



**Università degli Studi di Padova**

---

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione  
(DM 270/04)

TESI DI LAUREA

## **Analisi e controllo di un pallone aerostatico**

Candidato:

**Nicoló Lorenzi**

Matricola 614151

Relatore:

**Ch.ma Prof.ssa Maria Elena Valcher**

*A mia mamma Carla e mio papà Gastone  
per essere sempre stati al mio fianco.*

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Modellizzazione</b>	<b>9</b>
2.1	Descrizione del modello matematico . . . . .	9
2.2	Punto di equilibrio e traslazione del sistema . . . . .	10
2.3	Linearizzazione del sistema . . . . .	11
2.4	Funzione di trasferimento del sistema . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Analisi del sistema</b>	<b>17</b>
3.1	Sistema ad anello aperto . . . . .	17
3.2	Sistema ad anello chiuso . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Progetto del compensatore</b>	<b>23</b>
4.1	Controllore proporzionale $K$ . . . . .	24
4.2	Rete anticipatrice (cancellazione zero-polo) . . . . .	29
4.3	Rete anticipatrice (senza cancellazione) . . . . .	36
4.4	Rete PD . . . . .	37
4.5	Rete PID . . . . .	40
4.6	Rete a sella con doppia cancellazione . . . . .	42
4.7	Rete a sella senza cancellazioni zero-polo . . . . .	45
4.8	Doppia rete anticipatrice . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>51</b>



# Elenco delle figure

1.1	Una mongolfiera in volo. . . . .	7
2.1	Modello <i>Simulink</i> del sistema in catena aperta. . . . .	14
2.2	Diagramma a blocchi del sistema linearizzato. . . . .	14
2.3	Andamento temporale della risposta impulsiva $g_u(t)$ del sistema. . . . .	15
3.1	Diagramma di Bode del modulo di $G_u(s)$ . . . . .	17
3.2	Diagramma di Bode della fase di $G_u(s)$ . . . . .	18
3.3	Risposta $g_{-1}(t)$ del sistema. . . . .	19
3.4	Diagramma a blocchi del sistema con retroazione unitaria negativa e suo equivalente. . . . .	20
3.5	Modello <i>Simulink</i> del sistema in retroazione unitaria negativa. . . . .	20
3.6	Diagrammi di Bode di $W_u(s)$ . . . . .	21
4.1	Diagramma a blocchi del sistema controllato in retroazione dall'uscita. . . . .	23
4.2	Modello <i>Simulink</i> del sistema con controllo proporzionale. . . . .	24
4.3	Diagramma di Nyquist di $G_u(s)$ . . . . .	25
4.4	Particolare del diagramma di Nyquist di $G_u(s)$ in un intorno sinistro dell'origine. . . . .	25
4.5	Andamento temporale di $\tilde{w}_{-1}(t)$ per $K = 0.04$ . . . . .	28
4.6	Particolare della risposta al gradino unitario del sistema re- troazionato per $K = 0.04$ . . . . .	28
4.7	Modello <i>Simulink</i> del sistema controllato da una <i>rete antici- patrice</i> . . . . .	30
4.8	Diagramma di Bode del modulo di $\tilde{G}_u(s)$ per $K = 50, p = 0.04$ e $p_1 = 100$ . . . . .	32
4.9	Diagramma di Bode del modulo di $\tilde{G}_u(s)$ per $K = 50, p = 0.04$ e $p_1 = 100$ . . . . .	32
4.10	Andamento temporale di $\tilde{w}_{-1}(t)$ per $K = 50, p = 0.04$ e $p_1 = 100$ . . . . .	34
4.11	Andamento temporale di $\tilde{w}_{-1}(t)$ per $K = 10, p = 0.04$ e $p_1 = 100$ . . . . .	35

4.12	Andamento temporale di $\tilde{w}_{-1}(t)$ per $K = 100$ , $p = 0.04$ e $p_1 = 100$ . . . . .	35
4.13	Modello <i>Simulink</i> del sistema controllato da una rete PD. . .	37
4.14	Diagramma di Bode del modulo di $\tilde{G}_u(s)$ per $K = 1$ e $p = 0.04$ . . .	37
4.15	Diagramma di Bode della fase di $\tilde{G}_u(s)$ per $K = 1$ e $p = 0.04$ . . .	38
4.16	Andamento temporale di $w_{-1}(t)$ nel caso in cui la rete PD introduca una cancellazione. . . . .	39
4.17	Andamento temporale di $w_{-1}(t)$ nel caso in cui la rete PD non introduca cancellazioni. . . . .	40
4.18	Modello <i>Simulink</i> del sistema controllato da una rete PID. . .	40
4.19	Andamento temporale di $w_{-1}(t)$ e $t_r$ del sistema per un controllo di tipo PID. . . . .	42
4.20	Modello <i>Simulink</i> del sistema controllato da una rete a sella. . .	43
4.21	Diagramma di Bode del modulo di $\tilde{G}_u(s)$ per $K = 1$ , nel caso la rete a sella introduca una doppia cancellazione zero-polo. . .	44
4.22	Diagramma di Bode della fase di $\tilde{G}_u(s)$ per $K = 1$ , nel caso la rete a sella introduca una doppia cancellazione zero-polo. . .	44
4.23	Andamento temporale di $w_{-1}(t)$ nel caso in cui la rete a sella introduca una doppia cancellazione. . . . .	45
4.24	Andamento temporale di $w_{-1}(t)$ nel caso in cui la rete a sella non introduca alcuna cancellazione. . . . .	46
4.25	Modello <i>Simulink</i> del sistema controllato da una doppia rete anticipatrice. . . . .	47
4.26	Diagrammi di Bode di $\tilde{G}_u(s)$ per $z = 0.03$ , $p = 100$ e $K = 10$ . . .	48
4.27	Tempi di salita in corrispondenza all'ingresso $\delta_{-1}(t)$ . . . . .	49

# Capitolo 1

## Introduzione

Una mongolfiera è un mezzo di trasporto che consente alle persone a bordo di viaggiare nell'atmosfera terrestre. Essa rientra nella categoria degli aerostati (da cui la denominazione di pallone aerostatico), in quanto sfrutta i gas prodotti dalla combustione del propano per sollevarsi da terra; tali gas risultano più leggeri dell'aria circostante e quindi, in base al principio di Archimede, permettono al pallone aerostatico di sollevarsi da terra una volta che esso è gonfio.

Ai fini della modellistica e del controllo, in questa tesi ci si riconduce al caso semplificato di una mongolfiera che può essere pilotata solo nel suo movimento verticale agendo su un opportuno bruciatore che governa la quantità di gas erogata, mentre si trascura la presenza di un dispositivo fisico che permetta lo spostamento in orizzontale.

Si vuole, quindi, studiare nel dettaglio il sistema fisico rappresentato da una mongolfiera che si sposta lungo l'asse verticale tenendo conto della forza gravitazionale, della resistenza dell'aria e di eventuali resistenze causate da correnti d'aria; in questa analisi si considerano il calore del bruciatore e l'altitudine raggiunta rispettivamente come l'ingresso e l'uscita del sistema.



Figura 1.1: Una mongolfiera in volo.





