2)$$

Se  $F(\cdot)$  è continua si ha che  $F(x_q) = q$ , mentre se  $F(\cdot)$  è discontinua in  $x_q$  e quindi la  $\text{Prob}\{X = x_q\} > 0$  si può avere  $F(x_q) = \text{Prob}\{X \leq x_q\} > q$ . Si deve prendere in considerazione la media di  $x_q$  definita come valore atteso della distribuzione nel  $q$ -quantile.

DEFINIZIONE: Per una variabile casuale  $X$  e per uno specifico livello di probabilità  $q$ , si definisce

$$\begin{aligned} \bar{x}_q &\equiv \frac{1}{q} E\{X \cdot 1_{X \leq x_q}\} + \left(1 - \frac{F(x_q)}{q}\right) \cdot x_q \\ &= \frac{1}{q} E\{X \cdot 1_{X \leq x_q}^q\} \end{aligned} \quad (3)$$

dove nell'ultima espressione viene introdotta

$$1_{X \leq x_q}^q = 1_{X \leq x_q} + \frac{(q - F(x_q))}{\text{Prob}\{X = x_q\}} 1_{X = x_q}. \quad (4)$$

**Il secondo termine è zero se  $\text{Prob}\{X = x_q\} = 0$ . Nel seguito si farà uso delle seguenti proprietà:**

$$E\{1_{X \leq x_q}^q\} = q \quad (5)$$

$$0 \leq 1_{X \leq x_q}^q \leq 1. \quad (6)$$

**L'unica cosa da mostrare è (6) nel caso  $X = x_q$ :**

$$1_{X \leq x_q}^q |_{X=x_q} = 1 + \frac{q - F(x_q)}{\text{Pr ob}\{X = x_q\}} = \frac{q - F(x_q^-)}{\text{Pr ob}\{X = x_q\}} \in [0,1] \quad (7)$$

quando  $F(x_q^-) \leq q \leq F(x_q^+) = F(x_q)$  e  $\text{Pr ob}\{X = x_q\} = F(x_q) - F(x_q^-)$  per la definizione di  $x_q$ .

Si può ora dimostrare il seguente teorema fondamentale.

**TEOREMA:** date due variabili casuali  $X$  e  $Y$  e definendo  $Z = X + Y$ , si ha

$$\bar{z}_q \geq \bar{x}_q + \bar{y}_q \quad (8)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} q(\bar{z}_q - \bar{x}_q - \bar{y}_q) &= E\{Z \cdot 1_{Z \leq z_q}^q - X \cdot 1_{X \leq x_q}^q - Y \cdot 1_{Y \leq y_q}^q\} = \\ &= E\{X(1_{Z \leq z_q}^q - 1_{X \leq x_q}^q) + Y(1_{Z \leq z_q}^q - 1_{Y \leq y_q}^q)\} = \\ &\geq x_q E\{1_{Z \leq z_q}^q - 1_{X \leq x_q}^q\} + y_q E\{1_{Z \leq z_q}^q - 1_{Y \leq y_q}^q\} = \\ &= x_q(q - q) + y_q(q - q) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

**Nella disuguaglianza si è usato il fatto che**

$$\begin{cases} 1_{Z \leq z_q}^q - 1_{Z \leq z_q}^q \geq 0 & \text{if } X > x_q \\ 1_{Z \leq z_q}^q - 1_{Z \leq z_q}^q \leq 0 & \text{if } X < x_q \end{cases}$$

(10)

che è una conseguenza di (6) (vedere anche figura 1).

CVD

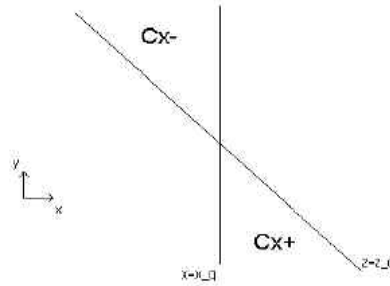


Figura 1. Il dominio delle funzioni caratteristiche

Come conseguenza si ha che:

COROLLARIO: per ogni misura di rischio  $R$  definita come

$$R(X) = f(X) - \bar{x}_q \quad (11)$$

dove  $f$  è una funzione lineare, la proprietà sub-additiva sostiene che

$$R(X + Y) \leq R(X) + R(Y) \quad (12)$$

DEFINIZIONE: Per uno specifico orizzonte temporale  $T$ , si definisce  $ES_{q,T}$  come la misura di rischio al tempo  $t = 0$  di un portafoglio finanziario di valore  $\Pi(t)$  definito come differenza tra il prezzo forward del portafoglio e la media della  $q$ -coda del portafoglio al tempo  $T$

$$ES_{q,T}(\Pi) = D^{-1}(0,T)\Pi(0) - \bar{\Pi}_q(T). \quad (13)$$

Il precedente corollario mostra che  $ES_{q,T}$  è sub additiva.



## Appendice C

*Nelle pagine successive sono riportate le formule del pricing, delle greche delta e gamma, e dei due approcci considerati, ossia quello delta e quello delta-gamma, per le opzioni standard e barriera, che sono state utilizzate nel programma Mathcad.*

Legenda:

S = Prezzo Spot del sottostante

K = Prezzo d'esercizio

H = Barriera

X = Rebate

$\sigma$  = Volatilità

r = Tasso d'interesse

q = Dividendo

t = Vita residua

b = r - q

$$d1(S, K, \sigma, t, b) := \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(b + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}}$$

$$d2(S, K, \sigma, t, b) := \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}}$$

$$\mu(b, \sigma) := \frac{b - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2}$$

$$\lambda(r, b, \sigma) := \sqrt{\mu(b, \sigma)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}$$

$$z(H, S, \sigma, t, b, r) := \frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right)}{\sigma \cdot \sqrt{t}} + \lambda(r, b, \sigma) \cdot \sigma \cdot \sqrt{t}$$

$$x1(S, K, \sigma, t, b) := \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{\sigma \cdot \sqrt{t}} + (1 + \mu(b, \sigma)) \cdot \sigma \cdot \sqrt{t}$$

$$x2(S, H, \sigma, t, b) := \frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right)}{\sigma \cdot \sqrt{t}} + (1 + \mu(b, \sigma)) \cdot \sigma \cdot \sqrt{t}$$

$$y1(H, S, K, \sigma, t, b) := \frac{\left(\ln\left(\frac{H^2}{S \cdot K}\right)\right)}{\sigma \cdot \sqrt{t}} + (1 + \mu(b, \sigma)) \cdot \sigma \cdot \sqrt{t}$$

$$y2(H, S, \sigma, b, t) := \frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right)}{\sigma \cdot \sqrt{t}} + (1 + \mu(b, \sigma)) \cdot \sigma \cdot \sqrt{t}$$

$$A(\phi, S, K, b, r, t, \sigma) := \phi \cdot S \cdot e^{(b-r) \cdot t} \cdot \text{cnorm}(\phi \cdot x1(S, K, \sigma, t, b)) - \phi \cdot K \cdot e^{-r \cdot t} \cdot \text{cnorm}(\phi \cdot x1(S, K, \sigma, t, b) - \phi \cdot \sigma \cdot \sqrt{t})$$

$$B(\phi, S, H, K, b, r, \sigma, t) := \phi \cdot S \cdot e^{(b-r) \cdot t} \cdot \text{cnorm}(\phi \cdot x2(S, H, \sigma, t, b)) - \phi \cdot K \cdot e^{-r \cdot t} \cdot \text{cnorm}(\phi \cdot x2(S, H, \sigma, t, b) - \phi \cdot \sigma \cdot \sqrt{t})$$

$$C(\phi, S, b, r, H, \eta, K, \sigma, t) := \phi \cdot S \cdot e^{(b-r) \cdot t} \cdot \left(\frac{H}{S}\right)^{2 \cdot (\mu(b, \sigma) + 1)} \cdot \text{cnorm}(\eta \cdot y1(H, S, K, \sigma, t, b)) - \phi \cdot K \cdot e^{-r \cdot t} \cdot \left(\frac{H}{S}\right)^{2 \cdot \mu(b, \sigma)} \cdot \text{cnorm}(\eta \cdot y1(H, S, K, \sigma, t, b) - \eta \cdot \sigma \cdot \sqrt{t})$$

$$D(\phi, S, b, r, H, K, \eta, \sigma, t) := \phi \cdot S \cdot e^{(b-r) \cdot t} \cdot \left(\frac{H}{S}\right)^{2 \cdot (\mu(b, \sigma) + 1)} \cdot \text{cnorm}(\eta \cdot y2(H, S, \sigma, b, t)) - \phi \cdot K \cdot e^{-r \cdot t} \cdot \left(\frac{H}{S}\right)^{2 \cdot \mu(b, \sigma)} \cdot \text{cnorm}(\eta \cdot y2(H, S, \sigma, b, t) - \eta \cdot \sigma \cdot \sqrt{t})$$

$$E(X, r, t, \eta, S, H, \sigma, b) := X \cdot e^{-r \cdot t} \cdot \left[ \text{cnorm}(\eta \cdot x_2(S, H, \sigma, t, b) - \eta \cdot \sigma \cdot \sqrt{t}) - \left(\frac{H}{S}\right)^{2 \cdot \mu(b, \sigma)} \cdot \text{cnorm}(\eta \cdot y_2(H, S, \sigma, b, t) - \eta \cdot \sigma \cdot \sqrt{t}) \right]$$

$$F(X, H, S, b, \sigma, r, \eta, t) := X \cdot \left[ \left(\frac{H}{S}\right)^{\mu(b, \sigma) + \lambda(r, b, \sigma)} \cdot \text{cnorm}(\eta \cdot z(H, S, \sigma, t, b, r)) + \left(\frac{H}{S}\right)^{\mu(b, \sigma) - \lambda(r, b, \sigma)} \cdot \text{cnorm}(\eta \cdot z(H, S, \sigma, t, b, r) - 2 \cdot \eta \cdot \lambda(r, b, \sigma) \cdot \sigma \cdot \sqrt{t}) \right]$$

### CALL STANDARD

$$\text{Call}(S, b, r, K, \sigma, t) := S \cdot e^{(b-r) \cdot t} \cdot \text{cnorm}(d_1(S, K, \sigma, t, b)) - K \cdot e^{-r \cdot t} \cdot \text{cnorm}(d_2(S, K, \sigma, t, b))$$

$$\Delta \text{Call}(S, b, r, \sigma, t, K) := \frac{d}{dS} \text{Call}(S, b, r, K, \sigma, t)$$

$$\Gamma \text{Call}(S, b, r, \sigma, t, K) := \frac{d}{dS} \Delta \text{Call}(S, b, r, \sigma, t, K)$$

$$\text{Variazione}(b, r, K, \sigma, t, S_1, S_0) := \Delta \text{Call}(S_0, b, r, \sigma, t, K) \cdot (S_1 - S_0)$$

$$\text{Variazione}(b, r, K, \sigma, t, S_1, S_0) := \Delta \text{Call}(S_0, b, r, \sigma, t, K) \cdot (S_1 - S_0) + \frac{\Gamma \text{Call}(S_0, b, r, \sigma, t, K) \cdot (S_1 - S_0)^2}{2}$$



