



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA



Dipartimento di Ingegneria Industriale  
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria dell'energia Elettrica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE IN  
INGEGNERIA DELL'ENERGIA ELETTRICA

**CALCOLO DELLE INDUTTANZE DI AVVOLGIMENTI IN ARIA DI  
FORMA QUALSIASI MEDIANTE IL METODO P.E.E.C.**

RELATORE: Chia.mo Prof. Mauro Andriollo

LAUREANDO: Nicola Riccardo

ANNO ACCADEMICO 2018-19



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

**Dipartimento di Ingegneria Industriale DII**

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria dell'Energia Elettrica

**Calcolo delle induttanze di avvolgimenti in aria di forma qualsiasi mediante  
il metodo P.E.E.C.**

Relatore:

Chiar.mo Prof. Mauro Andriollo

Nicola Riccardo

Matricola 1132914

Anno Accademico 2018 - 2019



# INDICE

<b>INTRODUZIONE.....</b>	<b>3</b>
<b>1 ELEMENTI DI TEORIA .....</b>	<b>5</b>
1.1 INTRODUZIONE.....	5
1.2 CENNI FENOMENI MAGNETICI [1] .....	5
1.3 PARAMETRI INDUTTORI .....	9
1.3.1 Induttore toroidale.....	10
1.3.2 Induttore solenooidale .....	11
1.3.3. Metodi per il calcolo dell'induttanza .....	12
1.3.4 Mutue induttanze [2] [1] .....	14
1.4 INDUTTANZE E INDUTTANZE PARZIALI [2].....	16
<b>2. FORMULAZIONE DEL METODO PEEC.....</b>	<b>19</b>
2.1 INTRODUZIONE.....	19
2.2 PARTIAL ELEMENT EQUIVALENT CIRCUIT (PEEC) [4] .....	19
2.2.1 Introduzione.....	19
2.3.1 <i>Semplificazione della geometria del Metodo PEEC.....</i>	23
2.3.2 Autoinduttanza parziale [5] .....	24
2.3.3 Mutua induttanza parziale [3] [2].....	26
<b>3. DESCRIZIONE ALGORITMO.....</b>	<b>31</b>
3.1 INTRODUZIONE.....	31
3.2. ILLUSTRAZIONE DEL METODO .....	32
<b>4. ESEMPI APPLICATIVI .....</b>	<b>47</b>
4.1 INTRODUZIONE.....	47
4.2 Autoinduttanza di un avvolgimento : Esempi numerici. [14] [3] [15].....	47
4.2.1 Calcolo Induttanza avvolgimento circolare a sezione rettangolare [16] .....	48
4.2.2 Calcolo Induttanza avvolgimento circolare a sezione circolare [15] .....	50
4.2.3 Calcolo Induttanza avvolgimento rettangolare con sezione rettangolare [15].....	52

4.24	Calcolo Induttanza di un avvolgimento solenoidale con sezione circolare [15].	55
<b>4.3</b>	<b>Mutua induttanza tra due avvolgimenti : Esempi numerici [14] [18]</b>	<b>57</b>
4.31	Calcolo Mutua induttanza avvolgimento circolare con sezione rettangolare.	57
<b>4.4</b>	<b>AVVOLGIMENTO CON GEOMETRIA A SPIRALE - RICARICA WIRELESS EV [22]</b>	<b>62</b>
4.4.1	Induttanza : geometria spiroidale a sezione circolare [23] [24].	65
<b>CONCLUSIONI</b>		<b>70</b>
<b>APPENDICE A</b>		<b>73</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>		<b>103</b>

# Introduzione

Lo scopo del progetto è sviluppare un codice numerico, in ambiente MatLab, in grado di calcolare le induttanze in aria di qualsiasi forma. Il codice implementato è stato utilizzato nel confronto con risultati numerici di alcune forme note, e i risultati ottenuti sono stati soddisfacenti. Per la definizione del codice è stata discretizzata, con l'utilizzo del metodo PEEC (*partial element equivalent circuit*), la geometria di un generico avvolgimento in parallelepipedo, al fine del calcolo delle mutue induttanze, ciascuno di tali parallelepipedo è stato a sua volta rappresentato da un gruppo di tratti rettilinei filiformi disposti in un reticolo regolare. Per ogni elemento (parallelepipedo o tratto rettilineo) è stato possibile valutare rispettivamente l'autoinduttanza parziale (per i parallelepipedo) o la mutua induttanza parziale (fra tratti rettilinei filiformi). Combinando tali risultati è stato possibile calcolare l'autoinduttanza o la mutua induttanza complessiva degli avvolgimenti.

La tesi è composta da quattro capitoli. Nel primo, si introducono gli elementi di teoria per il calcolo al campo magnetico e dell'auto e mutua induttanza in geometrie note. Nel secondo, viene introdotto il metodo PEEC, definiti gli elementi parziali e spiegata la semplificazione attuata rispetto al PEEC per definire la geometria di un generico avvolgimento. Nel terzo capitolo l'algoritmo viene descritto nel dettaglio e validato con i risultati ottenuti con altri metodi. Nel quarto e ultimo capitolo, la procedura di calcolo viene applicata ad una serie di configurazioni analizzando tempo di calcolo, convergenza ed errore rispetto ai valori più accurati ottenuti con altri metodi.



# Capitolo 1

## Elementi di teoria

### 1.1 INTRODUZIONE

Questo capitolo ha lo scopo di introdurre gli elementi di teoria alla base del progetto di tesi. Nella prima parte saranno sviluppati i concetti d'induzione magnetica, flusso d'induzione, potenziale vettore magnetico; la seconda parte tratterà nello specifico il concetto dell'auto e mutua induttanza, con alcuni esempi applicati, ed infine saranno introdotti i concetti di auto e mutua induttanza parziale.

### 1.2 CENNI FENOMENI MAGNETICI [1]

Per lo sviluppo del progetto di tesi la teoria che viene sfruttata si rifà all'espressione dell'azione elementare :

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.1)$$

valida per un conduttore filiforme, dove  $d\mathbf{l}$  è il vettore che definisce l'elemento infinitesimo di conduttore percorso dalla corrente  $\mathbf{I}$ , mentre  $\mathbf{r}$  è il vettore che esprime la distanza di tale elemento dal punto P in cui viene calcolato il campo.

La sua integrazione, nel caso di conduttore rettilineo, porta alla formula di **BIOT- SAVART** :

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu}{2\pi r} I \mathbf{u}_\varphi \quad (1.2)$$

dove si tiene conto che  $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\varphi$ ,  $\mathbf{u}_\varphi$  è il versore azimutale associato dalla regola della vite destrorsa al versore  $\mathbf{u}_z$  che rappresenta il riferimento di I.

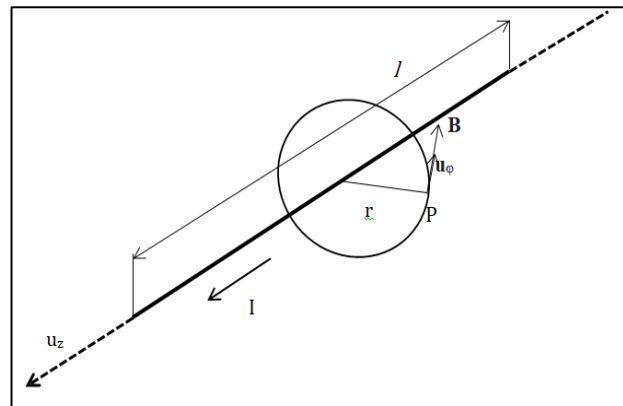


Figure 1.1 campo magnetico conduttore filiforme.



In generale si ha che [2]:

$$\mathbf{B} = \int_v \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{a}_R}{R^2} dv \quad (1.3)$$

dove  $\mathbf{J}$  è il vettore di densità di corrente, la cui unità di misura è  $[A/m^2]$ , e  $v$  è il volume che la contiene. Un pezzetto di questo vettore di densità di corrente contiene  $\mathbf{J}dv$ , e la distanza da questo (sorgente del campo  $\mathbf{B}$ ) al punto in cui stiamo calcolando il campo magnetico è  $R$ .  $\mathbf{a}_R$  è il versore corrispondente al vettore che va dall'elemento percorso dalla densità di corrente  $\mathbf{J}$  al punto in cui si va a calcolare l'induzione. Il campo  $\mathbf{B}$  risulta perpendicolare al piano contenente  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{a}_R$  secondo la regola della mano destra. Considerando un tratto di queste correnti come un piccolo cilindro di lunghezza  $dl$  e sezione trasversale  $ds$  con densità di corrente distribuita uniformemente su tutta la sezione, si ha che  $\mathbf{J}ds = \mathbf{I}$ , quindi si ottiene  $\mathbf{J}dv = \mathbf{J}dsdl = \mathbf{I}dl$ .

Una delle relazioni fondamentali che esprime il campo d'induzione magnetica è la sua relazione con la permeabilità magnetica del mezzo in cui esso è posto. Si definisce quindi il **campo vettoriale magnetico**  $\mathbf{H}(P,t)$  (unità di misura  $[A/m]$ ) che al primo è legato dalla relazione costitutiva del campo magnetico :

$$\mathbf{B}(P, t) = \mu \mathbf{H}(P, t) \quad (1.4)$$

Riformulando la legge di Biot-Savart per il campo magnetico  $\mathbf{H}$ , che un conduttore filiforme rettilineo, con corrente costante  $I$ , produce in un punto  $P$  a distanza  $r$  dal suo asse :

$$\mathbf{H}(P) = \frac{B}{\mu} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{u}_\varphi \quad (1.5)$$

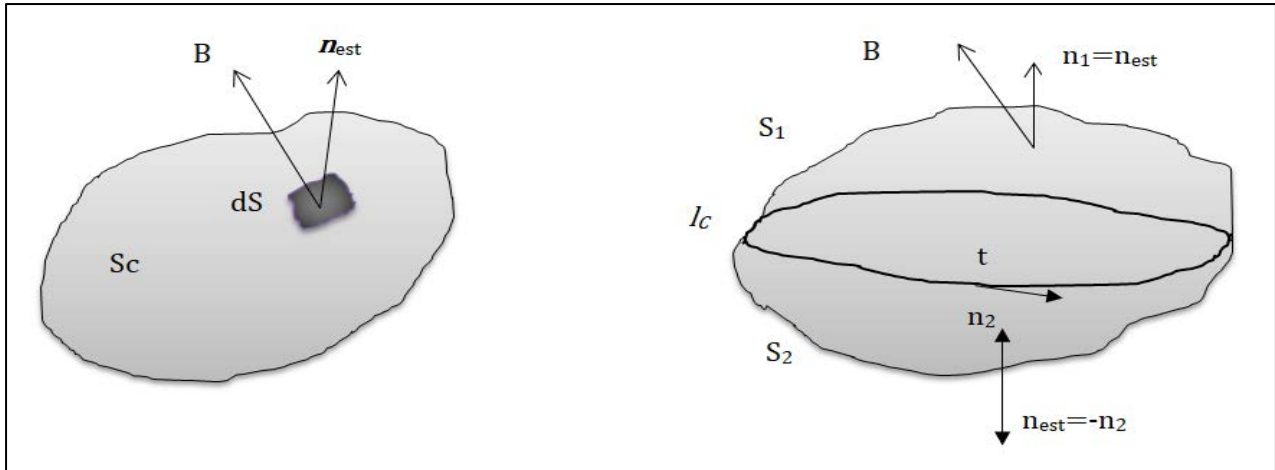
Quantità di fondamentale importanza associata all'induzione magnetica, orientata dal versore normale  $\mathbf{n}$  :

$$\varphi(t) \triangleq \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.6)$$

che ha dimensione fisica  $[Tm^2]$  unità di misura che prende il nome di *weber*  $[Wb]$ . Proprietà fondamentale è che il flusso d'induzione attraverso la superficie chiusa ( $S_c$ ) sia sempre nullo.

$$\oint_{S_c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (1.7)$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore che orienta la superficie, esso può essere uscente o entrante.

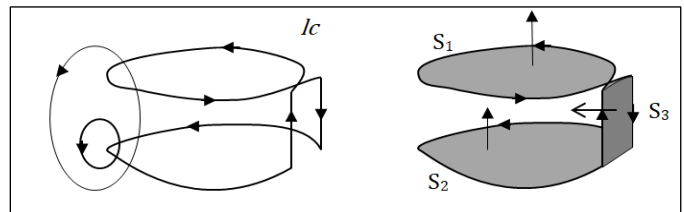


**Figure 1.2** Rappresentazione supefici orlate.

Spesso è d'interesse valutare il flusso concatenato con un circuito elettrico costituito da uno o più conduttori disposto in modo da formare un percorso chiuso. Quando questi conduttori sono filiformi, si può ritenere che essi rappresentino la linea chiusa  $l_c$ , quindi a tale circuito elettrico è pertanto associato un preciso flusso concatenato.

**Flusso concatenato da N spire filiformi** : molto spesso il conduttore filiforme che descrive la linea chiusa  $l_c$  è avvolto in più spire, come nella figura a lato, dove la S orlata da  $l_c$  può essere ottenuta dall'unione di tre superfici  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ . Il flusso  $\varphi_c$  concatenato con  $l_c$  può essere ottenuta dalla somma algebrica (a seconda che gli orli delle relative superfici abbiano versori concordi o meno con il versore di  $l_c$ ) dei tre flussi  $\varphi_c = \varphi_{c1} + \varphi_{c2} + \varphi_{c3}$ .

Con la formula seguente si esprime la somma dei soli flussi attraverso le N spire che costituiscono la parte rilevante della linea chiusa  $l_c$ . Nell'esempio a lato, viene trascurata la superficie di unione  $S_3$  poiché



**Figure 1.3** Percorso linea chiuso in spire.

$\varphi_{c3} \ll \varphi_c$ .

$$\varphi_c = \sum_{i=1}^N \varphi_{ci} \quad (1.8)$$

Molto frequenti sono le situazioni in cui le  $N$  spire sono vicine e avvolte nello stesso senso, la simmetria del caso permette di ritenere che ciascuna di esse concateni, con buona approssimazione, lo stesso flusso  $\varphi_s$  così da poter scrivere :

$$\varphi_c = N\varphi_s \quad (1.9)$$

Il campo d'induzione magnetica è sempre ovunque solenoidale<sup>1</sup> ed esso può essere espresso come rotore di un campo vettoriale  $\mathbf{A}(P,t)$  chiamato potenziale vettore magnetico.

$$\mathbf{B}(P,t) = \text{rot}\mathbf{A}(P,t) \quad (1.10)$$

La (1.10) costituisce la definizione del potenziale vettore; essa non individua in modo univoco il vettore  $\mathbf{A}$ , ma lo determina a meno di un campo vettoriale irrotazionale<sup>2</sup>. Infatti, se a un potenziale vettore che soddisfi la (1.10) si somma un campo vettoriale irrotazionale, si ottiene un diverso potenziale vettore che soddisfa anch'esso la (1.10).

$$\varphi_c = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \text{rot}\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\ell_c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl \quad (1.10)$$

dove il versore  $\mathbf{t}$  tangente a  $\ell_c$  è associato dalla regola della vite destrorsa al versore  $\mathbf{n}$  normale a  $S$ . Pertanto il flusso d'induzione  $\varphi_c$  concatenato con una linea chiusa è anche espresso dalla circuitazione del potenziale vettore lungo la stessa linea. Si conferma che  $\varphi_c$  è proprietà della linea chiusa piuttosto che dalle superfici aperte da queste orlate.

$$\oint_{\ell_c} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl = i(t) \quad (1.11)$$

Anche in questo caso il versore  $\mathbf{n}$  che stabilisce il verso della corrente,  $i(t)$  è associato alla regola della vite destrorsa al versore  $\mathbf{t}$  tangente a  $\ell_c$ . Tale legge è sempre valida in condizioni di correnti stazionarie (condizioni magnetostatiche); essa è valida anche quando il campo di correnti pur variando nel tempo si mantiene solenoidale, (condizione quasi magnetostatiche).

La corrente elettrica può corrispondere anche a un capo tridimensionale di correnti. In ogni caso essa deve intendersi valutata attraverso una generica superficie aperta  $S$  orlata da  $\ell_c$ , e perciò il campo << il campo di corrente, sia esso filiforme o tridimensionale, deve essere solenoidale in

---

<sup>1</sup> Si definiscono solenoidali i campi per i quali risulta nullo il flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa.

<sup>2</sup> In analisi matematica e nel calcolo vettoriale un campo vettoriale  $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  si dice campo irrotazionale se il suo rotore è nullo:  $\nabla \times \vec{V} = 0$ .

tutto lo spazio:  $\text{div}\mathbf{J}=0$ .>> tale condizione è sempre verificata in regime stazionario, detta condizione magnetostatiche; ma essa vale anche quando il campo di corrente varia nel tempo mantenendosi solenoidale, in questo caso si parla di condizioni quasi magnetostatiche.

Nel caso di un conduttore filiforme percorso da corrente,  $i$  è avvolto  $N$  volte attorno alla linea  $\ell_c$  si ottiene :

$$\oint_{\ell_c} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = Ni \quad (1.12)$$

Il prodotto  $Ni$  si esprime in amperspire [As].

### 1.3 PARAMETRI INDUTTORI

Un induttore è formato da un conduttore il cui asse longitudinale si sviluppa lungo la line  $\ell$  di qualsiasi forma e con gli estremi posti molto vicini, tanto da materializzare una linea chiusa  $\ell_c \cong \ell$ . Quindi, a questa linea si può associare il flusso concatenato  $\varphi_c$  già definito § 1.2.

Il campo d'induzione magnetica e lo stesso flusso concatenato sono prodotti dalla corrente  $i(t)$  dell'induttore stesso. Per cui, l'induzione  $\mathbf{B}$  dipende oltre che dalla permeabilità magnetica, anche dalla corrente e dalla geometria del conduttore; di conseguenza il flusso concatenato  $\varphi_c$ .

Adesso assumendo che le condizioni di magnetostatica o quasi-magnetostatica si definisce **l'autoinduttanza** come il rapporto tra il flusso del campo magnetico concatenato al circuito e l'intensità della corrente (si misura in henry [H]);

$$L \triangleq \frac{\varphi_c(t)}{i(t)} \quad (1.13)$$

Tale parametro caratterizza il circuito induttore e in assenza di isteresi magnetica  $L$  risulta sempre positivo, poiché  $i$  e  $\varphi_c$  hanno sempre lo stesso segno; inoltre nelle ipotesi di linearità dei mezzi e di indeformabilità dell'induttore  $L$  è costante, cioè indipendente da  $i$  e  $\varphi_c$ .

Una proprietà di fondamentale importanza dell'autoinduttanza di  $N$  spire identiche avvolte su un nucleo comune è la seguente :

$$L_{N\text{spire}} \propto N^2 L_{\text{spira}} \quad (1.14)$$

dove l'induttanza di  $N$  spire è proporzionale a quella della singola spira moltiplicato per  $N^2$ .

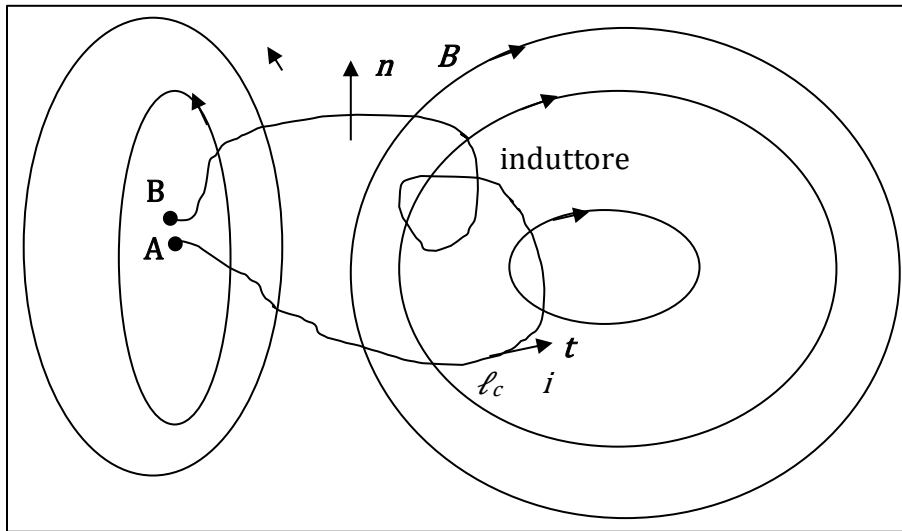


Figura 1.4 Induttore isolato - autoinduttanza.

### 1.3.1 Induttore toroidale.

L'induttore toroidale è costituito da un toroide realizzato con materiale magneticamente uniforme e su di esso un conduttore filiforme avvolte in N spire fittamente impaccate, come se ognuna giacesse in un piano radiale.

Dato che la geometria ha simmetria cilindrica rispetto all'asse centrale del toro, anche  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  hanno simmetria cilindrica e le loro linee vettoriali sono cerchi coassiali con il toro stesso. La circuitazione lungo tali cerchi vale  $H2\pi r$  e per la legge di Ampere risulta uguale alle amperspire concatenate.

$$\mathbf{H} = \frac{Ni}{2\pi r} \mathbf{u}_\varphi, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \frac{\mu Ni}{2\pi r} \mathbf{u}_\varphi \quad (1.15)$$

Analizzando la figura 1.8 si nota che se il cerchio si sviluppa all'interno del volume del toro si ha che  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  sono diversi da zero, diversamente, sono nulli.

Se il toro è snello ( $r_0 \ll r_m$ ) al suo interno  $\mathbf{B}$  risulta uniforme e quindi il flusso concatenato da ciascuna spira attraverso la sezione  $S = \pi r_0^2$  della spira, e dato che  $\mathbf{B}$  è ortogonale si può scrivere  $\varphi_s = SB$ . In base alla definizione di autoinduttanza è quindi:

$$L = \frac{\varphi_c}{i} = \frac{NSB}{i} = \frac{\mu SN^2}{2\pi r_m} \quad (1.16)$$

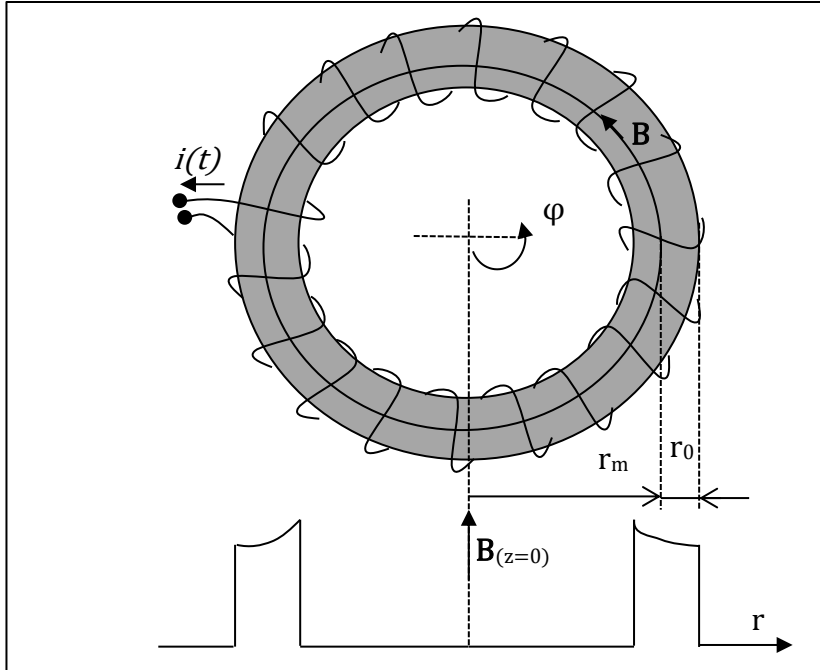


Figura 1.5 induttore toroidale.

### 1.3.2 Induttore solenoidale

Un solenoide è un induttore composto da  $N$  spire filiformi (con densità lineare  $n=N/\ell$ ) avvolte su di un supporto cilindrico di lunghezza  $\ell$  e raggio  $r_0$  e attraversato dalla corrente  $i$ . Se le spire sono serrate si può supporre che esse compiano cerchi giacenti sull'asse  $z$ .

Se il solenoid è infinito, la lunghezza  $\ell$  è infinita, può considerarsi caso limite dell'avvolgimento toroidale con  $r_m/r_0 \rightarrow \infty$ . In tale ipotesi il campo  $\mathbf{H}$  presenta simmetria di traslazione assiale, con linee vettoriali formate da rette parallele all'asse  $z$  all'interno e nullo all'esterno. La circuitazione di  $\mathbf{H}$  avviene lungo percorsi rettangolari di dimensione  $h \times d$  e concatena la corrente  $hni$ . Inoltre, l'unico lato del percorso rettangolare che contribuisce alla circuitazione è quello interno parallelo all'asse  $z$  gli altri forniscono un contributo nullo ( $\mathbf{H}=0$ ).

$$\mathbf{H} = ni\mathbf{u}_z, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu ni\mathbf{u}_z \quad (1.17)$$

Se il solenoid è finito ( $\ell \gg r_0$ ) il campo  $\mathbf{H}$  lontano dagli estremi si può ritenere con buona approssimazione come quello infinito, alle estremità il campo è più debole e le linee vettoriali

tendono a divergere per richiudersi nello spazio circostante. Tale fenomeno diventa trascurabile all'aumentare della lunghezza del solenoide, e si può ritenere che tutte le  $N$  spire concatenino lo stesso flusso valutabile attraverso la medesima superficie piana  $S=\pi r_0^2$ . Dato che su  $S$   $\mathbf{B}$  è ortogonale, ritenendo sempre che sia uniforme, si può scrivere che  $\varphi_s=SB$ . Quindi  $L$  risulta,

$$L = \frac{\mu SN^2}{\ell} \quad (1.18)$$

Se il solenoido è corto ( $\ell$  confrontabile con  $r_0$ ) la divergenza delle linee di campo non è più trascurabile e l'induttanza in questo caso risulta inferiore a quella ottenuta con la 1.24.

$$L = \alpha \frac{\mu SN^2}{\ell} \quad (1.19)$$

Con  $\alpha < 1$  e rappresenta una funzione di rapporto di  $\ell / r_0$ .

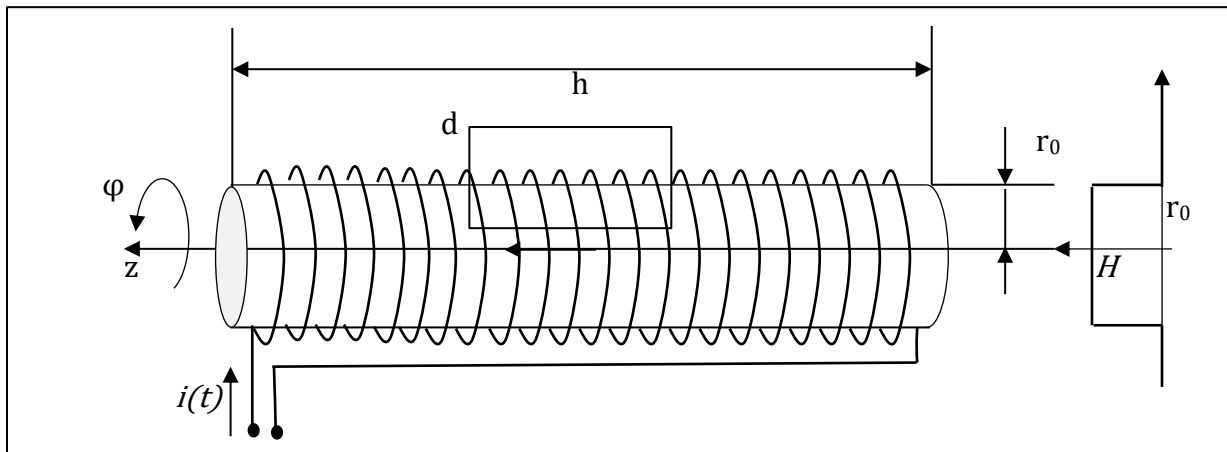


Figura 1.6 Solenoide.

### 1.3.3. Metodi per il calcolo dell'induttanza

Esistono diversi metodi per calcolare l'induttanza, ma tutti questi metodi richiedono fondamentalmente il calcolo del flusso attraverso la superficie aperta  $s$  che è racchiusa dal *loop* di corrente:

#### 1. Dalla legge di Biot-Savart

$$\varphi = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_1 \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{a}_R}{R^2} \quad \rightarrow \quad L = \frac{\varphi}{I} \quad (1.20)$$

2. Dal potenziale vettore magnetico

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.21)$$

Il flusso magnetico attraverso una superficie S può essere riscritto in termini di  $\mathbf{A}$ :

$$\varphi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\ell_c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.22)$$

dove è stato utilizzato il teorema di Stokes per il passaggio all'integrale di linea. Infine, una volta calcolato il potenziale vettore magnetico  $\mathbf{A}$  si ottiene:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\ell_R} \frac{1}{R} d\mathbf{l} \quad \rightarrow \quad L = \frac{\oint_{\ell_c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{I} \quad (1.23)$$

3. Tramite il calcolo dell'energia immagazzinata nel campo magnetico, nell'ipotesi di mezzo lineare ed isotropo, si ottiene:

$$W_M = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dv \quad (1.24)$$

$$L = \frac{2W_M}{I^2} \quad (1.25)$$

Quest'ultimo metodo è utilizzato generalmente per strutture chiuse in cui il campo magnetico è contenuto all'interno di una regione finita dello spazio come con un cavo coassiale o nel calcolo dell'induttanza interna di un filo.

Per alcune configurazioni, come quella circolare, il metodo del potenziale magnetico vettoriale e l'integrale di *Neumann* sono più facili, mentre per quelli rettangolari, il metodo diretto (legge di Biot-Savart) è più semplice.

Tutti questi metodi possono essere applicati in modo analogo per il calcolo della **mutua induttanza**, espressa dal rapporto tra il flusso del campo magnetico generato dalla corrente che circola nel primo circuito (corrente inducente) e concatenato al secondo, e l'intensità della corrente inducente.



### 1.3.4 Mutue induttanze [2] [1]

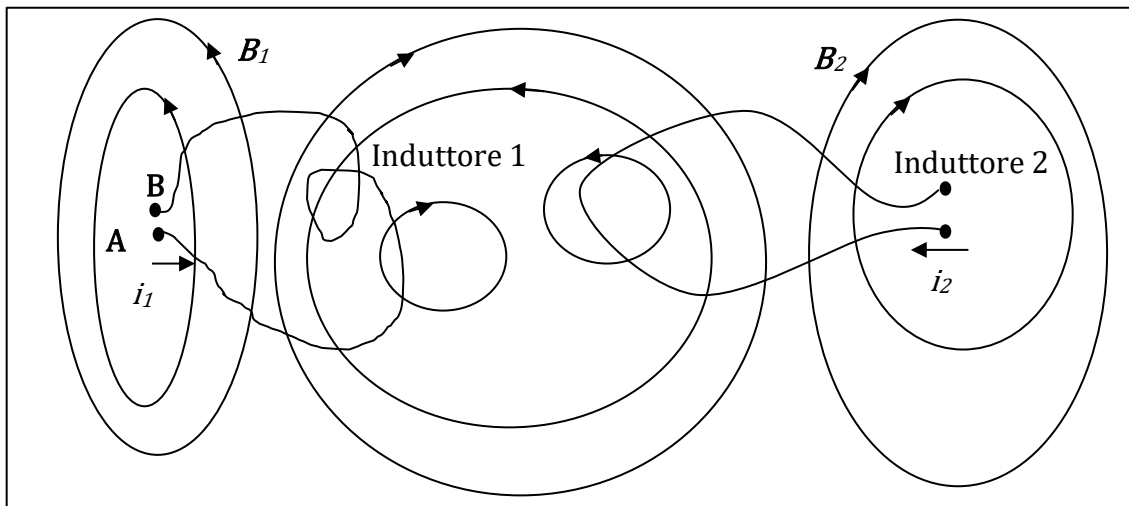
Considerando due induttori di una geometria generica di cui uno non percorso da corrente ( $i_1=0$ ) e l'altro percorso da corrente ( $i_2 \neq 0$ ), in tale situazione può accadere che l'induzione  $\mathbf{B}_2$  dovuta alla sola corrente  $i_2$  presenti parte delle linee vettoriali concatenate con l'induttore uno oltre che con il due. In questo caso si dice che i due induttori sono mutuamente accoppiati.

$$M_{12} \triangleq \frac{\varphi_{c12}(t)}{i_2(t)} \quad ; \quad M_{21} \triangleq \frac{\varphi_{c21}(t)}{i_1(t)} \quad (1.26)$$

Se i circuiti sono indeformabili e reciprocamente fissi con campo d'induzione  $\mathbf{B}$  sviluppato in mezzo lineare, si ha che  $\varphi_c$ , per cui  $M_{12}$  è costante. In tale situazione si ha che :

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (1.27)$$

in questo caso, si ha un unico parametro  $M$  che caratterizza il mutuo accoppiamento tra due induttori ed ha dimensione fisica di *henry* [H]. Esso può essere sia positivo sia negativo, a secondo che il flusso di mutua induzione di ciascun circuito sia concorde o discorde con il suo flusso di autoinduzione.