## Capitolo 2

# Modellizzazione

### 2.1 Descrizione del modello matematico

La dinamica del moto è descritta dal seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} m\ddot{z}(t) + b\dot{z}(t) = -mg + f_w(t) + Vg\rho_a \left(1 - \frac{\theta_a}{\theta(t)}\right) \\ c\dot{\theta}(t) + k(\theta(t) - \theta_a) = q(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

in cui i termini rappresentano, nell'ordine:

- $z(t)$ : posizione (altitudine) del baricentro della mongolfiera all'istante  $t$ ;
- $m$ : massa della mongolfiera;
- $b$ : coefficiente di attrito viscoso equivalente (per modellare la resistenza dell'aria);
- $g$ : accelerazione di gravità;
- $V$ : volume di gas contenuto nel pallone all'istante  $t$ ;
- $f_w(t)$ : forza esercitata dalle correnti d'aria all'istante  $t$ ;
- $\rho_a$ : densità dell'aria alle condizioni ambientali di temperatura  $\theta_a$  e pressione 1 atm;
- $\theta_a$ : temperatura ambientale all'esterno del pallone;
- $\theta(t)$ : temperatura del gas all'interno del pallone all'istante  $t$ ;
- $c$ : capacità termica del gas nel pallone;
- $k$ : coefficiente di scambio termico tra pallone ed ambiente;
- $q(t)$ : potenza termica fornita dal bruciatore all'istante  $t$ .

## 2.2 Punto di equilibrio e traslazione del sistema

Si vogliono determinare i punti di equilibrio del sistema per  $f_w(t) = \bar{f}_w = 0$ , ovvero in assenza di correnti d'aria (disturbi), e ad ingresso  $q(t) = \bar{q}$  costante.

Un punto risulta essere di equilibrio per un sistema dinamico (in corrispondenza ad un ingresso costante) se corrisponde ad una soluzione costante del sistema.

Pertanto si assume  $\bar{f}_w = 0$  e  $q(t) = \bar{q}$  costante nel sistema (1) e contemporaneamente si impongono le condizioni  $\dot{z} = \ddot{z} = \dot{\theta} = 0$ , ottenendo in tal modo:

$$\begin{cases} m \cdot 0 + b \cdot 0 = -mg + 0 + Vg\rho_a \left(1 - \frac{\theta_a}{\theta}\right) \\ c \cdot 0 + k(\theta - \theta_a) = \bar{q} \end{cases}$$

Da ciò si deduce che i punti di equilibrio in assenza di vento e ad ingresso costante  $q(t) = \bar{q}$ , sono del tipo  $(\bar{z}, 0, \bar{\theta})$  con:

$$\begin{cases} \bar{z} = \text{cost. (qualsiasi)} \\ \bar{\theta} = \frac{\theta_a}{\left(1 - \frac{m}{V\rho_a}\right)} \\ \bar{q} = k(\bar{\theta} - \theta_a) \end{cases} \quad (2.2)$$

Si noti che, nell'ipotesi che il volume del pallone aerostatico rimanga costante, il valore della temperatura del gas nel pallone, all'equilibrio, dipende solo dalla temperatura esterna e tale temperatura di fatto determina il valore dell'ingresso costante in grado di mantenere l'equilibrio.

Si vuole analizzare il sistema (2.1) e, in particolare, la dinamica dei suoi scostamenti attorno al punto di equilibrio facendo ricorso ad un modello di stato. Il sistema è descritto da due equazioni differenziali, rispettivamente del II e del I ordine:

- nella prima equazione differenziale compare un termine di accelerazione, per cui al fine della risoluzione è necessario conoscere la posizione e la velocità della mongolfiera;
- la seconda equazione differenziale è invece risolubile avendo a disposizione la temperatura del gas contenuto nel pallone, che funge da condizione iniziale.

Si evince che le tre variabili di stato del sistema sono:  $z(t)$ ,  $\dot{z}(t)$  e  $\theta(t)$ . Si assume allora come vettore delle variabili di stato  $x = [x_1, x_2, x_3]^T = [z, \dot{z}, \theta]^T$  e come ingresso  $u(t) = q(t)$ . In quest'ottica, il punto di equilibrio ottenuto è il vettore di stato  $\bar{x} = x_{eq} = [\bar{z}, 0, \bar{\theta}]^T$ , e corrisponde all'ingresso costante  $\bar{u}$

=  $\bar{q}$ . Inoltre la corrispondente uscita è pure costante e vale  $\bar{y} = \bar{z}$ .

A questo punto è possibile traslare il sistema (2.1) in un intorno dello stato di equilibrio appena determinato. Per giungere a tale scopo, si pone  $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3]^T := x - \bar{x} = [z - \bar{z}, \dot{z}, \theta - \bar{\theta}]^T$  e si considerano anche gli scostamenti di ingresso, disturbo ed uscita rispetto all'equilibrio:  $\tilde{u} = u - \bar{u} = q - \bar{q}$ ,  $\tilde{f}_w = f_w - 0 = f_w$  (d'ora in avanti si userà anche la notazione  $d = \tilde{d} = f_w$  per indicare il disturbo entrante nel sistema) e  $\tilde{y} = y - \bar{y} = z - \bar{z} = \tilde{x}_1$ . Si perviene quindi al seguente sistema, descrittivo della dinamica degli scostamenti:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -\frac{b}{m}\tilde{x}_2 + \frac{Vg\rho_a}{m}\left(1 - \frac{\theta_a}{\tilde{x}_3 + \bar{\theta}}\right) - g + \frac{\tilde{d}}{m} \\ \dot{\tilde{x}}_3 = -\frac{k}{c}(\tilde{x}_3 + \bar{\theta} - \theta_a) + \frac{\tilde{u}}{c} \\ \tilde{y} = \tilde{x}_1 \end{cases} \quad (2.3)$$

Questa rappresentazione rispetto al nuovo vettore di stato  $\tilde{x}$  ha un punto di equilibrio nell'origine.

## 2.3 Linearizzazione del sistema

Supponendo che sia nota la misura dell'altitudine e che sia possibile controllare la potenza termica del bruciatore, si vuole rappresentare il modello di stato del sistema linearizzato in un intorno del punto di equilibrio determinato in precedenza.

Il procedimento di linearizzazione viene utilizzato al fine di studiare in modo approssimato la dinamica di un sistema non lineare attorno ad un punto di equilibrio: la dinamica degli scostamenti attorno al punto di equilibrio può essere descritta in modo approssimato da un sistema lineare, che può quindi essere studiato in modo semplice. In generale, infatti, dato un sistema descritto dal modello di stato non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), d(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t), d(t)) \end{cases}$$

dove  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  è il vettore di stato,  $u(t)$  è l'ingresso e  $d(t)$  è l'ingresso di disturbo del sistema, il sistema lineare che lo descrive nell'intorno di un punto di equilibrio si ricava mediante sviluppo in serie di Taylor:

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}(t) &= 0 + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq} \\ d=d_{eq}}} \cdot \delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq} \\ d=d_{eq}}} \cdot \delta u(t) + \frac{\partial f}{\partial d} \Big|_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq} \\ d=d_{eq}}} \cdot \delta d(t) + \dots \\ &\approx F \cdot \delta x(t) + J_u \cdot \delta u(t) + J_d \cdot \delta d(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta y(t) &= 0 + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq} \\ d=d_{eq}}} \cdot \delta x(t) + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq} \\ d=d_{eq}}} \cdot \delta u(t) + \left. \frac{\partial g}{\partial d} \right|_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq} \\ d=d_{eq}}} \cdot \delta d(t) + \dots \\ &\approx H \cdot \delta x(t) + I_u \cdot \delta u(t) + I_d \cdot \delta d(t)\end{aligned}$$

I termini  $\delta x(t)$ ,  $\delta u(t)$ ,  $\delta d(t)$ ,  $\delta y(t)$  rappresentano le perturbazioni rispettivamente sullo stato, sull'ingresso, sul disturbo e sull'uscita del sistema rispetto ai valori costanti di equilibrio:  $x(t) = \bar{x}$ ,  $u(t) = \bar{u}$ ,  $y(t) = \bar{y}$ . Inoltre,  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \star}$  indica lo jacobiano (o matrice jacobiana) della funzione  $(\cdot)$  calcolato rispetto alla grandezza  $\star$ , la quale può essere vettoriale o scalare.

