UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA TULLIO LEVI-CIVITA

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Primi passi in analisi costruttiva:

analogie e differenze con l'approccio classico

Relatore:

Prof.ssa Maria Emilia Maietti

Candidato:

Giovanni Zocco

Matricola:

1167223

Anno accademico 2021/2022

23 Settembre 2022

Indice

Abstract

In questa tesi, dopo aver visto alcune importanti differenze che intercorrono tra la logica classica e quella intuizionista, cercheremo di renderci conto della reale possibilità di sviluppare un'analisi costruttiva che ci permetta di non rinunciare del tutto a fondamentali teoremi dell'analisi classica.
In particolare vedremo la versione costruttiva dei seguenti teoremi: esistenza del sup in insiemi non vuoti superiormente limitati, teorema dei valori intermedi, derivabilità di somma e prodotto di funzioni, teorema di Rolle e di Lagrange e teorema sulla non numerabilità dei reali.
Infine faremo qualche osservazione legata all'utilizzo o meno dell'assioma di scelta dipendente nelle teorie costruttive.

1 CONTESTO STORICO

Nel 1919 il matematico olandese Brouwer, professore dell'Università di Amsterdam, cominciò a tracciare l'idea di una matematica basata non più sulla logica classica, bensì su quella intuizionista. Negli anni successivi, però, gli intuizionisti produssero pochi risultati, tra loro slegati. Di conseguenza in quel periodo l'idea di una matematica fondata su una logica che, tra le altre cose, non riconoscesse il principio del terzo escluso non era per nulla presa sul serio, come testimoniano le parole del 1927 di David Hilbert [8]:

> Taking the principle of excluded middle from the mathematician would be the same, say, as proscribing the telescope to the astronomer or to the boxer the use of his fists. To prohibit existence statements and the principle of excluded middle is tantamount to relinquishing the science of mathematics altogether. For compared with the immense expanse of modern mathematics, what would the wretched remnants mean, the few isolated results, incomplete and unrelated, that the intuitionists have obtained [...]?

> Togliere il principio del terzo escluso ad un matematico sarebbe uguale a, diciamo, proibire il telescopio ad un astronomo o i pugni ad un pugile. Proibire le dichiarazioni di esistenza e il principio del terzo escluso equivale ad abbandonare del tutto la scienza della matematica. Comparati con l'immensa vastità della matematica moderna, cosa sarebbero i miseri resti, i pochi risultati isolati, incompleti e non correlati che gli intuizionisti hanno ottenuto [...]?

Possiamo dire che, probabilmente, il tempo non era ancora maturo. Tuttavia, di sicuro, qualcosa si stava muovendo, qualcosa bolliva in pentola: era solo questione di tempo prima che la scintilla prodotta da Brouwer diventasse una fiamma.

Fu infatti l'anno successivo alla morte di Brouwer, il 1967, l'anno della svolta, l'anno in cui ci fu un taglio netto con il passato. Solamente 8 anni dopo l'esposizione dei primi Tagli di Lucio Fontana alla Galleria del Naviglio a Milano, così come avvenne nell'arte, anche nella matematica gli intuizionisti cercavano di emergere, di squarciare la tela dell'indifferenza per mostrare che una matematica basata sulla logica intuizionista è possibile.

Nel 1967, infatti, Errett Bishop pubblicò un libro sull'analisi costruttiva: Foundations of constructive analysis. Tale lavoro ebbe un ruolo notevole nel processo di crescita costruttivo e permise di intuire la concreta possibilità di ottenere una matematica basata sulla logica intuizionista, come testimonia Michael Beeson [9]:

> The thrust of Bishop's work was that both Hilbert and Brouwer had been wrong about an important point on which they had agreed. Namely both of them thought that if one took constructive mathematics seriously, it would be necessary to "give up" the most important parts of modern mathematics (such as, for example, measure theory or complex analysis). Bishop showed that this was simply false, and in addition that it is not necessary to introduce unusual assumptions that appear contradictory to the uninitiated. The perceived conflict between power and security was illusory! One only had to proceed with a certain grace, instead of with Hilbert's "boxer's fists"

> La spinta del lavoro di Bishop era che sia Hilbert che Brouwer avevano torto riguardo ad un importante punto sul quale erano d'accordo. Ovvero pensavano entrambi che se uno prende sul serio la matematica costruttiva è necessario che "rinunci" alle più importanti parti della matematica moderna (come, per esempio, la teoria della misura o l'analisi complessa). Bishop mostrò che questo era semplicemente falso, e, in aggiunta a questo, che non è necessario introdurre inusuali assunzioni che appaiano contradditorie ai non iniziati. Il conflitto percepito tra potere e sicurezza era illusorio! Bastava procedere con una certa delicatezza, invece che con i "pugni da pugile" di Hilbert.

Questa tesi non ha la pretesa di snocciolare tutti gli aspetti della logica intuizionista e delle conseguenze del suo utilizzo come base della matematica, bensì mira a far intuire la reale possibilità di ottenere una matematica di questo tipo e a presentare qualche risultato interessante di una sua eventuale applicazione.

Procediamo però per gradi presentando alcune caratteristiche della logica intuizionista in relazione a quella classica.

2 CONFRONTO TRA LOGICA CLASSICA E INTUIZIONISTA

Vediamo ora alcune caratteristiche che differenziano la logica intuizionista da quella classica.
Sicuramente la prima grande differenza riguarda il principio del terzo escluso: $A \vee \neg A$. Per la logica classica si tratta di una tautologia, mentre per quella intuizionista siamo di fronte ad un'opinione, come possiamo vedere di seguito:

$A \vee \neg A$ è una tautologia classica, infatti se ne trova facilmente una derivazione con le regole della logica classica:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{A \vdash A}}{\vdash \neg A, A}\ \neg - dx}{\dfrac{\vdash A, \neg A}{\vdash A \vee \neg A}\ \vee - dx}\ \text{sc-dx}$$

Essendo quindi una tautologia classica abbiamo 2 sole possibilità: si tratta di una tautologia oppure di un'opinione intuizionista. Vediamo ora che non si tratta di una tautologia:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\text{non deriv} \\ \vdash A\end{matrix}}{}\ \vee - d1 \qquad \dfrac{\begin{matrix}\text{non deriv} \\ A \vdash \bot\end{matrix}}{}\ \vee - d2}{\dfrac{\text{2 possibilità}}{\vdash A \vee \neg A}}$$

Si può prendere come contromodello τ_R, la topologia sui reali R, con dominio proprio $D = R$ tale che $\nu(A) = R \setminus [0, 1]$. In questo modo $\nu(\neg A) = (R \setminus \nu(A))^o =]0, 1[$ e, di conseguenza, $\nu(A \vee \neg A) = R \setminus \{0, 1\} \neq R$.

Non essendo quindi una tautologia intuizionista, si tratta di un'opinione (ovvero esistono sia un suo modello che un suo contromodello).

Un'altra sostanziale differenza tra le due logiche in esame è quella legata alla doppia negazione.
A differenza infatti di quanto accade in logica classica, in logica intuizionista non vale l'equivalenza tra A e $\neg\neg A$. Infatti l'implicazione $A \to \neg\neg A$ è una tautologia intuizionista, mentre $\neg\neg A \to A$ è un'opinione intuizionista:

La derivazione che segue mostra che $A \to \neg\neg A$ è una tautologia intuizionista:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{\text{ax-id}}{A, \neg A \vdash A}}{A, \neg A \vdash \bot}\;{\scriptstyle \neg - sx}}{A \vdash \neg\neg A}\;{\scriptstyle \neg - dx}}{\vdash A \to \neg\neg A}\;{\scriptstyle \to - dx}$$

Ora vediamo invece che l'implicazione inversa, $\neg\neg A \to A$, è un'opinione intuizionista:

In logica classica $\neg\neg A \to A$ è una tautologia, come si può vedere dalla derivazione seguente:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{\text{ax-id}}{A \vdash A}}{\vdash \neg A, A}\;{\scriptstyle \neg - dx}}{\neg\neg A \vdash A}\;{\scriptstyle \neg - sx}}{\vdash \neg\neg A \to A}\;{\scriptstyle \to - dx}$$

Trattandosi, quindi, di una tautologia classica questa espressione può essere o una tautologia o un'opinione intuizionista. Possiamo però trovare un contromodello in logica intuizionista.

Consideriamo la topologia τ_R sui reali R con dominio lo stesso R tale che

$$\nu(A) = R \setminus \{r\}$$

Otteniamo allora
$\nu(\neg\neg A) = (R \setminus (R \setminus \nu(A))^o)^o = R$
e quindi
$\nu(\neg\neg A \vdash A) = \nu(\neg\neg A \to A) = \bigcup\{c \in \tau | c \cap \nu(\neg\neg A) \subseteq \nu(A)\} = \bigcup\{c \in \tau | c \cap R \subseteq R \setminus \{r\}\} = R \setminus \{r\} \neq R$.

Avendone trovato un contromodello possiamo concludere, quindi, dicendo che si tratta di un'opinione intuizionista.

E' proprio la mancanza di equivalenza, in logica intuizionista, tra A e $\neg\neg A$ che ci fa porre l'attenzione sulla sostanziale differenza che intercorre tra le dimostrazioni per assurdo (reductio ad absurdum) e quelle per negazione.

In una matematica basata sulla logica classica non si nota molto la differenza tra i due tipi di dimostrazione proprio perchè in quel caso vale $A \leftrightarrow \neg\neg A$, ma in una matematica basata sulla logica intuizionista la differenza è notevole.

Nelle dimostrazioni per assurdo, al fine di dimostrare una certa proposizione P, si parte supponendo che valga $\neg P$, si giunge ad una contraddizione, cioè si scopre la valenza di $\neg\neg P$, e si conclude dicendo che tale espressione equivale a P. In logica classica questo tipo di dimostrazione è assolutamente valido poichè vale $P \leftrightarrow \neg\neg P$.
Tuttavia in logica intuizionista, come visto in precedenza, tale equivalenza non vale, e questo significa che una matematica fondata su tale logica non può avvalersi di dimostrazioni di questo tipo.