*CALL DOWN-AND-IN CON  $S > H$  E  $K \geq H$*

$$\text{CallDeIStrikeMaxH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) := (C(\phi, S, b, r, H, \eta, K, \sigma, t)) + (E(X, r, t, \eta, S, H, \sigma, b))$$

$$\Delta \text{CallDeIStrikeMaxH}(\phi, S, b, r, H, \eta, K, \sigma, t, X) := \frac{d}{dS} \text{CallDeIStrikeMaxH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t)$$

$$\Gamma \text{CallDeIStrikeMaxH}(\phi, S, b, r, H, \eta, K, \sigma, t, X) := \frac{d}{dS} \Delta \text{CallDeIStrikeMaxH}(\phi, S, b, r, H, \eta, K, \sigma, t, X)$$

$$\text{Variazione}(\phi, b, r, H, \eta, K, X, t, \sigma, S1, S0) := \Delta \text{CallDeIStrikeMaxH}(\phi, S0, b, r, H, \eta, K, \sigma, t, X) \cdot (S1 - S0)$$

$$\text{Variazione}(\phi, b, r, H, \eta, K, \sigma, t, X, S1, S0) := \Delta \text{CallDeIStrikeMaxH}(\phi, S0, b, r, H, \eta, K, \sigma, t, X) \cdot (S1 - S0) + \frac{[\Gamma \text{CallDeIStrikeMaxH}(\phi, S0, b, r, H, \eta, K, \sigma, t, X) \cdot (S1 - S0)^2]}{2}$$

*CALL DOWN-AND-IN CON  $S > H$  E  $K \leq H$*

$$\text{CallDeIStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) := (A(\phi, S, K, b, r, t, \sigma)) - (B(\phi, S, H, K, b, r, \sigma, t)) + (D(\phi, S, b, r, H, K, \eta, \sigma, t)) + (E(X, r, t, \eta, S, H, \sigma, b))$$

$$\Delta \text{CallDeIStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) := \frac{d}{dS} \text{CallDeIStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t)$$

$$\Gamma \text{CallDeIStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) := \frac{d}{dS} \Delta \text{CallDeIStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t)$$

$$\text{Variazione}(\phi, b, r, H, \eta, K, \sigma, t, X, S1, S0) := \Delta \text{CallDeIStrikeMinH}(\phi, S0, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) \cdot (S1 - S0)$$

$$\text{Variazione}(\phi, b, r, H, \eta, K, \sigma, t, X, S1, S0) := \Delta \text{CallDeIStrikeMinH}(\phi, S0, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) \cdot (S1 - S0) + \frac{[\Gamma \text{CallDeIStrikeMinH}(\phi, S0, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) \cdot (S1 - S0)^2]}{2}$$

*CALL UP-AND-IN CON  $S < H$   $E$   $K < H$*

$$\text{CallUeIStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) := (\text{B}(\phi, S, H, K, b, r, \sigma, t)) - (\text{C}(\phi, S, b, r, H, \eta, K, \sigma, t)) + (\text{D}(\phi, S, b, r, H, K, \eta, \sigma, t)) + ((\text{E}(X, r, t, \eta, S, H, \sigma, b)))$$

$$\Delta \text{CallUeIStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) := \frac{d}{dS} \text{CallUeIStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t)$$

$$\Gamma \text{CallUeIStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) := \frac{d}{dS} \Delta \text{CallUeIStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t)$$

$$\text{Variazione}(\phi, b, r, H, \eta, K, \sigma, t, X, S1, S0) := \Delta \text{CallUeIStrikeMinH}(\phi, S0, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) \cdot (S1 - S0)$$

$$\text{Variazione}(\phi, b, r, H, \eta, K, \sigma, t, X, S1, S0) := \Delta \text{CallUeIStrikeMinH}(\phi, S0, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) \cdot (S1 - S0) + \frac{[\Gamma \text{CallUeIStrikeMinH}(\phi, S0, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) \cdot (S1 - S0)^2]}{2}$$

*CALL DOWN-AND-OUT CON  $S > H$   $E$   $K \geq H$*

$$\text{CallDeOStrikeMaxH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) := (\text{A}(\phi, S, K, b, r, t, \sigma)) - (\text{C}(\phi, S, b, r, H, \eta, K, \sigma, t)) + (\text{F}(X, H, S, b, \sigma, r, \eta, t))$$

$$\Delta \text{CallDeOStrikeMaxH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, \sigma, t, K) := \frac{d}{dS} \text{CallDeOStrikeMaxH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t)$$

$$\Gamma \text{CallDeOStrikeMaxH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, \sigma, t, K) := \frac{d}{dS} \Delta \text{CallDeOStrikeMaxH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, \sigma, t, K)$$

$$\text{Variazione}(\phi, b, r, H, \eta, X, \sigma, K, t, S1, S0) := \Delta \text{CallDeOStrikeMaxH}(\phi, S0, b, r, H, \eta, X, \sigma, t, K) \cdot (S1 - S0)$$

$$\text{Variazione}(\phi, b, r, H, \eta, K, \sigma, t, X, S1, S0) := \Delta \text{CallDeOStrikeMaxH}(\phi, S0, b, r, H, \eta, X, \sigma, t, K) \cdot (S1 - S0) + \frac{\Gamma \text{CallDeOStrikeMaxH}(\phi, S0, b, r, H, \eta, X, \sigma, t, K) \cdot (S1 - S0)^2}{2}$$

*CALL DOWN-AND-OUT CON  $S > H$  E  $K \leq H$*

$$\text{CallDeOStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) := (B(\phi, S, H, K, b, r, \sigma, t)) - (D(\phi, S, b, r, H, K, \eta, \sigma, t)) + (F(X, H, S, b, \sigma, r, \eta, t))$$

$$\Delta \text{CallDeOStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) := \frac{d}{dS} \text{CallDeOStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t)$$

$$\Gamma \text{CallDeOStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) := \frac{d}{dS} \Delta \text{CallDeOStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t)$$

$$\text{Variazione}(\phi, b, r, H, \eta, X, \sigma, K, t, S1, S0) := \Delta \text{CallDeOStrikeMinH}(\phi, S0, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) \cdot (S1 - S0)$$

$$\text{Variazione}(\phi, b, r, H, \eta, K, \sigma, t, X, S1, S0) := \Delta \text{CallDeOStrikeMinH}(\phi, S0, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) \cdot (S1 - S0) + \frac{[\Gamma \text{CallDeOStrikeMinH}(\phi, S0, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) \cdot (S1 - S0)^2]}{2}$$