Nel caso in esame il punto di equilibrio è l'origine e il sistema non lineare (2.3) è rappresentabile nell'intorno di tale punto come segue:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = f_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \\ \dot{\tilde{x}}_2 = f_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \\ \dot{\tilde{x}}_3 = f_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \\ \tilde{y} = \tilde{x}_1 \end{cases}$$

Si calcolano quindi gli jacobiani delle funzioni  $f(x(t), u(t), d(t))$  e  $g(x(t), u(t), d(t))$ , nell'origine, ottenendo:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &\simeq \left. \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{x}_1} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\bar{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{x}_1 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{x}_2} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\bar{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{x}_2 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{x}_3} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\bar{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{x}_3 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{u}} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\bar{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{u} + \left. \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{d}} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\bar{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{d} \\ &= 0 \cdot \tilde{x}_1 + 1 \Big|_{(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{d})=(0, \bar{u}, 0)} \cdot \tilde{x}_2 + 0 \cdot \tilde{d} \\ &= \tilde{x}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_2 &\simeq \left. \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{x}_1} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\bar{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{x}_1 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{x}_2} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\bar{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{x}_2 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{x}_3} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\bar{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{x}_3 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{u}} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\bar{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{u} + \left. \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{d}} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\bar{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{d} \\ &= 0 + \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \left( -\frac{b}{m} \tilde{x}_2 \right) \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\bar{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{x}_2 + \frac{Vg\rho_a}{m} \cdot \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left( 1 - \frac{\theta_a}{\tilde{x}_3 + \bar{\theta}} \right) \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\bar{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{x}_3 + 0 + \frac{1}{m} \cdot \tilde{d} \\ &= -\frac{b}{m} \cdot \tilde{x}_2 + \frac{Vg\rho_a}{m} \left( 0 + \theta_a \left( \frac{1}{\tilde{x}_3 + \bar{\theta}} \right)^2 \right) \Big|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\bar{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{x}_3 + \frac{1}{m} \cdot \tilde{d} \\ &= -\frac{b}{m} \cdot \tilde{x}_2 + \frac{Vg\rho_a}{m} \left( \theta_a \cdot \frac{\left( 1 - \frac{m}{V\rho_a} \right)^2}{\theta_a^2} \right) \cdot \tilde{x}_3 + \frac{1}{m} \cdot \tilde{d} \\ &= -\frac{b}{m} \cdot \tilde{x}_2 + \frac{1}{mV\theta_a\rho_a} (V\rho_a - m)^2 g \cdot \tilde{x}_3 + \frac{1}{m} \tilde{d}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}_3 &\simeq \left. \frac{\partial f_3}{\partial \tilde{x}_1} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\tilde{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{x}_1 + \left. \frac{\partial f_3}{\partial \tilde{x}_2} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\tilde{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{x}_2 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{x}_3} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\tilde{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{x}_3 + \left. \frac{\partial f_3}{\partial \tilde{u}} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\tilde{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{u} + \left. \frac{\partial f_3}{\partial \tilde{d}} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\tilde{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{d} \\
&= 0 + 0 + \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left( -\frac{k}{c} \tilde{x}_3 \right) \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\tilde{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{x}_3 + \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{u}} \left( \frac{1}{c} \tilde{u} \right) \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\tilde{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{u} + 0 \\
&= -\frac{k}{c} \tilde{x}_3 + \frac{1}{c} \tilde{u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{y} &\simeq \left. \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial \tilde{x}_1} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\tilde{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{x}_1 + \left. \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial \tilde{x}_2} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\tilde{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{x}_2 + \left. \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial \tilde{x}_3} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\tilde{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{x}_3 + \left. \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial \tilde{u}} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\tilde{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{u} + \left. \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial \tilde{d}} \right|_{\substack{\tilde{x}=0 \\ \tilde{u}=\tilde{u} \\ \tilde{d}=0}} \cdot \tilde{d} \\
&= 1|_{(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{d})=(0, \tilde{u}, 0)} \cdot \tilde{x}_1 + 0 + 0 + 0 + 0 \\
&= \tilde{x}_1
\end{aligned}$$

Si perviene quindi al seguente modello di stato lineare che rappresenta il comportamento del sistema linearizzato:

$$\dot{\tilde{x}} = F\tilde{x} + J_u\tilde{u} + J_d\tilde{d} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{m} & \frac{g(V\rho_a - m)^2}{mV\theta_a\rho_a} \\ 0 & 0 & -\frac{k}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/c \end{bmatrix} \tilde{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{d}$$

$$\tilde{y} = H\tilde{x} = [1 \ 0 \ 0] \tilde{x}$$

Nel seguito dell'analisi, assumeremo per i parametri coinvolti nel modello i seguenti valori numerici:  $m = 500$  kg;  $b = 20$  Ns/m;  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>;  $V = 2000$  m<sup>3</sup>;  $\rho_a = 1.184$  kg/m<sup>3</sup>;  $\theta_a = 298$  K;  $c = 718$  J/K;  $k = 2.5$  W/K. Sostituendo tali valori assegnati nella (3), si ottiene:

$$\dot{\tilde{x}} = F\tilde{x} + J_u\tilde{u} + J_d\tilde{d} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.04 & 0.097 \\ 0 & 0 & -0.0035 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0014 \end{bmatrix} \tilde{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.002 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{d}$$

$$\tilde{y} = H\tilde{x} = [1 \ 0 \ 0] \tilde{x}$$

Si nota che  $F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , matrice caratteristica del sistema, è triangolare superiore e quindi i suoi autovalori sono gli elementi che compaiono nella diagonale principale, ovvero:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -\frac{b}{m} = -0.04$ ,  $\lambda_3 = -\frac{k}{c} \approx -0.0035$ . Tutti e tre hanno molteplicità unitaria, quindi i modi del sistema saranno del tipo  $m_i(t) = e^{\lambda_i t}$ ,  $i = 0, 1, 2$ : è evidente la presenza di un modo limitato e di due modi convergenti, quindi il sistema linearizzato non gode di stabilità asintotica.

## 2.4 Funzione di trasferimento del sistema

A questo punto, in accordo con la Teoria dei Sistemi, è possibile calcolare la funzione di trasferimento del sistema linearizzato:

$$\begin{aligned}
 G_u(s) &= H(sI - F)^{-1} J_u = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} s - 0 & 0 - 1 & 0 - 0 \\ 0 - 0 & s + \frac{b}{m} & -\frac{g(V\rho_a - m)^2}{mV\theta_a\rho_a} \\ 0 - 0 & 0 & s + \frac{k}{c} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/c \end{bmatrix} \\
 &= \frac{g(V\rho_a - m)^2}{V\theta_a\rho_a s (b + ms) (k + cs)} = \frac{1.3512 \cdot 10^{-4}}{s(s + 0.04)(s + 0.0035)} \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

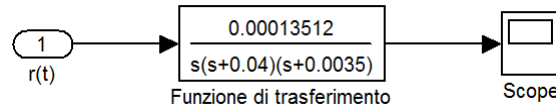


Figura 2.1: Modello *Simulink* del sistema in catena aperta.

Per completezza si deriva la funzione di trasferimento tra l'ingresso rumoroso (ovvero il disturbo) e l'uscita, anche se nel seguito della trattazione ci si concentrerà prevalentemente sulla funzione (ingresso/uscita) del sistema:

$$G_d(s) = H(sI - F)^{-1} J_d = \frac{1}{s(s + \frac{b}{m})} \cdot \frac{1}{m} = 2 \cdot 10^{-3} \frac{1}{s(s + 0.04)} \quad (2.5)$$

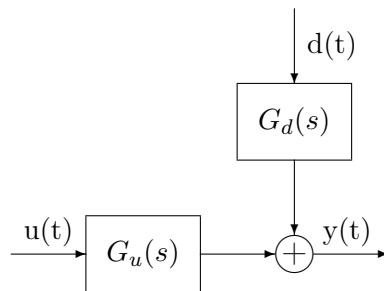


Figura 2.2: Diagramma a blocchi del sistema linearizzato.

