DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Relazione per la prova finale

«Leggi di conservazione e controllo del traffico con limiti di velocità»

Tutor universitario: Prof. Pierpaolo Soravia

Laureando: *Fabio Poggiana*

Padova, 20/09/2023

OBIETTIVI DEL LAVORO

Approfondimento del concetto di **relazione fondamentale**

- ➢Analisi dei risultati già presenti in letteratura
- ➢Approccio sperimentale
- ➢Studio del modello LWR con differenti relazioni fondamentali

UN PO' DI STORIA...

Dicembre 1933 → Bruce D. Greenshields pubblica i risultati delle sue osservazioni

1934 & 1935 → Greenshields formula due versioni per la relazione fondamentale

~ **1950** → Nascita dei modelli microscopici e macroscopici

~ **1960** → Nascita dei modelli mesoscopici

1990 → S. Smulders introduce la relazione fondamentale parabolica-lineare

1994 → C. Daganzo introduce la relazione fondamentale bi-lineare

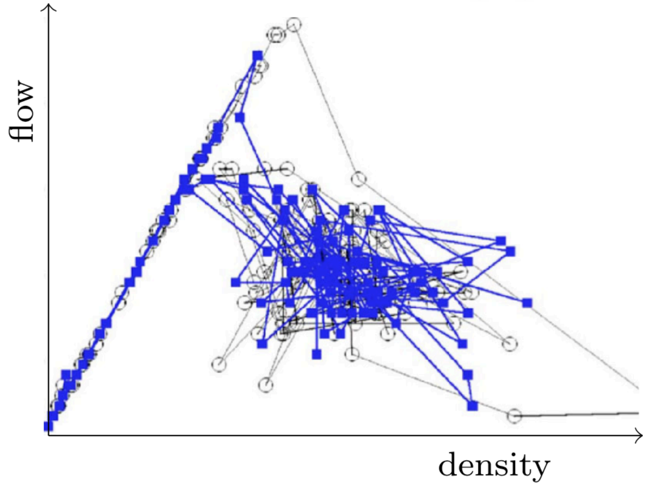
RELAZIONE FONDAMENTALE: DEFINIZIONE

Definizione: si definisce **relazione fondamentale** la relazione tra la velocità del traffico e la sua densità.

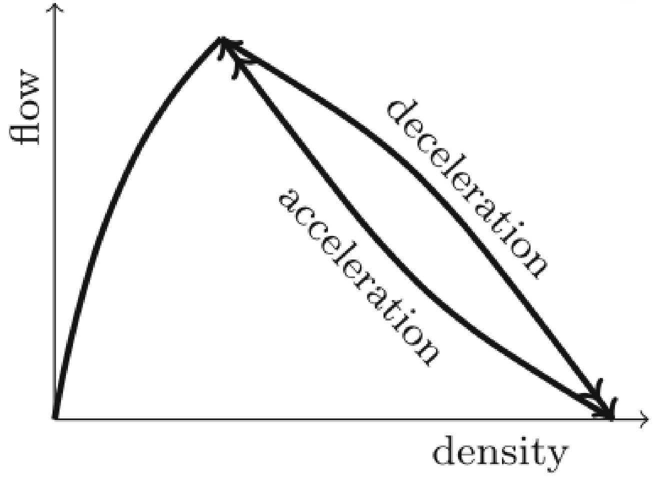
- Dalla relazione convettiva si trova che anche il flusso è funzione della densità di auto
- Sono rappresentative della relazione fondamentale $v(\rho)$ o in maniera equivalente $q(\rho)$