*CALL UP-AND-OUT CON  $S < H$  E  $K < H$*

$$\text{CallUeOStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) := (A(\phi, S, K, b, r, t, \sigma)) - (B(\phi, S, H, K, b, r, \sigma, t)) + (C(\phi, S, b, r, H, \eta, K, \sigma, t)) - (D(\phi, S, b, r, H, K, \eta, \sigma, t)) + (F(X, H, S, b, \sigma, r, \eta, t))$$

$$\Delta \text{CallUeOStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) := \frac{d}{dS} \text{CallUeOStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t)$$

$$\Gamma \text{CallUeOStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) := \frac{d}{dS} \Delta \text{CallUeOStrikeMinH}(\phi, S, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t)$$

$$\text{Variazione}(\phi, b, r, H, \eta, X, \sigma, K, t, S1, S0) := \Delta \text{CallUeOStrikeMinH}(\phi, S0, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) \cdot (S1 - S0)$$

$$\text{Variazione}(\phi, b, r, H, \eta, K, \sigma, t, X, S1, S0) := \Delta \text{CallUeOStrikeMinH}(\phi, S0, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) \cdot (S1 - S0) + \frac{[\Gamma \text{CallUeOStrikeMinH}(\phi, S0, b, r, H, \eta, X, K, \sigma, t) \cdot (S1 - S0)^2]}{2}$$



## Appendice D

Si riporta la tabella riepilogativa delle ipotesi fatte circa il calcolo delle opzioni, del valore dell'opzione, della sua variazione dovuta all'aumento del prezzo del sottostante, della stima della variazione ottenuta con l'approccio delta e con quello delta-gamma, e degli errori relativi percentuali per ogni metodo.

Legenda:

$r$  = tasso d'interesse

$b$  = *cost of carry* (tasso d'interesse – dividendo)

$t$  = tempo alla scadenza

$K$  = prezzo d'esercizio

Sigma = volatilità

$S_0$  = prezzo sottostante al tempo 0

$S_1$  = prezzo del sottostante al tempo 1

$H$  = barriera

$X$  = *rebate*

$P_0$  = prezzo dell'opzione al tempo 0

$P_1$  = prezzo dell'opzione al tempo 1

Var Vera = variazione vera

Var Delta = variazione con approssimazione delta

Var Gamma = variazione con approssimazione delta-gamma

E Delta% = errore relativo percentuale con approssimazione delta

E Gamma% = errore relativo percentuale con approssimazione delta-gamma

Appendice D

TIPO OPZIONE	r	b	t	K	Sigma	S0	S1	H	X	P0	P1	Var Vera	Var Delta	Var Gamma	E Delta%	E Gamma%
<i>Call Standard</i>																
Call Standard	0,025	0,025	0,25	100	0,10	100	101			2,31533	2,91374	0,59842	0,55962	0,59907	6,48397	0,10805
Call Standard	0,025	0,025	1	100	0,10	100	101			5,29537	5,93208	0,63671	0,61791	0,63698	2,95311	0,04186
Call Standard	0,025	0,025	0,25	100	0,10	110	112			10,66385	12,63777	1,97391	1,96024	1,97776	0,69293	0,19454
Call Standard	0,025	0,025	1	100	0,10	110	112			13,04593	14,86622	1,82029	1,78983	1,82291	1,67332	0,14398
Call Standard	0,025	0,025	0,25	100	0,10	90	91			0,04209	0,07478	0,03268	0,02516	0,03169	23,01103	3,03349
Call Standard	0,025	0,025	1	100	0,10	90	91			1,11826	1,36088	0,24262	0,22554	0,24223	7,03856	0,16173
Call Standard	0,025	0,025	0,25	100	0,20	100	101			4,29462	4,85907	0,56445	0,54479	0,56461	3,48405	0,02755
Call Standard	0,025	0,025	1	100	0,20	100	101			9,16291	9,76158	0,59866	0,58901	0,59873	1,61258	0,01175
Call Standard	0,025	0,025	0,25	100	0,20	110	112			11,46790	13,21956	1,75167	1,71340	1,75451	2,18472	0,16234
Call Standard	0,025	0,025	1	100	0,20	110	112			15,94499	17,48961	1,54462	1,51704	1,54540	1,78566	0,05012
Call Standard	0,025	0,025	0,25	100	0,20	90	91			0,80074	0,98873	0,18800	0,17333	0,18756	7,80382	0,23261
Call Standard	0,025	0,025	1	100	0,20	90	91			4,29601	4,68802	0,39201	0,38140	0,39199	2,70546	0,00439
Call Standard	0,025	0,025	0,25	100	0,35	100	101			7,26682	7,82709	0,56028	0,54903	0,56034	2,00710	0,01193
Call Standard	0,025	0,025	1	100	0,35	100	101			14,98967	15,59249	0,60282	0,59732	0,60285	0,91191	0,00524
Call Standard	0,025	0,025	0,25	100	0,35	110	112			13,80256	15,33052	1,52796	1,49577	1,52893	2,10688	0,06355
Call Standard	0,025	0,025	1	100	0,35	110	112			21,48317	22,89707	1,41390	1,39606	1,41418	1,26198	0,01925
Call Standard	0,025	0,025	0,25	100	0,35	90	91			2,94150	3,26888	0,32739	0,31602	0,32732	3,47051	0,02106
Call Standard	0,025	0,025	1	100	0,35	90	91			9,59858	10,08311	0,48453	0,47823	0,48455	1,30080	0,00417
Call Standard	0,025	0,025	0,25	100	0,10	105	109			5,97290	9,68872	3,71582	3,47950	3,80207	6,35974	2,32120
Call Standard	0,025	0,025	1	100	0,10	105	109			8,82337	12,15963	3,33626	3,13849	3,36134	5,92790	0,75166
Call Standard	0,025	0,025	0,25	100	0,20	105	109			7,48799	10,62184	3,13385	2,90352	3,15735	7,34965	0,74979
Call Standard	0,025	0,025	1	100	0,20	105	109			12,34163	15,19365	2,85202	2,72179	2,85794	4,56617	0,20775
Call Standard	0,025	0,025	0,25	100	0,35	105	109			10,28524	13,06309	2,77784	2,62465	2,78486	5,51471	0,25256
Call Standard	0,025	0,025	1	100	0,35	105	109			18,11050	20,78970	2,67920	2,60075	2,68137	2,92813	0,08079
Call Standard	0,025	0,025	0,25	100	0,25	100	101			5,28573	5,84627	0,56054	0,54479	0,56064	2,80964	0,01927
Call Standard	0,025	0,025	1	100	0,25	100	101			11,10817	11,70491	0,59674	0,58901	0,59679	1,29528	0,00837
Call Standard	0,025	0,025	0,25	100	0,25	110	112			12,15802	13,81410	1,65608	1,61842	1,65799	2,27442	0,11510
Call Standard	0,025	0,025	1	100	0,25	110	112			17,72161	19,20090	1,47929	1,45565	1,47979	1,59821	0,03390
Call Standard	0,025	0,025	0,25	100	0,25	90	91			1,43729	1,68369	0,24639	0,23258	0,24616	5,60754	0,09620
Call Standard	0,025	0,025	1	100	0,25	90	91			6,03693	6,46775	0,43082	0,42213	0,43083	2,01654	0,00193