Disponendo della funzione di trasferimento (2.4), è possibile calcolare la risposta impulsiva  $g_u(t)$  del sistema linearizzato come antitrasformata di Laplace di  $G_u(s)$ , grazie all'applicazione del metodo di decomposizione in fratti semplici su quest'ultima:

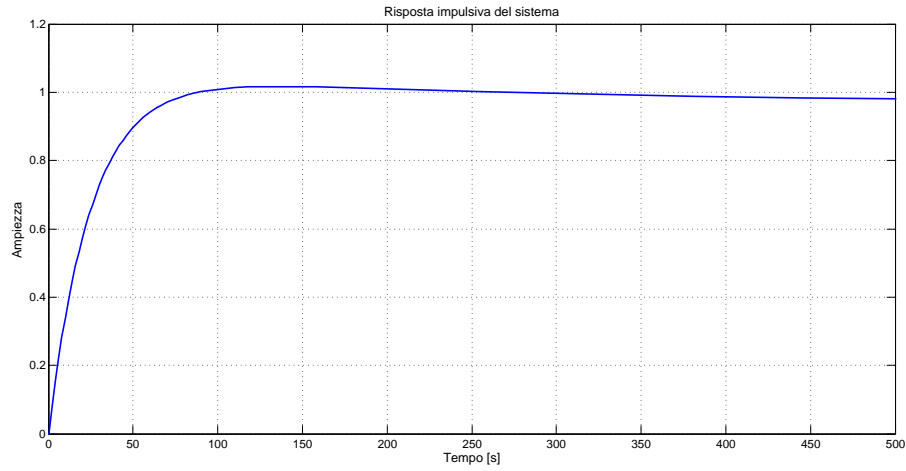


Figura 2.3: Andamento temporale della risposta impulsiva  $g_u(t)$  del sistema.

$$G_u(s) = \frac{1.3512 \cdot 10^{-4}}{s(s+0.04)(s+0.0035)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+0.04} + \frac{C}{s+0.0035} = \dots$$

$$\simeq \frac{0.965}{s} - \frac{1.06}{s+0.04} + \frac{0.09}{s+0.0035}$$

$$g_u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_u(s)\} = [0.965 - 1.06e^{-0.04t} + 0.09e^{-0.0035t}] \delta_{-1}(t) \quad (2.6)$$

Tale risultato conferma quanto detto in precedenza, ovvero che il sistema presenta due modi convergenti ed un modo limitato; la Figura 2.3 mostra il comportamento della risposta impulsiva nel tempo.





## Capitolo 3

# Analisi del sistema

### 3.1 Sistema ad anello aperto

Dalla rappresentazione in forma di Evans, data in (2.4), della funzione di trasferimento del sistema linearizzato, è immediato ed opportuno ai fini pratici derivarne la forma di Bode:

$$G_u(s) = 0.965 \frac{1}{s \left(1 + \frac{s}{0.04}\right) \left(1 + \frac{s}{0.0035}\right)}$$

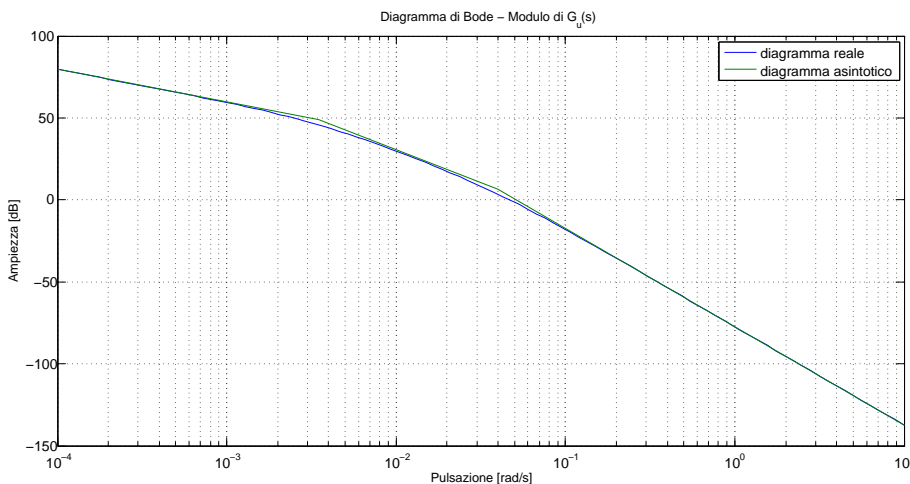


Figura 3.1: Diagramma di Bode del modulo di  $G_u(s)$ .

Si nota immediatamente la mancanza di stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output) del sistema linearizzato, in quanto la funzione di trasferimento  $G_u(s)$  presenta un termine integratore (polo nell'origine) del primo ordine; si distinguono inoltre due poli semplici a parte reale strettamente negativa, quindi stabili. I diagrammi di Bode del modulo e della fase di  $G_u(s)$

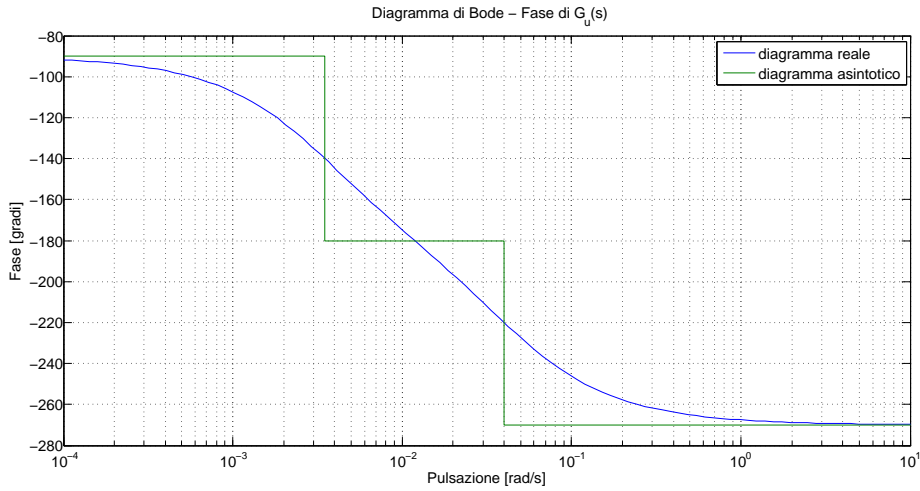


Figura 3.2: Diagramma di Bode della fase di  $G_u(s)$ .

sono riportati in Figura 3.1 e Figura 3.2 rispettivamente.

Un controllo in catena chiusa, effettuabile inizialmente con una semplice retroazione unitaria negativa dall'uscita ed in seguito mediante la progettazione di un compensatore appropriato da inserire in catena diretta, è dunque necessario al fine di migliorare le prestazioni del sistema in esame.