RELAZIONI FONDAMENTALI OSSERVATE SPERIMENTALMENTE

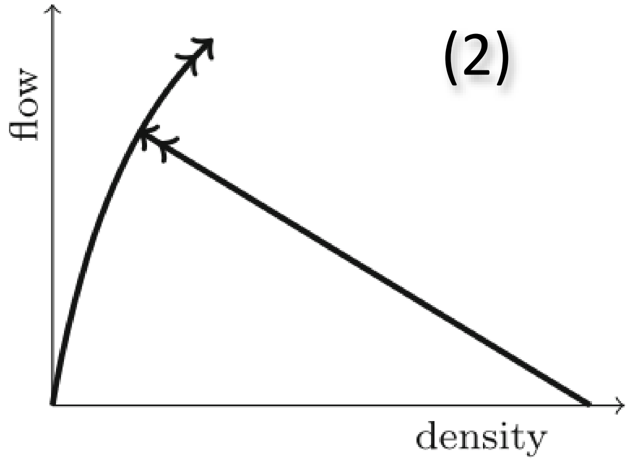
(1)



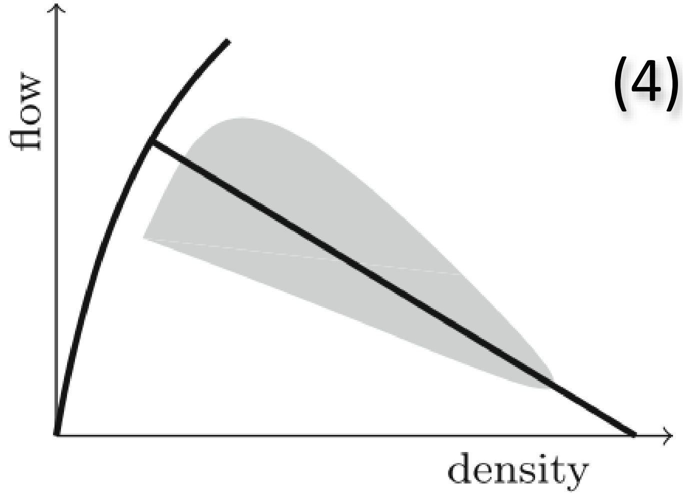
(3)



(2)

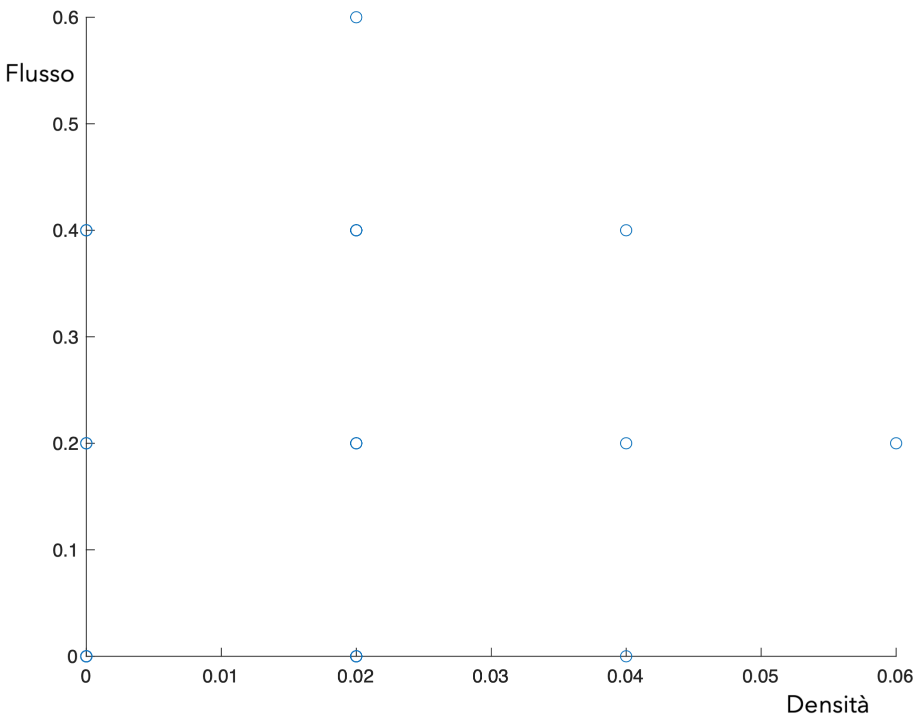


(4)

