

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Solitoni in fluidi classici e quantistici

Relatore

Prof. Luca Salasnich

Laureando

Fabrizio Boninsegna

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Introduzione	3
1 L'equazione di Korteweg de Vries	5
1.1 Approssimazioni dell'equazione di Navier-Stokes	5
1.1.1 Le condizioni al contorno	6
1.1.2 Relazione di dispersione per onde di piccola ampiezza	6
1.2 Derivazione della KdV	7
1.2.1 Analisi perturbativa	8
1.2.2 I differenti regimi dell'equazione	10
1.3 Solitoni come soluzione della KdV	11
1.3.1 Soluzione a singolo solitone a fondo costante	11
2 L'equazione di Gross Pitaevskii	15
2.1 Derivazione dell'equazione di Gross Pitaevskii	15
2.1.1 L'equazione unidimensionale	17
2.2 Soluzione solitonica di tipo bright	17
3 L'equazione di Schrödinger non lineare in ottica	21
3.1 Propagazione dell'onda in un mezzo non lineare	21
3.1.1 Onda quasi monocromatica in un mezzo Kerr	22
3.2 Solitoni in ottica non lineare	25
3.2.1 Soluzione solitonica di tipo bright	26
Conclusioni	29
A Polarizzazione in un mezzo Kerr	31
Bibliografia	33

Introduzione

Come suggerisce la parola i solitoni sono delle onde solitarie localizzate in una regione spaziale con delle eccezionali proprietà di stabilità. Emergono da sistemi con un grande numero di gradi di libertà i cui termini non lineari sono responsabili di effetti collettivi che portano a strutture spaziali coerenti, in particolare nei casi che andremo a studiare osserveremo che questo fenomeno compensa esattamente gli effetti dispersivi lineari, creando così un equilibrio stabile tra i due effetti.

Un sistema fisico in generale ammette delle soluzioni quasi-solitoniche le quali però, essendo stabili di fronte ai termini perturbativi, lo descrivono efficacemente. Nasce così un nuovo modo di approcciarsi ai problemi fisici, invece che risolvere il problema linearizzato e introdurre successivamente termini correttivi alla soluzione, si cerca di ricondursi ad equazioni non lineari le quali non solo ammettono soluzione solitonica, ma sono completamente integrabili [1]. Questo ha portato molto interesse tra i matematici: mostrarono che l'equazione di Korteweg de Vries e l'equazione di Schrödinger non lineare (le due che analizzeremo) sono dei modelli completamente integrabili, ovvero ammettono infiniti integrali primi. Il risultato più importante è il metodo chiamato *The inverse scattering transform* per ottenere sistematicamente tutte le soluzioni di questi sistemi integrabili, il quale mette in risalto il ruolo dei solitoni come modo di oscillazione principale non lineare in completa simmetria con i modi di Fourier per le equazioni lineari.

In questa tesi non ci soffermeremo sugli aspetti matematici della teoria, ma analizzeremo per diversi sistemi fisici trattabili nel continuo (fluidi non viscosi, condensati di Bose-Einstein e radiazione elettromagnetica in un cristallo) com'è possibile partendo dalle equazioni fondamentali, con le opportune approssimazioni, giungere a modelli non lineari che ammettono solitoni come soluzione. Risolveremo esplicitamente queste equazioni (Korteweg de Vries ed Schrödinger non lineare) per quadrature successive, nel caso particolare di solitoni solitari di tipo bright, ad ampiezza non negativa. Nelle conclusioni citerò le evidenze sperimentali che confermano la validità dei modelli.

Capitolo 1

L'equazione di Korteweg de Vries

La prima osservazione di un solitone è dovuta all'ingegnere navale scozzese John Scott Russel nel 1834 [1], egli stava cavalcando lungo un canale poco profondo vicino a Edimburgo quando vide una barca fermarsi bruscamente, il moto violento di agitazione dell'acqua creatosi a prua si organizzò successivamente in un'onda liscia e ben definita di gran velocità. Russel seguì l'onda per circa due miglia, notando che manteneva stabile la sua forma e velocità, fino a quando non si diramò nei meandri del canale.

Battezzò l'onda *Wave of translation* e dedicò dieci anni al suo studio mentre le teorie dell'epoca, basate su approcci lineari, ne mostravano la non esistenza. Solo sessant'anni dopo si potrà avere un completo modello teorico del fenomeno basato sull'equazione di Korteweg de Vries (1895).

1.1 Approssimazioni dell'equazione di Navier-Stokes

Consideriamo un fluido non viscoso in presenza del potenziale gravitazionale, le equazioni che governano l'evoluzione del sistema sono quelle di Eulero (approssimazione delle Navier-Stokes per il fluido non viscoso)[2]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{conservazione della massa} \quad (1.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - g \mathbf{e}_z \right) = -\nabla p \quad \text{conservazione del momento} \quad (1.2)$$

Dove ρ è la densità del fluido, \mathbf{v} è la sua velocità, g è l'accelerazione di gravità e p è la pressione. Considero come ulteriore approssimazione l'irrotazionalità del campo di velocità \mathbf{v} , in modo tale da poter aggiungere nelle equazioni di Eulero il potenziale di velocità $\phi : \mathbf{v} = \nabla \phi$.

La condizione di incomprimibilità ed omogeneità del fluido (i.e. $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho$) è soddisfatta da un campo di velocità solenoidale, quindi la (1.1) diventa l'equazione di Laplace per il potenziale. Inoltre utilizzando la seguente identità matematica

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (|\mathbf{v}|^2) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

è possibile riscrivere l'equazione (1.2) nei termini del potenziale. Ottengo così le equazioni per il potenziale di un fluido incomprimibile, omogeneo, non viscoso e sottoposto alla forza gravitazionale.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gz + \frac{p - p_0}{\rho} = 0 \quad (1.4)$$

Il termine p_0 è la pressione atmosferica sulla superficie del fluido ¹.

1.1.1 Le condizioni al contorno

Per risolvere il sistema di equazioni (1.3) e (1.4) devono essere aggiunte delle condizioni al contorno (i.e. dei vincoli da applicare alla superficie libera e al fondale).

Limitandoci allo studio unidimensionale definisco l'equazione per la superficie libera come segue

$$z = \eta(x, t) \quad \text{con} \quad \eta = 0 \quad \text{all'equilibrio} \quad (1.5)$$

dove z è la coordinata che parametrizza la profondità del fluido. Impongo che un volumetto di fluido sulla superficie libera vi rimanga ad ogni tempo, ovvero deve essere valida $z(t) = \eta(x(t), t)$, $\forall t$, derivando lungo le soluzioni ottengo la condizione cinematica al bordo.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \underset{\mathbf{v}=\nabla\phi}{\implies} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (1.6)$$

Sul fondale devo considerare che la velocità ha componente nulla lungo z , ovvero definendo la profondità con h deve essere valida $\partial\phi/\partial z = 0$ in $z = -h$.

Ottengo così un sistema di equazioni differenziali con le condizioni al bordo libere

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad -h < z < \eta(x, t) \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad z = -h \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad z = \eta(x, t) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = -\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 \quad z = \eta(x, t) \quad (1.10)$$

Nella (1.10) ho trascurato gli effetti della tensione superficiale in modo tale da poter considerare la pressione sulla superficie pari a quella atmosferica.

1.1.2 Relazione di dispersione per onde di piccola ampiezza

Considero una piccola perturbazione $\eta \simeq 0$ in modo tale da poter linearizzare il problema e valutare le condizioni sulla superficie in $z = 0$. Il moto linearizzato della superficie può essere determinato dalla sovrapposizione del moto delle sue componenti di Fourier, considero quindi soluzioni del seguente tipo².

$$\phi = \Re(q(x, z)e^{i(kx-\omega t)}) \quad \eta = \Re(p(x, z)e^{i(kx-\omega t)}) \quad (1.11)$$

La condizione di campo laplaciano (1.7) mi determina la forma di $q(x, z)$.

$$\nabla^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} q + \frac{\partial^2}{\partial x^2} q - k^2 q + i2k \frac{\partial}{\partial x} q \right) e^{i(kx-\omega t)} = 0 \quad (1.12)$$

¹Il termine compare integrando l'eq. (1.2) nelle variabili spaziali come scelta di costante d'integrazione

²La scrittura \Re indica la parte reale

Annullando sia la parte reale che la parte immaginaria ottengo che l'ampiezza q non dipende da x e la seguente equazione

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}q - k^2q = 0 \Rightarrow q(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz} \quad (1.13)$$

con A e B parametri reali. Aggiungo la condizione al bordo inferiore (1.8)

$$0 = \frac{\partial}{\partial z}q \Big|_{z=-h} = Ake^{-kh} - Bke^{kh} \quad \text{ovvero} \quad B = Ae^{-2kh} \quad (1.14)$$

ottenendo così la forma esatta della componente di Fourier.

$$q(z) = Ae^{-kh}(e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}) = 2Ae^{-kh} \cosh(k(z+h)) \quad (1.15)$$

Linearizzo le equazioni (1.9) e (1.10) (i.e. elimino il lato destro e valuto a $z = 0$) e le scrivo per le componenti di Fourier

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \xrightarrow{\text{Fourier}} q'(z) + i\omega p = k \tanh(kh)q + i\omega p = 0 \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \xrightarrow{\text{Fourier}} -i\omega q + gp = 0 \quad (1.17)$$

ottengo quindi il seguente sistema lineare.

$$\begin{cases} k \tanh(kh)q + i\omega p = 0 \\ -i\omega q + gp = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

Una soluzione non banale del sistema si ottiene se la matrice dei coefficienti è non singolare, ponendo il determinante a zero ottengo la relazione di dispersione.

$$\omega = \frac{c_0}{h} \sqrt{hk \tanh(hk)} \quad (1.19)$$

dove ho introdotto la velocità di un'onda sottoposta solo alla forza gravitazionale $c_0 = \sqrt{gh}$.

Per $hk = 2\pi h/\lambda \ll 1$, ovvero se la profondità è trascurabile rispetto la lunghezza dell'onda, è possibile sviluppare in serie di potenze di hk la relazione (1.19) a cui è associata un'equazione lineare di propagazione per η

$$\omega = c_0 k \left(1 - \frac{1}{6}(kh)^2 + O(kh)^4 \right) \rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \quad (1.20)$$

Si ricava quindi che gli effetti dispersivi si manifestano quando $(hk)^2 \propto (h/\lambda)^2 = \epsilon^2$ è non trascurabile.