**Figura 1.7** Concetto di Mutua induttanza –due circuiti mutuamente accoppiati.

Si considerano *due avvolgimenti coassiali* aventi, rispettivamente  $N_1$  e  $N_2$  fittamente impaccate, come mostrato in Fig. 1.7. I due avvolgimenti sono paralleli, hanno raggi  $a$  e  $b$ , e sono separati dalla distanza  $d$ . Per prima cosa fissiamo il punto sul secondo avvolgimento,

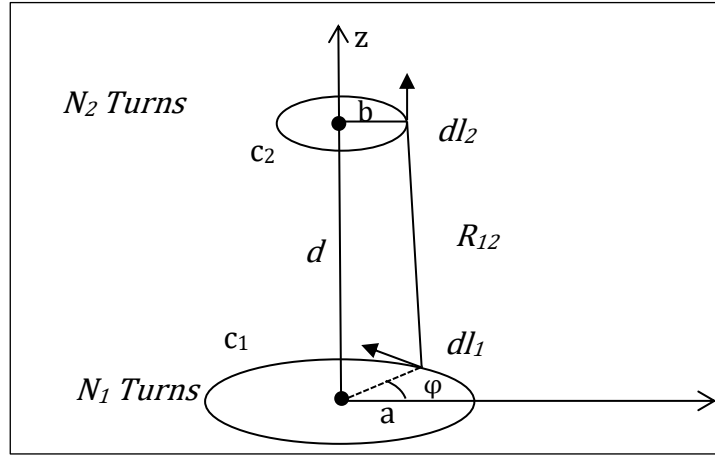


Figura 1.8 Avvolgimenti coaxial.

Mediante l'integrale di *Neumann* valutato sui due circuiti, si ottiene la seguente espressione:

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C1} \oint_{C2} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{R_{12}} \quad (1.28)$$

Per prima cosa si fissa un punto sul secondo avvolgimento e si fa variare l'angolo  $\varphi$  del primo avvolgimento. Usando la legge dei coseni, si ottiene la distanza tra i due tratti di arco:

$$R_{12} = \sqrt{a^2 + b^2 + d^2 - 2ab\cos\varphi} \quad (1.29)$$

La mutua induttanza totale si ottiene moltiplicando la (1.28) per  $N_1^2$  e  $N_2^2$

$$M_{12} = N_1^2 N_2^2 \frac{\mu_0 ab}{4\pi} \int_{\varphi'=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 + d^2 - 2ab\cos\varphi}} d\varphi d\varphi' \quad (1.30)$$

Approssimando la 1.30 nel caso in cui  $d \gg a, b$  si ottiene:

$$M_{12} \cong N_1^2 N_2^2 \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2d^3} \quad (1.31)$$

## 1.4 INDUTTANZE E INDUTTANZE PARZIALI [2]

Per il calcolo dell'auto e mutua induttanza, definita nella sezione precedente, la teoria richiede la garanzia del percorso chiuso, quindi di conseguenza si definisce il concetto d'induttanza.

A volte le forme degli induttori rendono il calcolo del paramento tedioso, ed in generale impossibile da risolvere in forma analitica e dove il concetto d'induttanza deve lasciare il posto alle induttanze parziali. [3] [2] [4] [5].

Il solenoide e il toroide illustrati nel §1.3.1 e §1.3.2 rappresentano due esempi di induttori "intenzionali". Essi sono costruiti intenzionalmente per favorire gli effetti della legge di Faraday dell'induzione magnetica. Uno degli usi primari degli induttori intenzionali è quello di bloccare l'alta frequenza e lasciar passare la bassa frequenza. Essi sono usati anche assieme ai condensatori nella realizzazione di filtri. In questa tipologia d'induttori il concetto d'induttanza trova una fattiva applicazione, poiché il percorso chiuso è ben definito.

Gli induttori "non intenzionali" sono generalmente induttanze non desiderate, e causano effetti dannosi che devono essere considerati all'interno di un'analisi complessiva al fine di valutare le prestazioni del sistema. Di solito non è fattibile utilizzare il concetto d'induttanza ma trovano applicazione le induttanze parziali.

Per il calcolo dell'induttanza, come già accennato, la corrente deve definire un circuito chiuso lungo il conduttore. Con gli induttori intenzionali tale anello di corrente è evidente, per quelli non intenzionali, tale come la terra su un PCB (*printed circuit board*) che collega il carico alla sorgente, ci sono alcune difficoltà. Il percorso dalla sorgente al carico è determinabile in modo abbastanza semplice, ma il ritorno no, poiché i circuiti stampati (PCB) hanno raggiunto uno sviluppo molto complesso e le strutture sono molto dense e risulta impossibile definire il circuito di ritorno. Un altro motivo è che la corrente può seguire percorsi diversi al variare della frequenza e definire *loop* diversi, di conseguenza induttanze diverse.

Inoltre, anche nel caso d'induttori intenzionali massicci e aventi geometrie complesse, si può utilizzare il concetto d'induttanze parziali discretizzando la geometria in elementi semplici per facilitarne il calcolo, diversamente tedioso da eseguire per la presenza d'integrali sestupli.

Per definire in modo univoco le **autoinduttanze parziali** si usa la formula 1.23, ricavata tramite il potenziale vettore magnetico  $\mathbf{A}$ . Essa calcola l'induttanza tramite l'integrale curvilineo eseguendo il prodotto scalare tra tratti rettilinei,  $d\mathbf{l}$ , e le componenti del potenziale vettore magnetico  $\mathbf{A}$  tangenti alla linea chiusa. La 1.23 può essere scritta nel seguente modo :

$$L = \frac{\oint_{\ell} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{I} = \frac{\int_{\ell_1} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}}{I} + \frac{\int_{\ell_2} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l}}{I} + \dots \dots + \frac{\int_{\ell_n} \mathbf{A}_n \cdot d\mathbf{l}}{I} \quad (1.32)$$

dove il percorso chiuso  $\ell_c$  è diviso in  $n$  segmenti contigui  $\ell_i$  in modo che  $\ell_c = \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n$  e  $\mathbf{A}_i$  sia il potenziale vettore magnetico totale lungo il tratto di linea  $\ell_i$  prodotto dallo stesso segmento. Questo consente di associare in modo univoco un contributo d'induttanza ad ogni segmento del percorso chiuso ottenendo la seguente espressione :

$$L_i = \frac{\int_{\ell_i} \mathbf{A}_i \cdot d\mathbf{l}}{I} \quad (1.33)$$

Il potenziale vettore magnetico  $\mathbf{A}$  ha due proprietà molto importanti che semplificano enormemente la sua determinazione. Queste sono :

1.  $\mathbf{A}$  ha direzione e verso della corrente  $I$  che lo ha prodotto;
2.  $\mathbf{A}$  va a zero per  $r$  che tende all'infinito  $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{A} = 0$ .

Sebbene (1.33) fornisca la definizione matematica **d'autoinduttanza parziale**, bisogna ancora definire il significato fisico dell'autoinduttanza parziale.

Si consideri un segmento  $\ell_i$  di un anello di corrente, come mostrato in Fig. 1.9. Si proceda a disegnare una superficie che si estenda dal segmento all'infinito con i lati perpendicolari al segmento  $\ell_i$ . Ora si determini il flusso magnetico attraverso la superficie appena descritta:

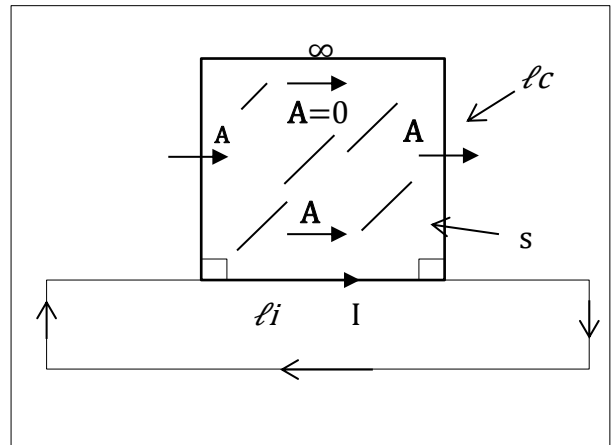


Figure 1.9 a Significato fisico induttanze parziali.

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{\infty}}{I} &= \frac{\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}}{I} \\ &= \frac{\oint_{\ell_c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{I} = \underbrace{\frac{\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{I}}_{\ell_i} + \underbrace{\frac{\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{I}}_{\text{lato sinistro}} + \underbrace{\frac{\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{I}}_{\text{lato destro}} + \underbrace{\frac{\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{I}}_{\infty} \rightarrow L_i = \frac{\int_{\ell_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{I} \end{aligned}$$

Gli integrali lungo i lati sono nulli poiché il potenziale vettore magnetico è parallelo alla corrente  $I$  che lo produce ed è quindi perpendicolare ai due lati. Il potenziale vettore magnetico calcolato sul segmento posto all'infinito, risulta anch'esso essere nullo. Quindi

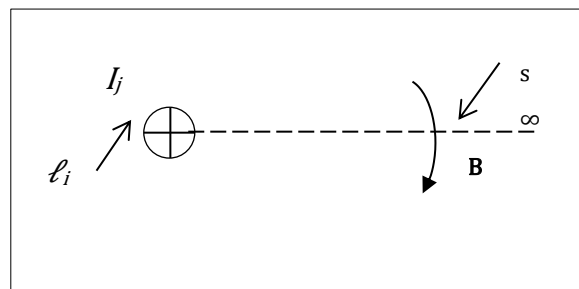


Figure 1.9 b Significato fisico dell'autoinduttanze parziali. Vista sezione trasversale.

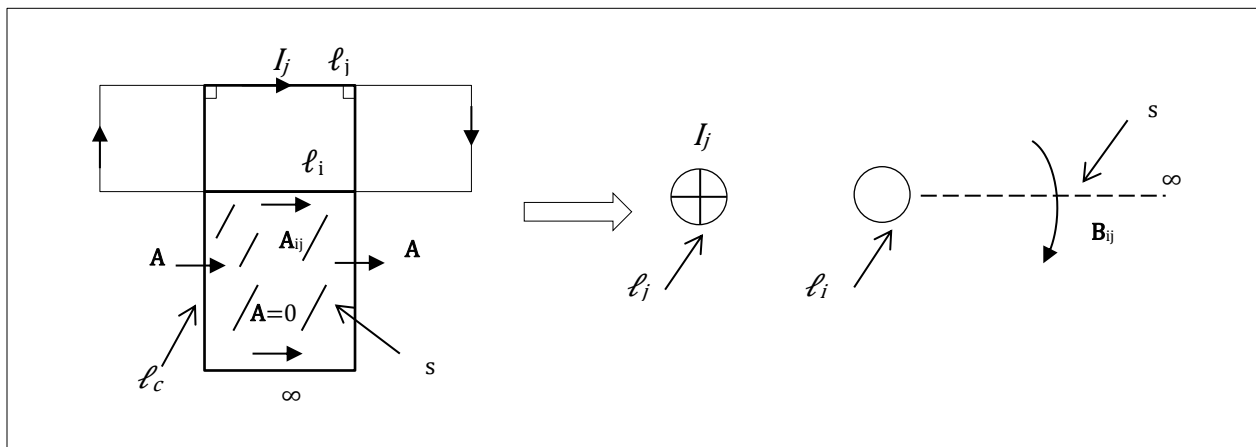
l'unico contributo è quello relativo al segmento  $\ell_i$  del conduttore.

Invece, **la mutua induttanza parziale** tra due segmenti  $\ell_i$  e  $\ell_j$  (che possono far parte dello stesso anello di corrente o di anelli diversi) è definita dalla seguente espressione :

$$M_{pij} = \frac{\int_{\ell_i} \mathbf{A}_{ij} \cdot d\mathbf{l}}{I_j} \quad (1.34)$$

Dove  $\mathbf{A}_{ij}$  è il potenziale vettore magnetico lungo il bordo  $\ell_i$  prodotto dalla corrente di un altro segmento  $\ell_j$  appartenente allo stesso anello.

Il significato fisico della mutua induttanza parziale è illustrato in Fig. 1.10. Si considerino due segmenti dell'anello di corrente,  $\ell_i$  e  $\ell_j$ . Si disegni una superficie  $s$  che si estenda dal segmento  $j$  all'infinito con i lati posti perpendicolarmente allo stesso segmento.



**Figure 1.10** Significato fisico della mutua induttanze parziali.

Il flusso magnetico prodotto dal primo segmento, attraversa la superficie tra il secondo segmento e quello posto all'infinito. Esso si determina in modo analogo a quello dell'autoinduttanza parziale. Anche in questo caso gli integrali dei tratti lungo i due lati sono nulli poiché il potenziale magnetico vettoriale  $\mathbf{A}$  è perpendicolare ad essi. Inoltre, il potenziale vettore magnetico va a zero per  $r$  che tende all'infinito, cosicché anche l'integrale lungo il segmento posto all'infinito risulta essere nullo. Quindi, la mutua induttanza parziale tra due segmenti dello stesso anello di corrente o di anelli diversi, è il rapporto tra il flusso magnetico (prodotto dalla corrente del primo segmento) che attraversa la superficie tra il secondo segmento e quello posto all'infinito e la corrente del primo segmento.

Nel prossimo capitolo sarà trattato nello specifico il concetto di geometria discretizzata mediante il metodo PEEC (*Partial element equivalent circuit*).

# Capitolo 2

## FORMULAZIONE DEL METODO PEEC

### 2.1 INTRODUZIONE

Nella prima parte di questo capitolo sarà introdotto il metodo PEEC di strutture ortogonali per la discretizzazione della geometria del generico avvolgimento; nella seconda parte sarà presentata una semplificazione del metodo PEEC e verranno sviluppate le formule di auto e mutua induttanza parziale utilizzate nel lavoro di tesi per la compilazione del codice.

### 2.2 PARTIAL ELEMENT EQUIVALENT CIRCUIT (PEEC) [4]

#### 2.2.1 Introduzione

Il metodo PEEC è stato introdotto per la prima volta da Ruehli negli anni '70 [8] ed ha riscosso successo negli ultimi anni. Esso è basato su una formulazione integrale nel dominio del tempo del problema di campo.

Il PEEC è uno strumento molto potente che consente simulazioni accurate di tutti gli effetti elettromagnetici associati al carattere tridimensionale di una generica struttura. Inoltre, consente l'analisi nel dominio del tempo. Tale capacità di analisi è importante quando si analizzano strutture d'interconnessione, connesse a blocchi circuitali, di cui alcuni sono non lineari. Infatti, in questi casi un'analisi del sistema complessivo può essere eseguita solo nel dominio del tempo. Nella forma generale, il metodo PEEC, viene definito in due passi. Il primo consiste nell'equazione integrale del campo elettrico (*Electric Field Integral Equation–EFIE*) a partire dalle equazioni di *Maxwell* nel dominio del tempo. Il secondo consiste nello sviluppo della forma discreta della *EFIE* utilizzando il metodo WRM [9] (*Weighted Residuals Method*) con la condizione di *Galerkin*. Quest'ultimo passo permette la formulazione del circuito equivalente a elementi parziali (*Partial Element Equivalent Circuit–PEEC*) della *EFIE*. Esso si basa sul concetto fondamentale secondo cui gli elementi di base del circuito devono essere simmetrici. Questo si ottiene usando un'approssimazione discreta e simmetrica per la rappresentazione delle correnti e delle cariche per ciascun elemento (cella) del circuito, fig.2.1.

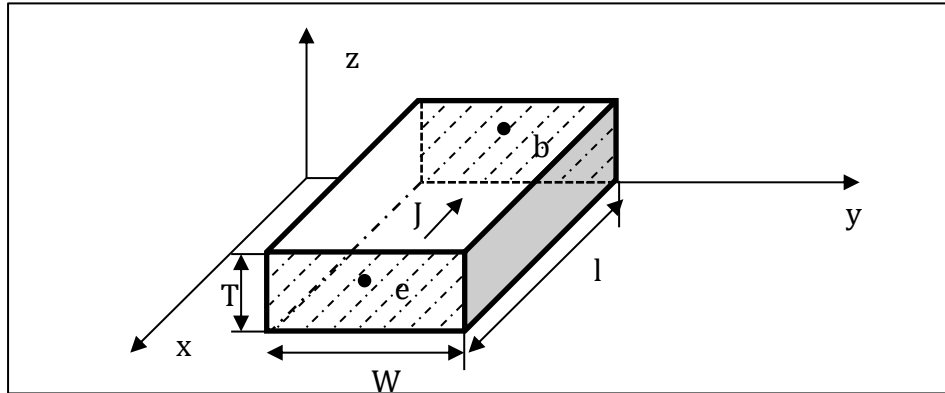


Figura 2.1 Celle di un conduttore.

dove  $A$  è la sezione trasversale di spessore  $T$  e larghezza  $W$ .

Un passo fondamentale in tutti gli approcci WRM è il modo in cui il sistema di equazioni viene risolto. Nel PEEC, questo consiste nel risolvere la matrice circuitale del *modified nodal analysis* (MNA).

La formulazione PEEC permettere l'analisi delle strutture d'interconnessioni sviluppando un modello elettromagnetico gerarchico. Quest'attributo è molto importante quando la complessità della struttura è elevata. Infatti, il metodo PEEC consente una procedura sistematica per la riduzione della complessità fisica del modello per alcune parti della struttura in base alle condizioni operative e all'obiettivo della simulazione. Allora, differenti livelli d'interconnessione e diverse parti nel package possono essere modellati implementando differenti tipi di modelli elettrici, ciascuno dei quali è ottenuto dal modello PEEC completo.

### 2.2.2 Discretizzazione Geometria ortogonale

Nella fase di discretizzazione viene deciso quanto deve essere discretizzata la geometria originale e come devono essere create le partizioni. Nel sistema di coordinate cartesiane ciò comporta tre diverse discretizzazioni delle celle del volume (in direzione  $x$ ,  $y$  e  $z$ ) oltre il quale la corrente in ogni cella del volume è considerata costante. La discretizzazione eseguita in questa fase costituisce il volume da cui vengono calcolati gli elementi parziali (auto e mutue induttanze). Il livello della discretizzazione, vale a dire le dimensioni del volume e delle celle di superficie, sono determinate dai seguenti parametri:

1. La frequenza più alta cui è destinato il modello PEEC: una regola empirica per la modellazione EMI/EIP è che le dimensioni del volume e delle celle di superficie non devono mai superare un ventesimo della lunghezza d'onda più corta per garantire una rappresentazione corretta delle forme d'onda effettive.

2. La forma dei conduttori: per garantire una buona precisione nei valori degli elementi parziali è necessario considerare i rapporti tra larghezza e spessore. Rapporti troppo ampi nelle dimensioni della cella possono causare problemi numerici nelle routine di calcolo degli elementi parziali quando si utilizza l'integrazione numerica.
3. La vicinanza ad altri conduttori: per conduttori ravvicinati, sovrapposti, paralleli o perpendicolari, la discretizzazione deve essere la stessa, diversamente potrebbero esserci errori di calcolo.
4. Limiti di tempo e memoria: il numero di elementi parziali utilizzati in un modello PEEC è direttamente proporzionale alla discretizzazione. Pertanto, il tempo di calcolo degli elementi parziali e il tempo di soluzione del sistema finale aumenta drasticamente per problemi sovradimensionati.

La discretizzazione inizia con il posizionamento dei nodi all'interno della geometria. La corrente scorre tra i nodi, nelle celle del volume.

**conduttore rettangolare piatto** [12] [4] Siccome il conduttore è molto sottile, si può ritenere che il flusso di corrente sia bidimensionale: la densità di corrente ha due componenti  $J_x$  e  $J_y$ . I nodi sono disposti sulla struttura in modo tale che la distanza fra due nodi adiacenti sia sempre la stessa. Nell'esempio in figura 2.2, sono stati inseriti quattro nodi nella direzione x e tre nodi nella direzione y, ottenendo dodici nodi in totale per la discretizzazione. In pratica per ogni coppia di nodi adiacenti viene individuata una cella nella quale la densità di corrente è  $J_x$  se i nodi individuati si trovano lungo la direzione x, oppure  $J_y$  se i nodi si trovano lungo la direzione y.

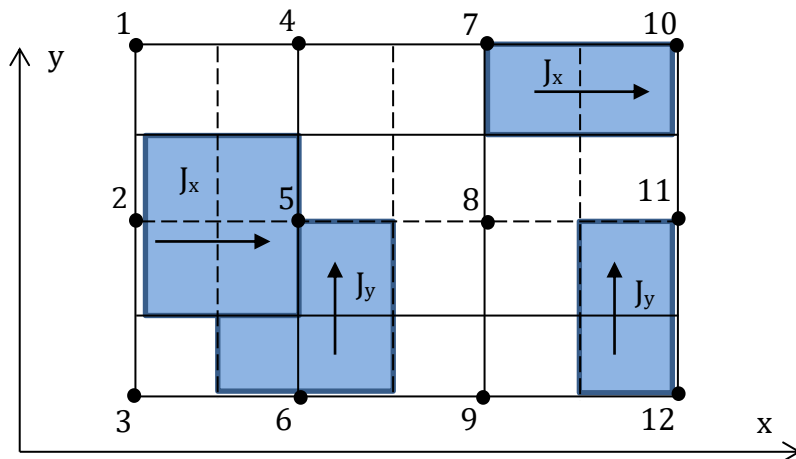


Figure 2.2. discretizzazione di un conduttore piatto.



Per determinare la dimensione delle celle si tracciano delle linee che uniscono i nodi che si trovano lungo lo stesso asse. Queste linee sono tratteggiate se i nodi sono allineati lungo  $x$  (i nodi 2, 5, 8, 11), invece sono continue se i nodi sono allineati nella direzione  $y$  (i nodi 4, 5, 6 e i nodi 7, 8, 9). In questo modo si è suddivisa la struttura in rettangoli ai cui vertici ci sono i nodi. Il passo successivo consiste nel suddividere ciascun di questi rettangoli in quattro parti uguali. Ciò viene fatto utilizzando linee tratteggiate nella direzione verticale e linee continue nella direzione orizzontale. A questo punto è stata dimensionata la cella di corrente: le celle dirette lungo  $x$  sono delimitate da linee continue quelle lungo  $y$  da linee tratteggiate.

Nel caso di un **conduttore con spessore** non trascurabile, bisogna considerare anche la distribuzione della corrente lungo l'asse  $z$ , estendendo così il processo di discretizzazione alle celle volumetriche. In questo caso i nodi sono presenti sia sulle superfici del conduttore sia all'interno. In questo caso, le celle di corrente hanno la forma di parallelepipedi. Per determinare le dimensioni di queste celle occorre considerare tutte le sezioni del conduttore che si ottengono con dei piani paralleli agli assi cartesiani che tagliano il conduttore passando per i nodi scelti nella struttura. Nella Fig.2.3 è mostrata la struttura di un conduttore rettangolare con l'individuazione dei nodi utili alla determinazione delle celle volumetriche. All'interno di questa struttura sono stati inseriti due piani che individuano, rispettivamente, la sezione lungo l'asse  $x$  e quella lungo l'asse  $y$ . Su ciascuna di queste sezioni si è eseguita la discretizzazione così come ottenuta nel caso del conduttore piatto con spessore trascurabile. In particolare, la discretizzazione delle due sezioni in esame permette di individuare ciascuna delle tre dimensioni per le celle di corrente dirette lungo  $z$  relativamente alle coppie di nodi 2 e 5, 5 e 8, 8 e 11. Nella figura 2.3(b) sono mostrate le dimensioni della cella tra i nodi 5 e 8 ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$ ).

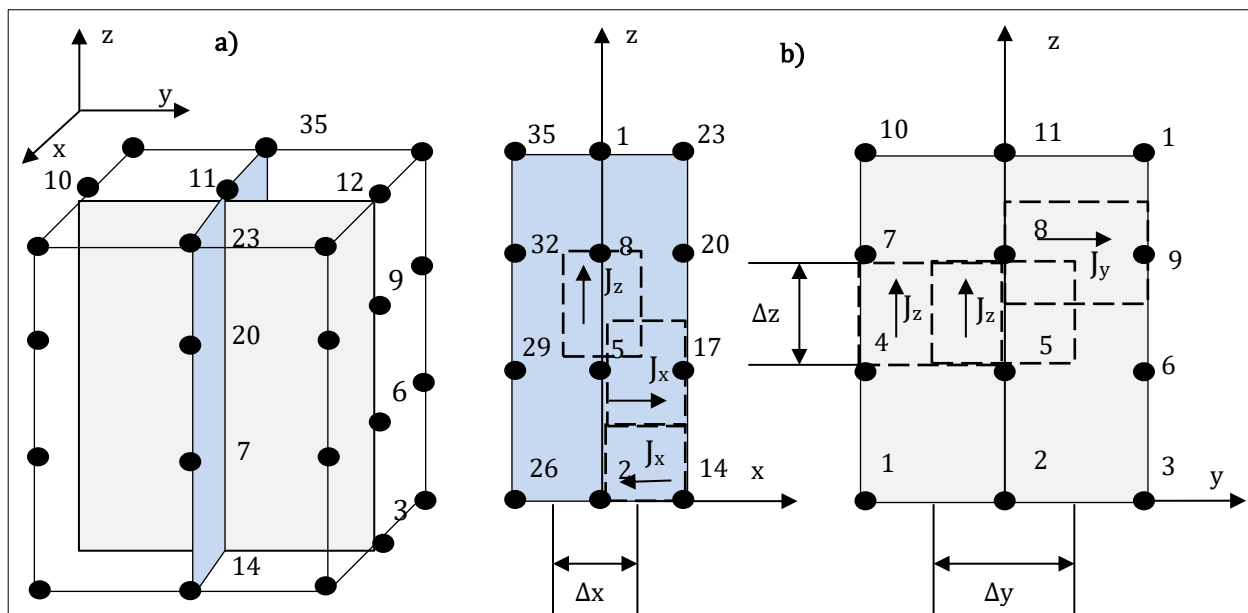
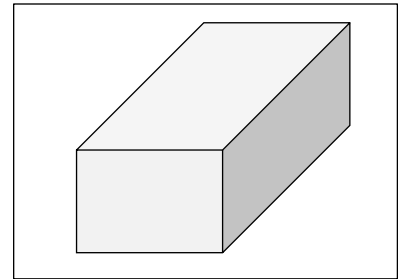


Figure 2.3 (a) Conduttore rettangolare; (b) celle di volume.

Nella figura 2.4 è stato rappresentato il singolo parallelepipedo ottenuto mediante il processo di discretizzazione PEEC della struttura di un conduttore,

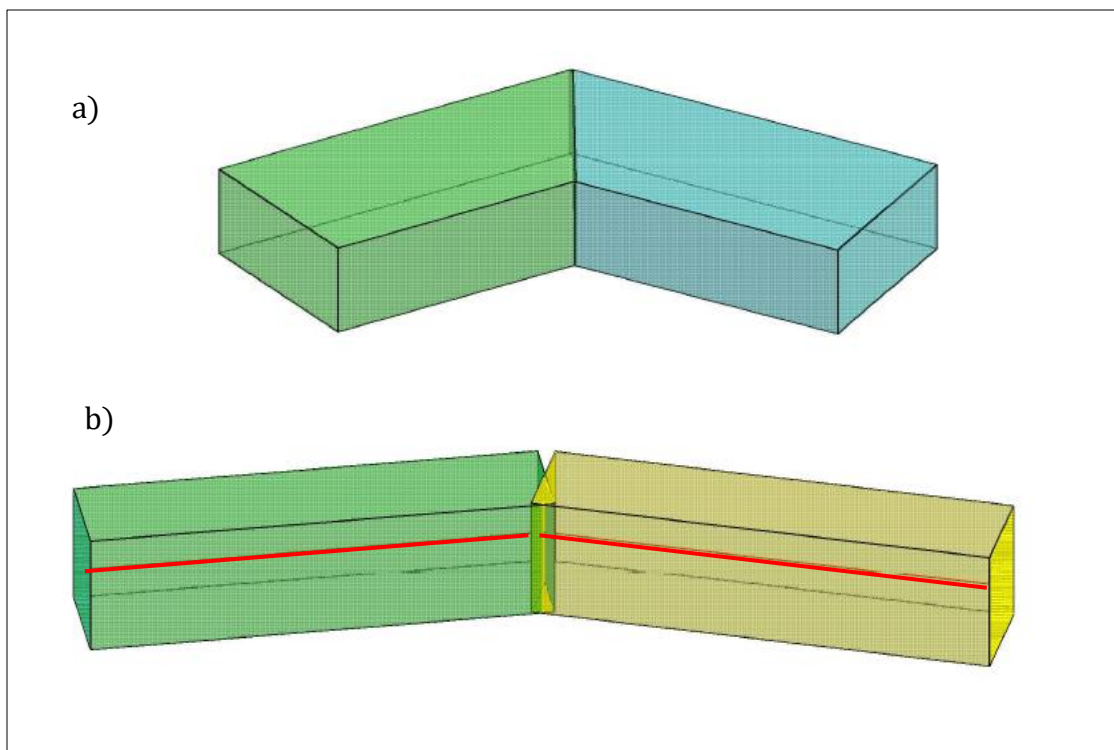


**Figure 2.4** Cella di volume.

Nel caso di strutture non ortogonali [4] le celle volumetriche hanno una forma esaedrica, ciò complica la definizione dei vertici, inoltre i filamenti all'interno di queste strutture possono avere direzioni arbitrarie. Nel prossimo paragrafo sarà analizzata una semplificazione del metodo PEEC, dove verrà utilizzato il parallelepipedo definito nelle strutture ortogonali per il calcolo dell'auto induttanza parziale e i filamenti utilizzati nelle strutture non ortogonali per definizione della mutua induttanza parziale.

### 2.3.1 Semplificazione della geometria del Metodo PEEC

Considerato l'argomento di tesi, gli unici elementi parziali d'interesse sono le auto e le mutue induttanze parziali, rappresentate, rispettivamente, da celle di volume e filamenti rettilinei. Per la definizione della geometria del generico avvolgimento si è attuata una semplificazione del metodo PEEC, utilizzando come elemento di volume il parallelepipedo in sostituzione dell'esaedro.



**Figure 2.5** Semplificazione PEEC non ortogonale a) esaedri b) semplificazione con parallelepipedi.

La Fig. 2.5 mostra la semplificazione attuata, dove i due esaedri sono stati sostituiti da due parallelepipedi intersecati nel punto di unione dei due filamenti di colore rosso.

Il processo di discretizzazione attuato, permette di individuare per ogni filamento un parallelepipedo che lo contiene. Il filamento è posto al centro della sezione del parallelepipedo.

Per il calcolo dell'auto e mutua induttanza parziale di un generico avvolgimento, discretizzato con elementi parallelepipedi, è necessario valutare l'integrale eseguito su due volumi. Tale valutazione rappresenta il problema principale che deve essere affrontato, in genere non esistono soluzioni analitiche.

$$Lp_{\alpha\beta} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{a_\alpha a_\beta} \int_{v_\alpha} \int_{v_\beta} \frac{1}{|r_\alpha - r_\beta|} dv_\alpha dv_\beta \quad (2.1)$$

In letteratura è possibile trovare formule che calcolano l'auto e mutua induttanza parziale di parallelepipedi [11] [13]. Sfortunatamente queste formule sono date solo per elementi collocati in posizioni particolari, quindi diventano di poca utilità per lo studio di problemi con geometrie complesse.

Di seguito saranno analizzate le funzioni di base utilizzate per il calcolo di auto e mutue induttanze parziali.

### 2.3.2 Autoinduttanza parziale [5]

La 2.2 rappresenta la funzione di base per il calcolo dell'auto induttanza di un generico conduttore rettilineo.

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi S^2} \int_v \int_v \frac{1}{\rho_{XY}} dv dv \quad (2.2)$$

dove  $X=X(x_1, y_1, z_1)$  è il punto di osservazione  $X \in R^3$ ,  $Y=Y(x_2, y_2, z_2)$  è la sorgente  $Y \in S$ ,  $v$  è il volume del conduttore, e  $\rho(XY) = \sqrt{r_{XY}^2 + (z_2 - z_1)^2}$  con  $r_{XY} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  è la distanza tra i due punti.