Discorso completamente diverso riguarda le dimostrazioni per negazione. Nelle prove per negazione, si suppone valere P, si trova una contraddizione e si giunge, quindi, a dimostrare $\neg P$.
Questo tipo di ragionamento è assolutamente valido non solo in logica classica, ma anche in quella intuizionista. Si tratta infatti di provare $\neg P$ dimostrando precedentemente $P \to \bot$, espressione intuizionisticamente equivalente a $\neg P$.
Vediamo tale equivalenza:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg P, P \vdash P$}
\RightLabel{$\neg - sx$}
\UnaryInfC{$\neg P, P \vdash \bot$}
\RightLabel{$\to - dx$}
\UnaryInfC{$\neg P \vdash P \to \bot$}
\RightLabel{$\to - dx$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg P \to (P \to \bot)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$P, P \to \bot \vdash P$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$P, \bot \vdash \bot$}
\RightLabel{$\to - sx$}
\BinaryInfC{$P \to \bot, P \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg - dx$}
\UnaryInfC{$P \to \bot \vdash \neg P$}
\RightLabel{$\to - dx$}
\UnaryInfC{$\vdash (P \to \bot) \to \neg P$}
\end{prooftree}
$$

In conclusione si ha quindi che una matematica basata sulla logica intuizionista può servirsi di dimostrazioni per negazione, ma non di prove per assurdo.

Sono molti i teoremi e le proposizioni, anche di una certa importanza, che la matematica moderna dimostra servendosi della reductio ad absurdum.

Dovremmo rinunciare a questi importanti teoremi se decidessimo di utilizzare una matematica fondata sulla logica intuizionista?

Il passaggio ad una matematica che poggi sulla logica degli intuizionisti non prevede necessariamente l'abbandono di tali risultati: ci saranno teoremi ancora validi ma con dimostrazioni alternative, teoremi non più accettabili e teoremi che potrebbero ancora valere se leggermente modificati nel loro enunciato.

3 NOZIONI BASE DI ANALISI COSTRUTTIVA

Come si può intuire dal precedente capitolo, non è per nulla scontato che i noti risultati dell'analisi che noi conosciamo (la quale è fondata sulla logica classica) valgano nella stessa forma anche in una matematica intuizionista. Alcuni risultati varranno ancora nella stessa forma, come per esempio alcune proprietà del calcolo di derivate, altri invece dovranno subire delle modifiche. Prima di esaminare il passaggio all'analisi costruttiva (fondata sulla logica intuizionista) di qualche teorema significativo dell'analisi che noi tutti abbiamo incontrato negli anni, vediamo in questo capitolo qualche nozione (definizioni e proposizioni) di analisi costruttiva che ci servirà in seguito.

3.1 Reali "alla Bishop"

Presentiamo per prima cosa la definizione di numero reale che si adotta solitamente quando si ha un approccio all'analisi costruttiva. Seguiranno poi definizioni e lemmi riguardanti l'ordinamento e le principali proprietà dei reali.

Definizione 1
Una SEQUENZA (x_n) di numeri razionali si dice REGOLARE se:

$$|x_m - x_n| \leq m^{-1} + n^{-1} \qquad (m, n \in Z^+)$$

Definizione 2
Un NUMERO REALE è una sequenza regolare di numeri razionali. Due numeri reali x=(x_m) e y=(y_n) si dicono UGUALI se

$$|x_n - y_n| \leq 2n^{-1} \qquad (n \in Z^+)$$

Lemma 1
I numeri reali x=(x_n) e y=(y_n) sono uguali se e solo se per ogni intero positivo k esiste un intero positivo N_k tale che:

$$|x_n - y_n| \leq k^{-1} \qquad (n \geq N_k)$$

dimostrazione:
($\Rightarrow$)

Siano x=(x_n) e y=(y_n) due reali tali che x=y.
Dalla definizione 2 sappiamo che

$$|x_n - y_n| \leq 2n^{-1} \text{ con } n \in Z^+.$$

Ci basta quindi prendere N_k=2k per ottenere il risultato sperato. Infatti per $n \geq N_k$, ovvero per $n \geq 2k$ (e quindi $n^{-1} \leq \frac{1}{2k}$), si ha:

$$|x_n - y_n| \leq 2n^{-1} \leq 2\ \frac{1}{2k} = k^{-1}.$$

($\Leftarrow$)

Stiamo ora supponendo che $\forall k \in Z^+ \quad \exists N_k$ tale che

$$\forall n \geq N_k \quad |x_n - y_n| \leq k^{-1}.$$

Fissiamo un naturale n e prendiamo due interi positivi m e k tali che

$$m > max\{k, N_k\}.$$

Otteniamo quindi

$|x_n - y_n| \leq |x_n - x_m| + |x_m - y_m| + |y_m - y_n| \leq (n^{-1} + m^{-1}) + k^{-1} + (m^{-1} + n^{-1}) = 2n^{-1} + 2m^{-1} + k^{-1} < 2n^{-1} + 3k^{-1}$

Quest'ultima disuguaglianza deriva dal fatto che $m > max\{k, N_k\} \geq k$ e, di conseguenza, $m^{-1} < k^{-1}$.
La disuguaglianza appena mostrata, $|x_n - y_n| < 2n^{-1} + 3k^{-1}$, implica il fatto che per ogni k intero positivo

$$|x_n - y_n| \leq 2n^{-1}$$

e ciò, per la definizione 2, equivale a dire x=y. $\square$

Definizione 3
Un numero REALE $x = (x_n)$ è detto POSITIVO (e si indica scrivendo $x \in R^+$) se

$$\forall n \in Z^+ \qquad x_n > n^{-1}$$

Si dice invece NON NEGATIVO (e si scrive $x \in R^{0+}$) se

$$\forall n \in Z^+ \qquad x_n \geq -n^{-1}$$

Lemma 2
Un numero reale x=(x_n) è:
a) positivo se e solo se esiste un intero positivo N tale che

$$x_m \geq N^{-1} \qquad (m \geq N)$$

b) non negativo se e solo se per ogni $n \in Z^+$ esiste $N_n \in Z^+$ tale che

$$x_m \geq -n^{-1} \qquad (m \geq N_n)$$

dimostrazione:
Partiamo con il dimostrare il **punto a)**

($\Rightarrow$)

Supponiamo $x \in R^+$.
Per definizione di reale positivo si ha allora $x_n > n^{-1} \quad \exists n \in Z^+$.
Prendiamo N $\in Z^+$ tale che

$$2N^{-1} \leq x_n - n^{-1}$$

e consideriamo come indici gli $m \in Z^+$ tali che $m \geq N$.
Si ha allora che $-m \leq -N$ e conseguentemente che $-m^{-1} \geq -N^{-1}$.
Considerando tutto ciò e ricordandoci la definizione 1 si conclude in questo modo:

$x_m \geq x_n - |x_m - x_n| \geq x_n - m^{-1} - n^{-1} \geq x_n - n^{-1} - N^{-1} \geq 2N^{-1} - N^{-1} = N^{-1}$

$(\Leftarrow)$

Stiamo supponendo $x_m \geq N^{-1} \quad \forall m \geq N$, $\exists N$.
Prendendo $s = N + 1$ si ha quindi

$$x_s \geq N^{-1} > s^{-1}$$

(l'ultima disuguaglianza è data dal fatto che $N < s$ implica $N^{-1} > s^{-1}$). Abbiamo in tal modo ottenuto $x_s > s^{-1}$ che, per la definizione 3, si può tradurre in $x \in R^+$.

Dimostriamo ora il **punto b)**:

$(\Rightarrow)$

Supponendo x $\in R^{0+}$, si ha che $\quad \forall m \in Z^+ \quad x_m \geq -m^{-1}$.
Per ogni intero positivo n si ha quindi che

$$\forall m \geq n \qquad x_m \geq -m^{-1} \geq -n^{-1}$$

A questo punto basta porre $N_n = n$ e si conclude.

$(\Leftarrow)$

Stiamo supponendo ora che $x_m \geq -n^{-1}$ per $m \geq N_n$. Se prendiamo ora $t, m, n \in Z^+$ con $m \geq N_n$ otteniamo la seguente catena di disequazioni:

$$x_t \geq x_m - |x_m - x_t| \geq -n^{-1} - m^{-1} - t^{-1}.$$

Per l'arbitrarietà di m e n (se sono molto grandi, m^{-1} e n^{-1} sono tendenti a zero) abbiamo quindi

$$x_t \geq -t^{-1}$$

che, per la definizione 3, equivale ad affermare che x $\in R^{0+}$.

$\square$

Definizione 4

Dati due numeri reali x e y, scriveremo:

$$x>y \text{ (oppure } y<x\text{) se } x-y \in R^{+}$$
$$x \geq y \text{ (oppure } y \leq x\text{) se } x-y \in R^{0+}$$

Definizione 5

Un numero REALE x è detto NEGATIVO se $x<0^{*}$, e questo accade quando -x è positivo.

Definizione 6

Dati due numeri REALI x e y, si dice che essi sono DIVERSI tra loro se e solo se $x>y$ oppure $x<y$. In tal caso si scrive $x \neq y$.