Appendice D

TIPO OPZIONE	r	b	t	K	Sigma	S0	S1	H	X	P0	P1	Var Vera	Var Delta	Var Gamma	E Delta%	E Gamma%
<b>Down and in S&gt;H e K&lt;=H</b>																
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	120	121	105	0	0,02946	0,01740	-0,01205	-0,01519	-0,01158	26,06823	3,89416
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,10	120	121	105	0	0,88040	0,73389	-0,14651	-0,15867	-0,14595	8,29958	0,38076
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	110	112	105	0	1,73546	0,91554	-0,81992	-1,03451	-0,80067	26,17247	2,34806
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,10	110	112	105	0	4,46120	3,31772	-1,14348	-1,29042	-1,13419	12,84990	0,81223
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	108	110	105	0	3,01969	1,73546	-1,28423	-1,54755	-1,27314	20,50419	0,86400
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,10	108	110	105	0	5,91765	4,46120	-1,45645	-1,63256	-1,44610	12,09161	0,71048
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	120	121	105	0	1,05770	0,89916	-0,15854	-0,16968	-0,15816	7,02557	0,24193
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,20	120	121	105	0	4,86290	4,54937	-0,31353	-0,32277	-0,31338	2,94723	0,04566
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	110	112	105	0	4,30613	3,35821	-0,94791	-1,03638	-0,94573	9,33219	0,23050
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,20	110	112	105	0	9,18130	8,12282	-1,05848	-1,11378	-1,05711	5,22481	0,12904
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	108	110	105	0	5,43499	4,30613	-1,12886	-1,22301	-1,12739	8,33999	0,13038
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,20	108	110	105	0	10,35313	9,18130	-1,17183	-1,23127	-1,17044	5,07202	0,11881
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	120	121	105	0	3,83810	3,56714	-0,27096	-0,27928	-0,27085	3,07123	0,04236
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,35	120	121	105	0	11,37766	11,02304	-0,35462	-0,35984	-0,35458	1,47059	0,01208
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	110	112	105	0	7,58540	6,66969	-0,91571	-0,96113	-0,91504	4,95965	0,07321
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,35	110	112	105	0	15,54628	14,61549	-0,93080	-0,95694	-0,93041	2,80854	0,04126
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	108	110	105	0	8,59323	7,58540	-1,00783	-1,05513	-1,00727	4,69282	0,05579
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,35	108	110	105	0	16,53013	15,54628	-0,98385	-1,01115	-0,98346	2,77502	0,03968
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	114	118	105	0	0,44229	0,07923	-0,36307	-0,68276	-0,23415	88,05421	35,50651
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,10	114	118	105	0	2,43300	1,25342	-1,17958	-1,54377	-1,12349	30,87404	4,75538
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	114	118	105	0	2,57729	1,44631	-1,13098	-1,40582	-1,10563	24,30038	2,24185
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,20	114	118	105	0	7,16955	5,54713	-1,62242	-1,80666	-1,61216	11,35627	0,63200
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	114	118	105	0	5,84195	4,43133	-1,41062	-1,57056	-1,40388	11,33821	0,47753
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,35	114	118	105	0	13,73545	12,11872	-1,61674	-1,71082	-1,61380	5,81906	0,18158
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	120	121	100	0	1,45731	1,33108	-0,12623	-0,13139	-0,12612	4,08990	0,09105
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,35	120	121	100	0	7,45934	7,19746	-0,26188	-0,26634	-0,26183	1,70372	0,01717
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	110	112	100	0	3,42608	2,91030	-0,51579	-0,55200	-0,51461	7,02097	0,22941
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,35	110	112	100	0	10,62107	9,90263	-0,71845	-0,74206	-0,71801	3,28628	0,06071
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	108	110	100	0	4,01667	3,42608	-0,59059	-0,63036	-0,58940	6,73448	0,20098
DaI S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,35	108	110	100	0	11,38762	10,62107	-0,76655	-0,79148	-0,76610	3,25315	0,05879