1.2 Derivazione della KdV

D'ora in poi utilizzeremo la notazione abbreviata per le derivate parziali $\partial \eta / \partial x = \eta_x$

L'equazione ottenuta fermandoci al secondo ordine dello sviluppo in (hk) è l'equazione KdV lineare

$$\eta_t + c_0 \eta_x + \frac{h^2}{6} c_0 \eta_{xxx} = 0 \quad (1.21)$$

Affinché il problema rimanga invariato per trasformazioni congiunte di parità e inversione temporale il primo termine non lineare da aggiungere deve essere proporzionale a $\eta \eta_x$ [3]. Considerando che è possibile adimensionalizzare l'equazione e che il termine $\eta_t + \eta_x$ può essere accorpato in η_t con un cambio di coordinate galileiane ottengo la KdV.

$$\eta_t + \eta \eta_x + \eta_{xxx} = 0 \quad (1.22)$$

Si può calcolare con un metodo perturbativo il coefficiente del termine non lineare.

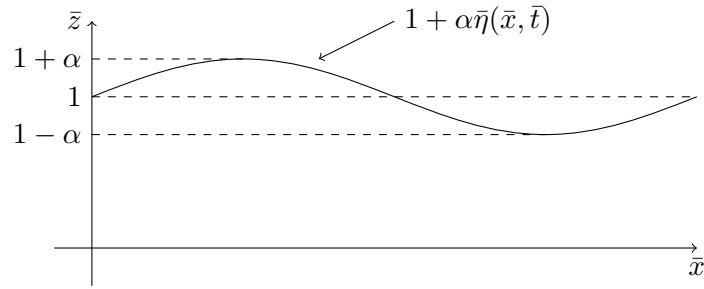


Figura 1.1: La funzione adimensionale $\bar{\eta}(\bar{x}, \bar{t})$ parametrizza la superficie al primo ordine di sviluppo in α .

1.2.1 Analisi perturbativa

Lo scopo di questa analisi è di studiare le equazioni (1.7)-(1.10) in regime di onde lunghe e di piccola ampiezza rispetto al fondale, dovrò dunque introdurre esplicitamente i seguenti parametri.

$$\alpha = \frac{a}{h} = \frac{\text{ampiezza dell'onda}}{\text{profondità}} \quad \epsilon = \frac{h}{\lambda} = \frac{\text{profondità}}{\text{lunghezza d'onda}} \quad (1.23)$$

Applico una traslazione verticale, la quale non modifica le equazioni differenziali, in modo tale da posizionare il fondale a $z = 0$ e inoltre introduco delle variabili riscalate in modo da adimensionalizzare le equazioni (1.7)-(1.10), così da rendere esplicite la dipendenze dai parametri di sviluppo α ed ϵ .

$$\bar{x} = \frac{x}{\lambda} \quad \bar{z} = \frac{z}{h} \quad \bar{\phi} = \frac{h\phi}{\lambda a \sqrt{gh}} \quad \bar{t} = \frac{t\sqrt{gh}}{\lambda} \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{a} \quad (1.24)$$

Otengo il seguente sistema di equazioni a due parametri perturbativi.

$$\epsilon^2 \bar{\phi}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{\phi}_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad 0 \leq \bar{z} \leq 1 + \alpha \bar{\eta}(\bar{x}, \bar{t}) \quad (1.25)$$

$$\bar{\phi}_{\bar{z}} = 0 \quad \bar{z} = 0 \quad (1.26)$$

$$\bar{\phi}_{\bar{z}} = \epsilon^2 (\bar{\eta}_{\bar{t}} + \alpha \bar{\phi}_{\bar{x}} \bar{\eta}_{\bar{x}}) \quad \bar{z} = 1 + \alpha \bar{\eta}(\bar{x}, \bar{t}) \quad (1.27)$$

$$\bar{\phi}_{\bar{t}} + \frac{1}{2} \alpha (\bar{\phi}_{\bar{x}}^2 + \bar{\phi}_{\bar{z}}^2) + \bar{\eta} = 0 \quad \bar{z} = 1 + \alpha \bar{\eta}(\bar{x}, \bar{t}) \quad (1.28)$$

Il livello d'equilibrio della superficie dopo la traslazione e l'adimensionalizzazione è diventato l'unità, come mostra la figura 1.1 risulta esplicito il ruolo della funzione $\bar{\eta}$. Dovremmo ora effettuare un'analisi perturbativa considerando entrambi i limiti $\epsilon \ll 1$ e $\alpha \ll 1$, tuttavia il fatto che i fenomeni dispersivi sono dell'ordine di ϵ^2 ci permette di supporre che i fenomeni non lineari siano dell'ordine di $\alpha = O(\epsilon^2)$. Per semplificare la notazione d'ora in poi ometteremo la barra sopra le variabili e le considereremo implicitamente adimensionali.³

Nell'ipotesi di acque poco profonde posso sviluppare nelle potenze di z il campo di velocità.

$$\phi(x, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \phi^{(m)}(x, t) \quad (1.29)$$

L'apice tra parentesi non indica una derivata, ma una differente funzione relativa all'ordine m di sviluppo. Inserisco tale sviluppo nell'equazione di Laplace ed eguaglio i termini dello stesso ordine in z

$$\epsilon^2 \phi_{xx}^{(0)} + 2\phi^{(2)} = 0 \quad \text{ordine } O(1) \quad (1.30)$$

$$\epsilon^2 \phi_{xx}^{(1)} + 6\phi^{(3)} = 0 \quad \text{ordine } O(z) \quad (1.31)$$

$$\epsilon^2 \phi_{xx}^{(2)} + 12\phi^{(4)} = 0 \quad \text{ordine } O(z^2) \quad (1.32)$$

³La dimostrazione è presa e rielaborata da [4]

aggiungendo la condizione al fondale (1.26) elimino tutti i termini di sviluppo dispari dalla serie

$$\phi_z(z=0) = \phi^{(1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi^{(3)} = 0 \quad \text{da (1.31)}$$

ottengo quindi il seguente sviluppo in potenze di z .

$$\phi = \phi^{(0)} - \frac{\epsilon^2}{2} z^2 \phi_{xx}^{(0)} + \frac{\epsilon^4}{24} z^4 \phi_{xxxx}^{(0)} + O(z^6) \quad (1.33)$$

A questo punto introduco il nuovo campo scalare $w(x, t) = \phi_x^{(0)}(x, t)$ e riscrivo le equazioni (1.27) e (1.28) fino al primo ordine $O(\alpha) = O(\epsilon^2)$

$$\epsilon^{-2} \phi_z - \alpha \phi_x \eta_x - \eta_t = -z w_x + \frac{\epsilon^2}{6} z^3 w_{xxx} - \alpha \eta_x w_x - \eta_t \quad (1.34)$$

$$= -(1 + \alpha \eta) w_x + \frac{\epsilon^2}{6} (1 + \alpha \eta)^3 w_{xxx} - \alpha \eta_x w - \eta_t \quad (1.35)$$

$$= -w_x - \eta_t - \alpha (\eta w)_x + \frac{\epsilon^2}{6} w_{xxx} = 0 \quad (1.36)$$

dove in (1.35) ho calcolato l'equazione sulla superficie $z = 1 + \alpha \eta$. Proseguo derivando in x l'equazione (1.28) per far comparire il campo w .

$$\phi_{tx} + \alpha (\phi_x \phi_{xx} + \phi_z \phi_{zx}) + \eta_x = w_t - \frac{\epsilon^2}{2} z^2 w_{txx} + \alpha w w_x + \eta_x \quad (1.37)$$

$$= w_t + \eta_x + \alpha w w_x - \frac{\epsilon^2}{2} w_{txx} = 0 \quad (1.38)$$

Raggruppando ottengo il seguente sistema.

$$\begin{cases} w_x + \eta_t + \alpha (\eta w)_x - \frac{\epsilon^2}{6} w_{xxx} = 0 \\ w_t + \eta_x + \alpha w w_x - \frac{\epsilon^2}{2} w_{txx} = 0 \end{cases} \quad (1.39)$$

La strategia risolutiva consiste nel trovare una soluzione esatta all'ordine fondamentale, quindi di modificarla aggiungendo termini proporzionali ad α e ϵ^2 indipendenti.

All'ordine fondamentale ottengo il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} w_x + \eta_t = 0 \\ w_t + \eta_x = 0 \end{cases} \quad (1.40)$$

che ammette la seguente soluzione ondulatoria.

$$w = \eta \quad \eta_t = -\eta_x \quad w_t = -w_x \quad (1.41)$$

Considero ora una soluzione del seguente tipo

$$w = \eta + \alpha A + \epsilon^2 B \quad (1.42)$$

Dove A e B sono funzioni di η e delle sue derivate rispetto x . Riscrivo il sistema (1.39) utilizzando la relazione (1.42)

$$w_x + \eta_t + \alpha(\eta w)_x - \frac{\epsilon^2}{6} w_{xxx} = \eta_x + \alpha A_x + \epsilon^2 B_x + \eta_t + \alpha(\eta^2)_x - \frac{\epsilon^2}{6} \eta_{xxx} \quad \text{per (1.42)}$$

$$= \alpha(A_x + 2\eta\eta_x) + \epsilon^2 \left(B_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx} \right) = 0 \quad \text{per (1.41)}$$

$$w_t + \eta_x + \alpha w w_x - \frac{\epsilon^2}{2} w_{txx} = -w_x + \eta_x + \alpha w w_x + \frac{\epsilon^2}{2} w_{xxx} \quad \text{per (1.41)}$$

$$= -\alpha A_x - \epsilon^2 B_x + \alpha \eta \eta_x + \frac{\epsilon^2}{2} \eta_{xxx} \quad \text{per (1.42)}$$

$$= \alpha(-A_x + \eta\eta_x) + \epsilon^2 \left(-B_x + \frac{1}{2}\eta_{xxx} \right) = 0$$

ottengo quindi il seguente sistema all'ordine di sviluppo $O(\alpha) = O(\epsilon^2)$

$$\begin{cases} \alpha(A_x + 2\eta\eta_x) + \epsilon^2 (B_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx}) = 0 \\ \alpha(-A_x + \eta\eta_x) + \epsilon^2 (-B_x + \frac{1}{2}\eta_{xxx}) = 0 \end{cases} \quad (1.43)$$

sottraendo la prima equazione con la seconda e annullando separatamente i due coefficienti ottengo delle identità per le funzioni di correzione.

$$A_x = -\frac{1}{2}\eta\eta_x \quad B_x = \frac{1}{3}\eta_{xxx} \quad (1.44)$$

Inserendo ora le funzioni di correzione e aggiungendo i termini $O(1)$ in (1.43) ottengo l'equazione di Korteweg de Vries adimensionale

$$\bar{\eta}_t + \bar{\eta}_x + \frac{3}{2}\alpha\bar{\eta}\bar{\eta}_x + \frac{1}{6}\epsilon^2\bar{\eta}_{xxx} = 0 \quad (1.45)$$

dove ho reintrodotta la barra sopra le variabili per ricordare il fatto che sono adimensionali. Tornando alle variabili iniziali, ovvero applicando le trasformazioni (1.24), ottengo l'equazione KdV dimensionale nel sistema del laboratorio.

$$\boxed{\eta_t + c_0 \eta_x + \frac{3}{2} \frac{c_0}{h} \eta \eta_x + \frac{1}{6} h^2 c_0 \eta_{xxx} = 0} \quad (1.46)$$

Ricordiamo che η indica l'altezza dalla superficie d'equilibrio, $c_0 = \sqrt{gh}$ è la velocità di propagazione dell'onda lineare nel limite di elevata lunghezza d'onda e h è la profondità del fluido.