Dato che il sistema in catena aperta non è BIBO stabile, ci si aspetta che la componente forzata dell'uscita possa divergere in corrispondenza all'applicazione di un segnale di ingresso limitato. Ad esempio, se si considera all'ingresso il gradino unitario  $\delta_{-1}(t)$ , appartenente alla famiglia dei segnali canonici (e la cui trasformata di Laplace è  $\mathcal{L}\{\delta_{-1}(t)\}(s) = s^{-1}$ ), si ottiene la seguente risposta al gradino (o indiciale) nel dominio della frequenza:

$$\begin{aligned}
 G_{-1}(s) &= G_u(s) \cdot U(s) \\
 &= \frac{1.3512 \cdot 10^{-4}}{s(s+0.04)(s+0.0035)} \cdot \frac{1}{s} \\
 &= \frac{1.3512 \cdot 10^{-4}}{s^2(s+0.04)(s+0.0035)} \\
 &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+0.04} + \frac{D}{s+0.0035} \\
 &= \frac{-299.88}{s} + \frac{0.965}{s^2} - \frac{2.32}{s+0.04} + \frac{302.2}{s+0.0035}
 \end{aligned}$$

Si verifica in modo semplice la bontà dei passaggi di cui sopra sfruttando il

calcolo dei residui, infatti:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} [s^2 \cdot G_{-1}(s)] = -299.88 \\ B &= \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G_{-1}(s) = 0.965 \\ C &= \lim_{s \rightarrow -0.04} (s + 0.04) \cdot G_{-1}(s) = -2.32 \\ D &= \lim_{s \rightarrow -0.0035} (s + 0.0035) \cdot G_{-1}(s) = 302.2 \end{aligned}$$

Si evince quindi che la risposta al gradino è esprimibile nel dominio del tempo come

$$\begin{aligned} g_{-1}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{G_{-1}(s)\} \\ &= [-299.88 + 0.965t - 2.32e^{-0.04t} + 302.2e^{-0.0035t}] \delta_{-1}(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

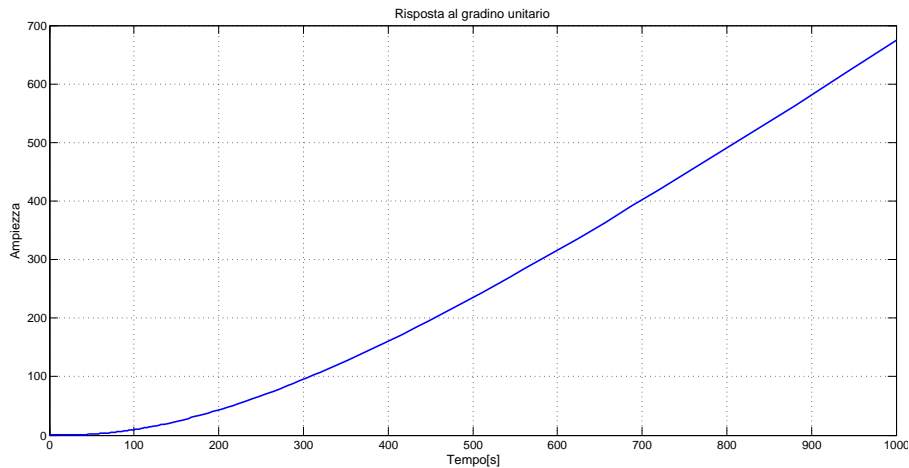


Figura 3.3: Risposta  $g_{-1}(t)$  del sistema.

ed essa chiaramente cresce in modo illimitato per valori elevati di  $t$ , come illustrato in Figura 3.3.

## 3.2 Sistema ad anello chiuso

Le prestazioni del sistema di partenza non sono soddisfacenti in quanto esso soffre l'assenza di BIBO stabilità; siccome questa proprietà è strettamente legata ai poli della funzione di trasferimento utile, è lecito chiedersi se lo spostamento di tali poli con l'espedito della retroazione unitaria negativa

sia in grado di rendere BIBO stabile il sistema risultante. A tale scopo, si indica con

$$W_u(s) = \frac{G_u(s)}{1 + G_u(s)} = \frac{1.3512 \cdot 10^{-4}}{s(s + 0.04)(s + 0.0035) + 1.3512 \cdot 10^{-4}} \quad (3.2)$$

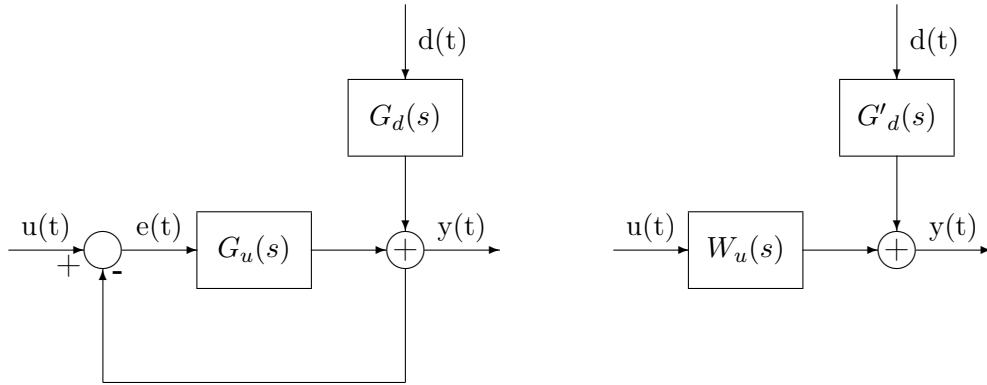


Figura 3.4: Diagramma a blocchi del sistema con retroazione unitaria negativa e suo equivalente.

la funzione di trasferimento del sistema in anello chiuso e si considera lo schema di Figura 3.4, nel quale

$$G'_d(s) = \frac{G_d(s)}{1 + G_u(s)}$$

vale per il principio di sovrapposizione degli effetti.

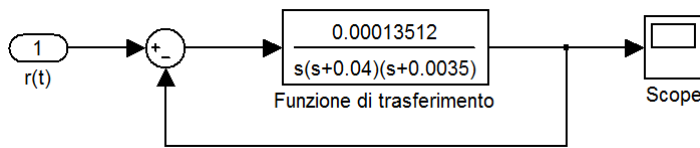


Figura 3.5: Modello *Simulink* del sistema in retroazione unitaria negativa.

Per studiare la BIBO stabilità del sistema retroazionato si applica il *criterio di Routh* al denominatore dell'espressione (3.2) per verificare se esso è *polinomio di Hurwitz* o meno e dedurre la natura dei poli:

$$\begin{aligned} d_u(s) &= s(s + 0.04)(s + 0.0035) + 1.3512 \cdot 10^{-4} \\ &= s^3 + 0.0435s^2 + 1.4 \cdot 10^{-4}s + 1.3512 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

La *tabella di Routh* corrispondente a  $d_u(s)$  è la seguente:

3	1	$1.4 \cdot 10^{-4}$
2	0.0435	$1.3512 \cdot 10^{-4}$
1	$-2.966 \cdot 10^{-3}$	0
0	$1.3512 \cdot 10^{-4}$	0

Guardando la sequenza di elementi che compaiono nella prima colonna della tabella costruita sopra, si notano due variazioni ed una sola permanenza di segno: questo significa che vi sono due poli di  $W_u(s)$  a parte reale positiva, mentre uno solamente è reale negativo. Per questo motivo, si può concludere che la funzione di trasferimento del sistema connesso in retroazione unitaria negativa non è BIBO stabile.

Applicando il comando `roots` di MATLAB al polinomio  $d_u(s)$  si ricavano facilmente le sue radici, ottenendo la fattorizzazione

$$d_u(s) = (s + 0.0695)(s - 0.013 - j0.0421)(s - 0.013 + j0.0421)$$

che conferma quanto precedentemente affermato; nel dettaglio,  $p_1 = -0.0695$  è un polo reale negativo mentre  $p_2 = 0.013 + j0.0421$  e  $p_3 = \bar{p}_2 = 0.013 - j0.0421$  sono due poli complessi coniugati a parte reale positiva ( $\Re[p_2] = \Re[p_3] = 0.013$ ).