Appendice D

TIPO OPZIONE	r	b	t	K	Sigma	S0	S1	H	X	P0	P1	Var Vera	Var Delta	Var Gamma	E Delta%	E Gamma%
<b>Up and in S&lt;H e K&lt;H</b>																
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	100	101	110	0	0,69097	1,05273	0,36176	0,30429	0,35774	15,88602	1,11254
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,10	100	101	110	0	4,60794	5,27655	0,66861	0,64354	0,66895	3,74965	0,05047
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	104	106	110	0	2,99302	5,09701	2,10399	1,77924	2,11493	15,43502	0,52020
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,10	104	106	110	0	7,56163	9,28257	1,72094	1,64985	1,72657	4,13109	0,32717
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	90	91	110	0	0,00089	0,00217	0,00128	0,00082	0,00117	36,09090	8,67135
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,10	90	91	110	0	0,69228	0,88080	0,18852	0,17125	0,18785	9,16062	0,35606
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	100	101	110	0	3,64384	4,22694	0,58310	0,55700	0,58321	4,47639	0,01888
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,20	100	101	110	0	9,04363	9,65251	0,60888	0,59889	0,60896	1,63978	0,01369
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	104	106	110	0	6,27795	7,87179	1,59384	1,50950	1,59857	5,29132	0,29717
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,20	104	106	110	0	11,59468	12,97993	1,38526	1,35027	1,38608	2,52537	0,05971
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	90	91	110	0	0,46852	0,60668	0,13816	0,12423	0,13751	10,07866	0,47288
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,20	90	91	110	0	4,12221	4,51513	0,39293	0,38179	0,39291	2,83362	0,00497
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	100	101	110	0	7,09674	7,66990	0,57317	0,56123	0,57325	2,08212	0,01489
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,35	100	101	110	0	14,96577	15,57087	0,60510	0,59958	0,60513	0,91224	0,00539
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	104	106	110	0	9,52794	10,87532	1,34738	1,30536	1,34840	3,11810	0,07590
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,35	104	106	110	0	17,45081	18,75594	1,30514	1,28481	1,30541	1,55742	0,02112
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	90	91	110	0	2,72981	3,05399	0,32418	0,31208	0,32410	3,73332	0,02644
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,35	90	91	110	0	9,55559	10,04164	0,48605	0,47969	0,48607	1,30776	0,00434
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	94	98	110	0	0,02282	0,26416	0,24134	0,06452	0,14667	73,26411	39,22891
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,10	94	98	110	0	1,68431	3,42442	1,74011	1,33765	1,71780	23,12864	1,28226
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	94	98	110	0	1,21979	2,63476	1,41497	1,04707	1,38273	26,00050	2,27866
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,20	94	98	110	0	5,82784	7,88674	2,05890	1,88394	2,06130	8,49776	0,11644
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	94	98	110	0	4,17501	6,02295	1,84794	1,64552	1,84806	10,95427	0,00637
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,35	94	98	110	0	11,57496	13,78908	2,21412	2,11845	2,21591	4,32088	0,08073
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	90	91	101	0	2,94128	3,26868	0,32740	0,31604	0,32733	3,47071	0,02106
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,35	90	91	101	0	9,59855	10,08308	0,48453	0,47823	0,48455	1,30080	0,00417
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	94	98	101	0	4,38982	6,21440	1,82458	1,63570	1,82465	10,35179	0,00386
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,35	94	98	101	0	11,61127	13,81738	2,20611	2,11105	2,20783	4,30857	0,07801
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	88	90	101	0	2,35374	2,94128	0,58753	0,54369	0,58678	7,46215	0,12787
UaI S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,35	88	90	101	0	8,66753	9,59855	0,93102	0,90543	0,93115	2,74828	0,01465



Appendice D

TIPO OPZIONE	r	b	t	K	Sigma	S0	S1	H	X	P0	P1	Var Vera	Var Delta	Var Gamma	E Delta%	E Gamma%
<b>Down and out S&gt;H e K&gt;=H</b>																
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	100	101	95	0	2,27557	2,89154	0,61597	0,58223	0,61578	5,47633	0,02970
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	1	100	0,10	100	101	95	0	4,33776	5,16509	0,82733	0,82820	0,82644	0,10543	0,10663
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	110	112	95	0	10,66381	12,63776	1,97395	1,96030	1,97777	0,69137	0,19365
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	1	100	0,10	110	112	95	0	12,96124	14,81674	1,85550	1,83465	1,85658	1,12403	0,05808
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	97	98	95	0	0,80106	1,23850	0,43744	0,41761	0,43421	4,53277	0,73729
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	1	100	0,10	97	98	95	0	1,80763	2,66600	0,85837	0,87007	0,85678	1,36270	0,18532
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	100	101	95	0	3,46042	4,17466	0,71424	0,70772	0,71381	0,91336	0,06122
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	1	100	0,20	100	101	95	0	4,82685	5,76825	0,94140	0,94440	0,94122	0,31817	0,01919
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	110	112	95	0	11,37580	13,16355	1,78775	1,75838	1,78934	1,64310	0,08856
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	1	100	0,20	110	112	95	0	14,10277	15,94985	1,84707	1,84508	1,84660	0,10808	0,02545
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	97	98	95	0	1,37741	2,06520	0,68779	0,68652	0,68704	0,18418	0,10799
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	1	100	0,20	97	98	95	0	1,95978	2,92381	0,96403	0,96885	0,96380	0,49957	0,02355
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	100	101	95	0	4,15249	4,98308	0,83060	0,82987	0,83047	0,08782	0,01535
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	1	100	0,35	100	101	95	0	4,97159	5,95603	0,98444	0,98588	0,98440	0,14575	0,00403
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	110	112	95	0	12,61150	14,36074	1,74924	1,73808	1,74911	0,63750	0,00734
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	1	100	0,35	110	112	95	0	14,71834	16,64951	1,93117	1,93315	1,93099	0,10273	0,00928
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	97	98	95	0	1,66453	2,49407	0,82954	0,83011	0,82937	0,06898	0,01967
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	1	100	0,35	97	98	95	0	1,99956	2,99361	0,99404	0,99586	0,99400	0,18291	0,00462
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	102	106	95	0	3,57422	6,86064	3,28643	2,86000	3,36426	12,97537	2,36822
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	1	100	0,10	102	106	95	0	5,99380	9,38571	3,39191	3,32314	3,36584	2,02756	0,76866
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	102	106	95	0	4,90350	7,99364	3,09014	2,94719	3,07919	4,62597	0,35453
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	1	100	0,20	102	106	95	0	6,70436	10,41408	3,70972	3,73516	3,70064	0,68590	0,24467
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	102	106	95	0	5,81563	9,17757	3,36195	3,33497	3,35595	0,80229	0,17828
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	1	100	0,35	102	106	95	0	6,93775	10,84181	3,90406	3,92178	3,90185	0,45391	0,05643
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	100	101	99	0	1,01021	2,01666	1,00645	1,00826	1,00639	0,17962	0,00673
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	1	100	0,35	100	101	99	0	1,08407	2,16387	1,07980	1,08190	1,07976	0,19481	0,00307
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	110	112	99	0	10,96485	12,93904	1,97419	1,97540	1,97395	0,06134	0,01246
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	1	100	0,35	110	112	99	0	11,71963	13,81040	2,09077	2,09587	2,09060	0,24404	0,00815
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	102	106	99	0	3,01976	7,00592	3,98616	4,00622	3,98246	0,50322	0,09280
DaO S>H e K>=H	0,025	0,025	1	100	0,35	102	106	99	0	3,23958	7,50535	4,26576	4,29497	4,26387	0,68481	0,04432