Considerando un conduttore a sezione rettangolare (di dimensione  $a \times b \times \ell$ ) la 2.2 diviene :

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi a^2 b^2} F \quad (2.3)$$

dove:

$$F = \int_0^\ell \int_0^\ell \int_0^b \int_0^b \int_0^a \int_0^a \frac{1}{\rho_{XY}} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 dz_1 dz_2 \quad (2.4)$$

La 2.4 è un integrale sestuplo, della funzione  $\rho^{-1}(XY)$  avente sei variabili  $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2)$ .  
Ponendo  $x=x_2-x_1, y=y_2-y_1, z=z_2-z_1$  ed effettuando le opportune sostituzioni [5] si ottiene:

$$F(x, y, z) = \iiint \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz \quad (2.5)$$

dove  $\rho(XY)$  è uguale:

$$\rho^{-1}XY(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

Risolviendo l'integrale 2.5 si ottiene:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{72} \left\{ \begin{array}{l} \frac{6}{5} (x^4 + y^4 + z^4 - 3x^2y^2 - 3x^2z^2 - 3y^2z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ -12xyz \left( z^2 \tan^{-1} \frac{xy}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right. \\ \left. + y^2 \tan^{-1} \frac{xz}{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + x^2 \tan^{-1} \frac{yz}{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) \\ -3x(y^4 - 6y^2z^2 + z^4) \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\ -3y(x^4 - 6x^2z^2 + z^4) \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\ -3z(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \ln(z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

E valutando per gli estremi  $a, b, \ell$  si ottiene:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi a^2 b^2} \left[ \begin{array}{ccc} a, -a & b, -b & \ell, -\ell \\ [F(x, y, z)] & (x) & (y) & (z) \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \end{array} \right] \quad (2.8)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi a^2 b^2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 (-1)^{i+j+k+1} F(p_i, q_j, r_k)$$

dove  $p_1=a, p_3=-a, q_1=b, q_3=-b, r_1=\ell, r_3=-\ell$  e  $p_2 = p_4 = q_2 = q_4 = r_2 = r_4 = 0$ .

Dalla 2.8 si ottiene la forma analitica dell'autoinduttanza di un conduttore rettilineo a sezione rettangolare.

$$L = \frac{\mu_0}{120\pi a^2 b^2} \left\{ \begin{aligned} &4(a^5 + b^5 + \ell^5) - 4(a^4 - 3a^2 b^2 + b^4)\sqrt{a^2 + b^2} \\ &-4(a^4 - 3a^2 \ell^2 + \ell^4)\sqrt{a^2 + \ell^2} - 4(b^4 - 3b^2 \ell + \ell)\sqrt{b^2 + \ell^2} \\ &+4(a^4 + b^4 + \ell^4 - 3a^2 b^2 - 3a^2 \ell^2 - 3b^2 \ell^2)\sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2} \\ &-40ab\ell \left[ a^2 \tan^{-1} \frac{b\ell}{a\sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2}} + b^2 \tan^{-1} \frac{a\ell}{b\sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2}} + \ell^2 \tan^{-1} \frac{ab}{l\sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2}} \right] \\ &+30ab\ell \left[ ab \ln \frac{\ell + \sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2}}{-\ell + \sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2}} + a\ell \ln \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2}}{-b + \sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2}} + b\ell \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2}}{-a + \sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2}} \right] \end{aligned} \right\} \\ + \frac{\mu_0}{120\pi a^2 b^2} \quad (2.9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &-5a \left[ b^4 \ln \frac{(-a + \sqrt{a^2 + b^2})(a + \sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2})}{(a + \sqrt{a^2 + b^2})(-a + \sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2})} + \ell^4 \ln \frac{(-a + \sqrt{a^2 + b^2})(a + \sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2})}{(a + \sqrt{a^2 + b^2})(-a + \sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2})} \right] \\ &-5b \left[ a^4 \ln \frac{(-b + \sqrt{a^2 + b^2})(b + \sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2})}{(b + \sqrt{a^2 + b^2})(-b + \sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2})} + \ell^4 \ln \frac{(-b + \sqrt{a^2 + b^2})(b + \sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2})}{(b + \sqrt{a^2 + b^2})(-b + \sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2})} \right] \\ &-5\ell \left[ a^4 \ln \frac{(-\ell + \sqrt{a^2 + b^2})(b + \sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2})}{(\ell + \sqrt{a^2 + b^2})(-b + \sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2})} + b^4 \ln \frac{(-\ell + \sqrt{a^2 + b^2})(b + \sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2})}{(\ell + \sqrt{a^2 + b^2})(-b + \sqrt{a^2 + b^2 + \ell^2})} \right] \end{aligned} \right\}$$

La (2.9) è la funzione utilizzata nell'implementazione dell'algoritmo, denominata (*Lbar*). Essa calcola l'autoinduttanza del singolo parallelepipedo.

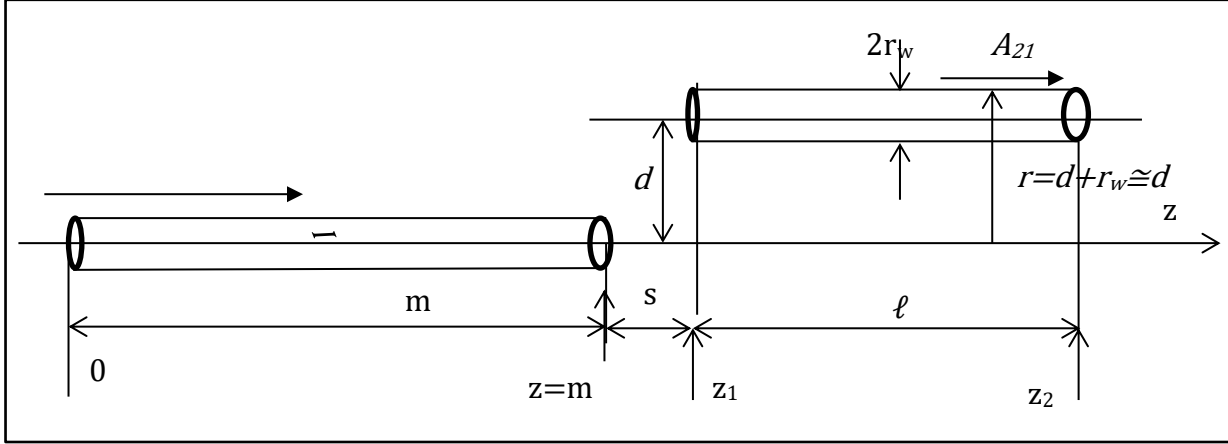
### 2.3.3 Mutua induttanza parziale [3] [2]

Per la valutazione della mutua induttanza parziale ciascun parallelepipedo è stato a sua volta rappresentato da un gruppo di tratti rettilinei filiformi disposti in un reticolo regolare.

Sono state utilizzate le formule per il calcolo delle mutue, sia tra due conduttori filiformi, disposti parallelamente con *offset*, sia tra due conduttori filiformi disposti su piani paralleli con direzioni generiche.

Infine, con queste due formule, che saranno illustrate in seguito, è stata creata una funzione (*Mwire*) utilizzata nell'algoritmo per il calcolo delle mutue induttanze parziali.

**Conduttori paralleli (con offset)** di lunghezza, rispettivamente,  $m$  e  $l$ , disposti paralleli all'asse  $z$ , con distanza  $d$  tra i due, e *offset* pari a  $s$ . Il raggio dei fili è pari a  $r_w$ .



**Figura 2.6** Rappresentazione di due filamenti per il calcolo della mutua induttanza.

Ci sono tre metodi per il calcolo della mutua induttanza tra due conduttori, mediante il flusso con l'utilizzo di  $\mathbf{B}$  (induzione magnetica), usando il potenziale vettore magnetico  $\mathbf{A}$  e con la l'integrale di *Neumann*. Per questo problema è stato scelto il potenziale vettore magnetico  $\mathbf{A}$ . Bisogna integrare  $\mathbf{A}$  del primo conduttore lungo la superficie del secondo.

$$M_p = \int_{z=z_1}^{z_2} \frac{A_{21}(z,r)|_{r=d} dz}{I} \quad (2.10)$$

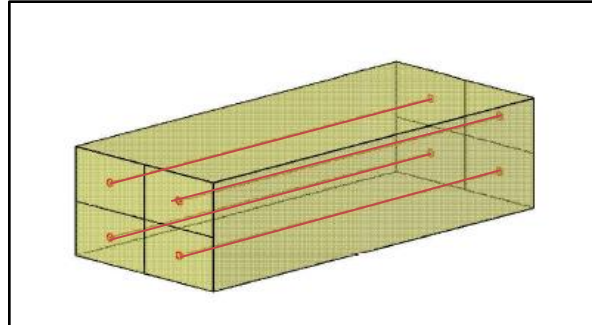
Dove  $A_{21}$  è il potenziale magnetico lungo la superficie del secondo conduttore prodotta dalla corrente del primo. Dalla (2.10) si ottiene:

$$M_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z=z_1}^{z_2} \left( \sinh^{-1} \frac{z}{d} - \sinh^{-1} \frac{z-m}{d} \right) dz \quad (2.11)$$

Risolvendo l'integrale (2.11) si ottiene la prima espressione utilizzata nella funzione (*Mwire*) nel caso di due conduttori paralleli.

$$M_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ z_2 \sinh^{-1} \frac{z_2}{d} - z_1 \sinh^{-1} \frac{z_1}{d} - (z_2 - m) \sinh^{-1} \frac{z_2 - m}{d} - (z_1 - m) \sinh^{-1} \frac{z_1 - m}{d} - \sqrt{z_2^2 + d^2} + \sqrt{z_1^2 + d^2} + \sqrt{(z_2 - m)^2 + d^2} - \sqrt{(z_1 - m)^2 + d^2} \right] \quad (2.12)$$

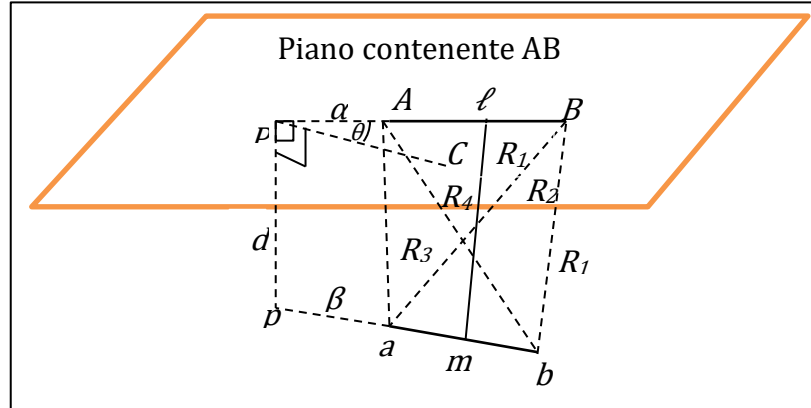
Con la (2.12) è possibile calcolare le mutue dei filamenti rettilinei disposti parallelamente e giacenti sullo stesso piano.



**Figura 2.7** Disposizione filamenti rettilinei.

### Conduttori posti in piani paralleli con angolo d'inclinazione $\theta$

Nel caso generale i due conduttori filiformi disposti su piani paralleli aventi tra essi un angolo d'inclinazione  $\theta$ . Il primo conduttore di lunghezza  $\ell$  ed estremi  $A$  e  $B$ ; il secondo conduttore di lunghezza  $m$  ed estremi  $a$  e  $b$ . Lo schema generale è mostrato in Fig. 2.8.



**Figura 2.8** Configurazione generale di due conduttori filiformi disposti su piani paralleli aventi direzioni generiche ( $\theta$  angolo tra i due).

La seconda formula, utilizzata nella funzione (*Mwire*) è stata ricavata dalla soluzione dell'integrale di *Neumann* :

$$Mp = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_1} \int_{l_2} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{R_{12}} \quad (2.13)$$

dove  $d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = dl_1 dl_2 \cos\theta$  sostituita nella (2.13) si ottiene:

$$Mp = \frac{\mu_0}{4\pi} \cos(\theta) \int_{l_1} \int_{l_2} \frac{1}{R_{12}} dl_1 dl_2 \quad (2.14)$$

dove  $l_1$  e  $l_2$  sono il contorno dei due conduttori di lunghezza, rispettivamente,  $m$  e  $\ell$  e  $R_{12}$  rappresenta la distanza tra i due.

$$R_{12} = \sqrt{d^2 + l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos(\theta)} \quad (2.15)$$

da cui si ottiene :

$$Mp = \frac{\mu_0}{4\pi} \cos(\theta) \int_{l_1} \int_{l_2} \left[ \frac{1}{dl_1} \left( \frac{l_1}{R_{12}} \right) + \frac{1}{dl_2} \left( \frac{l_2}{R_{12}} \right) - \left( \frac{d^2}{R_{12}^3} \right) \right] dl_1 dl_2 \quad (2.16)$$

$$Mp = \frac{\mu_0}{4\pi} \cos(\theta) l_1 \int_{l_2} \frac{1}{R_{12}} dl_2 + l_2 \int_{l_1} \frac{1}{R_{12}} dl_1 - \frac{d}{\sin\theta} \int_{l_2} \int_{l_1} \frac{d \sin\theta}{R_{12}^3} dl_1 dl_2 \quad (2.17)$$

dove si è posto :

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{dl_1} \left( \frac{l_1}{R_{12}} \right) + \frac{1}{dl_2} \left( \frac{l_2}{R_{12}} \right) - \frac{d^2}{R_{12}^3} \quad (2.18)$$

Quindi la soluzione dell'integrale è la seguente:

$$Mp = \frac{\mu_0}{2\pi} \cos\theta \left[ (\alpha + l) \tanh^{-1} \frac{m}{R_1 + R_2} - (\beta + m) \tanh^{-1} \frac{l}{R_1 + R_4} + \right. \\ \left. + \alpha \tanh^{-1} \frac{m}{R_3 + R_4} - \beta \tanh^{-1} \frac{l}{R_2 + R_3} \right] - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\Omega d}{\tan\theta} \quad (2.19)$$

dove  $\Omega$  è uguale a :

$$\Omega = \tan^{-1} \frac{d^2 \cos\theta + (\alpha + l)(\beta + m) \sin^2\theta}{dR_1 \sin\theta} - \tan^{-1} \frac{d^2 \cos\theta + (\alpha + l)\beta \sin^2\theta}{dR_2 \sin\theta} - \\ - \tan^{-1} \frac{d^2 \cos\theta + \alpha\beta \sin^2\theta}{dR_3 \sin\theta} - \tan^{-1} \frac{d^2 \cos\theta + \alpha(\beta + m) \sin^2\theta}{dR_4 \sin\theta} \quad (2.20)$$



Dopo aver effettuato le seguenti sostituzioni  $R_1=Bb$ ,  $R_2=Ba$ ,  $R_3=Aa$ ,  $R_4=Ab$ , applicando il teorema dei coseni sono state ricavate le relative distanze.

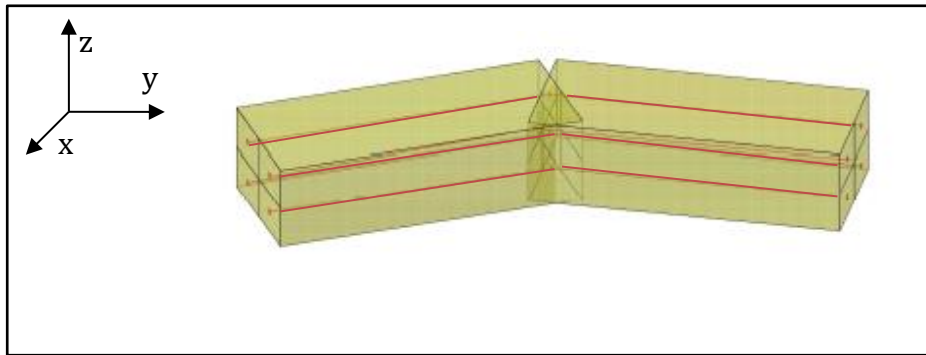
$$R_1^2 = d^2 + (\alpha + l)^2 + (\beta + m)^2 - 2(\alpha + l)(\beta + m)\cos\theta \quad (2.21.a)$$

$$R_2^2 = d^2 + (\alpha + l)^2 + \beta^2 - 2\beta(\alpha + l)\cos\theta \quad (2.21.b)$$

$$R_3^2 = d^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta \quad (2.21.c)$$

$$R_4^2 = d^2 + \alpha^2 + (\beta + m)^2 - 2\alpha(\beta + m)\cos\theta \quad (2.21.d)$$

Con la (2.19) è possibile calcolare le mutue induttanze parziali tra filamenti di due parallelepipedi aventi direzioni generiche.



**Figura 2.9** Rappresentazione di due parallelepipedi con i relativi filamenti per il calcolo della mutua induttanza.

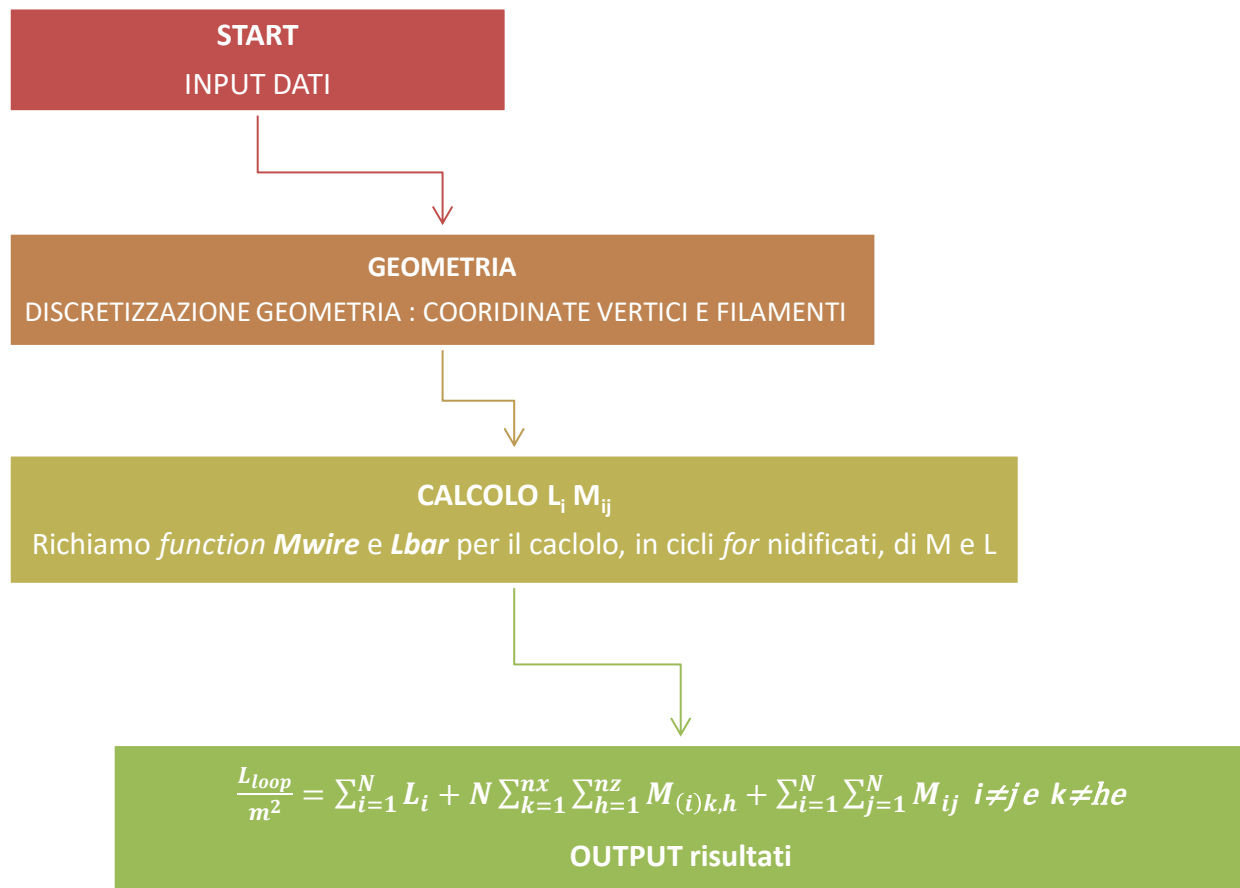
Nel prossimo capitolo sarà sviluppato l'algoritmo e verrà eseguita la validazione di una geometria generica confrontando i risultati con soluzioni analitiche.

# Capitolo 3

## Descrizione algoritmo

### 3.1 INTRODUZIONE

Nella prima parte di questo capitolo saranno descritti i passi effettuati per la compilazione del codice (sviluppato in ambiente MatLab). Sarà illustrata la logica utilizzata dall'algoritmo con i relativi passaggi : input dati, coordinate dei vertici, discretizzazione geometria, calcolo di M e L parziali e somma dei contributi per ricavare l'autoinduttanza o la mutua induttanza complessiva negli avvolgimenti. Nella seconda parte, verrà eseguita la validazione dell'algoritmo, analizzando, rispettivamente, l'auto e la mutua induttanza di due parallelepipedi disposti nello spazio di cui si conoscono le formule analitiche.



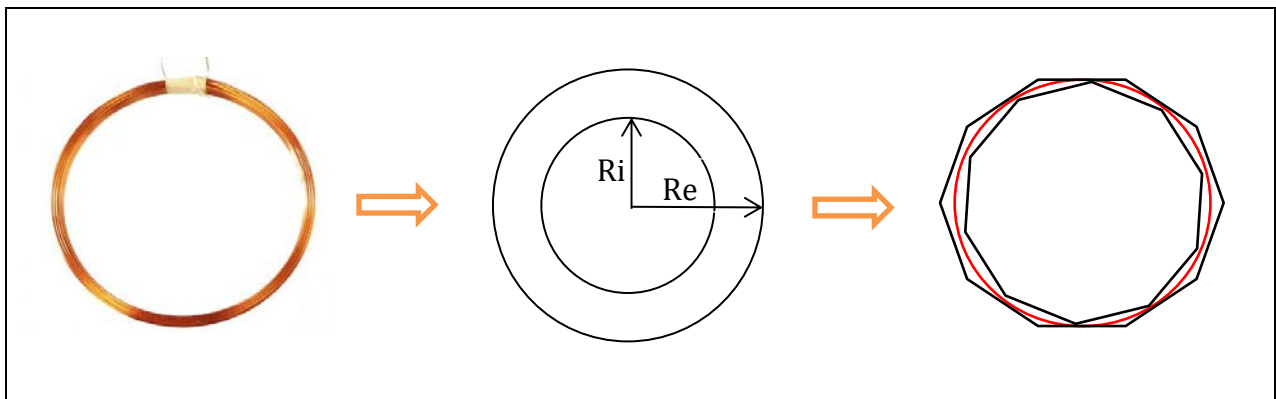
## 3.2. ILLUSTRAZIONE DEL METODO

### 3.2.1 Geometrie : Discretizzazione

Il primo passo da compiere è l'analisi geometrica dell'avvolgimento, eseguendo la discretizzazione (presentata al §2.3) della struttura. In questo paragrafo sono state eseguite alcune discretizzazioni di geometrie note. Esse, danno la possibilità di comprendere al meglio il processo di discretizzazione da attuare secondo la geometria dell'avvolgimento. Nel caso di avvolgimenti con geometrie complesse è possibile utilizzare il *software* AutoCAD ricavandone i vertici per la definizione della struttura discretizzata.

#### Geometria circolare a sezione rettangolare

Un metodo geometrico che consente un'approssimazione di un generico avvolgimento circolare con  $N$  parallelepipedi è basato sulla considerazione dei poligoni regolari inscritti e circoscritti alle circonferenze interne ed esterne della geometria circolare. Se ne riassumono brevemente i passi: è evidente che la circonferenza è maggiore del perimetro di qualsiasi poligono inscritto in essa e minore del perimetro di qualsiasi poligono circoscritto.



**Figura 3.1** Costruzione geometrica della geometria circolare.

Quindi, se si considerano due poligoni regolari, uno inscritto e l'altro circoscritto, si osserva che man mano che aumenta il numero dei lati, si verifica che i contorni dei due poligoni tendono ad avvicinarsi sempre più alla circonferenza. La circonferenza rimane sempre compresa fra i perimetri di poligoni regolari, inscritti e circoscritti ad essa, la sua lunghezza rimane determinata sempre con maggiore approssimazione, via via che si considerano poligoni con un sempre maggior numero di lati, di modo che scegliendo i due poligoni con un numero di lati sufficientemente grande è possibile raggiungere l'approssimazione desiderata.

Uguagliando l'area del poligono a quella del cerchio si ottiene il raggio del poligono.

$$A_{poligono} = A_{cerchio} \rightarrow \pi R_c^2 = NR_p^2 \sin \frac{\pi}{N} \quad (3.1)$$

Raggio poligono esterno e interno della geometria circolare :

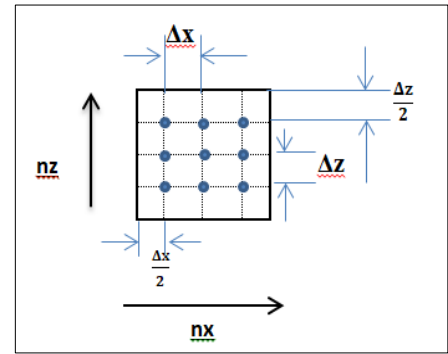
$$R_{i,e} \text{ poligono} = R_{i,e} \text{ cerchio} \sqrt{\frac{\frac{\pi}{N}}{\sin \frac{\pi}{N}}} \quad (3.2)$$

Sezione rettangolare del parallelepipedo :

h : altezza.

s =  $R_{ep} - R_{ip}$  Spessore.

Punti in corrispondenza delle coordinate spaziali dei filamenti rettilinei del singolo parallelepipedo :



**Figure 3.2** Disposizione filamenti sezione rettangolare.

Asse X

$$X = \frac{Re - Ri}{nx} \left( i_x - \frac{1}{2} \right) + R_i \quad i_x = 1, 2, \dots, nx \quad (3.3)$$

Intervallo posizione fili sull'asse x :

$$\Delta_x = \frac{Re - Ri}{nx} \quad (3.4)$$

La posizione del primo e ultimo filo lungo l'asse x è pari a :  $\left( \frac{\Delta_x}{2} + R_i \right)$  e  $\left( \frac{\Delta_x}{2} - R_e \right)$ . Tale disposizione dei fili, eseguita anche lungo l'asse z, dà la possibilità di avere per ogni filamento rettilineo un parallelepipedo che lo contiene.

Asse Z

$$Z_{iz} = \frac{h}{nz} \left( i_z - \frac{1}{2} \right) - \frac{h}{2} \quad i_z = 1, 2, 3, \dots, nz \quad (3.5)$$

Intervallo posizione fili sull'asse z :

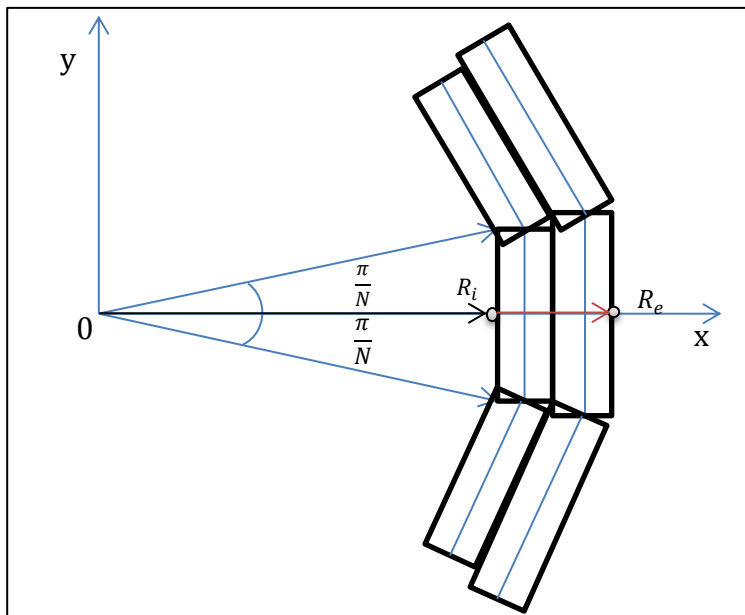
$$\Delta_z = \frac{h}{nz} \quad (3.6)$$

Posizione del primo e ultimo filo dell'asse z dal bordo superiore e inferiore ( $\Delta_1 = \frac{\Delta z}{2}$ ;  $\Delta_n = \frac{\Delta z}{2}$ ).

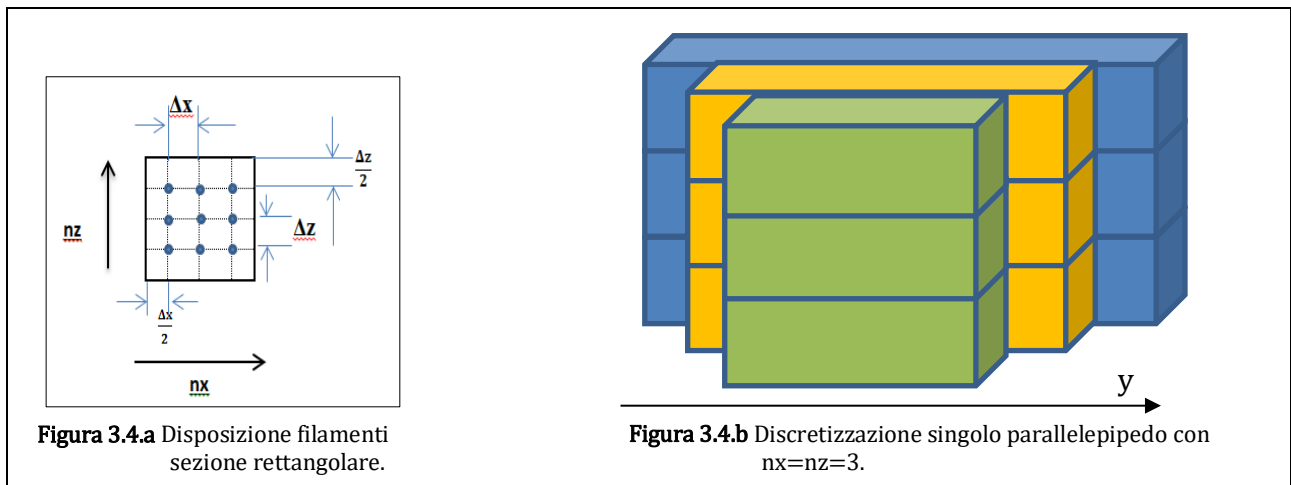
**Asse Y**

Dai punti X si ottengono le posizioni iniziali e finali del singolo filamento rettilineo lungo l'asse y:

$$Y_{ipx} = -X_{ix} \tan \frac{\pi}{N} \quad Y_{ifx} = X_{ix} \tan \frac{\pi}{N} \quad (3.7)$$



**Figure 3.3** Costruzione geometria circolare con parallelepipedi avente sezione rettangolare.



**Figura 3.4.a** Disposizione filamenti sezione rettangolare.

**Figura 3.4.b** Discretizzazione singolo parallelepipedo con  $n_x = n_z = 3$ .

La Fig. 3.4.a, rappresenta la posizione dei fili all'interno di ogni parallelepipedo e quella 3.4.b la suddivisione del singolo parallelepipedo di una geometria circolare. Tale suddivisione permette di approssimarne con maggiore efficienza la geometria circolare a discapito del costo computazionale.

Una volta ricavati i vertici del singolo parallelepipedo e del filamento rettilineo contenuto al suo interno, (nel caso di  $m$  filamenti rettilinei saranno individuati  $m$  sotto-parallelepipedi, Fig. 3.4.b) si esegue la rotazione attorno all'asse  $z$ , definendo così la geometria circolare. Così facendo, si ricavano tutti i vertici dei filamenti dell'avvolgimento circolare.

Per eseguire la rotazione si utilizza la matrice di rotazione :

$$\begin{bmatrix} X_{1p} \\ Y_{1p} \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

**Qualora la sezione della geometria fosse circolare**, si eguagliano le due sezioni (rettangolare e circolare); in questo modo si ricava il lato della sezione quadrata corrispondente. Eliminando i quattro filamenti rettilinei agli angoli, si va ad approssimare la sezione quadrata a quella circolare.