1.2.2 I differenti regimi dell'equazione

L'equazione di Korteweg de Vries è valida se i parametri di sviluppo perturbativo sono molto piccoli, ovvero se $a \ll h$ e $h \ll \lambda$. Rispettando tali condizioni è possibile discriminare differenti situazioni in base alla profondità del fluido.

- **$h \ll 1$ regime lineare e non dispersivo**

Il termine dispersivo scompare essendo di ordine $O(h^2)$, inoltre $a \ll h \ll 1 \Rightarrow \eta \ll h \ll 1$ e dunque scompare anche il termine non lineare. Ottengo in questa approssimazione un'onda lineare che si propaga a velocità \sqrt{gh} .

- **$h \gg 1$ regime lineare e dispersivo**

In questa approssimazione scompare il termine non lineare, si ottengono così soluzioni ondulatorie che si disperdono seguendo la relazione (1.20). Tuttavia, se la lunghezza d'onda è molto grande (come nel caso degli Tsunami in mare aperto), è possibile rientrare nel regime "solitonico".

- **regime non lineare e non dispersivo**

Affinché tale situazione sia possibile dovrei esser nel caso $h \ll 1$ e $a \simeq h$ che non è contemplato. Tale situazione può avvenire però localmente in presenza di superfici approssimativamente paraboliche (i.e. si annulla localmente il termine dispersivo).

- **regime non lineare e dispersivo**

In questo caso nessun termine è trascurabile, come vedremo nel prossimo paragrafo la somma degli effetti non lineari con quelli dispersivi crea le condizioni per un' onda solitonica.

L'equazione in forma normale Espressa nelle variabili adimensionali, eviterò quindi di mettere la barra sopra le variabili, si ottiene con un cambio di coordinate.

Consideriamo ora $\alpha = \epsilon^2$ (valida se entrambi sono molto piccoli) e applico il seguente cambio di coordinate

$$x \mapsto \sqrt{\frac{3}{2}}(x - t) \quad t \mapsto \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha t \quad (1.47)$$

sostituendo in (1.45) ottengo l'equazione KdV standard.

$$\eta_t + 6\eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0 \quad (1.48)$$

L'importanza di aver effettuato questo ultimo cambio di coordinate risiede nel fatto di aver introdotto una variabile di tempo lenta, infatti l'equazione KdV è valida per tempi lunghi rispetto le condizioni iniziali.

1.3 Solitoni come soluzione della KdV

Cerchiamo soluzioni del tipo onda viaggiante, ovvero

$$\eta(x, t) = \eta(x - ct) = \eta(\xi) \quad (1.49)$$

con c la velocità dell'onda. Per ottenere una soluzione a singolo solitone devo imporre la condizione asintotica che η svanisca all'infinito assieme a tutte le sue derivate (è sufficiente imporre ciò fino alla derivata seconda).

$$\eta, \eta_\xi, \eta_{\xi\xi} \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad \xi \rightarrow \pm\infty \quad (1.50)$$

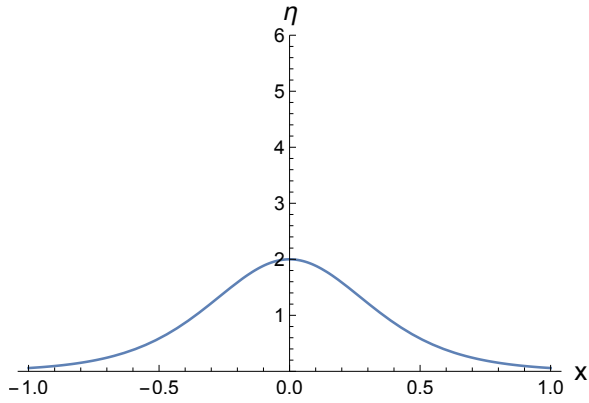
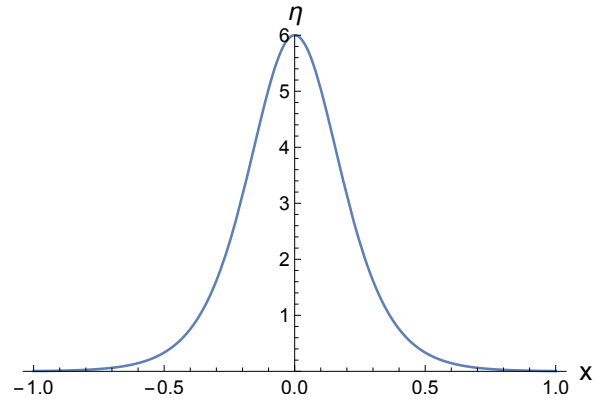
1.3.1 Soluzione a singolo solitone a fondo costante

Inserendo la soluzione del tipo di onda viaggiante in (1.46) ottengo la seguente equazione differenziale ordinaria che può essere risolta per integrazioni successive.

$$-c\eta_\xi + c_0\eta_\xi + \frac{3c_0}{2h}\eta\eta_\xi + \frac{1}{6}h^2c_0\eta_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (1.51)$$

Divido per c_0 e introduco la variabile $v = c/c_0$, quindi effettuo una prima integrazione

$$(1 - v)\eta + \frac{3}{4h}\eta^2 + \frac{1}{6}h^2\eta_{\xi\xi} = A \quad (1.52)$$

Figura 1.2: $c = 2c_0$ Figura 1.3: $c = 4c_0$

andamento del solitone per $h = 1$ al variare della sua velocità c

è stata introdotta una costante di integrazione A . Moltiplico per η_ξ ambo i membri e integro nuovamente ottenendo un'ulteriore costante B .

$$\frac{1-v}{2}\eta^2 + \frac{1}{4h}\eta^3 + \frac{1}{12}h^2\eta_\xi^2 = A\eta + B \quad (1.53)$$

Le condizioni asintotiche che permettono una soluzione a singolo solitone sono soddisfatte per $A = B = 0$, ottengo così la seguente equazione a variabili separabili

$$\eta_\xi^2 = \frac{12}{h^2} \left(\frac{v-1}{2}\eta^2 - \frac{1}{4h}\eta^3 \right) = \frac{3}{h^3}\eta^2(2h(v-1) - \eta) \Rightarrow \eta_\xi = \pm \sqrt{\frac{3}{h^3}} \eta \sqrt{\gamma - \eta} \quad (1.54)$$

per comodità di scrittura ho definito $\gamma = 2h(v-1)$ la quale sarà anche l'altezza massima dell'onda, infatti l'equazione è definita per $\eta \leq \gamma$.

Considero la soluzione a derivata negativa e integro quindi sull'intervallo $[\gamma; \eta]^4$

$$\xi - \xi_0 = -\sqrt{\frac{h^3}{3}} \int_\gamma^\eta \frac{d\eta}{\eta \sqrt{\gamma - \eta}} \quad (1.55)$$

Per risolvere l'integrale è utile applicare la seguente sostituzione $\eta = \gamma / \cosh^2 z$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{\eta \sqrt{\gamma - \eta}} &= -\gamma \frac{\sinh z}{\cosh^3 z} \frac{\cosh^2 z}{\gamma} \cdot \gamma^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 z} \right)^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= -\gamma^{-\frac{1}{2}} \tanh z \left(\frac{\cosh^2 z - 1}{\cosh^2 z} \right)^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= -\gamma^{-\frac{1}{2}} dz \end{aligned}$$

L'estremo d'integrazione γ si ottiene per $z = 0$ mentre il rimanente per $z = \operatorname{arcosh}^2(\gamma/\eta)$, a questo punto l'integrazione è immediata

$$\xi - \xi_0 = \sqrt{\frac{h^3}{3}} \gamma^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\operatorname{arcosh}^2(\gamma/\eta)} dz = \sqrt{\frac{h^3}{3\gamma}} \operatorname{arcosh}^2 \left(\frac{\gamma}{\eta} \right) \quad (1.56)$$

⁴Avere la derivata negativa indica che la soluzione descrive un'onda che decresce in altezza, per questo vado ad integrare partendo dal picco γ dell'onda.

e riarrangiando ottengo la seguente soluzione

$$\eta = \gamma \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3\gamma}{h^3}} (\xi - \xi_0) \right] \quad \text{ovvero} \quad \eta(x, t) = 2h \left(\frac{c}{c_0} - 1 \right) \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{6}{h^2} \left(\frac{c}{c_0} - 1 \right)} (x - ct - x_0) \right] \quad (1.57)$$

dove x_0 è una fase che può essere posta a zero. La velocità c del solitone deve essere maggiore della velocità che avrebbe l'onda in assenza di perturbazioni non lineari (ovvero c_0) e, come si nota dal grafico, all'aumentare della sua velocità l'onda diventa più alta e sottile.

Questo modello descrive efficacemente l'osservazione di Russel, infatti ottengo un'onda in un canale poco profondo che viaggia ad una velocità maggiore di quella consentita dai modelli lineari.

Capitolo 2

L'equazione di Gross Pitaevskii

Un condensato di Bose-Einstein è un sistema di bosoni massivi dove ogni singola particella occupa lo stesso stato quantistico, quello fondamentale. Questo nuovo stato della materia fu teorizzato inizialmente da Bose nel 1924 per un gas di fotoni e successivamente generalizzato di Einstein alle particelle massive, la loro teoria predice una soglia critica di temperatura, prossima allo zero assoluto, al di sotto della quale è possibile osservare il fenomeno [1]. La prima osservazione sperimentale avvenne nel 1995 su un sistema di atomi di rubidio intrappolati ed estremamente diluito, valse il premio Nobel nel 2001 a Eric Cornell e Carl Wieman [5].

L'equazione che descrive l'evoluzione di una singola particella in un condensato di Bose-Einstein, nell'approssimazione di Hartree e d'interazione a contatto, è un caso particolare di equazione di Schrödinger non lineare chiamata equazione di Gross-Pitaevskii (derivata indipendentemente da entrambi nel 1961 [1]). La derivazione utilizzerà un approccio variazionale [6], [7].

2.1 Derivazione dell'equazione di Gross Pitaevskii

Considero una generica Hamiltoniana di un sistema di N bosoni identici di massa m sottoposti ad un generico potenziale d'interazione $V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ per $i, j = 1, \dots, N$ e confinati da un potenziale costante $U(\mathbf{r}_i)$

$$\hat{H} = \sum_i^N \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + U(\mathbf{r}_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \quad (2.1)$$

essa agisce su una funzione d'onda che vive nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$, dove \mathcal{H}_i è lo spazio associato alla singola particella, la quale in generale è molto complicata. Nel caso di un sistema bosonico privo di spin e ultrafreddo posso però imporre che ciascuna particella si trovi nel suo stato fondamentale $\varphi(\mathbf{r}_i, t)$ e quindi che il sistema sia un puro condensato di Bose-Einstein; tale approssimazione è detta di Hartree.