In analisi costruttiva con i reali di Cauchy (o "alla Bishop") non vale la proprietà di tricotomia per i reali. Per a,b reali qualsiasi, infatti, non è detto che $a<b$ o $b<a$ oppure $a = b$. Questo perchè vale la seguente proposizione:

Proposizione A

La proprietà ($\forall x \in R \quad x = 0 \vee x \neq 0$) non vale
in matematica costruttiva (con reali "alla Bishop")

Non si riesce cioè a decidere in analisi costruttiva se un numero reale è zero oppure no a causa di quello che viene chiamato "Halting problem" (problema di arresto), ovvero non si riesce a definire se una sequenza infinita è fatta tutta di valori nulli. Questa proprietà non è valida in analisi costruttiva perchè è equivalente alla seguente istanza del terzo escluso (come mostrato nella tesi di Giulia Galante [7]):

$$\forall n P(n) \vee \neg \forall n P(n) \quad \text{con } P(n) \text{ predicato.}$$

Nonostante ciò si riesce comunque a dimostrare il seguente risultato:

Proposizione B

$$\forall a, b, e \in R \qquad a<b \rightarrow e<b \vee a<e$$

dimostrazione:
Siano a, b due numeri reali tali che $a<b$ ed e sia un reale qualunque. Confrontiamo il termine e_0 con i termini a_0 e b_0. Essendo tali termini dei numeri razionali e visto che la tricotomia sui razionali è valida in analisi costruttiva si ha che $e_0 = a_0 \vee e_0 \neq a_0$ e che $e_0 = b_0 \vee e_0 \neq b_0$. In realtà, essendo $a<b$ non si può avere $e_0 = a_0 = b_0$ e si ottiene quindi $e_0 \neq a_0 \vee e_0 \neq b_0$. Da quest'ultima espressione otteniamo, dalla tricotomia dei razionali che

$$(e_0 \leq a_0) \vee (a_0<e_0 \leq b_0) \vee (a_0 \leq e_0<b_0) \vee (b_0 \leq e_0)$$

e quindi che $e_0<y_0 \vee a_0<e_0$ e dunque la tesi.

$\square$

3.2 Reali di Cauchy e Dedekind nelle teorie costruttive

Nella sezione precedente abbiamo definito i numeri reali utilizzando la definizione di reali "alla Bishop", detti anche reali di Cauchy. Come ben sappiamo, i reali si possono definire anche tramite i tagli di Dedekind sui razionali.

Definizione 7
Un TAGLIO di DEDEKIND sui razionali è una coppia (L,U) con $L, U \subseteq Q$ non vuoti tali che valgano le seguenti proprietà:

$$\begin{array}{lll}
\forall q \in Q \quad \neg(q \in U \quad \& \quad q \in L) & & \text{(disgiunzione)} \\
\forall p \in L \quad \exists q \in L \quad p<q & & \text{(L-apertura)} \\
\forall q \in U \quad \exists p \in U \quad p<q & & \text{(U-apertura)} \\
\forall q \in L \quad \forall p \in Q \quad (p<q \to p \in L) & & \text{(L-monotonia)} \\
\forall p \in U \quad \forall q \in Q \quad (p<q \to q \in U) & & \text{(U-monotonia)} \\
\forall q \in Q \quad \forall p \in Q \quad (p<q \to p \in L \vee q \in U) & & \text{(localizzazione)}
\end{array}$$

Quando si lavora in analisi classica, utilizzare i reali con stuttura di Dedekind o di Cauchy è praticamente indifferente. Questo perchè classicamente queste due definizioni sono equivalenti.
Parlando invece da un punto di vista costruttivo l'equivalenza tra queste due strutture è tutt'altro che scontata.
Ci sono teorie costruttive, come per esempio la emTT (minimal foundation descritta accuratamente in [10]), nelle quali l'insieme dei reali di Cauchy è sottoinsieme proprio dell'insieme dei reali di Dedekind e teorie costruttive, come la MLTT (Martin-Löf's type theory), nelle quali si riesce ad ottenere invece una corrispondenza tra le due strutture.

Causa di questa sostanziale differenza di risultato è l'ASSIOMA di SCELTA DIPENDENTE, una versione debole dell'assioma della scelta. Esso infatti è valido in MLTT ma non in emTT.

Assioma di scelta dipendente
Sia A un insieme non vuoto e $S \subset A \times A$ tale che $\forall a \in A \quad \exists b \in A$ tale che $(a, b) \in S$. Si ha allora che $\forall a_0 \in A \quad \exists (a_n)_{n \in N}$ successione in A che ha come primo termine a_0 ed è tale che $(a_n, a_{n+1}) \in S \quad \forall n \in N$.

Se lavoriamo in emTT, come viene dimostrato in [10], partendo dai reali di Cauchy riusciamo ad ottenere i punti formali α o tagli di Dedekind definendoli in questo modo:

$$\alpha = \{(p, q) \in Q \times Q \quad | \quad \exists n \in N^+ \quad p < x_n - \tfrac{2}{n} < x_n + \tfrac{2}{n} < q\}$$

Tuttavia, come mostrato ancora in [10], non riusciamo ad ottenere il viceversa in emTT.

In MLTT, invece, riusciamo anche a definire un reale di Cauchy a partire da un punto formale o taglio di Dedekind. Vediamolo:

Dato un punto formale α si può dimostrare che (sia in MLTT che in emTT) vale che

$$\forall n \in N \quad \exists (x_n, y_n) \in Q \times Q \quad ((x_n, y_n) \in \alpha \quad \& \quad |x_n - y_n| < (\tfrac{2}{3})^n) \quad \&$$
$$\exists (x_{n+1}, y_{n+1}) \in Q \times Q \quad ((x_{n+1}, y_{n+1}) \in \alpha \quad \& \quad |x_{n+1} - y_{n+1}| < (\tfrac{2}{3})^{n+1}))$$

Applichiamo l'assioma di scelta dipendente su Q×Q così da poter estrarre l'operazione $l(n) \in Q \times Q \quad n \in N^+$ tale che

$$\forall n \in N^+ \quad l(n) \in \alpha.$$

Chiamiamo ora $l(n) =_{Q \times Q} (x_n, y_n)$ i valori dell'operazione su ogni numero naturale n. Si ha allora che le condizioni

$$x_n - y_n \leq (\tfrac{2}{3})^n \text{ e } x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n$$

valgono per ogni naturale n. Di conseguenza un reale di Cauchy può essere definito prendendo o il primo termine di $l(n)$, $(x_n)_n$, o il secondo, $(y_n)_n$ (entrambe le successioni infatti soddisfano i requisiti della definizione 1).

3.3 Gli intervalli e la loro limitatezza

In questa breve sezione illustriamo invece una serie di definizioni con l'intento di introdurre i concetti di intervallo (limitato, illimitato, aperto, chiuso...), maggiorante, minorante ed estremo (superiore ed inferiore).

Definizione 8
Per ogni coppia di numeri reali a e b possiamo definire:

a)

$$]a,b[\ = \{x|x \in R, a<x<b\}$$
$$]a,b] = \{x|x \in R, a<x \leq b\}$$
$$[a,b[\ = \{x|x \in R, a \leq x<b\}$$
$$[a,b] = \{x|x \in R, a \leq x \leq b\}$$

Ciascuno di questi è detto INTERVALLO FINITO (rispettivamente aperto, aperto a sinistra e chiuso a destra, aperto a destra e chiuso a sinistra, chiuso)

b)

$$]-\infty,a[\ = \{x|x \in R, x<a\}$$
$$]-\infty,a] = \{x|x \in R, x \leq a\}$$
$$]a,\infty[\ = \{x|x \in R, x>a\}$$
$$[a,\infty[\ = \{x|x \in R, a \geq a\}$$

Ciascuno di questi è detto INTERVALLO INFINITO.

Un INTERVALLO si dice NON VUOTO se si riesce a costruire al suo interno un numero reale.

Definizione 9
Un INTERVALLO si dice COMPATTO se è non vuoto, chiuso e finito.

Definizione 10
Dato un intervallo finito e non vuoto I di estremi a e b, si definisce in questo modo la LUNGHEZZA di I:

$$|I| = b - a$$

Definizione 11
Se un intervallo J è sottoinsieme di un intervallo W, ovvero ogni elemento di J appartiene a W, si dice che J è un SOTTOINTERVALLO di W.

Definizione 12
Dato un insieme non vuoto I di numeri reali, si dice che esso è:

a) SUPERIORMENTE LIMITATO se esiste un numero reale b, chiamato MAGGIORANTE di I, tale che $\forall x \in I \qquad x \leq b$.

b) INFERIORMENTE LIMITATO se esiste un numero reale b, chiamato MINORANTE di I, tale che $\forall x \in I \qquad x \geq b$

Definizione 13
Siano I e J due insiemi rispettivamente limitati superiormente con maggiorante b ed inferiormente con minorante w.
b è detto ESTREMO SUPERIORE di I se $\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in I$ tale che $x > b - \epsilon$
w è detto ESTREMO INFERIORE di J se $\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in J$ tale che $x < w + \epsilon$

3.4 Successioni convergenti

Scopo di questa breve parte è quello di definire i concetti di convergenza e di limite per una successione di numeri reali. Alla fine di questa sezione si trova la dimostrazione di un importante teorema che lega la nozione di convergenza di una successione di reali a quella di successione di Cauchy. Questo teorema, che vale anche classicamente, qui verrà dimostrato con gli strumenti dell'analisi costruttiva.

Definizione 14

Una successione di numeri reali (x_n) CONVERGE ad un numero reale x_0 se per ogni k $\in Z^+$ esiste $N_k \in Z^+$ tale che:

$$|x_n - x_0| \leq k^{-1} \qquad (n \geq N_k)$$

Il numero reale x_0 è detto LIMITE della successione e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} x_n = x_0$$

oppure $x_n \to x_0$ per $n \to \infty$

Si dice che la successione è convergente se esiste un x_0 che sia suo limite. Una successione convergente è limitata, ovvero esiste t $\in R^+$ tale che
$|x_n| \leq t \quad \forall n$

Definizione 15

Una successione di numeri reali (x_n) è una SUCCESSIONE di CAUCHY se:

$$\forall k \in Z^+ \exists M_k \in Z^+ \text{ tale che } |x_m - x_n| \leq k^{-1} \quad (m, n \geq M_k)$$

Teorema 1
Una successione (x_n) di reali converge se e solo se è una successione di Cauchy.

dimostrazione:
$(\Rightarrow)$

(x_n) converga a $x_0 \in R$. Prendiamo la successione (N_k) tale che $|x_n - x_0| \leq k^{-1} \quad (n \geq N_k)$.
Si ha quindi che

$$|x_n - x_0| \leq (2k)^{-1} \quad (n \geq N_k).$$

Scegliamo infine $M_k = N_{2k}$. Si ottiene allora la seguente serie di disequazioni, valida per ogni $m, n \geq M_k$:

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_0| + |x_n - x_0| \leq (2k)^{-1} + (2k)^{-1} = k^{-1}.$$

Di conseguenza abbiamo ottenuto ciò che cercavamo, ovvero (x_n) è di Cauchy.