$L$  = lato sezione quadrata;

$n$  = numero di sotto-sezioni che compongono la sezione quadrata;

$D$  = diametro sezione circolare;

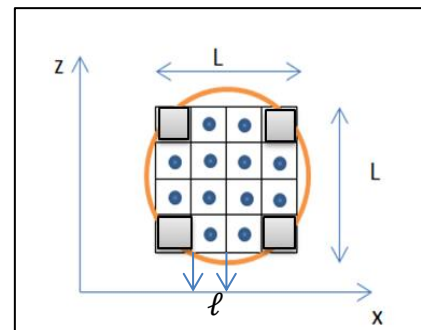
$\ell$  = lato sotto-sezione.

$$\ell = \sqrt{\frac{\pi}{n^4}} D \quad (3.9)$$

### Geometria rettangolare a sezione rettangolare

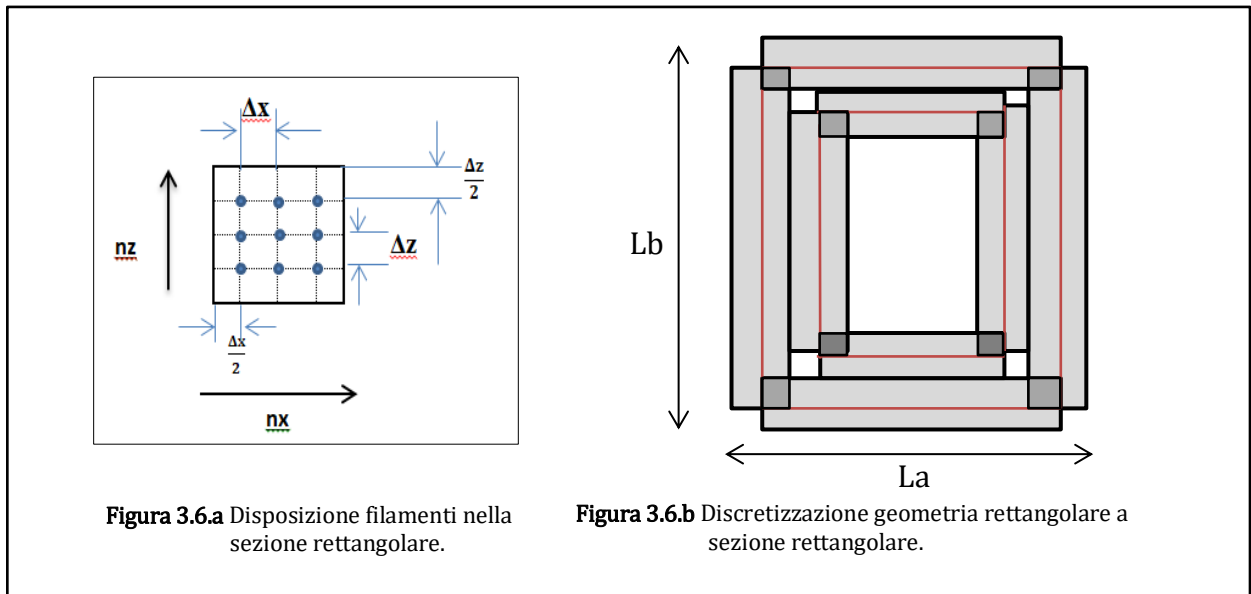
In questo caso la geometria rettangolare è stata divisa in 4 lati di lunghezza esterna, rispettivamente, lato lungo uguale a  $(Lb - \Delta x)$  e lato corto uguale a  $(La - \Delta x)$ , dove  $\Delta x$  è il passo tra due filamenti consecutivi.

La geometria è stata costruita sovrapponendo il lato lungo e corto all'altezza degli 4 angoli. Nel caso di un singolo filamento rettilineo (per lato) è stato individuato un unico parallelepipedo che lo contenesse. Nel caso di  $m$  filamenti rettilinei (per lato) il singolo parallelepipedo è stato



**Figura 3.5** Disposizione filamenti sezione circolare.

suddiviso a sua volta in  $m$  parallelepipedi tanti quanti sono i filamenti ed è stata eseguita la sovrapposizione dei lati  $m$  volte come in Fig. 3.6.



### Posizione filamenti Asse X.

Punti angolo inferiore sinistro :

$$X_1 = \frac{s}{nx} \left( i_x - \frac{1}{2} \right) \quad i_x = 1, 2, \dots, nx \quad (3.10)$$

Punti angolo inferiore destro :

$$X_2 = L_a + s - \frac{s}{nx} \left( i_x - \frac{1}{2} \right) \quad i_x = nx, \dots, 2, 1 \quad (3.11)$$

Punti angolo superiore destro :

$$X_3 = X_2$$

Punti angolo superiore sinistro :

$$X_4 = \frac{s}{nx} \left( i_x - \frac{1}{2} \right), \quad i_x = nx, \dots, 2, 1 \quad (3.12)$$

dove  $s$  rappresenta lo spessore del lato e  $nx$  il numero di filamenti.

### Posizione filamenti Asse Y.

$$Y_1 = X_1$$

$$Y_2 = \frac{s}{nx} \left( i_x - \frac{1}{2} \right), \quad nx, \dots, 2, 1 \quad (3.13)$$

$$Y_3 = L_b + s - \frac{s}{nx} \left( i_x - \frac{1}{2} \right), \quad i_x = nx, \dots, 2, 1 \quad (3.14)$$

$$Y_4 = Y_3$$

### Posizione filamenti Asse Z.

$$Z_i = \left[ \left( \frac{h}{2} \right) \left( i_z - \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{h}{2} \quad (3.15)$$

Combinando i punti  $[X_1, X_2, X_3, X_4]$ ,  $[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4]$ ,  $[Z_i]$  si ottengono tutti i vertici dei filamenti dell'avvolgimento rettangolare.

Una volta definita la geometria discretizzata dell'avvolgimento e ricavato i vertici dei filamenti rettilinei, si procede con il calcolo dell'auto e mutua induttanza parziale con le funzioni definite al paragrafo §2.3.

#### *3.2.2 Calcolo Auto e mutue induttanze parziali*

Dopo avere ricavato la geometria discretizzata dell'avvolgimento da analizzare, si può passare al punto successivo, parte centrale del codice, che riguarda il calcolo delle auto e mutue induttanze parziali.

Il codice, riceve in ingresso :

- Le dimensioni del generico avvolgimento;
- Il numero di suddivisioni N di parallelepipedi con cui si vuole rappresentare la struttura;
- Il numero di filamenti, lungo l'asse x e z (nx, nz) con cui si vuole valutare la mutua induttanza.

1. Esegue la discretizzazione accennata nel §3.2.1.

2. Richiama le due funzioni di base ( $L_{bar}$  e  $M_{wire}$ ) all'interno del ciclo *for*.

Di seguito sarà illustrato il procedimento utilizzato nei cicli *for* per il calcolo delle auto e



mutue induttanze parziali di un avvolgimento circolare, mediante l'utilizzo delle due funzioni di base (*Lbar e Mwire*).

a. La funzione *Lbar* :

- Discretizzazione avvolgimento circolare con un unico filamento rettilineo. In questo caso, i parallelepipedi costituenti la geometria hanno tutti la stessa dimensione, di conseguenza le autoinduttanze sono tutte uguali, quindi basta calcolare quella del singolo parallelepipedo e moltiplicare il risultato per le N suddivisioni.
- Discretizzazione avvolgimento circolare con *m* filamenti rettilinei. In questo caso il singolo parallelepipedo viene suddiviso a sua volta in *m* parallelepipedi aventi lunghezza variabile lungo l'asse y quando si passa da :

$$X_1 = R_{i,poligono} + \frac{\Delta x}{2} \rightarrow X_{i+1} = R_{poligono,i} + \frac{\Delta x}{2} + i\Delta x \quad i=0,1,2, n-1$$

di conseguenza vanno valutate tutte le *m* autoinduttanze ricavate dalla suddivisione del parallelepipedo e il risultato ottenuto va moltiplicare per le N suddivisioni della geometria.

b. La funzione *Mwire*:

- Discretizzazione avvolgimento circolare con un unico filamento rettilineo. In questo caso, essendoci un unico filamento, il calcolo della mutua induttanza si effettua valutando solo quella presente tra i filamenti dei parallelepipedi. Inoltre, considerata la simmetria della geometria circolare, basta calcolare le mute solo tra i N/2 parallelepipedi e moltiplicare il risultato per 2.

Esempio. Avvolgimento circolare con N=5 (suddivisioni) e avente un unico filamento rettilineo ( $n_x=n_z=1$ ), da cui si ottiene la seguente matrice :

$$L_{loop} = \begin{bmatrix} L & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ M_{21} & L & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ M_{31} & M_{32} & L & M_{34} & M_{35} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & L & M_{45} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & L \end{bmatrix}$$

essendo  $M_{ij}=M_{ji}$  Basta eseguire il calcolo degli elementi al di sopra della diagonale e moltiplicare il risultato per 2, ottenendo così tempi di calcolo inferiori.

- Discretizzazione avvolgimento circolare con *m* filamenti rettilinei. In questo caso i filamenti per singolo parallelepipedo sono *m*, quindi va valutata sia la mutua induttanza interna del singolo parallelepipedo sia quella tra i filamenti dei

parallelepipedi. Anche in questo caso si può considerare la simmetria della geometria circolare, calcolando solo le mutue tra i  $N/2$  parallelepipedi e moltiplicare il risultato per 2.

➤ Esempio. Avvolgimento circolare con  $N=5$  (suddivisioni) e avente 4 filamenti rettilinei ( $n_x=n_z=2$ ), da cui si ottengono le seguenti matrici :

- La prima rappresenta l'auto induttanza del singolo parallelepipedo, isolato.

$$L_i = \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & L_2 & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & L_3 & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & L_4 \end{bmatrix}$$

- La seconda rappresenta la mutua induttanza tra gli  $N$  parallelepipedi della geometria circolare.

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} L & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ M_{21} & L & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ M_{31} & M_{32} & L & M_{34} & M_{35} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & L & M_{45} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & L \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso, come in quello ad un solo filamento rettilineo, si può considerare la simmetria della geometria circolare per entrambe le matrici calcolando solo le mutue delle diagonali superiori e moltiplicare il risultati per 2.

3. Somma i contributi delle auto e mutue induttanze parziali ottenute al punto precedente.

- a. Somma delle autoinduttanze parziali degli  $N$  parallelepipedi :

$$L_i = N \sum_{i=1}^m L_i \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ (filamenti)} \quad (3.16)$$

- b. Somma delle mutue induttanze parziali interne ad ogni parallelepipedo :

$$M_i = N \sum_{i=1}^m M_{(i),j,k} \quad j, k = 1, 2, \dots, m \quad j \neq k \quad (3.17)$$

- c. Somma delle mutue induttanze parziali tra parallelepipedi :

$$M_{ij} = 2 \sum_{i=1}^{N/2} M_{ik,jh} \quad k, h = 1, 2, \dots, m \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad j \neq i \quad (3.18)$$

4. Esegue la somma totale ricavando l'induttanza complessiva dell'avvolgimento.

$$L_{loop} = L_i + M_i + M_{ij}$$

Qualora il numero di filamenti con cui si è suddiviso il parallelepipedo risultano diversi al numero di spire dell'avvolgimento analizzato, basta effettuare il seguente passaggio :

$$L_{\text{loop}} = \left( \frac{L_i + M_i + M_{ij}}{m^2} \right) N^2 \quad (3.19)$$

dove N, in questo caso, rappresenta il numero di spire.

Lo stesso procedimento viene applicato per l'analisi della mutua induttanza tra due avvolgimenti. In appendice A sono riportati i codici sviluppati di tutte le geometrie analizzate in questo lavoro di tesi.

### 3.3. VALIDAZIONE ALGORITMO

La validazione dell'algoritmo è stata eseguita creando due codici con le formule analitiche dell'integrale di *Neumann* presenti in letteratura [13]. Tali formule trattano le soluzioni esatte delle auto e mutue induttanze, riferite, rispettivamente, al singolo parallelepipedo e a due parallelepipedi disposti parallelamente nello spazio.

Sia l'autoinduttanza che la mutua induttanza sono state valutate al crescere del numero di filamenti  $m$ .

#### 3.3.1 Approccio analitico mediante lo sviluppo della L'integrale Di Neumann

In generale la mutua induttanza tra due conduttori è in funzione della distribuzione di corrente al suo interno. Un conduttore con una sezione costante può essere attraversato da un fascio di filamenti, ognuno avente un'area  $dA$  e una portata di corrente pari a  $JdA$ . La densità di corrente,  $J$ , è assunta costante lungo ogni filamento, ma può varia da filamento a filamento. La mutua induttanza,  $M$ , tra due conduttori avente sezione  $A_1$  e  $A_2$  e portata di corrente  $I_1$  e  $I_2$  si ricava dall'energia ed è pari :

$$M = \frac{1}{I_1 I_2} \int_{A_1} \int_{A_2} M_{12} J_1 J_2 dA_1 dA_2 \quad (3.20)$$

Dove  $M_{12}$  è la mutua induttanza tra il filamento uno, avente portata di corrente  $J_1 dA_1$ , e il filamento due con portata di corrente  $J_2 dA_2$ . Poiché si presume che la corrente sia costante lungo ogni filamento, la mutua induttanza tra due filamenti, data dalla formula di *Neumann*, è pari a :

$$M_{12} = 0.001 \int_{l_1} \int_{l_2} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r} dl_1 dl_2 \quad (3.21)$$

dove  $r$  rappresenta la distanza tra due elementi di lunghezza, rispettivamente,  $dl_1$  e  $dl_2$  posti sui due filamenti avente lunghezza complessiva  $l_1$  e  $l_2$ . Utilizzando lunghezze espresse in centimetri, la  $M_{12}$  darà il risultato in micro-henry. L'auto e mutua induttanza di una parte del circuito chiuso può essere calcolata, a condizione che l'induttanza totale del circuito includa i contributi di ciascuna parte. Se la densità di corrente  $\mathbf{J}$  è costante nel conduttore, l'integrale (3.21) si riduce così :

$$M = \frac{1}{A_1 A_2} \int_{A_1} \int_{A_2} M_{12} dA_1 dA_2 \quad (3.22)$$

In questo  $M$  dipende solo dalle dimensioni del circuito. Usando (3.22), può essere valutata la mutua induttanza tra due conduttori aventi sezioni costanti e densità di corrente uniforme (ma non necessariamente uguali).

Per il calcolo della mutua induttanza tra due parallelepipedi, di dimensioni diverse, posti a una certa distanza e quote, si eseguono i seguenti passaggi :

$$M_b = \frac{1}{bc} \int_P^{P+c} \int_0^b M_t dy_1 dy_2 \quad (3.23)$$

dove  $M_t$  è la mutua induttanza tra due lastre sottili :

$$M_t = \frac{1}{ad} \int_E^{E+d} \int_0^a M_f dx_1 dx_2 \quad (3.24)$$

di conseguenza  $M_f$  è la mutua tra due filamenti ed risulta uguale :

$$M_f = 0.001 \left[ z \ln(z + \sqrt{z^2 + \rho^2} - \sqrt{z^2 + \rho^2}) \right]_{l_2+l_3-l_1, l_3}^{l_3-l_1, l_3+l_2} (Z) \quad (3.25)$$

Quindi l'espressione finale è la seguente :

$$M_b = \left[ \left[ \left( \frac{y^2 z^2}{4} - \frac{y^4}{24} - \frac{z^4}{24} \right) x \ln \frac{(x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2 z^2}{4} - \frac{x^4}{24} - \frac{z^4}{24} \right] y \ln \frac{(y + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right. \\ \left. + \frac{x^2 y^2}{4} - \frac{x^4}{24} - \frac{y^4}{24} \right] z \ln \frac{(z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{60} (x^4 + y^4 + z^4 - 3x^2 y^2 - 3x^2 z^2 - 3z^2 x^2) (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\ - \frac{xyz^3}{6} \operatorname{atan} \frac{xy}{z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{xy^3 z}{6} \operatorname{atan} \frac{xz}{y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ - \frac{x^3 y z}{6} \operatorname{atan} \frac{yz}{x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \left[ \begin{array}{c} E - a, E + d \\ (x) \\ E + d - a, E \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} P - b, P + c \\ (y) \\ P + c - b, P \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} l_3 - l_1, l_3 + l_2 \\ (z) \\ l_3 + l_2 - l_1, l_3 \end{array} \right] \quad (3.26)$$

$$\left[ \left[ \left[ f(x, y, z) \right] \begin{matrix} q1, q2 \\ (x) \end{matrix} \right] \begin{matrix} r1, r3 \\ (y) \end{matrix} \right] \begin{matrix} s1, s2 \\ (z) \end{matrix} \right] \equiv \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 (-1)^{i+j+k+1} f(q_i, r_j, s_k) \quad (3.27)$$

L'auto induttanza è un caso particolare della mutua induttanza tra due conduttori. Essa può essere espressa come la mutua induttanza di due conduttori con coordinate coincidenti. Quindi l'integrale di *Neumann* diventa :

$$L = \frac{1}{I^2} \int_{A_1} \int_{A_2} M_{12} \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 dA_1 dA_2 \quad (3.28)$$

Dove  $M_{12}$  è la mutua induttanza tra due filamenti nella condizione di corrente,  $\mathbf{J}dA$ , costante in ogni filamento. Se la densità di corrente all'interno del conduttore è anch'essa costante allora l'integrale (3.28) diviene :

$$L = \frac{1}{A^2} \int_A \int_A M_{12} dA_1 dA_2 \quad (3.29)$$

La soluzione dell'integrale 3.29 riferito al singolo parallelepipedo è la seguente :

$$L_b = \frac{0.001}{a^2 b^2} \left[ \left[ \left[ f(x, y, z) \right] \begin{matrix} -a, a \\ (x) \end{matrix} \right] \begin{matrix} -b, b \\ (y) \end{matrix} \right] \begin{matrix} -l, l \\ (z) \end{matrix} \right] \quad (3.30)$$

dove  $f(x, y, z)$  è uguale alla (3.27).

Utilizzando i risultati ottenuti dalle formule analitiche dei due integrali (3.27 e 3.30), sono state implementate due funzioni in ambiente Matlab (riportante in appendice A) utili al confronto per la validazione dell'algoritmo.

### 3.3.2 Validazione

Sono state eseguite due prove sia per la validazione della mutua induttanza sia per l'autoinduttanza. I risultati ottenuti sono stati confrontati con le formule analitiche, analizzando tempi di calcolo e grafici di convergenza.

**Esempio 1 mutua induttanza**

Parallelepipedo A

$a=5 [cm]; b=1 [cm]; \ell_1=10 [cm]$ .

Parallelepipedo B

$d=3 [cm]; c=4 [cm]; \ell_2=10 [cm]$ .

Posizione di B rispetto ad A

$P=10 [cm]; E=10 [cm]; \ell_3=5 [cm]$ ;

**Esempio 2 mutua induttanza**

Parallelepipedo A

$a=5 [cm]; b=2 [cm]; \ell_1=10 [cm]$ .

Parallelepipedo B

$d=4 [cm]; c=3 [cm]; \ell_2=12 [cm]$ .

Posizione di B rispetto ad A

$P=6 [cm]; E=6 [cm]; \ell_3=7 [cm]$ .

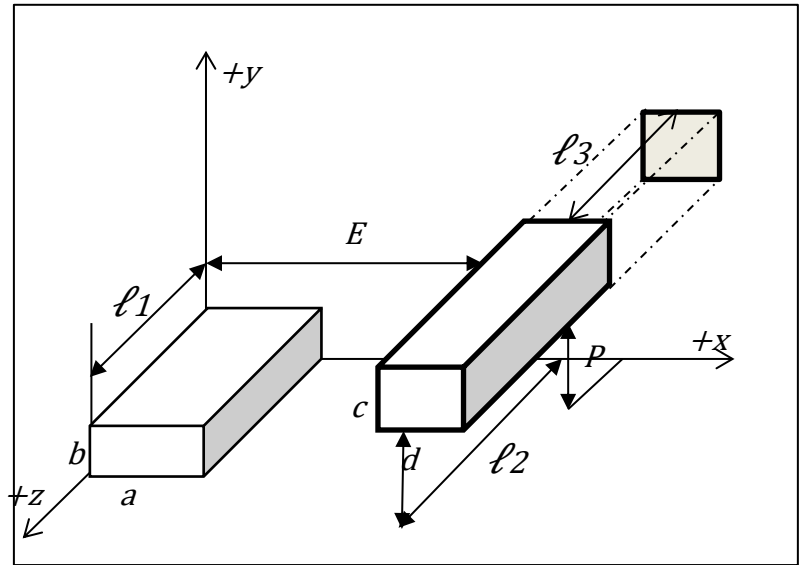


Figure 3.7 Mutua induttanza tra due parallelepipedi di sezione rettangolare.

Tabella 3.1 dati riassuntivi delle due prove effettuate per il calcolo della mutua induttanza.

nx	nz	M	TEMPO ESECUZIONE	M	$\varepsilon\%$ [13]
[Nr]	[Nr]	[ $\mu H$ ]	[s]	[ $\mu H$ ] Sol. Analitica	$\left[ \frac{V_e - V_m}{V_e} \right] 100$
3	3	0,006223	0,002	0,006340100612701	1,85
5	5	0,006272	1,13		1,07
8	8	0,006297	2,35		0,68
15	15	0,006316	4,006		0,38
30	30	0,006328	35,658		0,19
3	3	0,010051	0,0017	0,010363335015390	3,02
5	5	0,010177	1,08		1,8
8	8	0,010247	2,24		1,12
15	15	0,010301	4,014		0,59
30	30	0,010332	36,4128		0,29

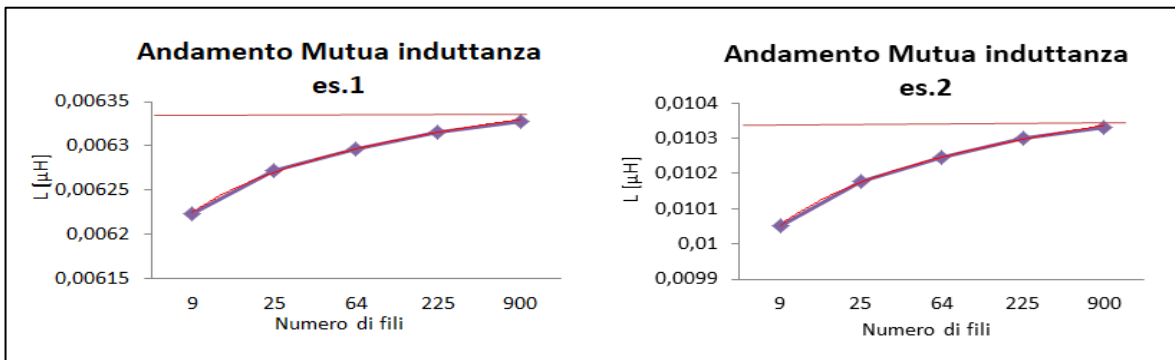


Figure 3.8 Andamento mutua induttanza al variare del numero di filamenti rettilinei.

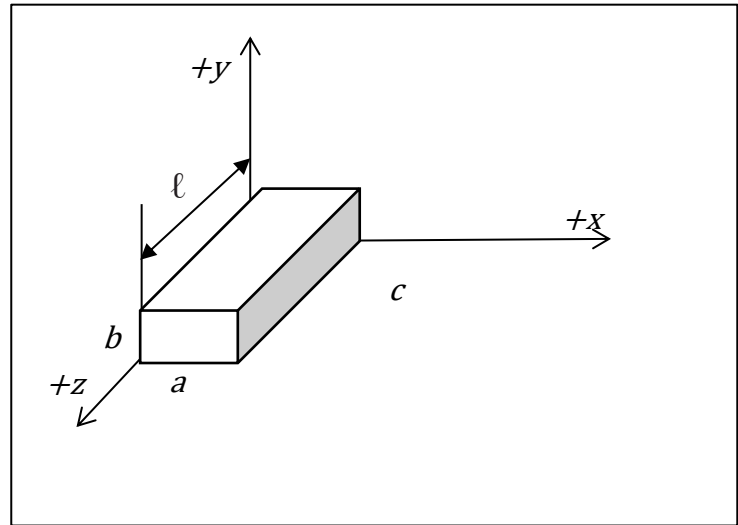
**Esempio 1 autoinduttanza**

Parallelepipedo A

$a=5 [cm]; b=1[cm]; \ell=10[cm];$

**Esempio 2 auto induttanza**

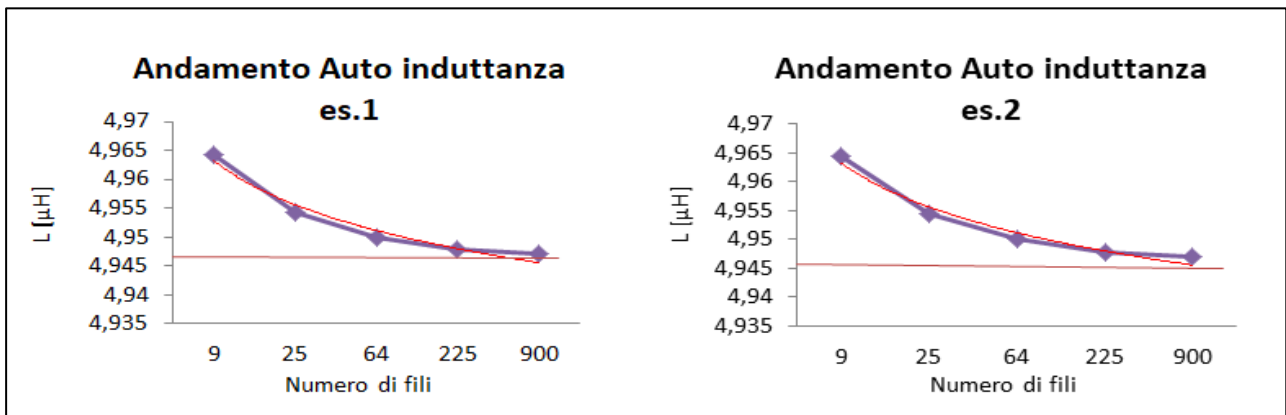
$a=5[cm]; b=1[cm]; \ell=10[cm];$



**Figure 3.13** Auto induttanza parallelepipedo di sezione rettangolare.

**Tabelle 3.2** dati riassuntivi delle due prove effettuate per il calcolo dell'autoinduttanza.

nx	nz	L	TEMPO ESECUZIONE	L	$\epsilon\%$
[Nr]	[Nr]	[ $\mu H$ ]	[s]	[ $\mu H$ ] <i>Sol. Analitica</i>	$\left  \frac{V_e - V_m}{V_e} \right  100$
3	3	0,03482	0,003	0,034537414701320	0,82
5	5	0,03467	0,46		0,38
8	8	0,03459	1,06		0,15
15	15	0,03455	2,28		0,04
30	30	0,03454	10,68		0,0075
3	3	4,964336	0,005	4,946818925054913	0,35
5	5	4,954311	0,37		0,15
8	8	4,949976	1,17		0,06
15	15	4,947762	2,03		0,019
30	30	4,947060	10,65		0,0049



**Figure 3.14** Andamento auto induttanza al variare del numero di filamenti rettilinei.

I risultati ottenuti, sia nella valutazione della mutua induttanza tra parallelepipedi che l'autoinduttanza del singolo parallelepipedo, dimostrano la validità del metodo. Infatti, l'errore percentuale commesso rispetto alla forma analitica, in entrambi i casi, è inferiore all'1% già con una suddivisione 3x3.

Il costo computazionale aumenta con l'aumentare del numero di fili. Infatti, il tempo di esecuzione nel calcolo della mutua induttanza con suddivisione 30x30 risulta essere pari a 36,4128 [s], con un errore percentuale dello 0,29% rispetto all'errore dello 0,59% con una suddivisione 15x15.

La scelta del numero di filamenti utile al calcolo della mutua induttanza deve essere effettuata evitando che il tempo di esecuzione non sia eccessivo; esso varia di geometria in geometria.

Nel prossimo capitolo saranno eseguite diverse applicazioni con geometrie note e i risultati saranno confrontati con quelli di altri metodi presenti in letteratura.





# Capitolo 4

## Esempi applicativi

### 4.1 INTRODUZIONE

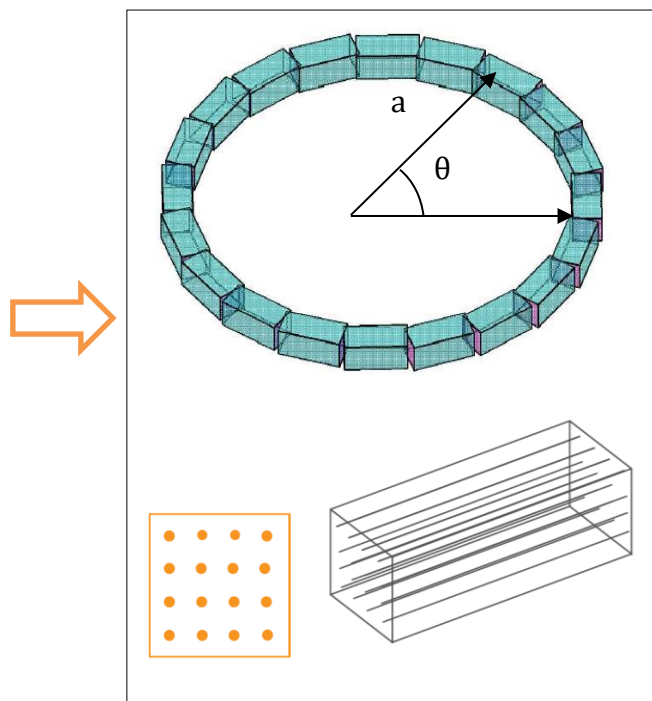
In quest'ultimo capitolo saranno presentati alcuni esempi applicativi di calcolo di auto e mutua induttanza, e sarà eseguito il confronto con i risultati in letteratura. Ogni applicazione verrà eseguita ricavando la geometria discretizzata della struttura, verrà calcolata l'auto e mutua induttanza complessiva a variare dei numeri di filamenti, saranno analizzati gli errori relativi rispetto ad altri metodi e il tempo di esecuzione del processo.

### 4.2 Autoinduttanza di un avvolgimento : Esempi numerici. [14] [3] [15]

La discretizzazione della geometria circolare è stata già discussa al §3.2 essa avviene mediante parallelepipedi e filamenti come mostrato nella Fig 4.2.



**Figure 4.1** Avvolgimento circolare a sezione rettangolare.



**Figure 4.2** Rappresentazione geometrica.

#### 4.2.1 Calcolo Induttanza avvolgimento circolare a sezione rettangolare [16]

Si considera una **geometria circolare con sezione rettangolare**.

I parametri utilizzati nell'articolo sono i seguenti :

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1} e \quad \beta = \frac{l_1}{2R_2} \quad (4.1)$$

##### Esempio numerico 1

Con  $\alpha=1,5$ ; e  $\beta=0,25$  si ottengono i seguenti dati di dimensionamento da inserire in ingresso al codice  $R_i=1$  [m],  $R_e=1,5$  [m] e  $h=0,5$  [m].

Al variare del numero di filamenti si ottengono i seguenti risultati:

**Tabella 4.1** Induttanza geometria circolare sezione rettangolare- confronto con risultati analitici.

N	$n_x$	$n_z$	$L/N^2R_1$	TEMPO ESECUZIONE	$L/N^2R_1$	$L/N^2R_1$	$L/N^2R_1$	$\varepsilon\%$ [11]	$\varepsilon\%$ [12]	$\varepsilon\%$ [13]
[Nr]	[Nr]	[Nr]	[ $\mu\text{H/m}$ ]	[s]	[ $\mu\text{H/m}$ ] [11]	[ $\mu\text{H/m}$ ] [12]	[ $\mu\text{H/m}$ ] [13]	$\left[\frac{V_e - V_m}{V_e}\right] 100$		
12	3	3	2,6130	0,103	2,86930	2,8693034861	2,86930	8,93	8,932	8,93
12	6	6	2,8196	0,615				1,732	1,732	1,73
12	10	10	2,8846	3,914				0,53	0,533	0,53

##### Esempio numerico 2

Con  $\alpha=3$ ; e  $\beta=1$  si ottengono i seguenti dati di dimensionamento da inserire in ingresso al codice  $R_i=1$  [m],  $R_e=4$  [m] e  $h=2$  [m].

Al variare del numero di filamenti si ottengono i seguenti risultati:

**Tabella 4.2** Induttanza geometria circolare sezione rettangolare- confronto con risultati analitici.

N	$n_x$	$n_z$	$L/N^2R_1$	TEMPO ESECUZIONE	$L/N^2R_1$	$L/N^2R_1$	$L/N^2R_1$	$\varepsilon\%$ [13]	$\varepsilon\%$ [11]
[Nr]	[Nr]	[Nr]	[ $\mu\text{H/m}$ ]	[s]	[ $\mu\text{H/m}$ ] [13]	[ $\mu\text{H/m}$ ] [11]	[ $\mu\text{H/m}$ ] [12]	$\left[\frac{V_e - V_m}{V_e}\right] 100$	
12	3	3	2,417	0,1	2,5332	2,5330	2,5330065469	4,594	4,586
12	5	5	2,452	0,325				3,199	3,192
12	8	8	2,516	1,624				0,6881	0,680
12	10	10	2,538	3,88				0,1838	0,192
14	10	10	2,526	4,40				0,2807	0,272
14	11	11	2,533	4,55				0,0130	0,0051

### Esempio numerico 3

Con  $\alpha=4$ ; e  $\beta=3$  si ottengono i seguenti dati di dimensionamento da inserire in ingresso al codice  $R_i=1$  [m],  $R_e=4$  [m] e  $h=6$  [m].

al variare dei numeri di filamenti si ha i seguenti risultati:

**Tabella 4.3** Induttanza geometria circolare sezione rettangolare- confronto con risultati analitici.

N	$n_x$	$n_z$	$L/N^2R_1$	TEMPO ESECUZIONE	$L/N^2R_1$	$L/N^2R_1$	$L/N^2R_1$	$\varepsilon\%$ [11]	$\varepsilon\%$ [12]	$\varepsilon\%$ [13]
[Nr]	[Nr]	[Nr]	[ $\mu\text{H/m}$ ]	[s]	[ $\mu\text{H/m}$ ] [11]	[ $\mu\text{H/m}$ ] [12]	[ $\mu\text{H/m}$ ] [13]	$\left[\frac{Ve - Vm}{Ve}\right] 100$		
12	3	3	2,4558	0,100	1,90140	1,90130	1,9012957998	29,157	29,164	29,165
12	6	6	1,9136	0,577				0,64	0,647	0,647
12	10	10	1,9113	3,929				0,521	0,526	0,526

### Esempio numerico 4

Con  $\alpha=7$ ; e  $\beta=6$  si ottengono i seguenti dati di dimensionamento da inserire in ingresso al codice  $R_i=1$  [m],  $R_e=7$  [m] e  $h=12$  [m].