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \prod_i^N \varphi(\mathbf{r}_i, t) \quad (2.2)$$

L'equazione che descrive la dinamica si ottiene da un metodo variazionale a partire dall'azione di Dirac.

$$S[\Psi, \Psi^*] = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^3\mathbf{r}_1 \dots d^3\mathbf{r}_N \Psi^* \left(\hat{H} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi \quad (2.3)$$

Per continuare è necessario fare delle ipotesi sul potenziale d'interazione per renderlo separabile. Tutte le particelle si trovano nel medesimo stato $\varphi(\mathbf{r}_i, t)$ dunque avranno la medesima densità di probabilità sulle posizioni $|\varphi(\mathbf{r}, t)|^2$, è lecito quindi pensare che ciascuna particella interagisca equamente con le rimanenti $N - 1$, introduco in questo modo il potenziale di campo medio¹

$$\tilde{V}(\mathbf{r}_i) = (N - 1) \int_{\mathbb{R}^3} V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}) |\varphi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r} \quad (2.4)$$

il potenziale generico d'interazione in (2.1) viene sostituito da $\frac{1}{2} \sum_i^N \tilde{V}(\mathbf{r}_i)$ e in questo modo l'Hamiltoniana risulta separabile potendo quindi raccogliere N integrali spaziali uguali. Si ottiene così l'azione associata ad una particella singola.

$$S[\varphi, \varphi^*] = N \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} \varphi^*(\mathbf{r}, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \tilde{V}(\mathbf{r}) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (2.5)$$

Calcolo ora la funzione che estremizza l'azione, ovvero φ tale che $\delta S/\delta\varphi = 0$ e $\delta S/\delta\varphi^* = 0$, in questo modo ottengo due equazioni del moto l'una la complessa coniugata dell'altra, è sufficiente quindi calcolare la prima derivata funzionale.

Ottingo l'equazione di Schrödinger più un termine dovuto alla variazione del potenziale d'interazione che calcolerò ora separatamente

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\varphi^*(\mathbf{x}, t')} & \left(\frac{N-1}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\mathbb{R}^6} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\varphi(\mathbf{r}', t)|^2 |\varphi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) = \\ & = \frac{N-1}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\mathbb{R}^6} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{x}) \delta(t - t') \varphi(\mathbf{r}', t) |\varphi(\mathbf{r}, t)|^2 + \\ & + \frac{N-1}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\mathbb{R}^6} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\varphi(\mathbf{r}', t)|^2 \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{x}) \delta(t - t') \varphi(\mathbf{r}, t) \\ & = (N-1) \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\varphi(\mathbf{r}', t)|^2 \varphi(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

Poiché il numero di particelle è generalmente elevato posso semplificare con $N \simeq N - 1$. Ottengo così l'equazione di Hartree per i bosoni, essa è un'equazione integro differenziale.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + N \int_{\mathbb{R}^3} V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\varphi(\mathbf{r}', t)|^2 d^3\mathbf{r}' \right) \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (2.6)$$

Come ulteriore approssimazione, che sarà quella che ci porterà ad ottenere l'equazione desiderata, considero il potenziale interagente come di contatto (tale approssimazione, detta anche di potenziale di Fermi, funziona bene per descrivere gas bosonici fortemente diluiti)

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.7)$$

dove g ha le dimensioni di un' energia per volume ed è definito come l'integrale del potenziale d'interazione.

$$g = \int_{\mathbb{R}^3} V(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (2.8)$$

Con questa approssimazione elimino l'integrale dalla (2.6) e ottengo così l'equazione di Gross Pitaevskii dipendete dal tempo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + Ng |\varphi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (2.9)$$

¹Tale potenziale sembrerebbe suggerire una forza d'interazione istantanea tra particelle, per correggere questa stranezza si deve introdurre il tempo ritardato $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ se si suppone che l'interazione viaggi alla velocità della luce. L'approssimazione effettuata è ragionevole poiché $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll ct$

2.1.1 L'equazione unidimensionale

È possibile ridurre la dimensionalità dell'equazione (2.9) considerando un forte potenziale di confinamento armonico di frequenza ω_{\perp} sulle variabili y e z e uno generico sulla rimanente [8].

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2(y^2 + z^2) + W(x) \quad (2.10)$$

Il potenziale tende a confinare le funzioni d'onda delle singole particelle lungo la dimensione x , supponiamo che tali funzioni svaniscano in modo gaussiano lungo il piano individuato dalle coordinate y e z

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = f(x, t) \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{y^2 + z^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.11)$$

dove è stata definita la deviazione $\sigma = (\hbar/m\omega_{\perp})^{1/2}$ e $f(x, t)$ è una generica funzione d'onda unidimensionale di norma unitaria. Inserisco la (2.11) in (2.5) con l'aggiunta del potenziale di confinamento (2.10) ed effettuo le integrazioni² nelle variabili y e z

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} \varphi^*(\mathbf{r}, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}} dx f^*(x, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) f(x, t) + \text{cost.} \quad (2.12)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} U(\mathbf{r}) |\varphi(\mathbf{r}, t)|^2 = \int_{\mathbb{R}} dx W(x) |f(x, t)|^2 + \text{cost.} \quad (2.13)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} \frac{N}{2} g |\varphi(\mathbf{r}, t)|^4 = \int_{\mathbb{R}} dx \frac{1}{2} \frac{N}{2\pi\sigma^2} g |f(x, t)|^4 + \text{cost.} \quad (2.14)$$

Otengo la seguente azione di Dirac (a meno di una costante) associata a funzioni d'onda unidimensionali.

$$S[f, f^*] = N \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\mathbb{R}} dx f^*(x, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W(x) + \frac{1}{2} \frac{N}{2\pi\sigma^2} g |f(x, t)|^2 - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) f(x, t) \quad (2.15)$$

Estremizzo il funzionale e ottengo l'equazione di Gross Pitaevskii unidimensionale.

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W(x) + \frac{N}{2\pi\sigma^2} g |f(x, t)|^2 \right) f(x, t)} \quad (2.16)$$

Ricordiamo che $f(x, t)$ è la funzione d'onda di singola particella intrappolata in un sistema unidimensionale, m è la massa della particella, N è il numero di particelle che compongono il sistema, σ è la lunghezza caratteristica associata al confinamento armonico e g quantifica l'energia d'interazione nell'approssimazione di potenziale di contatto.

2.2 Soluzione solitonica di tipo bright

Siamo interessati a studiare un condensato di Bose-Einstein puro e libero di muoversi lungo la coordinata x , pongo dunque a zero il potenziale di confinamento $W(x) = 0$. Inoltre per ottenere una soluzione solitonica devo considerare un potenziale d'interazione attrattivo (i.e. $g < 0$) e definisco il seguente parametro.

$$\gamma = \frac{N}{2\pi\sigma^2} g < 0 \quad (2.17)$$

²Tutti gli integrali sul piano y, z convergono essendo gli integrandi della forma $P(y, z) \exp(-(y^2 + z^2))$ con $P(y, z)$ un polinomio, non è necessario riportarne il valore in quanto a noi interessano le variazioni del funzionale

Cerchiamo una soluzione di tipo solitonica [9]

$$f(x, t) = \phi(x - vt)e^{i\delta(x, t)} = \phi(\xi)e^{i\delta(x, t)} \quad (2.18)$$

Un solitone solitario per essere di tipo bright deve soddisfare le seguenti proprietà.

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \phi(\xi) = 0 \quad \text{assieme a tutte le sue derivate} \quad (2.19)$$

$$\phi(\xi) > 0 \quad \text{singolo solitone che si eleva} \quad (2.20)$$

In questo modo è possibile riscrivere la (2.16) come due equazioni differenziali alle derivate parziali in ξ e t separando parte immaginaria da parte reale. Utilizzerò per il resto del paragrafo la seguente notazione $d\phi/d\xi = \phi'$

$$\phi'' = \left(\frac{2m}{\hbar} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right)^2 \right) \phi - \frac{2m}{\hbar^2} \gamma \phi^3 \quad \text{parte reale} \quad (2.21)$$

$$\phi' = \frac{\hbar}{vm} \left(\phi' \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{1}{2} \phi \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \right) \quad \text{parte immaginaria} \quad (2.22)$$

Studio della fase Concentriamoci sulla (2.22), il membro di destra deve essere una funzione della variabile $(x - vt)$ e quindi la fase ha una forma ben precisa.

$$\delta(x, t) = \theta(x - vt) + \alpha t = \theta(\xi) + \alpha t \quad (2.23)$$

Posso ora riscrivere le equazioni come un sistema ordinario nella variabile ξ

$$\phi'' = \left(\frac{2m}{\hbar} (-v\theta' + \alpha) + (\theta')^2 \right) \phi - \frac{2m}{\hbar^2} \gamma \phi^3 \quad (2.24)$$

$$\phi' = \frac{\hbar}{vm} \left(\phi' \theta' + \frac{1}{2} \phi \theta'' \right) \quad (2.25)$$

L'equazione (2.25) può essere riscritta nel seguente modo (grazie alla (2.20) non ho problemi a denominatore) e quindi risolta per quadrature

$$v \frac{(\phi^2)'}{\phi} = \frac{\hbar}{m} \frac{(\phi^2 \theta')'}{\phi} \xrightarrow{\text{integrando}} \phi^2 \left(v - \frac{\hbar}{m} \theta' \right) = C \quad (2.26)$$

con l'aggiunta della condizione (2.19) e alla non divergenza di θ' posso eliminare la costante d'integrazione C ottenendo così una soluzione per la fase

$$\theta'(\xi) = \frac{vm}{\hbar} \Rightarrow \theta(\xi) = \frac{vm}{\hbar} \xi \quad (2.27)$$

Studio del modulo Posso ora risolvere l'equazione (2.24), introducendo il risultato (2.27) ottengo

$$\phi'' = \frac{2m}{\hbar^2} \left(\hbar \alpha - \frac{1}{2} m v^2 \right) \phi - \frac{2m}{\hbar^2} \gamma \phi^3 \quad (2.28)$$

La forma ottenuta è quella dell'equazione di Newton per i potenziali

$$E(\phi) = -\frac{m}{\hbar^2} \left(\hbar \alpha - \frac{1}{2} m v^2 \right) \phi^2 + \frac{m}{2\hbar^2} \gamma \phi^4 \longrightarrow \phi'' = -\frac{d}{d\phi} E(\phi) \quad (2.29)$$

essa ammette come integrale primo l'energia che può essere usata per ridurre l'ordine dell'equazione.

$$K(\phi, \phi') = \frac{1}{2}(\phi')^2 + E(\phi) \quad (2.30)$$

La condizione di solitone bright è soddisfatta per $K = 0$, ottengo in questo modo la seguente equazione omogenea di primo grado $\phi' = \pm\sqrt{-2E(\phi)}$. Definisco $\phi(0)' = 0$ così da posizionare la cresta del solitone nell'origine, da (2.30) ottengo che $E(\phi(0)) = 0$ da cui ricavo la condizione iniziale.

$$\phi(0) = \sqrt{\frac{2\hbar\alpha - mv^2}{|\gamma|}} \quad \text{valida se} \quad \alpha > \frac{mv^2}{2\hbar} \quad (2.31)$$

Considero l'equazione col segno negativo così da poter integrare in $[\phi(0); \phi(\xi)]$

$$-\frac{\hbar}{\sqrt{m}} \int_{\phi(0)}^{\phi(\xi)} \frac{d\phi}{\phi\sqrt{(2\hbar\alpha - mv^2) - |\gamma|\phi^2}} = -\frac{\hbar}{\sqrt{m|\gamma|}} \int_{\phi(0)}^{\phi(\xi)} \frac{d\phi}{\phi\sqrt{A - \phi^2}} = \xi \quad (2.32)$$

dove è stato definito per comodità di calcolo $A = (2\hbar\alpha - mv^2)/|\gamma| = \phi(0)^2$.