$(\Leftarrow)$

Sia ora invece (x_n) successione di Cauchy. Consideriamo allora la successione (M_k) tale che $|x_m - x_n| \leq k^{-1} \quad \forall m, n \geq M_k$ e prendiamo $N_K = max\{3k, M_{2k}\}$.
Si ottiene quindi

$$\forall m, n \geq N_k \quad |x_m - x_n| \leq (2k)^{-1}.$$

Sia ora y_k la 2k-esima approssimazione di x_{N_k}.
Di conseguenza abbiamo che per ogni $m \geq n$

$$|y_m - y_n| \leq |y_m - x_{N_m}| + |x_{N_m} - y_{N_n}| + |x_{N_n} - y_n| \leq (2m)^{-1} + (2m)^{-1} + (2n)^{-1} + (2n)^{-1} = m^{-1} + n^{-1}.$$

Ciò che abbiamo appena ottenuto dimostra che $y = (y_n)$ è un numero reale.
Concludiamo questa parte di dimostrazione (vediamo la convergenza di (x_n) ad un numero reale) mettendo insieme quanto visto fin qui:

$$|y - x_n| \leq |y - y_n| + |y_n - x_{N_n}| + |x_{N_n} - x_n| \leq n^{-1} + (2n)^{-1} + (2k)^{-1} \leq (3k)^{-1} + (6k)^{-1} + (2k)^{-1} = k^{-1}.$$

□

Nota
Si può dimostrare che una sottosuccessione di una successione convergente converge allo stesso limite di quest'ultima.

3.5 Continuità e derivabilità di funzioni

Come già detto in precedenza, questo capitolo ha come scopo quello di fornire un'infarinatura di concetti base dell'analisi costruttiva. E' proprio per tale motivo che quest' ultima sezione presenterà in breve le nozioni fondamentali di continuità, differenziabilità e derivata.

Definizione 16
Una funzione f a valori reali definita su un intervallo compatto I si dice CONTINUA in I se esiste un'operazione tra reali $\omega : R \to R$, $\epsilon \to \omega(\epsilon)$, detta MODULO di CONTINUITA', tale che
$\forall \epsilon, \forall x, \forall y \quad |x-y| \leq \omega(\epsilon) \to |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.

Legata a questa definizione abbiamo la seguente proprietà delle funzioni continue:

Proposizione 1
Se la funzione f: $[a, b] \to R$ è continua in un intervallo compatto, allora esistono le seguenti quantità (dette rispettivamente estremo superiore ed inferiore di f in $[a, b]$):

$$sup(f) = sup\{f(x)|x \in [a, b]\}$$
$$inf(f) = inf\{f(x)|x \in [a, b]\}$$

dimostrazione:
Prendiamo un ϵ>0. Consideriamo la sequenza di numeri reali $a = a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_n = b$ tale che $a_{(i+1)} - a_i \leq \omega(\epsilon)$ con $(0 \leq i \leq n-1)$ e ω modulo di continuità per f.
Ne segue che per ogni $x \in [a, b] \quad |x - a_i| \leq \omega(\epsilon)$ e, conseguentemente, $|f(x) - f(a_i)| \leq \epsilon$ per qualche i.
L'arbitrarietà di ϵ implica infine la totale limitatezza (ovvero sia superiore che inferiore) dell'insieme $\{f(x)| \quad x \in [a, b]\}$. Da ciò si ottiene direttamente la tesi, ovvero l'esistenza di sup(f) ed inf(f).

□

Definizione 17
Siano f e g funzioni continue nell'intervallo proprio compatto I e sia δ un'operazione da R^+ a R^+ tale che:

$$\forall \epsilon, \forall x, \forall y \quad x, y \in I \wedge |y-x| \leq \delta(\epsilon) \to |f(y) - f(x) - g(x)(y-x)| \leq \epsilon|y-x| \ .$$

Allora f si dice DIFFERENZIABILE in I e g è detta la DERIVATA di f in I. δ è chiamato modulo di differenziabilità per f in I.

4 VALIDITA' COSTRUTTIVA DI FONDAMENTALI TEOREMI DELL'ANALISI CLASSICA

In questo capitolo esamineremo alcuni fondamentali teoremi dell'analisi classica cercando di capire se valgono nella stessa forma anche in analisi costruttiva. Molti di quelli che vedremo non varranno scritti così come li conosciamo, ma dovranno essere modificati nell'enunciato al fine di poterli considerare validi in questa matematica intuizionista.

Analizzeremo i seguenti famosi risultati:

4.1) esistenza del sup in insiemi non vuoti superiormente limitati;
4.2) teorema dei valori intermedi;
4.3) derivata di somma e prodotto di funzioni;
4.4) teorema di Rolle e teorema di Lagrange;
4.5) non numerabilità dei reali.

4.1 Esistenza del sup in insiemi limitati

Classicamente, come ben sappiamo dall'analisi, vale il seguente teorema sull'esistenza dell'estremo superiore:

Teorema 2
In un insieme di reali non vuoto superiormente limitato esiste l'estremo superiore, il sup.

Tuttavia questo risultato non può essere preso come buono in analisi costruttiva. Esso infatti è equivalente all'espressione non tautologicamente intuizionista $\neg P \vee \neg\neg P$. Vediamolo passo passo con questa serie di risultati:

Lemma 3
Intuizionisticamente vale $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

dimostrazione:
Con le regole del calcolo dei sequenti della logica intuizionista che sono presenti nell'appendice e che sono state prese da [5] troviamo una derivazione in $LI_=$ di $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$. Così facendo dimostriamo il suo essere una tautologia intuizionista e concludiamo la dimostrazione:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$A \to B, \neg B, A \vdash A$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$B, \neg B, A \vdash B$}
\RightLabel{$\to -sx$}
\BinaryInfC{$A \to B, \neg B, A \vdash B$}
\RightLabel{$\neg - sx$}
\UnaryInfC{$A \to B, \neg B, A \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg - dx$}
\UnaryInfC{$A \to B, \neg B \vdash \neg A$}
\RightLabel{$\to -dx$}
\UnaryInfC{$A \to B \vdash \neg B \to \neg A$}
\RightLabel{$\to -dx$}
\UnaryInfC{$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$}
\end{prooftree}
$$

□

proposizione 2
Teorema 2 è equivalente all'espressione $\neg P \vee \neg\neg P$

dimostrazione:
($\Rightarrow$)
Sia P una proposizione ben definita. Consideriamo

$$S = \{0\} \cup \{x \in R \quad | \quad (x = 1 \wedge P) \vee (x = 2 \wedge \neg P)\}.$$

S è non vuoto ($0 \in S$), è sottoinsieme di $\{0, 1, 2\}$ e, per la completezza di R, ha un sup, chiamiamolo γ. Si ha quindi che

$$P \to (\gamma = 1) \text{ e } \neg P \to \gamma = 2.$$

Di conseguenza, per il lemma 3, abbiamo che $(\gamma \neq 1) \to \neg P$ e $(\gamma \neq 2) \to \neg\neg P$. Visto che $1 \neq 2$ abbiamo che

$$(\gamma \neq 1) \vee (\gamma \neq 2),$$

e questo implica, per quanto appena visto, $\neg P \vee \neg\neg P$.

($\Leftarrow$)
Se si suppone valida l'espressione $\neg P \vee \neg\neg P$ basta prendere un insieme S definito come sopra e, per la completezza di R si deduce l'esistenza di sup(S).

□

proposizione 3

$\neg P \vee \neg\neg P$ non vale in logica intuizionista (non è una tautologia intuizionista, ma un'opinione)

dimostrazione:
Vediamo innanzitutto che $\neg P \vee \neg\neg P$ è una tautologia in logica classica:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \neg P \vdash \neg P\end{array}}{\vdash \neg\neg P, \neg P}\ \neg - dx}{\vdash \neg P, \neg\neg P}\ \text{sc-dx}}{\vdash \neg P \vee \neg\neg P}\ \vee - dx$$

Visto che si tratta di una tautologia classica abbiamo solamente 2 possibilità: ci troviamo davanti o ad una tautologia o ad un'opinione intuizionista. Vediamo ora che non può trattarsi di una tautologia.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{non deriv}\\ P \vdash \bot\end{array}}{\vdash \neg P}\ \neg - dx}{}\ \vee - d1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{non deriv}\\ \neg P \vdash P\end{array}}{\neg P \vdash \bot}\ \neg - sx}{\vdash \neg\neg P}\ \neg - dx}{}\ \vee - d2}{\begin{array}{c}\text{2 possibilità}\end{array}}}{\vdash \neg P \vee \neg\neg P}$$

Come contromodello basta prendere la topologia sui reali τ_R con dominio proprio R (e con ν modello che va dalle formule della logica proposizionale intuizionista alla topologia dei reali) tale che

$$\nu(P) =]0,1[.$$

Si ha quindi

$\nu(\neg P) = (R \backslash]0,1[)^o = R \setminus [0,1]$

e, di conseguenza,

$\nu(\neg\neg P) = (R \setminus (R \backslash]0,1[)^o)^o = ([0,1])^o =]0,1[.$

Da ciò si ottiene

$\nu(\neg P \vee \neg\neg P) = (R \setminus [0,1]) \cup]0,1[= R \setminus \{0,1\} \neq R.$

La presenza di tale contromodello dimostra che tale espressione non è una tautologia intuizionista (ma un'opinione).