Appendice D

TIPO OPZIONE	r	b	t	K	Sigma	S0	S1	H	X	P0	P1	Var Vera	Var Delta	Var Gamma	E Delta%	E Gamma%
<b>Down and out S&gt;H e K&lt;=H</b>																
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	120	121	105	0	20,59370	21,60570	1,01200	1,01512	1,01153	0,30844	0,04592
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,10	120	121	105	0	21,66386	22,79514	1,13128	1,14180	1,13083	0,92978	0,04015
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	110	112	105	0	8,92839	11,72222	2,79383	2,99475	2,77842	7,19138	0,55165
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,10	110	112	105	0	8,58473	11,54850	2,96377	3,08025	2,95710	3,93002	0,22494
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	108	110	105	0	5,70664	8,92839	3,22175	3,45638	3,21744	7,28261	0,13392
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,10	108	110	105	0	5,37433	8,58473	3,21040	3,34776	3,20300	4,27853	0,23058
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	120	121	105	0	19,69050	20,82500	1,13451	1,14323	1,13426	0,76907	0,02151
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,20	120	121	105	0	19,28120	20,47115	1,18995	1,19492	1,18989	0,41716	0,00529
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	110	112	105	0	7,16177	9,86135	2,69958	2,74977	2,70024	1,85926	0,02440
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,20	110	112	105	0	6,76369	9,36679	2,60310	2,63082	2,60251	1,06495	0,02273
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	108	110	105	0	4,36357	7,16177	2,79820	2,84529	2,79974	1,68310	0,05519
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,20	108	110	105	0	4,10395	6,76369	2,65974	2,68927	2,65912	1,11039	0,02340
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	120	121	105	0	18,15215	19,30583	1,15368	1,15729	1,15367	0,31247	0,00115
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,35	120	121	105	0	17,50501	18,64171	1,13669	1,13840	1,13668	0,15028	0,00102
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	110	112	105	0	6,21716	8,66082	2,44367	2,45689	2,44397	0,54114	0,01230
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,35	110	112	105	0	5,93689	8,28159	2,34470	2,35300	2,34459	0,35393	0,00477
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	108	110	105	0	3,74769	6,21716	2,46947	2,48169	2,46986	0,49461	0,01560
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,35	108	110	105	0	3,57537	5,93689	2,36152	2,37016	2,36141	0,36592	0,00498
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	114	118	105	0	14,18561	18,54423	4,35862	4,67157	4,23502	7,18003	2,83574
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,10	114	118	105	0	14,30473	19,33249	5,02776	5,32909	4,98538	5,99336	0,84294
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	114	118	105	0	12,45967	17,36624	4,90657	5,09622	4,89778	3,86525	0,17916
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,20	114	118	105	0	11,91676	16,87075	4,95398	5,04910	4,94963	1,91993	0,08798
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	114	118	105	0	11,07702	15,82303	4,74600	4,80408	4,74679	1,22374	0,01665
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,35	114	118	105	0	10,61013	15,22124	4,61111	4,64135	4,61030	0,65564	0,01763
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	120	121	100	0	20,53294	21,54189	1,00895	1,00940	1,00894	0,04418	0,00133
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,35	120	121	100	0	21,42334	22,46728	1,04395	1,04490	1,04393	0,09146	0,00131
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	110	112	100	0	10,37648	12,42022	2,04375	2,04777	2,04354	0,19675	0,01038
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,35	110	112	100	0	10,86210	12,99445	2,13235	2,13812	2,13219	0,27045	0,00769
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	108	110	100	0	8,32425	10,37648	2,05223	2,05692	2,05199	0,22860	0,01167
DaO S>H e K<=H	0,025	0,025	1	100	0,35	108	110	100	0	8,71788	10,86210	2,14422	2,15049	2,14404	0,29270	0,00830