La soluzione dell'integrale è simile a quella svolta per la soluzione della KdV, si effettua la seguente sostituzione

$$\phi = \frac{\sqrt{A}}{\cosh(z)} \Rightarrow \frac{d\phi}{\phi\sqrt{A - \phi^2}} = -A^{-\frac{1}{2}} dz \quad (2.33)$$

gli estremi d'integrazione sono $\phi(0) = \sqrt{A} \Leftrightarrow z = 0$ e $z = \text{arcosh}(\sqrt{A}/\phi)$, integrando la (2.32) ottengo la seguente soluzione

$$\text{arcosh}\left(\frac{\sqrt{A}}{\phi}\right) = \sqrt{\frac{mA|\gamma|}{\hbar^2}} \xi \quad \Rightarrow \quad \phi(\xi) = \sqrt{A} \text{sech}\left(\sqrt{\frac{mA|\gamma|}{\hbar^2}} \xi\right) \quad (2.34)$$

Normalizzazione Il parametro α introdotto in (2.23) ha a che fare con l'energia della particella la quale può essere ricavata normalizzando lo stato solitonico ottenuto in (2.34). Calcolo la normalizzazione³ al tempo $t = 0$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} A \text{sech}^2\left(\sqrt{\frac{mA|\gamma|}{\hbar^2}} x\right) dx = \frac{A\hbar}{\sqrt{Am|\gamma|}} \tanh\left(\sqrt{\frac{mA|\gamma|}{\hbar^2}} x\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2A\hbar}{\sqrt{Am|\gamma|}} \quad (2.35)$$

da cui ricavo il parametro A e quindi anche α

$$A = \frac{m|\gamma|}{4\hbar^2} \quad \alpha = \frac{m|\gamma|^2}{8\hbar^3} + \frac{mv^2}{2\hbar} \quad (2.36)$$

Con questi parametri ottengo una soluzione solitonica normalizzata

$$f(x, t) = \sqrt{\frac{m|\gamma|}{4\hbar^2}} \text{sech}\left(\frac{m|\gamma|}{2\hbar^2}(x - vt)\right) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(vm \cdot x - \left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{m|\gamma|^2}{8\hbar^2}\right)t\right)\right] \quad (2.37)$$

L'energia che compare nella fase è la somma di due termini, uno prettamente cinetico e uno associato all'energia d'interazione attrattiva con le altre particelle, essa vale

$$\mu = -\frac{m|\gamma|^2}{8\hbar^2} \quad \text{energia di interazione} \quad (2.38)$$

³L'evoluzione temporale è unitaria e quindi preserva la norma dello stato, il calcolo a $t = 0$ è dunque del tutto generale

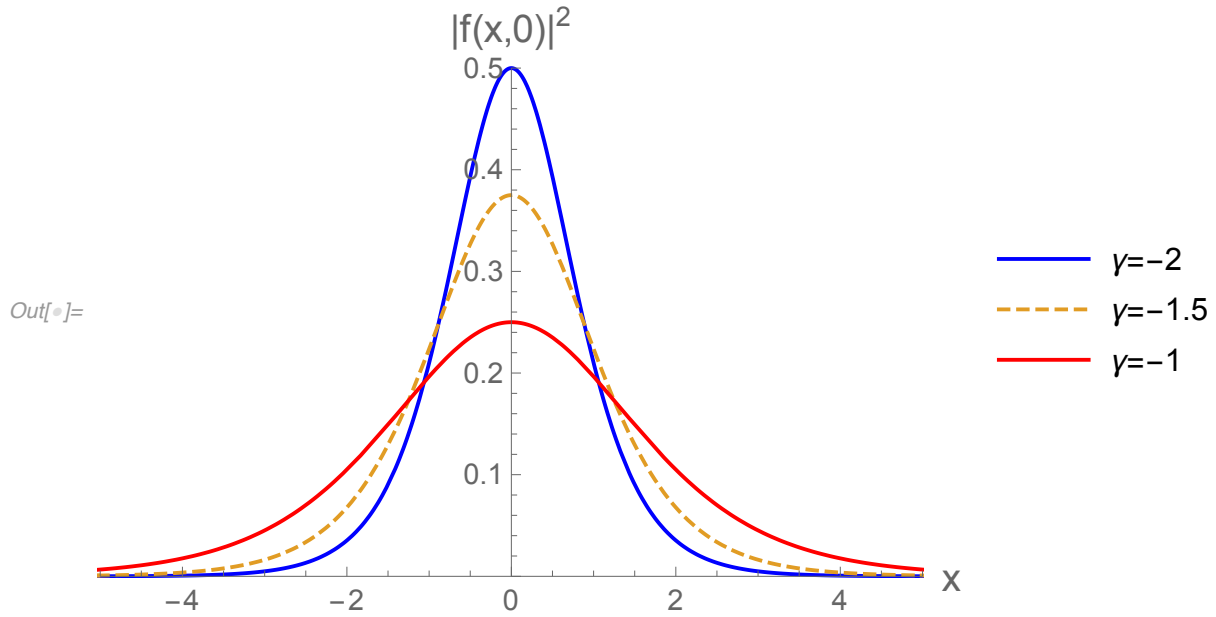


Figura 2.1: Densità di probabilità per $m = \hbar = 1$ a vari valori di energia

Caratteristiche del solitone Il significato fisico è un'onda di probabilità $|f(x,t)|^2$ che si propaga imperturbata a velocità v lungo l'asse x

$$|f(x,t)|^2 = \frac{m|\gamma|}{4\hbar^2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{m|\gamma|}{2\hbar^2}(x-vt)\right) \quad (2.39)$$

L'ampiezza di probabilità dipende dalla massa delle particelle e dall'energia di interazione γ , tanto essa è maggiore in valore assoluto tanto è più stretto e alto il solitone. La forma è influenzata anche dal potenziale armonico di confinamento, infatti una frequenza ω_{\perp} maggiore porta ad una deviazione σ minore e quindi ad una maggiore $|\gamma|$. Si noti inoltre, come differenza dal solitone idrodinamico ottenuto dalla KdV, che la forma del solitone non dipende dalla velocità.

Capitolo 3

L'equazione di Schrödinger non lineare in ottica

Quando i termini non lineari diventano non trascurabili in sistemi che ammettono come soluzione onde piane di piccola ampiezza si osservano dei fenomeni di auto-modulazione dell'onda che può portare al crearsi di pacchetti d'onda. Questi sono solitoni particolari detti di involuppo (*envelope solitons*) perché formati da un'onda portante modulata da un involuppo con caratteristiche di un solitone.

I fenomeni di ottica non lineare sono osservabili in quei materiali le cui proprietà ottiche dipendono dalla potenza del campo a cui sono sottoposti, tipicamente per raggiungere un'intensità sufficiente è necessario utilizzare dei laser, che sono ben descritti da onde quasi monocromatiche [10]. In questo capitolo ricaveremo la NLSE (*Non Linear Schrödinger Equation*) che descrive un'onda quasi monocromatica in un mezzo Kerr (ovvero il cui indice di rifrazione varia linearmente con il quadrato del campo elettrico) [11]. Calcoleremo infine la soluzione solitonica bright per quest'equazione.

Convenzioni sulla trasformata di Fourier In questo capitolo adotteremo la seguente convenzione sulla trasformata di Fourier.

$$\mathcal{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(t) e^{i\omega t} dt = \mathcal{F}[\mathbf{E}(t)](\omega) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{E}(\omega)](t) \quad (3.2)$$

I campi nel dominio del tempo saranno indicati con una lettera maiuscola mentre quelli nel dominio delle frequenze con una lettera corsiva maiuscola, a volte ometterò la dipendenza delle variabili.

3.1 Propagazione dell'onda in un mezzo non lineare

Lo studio parte dall'equazione di d'Alembert in un mezzo privo di cariche libere e di magnetizzazione.

$$-\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (3.3)$$

dove $c^2 = (1/\epsilon_0\mu_0)$ è la velocità della luce e $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ è il vettore di polarizzazione elettrica. Gli effetti non lineari si ottengono sviluppando il vettore di polarizzazione nelle potenze del campo elettrico, nel

dominio delle frequenze tale sviluppo è dato da un termine lineare noto dato dalla suscettività lineare (un tensore di rango 2) più un termine non lineare che verrà studiato successivamente.

$$\mathcal{P}_i(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi_{ij}^{(1)}(\omega) \mathcal{E}_j(\mathbf{r}, \omega) + \mathcal{P}_i^{(NL)}(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.4)$$

Applico l'antitrasformata di Fourier

$$P_i(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{ij}^{(1)}(\omega) \mathcal{E}_j(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega + P_i^{(NL)}(\mathbf{r}, t) \quad (3.5)$$

inserisco in (3.3) ottenendo per la componente i-esima

$$-\nabla^2 E_i(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_{ij}(\omega) \mathcal{E}_j(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = -\mu_0 \frac{\partial^2 P_i^{(NL)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (3.6)$$

dove ho introdotto il tensore di permittività elettrica relativa.

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + \chi_{ij}^{(1)}(\omega) \quad (3.7)$$

L'equazione (3.6) descrive il comportamento ondulatorio del campo elettrico in un materiale, per studiarne una soluzione applicabile ai laser dobbiamo introdurre il modello di un'onda quasi monocromatica.