$\square$

Ricapitoliamo: abbiamo visto, grazie alla proposizione 2, che il teorema classico sull'esistenza dell'estremo superiore è equivalente all'espressione $\neg P \vee \neg\neg P$. Infine la proposizione 3 ha concluso la dimostrazione della non validità di suddetto teorema in matematica intuizionista.
La domanda a questo punto è: se decidiamo di adottare la logica intuizionista come base dell'analisi dobbiamo rinunciare completamente ad un tale risultato? La risposta è no. Si possono apportare infatti alcune modifiche all'enunciato che ci permettano di ottenere un risultato simile che valga in analisi costruttiva. Di seguito vediamo la trasformazione subita dal teorema e la sua dimostrazione costruttivamente valida:

Teorema 3
Dato un insieme di reali A non vuoto e superiormente limitato, si ha che: sup(A) esiste se e solo se per ogni x,y $\in R$ con $x<y$ o y è un maggiorante di A oppure esiste un a $\in A$ tale che $x<a$.

dimostrazione:

($\Rightarrow$)
Supponiamo esista sup(A) e prendiamo buona (senza perdita alcuna di generalità) la relazione $x<y$. Abbiamo allora che o $sup(A)<y$ o $x<sup(A)$.
Nel primo caso avremmo, per definizione, che y è maggiorante di A.
Dal secondo caso, invece, seguirebbe la relazione: $\exists a \in A$ tale che

$$sup(A) - (sup(A) - x)<a.$$

Da quest'ultima ovviamente si ottiene:

$$\exists a \in A \text{ tale che } x<a.$$

E ciò chiude la dimostrazione di questa prima implicazione.

($\Leftarrow$)
Stiamo supponendo che
(*) $\forall x, y \in R$ tale che $x<y$ y è maggiorante di A oppure $\exists a \in A$ tale che $x<a$.
Preso un elemento di A, a_1, ed un maggiorante di A b_1 tale che $b_1>a_1$ cerchiamo di costruire 2 successioni (a_n) e (b_n) rispettivamente di elementi di A e di maggioranti di A tali che per ogni n $\in Z^+$:

1) $a_n \leq a_{n+1}<b_{n+1} \leq b_n$
2) $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{3}{4}(b_n - a_n)$

Per come vogliamo costruire (a_n) e (b_n), abbiamo che

$$a_n + \frac{3}{4}(b_n - a_n) > a_n \text{ con } a_n \in A.$$

Dall'ipotesi (*) si hanno quindi due casi: $a_n + \frac{3}{4}(b_n - a_n)$ è maggiorante di A oppure $\exists a \in A$ tale che $a > a_n + \frac{3}{4}(b_n - a_n)$.
Nel primo di questi 2 casi per costruire tali successioni basta prendere $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = a_n + \frac{3}{4}(b_n - a_n)$, nel secondo, invece, è sufficiente porre $a_{n+1} = a$ e $b_{n+1} = b_n$.
Ora che abbiamo costruito (a_n) e (b_n) in modo tale che valessero 1) e 2), abbiamo che per ogni n $\in Z^+$

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \quad \text{e} \quad 0 \leq b_n - a_n \leq (\tfrac{3}{4})^{n-1}(b_1 - a_1).$$

Si ha quindi che $(b_n - a_n)$ tende a zero e che quindi (a_n) e (b_n) convergono ad un limite comune m tale che $\forall n \in Z^+ \quad a_n \leq m \leq b_n$.
Visto che b_n è maggiorante, si ha $m = b_n$.
Si ottiene infine che per ogni $\epsilon > 0$ esiste n tale che $m \geq a_n > m - \epsilon$, e questo non è altro che un modo per dire che m=sup(A).

□

Nota
Ad inizio dimostrazione, partendo dal fatto che esiste sup(A) e che $x<y$, abbiamo detto che $sup(A)<y$ oppure $x<sup(A)$. L'affermazione $(sup(A)<y) \vee (x<sup(A))$ è vera perchè include in se tutti i casi possibili. Inoltre, essendo formata da due condizioni tra loro non disgiunte, ci permette di evitare l'utilizzo del principio del terzo escluso.

Remark
In questa dimostrazione c'è un passaggio nel quale costruiamo due successioni, una di elementi di A e una di elementi di {maggioranti di A}, a partire da due punti che abbiamo chiamato a_1 e b_1. Questo modo di agire presuppone necessariamente il fatto che noi sappiamo che è sempre possibile trovare una successione di elementi di un insieme a partire da uno di essi. Questa sicurezza può derivarci solo dall'assunzione dell'assioma di scelta dipendente.

4.2 Teorema dei valori intermedi

Passiamo ora a parlare del famoso teorema dei valori intermedi. Cercheremo in questa sezione di farci un'idea della sua non validità in campo intuizionista e vedremo se sarà possibile modificarlo al fine di ottenerne una versione costruttiva.
Partiamo innanzitutto guardando enunciato e dimostrazione di tale teorema in analisi classica:

Teorema 4
Dato I, intervallo di R, ed $f : I \to R$ funzione continua, allora $f(I)$ è un intervallo di R.

dimostrazione:

Siano $m = f(a) < f(b) = M$ con $a, b \in I$. Consideriamo inoltre $m < \alpha < M$.
Supponiampo ora $a > b$ (il caso con $a < b$ è analogo) e cerchiamo di mostrare che esiste $\xi \in [a, b]$ tale che f(ξ)=α. Una volta dimostrata tale espressione si è provata pure la tesi.
Consideriamo 2 insiemi A e B definiti come segue:

$$A = \{x \in [a, b] \quad | \quad f(x) \leq \alpha\}$$
$$B = \{x \in [a, b] \quad | \quad f(x) \geq \alpha\}$$

A e B sono insiemi chiusi e, rispettivamente, limitati superiormente ed inferiormente. (***) Segue da ciò l'esistenza di max(A), chiamiamolo ξ.
Per definizione di massimo si ha che $\xi \in A$ e questo implica che $f(\xi) \leq \alpha$ da cui a sua volta segue che $\xi < b$.
Si ha dunque che $]\xi, b] \subseteq B$ e quindi, appartenendo ξ alla chiusura di $]\xi, b]$, si ha che $\xi \in B$ (che è chiuso).
Conseguenza dei risultati appena trovati è che $\xi \in A \cup B$ e quindi $f(\xi) \leq \alpha$ e $f(\xi) \geq \alpha$. Si ha dunque che $f(\xi) = \alpha$.

□

Il teorema classico appena visto è equivalente al teorema classico degli zeri:

> Dato un intorno I di R e una funzione continua $f : I \to$R che assume valori di segno opposto, allora f ha almeno uno zero

L'equivalenza (th valori intermedi $\leftrightarrow$ th zeri) si vede facilmente poichè l'implicazione ($\Rightarrow$) è banale e ($\Leftarrow$) si ottiene applicando il teorema alla funzione $f - \alpha$.

La dimostrazione appena vista del teorema dei valori intermedi non è applicabile in analisi costruttiva perchè in (***) viene necessariamente utilizzato il teorema classico di esistenza del sup in insiemi non vuoti superiormente limitati, teorema che abbiamo visto non valere in matematica intuizionista.
Questo fatto ci fa intuire la non validità del teorema dei valori intermedi (e quindi anche del teorema degli zeri) in analisi costruttiva (l'esposizione di un convincente controesempio si può trovare a pagina 292 del libro di Troelstra e Van Dalen "Constructivism in Mathematics; An Introduction").

E' possibile anche in questo caso modificare l'enunciato del teorema al fine di ottenerne uno simile in una matematica fondata sulla logica intuizionista oppure dobbiamo rassegnarci al fatto che non sia possibile avere una versione, seppur diversa, di un teorema così importante?
La buona notizia è che esiste una versione costruttiva del teorema dei valori intermedi:

> **Teorema 5**
> Dato I, intervallo di R, ed $f : I \to R$ funzione continua tale che, dati $a, b \in I$, $f(a) < f(b)$, allora, per ogni $y \in [f(a), f(b)]$ e per ogni $\epsilon > 0$, esiste $x \in [min\{a, b\}, max\{a, b\}]$ tale che $|f(x) - y| < \epsilon$.

dimostrazione:
Essendo f una funzione continua ed avendo supposto $f(a) < f(b)$, abbiamo necessariamente che $a \neq b$.
Consideriamo, senza perdita di generalità, $a < b$ e consideriamo $y \in [f(a), f(b)]$ e $\epsilon > 0$.
Sia (!)$m = inf\{|f(x) - y| : a \leq x \leq b\}$ (la sua esistenza è provata dalla proposizione 1) e supponiamo $m > 0$. Si ha allora che

$$(!!) \quad f(a) - y \leq -m \text{ e } f(b) - y \geq m.$$

Sia ω il modulo di continuità per f in [a,b]. Scegliamo la seguente successione di punti di [a,b]:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n = b \quad \text{tale che} \quad x_{k+1} - x_k \leq \omega(m) \text{ per k in [0,n-1]}.$$

Dalla definizione 16 si ha quindi che, per tali k,

$$|f(x_{k+1}) - y - (f(x_k) - y)| = |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq m.$$

Per (!) abbiamo inoltre che

$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x) - y| \geq m$$

e questo implica il fatto che $f(x_k) - y$ e $f(x_{k-1}) - y$ siano entrambe positive o entambe negative.
Quest'ultima affermazione ha come conseguenza tale espressione: $\forall i \in [0, n]$ le $f(x_i) - y$ sono tutte positive o tutte negative.
Quindi, necessariamente, $f(a) - y$ e $f(b) - y$ sono entrambe positive o entrambe negative. Quest'ultimo risultato è però in contraddizione con (!!). Bisogna quindi escludere la possibilità che m sia positiva.
Questo significa anche che

$$(!!!) \ m{<}\epsilon.$$

Per come abbiamo definito m in (!) sappiamo che (dal fatto che m è inf di quell'insieme e considerando il teorema 3 facilmente visibile nella versione che coinvolge l'inf anzichè il sup) per $\epsilon{>}0$ esiste $x \in [a, b]$ tale che $|f(x) - y|{<}m$ e quindi, da (!!!), si conclude ottenendo $|f(x) - y|{<}\epsilon$.