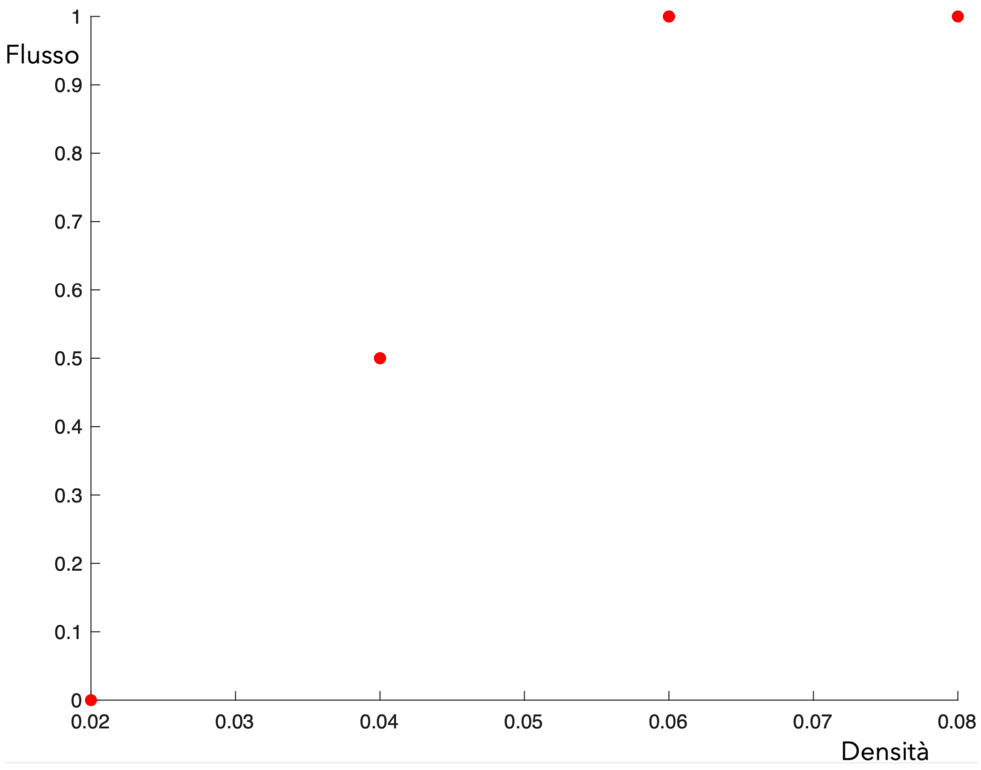


1. Plot di rilevazioni $\rho - q$
2. Capacity drop
3. Hysteresis
4. Dipendenza dal tempo

RELAZIONE FONDAMENTALE OSSERVATA



Scatter per la prima rilevazione



Scatter per la rilevazione definitiva

PROPRIETÀ DI DEL CASTILLO

1.La velocità $v(\rho)$ varia da 0 fino ad un valore v_m

2.La densità $\rho(x,t)$ varia da 0 fino ad un valore ρ_m

3.Le velocità in corrispondenza degli estremi della densità sono $v(0) = v_m$ e $v(\rho_m) = 0$

4.Il flusso in corrispondenza degli estremi della densità è $q(0) = q(\rho_m) = 0$

5.La velocità massima e la velocità dell'onda per la congestione sono date dalla derivata del flusso negli estremi della densità, ovvero $v_m = q'(0)$ e $w = q'(\rho_m)$

6.Il flusso è strettamente concavo: $q''(\rho) < 0$ per quasi ogni $\rho \in [0,\rho_m]$