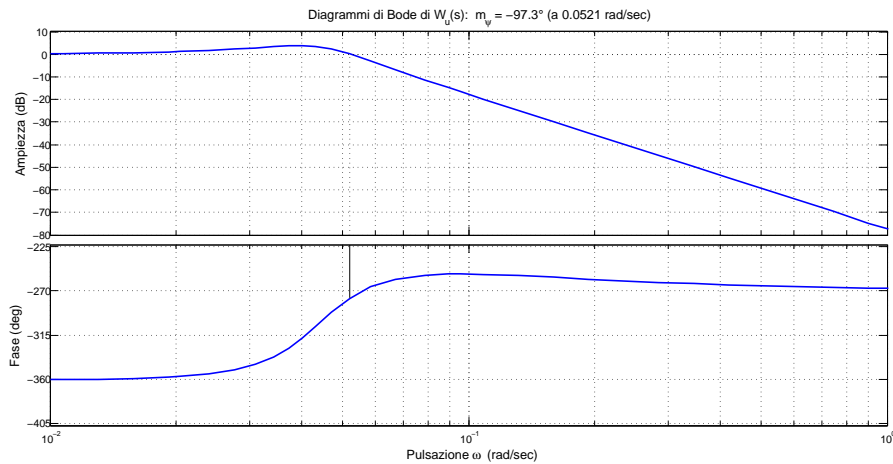


Figura 3.6: Diagrammi di Bode di  $W_u(s)$ .

Si può quindi considerare la funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa (3.2) nella consueta forma di Bode per valutarne il comportamento

nel dominio della frequenza:

$$\begin{aligned}
 W_u(s) &= \frac{1.3512 \cdot 10^{-4}}{(s + 0.0695)(s - 0.013 - j0.0421)(s - 0.013 + j0.0421)} \\
 &= \frac{1.3512 \cdot 10^{-4}}{(s + 0.0695)(s^2 - 0.026s + 1.94 \cdot 10^{-3})} = \\
 &\simeq \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{0.0695}\right) \left(1 - 2\frac{0.295}{0.044}s + \frac{s^2}{0.044^2}\right)}
 \end{aligned}$$

Si nota nell'espressione del termine trinomio che la pulsazione naturale della coppia di poli ha valore  $\omega_n = 0.044$  mentre il coefficiente di smorzamento,  $\xi = -0.295$ , è minore in modulo di  $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$  e quindi il picco di risonanza risulta non trascurabile in prossimità della pulsazione di risonanza  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} = 0.04$ ; la Figura 3.6 conferma quanto detto e rivela l'instabilità del sistema retroazionato, infatti viene violata l'ipotesi del *criterio di Bode* inerente la positività del margine di fase  $m_\psi$ .

Ci si aspetta che in corrispondenza ad alcuni segnali d'ingresso limitati il sistema retroazionato risponda con un'uscita illimitata, vista la mancanza di stabilità BIBO: in particolare, la risposta al gradino unitario presenta un andamento oscillatorio divergente causato dai poli complessi coniugati a parte reale positiva.

## Capitolo 4

# Progetto del compensatore

Poichè la semplice retroazione unitaria negativa non ha avuto benefici sul sistema in esame, diventa indispensabile l'utilizzo di un controllore contraddistinto dalla funzione di trasferimento  $C(s)$ . Nel seguito si indicherà la funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto con  $\tilde{G}_u(s) = C(s)G_u(s)$ , mentre

$$\tilde{W}_u(s) = \frac{C(s)G_u(s)}{1 + C(s)G_u(s)} = \frac{\tilde{G}_u(s)}{1 + \tilde{G}_u(s)} \quad (4.1)$$

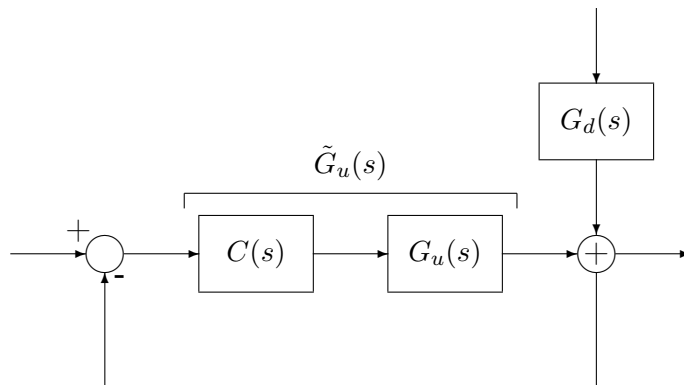


Figura 4.1: Diagramma a blocchi del sistema controllato in retroazione dall'uscita.

starà a rappresentare la funzione di trasferimento dell'equivalente sistema ad anello chiuso disegnato in Figura 4.1.

La progettazione del controllore  $C(s)$  non avviene in modo univoco, bensì attraverso una strategia chiamata *sintesi per tentativi*: l'idea è quella di rendere BIBO stabile il sistema retroazionato soddisfacendo al contempo

determinate specifiche di controllo quali ad esempio il massimo valore assumibile dall'errore di regime permanente ad un determinato segnale canonico  $e_{rp}^{(k+1)}$ , il tempo di salita  $t_r$  e la robustezza della stabilità.

L'obiettivo della seguente analisi consiste allora nel determinare un dispositivo di controllo in retroazione dall'uscita che soddisfi i seguenti vincoli progettuali:

- $m_\psi(\tilde{G}_u) \geq 80^\circ$ , per garantire un'adeguata robustezza alla stabilità BIBO del sistema e l'assenza di considerevoli picchi di risonanza relativi nella funzione di trasferimento ad anello chiuso;
- $\omega_A(\tilde{G}_u) \geq 2.5$  rad/s, la quale è legata in modo inversamente proporzionale al tempo di salita (al 10%)  $t_r$ ;
- il sistema ad anello chiuso sia di tipo 1 e tale che  $e_{rp}^{(2)} \leq 0.05$ .

#### 4.1 Controllore proporzionale $K$

Si considera inizialmente il caso più semplice di feedback dall'uscita puramente proporzionale  $C(s) = K$ ,  $K \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , che dà luogo ad una funzione di trasferimento in catena aperta pari a  $\tilde{G}_u(s) = C(s)G_u(s) = KG_u(s)$ . Per questa scelta la funzione di trasferimento del sistema retroazionato (4.1) diventa:

$$\tilde{W}_u(s) = \frac{\tilde{G}_u(s)}{1 + \tilde{G}_u(s)} = K \frac{0.965}{s \left(1 + \frac{s}{0.04}\right) \left(1 + \frac{s}{0.0035}\right) + 0.965K}$$

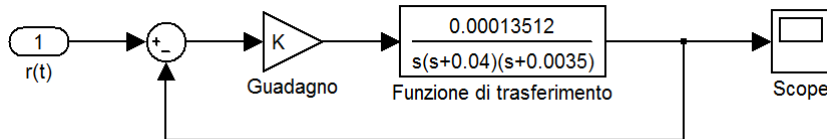


Figura 4.2: Modello *Simulink* del sistema con controllo proporzionale.

Si noti che il diagramma di Bode del modulo di  $\tilde{G}_u(s)$  è equivalente a quello di  $G_u(s)$  per  $K = 1$ , mentre viene traslato verso l'alto o verso il basso a seconda che il valore di  $K$  sia maggiore o minore di 1, rispettivamente; questo significa che la pulsazione di attraversamento  $\omega_a$  può essere spostata a destra ( $K > 1$ ) oppure a sinistra ( $0 < K < 1$ ) in base alle specifiche del compensatore  $C(s)$ .

Per studiare nel dettaglio le caratteristiche del sistema retroazionato descritto da  $\tilde{W}_u(s)$ , ci si riconduce all'analisi di  $\tilde{G}_u(s)$  applicando nozioni e criteri



appartenenti alla Teoria dei Sistemi; in particolare, si applica il *criterio di Nyquist* alla risposta in frequenza  $\tilde{G}_u(s)|_{s=j\omega}$  per vedere se esistono valori di  $K$  tali che  $\tilde{W}_u(s)$  risulti BIBO stabile. Tale procedimento è basato sull'osservazione che il numero di giri compiuti intorno al punto critico  $-1 + j0$  dal diagramma di Nyquist di  $\tilde{G}_u(s) = KG_u(s)$  eguaglia quello che il diagramma di  $G_u(s)$  compie attorno al punto  $-\frac{1}{K} + j0$ .