Al variare del numero di filamenti si ottengono i seguenti risultati:

**Tabella 4.4** Induttanza geometria circolare sezione rettangolare- confronto con risultati analitici.

N	$n_x$	$n_z$	$L/N^2R_1$	TEMPO ESECUZIONE	$L/N^2R_1$	$L/N^2R_1$	$L/N^2R_1$	$\varepsilon\%$ [11]	$\varepsilon\%$ [12]	$\varepsilon\%$ [13]
[Nr]	[Nr]	[Nr]	[ $\mu\text{H/m}$ ]	[s]	[ $\mu\text{H/m}$ ] [11]	[ $\mu\text{H/m}$ ] [12]	[ $\mu\text{H/m}$ ] [13]	$\left[\frac{Ve - Vm}{Ve}\right] 100$		
12	3	3	3,7783	1,096	2,44750	2,44730	2,4472978794	54,374	3,778	3,778
12	6	6	2,5130	8.51				2,6762	2,513	2,513
12	10	10	2,4627	91.94				0,621	0,629	0,629

### Esempio numerico 5

Con  $\alpha=9$ ; e  $\beta=4$  si ottengono i seguenti dati di dimensionamento da inserire in ingresso al codice  $R_i=1$  [m],  $R_e=9$  [m] e  $h=8$  [m].

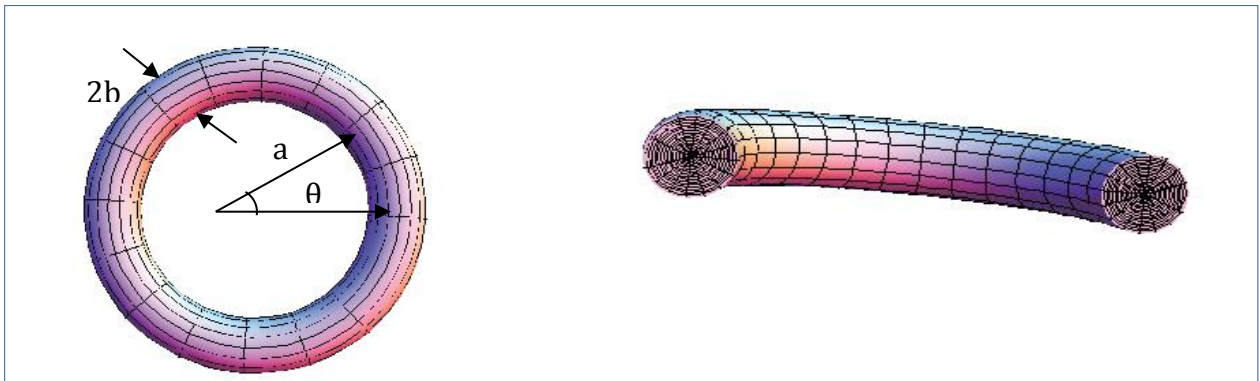
Al variare del numero di filamenti si ottengono i seguenti risultati:

**Tabella 4.5** Induttanza geometria circolare sezione rettangolare- confronto con risultati analitici.

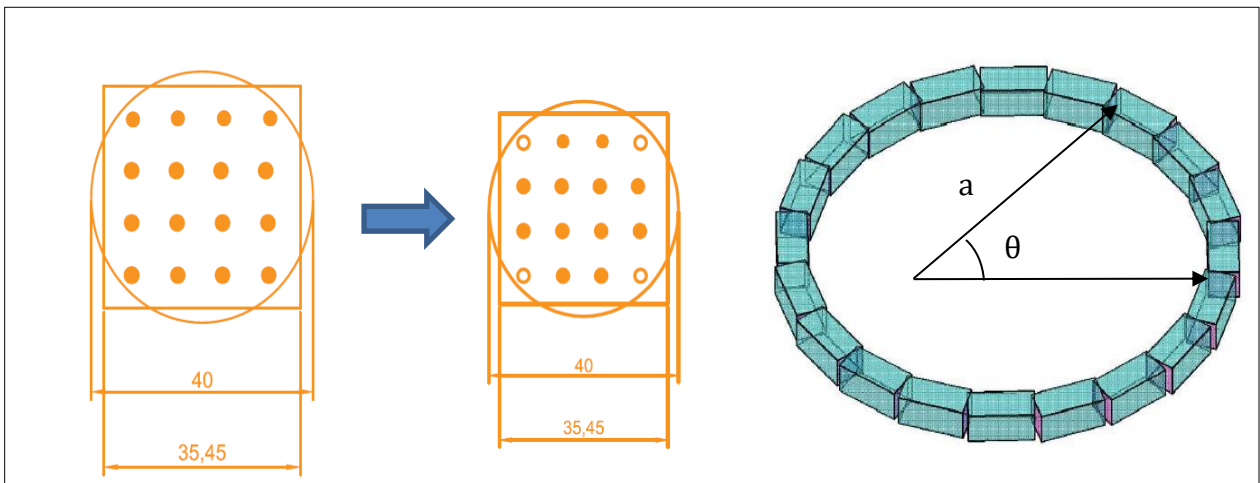
N	nx	nz	$L/N^2R_1$	TEMPO ESECUZIONE	$L/N^2R_1$	$L/N^2R_1$	$L/N^2R_1$	$\varepsilon\%$ [11]	$\varepsilon\%$ [12]	$\varepsilon\%$ [13]
[Nr]	[Nr]	[Nr]	[ $\mu\text{H/m}$ ]	[s]	[ $\mu\text{H/m}$ ] [11]	[ $\mu\text{H/m}$ ] [12]	[ $\mu\text{H/m}$ ] [13]	$\left[ \frac{Ve - Vm}{Ve} \right] 100$		
12	3	3	4,4728	0,0923	4,2675	-	4,2674017935	4,81		4,813
12	6	6	4,1739	0,572				2,193		2,191
12	10	10	4,2594	4,628				0,189		0,187

#### 4.2.2 Calcolo Induttanza avvolgimento circolare a sezione circolare [15]

Anche questa discretizzazione della geometria è stata già discussa al §3.2. Essa avviene in modo analogo alla sezione rettangolare, non considerando, ai fini del calcolo della mutua induttanza, i filamenti posti ai 4 vertici, Fig. 4.4.



**Figure 4.3** Avvolgimento circolare a sezione circolare.



**Figure 4.4** Rappresentazione geometrica discretizzata dell'avvolgimento circolare a sezione circolare.

Di seguito saranno illustrati alcuni esempi numerici al variare del raggio medio dell'avvolgimento. I risultati sono stati confrontati sia con quelli ottenuti mediante il software di calcolo FastHenry che quelli ottenuti dalla soluzione analitica.

### Esempio numerico 1

Con  $a=5$  [m]; e  $b=0,5$  [m] si ottengono i seguenti dati di dimensionamento da inserire in ingresso al codice  $Ri=4,5$  [m],  $Re=5,5$  [m] e  $h=1$  [m].

Al variare del numero di filamenti si ottengono i seguenti risultati:

**Tabella 4.6** Induttanza geometria circolare sezione circolare – confronto con risultati analitici.

N	$n_x$	$n_z$	$LN^2$	TEMPO ESECUZIONE	L	L	$\varepsilon\%$ [FastHenry]	$\varepsilon\%$ [Exact solution]
[Nr]	[Nr]	[Nr]	[ $\mu H$ ]	[s]	[ $\mu H$ ] FastHenry [17]	[ $\mu H$ ] Exact solution [17]	$\left[ \frac{V_e - V_m}{V_e} \right] 100$	
12	3	3	16,3688	0,12	16,4	1,66	0,190	1,392
12	6	6	16,4699	0,754			0,426	0,783
12	10	10	16,5298	5,053			0,792	0,423

### Esempio numerico 2

Con  $a=50$  [m]; e  $b=0,5$  [m] si ottengono i seguenti dati di dimensionamento da inserire in ingresso al codice  $Ri=49,5$ [m],  $Re=50,5$ [m] e  $h=1$  [m].

Al variare del numero di filamenti si ottengono i seguenti risultati:

**Tabella 4.7** Induttanza geometria circolare sezione circolare – confronto con risultati analitici.

N	$n_x$	$n_z$	$LN^2$	TEMPO ESECUZIONE	L	L	$\varepsilon\%$ [FastHenry]	$\varepsilon\%$ [Exact solution]
[Nr]	[Nr]	[Nr]	[ $\mu H$ ]	[s]	[ $\mu H$ ] FastHenry [17]	[ $\mu H$ ] Exact solution [17]	$\left[ \frac{V_e - V_m}{V_e} \right] 100$	
12	3	3	307,4853	0,126	308	310	0,167	0,811
12	6	6	309,3874	0,608			0,450	0,197
12	10	10	310,1052	5,06			0,683	0,033

### Esempio numerico 3

Con  $a=500$  [m]; e  $b=0,5$ [m] si ottengono i seguenti dati di dimensionamento da inserire in ingresso al codice  $Ri=499,5$ [m],  $Re=500,5$ [m] e  $h=1$  [m].

Al variare del numero di filamenti si ottengono i seguenti risultati:

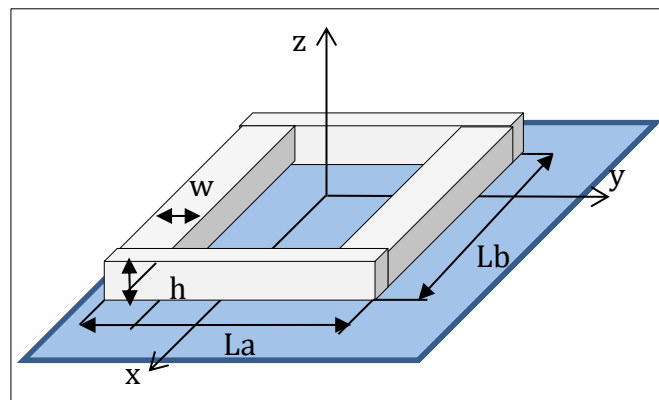
**Tabella 4.8** Induttanza geometria circolare sezione circolare – confronto con risultati analitici.

N	n <sub>x</sub>	n <sub>z</sub>	LN <sup>2</sup>	TEMPO ESECUZIONE	L	L	ε% [FastHenry]	ε% [Exact solution]
[Nr]	[Nr]	[Nr]	[μH]	[s]	[μH] FastHenry [17]	[μH] Exact solution [17]	$\left[ \frac{V_e - V_m}{V_e} \right] 100$	
12	3	3	4538,9	0,119	4530	4550	0,196	0,244
12	6	6	4.540,9	0,605			0,240	0,2
12	10	10	4554	5,081			0,529	0,088

#### 4.2.3 Calcolo Induttanza avvolgimento rettangolare con sezione rettangolare [15]

Anche questa discretizzazione geometrica è stata discussa al §3.2. Si esegue la sovrapposizione dei lati al fine di approssimare al meglio la geometria ottenendo valori di induttanza prossimi alle soluzioni esatte.

Di seguito saranno analizzati alcuni esempi applicativi variando le dimensioni geometriche dell'avvolgimento. I risultati sono stati confrontati sia con quelli ottenuti mediante il software di calcolo FastHenry che quelli ricavati dalla soluzione analitica. Il numero di filamenti nella sezione rettangolare, lungo i due assi x e z, variano in relazione alle proporzioni dei due lati.



**Figure 4.5** Avvolgimento rettangolare a sezione rettangolare.

### Esempio numerico 1

Inserendo i seguenti dati di dimensionamento in ingresso al codice :  $L_a=1$  [m]; e  $L_b=1$  [m];  $w=0,2$  [m];  $h=0,1$  [m] e variando il numero di filamenti, si ottengono i seguenti risultati:

**Tabella 4.9** Induttanza geometria rettangolare a sezione rettangolare - confronto con risultati analitici.

nx	nz	$LN^2$	TEMPO ESECUZIONE	L	L	$\varepsilon\%$ [FastHenry]	$\varepsilon\%$ [Exact solution]
[Nr]	[Nr]	[ $\mu\text{H}/\text{m}$ ]	[s]	[ $\mu\text{H}$ ] FastHenry [17]	[ $\mu\text{H}$ ] Exact solution [17]	$\left[\frac{V_e - V_m}{V_e}\right] 100$	
3	6	1,5453	0,165	1.60	1,61	0,19647	0,243
6	12	1,5758	0,669			0,24062	0,2
10	20	1,5833	5,924			0,5298	0,088

### Esempio numerico 2

Inserendo i seguenti dati di dimensionamento in ingresso al codice :  $L_a=1$  [m]; e  $L_b=50$  [m];  $w=0,2$  [m];  $h=0,1$  [m], e variando il numero di filamenti, si ottengono i seguenti risultati:

**Tabella 4.10** Induttanza geometria rettangolare a sezione rettangolare - confronto con risultati analitici.

nx	nz	$LN^2$	L	L	TEMPO ESECUZIONE	$\varepsilon\%$ [FastHenry]	$\varepsilon\%$ [Exact solution]
[Nr]	[Nr]	[ $\mu\text{H}/\text{m}$ ]	[ $\mu\text{H}$ ] FastHenry [17]	[ $\mu\text{H}$ ] Exact solution [17]	[s]	$\left[\frac{V_e - V_m}{V_e}\right] 100$	
3	6	2,688	2,74	2,74	0,152	1,897	1,897
6	12	2,7013			0,867	1,412	1,412
12	24	2.7133			13,094	1,069	1,069

### Esempio numerico 3

Inserendo i seguenti dati di dimensionamento in ingresso al codice  $L_a =1$  [m]; e  $L_b=500$  [m];  $w=0,2$  [m];  $h=0,1$  [m] e variando il numero di filamenti, si ottengono i seguenti risultati:

**Tabella 4.11** Induttanza avvolgimento con geometria rettangolare - confronto con risultati analitici.

nx	nz	$LN^2$	TEMPO ESECUZIONE	L	L	$\varepsilon\%$ [FastHenry]	$\varepsilon\%$ [Exact solution]
[Nr]	[Nr]	[ $\mu\text{H}$ ]	[s]	[ $\mu\text{H}$ ] FastHenry [17]	[ $\mu\text{H}$ ] Exact solution [17]	$\left[\frac{V_e - V_m}{V_e}\right] 100$	
3	6	11,3411	0,154	11,40	11,42	0,516667	0,691
6	12	11,3774	1,019			0,198246	0,373
12	24	11,3876	13,461			0,108772	0,284



### Esempio numerico 4

Avvolgimento rettangolare a sezione rettangolare con filamenti disposti lungo le superfici di un parallelepipedo come in figura 4.6 [3].

Si prende in esame un avvolgimento con  $N$  spire ognuna delle quali racchiude un rettangolo di area  $a_1$  e  $a$  in cm. con  $a$  lato lungo. Lo spessore  $p$  della singola spira moltiplicato per il numero di spire, restituisce la lunghezza dell'avvolgimento ( $b$ ).

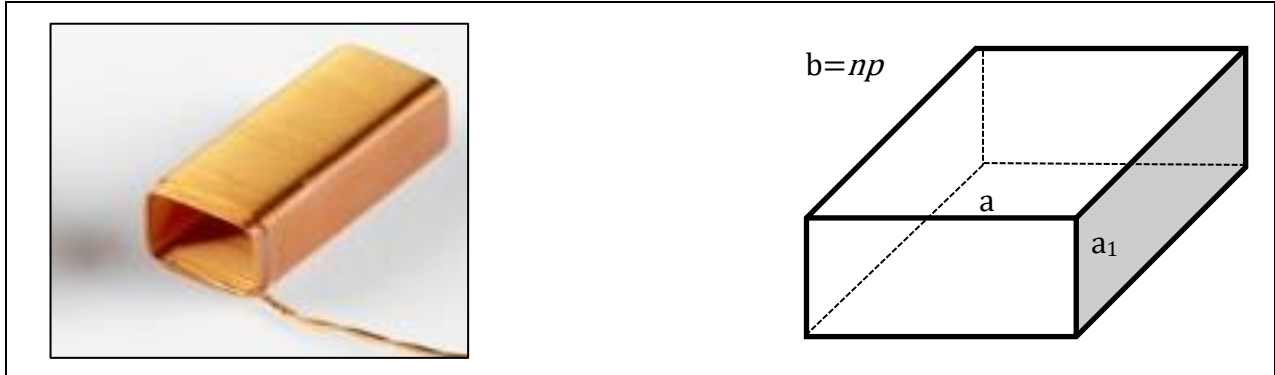


Figura 4.6 Rappresentazione geometria dell'avvolgimento rettangolare a sezione rettangolare.

Confrontiamo l'esempio 22 del grover [3] con codice.

<<A coil of 15 turns of wire 0.1 cm. in diameter is wound with a pitch of 0.2 cm. on a frame so that each turn encloses a rectangle 5 by 10 cm. Thus  $a_1=5$ ,  $a=10$ ,  $p=0.2$ ,  $b=Np=15(0.2)=3cm.$ >>

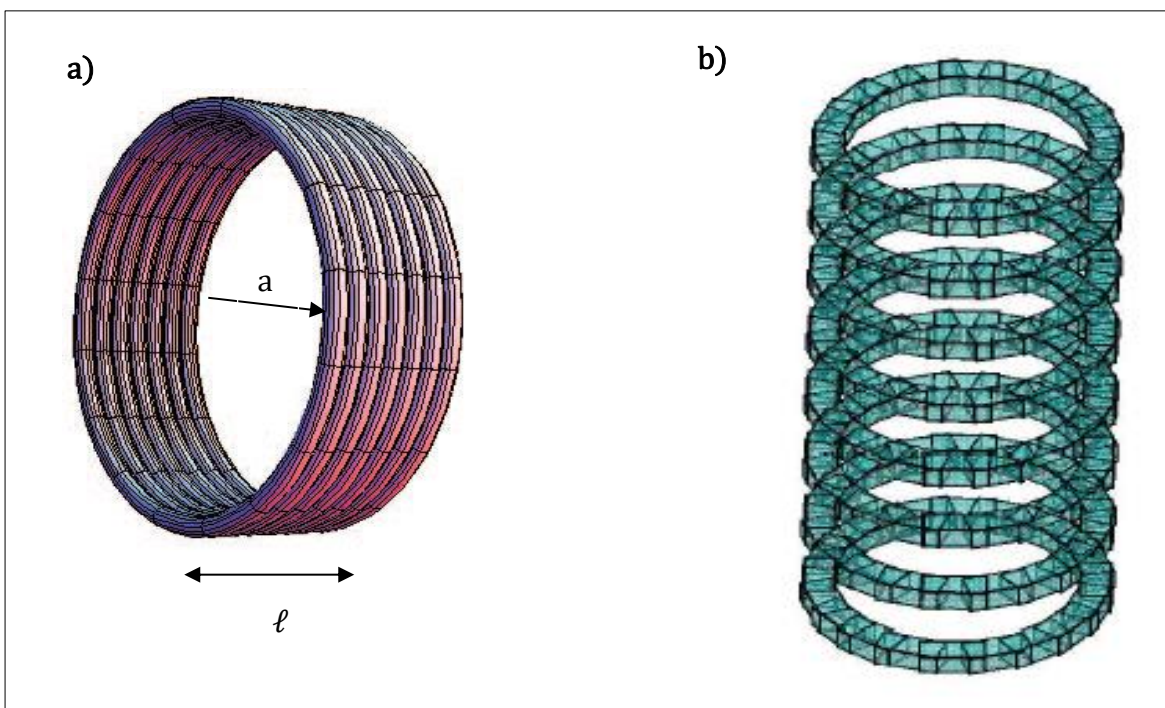
$La=5$  [cm] ;  $Lb=10$  [cm];  $h=3$  [cm];  $s=0,2$  [cm]

Tabella 4.12 Induttanza avvolgimento con geometria rettangolare - confronto con risultati analitici.

nx	nz	$LN^2$	TEMPO ESECUZIONE	L	$\epsilon\%$
[Nr]	[Nr]	[ $\mu H$ ]	[s]	[ $\mu H$ ] [2]	$\left[\frac{Ve - Vm}{Ve}\right] 100$
1	15	21.570	0,155	22,51	4.173
1	75	22.164	0,925		1.539
1	100	22.232	1,201		1.237
1	150	22.312	2,775		0.881
1	210	22.367	7,399		0.643
1	300	22.412	14,985		0.437

#### 4.24 Calcolo Induttanza di un avvolgimento solenooidale con sezione circolare [15].

La discretizzazione del solenoide a sezione circolare viene eseguita in modo analogo quella della geometria circolare a sezione circolare §3.2, come evidenziato in figura 4.7b. La separazione delle spire è solo a scopo grafico e da la possibilità di vedere l'approssimazione ottenuta con i parallelepipedi. La lunghezza del solenoide si ricava moltiplicando il diametro del filo per il numero di spire  $\ell=2bM$ . Di seguito saranno analizzati alcuni esempi applicativi, confrontando il risultati ottenuti con altri metodi presenti in letteratura.



**Figura 4.7** Rappresentazione geometria dell'avvolgimento solenooidale a sezione circolare.

#### Esempio numerico 1

Con  $a=50$  [m]; e  $b=0,5$  [m];  $\ell =2bN$ ;  $M=5$  (numero di spire) si ottengono i seguenti dati di dimensionamento da inserire in ingresso al codice :  $R_i=49,5$  [m],  $R_e=50,5$  [m] e  $h=5$  [m]  $N=30$  (Numero di suddivisioni della geometria circolare). Al variare del numero di filamenti si ottengono i seguenti risultati:

**Tabella 4.13** Induttanza di un avvolgimento con geometria solenoidale – confronto con risultati analitici.

nx	nz	LN <sup>2</sup>	TEMPO ESECUZIONE	L	L	ε% [FastHenry]	ε% [Exact solution]
[Nr]	[Nr]	[μH]	[s]	[μH] FastHenry [17]	[μH] Exact solution [17]	$\left[\frac{Ve - Vm}{Ve}\right] 100$	
3	6	6.115,3	0,415	5560	5860	9,98741	4,35666
2	20	6055,1	0,532			8,90468	3,32935
2	20	5886,4	2,345			5,8705	0,45051
3	30	5.855,2	12,542			5,30935	0,081911

**Esempio numerico 2**

Con  $a=50$  [m];  $e=0,5$  [m];  $\ell = 2bN$ ;  $M=100$  (numero di spire) si ottengono i seguenti dati di dimensionamento da inserire in ingresso al codice :  $R_i=49,5$  [m],  $R_e=50,5$  [m] e  $h=100$  [m]  $N=30$  (Numero di suddivisioni della geometria circolare). Al variare del numero di filamenti si ottengono i seguenti risultati:

**Tabella 4.14** Induttanza di un avvolgimento con geometria solenoidale – confronto con risultati analitici.

	nx	nz	LN <sup>2</sup>	TEMPO ESECUZIONE	L	L	ε% [FastHenry]	ε% [Lorenz]
	[Nr]	[Nr]	[μH]	[s]	[μH] FastHenry [17]	[μH] Exact solution [17]	$\left[\frac{Ve - Vm}{Ve}\right] 100$	
	1	100	69103	9,867	-	67400	9,98741	2,52671
	2	200	67979	115,45			8,90468	0,85905

*Riassumendo*

Con tutte le geometrie presentate per il calcolo dell'induttanza, sono state eseguite più prove variando il numero di filamenti. I risultati ottenuti, confrontati con soluzione analitica o metodi presenti in letteratura, hanno fornito un errore relativo al di sotto del 1% ,di contro, sono stati ottenuti tempi di esecuzione in alcuni casi dell'ordine dei minuti. Il metodo ha flessibilità, a

differenza di altri metodi presenti in letteratura, di poter analizzare con sufficiente accuratezza qualsiasi forma geometria di avvolgimenti avvolti in aria.

### 4.3 Mutua induttanza tra due avvolgimenti : Esempi numerici [14] [18]

In questo paragrafo saranno presentati, in modo analogo con quanto già fatto al §4.2, alcuni esempi numerici per il calcolo della mutua induttanza tra due avvolgimenti di diverse tipologie geometriche. I risultati saranno confrontati con metodi presenti in letteratura analizzando i tempi di esecuzione e gli errori relativi commessi al variare del numero di filamenti.

#### 4.31 Calcolo Mutua induttanza avvolgimento circolare con sezione rettangolare

La discretizzazione geometrica è analoga a quella già presentata nel paragrafo §4.2 . In figura 4.9 è mostrata un'approssimazione dei due avvolgimenti mediante parallelepipedi, in figura 4.8 le suddivisioni interne ai parallelepipedi.

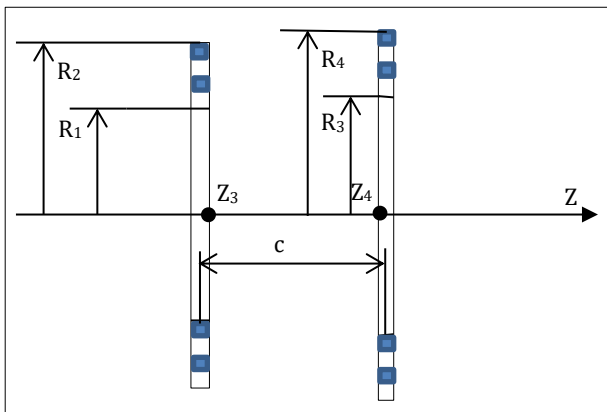


Figura 4.8 Profilo avvolgimenti.

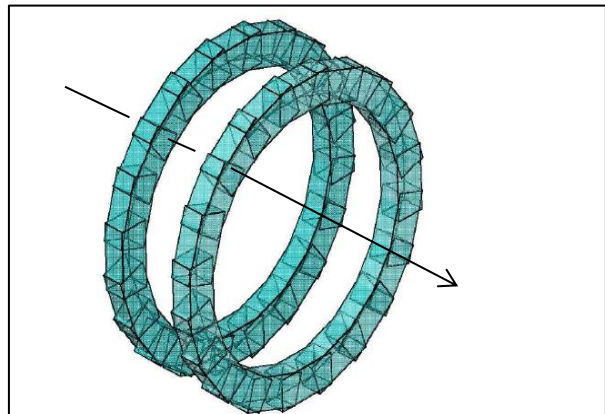


Figura 4.9 Geometria circolare in parallelepipedi.

#### Esempio numerico 1

Si considerano due avvolgimenti circolari di spessore trascurabile e raggi, rispettivamente,  $R_1=R_3=7,63$  [cm]  $R_2=R_4=15,94$  [cm] e distanza tra i due  $Z_0=(Z_3-Z_2)=4,68$  [cm]. Con  $N_1=N_2=516$  (Fig. 4.8).

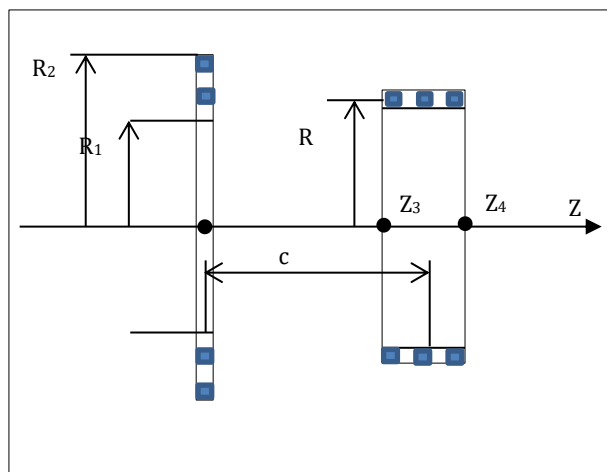
Fissando il numero di suddivisioni a  $N=12$  e variando il numero dei filamenti contenuti all'interno di ogni parallelepipedo, si ottengono i seguenti risultati :

**Tabella 4.15** Mutua induttanza avvolgimenti circolari con offset- confronto con risultati analitici

nx	nz	MN <sup>2</sup>	TEMPO ESECUZIONE	M	M	M	TEMPO ESECUZIONE	ε% [7]	ε% [8]	ε% [9]
[Nr]	[Nr]	[H]	[19][s]	[H] Exact formula [19]	[H] Grover [20]	[H] Mth. Filament [18]	[19][s]	$\left[\frac{V_e - V_m}{V_e}\right] 100$		
3	3	0,037406	0,6055	0,03655608	0,0374	0,03659557	0,6055	2,324	0,0160	2,215
6	6	0,037125	6,942				6,942	1,556	0,7353	1,446
8	8	0,037032	22,148				22,148	1,301	0,984	1,192

### Esempio numerico 2

Si considera un solenoide (1) di Raggio  $R=10$  [cm] con raggio del conduttore trascurabile e un avvolgimento circolare (2) di raggio interno pari a  $R_1=20$  [cm] e raggio esterno pari a  $R_2=60$  [cm] e a spessore trascurabile. La lunghezza del solenoide è  $z_1=-10$  [cm],  $z_2=10$  [cm]. I due avvolgimenti sono distanti  $Z_q=60$  [cm]. E sono composti rispettivamente da  $N_1=100$  e  $N_2=200$ . Fissando il numero di suddivisioni a  $N=50$  e variando il numero dei filamenti contenuti all'interno di ogni parallelepipedo, si ottengo i seguenti risultati :



**Figura 4.10** Profilo avvolgimenti.

**Tabella 4.16** Mutua induttanza tra solenoide e induttore circolare con offset- confronto con risultati analitici.

nx	nz	MN <sup>2</sup>	TEMPO ESECUZIONE	M	M	ε% [7]	ε% [18]		
[Nr]		[μH]	[19] [s]	[H] Exact formula [19]	[H] Mth. Filament [18]	$\left[\frac{V_e - V_m}{V_e}\right] 100$			
(1)	(2)							(1)	(2)
1	5	10	1	161,513924	0,147	161,76392896	1,61,76393236	0,154	0,154551
1	10	20	1	161,6338	17,471			0,080	0,080446
1	15	30	1	161,720007	38,5138			0,0271	0,027154

### Esempio numerico 3 [21]

Si considerano due avvolgimenti circolari aventi le seguenti dimensioni geometriche :

$R_1=10$  [cm];  $R_2=20$ ; [cm];  $z_1=10$  [cm];  $z_2=20$  [cm];  $N_1=100$ .

$R_3=30$  [cm];  $R_4=40$ ; [cm]  $z_3=30$ ; [cm]  $z_4=40$  [cm];  $N_2=100$ .  
Dai dati si ricava la distanza intercorsa tra i due avvolgimenti  $a=10$  [cm] con le relative altezze  $h_1=h_2=10$  [cm].

Al variare del numero di filamenti si ottengono i seguenti risultati:

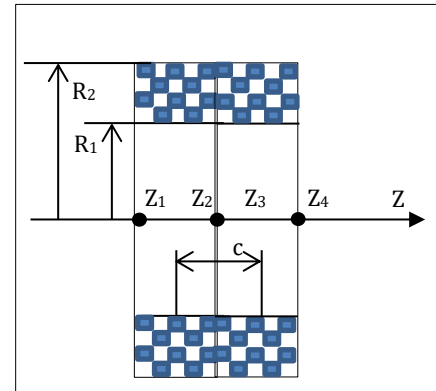


Figura 4.11 Profilo avvolgimenti.

Tabella 4.17 Mutua induttanza due induttori circolare con offset- confronto con risultati analitici

N	nx		nz		$MN^2$	TEMPO ESECUZIONE	M	M	$\epsilon\%$ [7]	$\epsilon\%$ [9]
[Nr]	[Nr]		[Nr]		[ $\mu H$ ]	[19][s]	[ $\mu H$ ] Exact formula [19]	[ $\mu H$ ] Mth. Filament [21]	$\left[ \frac{V_e - V_m}{V_e} \right] 100$	
	(1)	(2)	(1)	(2)						
20	3	3	3	3	0,8529319	1,317	0,845445762	0,84542995	2,324	2,215
20	5	5	5	5	0,854565	8,749			1,556	1,446
20	8	8	8	8	0,85499149	58,003			1,301	1,192
50	3	3	3	3	0,84497449	113,5685			0,055	0,0538

### Esempio numerico 4

Si considerano due solenoidi con raggio interno  $R_1=0,5$  [m] e raggio esterno  $R_2=1,5$  [m], altezza  $z_2-z_1= z_4-z_3=1$ [m] e con lo stesso numero di spire  $N_1=N_2=1$ . I due avvolgimenti sono adiacenti  $a=0$ . Al variare del numero di filamenti e tenendo fisso il numero di suddivisioni  $N=18$  si ottengono i seguenti risultati:

Tabella 4.18 Mutua induttanza solenoidi adiacenti- confronto con risultati analitici.

nx	nz	$MN^2$	M	M	M	TEMPO ESECUZIONE	$\epsilon b\%$ [21]	$\epsilon\%$ [8]	$\epsilon\%$ [9]
[Nr]	[Nr]	[ $\mu H$ ]	[ $\mu H$ ] Bottura [21]	[ $\mu H$ ] Grover [20]	[ $\mu H$ ] [21]	[s]	$\left[ \frac{V_e - V_m}{V_e} \right] 100$		
3	3	0,529028	0,5397	0,5457	0,5413	1,118	1,977	3,055	2,267
6	6	0,5392922				15,145	0,075	1,174	0,371
8	8	0,54176415				46,470	0,382	0,721	0,0857

### Esempio numerico 5

Si considerano due solenoidi coassiali sottili con raggi, rispettivamente,  $R_1=20$  [cm] e  $R_2=25$  [cm], altezza  $z_2-z_1=10$ ,  $z_4-z_3=16$  [m] e con numero di spire  $N_1=100$ ,  $N_2=320$ . I due avvolgimenti sono coassiali con un offset pari a 8 [cm] quindi  $a=3$  [cm].