3.1.1 Onda quasi monocromatica in un mezzo Kerr

In generale essa si può descrivere come un'onda piana di frequenza ω_σ limitata da una funzione che ne determina l'involuppo dipendente dal tempo e dallo spazio.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re[\mathbf{E}_{\omega_\sigma}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_\sigma t}] \quad (3.8)$$

Il pedice sulla funzione d'involuppo indica che la sua portata limite è attorno la frequenza di picco ω_σ , si assume inoltre che l'involuppo vari lentamente rispetto al periodo dell'onda (approssimazione SVEA *slowly varying envelope approximation*).

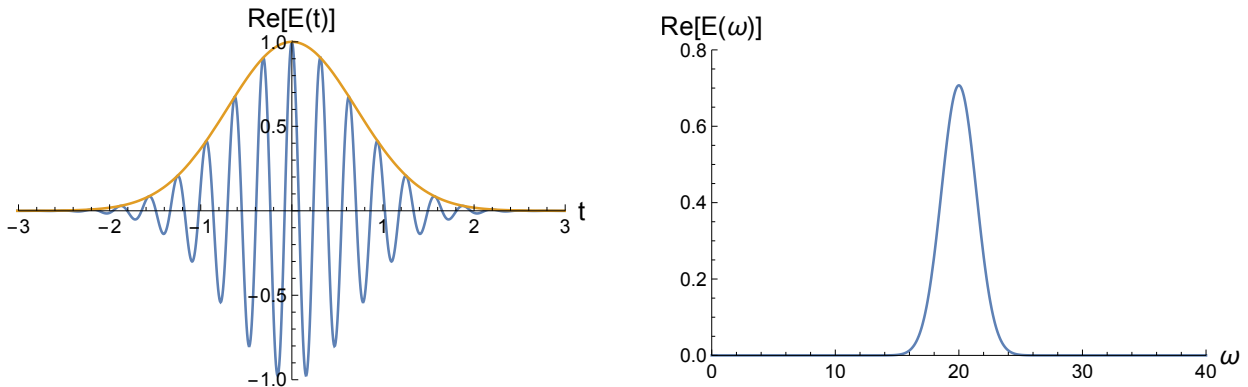


Figura 3.1: esempio di onda quasi monocromatica ad involuppo gaussiano e relativo spettro di Fourier piccato sulla frequenza 20 (unità arbitrarie)

Esprimo l'onda nel dominio delle frequenze

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[\mathbf{E}_{\omega\sigma}(\mathbf{r}, t)e^{-i\omega\sigma t}]e^{i\omega t} d\omega \quad (3.9)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(\mathbf{E}_{\omega\sigma}(\mathbf{r}, t)e^{-i\omega\sigma t} + \mathbf{E}_{\omega\sigma}^*(\mathbf{r}, t)e^{+i\omega\sigma t})e^{i\omega t} d\omega \quad (3.10)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_{\omega\sigma}(\mathbf{r}, t)e^{-i(\omega\sigma - \omega)t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_{\omega\sigma}^*(\mathbf{r}, t)e^{i(\omega\sigma + \omega)t} d\omega \right) \quad (3.11)$$

$$= \frac{1}{2} [\mathbf{E}_{\omega\sigma}(\mathbf{r}, \omega - \omega\sigma) + \mathbf{E}_{\omega\sigma}^*(\mathbf{r}, -\omega - \omega\sigma)] \quad (3.12)$$

affinché il membro di destra sia reale deve essere imposto il seguente vincolo.

$$\mathbf{E}_{-\omega\sigma} = \mathbf{E}_{\omega\sigma}^* \quad (3.13)$$

Il vettore di polarizzazione, essendo indotto dal campo elettrico, segue anch'esso la relazione (3.12). La trasformazione nel dominio delle frequenze mi permette di esprimere i campi interamente nei termini d'involuppo, eliminando così i fattori ondulatori esponenziali.

Prima di calcolare l'integrale che compare in (3.6) faccio l'approssimazione di considerare il mezzo isotropo nel regime ottico lineare, in questo modo la permittività elettrica relativa diventa una matrice diagonale

$$\epsilon_{ij}(\omega) = \epsilon(\omega)\delta_{ij} = n_0^2(\omega)\delta_{ij} \quad (3.14)$$

con n_0 indico il contributo al primo ordine dell'indice di rifrazione del mezzo. A questo punto calcolo l'integrale

$$I \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_{ij}(\omega)\mathcal{E}_j(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.15)$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2 n_0^2(\omega)}{c^2} \frac{1}{2} [\mathbf{E}_{\omega\sigma}(\mathbf{r}, \omega - \omega\sigma) + \mathbf{E}_{\omega\sigma}^*(\mathbf{r}, -\omega - \omega\sigma)] e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.16)$$

$$= - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2(\omega)\mathbf{E}_{\omega\sigma}(\mathbf{r}, \omega - \omega\sigma)e^{-i\omega t} d\omega + c.c. \quad \text{c.c. sta per complesso coniugato} \quad (3.17)$$

ho introdotto il numero d'onda $k = \omega n_0/c$, inoltre dalla seconda riga sono passato alla notazione vettoriale grazie all'isotropia del problema. Le frequenze dell'onda si concentrano attorno a quella di picco $\omega\sigma$, è dunque una buona approssimazione sviluppare in serie di Taylor attorno $\omega\sigma$ il numero d'onda.

$$k^2(\omega) = k_\sigma^2 + 2k_\sigma \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega\sigma} (\omega - \omega\sigma) + k_\sigma \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega\sigma} (\omega - \omega\sigma)^2 + O((\omega - \omega\sigma)^2) \quad (3.18)$$

dove $k_\sigma = k(\omega\sigma)$. Introduco lo sviluppo nell'integrale e applico la sostituzione $\omega' = \omega - \omega\sigma$, utilizzerò la seguente proprietà¹ per trasformare le frequenze in derivate temporali.

$$I \simeq - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(k_\sigma^2 + 2k_\sigma \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega\sigma} \omega' + k_\sigma \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega\sigma} \omega'^2 \right) \mathbf{E}_{\omega\sigma}(\mathbf{r}, \omega') e^{-i\omega' t} e^{-i\omega\sigma t} d\omega' + c.c. \quad (3.19)$$

$$= - \frac{1}{2} e^{-i\omega\sigma t} \left(k_\sigma^2 + i2k_\sigma \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega\sigma} \frac{\partial}{\partial t} - k_\sigma \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega\sigma} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}_{\omega\sigma}(\mathbf{r}, t) + c.c. \quad (3.20)$$

¹ $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^n f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = i^n \frac{d^n f(t)}{dt^n}$

Per finire considero i rimanenti due termini dell'equazione (3.6)

$$-\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2} \nabla^2 \mathbf{E}_{\omega_\sigma}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_\sigma t} + c.c \quad (3.21)$$

$$-\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{1}{2} \mathbf{P}_{\omega_\sigma}^{(NL)}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_\sigma t} + c.c \simeq \frac{\mu_0 \omega_\sigma^2}{2} \mathbf{P}_{\omega_\sigma}^{(NL)}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_\sigma t} + c.c \quad (3.22)$$

Nell'ultima uguaglianza non ho considerato la derivata temporale dell'involuppo poiché siamo in approssimazione SVEA. Unendo i tre termini ottengo l'equazione d'onda dipendente dal tempo per l'involuppo in un mezzo.

$$-\nabla^2 \mathbf{E}_{\omega_\sigma}(\mathbf{r}, t) - \left(k_\sigma^2 + i2k_\sigma \frac{dk}{d\omega} \Big|_{\omega_\sigma} \frac{\partial}{\partial t} - k_\sigma \frac{d^2 k}{d\omega^2} \Big|_{\omega_\sigma} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}_{\omega_\sigma}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \omega_\sigma^2 \mathbf{P}_{\omega_\sigma}^{(NL)}(\mathbf{r}, t) \quad (3.23)$$

Ulteriori approssimazioni

- **Onda piana.** In questa approssimazione l'involuppo risulta essere parallelo al piano xy (i.e. $\mathbf{E}_{\omega_\sigma}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\omega_\sigma}(z, t) \perp \mathbf{e}_z$), in questo modo è possibile semplificare il laplaciano.

$$-\nabla^2 \mathbf{E}_{\omega_\sigma}(z, t) = -\frac{\partial^2 \mathbf{E}_{\omega_\sigma}(z, t)}{\partial z^2} \quad (3.24)$$

- **Propagazione unidimensionale.** Introduco con il vettore d'onda $\mathbf{k}_{\omega_\sigma} \parallel \mathbf{e}_z$ la direzione di propagazione.

$$\mathbf{E}_{\omega_\sigma}(z, t) = \mathbf{A}_{\omega_\sigma}(z, t) e^{\pm ik_{\omega_\sigma} z} \quad (3.25)$$

Spezzo così l'involuppo in una parte sinusoidale che determina l'evoluzione spaziale periodica dell'involuppo "statico"² $\mathbf{A}_{\omega_\sigma}(z, t)$ mentre il \pm indica le due diverse direzioni di propagazione dell'onda lungo l'asse z . Il termine (3.24) a questo punto diventa

$$-\frac{\partial^2 \mathbf{E}_{\omega_\sigma}(z, t)}{\partial z^2} = -\left(\frac{\partial^2 \mathbf{A}_{\omega_\sigma}}{\partial z^2} \pm 2ik_\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_{\omega_\sigma}}{\partial z} - k_\sigma^2 \mathbf{A}_{\omega_\sigma} \right) e^{\pm ik_\sigma z} \quad (3.26)$$

- **SVEA slowly varying envelope approximation.** Gli involuppi variano lentamente nel tempo e nello spazio rispetto al periodo e alla lunghezza d'onda caratteristici, in questo modo posso ridurre l'ordine dell'equazione differenziale trascurando le derivate d'ordine maggiore al primo. In particolare

$$\left| \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{\omega_\sigma}}{\partial z^2} \right| \ll \left| k_\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_{\omega_\sigma}}{\partial z} \right| \quad (3.27)$$

elimino quindi il termine di derivata seconda da (3.26)

- **Polarizzazione lineare ed effetto Kerr.** Considerando una polarizzazione dell'onda lineare lungo x il termine non lineare al terzo ordine del vettore di polarizzazione dovuto all'effetto Kerr si semplifica nel seguente termine (vedi Appendice)

$$P_{\omega_\sigma}^{(3)}(z, t) = \epsilon_0 \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |A_{\omega_\sigma}|^2 A_{\omega_\sigma}(z, t) \quad (3.28)$$

²Utilizzo il termine statico perché questo involuppo determina la forma del pacchetto d'onda e non la sua propagazione spaziale

L'equazione che si ottiene al terzo ordine non lineare, aggiungendo a (3.23) le precedenti approssimazioni, è una NLSE non normalizzata dipendente dal tempo che descrive l'evoluzione dell'involuppo di un'onda quasi monocromatica di frequenza di picco ω che si propaga lungo z positivo in un mezzo Kerr.

$$\boxed{\left(i\frac{\partial}{\partial z} + i\frac{1}{v_g}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\beta}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A_\omega(z,t) = -\frac{\omega n_2}{c}|A_\omega(z,t)|^2 A_\omega(z,t)} \quad (3.29)$$

dove ho introdotto il parametro di velocità di gruppo v_g , il contributo al secondo ordine dell'indice di rifrazione n_2 e β come sotto definito.

$$v_g = \left(\frac{dk}{d\omega}\Big|_{\omega_\sigma}\right)^{-1} \quad \beta = \frac{d^2k}{d\omega^2}\Big|_{\omega_\sigma} \quad (3.30)$$

3.2 Solitoni in ottica non lineare

Studieremo ora l'equazione (3.29), vedremo che ammette una soluzione solitonica e che tramite un cambio di coordinate da essa è possibile ricavare l'effettiva equazione di Schrödinger non lineare.