$\square$

Remark

In un passaggio importante di questa dimostrazione costruiamo una successione (x_n) di elementi di $[a, b]$ che parta da a e che sia tale che $x_{k+1} - x_k \leq \omega(m)$ per ogni k. Ovviamente tale operazione richiede la consapevolezza del fatto che sia sempre possibile costruire una successione di questo tipo. Tale sicurezza ci viene data inevitabilmente dall'assunzione dell'assioma di scelta dipendente.

4.3 Derivata di somma e prodotto di funzioni

In questa breve sezione cominceremo ad utilizzare il concetto, che abbiamo già visto, di derivata in analisi costruttiva.
Dimostreremo infatti che le regole di derivazione per somma e prodotto di funzioni valgono nella stessa identica forma dell'analisi classica.
Ciò che evidentemente cambierà sarà la dimostrazione di questi risultati (infatti, come già visto, la definizione di derivabilità nelle due diverse analisi non coincide e quindi vi sarà anche diversità nel metodo dimostrativo).
Non aspettiamoci quindi la solita dimostrazione di questi risultati, ma vediamo in dettaglio la loro dimostrazione costruttiva:

Teorema 6
Date due funzioni f e g differenziabili in un intervallo I, allora anche f+g e fg sono differenziabili e le loro derivate sono date dalle seguenti relazioni:

$$1)\ D(f+g) = D(f) + D(g)$$
$$2)\ D(fg) = fD(g) + gD(f)$$

dimostrazione:
Per dimostrare questo teorema consideriamo I intervallo compatto.
Chiamiamo δ_1, δ_2 i moduli di differenziabilità per f e per g (rispettivamente) e ω_1 il modulo di continuità per f in I.

1)
Consideriamo $\delta(\epsilon) = min\{\delta_1(\frac{\epsilon}{2}), \delta_2(\frac{\epsilon}{2})\}$. Per ogni $x, y \in I$ tale che $|y-x| \leq \delta(\epsilon)$ abbiamo:

$$|f(y) + g(y) - (f(x) + g(x)) - (f^{'}(x) + g^{'}(x))(y-x)| =$$
$$|[f(y) - f(x) - f^{'}(x)(y-x)] + [g(y) - g(x) - g^{'}(x)(y-x)]| \leq$$
$$|f(y) - f(x) - f^{'}(x)(y-x)| + |g(y) - g(x) - g^{'}(x)(y-x)| \leq$$
$$(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}) \quad |y-x| = \epsilon \quad |y-x|$$

(l'ultima disuguaglianza è data dalla definizione 17)

Per quanto appena visto, dalla definizione 17 si ottiene che f+g è differenziabile in I con δ modulo di differenziabilità e $f^{'} + g^{'}$ derivata.

2)
Prendiamo un M tale che (£) $|f|, |g|, |g^{'}|<M$ e consideriamo

$$\delta(\epsilon) = min\{\delta_1(\frac{\epsilon}{3M}), \delta_2(\frac{\epsilon}{3M}), \omega_1(\frac{\epsilon}{3M})\}.$$

Si ha allora che per ogni $x, y \in I$ tale che $|y-x| \leq \delta(\epsilon)$ vale:

$|f(y)g(y) - f(x)g(x) - (f(x)g^{'}(x) + g(x)f^{'}(x))(y-x)| =$
$|f(y)g(y) - g(x)f(x) - f(x)g^{'}(x)(y-x) - g(x)f^{'}(x)(y-x) + [f(y)g(x) - f(y)g(x)] + [f(y)g^{'}(x)(y-x) - f(y)g^{'}(x)(y-x)]| \leq$
$|f(y)||g(y) - g(x) - g^{'}(y-x)| + |f(y) - f(x)||g^{'}(x)||y-x| + |g(x)||f(y) - f(x) - f^{'}(x)(y-x)| \leq 3M\frac{\epsilon}{3M}|y-x| = \epsilon|y-x|$

(l'ultima disuguaglianza è data dal fatto che ogni termine della sommatoria precedente è $\leq M\frac{\epsilon}{3M}|y-x|$ per (£) e per le definizioni 16 e 17).

Per quanto appena visto, dalla definizione 17 abbiamo che f e g sono differenziabili con modulo di differenziabilità δ e con derivata $fg^{'} + gf'$.

□

4.4 Teoremi di Rolle e Lagrange

Analizziamo ora due teoremi fondamentali dell'analisi matematica: i teoremi di Rolle e di Lagrange.
Come ben sappiamo questi risultati sono molto importanti per l'analisi classica, vediamo se varranno nella stessa forma anche in analisi costruttiva.
Iniziamo con il teorema di Rolle:

4.4.1 Teorema di Rolle

Partiamo dalla dimostrazione classica di questo celebre teorema:

Teorema 7
Siano $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato e $f : [a, b] \to R$ una funzione continua in [a,b], derivabile in]a,b[e tale che $f(a) = f(b)$, allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $f^{'}(\xi) = 0$

dimostrazione:
Per dimostrare classicamente il teorema di Rolle abbiamo bisogno del seguente lemma:

lemma
Data una funzione f, se x_0 è punto di (massimo)/minimo locale interno per f in cui f sia derivabile, allora $f^{'}(x_0) = 0$

dimostrazione del lemma:
x_0 sia un punto di minimo locale. Esiste allora un intorno U di x_0 tale che $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in U$. Si ha quindi che:
se $x{<}x_0$ allora $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$
se $x{>}x_0$ allora $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$
Passando ora al limite per $x \to x_0$, per il noto teorema della permanenza del segno, $f^{'}_{-}(x_0) \leq 0, f^{'}_{+}(x_0) \geq 0$. Essendo poi f derivabile si ottiene $f^{'}_{-}(x_0) = f^{'}_{+}(x_0) = 0$.

□

Ora possiamo cominciare a dimostrare (classicamente) il teorema di Rolle. Per il noto teorema di Weierstrass (il quale asserisce che $f \in C^0([a,b]) \quad con \quad [a,b]$ chiuso e limitato $\Rightarrow$ f ammette massimo e minimo assoluti) abbiamo che esistono:

$$m = min(f(x))$$
$$M = max(f(x)).$$

Esistono allora due punti $x_0, x_1 \in [a,b]$ tali che $m = f(x_0)$ e $M = f(x_1)$.
Ci troviamo davanti a due possibilità: o x_0 e x_1 sono estremi di [a,b], oppure almeno uno di questi due punti è interno ad [a,b] (supponiamo sia x_0).
Dal primo caso segue che f deve essere necessariamente costante e, quindi, $f^{'}(x) = 0 \ \forall x$.
Se ci troviamo invece nel secondo caso, dal lemma dimostrato poco fa abbiamo che $f^{'}(x_0) = 0$.

□

Come appena visto, per dimostrare il teorema di Rolle abbiamo bisogno del teorema di Weierstrass. Tale teorema tuttavia si può dimostrare non valere (almeno in questa forma) in analisi costruttiva. Facciamoci un'idea di ciò prendendo un controesempio:
Consideriamo una funzione $f : [0,1] \to R$ continua della quale sappiamo solamente che possiede due massimi relativi nei punti $x_0 = \frac{2}{5}$ e $x_1 = \frac{4}{5}$. Possiamo quindi utilizzare un parametro t e scrivere:

$$f(\tfrac{2}{5}) = 1$$
$$f(\tfrac{4}{5}) = 1 + t$$

Non siamo in grado però di stabilire se t sia $>, <$ o $=$ a 0, e quindi non riusciamo ad indicare quale dei due sia il massimo assoluto.
Questo però è un problema in analisi costruttiva perchè per dimostrare l'esistenza di un oggetto, in questo caso del massimo, bisognerebbe essere in grado di costruirlo precisamente. Non riuscendo a farlo, la dimostrazione dell'esistenza che faremmo deriverebbe indirettamente dal principio, solamente classico, del terzo escluso.

Dalla non validità del teorema di Weierstrass classico in matematica costruttiva segue quindi la non validità del teorema di Rolle classico in analisi costruttiva.
Non dobbiamo però demoralizzarci perchè, se modifichiamo l'enunciato di questo importante teorema, riusciamo ad ottenerne una versione simile che sia intuizionisticamente dimostrabile.

Teorema 8
Data una funzione f differenziabile in $[a, b]$, se $f(a) = f(b)$, allora per ogni $\epsilon>0$ esiste $x \in [a, b]$ tale che $|f^{'}(x)| \leq \epsilon$

dimostrazione:

Sia δ il modulo di differenziabilità di f in [a,b]. Definiamo

$$(\S)\ m = inf\{|f^{'}(x)| : x \in [a, b]\}$$
(tale m esiste per la proposizione 1).

Consideriamo il caso in cui $f^{'}(a) \geq m$ (quello in cui è $\leq -m$ è analogo).
Supponiamo $m>0$. Si ha allora che

$$\forall x \in [a, b]\ f^{'}(x) \geq m.$$

Questo perchè se esistesse una x tale che $f^{'}(x)<m$, allora si avrebbe necessariamente $f^{'}(x) \leq m$ (per (§)) e, per il teorema 5 esisterebbe $\xi \in [a, x]$ tale che $|f^{'}(\xi) - 0|<m$, risultato in contraddizione con (§).
Consideriamo ora la successione di punti

$a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n = b$ tali che $x_{k+1} - x_k \leq \delta(\frac{m}{2})$ per ogni k in [0, n-1].