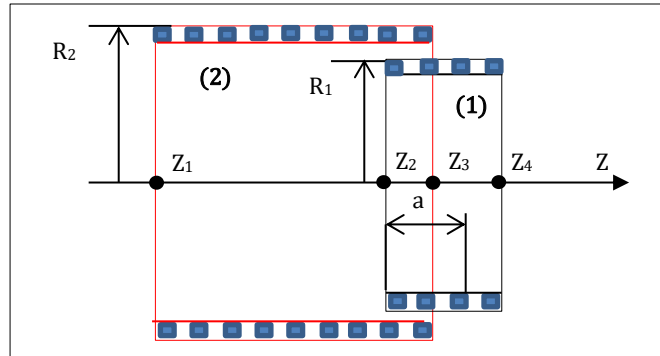
Al variare del numero di filamenti e tenendo fisso il numero di suddivisioni  $N=20$  si ottengono i seguenti risultati:

**Tabella 4.19** Mutua induttanza solenoidi concentrici con offset- confronto con risultati analitici e altri metodi.

N	nx		nz		$MN^2$	TEMPO ESECUZIONE	M	M	$\varepsilon\%$ [7]	$\varepsilon\%$ [9]
[Nr]	[Nr]		[Nr]		[mH]	[19][s]	[mH] Exact formula [19]	[mH] Mth. Filament [21]	$\left[\frac{V_e - V_m}{V_e}\right] 100$	
	(1)	(2)	(1)	(2)						
20	1	1	10	32	8,5873	6,775	8,458	8,47868125	1,52518	1,27754
20	1	1	13	40	8,5271	10,46			0,81698	0,57106
20	1	1	20	64	8,45627	32,46			0,020454	0,264325

### Esempio numerico 6

Si considera un filamento circolare  $R=2$  [cm] e un avvolgimento circolare di spessore trascurabile  $R_1=4$  [cm]  $R_2=6$  [cm] con  $N_2=100$  disposti a  $Z_q=5$  [cm]. Al variare del numero di filamenti e migliorando la geometria circolare operando sulle suddivisioni si ottengono i seguenti risultati:



**Figura 4.12** Profilo avvolgimenti.

**Tabella 4.20** Mutua induttanza tra spira e avvolgimento circolare- confronto con altri metodi.

N	nx		nz		$MN^2$	TEMPO ESECUZIONE	M	M	$\varepsilon\%$ [7]	$\varepsilon\%$ [9]
[Nr]	[Nr]		[Nr]		[nH]	[s]	[nH] [18]	[nH] Mth. Filament [18]	$\left[\frac{V_e - V_m}{V_e}\right] 100$	
	(1)	(2)	(1)	(2)						
20	1	1	1	100	534,303004	9,775	526,05918238	526,05919238	1,56709	1,56709
50	1	1	1	100	5.27368732	15,48			0,24894	0,24893
60	1	1	1	120	5.269683864	26,299			0,17283	0,17283

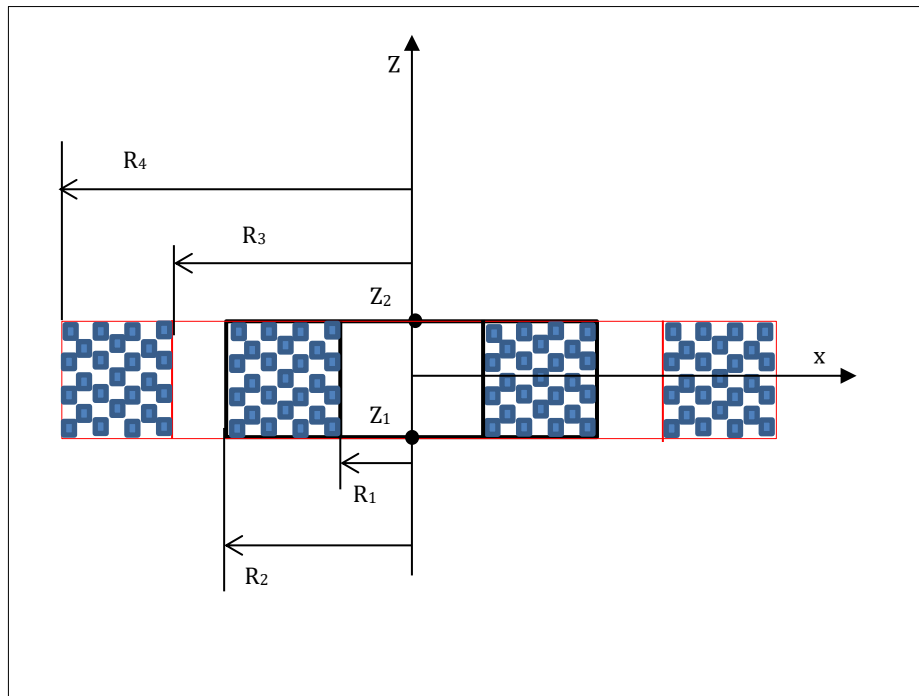


Figura 4.13 Profilo solenoidi coassiali.

### Esempio numerico 7

Si considerano due avvolgimenti circolari (come in figura 4.13) aventi le seguenti dimensioni geometriche :

$R_1=20$  [cm];  $R_2=40$ ; [cm];  $z_1=-10$  [cm];  $z_2=20$  [cm];  $N_1=500$ .

$R_3=60$  [cm];  $R_4=80$ ; [cm];  $z_3=-10$  [cm];  $z_4=10$  [cm];  $N_2=500$ .

Dai dati si evince che i due avvolgimenti sono coassiali, quindi  $c=0$ . Le altezze sono pari a  $h_1=h_2=20$  [cm];

Al variare del numero di filamenti si ottengono i seguenti risultati:

**Tabella 4.21** Mutua induttanza solenoidi concentrici- confronto con risultati analitici e altri metodi.

N	nx		nz		$MN^2$	M	M	TEMPO ESECUZIONE	$\varepsilon\%$ [7]	$\varepsilon\%$ [9]
$[N_r]$	$[N_r]$		$[N_r]$		$[NH]$	$[mH]$ Exact formula [21]	$[mH]$ Mth. Filament [21]	$[19][s]$	$\left[\frac{V_e - V_m}{V_e}\right] 100$	
	(1)	(2)	(1)	(2)						
20	2	2	2	2	69,585	70,77152437	70,7700826411	1,746	1,796	1,277
20	3	3	3	3	70,645			3,746	0,178	0,571
50	5	5	5	5	70,6324			33,669	0,196	0,264



### Riassumendo

Con tutte le geometrie presentate per il calcolo della mutua induttanza sono state eseguite più prove variando il numero di filamenti, in alcuni casi è stato necessario migliorare anche la geometria circolare aumentando il numero di parallelepipedi. I risultati ottenuti, confrontati con soluzioni esatte o metodi presenti in letteratura, hanno presentato un errore relativo, al di sotto del 1%, di contro, sono stati ottenuti tempi di esecuzione superiori rispetto al calcolo dell'autoinduttanza. Per la definizione di altre geometrie è possibile utilizzare il software AutoCAD, e ricavare da esso i vertici utili alla costruzione geometrica dell'avvolgimento da analizzare.

## 4.4 AVVOLGIMENTO CON GEOMETRIA A SPIRALE - RICARICA WIRELESS EV [22]

I sistemi WPT (*Wireless Power Transfer*) trasferiscono l'energia elettrica da una sorgente a un carico senza alcuna connessione cablata. I WPTs sono interessanti per molte applicazioni industriali a causa dei loro vantaggi rispetto ai sistemi cablati, assenza di fili esposti, facilità di ricarica e trasmissione anche in condizioni meteo avverse. L'adozione di WPTs per caricare le batterie di bordo di un veicolo elettrico (EV) ha attirato l'attenzione e alcune aziende stanno compiendo degli studi per lo sviluppo e il miglioramento del sistema.

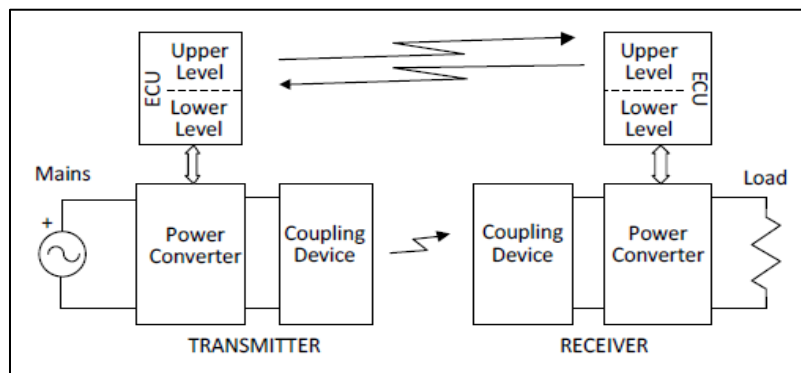


Figura 4.14 Schema WPTS.

Un WPTS ha la struttura di Fig. 4.14. È costituito da due sezioni isolate elettricamente: il trasmettitore e il ricevitore. Il trasmettitore è sepolto nel pavimento e alimentato dalla rete, il ricevitore è incorporato nel veicolo elettrico e fornisce energia al pacco batteria a bordo del veicolo. Quest'ultimo costituisce il carico del WPTS ed è rappresentato da un resistore, figura 4.14. Ogni sezione di WPTS è composta da un dispositivo di accoppiamento e un convertitore di

potenza. Il trasmettitore genera un campo magnetico, il ricevitore attraversato dal campo generato dal dispositivo di trasmissione e, agendo come un pick-up, prende l'energia trasportata dal campo. Il trasmettitore comprende un raddrizzatore PFC di front-end collegato in cascata da uno inverter che alimenta il dispositivo di trasmissione con una tensione alternata. Il convertitore di potenza del ricevitore attinge energia dal dispositivo ricevente, funzionando come un raddrizzatore che ricarica le batterie con i valori richiesti di tensione e corrente. Ogni sezione di potenza di un WPTS include un'unità di controllo elettronica (ECU). Le due ECU regolano l'operazione WPTS. I compiti sono divisi nei due livelli: il livello superiore fornisce la gestione della sezione di potenza, mentre il livello inferiore controlla il convertitore di potenza. I livelli superiori delle due ECU scambiano le informazioni necessarie per la gestione delle sezioni di potenza attraverso le porte di comunicazione wireless.

Queste tecnologie possono essere definite capacitive, induttive e radianti; sfruttano la proprietà di accoppiamento dei campi, elettrico, magnetico ed elettromagnetica. Una caratteristica comune dei WPTS è che il dispositivo di trasmissione eccita lo spazio circostante. Nei trasferimenti di potenza capacitivi e induttivi, la rispettiva energia immagazzinata in un volume unitario di spazio è :

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2$$

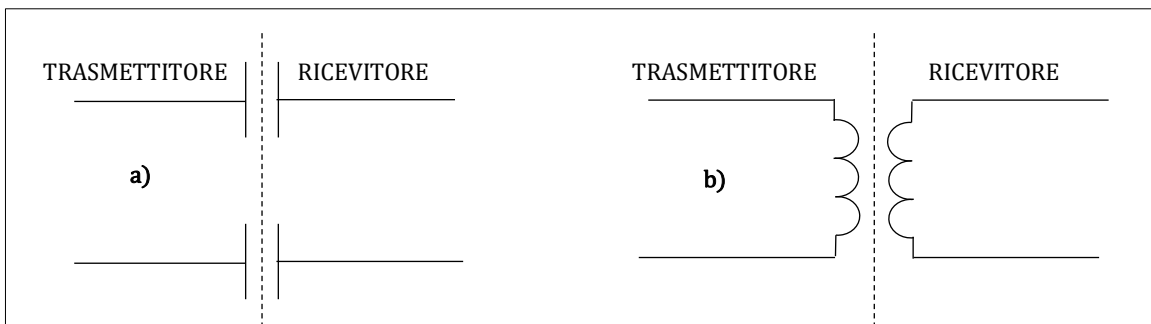
A causa dei valori di  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$ , la densità di energia ottenibile con il campo magnetico nello spazio libero è circa  $10^4$  volte maggiore rispetto al campo elettrico. Nel trasferimento di potenza radiante, l'energia è concentrata lungo il percorso di trasmissione in cui il campo elettromagnetico raggiunge valori molto alti.

Il dispositivo di accoppiamento **WPT di tipo capacitivo** in Fig. 4.15a, è composto da due condensatori piani con le armature del lato del trasmettitore rivolte verso quelle del ricevitore. I principali vantaggi del WPT di tipo capacitivo sono le basse perdite, le emissioni elettromagnetiche insignificanti e la capacità di trasferire energia attraverso schermi metallici senza generare correnti parassite. D'altra parte, la densità di energia che può essere immagazzinata nello spazio libero tra le piastre è relativamente bassa e di conseguenza l'uso dei WPT di tipo capacitivo è limitato ad applicazioni a potenza molto bassa.

Il dispositivo di accoppiamento **WPT di tipo induttivo** in Fig. 4.15b, è composto da due avvolgimenti mutuamente accoppiate. L'avvolgimento di trasmissione viene alimentato da una corrente alternata ad alta frequenza, generalmente tra 10 kHz e 150 kHz. A causa della maggiore

densità di energia del campo magnetico nello spazio libero, i WPT di tipo induttivo è in grado di gestire una potenza molto più elevata rispetto a quello capacitivo; di contro, soffre di perdite nelle resistenze degli avvolgimenti, non operano se un corpo metallico è interposto tra i due avvolgimenti e produce interferenze elettromagnetiche apprezzabili. I WPT induttivo utilizza due topologie per il trasferimento di potenza e i relativi sistemi sono definiti come accoppiamento induttivo e accoppiamento risonante. **I risonanti**, rispetto all'induttivo, ha in aggiunta dei condensatori utili ridurre la quantità di tensione e/o corrente richiesta per alimentare il WPT. In condizioni di risonanza avviene il massimo trasferimento di energia, In tali condizioni l'energia trasferita tra induttore e condensatore è uguali. Rispetto al WPT<sub>S</sub> induttivo, il WPT<sub>S</sub> risonante è più efficiente in termini di fattore di qualità e fattore di potenza. Inoltre, può trasferire energia a più distanza rispetto al WPTS induttivo ma non oltre 1 o 2 metri.

**WPT di tipo radiante** utilizza le rectenne<sup>3</sup> per convertire microonde in corrente continua, questo sistema è in grado di trasferire energia a lunga distanza ed è applicabile al momento solo a piccole potenze circa 5W.



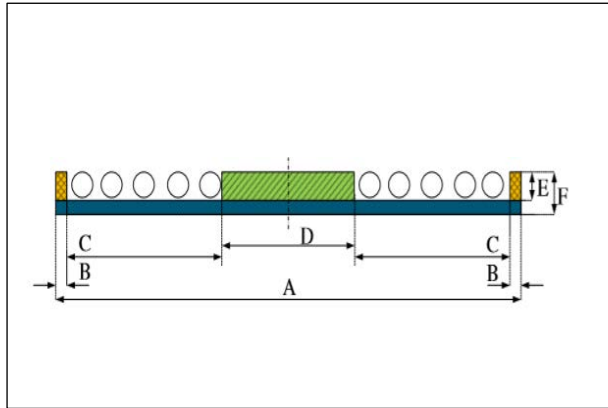
**Figura 4.15** WPTs capacitivo e WPTs induttivo.

Nell'accoppiamento induttivo i due avvolgimenti sono chiamati, rispettivamente, trasmettitore e ricevitore. Il WPT induttivo di tipo risonante è comunemente utilizzato per il trasferimento di potenza medio-alta, come la ricarica EV, poiché presenta una maggiore efficienza. Il sistema di trasferimento di potenza è costituito da due avvolgimenti la cui installazione è un problema cruciale nella creazione di un WPTS, esse possono avere diverse forme, tra cui elica e spiroidale.

In questo paragrafo sarà analizzata la geometria spiroidale di due avvolgimenti costituiti da fili di rame tipo Litz<sup>4</sup>. Saranno calcolati i parametri di auto e mutua induttanza e sarà eseguito un confronto con risultati in letteratura.

<sup>3</sup> Il termine "rectenna" deriva dalla contrazione delle parole "rectifying" ed "antenna", e vuole indicare una particolare antenna che sfrutta un diodo Schottky per convertire la potenza incidente alle radio frequenze in potenza continua.

<sup>4</sup> Un filo litz è un tipo di cavo usato in elettronica per trasportare la corrente alternata. Il filo è progettato per ridurre le perdite causate dall'effetto pelle e dall'effetto di prossimità nei conduttori usati a frequenze fino a circa 1 MHz.



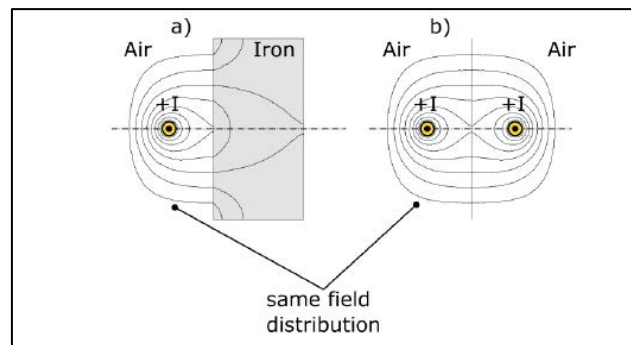
**Figura 4.16** Geometria nucleo e Avvolgimento spiroidale con conduttore Litz.

Con l'impiego del conduttore di tipo litz è possibile considerare la densità di corrente distribuita modo uniforme al suo interno, ciò da la possibilità di utilizzare le funzioni  $M_{wire}$  e  $L_{bar}$  eseguendo la discretizzazione della geometria con parallelepipedi equivalenti [5] [4].

#### 4.4.1 Induttanza : geometria spiroidale a sezione circolare [23] [24]

Per il calcolo dell'induttanza dell'avvolgimento spiroidale sarà utilizzata la teoria dell'immagine, inserendo da prima schermo conduttivo ed in ultimo un piano con permeabilità magnetica infinita.

Il metodo delle immagini consente di ricostruire la distribuzione del campo elettrico e magnetico in un semispazio, sostituendo, a secondo dei casi, lo schermo conduttivo perfetto o il piano con permeabilità infinita, con un'immagine del campo. Esso, da la possibilità di calcolare l'induttanza complessiva conoscendo l'autoinduttanza del avvolgimento e la mutua con la sua immagine. È applicabile nei casi in cui gli



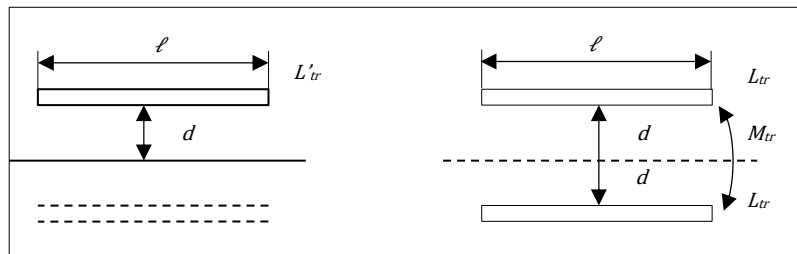
**Figura 4.17 a :** Conduttore infinito posto in prossimità di un piano con permeabilità infinita, **b:** Metodo di immagini magnetiche applicate alla situazione riportata in

effetti del piano non sono significativi. Va inoltre tenuto presente che l'immagine speculare del campo elettrostatico di una carica positiva di fronte a un piano conduttivo è una carica negativa (quindi verso opposto); l'immagine speculare del campo magnetico di una corrente positiva posta di fronte a una superficie di permeabilità infinita è, invece, una corrente positiva (stesso verso). Quando la teoria dell'immagine viene applicata all'intera geometria, (*loop*) non vi è alcun problema. Invece, quando la stessa viene applicata ad un singolo elemento isolato, dove viene

impiegato il concetto di induttanza parziale, la teoria necessita di fattori correttivi; diversamente si commettono errori ai fini della determinazione dell'induttanza.

In termini pratici, con riferimento alla figura 4.14, significa che l'induttanza parziale  $L'_{tr}$  effettiva di un conduttore su un piano, non è uguale alla differenza tra l'autoinduttanza dell'immagine  $L_{tr}$  senza piano terra, e la loro mutua induttanza  $M_{tr}$ .

$$L'_{tr} \neq L_{tr} \pm M_{tr} \quad (4.2)$$



**Figura 4.18** conduttore posto in prossimità di piano conduttivo e la sua immagine.

Quindi, in base alla 4.2 la teoria delle immagini non può essere applicata al calcolo dell'induttanza parziale ma, come accennato in precedenza è applicabile ai *loop* induttivi. Di conseguenza, per il calcolo dell'induttanza spiroidale si considera la geometria chiusa, connettendo i due estremi dell'avvolgimento a una sorgente elettrica. Tale connessione è effettuata intrecciando i due conduttori al fine di limitare gli effetti di campo, Figura 4.16. Pertanto, una volta ricavata l'induttanza di un avvolgimento spiroidale e la mutua con la sua immagine si può applicare tale teoria e ricavare l'induttanza dei due avvolgimenti posti a distanza  $d$ .

### Geometria spirale [23]

per implemetare la geometria della spirale il primo passo è definire il raggio.

$$r = r_0 + \frac{a}{2} + \frac{p\theta}{2\pi} \quad (4.1)$$

Con esso i punti sull'asse x ed y

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (4.2)$$

una volta ricavato i punti della geometria si procede al cacloolo dell'induttanza dell'avvolgimento spirolidale. Seguirà il calcolo della mutua induttanza tra la spirale e la sua immagine. Inoltre sarà

considerato anche il tratto di filo che permette di connettere i due estremi dell'avvolgimento a una sorgente elettrica garantendone così un percorso chiuso, figura 4.20. Infine, verrà effettuato il confronto tra il valore dell'induttanza del avvolgimento aperto con quello chiuso.

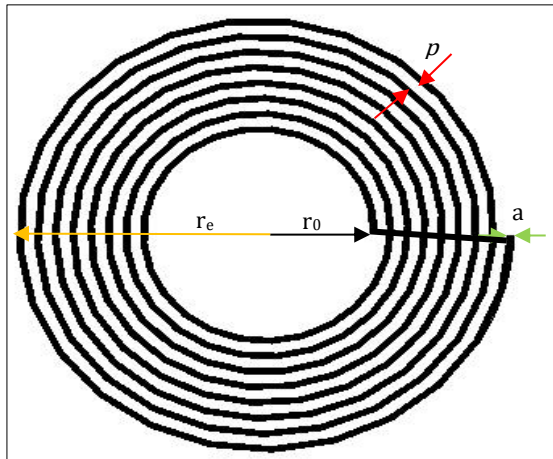


Figura 4.19 Geometria avvolgimento spirale

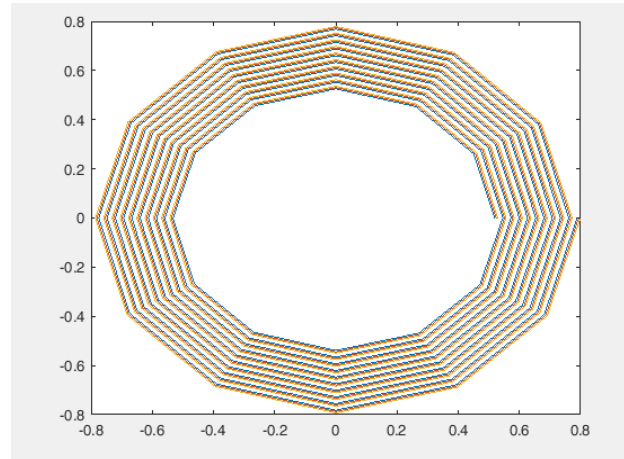


Figura 4.20 verifica geometrica dei punti con MatLab.

Dati numerici:  $r_e=0,2$  [m];  $r_0=r_e-cp =0.19$  [m];  $a=0,004$  [m];  $p=0,003$  [m]. numeri di giri  $c=18$ . suddivisi per giro  $M=18$

### Autoinduttanza Spirale [23]

Tabella 4.22 autoinduttanza spirale aperta – confronto con risultati analitici.

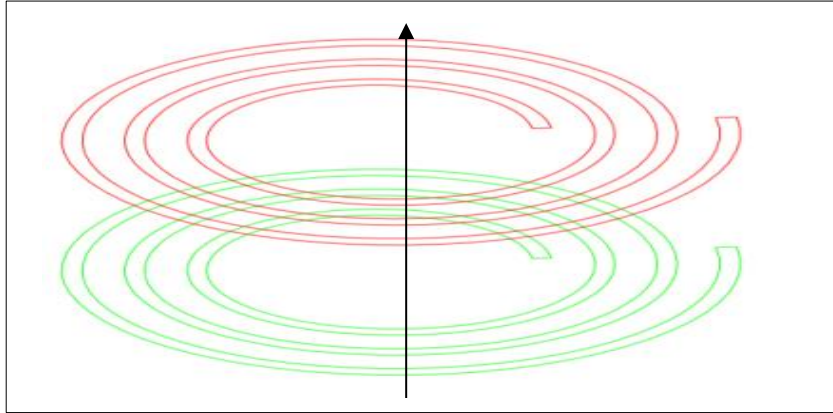
N	n <sub>x</sub>	n <sub>z</sub>	MN <sup>2</sup>	TEMPO ESECUZIONE	N Sperimentale	L ANSYS Maxwell	ε% Sperimentale	ε% Maxwell
[Nr]	[Nr]	[Nr]	[μH]	[s]	[μH] [23]	[μH] [23]	$\left[ \frac{V_e - V_m}{V_e} \right] 100$	
325	1	1	82.205	1,959	93,4	86,8	11,98608	5,294
325	2	2	88.728	29,226			5,002141	2,221
325	3	3	90.1926	146,21			3,434047	3,908
325	5	5	91.039	1107,55			2,527837	4,883

L'auto e la mutua induttanza del tratto di filo utile a connettere i due estremi dell'avvolgimento, nel caso  $n_x=n_z=5$ , è pari a :

L <sub>N+1</sub> [tratto connessione Estremi]	M <sub>N+1</sub> [tratto connessione Estremi]	L <sub>open</sub>	L <sub>closed</sub>	Incremento
[μH]	[μH]	[μH]	[μH]	[%]
0.2384	-0.0268	91.039	91.25	0.232

## Mutua Induttanza con avvolgimento immagine

Di seguito sarà eseguito il calcolo della mutua con l'avvolgimento posto a distanza  $a=6\text{cm}$ .



**Figura 4.17** Avvolgimento geotermia spiroidale.

**Tabella 4.21** Mutua induttanza spirale- confronto con risultati analitici.

N	nx		nz		M	TEMPO ESECUZIONE	$M_{\text{sperimentale}}$	$M_{\text{ANSYS Maxwell}}$	$\varepsilon\%$ Maxwell	$\varepsilon\%$ Sperimentale
[Nr]	[Nr]		[Nr]		[H]	[s]	[ $\mu\text{H}$ ] [23]	[ $\mu\text{H}$ ] [23]	$\left[\frac{V_e - V_m}{V_e}\right] 100$	
N	(1)	(2)	(1)	(2)						
325	1	1	1	1	42.38417	4,016	40	40,96	3,476	5,96
325	2	2	2	2	41.95734	56,415			2,434	4,89
325	3	3	3	3	41.81591	904,409			2,089	4,53

La mutua induttanza del tratto di filo utile a connettere i due estremi dell'avvolgimento con l'avvolgimento immagine, nel caso  $n_x=n_z=3$ , è pari a :

$M_{N+1}$ [tratto connessione Estremi]	$M_{\text{open}}$	$M_{\text{Loop}}$	decremento
[ $\mu\text{H}$ ]	[ $\mu\text{H}$ ]	[ $\mu\text{H}$ ]	[%]
-0.01914 $\mu\text{H}$	41.81591	41.7972	- 0.0457

I valori ottenuti con l'avvolgimento chiuso rispetto a quelli con avvolgimento aperto hanno uno scostamento inferiore dello 0,3%, accettabile ai fini del calcolo dell'induttanza mediante il metodo delle immagini.

$$L'_{open} \cong L_{open} \pm M_{open} = \begin{cases} 91.039 + 41.81591 = 131,855 [\mu H] \\ 91.039 - 41.81591 = 49,223 [\mu H] \end{cases}$$

Nel caso del piano con permeabilità magnetica infinita,  $L'_{open}$  subisce un incremento pari alla mutua induttanza con la sua immagine, poiché la corrente dell'immagine ha verso concorde.

Nel caso di uno schermo conduttivo ideale,  $L'_{open}$  subisce un decremento pari alla mutua induttanza poiché la corrente dell'immagine ha verso opposto.

### *Riassumendo*

I risultati ottenuti con la geometria spiroidale, rispetto a quelli ricavati nel §4.3 e §4.2, hanno evidenziato un errore relativo maggiore, poiché l'incremento del raggio spiroidale ha generato tutti segnamenti di diversa lunghezza. Di conseguenza, ai fini della valutazione dell'auto e mutua induttanza della geometria, si è dovuto procedere calcolando sia l'auto induttanza di tutti i parallelepipedi, sia la mutua di ogni filamento rispetto agli  $(m-1)$  rimanenti. Ciò ha portato a una limitazione dei numeri di filamenti, poiché i tempi di esecuzione risultavano eccessivi.



# Conclusioni

In questo lavoro di tesi è stato realizzato un codice numerico con software MatLab che consente all'utente di calcolare l'auto e mutua induttanza di un avvolgimento in aria di qualsiasi geometria mediante il metodo PEEC.

Prima di procedere allo sviluppo dell'algoritmo è stata eseguita una ricerca bibliografica allo scopo di famigliarizzare con la teoria degli elementi parziali e con lo stesso metodo PEEC.

Nello sviluppo del processo di discretizzazione per geometrie non ortogonali è stato utilizzato una semplificazione del metodo PEEC. Per il calcolo dell'autoinduttanza è stata eseguito con parallelepipedi in sostituzione degli esaedri. Per il calcolo della mutua induttanza sono stati utilizzati filamenti rettilinei aventi direzione arbitraria nello spazio. Tali filamenti sono stati inseriti in ogni parallelepipedo disposti in un reticolo regolare.

Sono state studiate diverse geometrie al variare dei numeri di filamenti  $m$  tratti

Inoltre, sono state implementate due funzioni, ( $Lbar$  e  $Mwire$ ) basate, rispettivamente:

- $Lbar$  : sulla risoluzione del doppio integrale triplo di un conduttore a sezione rettangolare [5], per la valutazione dell'autoinduttanza parziale;
- $Mwire$  : sulla risoluzione della mutua induttanza parziale tra due filamenti, sia posti su due piani paralleli aventi direzioni generiche, sia posti sullo stesso piano aventi stessa direzione.

In seguito, è stato implementato un algoritmo in ambiente MatLab, dove in ingresso riceve, sia i vertici dei parallelepipedi, sia quelli dei filamenti rettilinei e restituisce in uscita l'induttanza complessiva della singola geometria o la mutua tra due geometrie.

Sono stati eseguiti una serie di esempi applicativi con geometrie simmetriche, variando il numero di filamenti  $m$ , sono stati ottenuti risultati con approssimazione inferiore allo 0,1%, a discapito dei tempi di esecuzione.

Infine, è stata analizzata l'induttanza di un avvolgimento di forma spiroidale, la non simmetria geometrica ha restituito risultati con uno scostamento di circa 2% rispetto a quelli sperimentali presenti in letteratura, con un notevole aumento dei tempi di esecuzione rispetto alla geometria simmetrica. La non simmetria geometrica impone, per la valutazione della mutua induttanza, il confronto di ogni singolo filamento rispetto agli  $(m-1)$  rimanenti, ciò causa un notevole aumento del costo computazionale che limita l'approssimazione del valore.