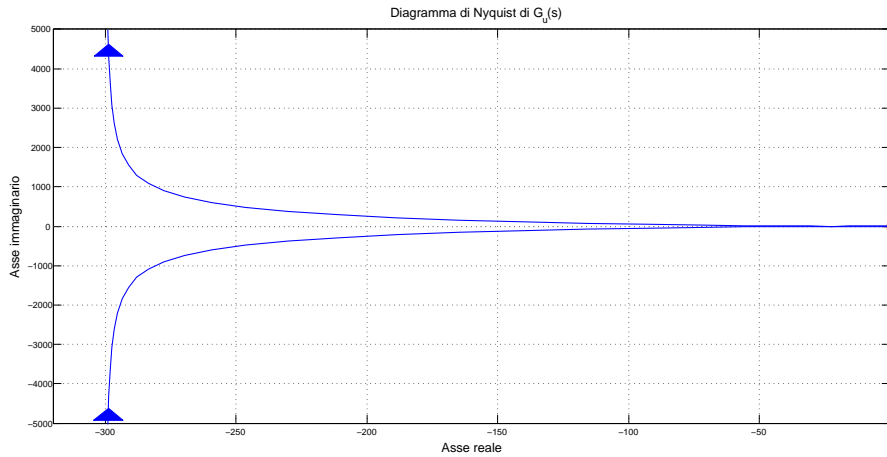


Figura 4.3: Diagramma di Nyquist di  $G_u(s)$ .

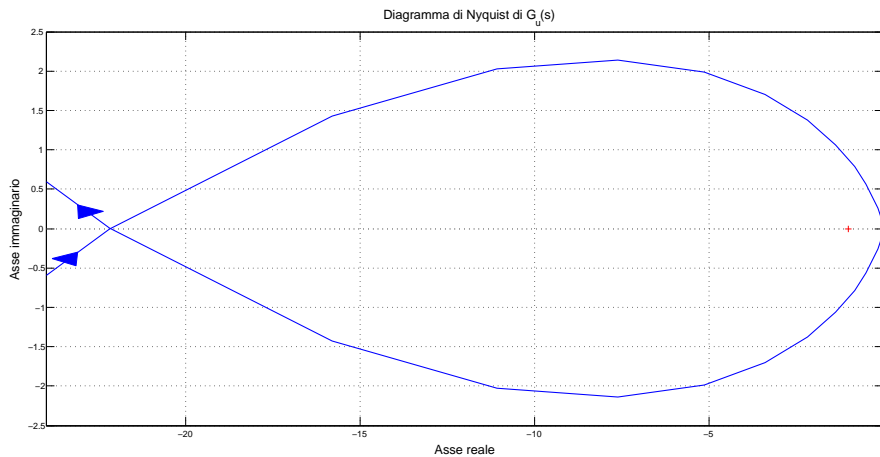


Figura 4.4: Particolare del diagramma di Nyquist di  $G_u(s)$  in un intorno sinistro dell'origine.

Dato che  $G_u(s)$  presenta un polo semplice sull'asse immaginario, si ricorre al *percorso di Nyquist modificato*; in altre parole, si introduce una semicirconferenza di raggio elevato ed orientata in verso orario che raccorda i punti del

diagramma di Nyquist corrispondenti alle pulsazioni  $\omega \rightarrow 0^-$  ed  $\omega \rightarrow 0^+$ . Allo scopo di determinare eventuali intersezioni con gli assi reale ed immaginario, si riporta l'espressione della risposta in frequenza (la quale, va ricordato, assume valori complessi) come somma di una parte reale e di una parte immaginaria:

$$\begin{aligned} G_u(j\omega) &= \frac{0.965}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{0.04}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{0.0035}\right)} = \dots = \Re\{G_u(j\omega)\} + j\Im\{G_u(j\omega)\} = \\ &= \frac{-299.8}{\left(1 + \frac{\omega^2}{0.04^2}\right) \left(1 + \frac{\omega^2}{0.0035^2}\right)} - j \frac{0.965}{\omega} \frac{1 - \frac{\omega^2}{1.4 \cdot 10^{-4}}}{\left(1 + \frac{\omega^2}{0.04^2}\right) \left(1 + \frac{\omega^2}{0.0035^2}\right)} \end{aligned}$$

Ci si accorge immediatamente della presenza di un asintoto verticale in  $-299.8$  (si veda Figura 4.3 a tal proposito), il quale viene avvicinato indefinitamente dal diagramma di Nyquist di  $G_u(j\omega)$  per  $|\omega| \rightarrow 0$ . Ancora,  $\Re\{G_u(j\omega)\}$  non ha zeri e quindi non interseca mai l'asse immaginario (in verità, lo raggiunge asintoticamente per  $|\omega| \rightarrow \infty$ ). Il discorso è ben diverso per quanto riguarda la parte immaginaria di  $G_u(j\omega)$  dato che essa presenta uno zero per  $\omega_{0,+} \approx 0.0118$  rad/s e per  $\omega_{0,-} \approx -0.0118$  rad/s, infatti:

$$\Im\{G_u(j\omega)\} = 0 \iff \left(1 - \frac{\omega^2}{1.4 \cdot 10^{-4}}\right) = 0 \iff \omega = \sqrt{1.4 \cdot 10^{-4}} = \pm\sqrt{\omega_0^2}$$

Questo implica l'esistenza di un punto del semiasse reale negativo che viene attraversato dal diagramma di Nyquist in esame in corrispondenza ai valori  $\pm\sqrt{\omega_0^2}$  della pulsazione, ovvero:

$$\Re\{G_u(j\omega_0)\} = \frac{-299.8}{\left(1 + \frac{\omega_0^2}{0.04^2}\right) \left(1 + \frac{\omega_0^2}{0.0035^2}\right)} \approx -22.187,$$

come in effetti si evince dal particolare in Figura 4.4, nel quale il punto  $-22.187 + j0$  viene raggiunto due volte dal diagramma, per una pulsazione positiva ( $\omega_{0,+} \approx 0.0118$ ) ed una negativa ( $\omega_{0,-} \approx -0.0118$ ).

A causa dell'anello appena riscontrato, il numero di giri  $N_G$  che il diagramma di Nyquist di  $\tilde{G}_u(j\omega)$  compie intorno al punto critico varia a seconda della posizione del punto  $-22.187K + j0$  rispetto a  $-1 + j0$ . Sono ammessi solo valori positivi della variabile  $K$ , per cui si possono distinguere i casi

- A) :  $-22.187K < -1 \iff K > (22.187)^{-1} = 0.045$
- B) :  $-1 < -22.187K < 0 \iff 0 < K < 0.045$
- C) :  $-22.187K = -1 \iff K = 0.045$

dai quali, ricordando che  $n_{G_+} = 0$  (il numero di poli a parte reale positiva di  $G_u(s)$  è nullo), si può ricavare di volta in volta il numero di poli a parte reale positiva di  $\tilde{W}_u(s)$  (cioè  $n_{W_+}$ ) e quindi giungere alle conclusioni che seguono circa la stabilità del sistema retroazionato:

- A) :  $n_{W_+} = n_{G_+} - N_G = 0 - (-2) = 2$  poli a parte reale positiva  $\implies \tilde{W}_u(s)$  è instabile
- B) :  $n_{W_+} = n_{G_+} - N_G = 0 - 0 = 0$  poli a parte reale positiva  $\implies \tilde{W}_u(s)$  è BIBO stabile
- C) : il numero di giri  $N_G$  intorno al punto critico non è definibile perchè almeno uno tra  $\tilde{G}_u(s)$  e  $\tilde{W}_u(s)$  ha uno o più poli sull'asse immaginario (in particolare, la funzione di trasferimento in catena aperta è nota ed essa presenta un polo puramente immaginario). Applicando il comando *roots* di MATLAB al denominatore di  $\tilde{W}_u(s)$ , ossia  $\tilde{d}_u(s) = s^3 + 0.0435s^2 + 1.4 \cdot 10^{-4}s + 1.3512 \cdot 10^{-4} \cdot 0.045$ , si osserva che il sistema retroazionato ha un polo a parte reale negativa ( $p_1 \approx -0.0435$ ) e due poli puramente immaginari ( $p_2 = \bar{p}_3 \approx j0.0118$ ), con questi ultimi che fanno venir meno la proprietà di BIBO stabilità.