I primi due termini rappresentano l'evoluzione lineare non dispersiva di un'onda di velocità di gruppo v_g .

Effetto dispersivo Il termine che genera dispersione è quello relativo alla derivata seconda temporale, il parametro β ne quantifica l'intensità. Si può ricavare una relazione tra la dispersione della velocità di gruppo e β

$$\frac{dv_g}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right)^{-1} = -\left(\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right)^{-2} \frac{d^2k(\omega)}{d\omega^2} = -v_g^2 \beta \quad (3.31)$$

- **Dispersione Normale** si ottiene per $\beta > 0$ ovvero se la dispersione della velocità di gruppo è negativa. In questo caso le componenti a bassa frequenza (rosse) viaggiano più veloci rispetto a quelle ad alta frequenza (blu) e questo porta ad avere una concentrazione maggiore di onde blu sulla coda del fascio e rosse sulla punta.
- **Dispersione Anomala** si ottiene per $\beta < 0$ e in questo caso si ottiene l'effetto opposto.

Effetto non lineare È dovuto al membro destro dell'equazione ed è quantificato da n_2 . In base all'indice di rifrazione efficace $n_{eff}(t) = n_0 + n_2 I(t)$ posso definire un numero d'onda efficace

$$k_{eff} = \frac{\omega}{c}(n_0 + n_2 I(t)) \quad (3.32)$$

quindi posso calcolare la frequenza di oscillazione locale nel mezzo, derivando la fase ($kz - \omega t$) dell'onda, ad un'arbitrario z (e.g. $z = 1$).

$$\omega_{loc} = -\frac{d}{dt}(k_{eff}(\omega, I(t)) - \omega t) = \omega - \frac{\omega n_2}{c} \frac{dI(t)}{dt} \quad (3.33)$$

Se considero ad esempio un impulso gaussiano ottengo il comportamento, mostrato in figura 3.2, per la frequenza locale (grafico in unità arbitrarie).

Risulta quindi che per $n_2 > 0$ ottengo un accumulo di componente blu nella coda del fascio mentre uno di componente rossa in testa, per $n_2 < 0$ ottengo l'effetto opposto.

Il solitone emerge da una compensazione tra gli effetti dispersivi e non lineari, si forma ovvero in presenza di dispersione anomala (i.e $\beta < 0$) e $n_2 > 0$.

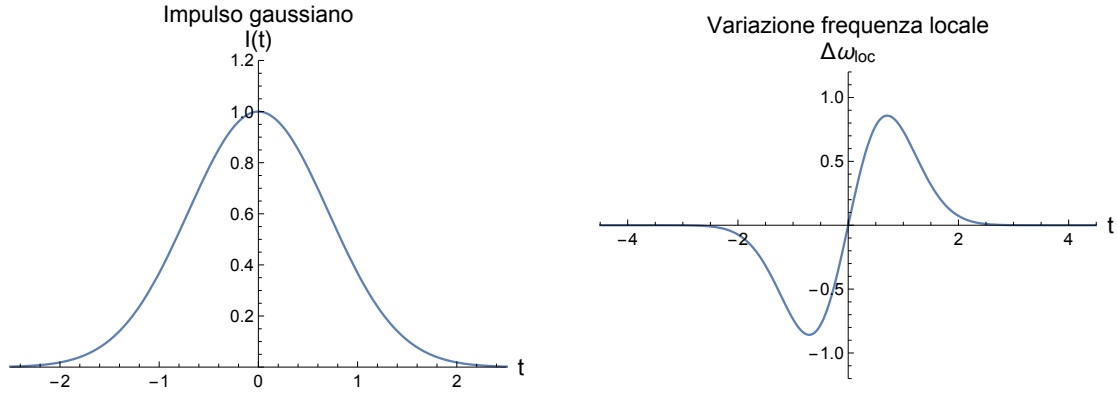


Figura 3.2: Variazione della frequenza locale $\Delta\omega_{loc} = \omega_{loc} - \omega$ in risposta a un impulso gaussiano in un mezzo Kerr con $n_2 > 0$

L'equazione di Schrödinger in forma normale Si ottiene con un apposito cambio di coordinate

$$u(\zeta, s) = \tau \sqrt{\frac{n_2 \omega}{c|\beta|}} A_\omega, \quad s = \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{z}{v_g} \right), \quad \zeta = |\beta| \frac{z}{\tau^2} \quad (3.34)$$

la forma normale dell'equazione di Schrödinger con l'aggiunta del termine non lineare (per $\beta < 0$ e $n_2 > 0$)

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) u(\zeta, s) + |u(\zeta, s)|^2 u(\zeta, s) = 0 \quad (3.35)$$

Tale equazione è di importanza fondamentale per la teoria dei solitoni perché, come la KdV, è un sistema non lineare completamente integrabile e ammette come soluzione un solitone di tipo bright.

$$u(\zeta, s) = \text{sech}(s) e^{i\zeta/2} \quad (3.36)$$

3.2.1 Soluzione solitonica di tipo bright

Con una procedura del tutto analoga a quella utilizzata nell'equazione di Gross-Pitaevskii è possibile ricavare una soluzione solitonica a partire da (3.29).

Considero una soluzione di tipo solitone bright

$$A_\omega(z, t) = \phi(t - z/v_g) e^{i\delta(z)} = \phi(\xi) e^{ik^{(3)}z} \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \phi^{(n)}(\xi) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \phi(\xi) > 0 \quad (3.37)$$

se l'onda nel mezzo si propaga senza dispersione allora l'involuppo non deve aggiungere frequenze alla fondamentale ω , per questo ho considerato nella soluzione solamente un fattore di fase spaziale $k^{(3)}$ che indica una correzione dovuta ad un effetto non lineare del terzo ordine.

Aggiungendo (3.37) in (3.29) ottengo la seguente equazione

$$-k^{(3)}\phi + \frac{|\beta|}{2}\phi'' + \frac{\omega n_2}{c}\phi^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi'' = -\frac{dE(\xi)}{d\xi} \quad (3.38)$$

l'implicazione è valida se considero il seguente potenziale

$$E(\xi) = -\frac{1}{|\beta|} \left(k^{(3)}\phi^2 - \frac{\omega n_2}{2c}\phi^4 \right) \quad (3.39)$$

all'equazione (3.38) è associato un integrale primo

$$K(\phi, \phi') = \frac{1}{2}(\phi')^2 + E(\phi) \quad (3.40)$$

aggiungendo le condizioni al contorno trovo che $K(\phi, \phi') \equiv 0$. Come condizione iniziale scelgo $\phi'(0) = 0$ (origine sul massimo) a cui è associata dalla relazione $E(\phi(0)) = 0$ la seguente condizione iniziale

$$\phi(0) = \sqrt{\frac{2ck^{(3)}}{\omega n_2}} \equiv \sqrt{\alpha} \quad (3.41)$$

risolvo a questo punto il problema di Cauchy per (3.40) scegliendo l'equazione a derivata negativa $\phi' = -\sqrt{-2E(\phi)}$.

$$\xi = - \int_{\phi(0)}^{\phi(\xi)} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{1}{\beta} \left(k^{(3)} \phi^2 - \frac{\omega n_2}{2c} \phi^4 \right)}} = - \sqrt{\frac{c|\beta|}{\omega n_2}} \int_{\sqrt{\alpha}}^{\phi(\xi)} \frac{d\phi}{\phi \sqrt{\alpha - \phi^2}} \quad (3.42)$$

Tale integrale è già stato risolto nella sezione (2.2). La soluzione che si ottiene è la seguente.

$$\phi\left(t - \frac{z}{v_g}\right) = \sqrt{\alpha} \operatorname{sech}\left[\sqrt{\frac{\omega n_2 \alpha}{c|\beta|}} \left(t - \frac{z}{v_g}\right)\right] \quad (3.43)$$

Definisco il tempo caratteristico $\tau = \sqrt{c|\beta|/\omega n_2 \alpha}$, solitamente lo si prende come la durata dell'impulso [11]. Aggiungendo la fase ottengo la seguente soluzione per l'involuppo

$$A_\omega(z, t) = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{c|\beta|}{n_2 \omega}} \operatorname{sech}\left[\frac{1}{\tau} \left(t - \frac{z}{v_g}\right)\right] e^{i \frac{|\beta|}{2\tau^2} z} \quad (3.44)$$

la forma analitica del solitone che si propaga in un mezzo Kerr è quindi la seguente

$$E(z, t) = A_\omega(z, t) e^{i(kz - \omega t)} \quad (3.45)$$

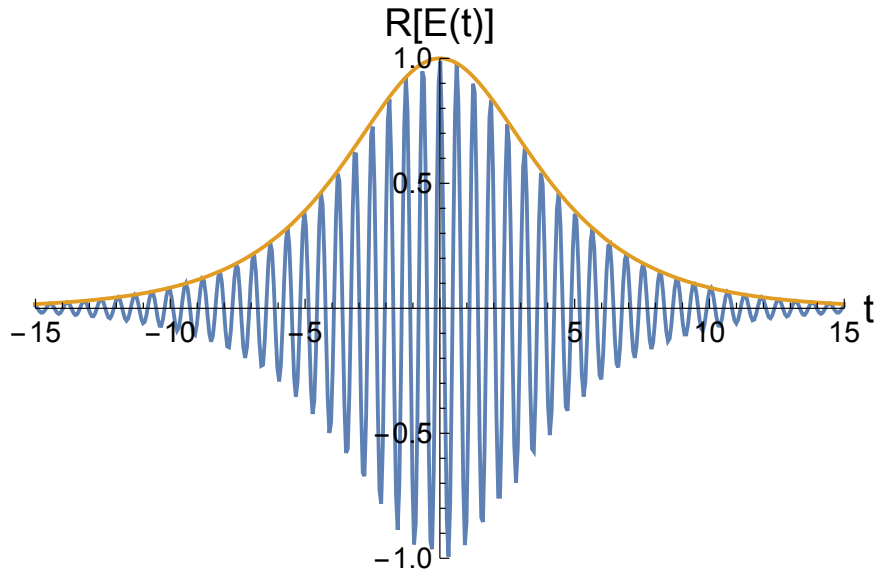


Figura 3.3: Solitone temporale ottico di frequenza di picco 10 (in unità arbitrarie) con tempo caratteristico dell'impulso cinque volte maggiore del periodo dell'onda portante

Conclusioni

La soluzione solitonica trovata per l'equazione KdV descrive in modo quantitativo l'osservazione di Scott Russel, ovvero onde di grande stabilità "supersoniche" (che si propagano ad una velocità maggiore di quella dovuta unicamente al moto lineare) e con una velocità proporzionale all'altezza. Il modello descrive un'ampia gamma di fenomeni osservabili facilmente grazie alla condizione di equilibrio stabile del solitone e quindi anche in presenza di fondali ruvidi e discontinui, purché siano relativamente bassi. Sul Rio delle Amazzoni, durante i periodi di luna piena, si generano onde alte 5 m che si propagano ad una velocità di 30 m/s a profilo inalterato per alcune centinaia di chilometri. Gli Tsunami sono descritti efficacemente dalla KdV, si formano negli oceani a profondità che possono raggiungere i 4000 m , le condizioni di validità della KdV sono soddisfatte dall'estensione spaziale dell'onda che può raggiungere i 100 km [1].