La flessibilità del metodo permette di essere applicato con buona approssimazione a qualsiasi geometria. Abbinato ad altri software per lo studio della geometria discretizzata da la possibilità di eseguire una procedure di ottimizzazione che consente di ottenere uno specifico valore di induttanza per una specifica geometria.





```

v1=f1-p1;
v2=f2-p2;
x12=xp(v1,v2);
nx12=norm(x12);
if abs(nx12)>1.e-10
n1=x12/nx12;% vettore ortogonale a P1F1 e P2F2
dz=dot(p2-p1,n1)*n1;% vettore distanza tra i piani paralleli contenenti P1F1 e
P2F2 e ortogonali a n1
q2=p2-dz;%punto traslato Q2 di P2 che giace nel piano contenente P1F1 e
ortogonale a n1
v2p=xp(xp(v1,v2),v2);%vettore ortogonale a v2 e complanare a v1 e v2
%***** la seguenti istruzioni commentate si possono togliere
%s=dot((p2-p1),v2p)/dot(v1,v2p);%fattore di cui va prolungato P1F1 per
intersecare la retta parallela a v2 e v2 giacente sul piano che contiene P1F1
%O=p1+s*v1;%punto di intersezione tra la retta P1F1 e la retta parallela a v2
e giacente sul piano che contiene P1F1
%verifica il parallelismo di OQ2 e v2 e quindi dell'intersezione
%test=dot((O-q2),v2)/(norm(O-q2)*norm(v2))
l1q=lq(v1);l2q=lq(v2);r1q=lq(f2-f1);r2q=lq(f2-p1);r3q=lq(p2-p1);r4q=lq(f1-p2);
%quadrati lunghezze v1,v2,r1,r2,r3,r4 valori scalari.
r1=sqrt(r1q);r2=sqrt(r2q);r3=sqrt(r3q);r4=sqrt(r4q); % lunghezze r1,r2,r3,r4
s1q=r4q-r3q+r2q-r1q;s2q=r2q-r3q-l2q;s3q=r4q-r3q-l1q;s4q=4*l1q*l2q-s1q*s1q;
l1=sqrt(l1q);l2=sqrt(l2q);
t1=sqrt(l1q)*(2*l2q*s3q+s1q*s2q)/s4q;
t2=sqrt(l2q)*(2*l1q*s2q+s1q*s3q)/s4q;
ce=s1q/(2*l1*l2);
dq=r3q-t2*t2-t1*t1+2*t1*t2*ce;
% dq=(r3q-(t2*t2)-(t1*t1)+(2*t1*t2*ce)) questo valore pur essendo zero,
% produce un risultato nell'esecuzione dl codice. dq= 4.4409e-16
% (per valori di La=Lb=2) dando una d~0. Ciò causa una divisione
% per lo zero. r2=0 ho risolto inserendo nel if successivo
% un'altra condizione. r2~0

d=sqrt(dq);

seq=1-ce*ce;se=sqrt(seq);cdqe=dq*ce;sed=d*se;

if d~0 %(siamo nella condizione generale dove troviamo i due piani paralleli
w=(atan((cdqe+(t2+l2)*(t1+l1)*seq)/(r1*sed))-
atan((cdqe+(t2+l2)*t1*seq)/(r2*sed)))+...
atan((cdqe+t2*t1*seq)/(r3*sed))-atan((cdqe+t2*(t1+l1)*seq)/(r4*sed)));

else
w=0;
end % 1e-7*2ce*real() real restituisce solo la parte reale del numero. e 1e-
7*2ce rappresenta (mu/2pi)2 verificata la formula.
M=1e-7*ce*real(2*((t2+l2)*atanh(l1/(r1+r2))-
(l1==r1+r2))+(t1+l1)*atanh(l2/(r1+r4)-(l2==r1+r4))-...
t2*atanh(l1/(r3+r4)-(l1==r3+r4))-t1*atanh(l2/(r2+r3)-(l2==r2+r3)))-(w*d/se));

else % caso conduttori paralleli m e l pg 213 - 216 formula 5.28 inductance
loop and partial clayton R Paul
uv1=uv(v1); % vettore di v1 che ha modulo unitario
xp2p1 = dot(p2 - p1,uv1); % restituisce la lunghezza di m+s

```

```

xp2f1 = dot(p2 - f1,uv1); % restituisce la lunghezza di s offset
xp1f2 = dot(p1 - f2,uv1); % restituisce la lunghezza di s+m+l
xf2f1 = dot(f2 - f1,uv1); % restituisce la lunghezza di l+s
dy=norm(p2-p1-xp2p1*uv1); %distanza tra i due conduttori
M=1e-7*sign(dot(v1,v2))*(xp1f2*asinh(xp1f2/dy)-
xp2p1*asinh(xp2p1/dy)+xp2f1*asinh(xp2f1/dy)-xf2f1*asinh(xf2f1/dy)+norm(f2-f1)-
norm(f2-p1)-norm(f1-p2)+norm(p2-p1))*sign(dot(v1,v2));
end
end

```

**CODICE VALIDAZIONE ALGORITMO**  
**FUNCTION INTEGRALE DI NEUMANN - AUTOINDUTTANZA**

```

function M=LbarNeumann(x,y,z,a,b)
%UNTITLED4 Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here

M=((0.008/((a^2)*(b^2)))*((((y^2)*(z^2))/4)-((y^4)/24)-
((z^4)/24))*x*log((x+sqrt((x^2)+(y^2)+(z^2)))/sqrt((y^2)+z^2)))+...
((((x^2)*(z^2))/4)-((x^4)/24)-
((z^4)/24))*y*log((y+sqrt((x^2)+(y^2)+(z^2)))/sqrt((x^2)+z^2)))+...
((((x^2)*(y^2))/4)-((x^4)/24)-
((y^4)/24))*z*log((z+sqrt((x^2)+(y^2)+(z^2)))/sqrt((x^2)+y^2)))+...
((1/60)*(x^4+y^4+z^4-3*((x^2)*(y^2))-3*((y^2)*(z^2))-
3*((z^2)*(x^2)))*sqrt((x^2)+(y^2)+(z^2))))-...
(((x*y*(z^3))/6)*atan((x*y)/(z*sqrt((x^2)+(y^2)+(z^2)))))-
(((x*(y^3)*z)/6)*atan((x*z)/(y*sqrt((x^2)+(y^2)+(z^2)))))-...
((((x^3)*y*z)/6)*atan((y*z)/(x*sqrt((x^2)+(y^2)+(z^2))))));
end

```

**CODICE VALIDAZIONE ALGORITMO**  
**FUNCTION INTEGRALE DI NEUMANN - MUTUA INDUTTANZA**

```

function M=MbarN(x,y,z,a,b,c,d)
%UNTITLED4 Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here

M=((0.001/(a*b*c*d))*((((y^2)*(z^2))/4)-((y^4)/24)-
((z^4)/24))*x*log((x+sqrt((x^2)+(y^2)+(z^2)))/sqrt((y^2)+z^2)))+...
((((x^2)*(z^2))/4)-((x^4)/24)-
((z^4)/24))*y*log((y+sqrt((x^2)+(y^2)+(z^2)))/sqrt((x^2)+z^2)))+...
((((x^2)*(y^2))/4)-((x^4)/24)-
((y^4)/24))*z*log((z+sqrt((x^2)+(y^2)+(z^2)))/sqrt((x^2)+y^2)))+...
((1/60)*(x^4+y^4+z^4-3*((x^2)*(y^2))-3*((y^2)*(z^2))-
3*((z^2)*(x^2)))*sqrt((x^2)+(y^2)+(z^2))))-...
(((x*y*(z^3))/6)*atan((x*y)/(z*sqrt((x^2)+(y^2)+(z^2)))))-
(((x*(y^3)*z)/6)*atan((x*z)/(y*sqrt((x^2)+(y^2)+(z^2)))))-...
((((x^3)*y*z)/6)*atan((y*z)/(x*sqrt((x^2)+(y^2)+(z^2))))));
End

```

## CODICE VALIDAZIONE ALGORITMO AUTOINDUTTANZA CON L'INTEGRALE DI NEUMANN

```

% CALCOLO AUTO INDUTTANZE TRA DUE PARALLELEPIEDI CON LA L'INTEGRALE DI
NEUMANN
% ARTICOLO DI RIFERIMENTO DELL'INTEGRALE DI NEUMANN : 'xact Inductance
Equations for Rectangular
...Conductors With Applications to More Complicated Geometries.' Cletus Hoer
and Carl Love January 11, 1965.
...JOURNAL OF RESEARCH of the National Bureau of Standards-C. Engineering and
Instrumentation Vol. 69C, No.2, April-June 1965. pg 132
% le dimensioni sono micron henry per dimensioni in centimetri
% dimensioni primo parallelepipedo

a=200; % base
b=100; % altezza
l=1000; % lunghezza
La=0;
Lb=0;
Lc=0;
Ld=0;
Le=0;
Lf=0;
L5=0;
LA=0;
% estremi sommatoria superiori interni b1
x=[a,0];
y=[b,0];
z=[l,0];
for i=1:2
    for j=1:2
        for k=1:2
            Le=LbarNeumann(x(i),y(j),z(k),a,b)*((-1)^(i+j+k+1));
            if isnan(Le)
                continue
            else
                L5=Le+L5;
            End
        end
    end
end
end
% questa parte dell'integrale è stato risolto a parte perché causava
% risultati NaN e invalidava l'espressione
La=(0.008/(a^2*b^2)*(1/60))*z(1)^5; % i==j==2 l'unica parte della function
rimanente
Lb=(0.008/(a^2*b^2)*(1/60))*y(1)^5; % i==k==2 l'unica parte della function
rimanente
Lc=(0.008/(a^2*b^2)*(1/60))*x(1)^5; % j==k==2 l'unica parte della function
rimanente
Ld=0; % i==j==k==2 in questo caso è zero
LA=La+Lb+Lc+Ld+L5;
% STAMPA RISULTATI
disp(LA)

```

**CODICE VALIDAZIONE ALGORITMO  
AUTOINDUTTANZA DI UN PARALLELEPIPEDO METODO PEEC.**

```
% ARTICOLO DI RIFERIMENTO PER IL CONFRONTO CON L'INTEGRALE DI NEUMANNE : 'xact  
Inductance Equations for Rectangular  
...Conductors With Applications to More Complicated Geometries.' Cletus Hoer  
and Carl Love January 11, 1965.  
...JOURNAL OF RESEARCH of the National Bureau of Standards-C. Engineering and  
Instrumentation Vol. 69C, No.2, April-June 1965. pg 132
```

```
tic  
La=10; %lunghezza parallelepipedo A  
N=2; % suddivisioni  
s1=2; % a nella formula di Neumann  
nx=30;  
nz=30;  
h1=1; % b nella formula di Leumann
```

```
% PUNTI MUTUA INTERNA PARALLELEPIPEDO  
% - punti interni - per mutua fili parallelepipedo  
% punti sull'asse X  
Ix=1:nx;  
X1A=((s1)/nx)*(Ix-0.5));  
X2A=X1A;  
% punti sull'asse Y  
Y1A=zeros(1,nx);  
Y2A=La*ones(1,nx);  
% punti sull'asse Z  
Iz=1:nz;  
Zi1=((h1/nz)*(Iz-0.5));
```

```
% VERTICI FILI  
Xip=[X1A',X2A']; % la X da utilizzare per la mutua tra parallelepipedo  
consecutivi  
Yip=[Y1A',Y2A']; % La Y da utilizzare per la mutua tra fili di parallelepipedo  
consecutivi  
%punti sull'asse z  
m=(nz*nx);
```

```
MA=0; %mutua induttanza interna al parallelepipedo
```

```
%-----  
% DATI AUTOINDUTTANZA  
LA=0;  
L1=0;  
Xa=0;  
Xb=0;  
%-----  
for w=1:N  
for u=1:nz %a quote diverse  
for v=1:nx %confronto dei fili di un parallelepipedo a ogni ciclo di N stessa  
quota  
for i=1:N % numero di suddivisioni dell'oggetto esaminato
```



```

for k=1:nz % numero di fili disposti sull'asse z
for j=1:nx % numeri di fili disposti sull'asse x
if (i<2) && (v<2) && (u<2) && (w<2)

%          LATO A SX
l1=La;      % ordinata
a1=(s1/nx); % ascisse
b1=(h1/nz); % quota
La1=(abs(Lbar(l1,a1,b1)));
LA=La1+LA;
%      disp('La')
%      disp(La)
end

% CALCOLO MUTUA INDUTTANZA INTERNA AL PARALLELEPIPEDI
if (i==1) && (w==1)
if (k==u) && (j==v)
continue
end
Ma=Mwire([Xip(v,w),Yip(v,w),Zil(u)], [Xip(v,w+1),Yip(v,w+1),Zil(u)], [Xip(j,i),Y
ip(j,i),Zil(k)], [Xip(j,i+1),Yip(j,i+1),Zil(k)]);
MA=(Ma+MA); %calcolo delle mutue all'interno di ogni parallelepipedo
%      disp('Ma')
%      disp(Ma)
end
end
end
end
end
end
end
end
L1=Lbar(La,s1,h1);

%MUTUE INTERNE AI PARALLELEPIPEDO
M=MA;
% AUTO INDUTTANZE .
L=LA;
% INDUTTANZA TOTALE in micro
Lloop=(L+M)/(m^2);
% STAMPA RISULTATI
disp('M microH =')
disp(M*1000000);
disp('L microH =')
disp(L*1000000);
disp('L1 microH =')
disp(L1*1000000)
disp('Lloop microH')
disp(Lloop*1000000);
toc

```

## VALIDAZIONE ALGORITMO MUTUE INDUTTANZE

### CALCOLO MUTUA TRA DUE PARALLELEPIEDI CON L'INTEGRALE DI NEUMANN

```
% ARTICOLO DI RIFERIMENTO DELL'INTEGRALE DI NEUMANNE : 'xact Inductance
Equations for Rectangular
...Conductors With Applications to More Complicated Geometries.' Cletus Hoer
and Carl Love January 11, 1965.
...JOURNAL OF RESEARCH of the National Bureau of Standards-C. Engineering and
Instrumentation Vol. 69C, No.2, April-June 1965. pg 131
% le dimensioni sono micron henry per dimensioni in centimetri
% dimensioni primo parallelepipedo
a=5; % base
b=2; % altezza
l1=10; % lunghezza

% % dimensioni secondo parallelepipedo
d=4; % base
c=3; % altezza
l2=12; % lunghezza
% il sistema di riferimento è posto nel vertice inferiore parallelepipedo A
% distanze tra i due
l3=7; % offset se non sono paralleli si considera anche l3. misurata
partendo dall'origine lungo l'asse z perpendicolare all'asse x
E=6; % distanza tra lato esterno (l1) parallelepipedo A e il lato
interno del parallelepipedo B (l2).
...misurata partendo dall'origine, retta perpendicolare all'asse y.
P=6; % distanza lungo l'asse y del parallelepipedo B. misurata partendo
dall'origine e perpendicolare all'asse x
M1=0;
% estremi sommatoria superiori interni b1
x=[E-a,E+d-a,E+d,+E];
y=[P-b,P+c-b,P+c,+P];
z=[l3-l1,l3+l2-l1,l3+l2,l3];
for i=1:4
for j=1:4
for k=1:4
M=MbarN(x(i),y(j),z(k),a,b,c,d)*((-1)^(i+j+k+1));
disp(M)
if isnan(M)
continue
else
M1=M+M1;
end
end
end
end
M2=M1
```

**VALIDAZIONE ALGORITMO MUTUE INDUTTANZE  
CALCOLO MUTUA TRA DUE PARALLELEPIEDI METODO PEEC**

% CODICE PER IL CALCOLO DELLA SELF E MUTUAL PARTIAL INDUTANCE DI DUE  
PARALLELEPIEDI POSTI NELLO SPAZIO

% ARTICOLO DI RIFERIMENTO PER IL CONFRONTO CON L'INTEGRALE DI NEUMANNE : 'xact  
Inductance Equations for Rectangular  
...Conductors With Applications to More Complicated Geometries.' Cletus Hoer  
and Carl Love January 11, 1965.  
...JOURNAL OF RESEARCH of the National Bureau of Standards-C. Engineering and  
Instrumentation Vol. 69C, No.2, April-June 1965. pg 131

```
tic
La=0.10; %lunghezza parallelepipedo A
Lb=0.10; %lunghezza parallelepipedo B
p=0.1; %quota rispetto al piano xy dove è appoggiato il parallelepipedo A
E=0.1; % distanza tra lato esterno (l1) parallelepipedo A e il lato interno
del parallelepipedo B (l2).
...misurata partendo dall'origine, retta perpendicolare all'asse y.
N=4; % suddivisioni
nx=30; % suddivisioni lungo l'asse x
nz=30; % suddivisioni lungo l'asse z
s1=0.05; % a nella formula di Leumann
s2=0.03; % d nella formula di Leumann
h1=0.01; % b nella formula di Leumann
h2=0.04; % c nella formula di Leumann

l3=0.05; % offset tra le due barre

% PUNTI MUTUA INTERNA PARALLELEPIEDO A E B

% - punti interni - per mutua fili parallelepipedo A

% punti sull'asse X
Ix=1:nx;
X1A=((s1/nx)*(Ix-0.5));
X2A=X1A;

% punti sull'asse Y
Y1A=zeros(1,nx);
Y2A=La*ones(1,nx);

% punti sull'asse z
Iz=1:nz;
Zi1=((h1/nz)*(Iz-0.5));

% punti interni per mutua fili parallelepipedo B
X1B=((s2/nx)*(Ix-0.5))+E+((s2)/(2*nx));
X2B=X1B;
```

```

% punti sull'asse Y
Y1B=13*ones(1,nx);
Y2B=(13+Lb)*ones(1,nx);
% punti sull'asse z
Zi2=((h2/nz)*(Iz-0.5))+p;
% COSTRUZIONE MATRICE DELLA GEOMETRIA
Xip=[X1A',X2A',X1B',X2B']; % la X da utilizzare per la mutua tra
parallelepipedo consecutivi
Yip=[Y1A',Y2A',Y1B',Y2B']; % La Y da utilizzare per la mutua tra fili di
parallelepipedo consecutivi
% Verifico la geometria plottando i punti con colore nero (k)
% hold
% plot3(Xip,Yip,Zi,'k .');

% -----

% CALCOLO MUTUA INDUTTANZA A FILI E AUTO INDUTTANZA CON IL METODO PEEC
% DATI MUTUA INDUTTANZA

m=(nz*nx);

% Riferimenti iniziali delle Mutue induttanze tra i fili del primo
parallelepipedo

MA=0; %mutua induttanza interna al parallelepipedo A
MB=0; %mutua induttanza interna al parallelepipedo B
MAB=0; % mutue tra i due parallelepipedo

%-----
% DATI AUTOINDUTTANZA

% SISTEMA DI RIFERIMENTO POSTO NELL'ORIGINE DEL PARALLELEPIPEDO

% nel calcolo dell'Autoinduttanza mi devo ricordare di aggiungere i
LA=0;
LB=0;
Xa=0;
Xb=0;

%-----
for w=1:N
for u=1:nz % numero di fili disposti sull'asse z
for v=1:nx % numero di fili disposti sull'asse x
for i=1:N % numero di suddivisioni dell'oggetto esaminato
for k=1:nz % numero di fili disposti sull'asse z
for j=1:nx % numeri di fili disposti sull'asse x
if (i<2) && (v<2) && (u<2) && (w<2)
% LATO A SX
l1=La; % ordinata
a1=(s1/nx); % ascisse
b1=(h1/nz); % quota

```



```

LAE=Lbar(La,s1,h1);
LBE=Lbar(Lb,s2,h2);
L1=(LAE+LBE);

%MUTUE INTERNE AI PARALLELEPIPEDI
Mj=(MA+MB);
% MUTUE TRA I PARALLELEPIPEDI
MIJ=(MAB)*2);
% MUTUA INDUTTANZE TOTALE.
M=(MIJ)/(m^2);
% AUTO INDUTTANZA TOTALE
L=((LB+LA)+Mj)/(m^2); % multiplico LA e LB per 2

%INDUTTANZA TOTALE IN microH
Lloop=(M+L)*1000000);
Lloop1=((L1+(MIJ/(m^2)))*1000000);
Mtot=((Lloop-(L*1000000))/2);
% disp('L1')
% disp(L1*1000000)

% STAMPA RISULTATI
disp('M microH =')
disp(M)
disp('L microH =')
disp(L)
disp('L1 microH =')
disp(L1)
disp('Lloop1 microH')
disp(Lloop1);
disp('Lloop microH')
disp(Lloop);
disp('Mtot microH =')
disp(Mtot)

toc

```

## **CODICE INDUTTANZA GEOMETRIA CIRCOLARE SEZ. RETTANGOLARE**

```
tic
```

```

N=50; %suddivisioni
Rci=0.498;
Rce=0.768;
%
del
% cerchio
Rpi=Rci*(sqrt((pi/N)/sin(pi/N)));
% raggio poligono estero è stato calcolato con l'uguaglianza dell'area del
% cerchio
Rpe=Rce*(sqrt((pi/N)/sin(pi/N)));

% calcolo i punti di MWair all'interno del parallelepipedo. Con questo

```

```

% esempio ci feriamo a solo 4 punti.
nx=10;
nz=1;
h=0.009;

%punti sull'asse X
Ix=1:nx;
Xl=(( (Rpe-Rpi) /nx) * (Ix-0.5)+Rpi-h);

%punti sull'asse z
Iz=1:nz;
Zi=(( (h/nz) * (Iz-0.5) ) - (h/2) );

%punti sull'asse y
Ylp=(-Xl*tan(pi/N));
Ylf=Xl*tan(pi/N);
%adesso bisogna far ruotare x e y al fine di creare la geometria piana.
%spaziatura dell'angolo in base alla suddivisioni.
theta=linspace(2*pi/N, (2*pi)+2*pi/N,N+1);
% Punti x
Xip=Xl'*cos(theta)-Ylp'*sin(theta);
Yip=Xl'*sin(theta)+Ylp'*cos(theta);

% Verifica della geometria plottando i punti con colore nero (k)
%   plot3(Xif,Yif,Zi,'b -');
%   hold
%   plot3(Xip,Yip,Zi,'k -');
% -----
m=(nz*nx);
% Riferimenti iniziali delle Mutue induttanze
Mjrirf=0; %mutua parallelepipedo
Mj_1=0; %SOMMA mutua interna ai parallelepipedi
Mij11=0;% Mutue induttanze degli MIJ parallelepipedi
MIJ=0;
%-----DATI AUTOINDUTTANZA-----
L_1=0;
L_2=0;
% -----
for w=1:N
for u=1:nz %a quote diverse
for v=1:nx %confronto dei fili di un parallelepipedo a ogni ciclo di N stessa
quota
for i=1:N % numero di suddivisioni dell'oggetto esaminato
for k=1:nz % numero di fili disposti sull'asse z
for j=1:nx % numeri di fili disposti sull'asse x

%-----DATI AUTOINDUTTANZA-----

if (nx>1) && (nz>=1) && (i<2) && (v<2) && (u<2) && (w<2)
    a1=(Rpe-Rpi)/nx;
    lu1=(2*(Xip(j,1)*tan((pi)/N))); % prima lunghezza interna
    be=(h/nz);
    L1=(abs(Lbar(be,a1,lu1)));
    L_1=L1+L_1; Somma contributi

```

```

    % disp(L1)
end
if (nx==1) && (nz>=1) && (i<2) && (v<2) && (u<2) && (w<2)
    a2=(Rpe-Rpi)/nx;
    lu1=(2*(Xip(j,1)*tan((pi)/N))); % prima lunghezza interna
    be=(h/nz);
    L2=(abs(Lbar(be,a2,lu1)));
    L_2=L2+L_2; Somma contributi
    % disp(L2)
End
%----- MUTUA TRA I PARALLELEPIPEDI LOOP MIJ-----
if (i<(N)) && (w==1)
Mij11=Mwire([Xip(v,w),Yip(v,w),Zi(u)], [Xip(v,w+1),Yip(v,w+1),Zi(u)], [Xip(j,w+i),Yip(j,w+i),Zi(k)], [Xip(j,w+i+1),Yip(j,w+i+1),Zi(k)]);
MIJ=(Mij11+MIJ); Somma contributi
    %disp('Mij11')
    %disp(Mij11)
end
% ----- MUTUA INDUTTANZA INTERNA AI PARALLELEPIPEDI-----
    if (i<2) && (w<2)
        if (k==u) && (j==v)
            continue
        end
Mjrif=Mwire([Xip(v,w),Yip(v,w),Zi(u)], [Xip(v,w+1),Yip(v,w+1),Zi(u)], [Xip(j,i),Yip(j,i),Zi(k)], [Xip(j,i+1),Yip(j,i+1),Zi(k)]);
Mj_1=(Mjrif+Mj_1); Somma contributi
    % disp('Mjrif')
    % disp(Mjrif)
end
end
end
end
end
end
end
end
% MUTUA INDUTTANZE TOTALE.
M=((Mj_1+MIJ)*N);
% AUTOINDUTTANZE TOTALE.
L=((L_1+L_2)*N);
% INDUTTANZE GEOMETRIA
Lloop=((M+L)/(m*m))*1000000);
%INDUTTANZA IN microH
Lloop1=(M+L)*(1000000)
% STAMPA RISULTATI
disp('M;')
disp(M)
disp('L')
disp(L)
disp('Lloop microH')
disp(Lloop)
% format long
Toc

```



## CODICE INDUTTANZA GEOMETRIA CIRCOLARE SEZ. CIRCOLARE

```
tic
% GEOMETRIA CIRCOLARE SEZIONE CIRCOLARE

% CODICE PER IL CALCOLO DELLA SELF AND MUTUAL PARTIAL INDUTANCE.

N=10; %suddivisioni
Rci=49.5;
Rce=50.5;
rce=0.5; % raggio sezione circolare

% cerchio
Rpi=Rci*sqrt((pi/N)/sin(pi/N));
% raggio poligono estero è stato calcolato con l'uguaglianza dell'area del
cerchio
Rpe=Rce*sqrt((pi/N)/sin(pi/N));
% calcolo i punti di MWair all'interno del parallelepipedo. Con questo
% esempio ci feriamo a solo 4 punti.
nx=1;
nz=20;
h=100;
m=(nx*nz); %suddivisioni
lo=(sqrt(pi/(m*4))*(rce+rce)); % lato equivalente della sezione circolare

%punti sull'asse X
Ix=1:nx;
X1=((Rpe-Rpi)/nx)*(Ix-0.5)+Rpi);

%punti sull'asse z
Iz=1:nz;
Z1z=((h/nz)*(Iz-0.5))-(h/2));

%punti sull'asse z
Y1p=(-X1*tan(pi/N));
%adesso bisogna far ruotare x e y al fine di creare la geometria piana.
theta=linspace(2*pi/N, (2*pi)+2*pi/N,N+1);

% Punti x e y
Xip=X1'*cos(theta)-Y1p'*sin(theta);
Yip=X1'*sin(theta)+Y1p'*cos(theta);
Zi=Z1z;

% Verifica geometria
%plot3(Xif,Yif,Zi,'b .');
%hold
% plot3(Xip,Yip,Zi,'k .');
% -----
%Riferimenti iniziali delle Mutue induttanze tra i fili del parallelepipedo
Mjrif=0; %mutua parallelepipedo
Mj_1=0; %SOMMA mutua interna ai parallelepipedi
Mij11=0;% Mutue induttanze degli MIJ parallelepipedi
MIJ=0; SOMMA mutue parallelepipedi
```

```

%----- DATI AUTOINDUTTANZA -----
% SISTEMA DI RIFERIMENTO POSTO NELL'ORIGINE DEL PARALLELEPIPEDO

Z=((h/nz)*(Iz-0.5));
L_1=0;
L_2=0;
bi=((h/nz)-Z(1)); % pezzettino da aggiungere per centrare la geometria
dell'autoinduttanza
%-----
for w=1:N
for u=1:nz %% numero di fili disposti sull'asse z
for v=1:nx % numeri di fili disposti sull'asse x
for i=1:N % numero di suddivisioni dell'oggetto esaminato
for k=1:nz % numero di fili disposti sull'asse z
for j=1:nx % numeri di fili disposti sull'asse x

-----AUTOINDUTTANZA-----

if (nx>1) && (nz>=1) && (i<2) && (v<2) && (u<2) && (w<2)
    a1=lo;
    lu1=(Xip(j,1)*sin((2*pi)/N));
    be=lo;
    L1=(abs(Lbar(lu1,a1,be)));
    L_1=L1+L_1; Somma contributi
end
if (nx==1) && (nz>=1) && (i<2) && (v<2) && (u<2) && (w<2)
    a2=lo;
    lu1=(Xip(j,1)*sin((2*pi)/N)); % prima lunghezza interna al toro
    be=lo;
    L2=(abs(Lbar(lu1,a2,be)));
    L_2=L2+L_2; Somma contributi
end

%----- MUTUA DI TUTTI I PARALLELEPIPEDI LOOP MIJ-----
if (i<(N)) && (w<2)
Mij11=Mwire([Xip(v,w),Yip(v,w),Zi(u)], [Xip(v,w+1),Yip(v,w+1),Zi(u)], [Xip(j,w+i),Yip(j,w+i),Zi(k)], [Xip(j,w+i+1),Yip(j,w+i+1),Zi(k)]);
MIJ=(Mij11+MIJ); Somma contributi
% disp('Mij11')
% disp(Mij11)
end
% ----- MUTUA INDUTTANZA INTERNA AI PARALLELEPIPEDI-----
if (i<2) && (w<2)
    if (k==u) && (j==v)
        continue
    end
Mjrif=Mwire([Xip(v,w),Yip(v,w),Zi(u)], [Xip(v,w+1),Yip(v,w+1),Zi(u)], [Xip(j,i),Yip(j,i),Zi(k)], [Xip(j,i+1),Yip(j,i+1),Zi(k)]);
Mj_1=(Mjrif+Mj_1); Somma contributi
% disp('Mjrif')
% disp(Mjrif)
end

```

```

end
end
end
end
end
end

%MUTUE INTERNE AI PARALLELEPIPEDI
Mj=(Mj_1); % mutua dei segmenti posti all'interno del parallelepipedo.

% MUTUA INDUTTANZE TOTALE.
M=MIJ*N;

% AUTOINDUTTANZE TOTALE
L=(Mj+L_1+L_2)*N; % multiplico L_1 per N -4*L1

% INDUTTANZE GEOMETRIA
Lloop=(M+L)/(m*m);
%INDUTTANZA IN microH
Lloop1=(M+L)*(1000000)

% STAMPA RISULTATI
disp('Lloop microH')
disp(Lloop*1000000)
disp('Sloop microH')
disp((Lloop*100^2)*1000000)
toc

```

### **CODICE INDUTTANZA GEOMETRIA RETTANGOLARE A SEZIONE RETTANGOLARE.**

% CODICE PER IL CALCOLO DELLA SELF AND MUTUAL PARTIAL INDUTANCE.

```

tic
La=1; %lato corto
Lb=10; %lato lungo
N=4;
%suddivisioni
s=0.2; % spessore interno

nx=32;
nz=16;
h=0.1;
%punti sull'asse X
Ix=1:nx;
% PUNTI MUTUA INTERNA PARALLELEPIPEDO A E B

```

```

%lato alla base - punti interni - per mutua fili parallelepipedo a
X1=((s)/nx)*(Ix-0.5);
X2=sorta((Las-((s)/nx)*(Ix-0.5)), 'discenda'); % ordine decrescente ho aggiunto
qui s
X3=X2;
X4=sort(X1);
Y1=X1;
Y2=sorta(X1);
Y3=sorta((LS-((s)/nx)*(Ix-0.5)), 'discenda'); %ordine decrescente ho aggiunto
qui s
Y4=Y3;
% lato b punti interni per mutua fili parallelepipedo b

% PUNTI MUTUA TRA PARALLELEPIPEDI
Xip=[X1',X2',X3',X4',X1',X2',X3',X4',X1']-La/2; % la X da utilizzare per la
mutua tra parallelepipedi consecutivi
Yip=[Y1',Y2',Y3',Y4',Y1',Y2',Y3',Y4',Y1']-Lb/2; % La Y da utilizzare per la
mutua tra fili di parallelepipedi consecutivi

%punti sull'asse z
Iz=1:nz;
Zi=((h/nz)*(Iz-0.5))-(h/2);

m=(nz*nx);

% -----
% Riferimenti iniziali delle Mutue induttanze tra i fili del primo
parallelepipedo
MA=0; %mutua induttanza interna al parallelepipedo A
MB=0; %mutua induttanza interna al parallelepipedo B
MA1=0;
MB1=0
% mutue interne tra tutti ii parallelepipedi
% Riferimenti iniziali delle Mutue induttanze tra i fili del primo
parallelepipedo e gli atri N-1
% parallelepipedo

% Mutua rispetto ad A
MIJA=0;
MIJ11=0;
MIJ12=0;
MIJ14=0;
% Mutua rispetto a B
MIJB=0;
MIJ21=0;
MIJ23=0;
MIJ22=0;

%----- DATI AUTOINDUTTANZA-----
LA=0;
LB=0;
Xa=0;