Appendice D

TIPO OPZIONE	r	b	t	K	Sigma	S0	S1	H	X	P0	P1	Var Vera	Var Delta	Var Gamma	E Delta%	E Gamma%
<b>Up and out S&lt;H e K&lt;H</b>																
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	99	100	120	0	1,79207	2,30772	0,51565	0,47686	0,51606	7,52239	0,07956
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,10	99	100	120	0	3,09907	3,32455	0,22548	0,23508	0,22656	4,25455	0,47634
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	103	105	120	0	4,26536	5,77586	1,51050	1,46505	1,53976	3,00890	1,93725
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,10	103	105	120	0	3,83606	3,98474	0,14868	0,23525	0,15427	58,22810	3,76221
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	90	91	120	0	0,04209	0,07477	0,03268	0,02516	0,03169	23,01041	3,03316
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,10	90	91	120	0	0,97797	1,16693	0,18896	0,17906	0,18910	5,23649	0,07519
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	99	100	120	0	2,65129	2,89155	0,24026	0,24500	0,24129	1,97432	0,42989
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,20	99	100	120	0	1,16170	1,14853	-0,01317	-0,01030	-0,01318	21,79875	0,01142
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	103	105	120	0	3,50433	3,76008	0,25575	0,32890	0,26334	28,60321	2,96991
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,20	103	105	120	0	1,07502	0,99900	-0,07602	-0,06557	-0,07630	13,74928	0,36708
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	90	91	120	0	0,71748	0,87136	0,15388	0,14410	0,15384	6,35301	0,02266
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,20	90	91	120	0	1,03622	1,06938	0,03316	0,03508	0,03323	5,79183	0,20580
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	99	100	120	0	1,44988	1,45682	0,00694	0,01119	0,00700	61,17082	0,80844
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,35	99	100	120	0	0,29567	0,28530	-0,01037	-0,01007	-0,01038	2,89082	0,04872
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	103	105	120	0	1,42474	1,35828	-0,06646	-0,04843	-0,06656	27,13324	0,14243
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,35	103	105	120	0	0,25083	0,22538	-0,02545	-0,02453	-0,02549	3,61575	0,17548
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	90	91	120	0	1,07443	1,13626	0,06183	0,06321	0,06196	2,23504	0,21639
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,35	90	91	120	0	0,35840	0,35443	-0,00396	-0,00356	-0,00396	10,18697	0,05440
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	93	96	120	0	0,20678	0,70758	0,50079	0,28964	0,45511	42,16447	9,12192
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,10	93	96	120	0	1,59983	2,34570	0,74587	0,69807	0,76294	6,40816	2,28935
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	93	96	120	0	1,23692	1,90872	0,67181	0,60371	0,68263	10,13602	1,61087
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,20	93	96	120	0	1,12302	1,16694	0,04392	0,06673	0,04514	51,92951	2,76872
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	93	96	120	0	1,24924	1,38049	0,13126	0,15641	0,13452	19,16459	2,48719
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,35	93	96	120	0	0,34413	0,32302	-0,02111	-0,01778	-0,02121	15,80397	0,45724
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,10	87	89	112	0	0,00560	0,02253	0,01693	0,00839	0,01406	50,44728	16,93848
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,10	87	89	112	0	0,34970	0,49558	0,14588	0,13299	0,14706	8,83479	0,80923
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,20	87	89	112	0	0,25268	0,37296	0,12028	0,10648	0,12070	11,47263	0,35237
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,20	87	89	112	0	0,27679	0,28685	0,01006	0,01296	0,01019	28,74731	1,27951
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	0,25	100	0,35	87	89	112	0	0,30416	0,33091	0,02674	0,02974	0,02707	11,21434	1,24178
UaO S<H e K<H	0,025	0,025	1	100	0,35	87	89	112	0	0,08172	0,07826	-0,00346	-0,00305	-0,00347	11,92603	0,23992

## ***BIBLIOGRAFIA***

Acerbi, C., Nordio, C. e Sirtori, C. (2001), *Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management*, working paper, Italian Association for Financial Risk Management, febbraio 2001

Acerbi, C. e Tasche D. (2001), *Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk*, working paper, Italian Association for Financial Risk Management, maggio 2001

Aifirm (2002), *Le moderne tecniche di risk management: il VaR*, Amministrazione & Finanza Oro

Anolli, M. e Locatelli, R. (2001), *Le operazioni finanziarie. Strumenti finanziari e contratti assicurativi*, Il Mulino

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. e Heath, D. (1997), *Thinking Coherently*, Risk 10 (11), 68-71

Artzner, P., Delbaen, D., Eber, J.M. e Heath, D. (1999), *Coherent Measure of Risk*, Mathematical Finance 9 (3), 203-228

Banfi, Alberto (2001), *I mercati e gli strumenti finanziari. Disciplina e organizzazione della borsa*, ISEDI

Betti, Francesco (2001), *Value at Risk. La gestione dei rischi finanziari e la creazione di valore*, Il Sole 24 ore

Brealey, Myres e Sandri (2003), *Principi di finanza aziendale*, McGraw-Hill

Cattabriga, L. e Santi, E. (1989), *Elementi di analisi matematica 1*, Pitagora Editrice Bologna

Di Franco, M., Polimeri, F. e Proietti, M. (2002), *Opzioni e titoli strutturati. Le recenti evoluzioni dell'ingegneria informatica*, Il Sole 24 ore

Espen, Gaarder e Hang (1997), *The complete guide to option pricing formulas*, McGraw-Hill

Gallo, G.M. e Pacini, B. (2002), *Metodi quantitativi per i mercati finanziari*, Carocci, Roma

Gilardi, Gianni (1991), *Analisi uno*, McGraw-Hill

Hull, John C. (2000), *Opzioni futures e altri derivati*, Il Sole 24 ore

KPMG (1997), *Manuale di risk management metodologie e tecniche per una gestione strategica nella banca*, Edibank

Lusignani, Giuseppe (1996), *La gestione dei rischi finanziari in banca*, Il Mulino

Mina, J. e Xiao, J.Y. (2001), *Return to RiskMetrics: The Evolution of a Standard*, RiskMetrics Group

Rockafellar, R.T. e Uryasev, S. (2001), *Conditional Value-at-Risk for general loss distributions*, Research 2001-5, ISE Depart., University of Florida

Rubinstein, M. (1991), *Somewhere Over the Rainbow*, Risk 4, 63-66

Sironi, A. e Marsella, M. (1997), *La misurazione e la gestione dei rischi di mercato. Modelli, strumenti e politiche*, Il Mulino

Statman, M.(1987), *How many Stocks Make a Diversified Portfolio?*, in Journal of Financial and Quantitative Analysis 22, settembre 1987, 353-364