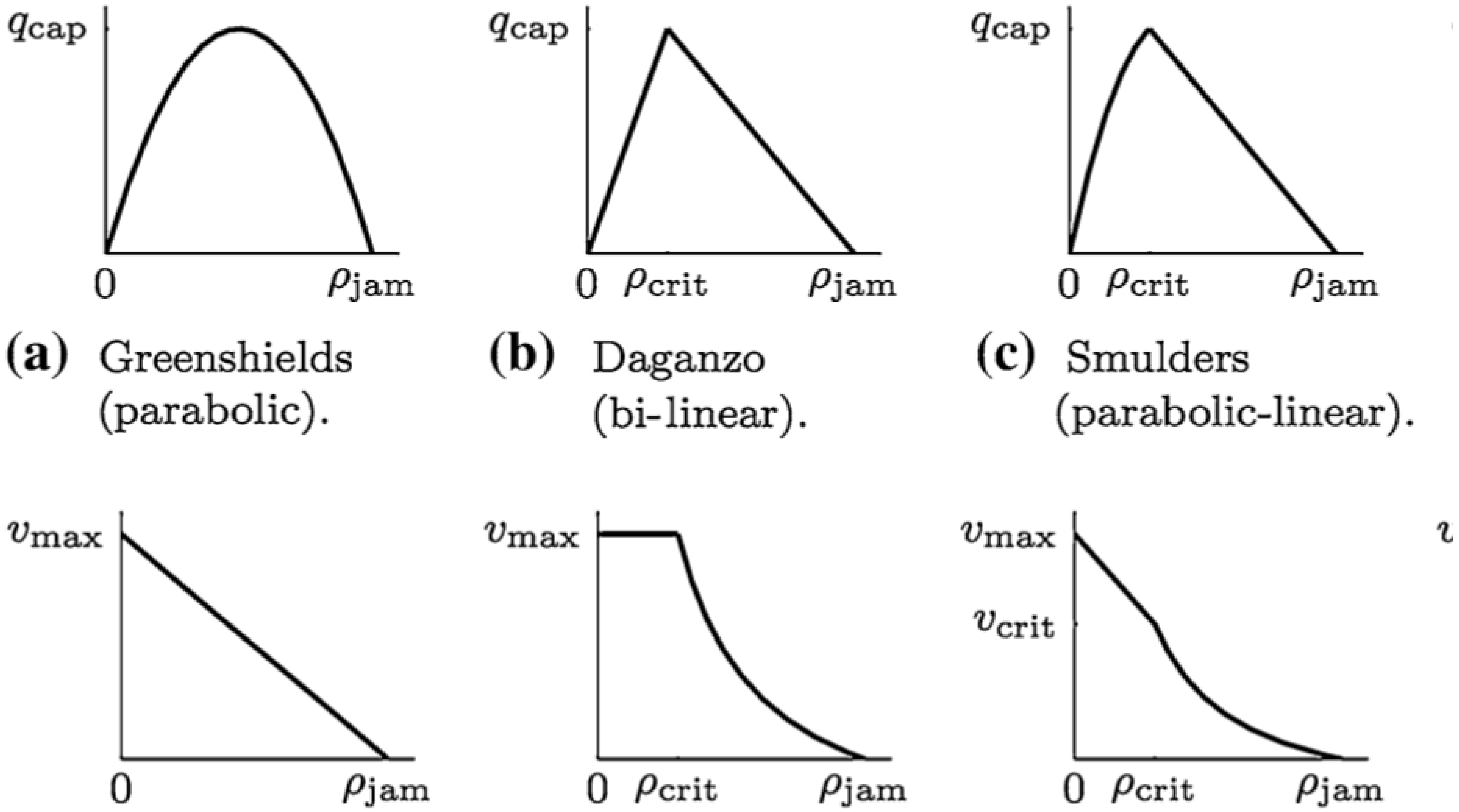
RELAZIONI DI GREENSHIELDS, DAGANZO E SMULDERS