```

```

Xb=0;
%-----
for w=1:N
for u=1:nz %a quote diverse
for v=1:nx %confronto dei fili di un parallelepipedo a ogni ciclo di N stessa
quota
for i=1:N % numero di suddivisioni dell'oggetto esaminato
for k=1:nz % numero di fili disposti sull'asse z
for j=1:nx % numeri di fili disposti sull'asse x

-----AUTOINDUTTANZA-----
if (i<2) && (v<2) && (u<2) && (w<2)
    LATO A
    if j==1
        l1=La-s/nx; % ascisse
    else if j>=2
        Xa=((s/(nx))*2*(j-1));
        l1=(La-(s/(nx))-Xa); % ordinata
    end
    a1=(s/nx);
    b1=(h/nz); % quota
    La1=(abs(Lbar(l1,a1,b1)));
    LA=La1+LA; Somma contributi
disp('La1')
disp(La1)
end
if (i<2) && (v<2) && (u<2) && (w<2)
    % LATO B
    if j==1
        l2=Lb-s/nx;
    else if j>=2
        Xb=((s/(nx))*2*(j-1));
        l2=(Lb-(s/(nx))-Xb);
    end
    a2=(s/nx); % ordinata
    b2=(h/nz); % quota
    Lb1=(abs(Lbar(l2,a2,b2)));
    LB=Lb1+LB; Somma contributi
%disp('Lb1')
%disp(Lb1)
end
%----- MUTUA DI TUTTI I PARALLELEPIPEDI LOOP MIJ MUTUE RISPETTO AD A-----
% con questa sequenza trovo le mutue degli altri N parallelepipedo rispetto al
primo
if (i==2) && (w==1)
Mij11=Mwire([Xip(v,w), Yip(v,w), Zi(u)], [Xip(v,w+1), Yip(v,w+1), Zi(u)], [Xip(j,w+i), Yip(j,w+i), Zi(k)], [Xip(j,w+i+1), Yip(j,w+i+1), Zi(k)]);
MIJ11=(Mij11+MIJ11);
% disp('Mij11')
% disp(Mij11)
end
if (i==2) && (w==2)
Mij22=Mwire([Xip(v,w), Yip(v,w), Zi(u)], [Xip(v,w+1), Yip(v,w+1), Zi(u)], [Xip(j,w+i), Yip(j,w+i), Zi(k)], [Xip(j,w+i+1), Yip(j,w+i+1), Zi(k)]);

```

```

MIJ22=(Mij22+MIJ22);
%disp('Mij22')
%disp(Mij22)
end
% ----- MUTUA INDUTTANZA INTERNA AI PARALLELEPIPEDI A e B-----
if (i==1)&&(w==1)
    if (k==u)&&(j==v)
        continue
    end
Ma=Mwire([Xip(v,w),Yip(v,w),Zi(u)],[Xip(v,w+1),Yip(v,w+1),Zi(u)],[Xip(j,i),Yip(j,i),Zi(k)],[Xip(j,i+1),Yip(j,i+1),Zi(k)]);
%     disp('Ma')
%     disp(Ma)
MA=(Ma+MA); Somma contributi
end
if (i==2)&&(w==2) % mutue tra i fili dello stesso parallelepipedo.
    if (k==u)&&(j==v)
        continue
    end
Mb=Mwire([Xip(v,w),Yip(v,w),Zi(u)],[Xip(v,w+1),Yip(v,w+1),Zi(u)],[Xip(j,i),Yip(j,i),Zi(k)],[Xip(j,i+1),Yip(j,i+1),Zi(k)]);
%     disp('Mb')
%     disp(Mb)
MB=(Mb+MB); Somma contributi
%     disp(Mb)
end
end
end
end
end
end
end
% MUTUE TOTALI INTERNE AI PARALLELEPIPEDI
Mj=(MA+MB)*2;
% MUTUE TRA I PARALLELEPIPEDI
MIJ=(MIJ11+MIJ22)*2;
% MUTUA INDUTTANZE TOTALI.
M=(MIJ)/(m^2);
L=((((LA+LB)*2)+Mj)/(m^2)); % multiplico LA e LB per 2
% INDUTTANZA TOTALE IN micronH
Lloop=(M+L)*1000000;
Lloop1=(L1+(MIJ/(m^2)))*1000000;
STAMPA RISULTATI
disp('M microH =')
disp(M)
disp('L microH =')
disp(L)
disp('L1 microH =')
disp(L1)
disp('Lloop1 microH')
disp(Lloop1);
disp('Lloop microH')
disp(Lloop);
toc

```

## CODICE MUTUA INDUTTANZA GEOMETRIA CIRCOLARE

tic

```
N=20; %suddivisioni
% dati primo induttore
Rci1=0.10;
Rce2=0.20;
nx1=10;
nz1=10;
h1=0.1;
% Dati secondo induttore
a=0.10; % distanza tra i due avvolgimenti
Rci3=0.3;
Rce4=0.4;
nx2=10;
nz2=10;
h2=0.1;
c=(h2)+a; % rife centro delle due sezioni
% rotazione della geometria 2pi con passo uguale alla suddivisione N
theta=linspace(2*pi/N, (2*pi)+2*pi/N,N+1);

% PRIMO INDUTTORE
% raggio poligono estero è stato calcolato con l'uguaglianza con l'area del
% cerchio
Rpi1=Rci1*(sqrt((pi/N)/sin(pi/N)));
Rpe2=Rce2*(sqrt((pi/N)/sin(pi/N)));

%punti sull'asse X
Ix1=1:nx1;
X1=(( (Rpe2-Rpi1)/nx1)*(Ix1-0.5)+Rpi1);

% Punti asse y
Y1p=(-X1*tan(pi/N));

%Punti asse z
Iz1=1:nz1;
Zi1=(( (h1/nz1)*(Iz1-0.5))-(h1/2));

% rotazione punti X utili a disegnare la geometria circolare
Xip1=X1'*cos(theta)-Y1p'*sin(theta);

% rotazione punti Y utili a disegnare la geometria circolare
Yip1=X1'*sin(theta)+Y1p'*cos(theta);

% numero di spire per sezione
m1=(nz1*nx1);

% SECONDO INDUTTORE
% raggio poligono estero è stato calcolato con l'uguaglianza con l'area del
% cerchio
Rpi3=Rci3*(sqrt((pi/N)/sin(pi/N)));
```

```

Rpe4=Rce4*(sqrt((pi/N)/sin(pi/N)));

%punti sull'asse X
Ix2=1:nx2;
X2=((Rpe4-Rpi3)/nx2)*(Ix2-0.5)+Rpi3);

% Punti asse y
Y2p=(-X2*tan(pi/N));

%Punti asse z
Iz2=1:nz2;
Zi2=((h2/(nz2))*(Iz2-0.5)-(h2/2));

% Rotazione punti X utili a disegnare la geometria circolare
Xip2=X2'*cos(theta)-Y2p'*sin(theta);

% Rotazione punti Y utili a disegnare la geometria circolare
Yip2=X2'*sin(theta)+Y2p'*cos(theta);

% numero di spire per sezione
m2=(nz2*nx2);

%-----
% DATI AUTOINDUTTANZA

Lli=0; % autoinduttanza totale primo induttore
L_1=0; % somma autoinduttanze con nx1>=1 e nz1>=1
L_2=0; % somma autoinduttanze con nx1==1 e nz1>=1
Mij11=0; % mutua tra parallelepipedi
MIJ1=0; % somma mutua tra parallelepipedi
MJ1=0; % mutua interna ai parallelepipedi
Mj_1=0; % somma mutua interna ai parallelepipedi

for w=1:N
for u=1:nz1 % numero di fili disposti sull'asse z
for v=1:nx1 % numero di fili disposti sull'asse x
for i=1:N % numero di suddivisioni dell'oggetto esaminato
for k=1:nz1 % numero di fili disposti sull'asse z
for j=1:nx1 % numeri di fili disposti sull'asse x

%----- AUTOINDUTTANZA-----

if (nx1>1) && (nz1>=1) && (i<2) && (v<2) && (u<2) && (w<2)
a1=(Rpe2-Rpi1)/nx1;
lu1=(2*(Xip1(j,1)*tan((pi)/N)));
be=(h1/nz1);
L1=(abs(Lbar(be,a1,lu1)));
L_1=L1+L_1; Somma contributi
%disp(L1)
end
if (nx1==1) && (nz1>=1) && (i<2) && (v<2) && (u<2) && (w<2)
a2=(Rpe2-Rpi1)/nx1;

```



```

        lu1=(2*(Xip1(j,1)*tan((pi)/N)));
        be=(h1/nz1);
        L2=(abs(Lbar(be,a2,lu1)));
        L_2=L2+L_2; Somma contributi
%   disp(L2)
end

if (i<(N)) && (w==1)
Mij11=Mwire([Xip1(v,w),Yip1(v,w),Zil(u)], [Xip1(v,w+1),Yip1(v,w+1),Zil(u)], [Xip1(j,w+i),Yip1(j,w+i),Zil(k)], [Xip1(j,w+i+1),Yip1(j,w+i+1),Zil(k)]);
MIJ1=(Mij11+MIJ1);
%   disp('Mij11')
%   disp(Mij11)
end

% -----MUTUA INDUTTANZA INTERNA AI PARALLELEPIPEDI-----
--
if (i<2) && (w<2)
    if (k==u) && (j==v)
        continue
    end
    MJ1=Mwire([Xip1(v,w),Yip1(v,w),Zil(u)], [Xip1(v,w+1),Yip1(v,w+1),Zil(u)], [Xip1(j,i),Yip1(j,i),Zil(k)], [Xip1(j,i+1),Yip1(j,i+1),Zil(k)]);
    Mj_1=(MJ1+Mj_1); %Somma contributi
%   disp('Mj_1')
end
end
end
end
end
end
end
end
%
% -----
% LOOP SECONDO INDUTTORE
%-----
L2i=0; % autoinduttanza totale secondo induttore
L1_2=0; %somma autoinduttanze con nx2>1 e nz2>=1
L2_22=0; %somma autoinduttanze con nx2>=1 e nz2>=1
Mij22=0; % mutue tra parallelepipedi
MIJ2=0; % somma mutue parallelepipedi
MJ11=0; % mutue parallelepipedo
MJ_2=0; % somma mutue parallelepipedo

for w=1:N
for u=1:nz2 % numeri di fili disposti sull'asse z
for v=1:nx2 % numeri di fili disposti sull'asse x
for i=1:N % numero di suddivisioni dell'oggetto esaminato
for k=1:nz2 % numero di fili disposti sull'asse z
for j=1:nx2 % numeri di fili disposti sull'asse x

if (nx2>1) && (nz2>=1) && (i<2) && (v<2) && (u<2) && (w<2)
    a1=(Rpe4-Rpi3)/nx2;

```

```

    lu1=(2*(Xip2(j,1)*tan((pi)/N)));
    be=(h2/nz2);
    L12=(abs(Lbar(be,a1,lu1)));
    L1_2=L12+L1_2;
    %disp(L12) %Somma contributi
end

if (nx2==1) &&(nz2>=1) &&(i<2) &&(v<2) &&(u<2) &&(w<2)
    a2=(Rpe4-Rpi3)/nx2;
    lu1=(2*(Xip2(j,1)*tan((pi)/N)));
    be=(h2/nz2);
    L22=(abs(Lbar(be,a2,lu1)));
    L2_22=L22+L2_22; %Somma contributi
    % disp(L22)
end
-----%CALCOLO MUTUA DI TUTTI I PARALLELEPIPEDI LOOP MIJ-----

if (i<(N)) &&(w==1)
Mij22=Mwire([Xip2(v,w),Yip2(v,w),Zi2(u)], [Xip2(v,w+1),Yip2(v,w+1),Zi2(u)], [Xip2(j,w+i),Yip2(j,w+i),Zi2(k)], [Xip2(j,w+i+1),Yip2(j,w+i+1),Zi2(k)]);
MIJ2=(Mij22+MIJ2); %Somma contributi
% disp('Mij22')
% disp(Mij22)
end

% ----- MUTUA INDUTTANZA INTERNA AI PARALLELEPIPEDI-----
if (i<2) &&(w<2)
    if (k==u) &&(j==v)
        continue
    end
MJ11=Mwire([Xip2(v,w),Yip2(v,w),Zi2(u)], [Xip2(v,w+1),Yip2(v,w+1),Zi2(u)], [Xip2(j,i),Yip2(j,i),Zi2(k)], [Xip2(j,i+1),Yip2(j,i+1),Zi2(k)]);
MJ_2=(MJ11+MJ_2); %Somma contributi
% disp('MJ11')
% disp(MJ11)
end
end
end
end
end
end
end

%Punti asse z
Iz2=1:nz2;
Zi3=(Zi2/(2*nz2))+c+Zi2;
Mij12=0;
MIJ12=0;
for i=1:N
for k=1:nz1 % numeri di fili disposti sull'asse z
for j=1:nx1 % numeri di fili disposti sull'asse x
for w=1:N % numero di suddivisioni dell'oggetto esaminato

```

```

for u=1:nz2 % numero di fili disposti sull'asse z
for v=1:nx2 % numeri di fili disposti sull'asse x

if (i<=(N)) && (w<=(N))
Mij12=Mwire([Xip1(j,i),Yip1(j,i),Zi1(k)], [Xip1(j,i+1),Yip1(j,i+1),Zi1(k)], [Xip
2(v,w),Yip2(v,w),Zi3(u)], [Xip2(v,w+1),Yip2(v,w+1),Zi3(u)]);
MIJ12=(Mij12+MIJ12); Somma contributi
% disp('Mij12')
% disp(Mij12)
end
end
end
end
end
end
end
MIJ_12=((MIJ12)/(m1*m2));

% -----
% LOOP1 PRIMO INDUTTORE

M1=((Mj_1+MIJ1)*N);
L1i=((L_1+L_2)*N);

% INDUTTANZA IN microH
Lloop1=((M1+L1i)/(m1*m1))*1000000);
% -----
% LOOP2 SECONDO INDUTTORE
M2=((MJ_2+MIJ2)*N);
L2i=((L1_2+L2_22)*N);

% INDUTTANZA TOTALE IN microH
Lloop2=((M2+L2i)/(m2*m2))*1000000);
% -----

M3=((M1/(m1^2)))+(M2/(m2^2))+MIJ_12);
Ma=(Lloop1+Lloop2)/2;
STAMPA RISULTATI
disp('MIJ_12')
disp(MIJ_12)
Mexemp4=(MIJ_12)*((100*200));
disp('Mexemp4')
disp(Mexemp4)
format long
toc

```

## CODICE INDUTTANZA GEOMETRIA SPIROIDALE SEZIONE CIRCOLARE

```
tic
M=18; %suddivisioni per singolo giro
c=18; % numero di giri della spirale
N=c*M+1; % suddivisione intera geometria, +1 restituisce un numero pari di
parallelepipedo
Rce=0.20;
Rci=0.07;

p=0.007; %Passo spirale comprende anche la sezione del conduttore a

rce=0.002; % raggio sezione circolare
la=sqrt(pi/4)*2*rce; % lato equivalente di sezione circolare

% raggio poligono interno è stato calcolato con l'uguaglianza con l'area del
% cerchio
Rpi=Rci*(sqrt((pi/M)/sin(pi/M)));

% raggio poligono estero è stato calcolato con l'uguaglianza con l'area del
% cerchio
Rpe=Rce*(sqrt((pi/M)/sin(pi/M)));

% calcolo i punti di MWair all'interno del parallelepipedo. Con questo
nx=5;
nz=5;
h=la;
% PUNTI ASSE X E Y
Xrce=0;
Ix=1:nx;
Xrce=((la)/nx)*(Ix-0.5)+Rpi; % punti asse x primo giro spirale

% ROTAZIONE DEGLI ANGOLI DELLA SPIRALE
theta=linspace(0,2*c*pi,N);

q=((p*theta)/(2*pi)); % variazione passo spirale in funzione dell'angolo
for j=1:N
for i=1:nx
Xip(i,j)=(Xrce(i)+q(j))*cos(theta(j)); % punti spirale su asse x creazione
array
Yip(i,j)=(Xrce(i)+q(j))*sin(theta(j)); % punti spirale su asse y creazione
array
end
end

% PUNTI ASSE Z
Iz=1:nz;
Zi=((h/nz)*(Iz-0.5)-(h/2));
% DATI MUTUA INDUTTANZA
m=(nz*nx);
Mj=0; %mutua parallelepipedo di riferimento stessa quota di quella di rife
MJ=0; %SOMMA mutua interna ai parallelepipedo quota uguale a quella di rife
```

```

% Mutue induttanze degli MIJ parallelepipedi
Mij11=0;
MIJ=0;
MIJN=0;
MIJN1=0;
MIJn=0;
MIJ1=0;
MJN=0; % somma mutue del parallelepipedo di chiusura
%-----
% DATI AUTOINDUTTANZA

% SISTEMA DI RIFERIMENTO POSTO NELL'ORIGINE DEL PARALLELEPIPEDO

L_1=0;
L_2=0;
%-----
for w=1:N
for u=1:nz %a quote diverse
for v=1:nx %confronto dei fili di un parallelepipedo a ogni ciclo di N stessa
quota
for i=1:N % numero di suddivisioni dell'oggetto esaminato
for k=1:nz % numero di fili disposti sull'asse z
for j=1:nx % numeri di fili disposti sull'asse x
%
% -----% AUTO INDUTTANZA-----
%
if (i<N) &&(v<2) &&(u<2) &&(w<2)
a1=(la/nx);
lu1=sqrt(((abs(Xip(j,i+1))-abs(Xip(j,i)))^2)+((abs(Yip(j,i+1))-
abs(Yip(j,i)))^2)); % lunghezza
%disp(lu1)
be=(la/nz);
L1=(abs(Lbar(be,a1,lu1)));
L_1=L1+L_1; Somma contributi
% disp(L1)
end

%----- MUTUA DI TRA PARALLELEPIPEDI MIJ-----

if (w<(N-1)) &&((w+i)<N)

Mij11=Mwire([Xip(v,w),Yip(v,w),Zi(u)], [Xip(v,w+1),Yip(v,w+1),Zi(u)], [Xip(j,w+i
),Yip(j,w+i),Zi(k)], [Xip(j,w+i+1),Yip(j,w+i+1),Zi(k)]);
MIJ=(2*Mij11+MIJ); Somma contributi
% disp('Mij11')
% disp(Mij11)
end

```

```

% ----- MUTUA INDUTTANZA INTERNA AI PARALLELEPIPEDI MJ-----

if (i<2) && (w<N)
    if (k==u) && (j==v)
        continue
    end
Mj=Mwire([Xip(v,w),Yip(v,w),Zi(u)], [Xip(v,w+1),Yip(v,w+1),Zi(u)], [Xip(j,w),Yip(j,w),Zi(k)], [Xip(j,w+1),Yip(j,w+1),Zi(k)]);
MJ=(Mj+MJ); %calcolo delle mutue all'interno di ogni parallelepipedo
%     disp('MJ')
%     disp(MJ)
End

% MUTUA TRA PARALLELEPIPEDO DI CHIUSURA (PUNTO FINALE E INIZIALE) RISPETTO
AGLI N PARALLELEPIPEDI.

if (w==N) && (i<N)
Mijn=Mwire([Xip(v,w),Yip(v,w),Zi(u)], [Xip(v,1),Yip(v,1),Zi(u)], [Xip(j,i),Yip(j,i),Zi(k)], [Xip(j,i+1),Yip(j,i+1),Zi(k)]);
MIJn=(Mijn+MIJn); Somma contributi
%     disp('Mij11')
%     disp(Mij11)
end

% -----MUTUA INTERNA AL PARALLELEPIPEDO DI CHIUSURA-----

if (i<2) && (w==N) % mutue tra i fili dello stesso parallelepipedo. stessa quota
del filo rife ) && (nx>=5)
    if (k==u) && (j==v)
        continue
    end
MjN=Mwire([Xip(v,w),Yip(v,w),Zi(u)], [Xip(v,1),Yip(v,1),Zi(u)], [Xip(j,w),Yip(j,w),Zi(k)], [Xip(j,1),Yip(j,1),Zi(k)]);
MJN=(MjN+MJN); Somma contributi
%     disp('Mjrif')
%     disp(Mjrif)
end
end
end
end
end
end
end

Lclosed=(Lbar(la,la,Rpe-Rpi))*1000000 % AUTO INDUTTANZA PARALLELEPIPEDO DI
CHIUSURA. RISULTATO IN micron.
Mijclosed=((2*MIJn)/m^2) *1000000 % MUTUA COMPLESSIVA PARALLELEPIPEDO DI
CHIUSURA RISPETTO AGLI N PARALLELEPIPEDI. RISULTATO IN micron.
Mjnclosed=(MJN/m^2)*1000000 % MUTUA INTERNA PARALLELEPIPEDO DI
CHIUSURA. RISULTATO IN micron.

% MUTUA INDUTTANZE TOTALE.

```

```

M=( (MIJ) / (m^2) );
% AUTOINDUTTAZNA SINGOLO PARALLELEPIPEDO
L=( (L_1+MJ) / (m^2) );
% INDUTTANZA IN micronH
Lloop=( (M+L) *1000000);

%STAMAPA RISULTATI
disp ('MIJ')
disp (MIJ*1000000)
disp ('M')
disp (M*1000000)
disp ('L')
disp (L*1000000)
disp('Lloop microH')
% disp (Lloop)
% format long
toc

```

## CODICE MUTUA INDUTTANZA GEOETRIA SPIROIDALE SEZIONE CIRCOLARE

```

tic

M=18; %suddivisioni per singolo giro
c=18; % numero di giri della spirale
N=c*M+1; % suddivisione intera geometria, +1 restituisce un numero pari di
parallelepipedi
p=0.007; %Passo spirale comprende anche la sezione del conduttore a
rce=0.002; % raggio sezione circolare

% lato equivalente della sezione quadrata
la=sqrt(pi/4)*2*rce; % lato equivalente di sezione circolare

% Dati primo induttore
Rci1=0.07;
Rce2=0.20;
h1=la;
nx1=3;
nz1=3;
m1=(nz1*nx1);

% Dati secondo induttore
Rci3=0.07;
Rce4=0.20;
nx2=3;
nz2=3;
h2=la;
m2=(nz2*nx2);
a=0.06; % distanza tra i due avvolgimenti,z3-z2
% C=0; caso coassiali
C=(h1/2)+(h2/2)+a; % da la possibilità di considerare i due avvolgimenti,
posti sullo stesso asse, con distanza tra i due centri uguale a c ...
...se i due avvolgimenti sono concentrici allora C=0

```

```

%----- PRIMO INDUTTORE -----
% raggio poligono estero è stato calcolato con l'uguaglianza con l'area del
% cerchio
Rpi1=Rci1*(sqrt((pi/M)/sin(pi/M)));
Rpe2=Rce2*(sqrt((pi/M)/sin(pi/M)));

% ROTAZIONE DEGLI ANGOLI DELLA SPIRALE
% PUNTI ASSE X E Y
Xrce1=0;
Ix1=1:nx1;
Xrce1=((la)/nx1)*(Ix1-0.5)+Rpi1; % punti asse x primo giro spirale

% ROTAZIONE DEGLI ANGOLI DELLA SPIRALE
theta=linspace(0,2*c*pi,N);
q1=((p*theta)/(2*pi)); % variazione passo spirale in funzione dell'angolo
for j=1:N
for i=1:nx1
Xip1(i,j)=(Xrce1(i)+q1(j))*cos(theta(j)); % punti spirale su asse x creazione
array
Yip1(i,j)=(Xrce1(i)+q1(j))*sin(theta(j)); % punti spirale su asse y creazione
array
end
end
plot( Xip1',Yip1')

% PUNTI ASSE Z
Iz1=1:nz1;
Zi1=((h1/nz1)*(Iz1-0.5)-(h1/2));

%----- SECONDO INDUTTORE -----
% cerchio
Rpi3=Rci3*(sqrt((pi/M)/sin(pi/M)));
Rpe4=Rce4*(sqrt((pi/M)/sin(pi/M)));

% PUNTI ASSE X E Y
Xrce2=0;
Ix2=1:nx2;
Xrce2=((la)/nx2)*(Ix2-0.5)+Rpi3; % punti asse x primo giro spirale

% ROTAZIONE DEGLI ANGOLI DELLA SPIRALE
theta=linspace(0,2*c*pi,N);
q2=((p*theta)/(2*pi)); % variazione passo spirale in funzione dell'angolo
for j=1:N
for i=1:nx2
Xip2(i,j)=(Xrce2(i)+q2(j))*cos(theta(j)); % punti spirale su asse x creazione
array
Yip2(i,j)=(Xrce2(i)+q2(j))*sin(theta(j)); % punti spirale su asse y creazione
array
end
end
% PUNTI ASSE Z
Iz2=1:nz2;

```



```

Zi2=((h2/nz2)*(Iz2-0.5))-(h2/2));
% raggio poligono estero è stato calcolato con l'uguaglianza con l'area del
% cerchio
Rpi3=Rci3*(sqrt((pi/M)/sin(pi/M)));
Rpe4=Rce4*(sqrt((pi/M)/sin(pi/M)));

Zi3=(C+Zi2)-(h1/(2*nz1)); % solenoidi coassiali offset
Mij12=0;
MIJ12=0;
MIJn=0; % Mutua tratto che unisce i due estremi per la chiusura
dell'avvolgimento
for i=1:N
for k=1:nz1 % numero di fili disposti sull'asse z
for j=1:nx1 % numero di fili disposti sull'asse x
for w=1:N % numero di suddivisioni dell'oggetto esaminato
for u=1:nz2 % numero di fili disposti sull'asse z
for v=1:nx2 % numeri di fili disposti sull'asse x

MUTUA TRA PARALLELEPIPEDO
if (i<(N)) && (w<(N))
Mij12=Mwire([Xip1(j,i),Yip1(j,i),Zi1(k)], [Xip1(j,i+1),Yip1(j,i+1),Zi1(k)], [Xip
2(v,w),Yip2(v,w),Zi3(u)], [Xip2(v,w+1),Yip2(v,w+1),Zi3(u)]);
MIJ12=(Mij12+MIJ12);
% disp('Mij12')
% disp(Mij12)
end
% MUTUA TRA PARALLELEPIPEDO DI CHIUSURA (PUNTO FINALE E INIZIALE) RISPETTO
AGLI N PARALLELEPIPEDI.
if (w==N) && (i<N)
Mijn=Mwire([Xip1(v,w),Yip1(v,w),Zi(u)], [Xip1(v,1),Yip1(v,1),Zi1(u)], [Xip2(j,i)
,Yip2(j,i),Zi3(k)], [Xip2(j,i+1),Yip2(j,i+1),Zi3(k)]);
MIJn=(Mijn+MIJn);
% disp('Mij11')
% disp(Mij11)
end
end
end
end
end
end
end
end
MIJ_12=((MIJ12)/(m1*m2));
% -----
% MUTUA INTERNA PARALLELEPIPEDO DI CHIUSURA. RISULTATO IN micron.
MIJclosed=(2*MIJn/(m1*m2))*1000000
% MUTUA GEOMETRIA OPEN LOOP
Mexemp4=(MIJ_12)*(1000000);
STAMPA RISULTATI
disp('MIJ_12')
disp(MIJ_12)
disp('Mexemp4')
disp(Mexemp4)
format long
toc

```

## BIBLIOGRAFIA

- [1] A. S. Massimo Guarnieri, principi ed applicazioni di elettrotecnica volume primo, Padova: Libreria Progetto, 2004.
- [2] C. R. Paul, INDUCTANCE Loop and Partial, Hoboken, New Jersey: Jhon Wiley & Sons, Inc., 2010.
- [3] F. W. Grover, Indutance calculations workingFormulas and tables, New York: Dover Publication, Inc., 1962.
- [4] G. A. L. J. ALBERT E. RUEHLI, CIRCUIT ORIENTED ELECTROMAGNETIC MODELING USING THE PEEC TECHNIQUES, Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2017.
- [5] a. B. B. Z. Piatek, «EXACT CLOSED DORM FORMULA FOR SELF AND INDUCTANCE OF CONDUCTOR OF RECTANGULAR CROSS SECTION,» in *Progress in Electromagnetics Research M*, Vol. 26, 225, 236, 2012, Poland, Progress in Electromagnetics Research M, Vol. 26, 225, 236, 2012, 2012, pp. 225 - 236.
- [6] G. Gambolatli, Metodi Numerici per Ingengeriae scienze applicate, Padova: Libreria internazionale CORTINA, 2003.
- [7] Z. D. G. J. S. G. M. J.-M. G. O. C. a. O. D. A. Desmoort, *Comparing Partial Element Equivalent Circuit and Finite Element Methods for the Resonant Wireless Power Transfer 3D Modelin*, IEEE Conferences , 2016, p. 1.
- [8] A.E Ruehli, «Equivalent Circuit Models for Three-Dimensional Multiconductor Systems,» *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. vol. 22., p. 216 -221, Mar 1974.
- [9] B. G. Sterzhni, *ryady v nekotoykh voprosakh uprogogo ravnovesiya sterzhnei i plastin*, Vestb. Inzhen. i Tekh.Petrograd, 19(2) 897-908, 1915.
- [10] G. Antonini, *The Partial Element Equivalent Circuit Method for EMI, EMC and SI Analysis*, Università degli Studi di L'Aquila Poggio di Roio, 67040 AQ, Italy: EMC Laboratory.
- [11] J. Ekman, *Electromagnetic Modeling Using the Partial Element Equivalent Circuit Method*, Lulea University of Technology,Lulea, Sweden: EISLAB, Dept. of Computer

Science and Electrical Engineering , March 2003.

- [12] T. LUIGI, *Il metodo "Partial Element Equivalent Circuit" per la modellizzazione elettromagnetica di interconnessioni e packaging elettronico*, Napoli, 2003.
- [13] C. H. a. C. Love, «Exact Inductance Equations for Rectangular Conductors With Applications to More Complicated Geometrie,» *journal of researrch of the nationl Bureau of Standards C Engineering and Instrumentation*, vol. 69C, n. 2, p. from 127 to 137, April-June 1965.
- [14] J. T. Conway, «Inductance Calculations for Circular Coils of Rectangular Cross Section and Parallel Axes Using Bessel and Struve Function,» *IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS*, vol. VOL 46, n. 1, p. DA 75 A 81, JANUARY 2010.
- [15] C. W. C. Lisa F. Shatz, *Numerical Inductance Calculations Based on First*, Boston, MA, United States of America: Timothy C. Matisziw, University of Missouri, United States of America, 2014.
- [16] J. T. Conway, «inductance calculations for coil of rectangular cross section and parallel Axes using bessel and struve functions,» *IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS* , vol. 46, n. 1, pp. 75-81, JANUARY 2010.
- [17] C. W. C. Lisa F. Shatz, «Numerical Inductance Calculations Based on First Principles,» *PLOS ONE*, vol. Volume 9, n. | Issue 11 e111643, p. da 1 a 8, November 17, 2014.
- [18] S. I. B. K. W. a. J. F. M. CEVDET AKYEL, «Mutual Inductance of Thin Coaxial Circular Coils with Constant Current Density in Air (Filament Method),» *Proceedings of the 5th WSEAS International Conference on Telecommunications and Informatics*, pp. 168-175, 27-29 May 2006.
- [19] S. S. a. C. A. Slobodan Babic, «The Mutual Inductance of Two Thin Coaxial Disk Coils in Air,» *IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS*, vol. VOL. 40, n. NO. 2, pp. 822-825, MARCH 2004 .
- [20] F. W. Grover, in *Calculations, Inductance*, New York: Dover, 1964, pp. , chs.2 and 13..
- [21] S. I. B. a. C. Akyel2, «New Analytic-Numerical Solutions for the Mutual Inductance of Two Coaxial Circular Coils With Rectangular Cross Section in Air,» *IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS* , vol. Vol 42, n. No 6, p. da 1661 a 1669, , JUNE 2006.

- [22] K. N. Mude, *Wireless Power Transfer for Electric Vehicle*, padova: SCHOOL OF DOCTORAL RESEARCH IN: Industrial Engineering, 2018.
- [23] A. R. A. K. M. B. B. A. M. L. a. T. Phung, «Precise Analysis on Mutual Inductance Variation in Dynamic Wireless Charging of Electric Vehicle,» *Energies*, vol. 11, n. 624, pp. 2-21, 2018, .
- [24] F. d. L. Pablo Gómez, «Accurate and Efficient Computation of the Inductance Matrix of Transformer Windings for the Simulation of Very Fast Transients,» *IEEE TRANSACTIONS ON POWER DELIVERY*, pp. 1-9, August 2011.
- [25] W. J. P. III, Un'introduzione per ingegneri Matlab, Milano: McGraw-Hill, 2011.
- [26] A. E. R. P. A. B. a. H. W. Young, Recent Progress in Capacitance Computation Methods, 1975.
- [27] R. F. Harrington, Field Computation by Moment Methods, New York: Macmillan Publishing Company, 1968.
- [28] D. Y. A. K. S. HA, «Self Inductance of Air Core Circular Coils with Rectangular Cross Section,» *IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS*, vol. MAG 23, n. 6, p. DA 3916 A 3921, NOVEMBER 1987.
- [29] P. L. K. e. al., inductance calculations, Moscow: Nation Power Press, 1955.
- [30] G. Z. a. C.-K. Koh, «Exact Closed-Form Formula for Partial Mutual Inductances of Rectangular Conductors,» *IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS—I: FUNDAMENTAL THEORY AND APPLICATIONS*, vol. VOL. 50, n. NO. 10, p. from 1349 to 1353, OCTOBER 2009.
- [31] T. H. a. O. W. Umberto Paoletta, «Indirect extension of the image theory to partial inductance calculations,» *IEICE Electronics Express*, vol. No.17, n. 644–649, p. Vol.5, 2008.