Ricordando anche le ipotesi del teorema si ha che:

$0 = f(b) - f(a) = f(x_n) - f(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{'}(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k) - f^{'}(x_k)(x_{k+1} - x_k)) \geq \sum_{k=0}^{n-1} m(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m}{2}(x_{k+1} - x_k) = m(b-a) - \frac{m}{2}(b-a) = \frac{m}{2}(b - a)>0$
(l'ultima disuguaglianza tra sommatorie deriva da (§) e dalla definizione 17)

Abbiamo ottenuto una contraddizione (0>0), quindi m non può essere >0. Di conseguenza si dovrà avere, per (§), $m = 0$ e questo implica $m<\epsilon$, da cui (sempre per (§)) la conclusione.

□

Remark

In questa dimostrazione è presente un passaggio nel quale costruiamo una successione (x_n) di elementi di $[a, b]$ che parta da a e che sia tale che $x_{k+1} - x_k \leq \delta(\frac{m}{2})$ per ogni k. Ovviamente tale operazione richiede la consapevolezza del fatto che sia sempre possibile costruire una successione come questa. Tale sicurezza deriva inevitabilmente dall'assunzione dell'assioma di scelta dipendente.

4.4.2 teorema di Lagrange

Concentriamoci ora sul teorema di Lagrange. Iniziamo a vedere subito quale sia il suo enunciato e come venga dimostrato in analisi classica:

Teorema 9
Dati [a,b] intervallo chiuso e limitato e $f : [a, b] \rightarrow R$ funzione continua in [a,b] e derivabile in]a,b[, si ha che esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $f^{'}(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

dimostrazione:

Consideriamo la seguente funzione:

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$$

(retta che congiunge i punti (a,f(a)) e (b,f(b)))

Definiamo ora una funzione ausiliare h in questo modo:

$$h(x) = r(x) - f(x)$$

Possiamo facilmente notare che h rispetta tutte le ipotesi del teorema di Rolle classico (teorema 7). Infatti si tratta di una funzione continua (somma di continue), derivabile (somma di derivabili) e $h(a) = h(b)$, infatti:

$$h(a) = r(a) - f(a) = f(a) - f(a) = 0$$
$$h(b) = r(b) - f(b) = f(a) + \frac{f(a)-f(b)}{b-a}(b - a) - f(b) = 0$$

Applicando quindi il teorema 7, si ha che esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $0 = h^{'}(\xi) = r^{'}(\xi) - f^{'}(\xi)$. Ciò implica che:

$$f^{'}(\xi) = r^{'}(\xi) = 0 + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Come appena visto da questa dimostrazione il teorema classico di Lagrange deriva direttamente da quello classico di Rolle. Questo ci fa capire che il teorema di Lagrange così come lo conosciamo non può valere in analisi costruttiva. Ci sarà pure per lui una versione valida costruttivamente oppure non esiste alcuna possibilità di avere tale risultato in una matematica intuizionista?
Per nostra fortuna non ci viene richiesto di rinunciare completamente ad un così importante risultato, ma è possibile ottenere una versione di questo teorema adatta all'analisi costruttiva.

Teorema 10
Sia f una funzione differenziabile in [a,b], allora per ogni ϵ>0 esiste $x \in [a, b]$ tale che
$|f(b) - f(a) - f^{'}(x)(b - a)| \leq \epsilon$

dimostrazione:

Definiamo in questo modo una funzione ausiliaria h in [a,b]:

$$h(x) = (x - a)(f(b) - f(a)) - f(x)(b - a)$$

Tale funzione è differenziabile perchè formata da somme e prodotti di funzioni differenziabili (per il teorema 6). Si ha inoltre che $h(b) = h(a)$, infatti:

$h(b) = (b - a)(f(b) - f(a)) - f(b)(b - a) = -(b - a)f(a)$
$h(a) = 0 - (b - a)f(a) = -(b - a)f(a)$

Sono così soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle costruttivo (teorema 8).
Per il teorema 8, quindi, esiste x $\in [a, b]$ tale che

$$\epsilon \geq |h^{'}(x)| = |f(b) - f(a) - f^{'}(x)(b - a)|$$

□

4.5 Non numerabilità dei reali

Come ben sappiamo, un risultato di indubbia importanza per l'analisi è quello che riguarda la non numerabilità dell'insieme R dei numeri reali.
Per dimostrare tale risultato si utilizza quella che viene chiamata diagonalizzazione: si prova la non numerabilità di R mostrando che si può diagonalizzare contro ogni sequenza. In altre parole basta dimostrare che, data una qualsiasi successione a di numeri reali, esiste una $x \in R$ che evita tutti i termini di tale sequenza.

Cominciamo con il vedere all'opera tale idea dimostrativa in analisi classica dimostrando il seguente teorema sulla non numerabilità di R:

Teorema 11
$\forall a : N \to R$ successione di reali $\exists x \in R$ tale che x non coincida con alcun termine della successione.

dimostrazione:

Sia $[u_0, v_0] = [0, 1]$. Definiamo ricorsivamente i seguenti intervalli:

$$[\mathrm{u}_{n+1}, v_{n+1}] = \begin{cases} [u_n, \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n] & \text{se } a_n > \frac{u_n}{2} + \frac{v_n}{2} \\ [\frac{u_n}{5} + \frac{4}{5}v_n, v_n] & \text{se } a_n \leq \frac{u_n}{2} + \frac{v_n}{2} \end{cases}$$

In questo modo si parte dall'intervallo $[0, 1]$, lo si divide a metà e si sceglie di restringerlo, rendendolo un intervallino di ampiezza $\frac{1}{5}$, nella metà che non contiene a_0, primo termine della successione.
Successivamente si osserva dove si trova a_1 e, se esso si trova nell'intervallino ottenuto nel precedente passaggio, si divide a metà tale intervallo e si sceglie la parte che non lo contiene.
Iterando tale procedimento si ottiene una sequenza $[u_n, v_n]$ di intervalli nidificati, ognuno dei quali non contiene l'elemento n-esimo della successione.
A questo punto, per concludere, basta scegliere x come punto limite in questo modo:

$$x = \lim_{n\to\infty} u_n \vee x = \lim_{n\to\infty} v_n \ .$$

Otteniamo, infatti, un reale che appartiene a tutti gli intervalli nidificati e che quindi evita tutti i termini della successione (a_n).

□

La dimostrazione appena vista non può essere accettata in analisi costruttiva perchè utilizza il principio del terzo escluso. Stiamo supponendo, infatti, ad ogni passaggio che un numero sia o maggiore o minore della metà dell'intervallo. Non siamo costretti, tuttavia, a rinunciare a tale teorema in una matematica intuizionista: siamo infatti in grado di ottenere una dimostrazione costruttivamente valida del teorema di non numerabilità di R senza dover modificare l'enunciato ma applicando un semlice "trucco" nella dimostrazione.

Teorema 12
$\forall a : N \to R$ successione di reali $\exists x \in R$ tale che x non coincida con alcun termine della successione.

dimostrazione:

Sia $[u_0, v_0] = [0, 1]$.Scelgo:

$$[\mathrm{u}_{n+1}, v_{n+1}] = \begin{cases} [u_n, \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n] & \text{se } a_n > \frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n \\ [\frac{u_n}{5} + \frac{4}{5}v_n, v_n] & \text{se } a_n \leq \frac{2}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n \end{cases}$$

(nella costruzione di tali intervalli stiamo utilizzando la proposizione di pagina 16)

Osservo il primo termine della successione, a_0, e mi chiedo se si trovi nell'intervallo $[0, \frac{3}{5}]$ o nell'intervallo $[\frac{2}{5}, 1]$. Il fatto che ci sia sovrapposizione tra i 2 sottointervalli che sto considerando mi permette di evitare l'utilizzo del terzo escluso.
Ora, se a_0 si dovesse trovare in $[0, \frac{3}{5}]$, restringerei il mio intervallo iniziale a $[\frac{4}{5}, 1]$, se invece fosse in $[\frac{2}{5}, 1]$, sceglierei una restizione a $[0, \frac{1}{5}]$. Se, infine, dovesse trovarsi nella parte comune, $[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$, mi basterebbe scegliere indifferentemente di restringere l'intervallo a $[\frac{4}{5}, 1]$ o a $[0, \frac{1}{5}]$.
Reiterando questo procedimento otterrei una sequenza $[u_n, v_n]$ di intervalli nidificati ognuno dei quali non contenente l'elemento n-esimo della successione (a_n).
A questo punto, per concludere la dimostrazione, basta scegliere x come punto limite in questo modo:

$$x = \lim_{n\to\infty} u_n \vee x = \lim_{n\to\infty} v_n \ .$$

Otteniamo, infatti, un reale che appartiene a tutti gli intervalli nidificati e che quindi evita tutti i termini della successione (a_n).

$\square$

Remark

Nella dimostrazione appena presentata stiamo costruendo 2 successioni di elementi di $[0,1]$, u_n e v_n, in modo tale che ciascun loro elemento eviti l'n-esimo termine della successione (a_n). Per poterlo fare è necessario essere sicuri che sia sempre possibile costruire successioni di questo tipo. Tale certezza la si può ottenere, anche in questo caso, assumendo come valido l'assioma di scelta dipendente.

4.6 Utilizzo dell'assioma di scelta dipendente nei precedenti teoremi

Come abbiamo già potuto notare nella sezione 3.2, esistono varie tipologie di teorie costruttive tra loro differenti.
Per esempio abbiamo osservato che ci sono teorie che assumono come valido l'assioma di scelta dipendente, come per esempio la MLTT, e teorie che non lo fanno, come accade nel caso della emTT, livello estensionale della Fondazione Minimalista (a due livelli) descritto nell'elaborato di Maietti Maria Emilia del 2019 "A minimalist two-level foundation for constructive mathematics" (Ann.Pure Appl.Log.160(3): 319-354).
Nelle sezioni precedenti ci è capitato di notare più di una volta l'utilizzo di tale assioma nelle dimostrazioni costruttive di alcuni teoremi analizzati.
Nelle dimostrazioni costruttive dei teoremi 3 (esistenza sup in non vuoti superiormente limitati), 5 (valori intermedi), 8 (Rolle) e 12 (non numerabilità di R), infatti, l'assioma di scelta dipendente viene utilizzato più o meno esplicitamente. In particolare, quindi, tali dimostrazioni sono perfettamente accettabili in teorie costruttive come la MLTT. Se lavorassimo, invece, in una teoria come la emTT non potremmo utilizzarle, ma saremmo costretti a trovarne di alternative (ammesso che esse esistano).