Relazione di Greenshields: $v(\rho) = v_m\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)$

Relazione di Daganzo: $v(\rho) = \begin{cases} v_m & 0 \leq \rho \leq \rho_c \\ \dfrac{\rho_c v_m(\rho_m - \rho)}{\rho(\rho_m - \rho_c)} & \rho_c < \rho \leq \rho_m \end{cases}$

Relazione di Smulders: $v(\rho) = \begin{cases} (v_m - v_c)\dfrac{(\rho_c - \rho)}{\rho_c} + v_c & 0 \leq \rho \leq \rho_c \\ \dfrac{\rho_c v_c(\rho_m - \rho)}{\rho(\rho_m - \rho_c)} & \rho_c < \rho \leq \rho_m \end{cases}$

RELAZIONI DI GREENSHIELDS, DAGANZO E SMULDERS



(a) Greenshields (parabolic).

(b) Daganzo (bi-linear).

(c) Smulders (parabolic-linear).

(e) Greenshields.

(f) Daganzo.

(g) Smulders.

MODELLO DI LIGHTHILL - WHITHAM - RICHARDS (1955-1956)

- Modello Macroscopico, definiamo le grandezze: $\rho(x, t)$ $v(x, t)$ $q(x, t)$
- Si dimostra la relazione convettiva $q(x, t) = v(x, t)\rho(x, t)$

$[t, t + \Delta t]$ intervallo microscopico di tempo , $[x, x + v(x, t)\Delta t]$ intervallo microscopico di spazio.

La quantità di automobili in un intervallo microscopico di spazio è $\sim \rho(x, t)v(x, t)\Delta t$ ma anche $\sim q(x, t)\Delta t$.

Sommando su un intervallo $[t_0, t]$ e passando al limite per $\Delta t \longrightarrow 0$ si ottiene:

$$\int_{t_0}^{t} \rho(x, t)v(x, t)dt = \int_{t_0}^{t} q(x, t)dt$$

Data l' arbitrarietà di $[t_0, t]$, per il teorema della permanenza del segno segue la tesi

MODELLO DI LIGHTHILL - WHITHAM - RICHARDS (1955-1956)

➢**IPOTESI ALLA BASE DEL MODELLO:**

- tratto di strada rettilineo
- Lunghezza infinita
- Non sono ammessi sorpassi
- Non è possibile immettersi nel mezzo del percorso
- Si considera una relazione fondamentale $v = v(\rho)$

➢ Il modello fa uso di una particolare equazione **quasilineare**

$$\partial_t \rho(x, t) + q'(\rho)\partial_x \rho(x, t) = 0$$

Una simile equazione, corredata di un'opportuna condizione iniziale $\rho(x,0) = h(x)$ si risolve per **caratteristiche:**

$$\rho(x, t) = h(x - q'(h(x_0))t)$$

CARATTERISTICHE CON LE DIFFERENTI RELAZIONI

Relazione di Greenshields: $x = v_m\left(1 - \frac{2g(x_0)}{\rho_m}\right)t + x_0$