Le prime osservazioni sperimentali di solitoni bright di condensati di Bose Einstein, descritti dall'equazione di Gross Pitaevskii, furono descritte nel 2002 in due diversi esperimenti [12] [13] su gas ultrafreddi di Litio-7 (bosoni composti) intrappolati.

I solitoni in ottica non lineare furono osservati per la prima volta [1] nel 1980, ma la conferma sperimentale principale che la NLSE rappresenta una buona descrizione del fenomeno avvenne con l'osservazione di soluzioni multisolitoniche [14] in accordo con le simulazioni. Un crescente interesse si è così formato sulla possibilità di utilizzare la stabilità di questi solitoni ottici per una nuova generazione di fibre ottiche [10].

Appendice A

Polarizzazione in un mezzo Kerr

Il vettore di polarizzazione può essere espanso nelle potenze del campo elettrico

$$P_i = \epsilon_0(\chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots) \quad (\text{A.1})$$

all'aumentare dell'ordine aumentano anche le frequenze fondamentali, ovvero $\chi^{(n)}(-\omega_\sigma; \omega_1, \dots, \omega_n)$ con $\omega_\sigma = \omega_1 + \dots + \omega_n$. In un cristallo centrosimmetrico le suscettibilità di ordine pari scompaiono, infatti in un tale cristallo esiste una simmetria di inversione spaziale rispetto ad un punto fissato che, preso come centro della base, mi permette di scrivere la trasformazione di simmetria come $R_{ij} = -\delta_{ij}$. Le caratteristiche fisiche, come la suscettibilità, si dovranno preservare rispetto a tale trasformazione (*Principio di Von Neumann*).

$$\chi'_{ij}{}^{(1)} = (-\delta_{i\alpha})(-\delta_{j\beta})\chi_{\alpha\beta}^{(1)} = \chi_{ij}^{(1)} \quad (\text{A.2})$$

$$\chi'_{ijk}{}^{(2)} = (-\delta_{i\alpha})(-\delta_{j\beta})(-\delta_{k\delta})\chi_{\alpha\beta\delta}^{(2)} = -\chi_{ijk}^{(2)} \Rightarrow \chi_{ijk}^{(2)} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\chi'_{ijkl}{}^{(3)} = (-\delta_{i\alpha})(-\delta_{j\beta})(-\delta_{k\delta})(-\delta_{l\gamma})\chi_{\alpha\beta\delta\gamma}^{(3)} = \chi_{ijkl}^{(3)} \quad (\text{A.4})$$

L'effetto Kerr è dovuto ad una non linearità del terzo ordine quindi per osservarlo è necessario utilizzare cristalli centrosimmetrici¹. Per studiare le frequenze che si ottengono al terzo ordine di non linearità considero un'onda di frequenza di picco ω_σ (i calcoli verranno effettuati in notazione scalare)

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} E_{\omega_\sigma}(z, t) e^{-i\omega_\sigma t} + c.c \quad \text{onda piana quasi monocromatica}^2 \quad (\text{A.5})$$

i termini non lineari alla polarizzazione si ottengono elevando al cubo tale onda.

$$\frac{1}{8} \left(E_{\omega_\sigma} e^{-3i\omega_\sigma t} \right)^3 = \frac{1}{8} \left(E_{\omega_\sigma}^3 e^{-3i\omega_\sigma t} + 3E_{\omega_\sigma} |E_{\omega_\sigma}|^2 e^{-i\omega_\sigma t} \right) \quad (\text{A.6})$$

Al terzo ordine non lineare il vettore di polarizzazione può oscillare a due frequenze distinte, una è quella fondamentale mentre l'altra è la terza armonica. Ottenere l'oscillazione di terza armonica è complicato perché è necessario che siano soddisfatte delle condizioni aggiuntive dette di *phase matching*, spesso non la si considera. L'effetto Kerr è dovuto infatti al termine non lineare di frequenza fondamentale.

Consideriamo per semplicità un'onda polarizzata lungo l'asse x, in questo caso l'unico termine al terzo

¹Un effetto simile che si ottiene in materiali non centrosimmetrici è l'effetto Pockels che vede l'indice di rifrazione proporzionale lineare al campo elettrico

²Questa espressione si ottiene applicando l'antitrasformata di Fourier a (3.12)

ordine a sopravvivere in (A.1) è $\epsilon_0 \chi_{xxxx}^{(3)} E_x |E_x|^2$ quindi ottengo il seguente termine non lineare alla polarizzazione

$$P^{(3)}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \frac{3}{8} \chi_{xxxx}^{(3)} E_{\omega_\sigma} |E_{\omega_\sigma}|^2 e^{-i\omega_\sigma t} + c.c \quad (\text{A.7})$$

$$= \epsilon_0 \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |E_{\omega_\sigma}|^2 E(\mathbf{r}, t) \quad \text{aggiunto (A.5)} \quad (\text{A.8})$$

a questo punto posso trasformare l'equazione precedente nell'equivalente sugli involucri e aggiungendo inoltre la notazione introdotta in (3.25) per un'onda che si propaga lungo l'asse z ottengo

$$P_{\omega_\sigma}^{(3)}(z, t) = \epsilon_0 \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |A_{\omega_\sigma}(z, t)|^2 A_{\omega_\sigma}(z, t) e^{\pm i k_\sigma z} \quad (\text{A.9})$$

che aggiunto al termine (3.22) mi porta al termine non lineare desiderato

$$-\frac{3\mu_0\epsilon_0\omega_\sigma^2}{8k} \chi_{xxxx}^{(3)} |A_{\omega_\sigma}|^2 A_{\omega_\sigma} e^{\mp i k_\sigma z} e^{\pm i k_\sigma z} = -\frac{3\omega_\sigma}{8cn_0} \chi_{xxxx}^{(3)} |A_{\omega_\sigma}|^2 A_{\omega_\sigma} = -\frac{\omega_\sigma n_2}{c} |A_{\omega_\sigma}|^2 A_{\omega_\sigma} \quad (\text{A.10})$$

dove è stato introdotto il contributo al terzo ordine all'indice di rifrazione definendolo come $n_2 := (3/8n_0)\chi_{xxxx}^{(3)}$.

Indice di rifrazione al terzo ordine Per poter spiegare la definizione precedente e sufficiente aggiungere il termine (A.8) allo sviluppo in potenze del campo elettrico della polarizzazione, al terzo ordine ottengo

$$P(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 (\chi^{(1)} + \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |E_{\omega_\sigma}|^2) E(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \chi_{eff} E(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.11})$$

Ad una suscettibilità efficace corrisponde un indice di rifrazione

$$n_{eff}^2 = 1 + \chi^{(1)} + \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |E_{\omega_\sigma}|^2 \quad (\text{A.12})$$

$$= n_0^2 \left(1 + \frac{3}{4n_0^2} \chi_{xxxx}^{(3)} |E_{\omega_\sigma}|^2 \right) \quad (\text{A.13})$$

↓

$$n_{eff} = n_0 \left(1 + \frac{3}{4n_0^2} \chi_{xxxx}^{(3)} |E_{\omega_\sigma}|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{A.14})$$

$$\simeq n_0 + \underbrace{\frac{3}{8n_0} \chi_{xxxx}^{(3)}}_{n_2} |E_{\omega_\sigma}|^2 \quad (\text{A.15})$$

l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che la suscettibilità al terzo ordine è molto piccola in generale. In questo modo risulta chiaro come l'intensità di una fascio luminoso $I \propto |E_{\omega_\sigma}|^2$ influisca sull'indice di rifrazione, tale variazione avviene sia nel tempo che nello spazio.

Bibliografia

- [1] Thierry Dauxois e Michel Peyrard. *Physics of solitons*. Cambridge University Press, 2006.
- [2] A. Fasano. *Equazioni differenziali della fisica matematica*.
- [3] V. Hakim. «asymptotic techniques in nonlinear problems: some illustrative examples». In: P. Manneville C. Godrèche. *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities*. Cambridge University Press, 1998.
- [4] Anna Karczewska e Piotr Rozmej. «Shallow water waves—extended Korteweg-de Vries equations». In: *Oficina Wydawnicza Uniwersytetu Zielonogórskiego, Zielona Góra* (2018), pp. 13–22.
- [5] Mike H Anderson et al. «Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor». In: *science* (1995), pp. 198–201.
- [6] M. Ferraretto (relatore L. Salasnich). «Termodinamica di bosoni confinati e interagenti». Tesi di Laurea triennale. Università degli studi di Padova, a.a. 2015-2016.
- [7] L. Salasnich. *Quantum Physics of Light and Matter*. Spinger International, 2014, pp. 123–131.
- [8] Luca Salasnich. «Bright solitons in ultracold atoms». In: *Optical and Quantum Electronics* 49.12 (2017), p. 409.
- [9] M. Calzavara (relatore L. Salasnich). «Solitoni nell’equazione di Gross-Pitaevskii: teoria e confronto con gli esperimenti». Tesi di Laurea triennale. Università degli studi di Padova, a.a. 2016-2017.
- [10] Mark J Ablowitz, Gino Biondini e Lev A Ostrovsky. «Optical solitons: perspectives and applications». In: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 10.3 (2000), pp. 471–474.
- [11] Fredrik Jonsson. *Lecture notes on nonlinear optics*. 2003.
- [12] L Khaykovich et al. «Formation of a matter-wave bright soliton». In: *Science* 296.5571 (2002), pp. 1290–1293.
- [13] Kevin E Strecker et al. «Formation and propagation of matter-wave soliton trains». In: *Nature* 417.6885 (2002), p. 150.
- [14] Roger H Stolen, Linn F Mollenauer e WJ Tomlinson. «Observation of pulse restoration at the soliton period in optical fibers». In: *Optics letters* 8.3 (1983), pp. 186–188.