5 CONCLUSIONI

Ora che siamo giunti alla conclusione di questo breve percorso fermiamoci un attimo a guardare da dove siamo partiti e dove siamo arrivati.
Inizialmente abbiamo visto (e derivato) alcune importanti differenze che intercorrono tra la logica classica e quella intuizionista. Ci siamo resi conto poi che, proprio a causa di alcune di esse, non è possibile adottare certe metodologie di dimostrazione (ad esempio quella per assurdo) qualora si volesse lavorare in una matematica fondata sull'intuizionismo.
E' stato poi il turno di un capitolo nel quale siamo potuti venire a contatto con definizioni e teoremi base dell'analisi costruttiva. Tali risultati, riguardanti i reali "alla Bishop", i Tagli di Dedekind, gli intervalli, le successioni e la continuità e differenziabilità di funzione in analisi costruttiva, sono stati davvero utili per quel che poi è seguito.
Nel quarto capitolo, infatti, ci siamo "sporcati le mani" usufruendo degli strumenti acquisiti in precedenza. Abbiamo analizzato alcuni importanti risultati dell'analisi classica: l'esistenza del sup in insiemi non vuoti superiormente limitati, il teorema dei valori intermedi, le formule di calcolo della derivata di somma e prodotto di funzioni, i teoremi di Rolle e Lagrange e il teorema sulla non numerabilità dell'insieme dei reali. Abbiamo visto che alcuni di essi, passando ad una matematica intuizionista, mantengono lo stesso enunciato e altri, per poter valere anche in analisi costruttiva, devono essere leggermente modificati. Infine abbiamo quindi apportato le modifiche necessarie e dimostrato i nuovi teoremi con i concetti di analisi intuizionista che avevamo visto in precedenza.
Infine abbiamo analizzato le dimostrazioni costruttive dei teoremi precedentemente citati e abbiamo riscontrato in alcune di esse l'utilizzo dell'assioma di scelta dipendente.

Come abbiamo già detto, il 1967 è stato un anno di svolta, un anno in cui gli intuizionisti hanno dato un taglio netto con il passato, un anno in cui è accaduto qualcosa per certi versi simile a ciò che 8 anni prima era accaduto nel mondo dell'arte con l'avvento del primo dei famosi Tagli di Lucio Fontana.
Scopo di questa tesi era proprio quello di avvicinasi a questi primi "tagli" operati dagli intuizionisti per poter intravvedere il fascino e la grandezza di ciò che c'è oltre la tela, oltre la superficie: la concreta possibilità di una matematica intuizionista valida che non debba rinunciare completamente ad importanti risultati analitici di base della matematica classica odierna.

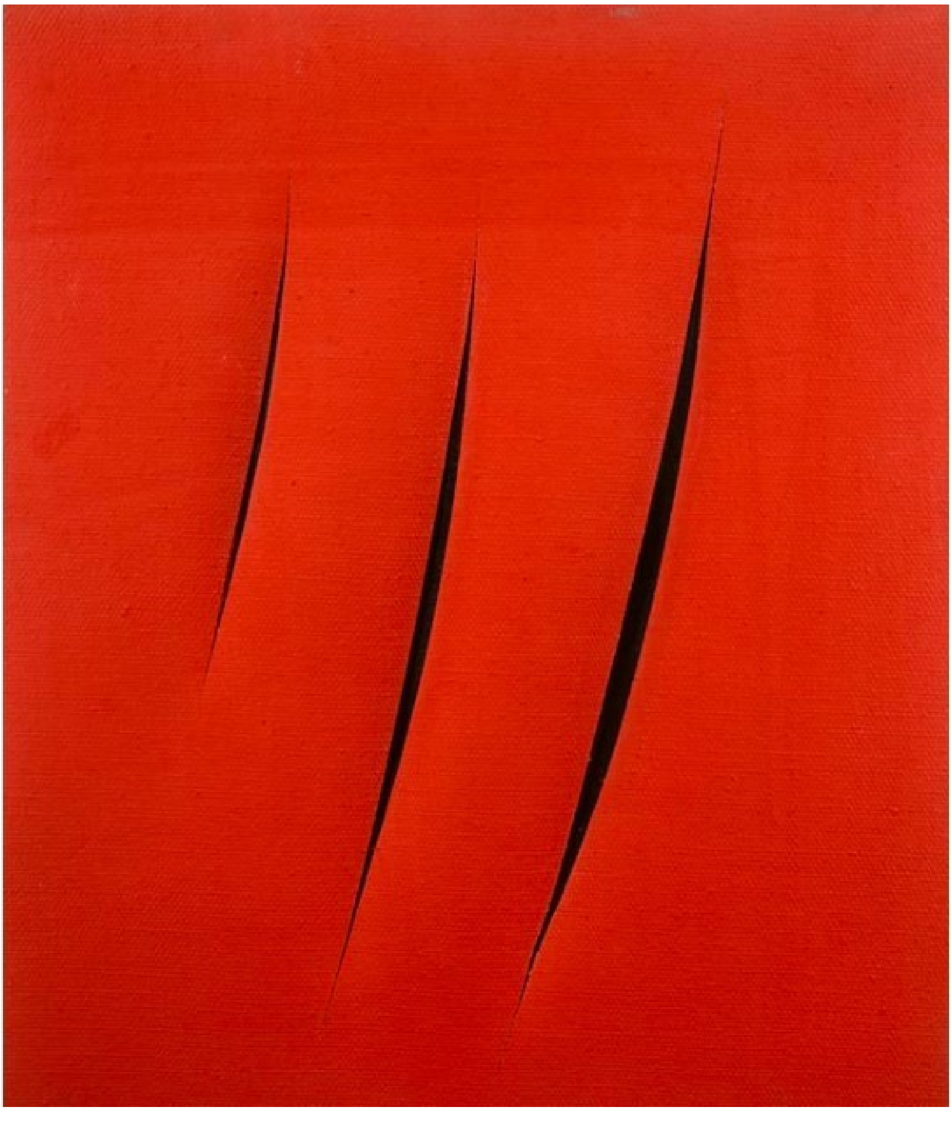

Figura 1: *Tagli* di Lucio Fontana

6 APPENDICE

Di seguito verranno riproposti assiomi e regole del calcolo dei sequenti in logica classica ed intuizionista.
E' importante sottolineare che non sono riportate tutte le regole, ma solamente quelle che potrebbero essere utili alla nostra trattazione.

Calcolo dei sequenti $LC_=$ per la logica classica predicativa con l'uguaglianza

ASSIOMI:

$$\text{ax-id} \qquad \Gamma, A, \Gamma^{'} \vdash \Delta, A, \Delta^{'}$$

$$\text{ax-}\perp \qquad \Gamma, \perp, \Gamma^{'} \vdash \nabla$$

$$\text{ax-tt} \qquad \Gamma \vdash \nabla, tt, \nabla$$

REGOLE:

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma^{'}, \Delta \vdash \Sigma_{'}}{\Sigma, \Gamma^{'}, \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma^{'}} \; sc-sx$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta^{'}, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta^{'}, \Theta, \Delta\nabla} \; sc-dx$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta} \; \&-sx$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta} \; \&-dx$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \; \vee-sx$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \; \vee-dx$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \; \neg-sx$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \; \neg-dx$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta} \to -sx$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \to -sx$$

Calcolo dei sequenti $LI_=$ per la logica intuizionista predicativa con l'uguaglianza

ASSIOMI:

$$\text{ax-id}\qquad \Gamma, A, \Gamma' \vdash A$$

$$\text{ax-}\bot\qquad \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash C$$

$$\text{ax-tt}\qquad \Gamma \vdash tt$$

REGOLE:

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash C}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash C}\ sc-sx$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A\&B \vdash C}\ \&-sx$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\&B}\ \&-dx$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\ \vee-sx$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee-d1$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee-d2$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash B}\ \neg-sx$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg-dx$$

$$\frac{\Gamma, A \to B \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \to B \vdash C}\ \to-sx$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to-sx$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Andrej Bauer, *Five Stages of accepting Constructive Mathematics*, vol 54, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, pag 481-498, 2017;

[2] Errett Bishop, Douglas Bridges, *Constructive Analysis*, Springer-Verlag, 1985;

[3] A.S Troelstra, D. Van Dalen, *Constructivism in Mathematics. An Introduction*, vol 1, North-Holland, 1988

[4] Giuseppe De Marco, *Analisi Uno*, Decibel, 1996;

[5] Maria Emilia Maietti, Appunti per il corso di Logica Matematica, 2020/2021;

[6] Cacciafesta, Treu ,Appunti per il corso di Analisi Matematica 1, 2019/2020;

[7] Giulia Galante, Teoremi fondamentali di esistenza in analisi costruttiva, Tesi di laurea, relatore Maietti M.E. 2019/2020;

[8] Jean Van Heijenoort,*From Frege to Godel. A source book in mathematical logic*, 2002 (ristampa dei quella del 1967);

[9] Michael J. Beeson, *Foundations of constructive mathematics. Metamathematical studies*, vol 6, Springer-Verlag, 1985.

[10] Maria Emilia Maietti, Giovanni Sambin *Why topology in the minimalist foundation must be pointfree*;

[11] Andrej Bauer, *Topos Institute Colloquium, May 12th 2022* slides e video della lezione *The countable reals.*