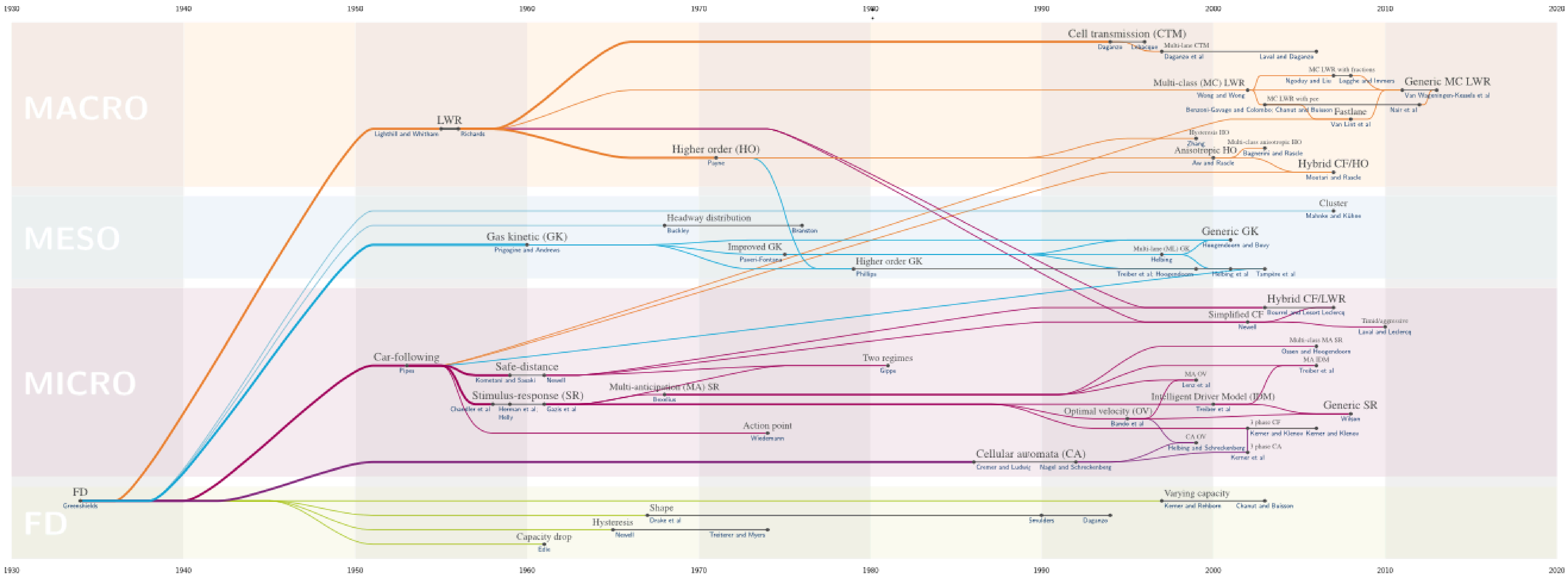
Relazione di Daganzo: $\begin{cases} x = v_m t + x_0 & 0 < \rho < \rho_c \\ x = -\frac{\rho_c v_m}{(\rho_m - \rho_c)}t + x_0 & \rho_c < \rho \leq \rho_m \end{cases}$

Relazione di Smulders: $\begin{cases} x = (v_m + \frac{2g(x_0)(v_c - v_m)}{\rho_c})t + x_0 & 0 \leq \rho < \rho_c \\ x = \frac{-\rho_c v_c}{(\rho_m - \rho_c)}t + x_0 & \rho_c < \rho \leq \rho_m \end{cases}$

CONCLUSIONI

- Al giorno d’oggi esiste un’intera branca della descrizione del traffico dedicata allo studio della relazione fondamentale
- Non esiste un unico approccio alla spiegazione dei dati rilevati
- Non esiste neppure un’unica funzione per $v(\rho)$, sebbene la più diffusa in assoluto sia quella di C. Daganzo
- Infine, negli ultimi 20 anni, la teoria dei modelli di traffico si è differenziata in in modo estremamente ramificato, passando dal semplice studio della relazione fondamentale ad una serie di modelli sempre più specifici

CONCLUSIONI



BIBLIOGRAFIA DI RIFERIMENTO

· Sandro Salsa, **Equazioni a derivate parziali** - Metodi, modelli e applicazioni, Springer 2a ed.

·Femke van Wageningen-Kessels, Hans van Lint, Kees Vuik, Serge Hoogendoorn, **Genealogy of traffic flow models.**

· **Traffic Flow Dynamics Data Models and Simulation**, Treiber and Kesting

· 75 years of fundamental diagram for traffic flow, **Greenshiedls Symposium**, Transportation Re- search Circular