Si consideri a titolo illustrativo la situazione in cui  $K = 0.04$  che garantisce la BIBO stabilità del sistema descritto da

$$\tilde{W}_u(s) = \frac{0.965 \cdot 0.04}{s \left(1 + \frac{s}{0.04}\right) \left(1 + \frac{s}{0.0035}\right) + 0.965 \cdot 0.04} .$$

Una rapida ispezione dei diagrammi di Bode del modulo e della fase consente di affermare che il margine di fase e la pulsazione di attraversamento valgono  $m_\psi = 1.87^\circ$  e  $\omega_A = 0.011$  rad/s, rispettivamente. Entrambi sono valori molto piccoli: in particolare, il primo svela la scarsa robustezza della soluzione proposta e l'aspetto oscillatorio della risposta al gradino, in quanto il diagramma di Nyquist passa vicino al punto critico  $-1 + j0$ , mentre il secondo è responsabile del considerevole tempo di salita  $t_r$  (dal momento che le due quantità sono legate tra loro da una relazione di proporzionalità inversa).

L'ambiente *Simulink* di MATLAB permette di simulare un dato sistema, ad esempio attraverso la sua funzione di trasferimento, e verificarne il comportamento in determinate circostanze o in corrispondenza a ingressi fissati; si vuole allora capire come il sistema  $\tilde{W}_u(s)$  reagisca al gradino unitario  $u(t) = \delta_{-1}(t)$  nel caso enunciato sopra ( $K = 0.04 < K_{max}$ ). La Figura 4.5 consolida le affermazioni fatte in precedenza mostrando come il tempo di salita  $t_r$  (al 10%) ed il periodo necessario all'assestamento siano considerevolmente elevati (risultano nell'ordine delle decine di migliaia di secondi!); si vede in Figura 4.6 che il tempo necessario a raggiungere per la prima volta

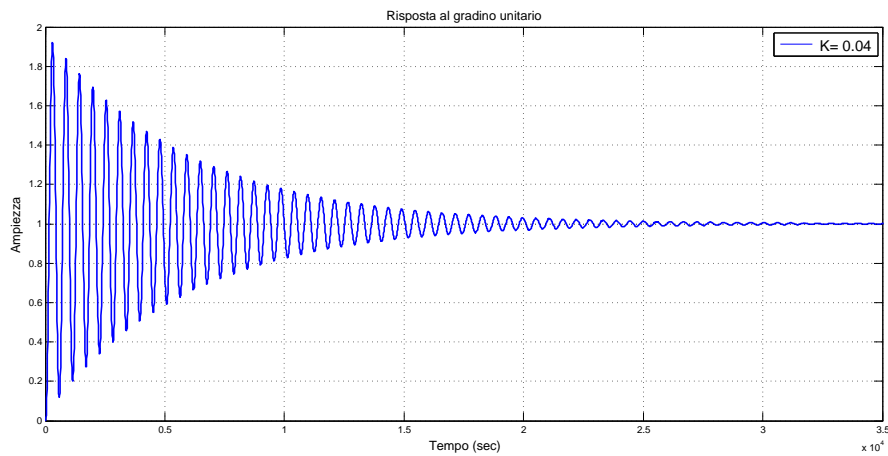


Figura 4.5: Andamento temporale di  $\tilde{w}_{-1}(t)$  per  $K = 0.04$ .

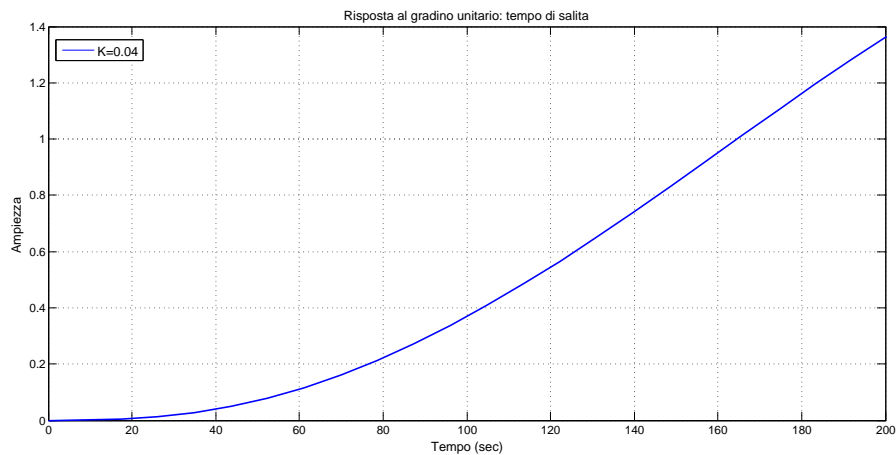


Figura 4.6: Particolare della risposta al gradino unitario del sistema retroazionato per  $K = 0.04$ .

la soglia del 90% del valore unitario è di circa 150 s. Per valori di  $K$  minori di 0.04 le oscillazioni presentano un periodo maggiore e si consumano meno lentamente, anche se i tempi di salita rimangono critici per poter pensare che questa retroazione sia efficace.

Tornando alla discussione generale, cosa accade invece se  $K$  è un parametro negativo? Il diagramma di Bode del modulo di  $\tilde{G}_u(s)$  non subisce variazioni rispetto al caso con  $K$  positivo, mentre quello della fase viene traslato verso l'alto o il basso di  $180^\circ$  a causa dal segno “-“ introdotto da  $K$  nel guadagno di Bode complessivo. Ciò comporta una rotazione di  $180^\circ$  rispetto all'origine

del corrispondente diagramma di Nyquist per valori positivi di  $K$ ; il semicerchio orientato in verso orario che chiude il diagramma avvolge sempre il punto critico  $-1 + j0$ , per cui  $N_G = -1$  (un giro in verso orario) e quindi  $n_{W_+} = n_{G_+} - N_G = 0 - (-1) = 1$  così da rendere il sistema retroazionato instabile per ogni valore negativo di  $K$ .

In conclusione, i valori positivi di  $K$  appartenenti all'intervallo  $(0, 0.045)$  garantiscono la BIBO stabilità del sistema ad anello chiuso caratterizzato dalla funzione di trasferimento  $\tilde{W}_u(s)$ ; esso risulta essere un sistema di tipo 1 per la presenza di un termine integratore in  $\tilde{G}_u(s)$ , quindi ci si aspetta che abbia errori di regime permanente nullo al gradino unitario,  $e_{rp}^{(1)} = 0$ , e finito non nullo alla rampa lineare secondo la legge:

$$e_{rp}^{(2)} = \frac{1}{K_B(G_u)K_B(C)} = \frac{1}{0.965 \cdot K}, \quad K \in (0, 0.045) \quad (4.2)$$

Qui risulta chiaro un ulteriore limite dell'azione di feedback proporzionale: nonostante sia stato possibile rendere BIBO stabile il sistema retroazionato, quest'ultimo presenta un errore decisamente elevato nell'inseguire il segnale canonico d'ingresso  $u(t) = \delta_{-2}(t)$ ; se  $K = 0.04$  l'errore di regime permanente alla rampa lineare vale  $e_{rp}^{(2)} = 25.9$ .

E' dunque necessario pensare ad una soluzione alternativa che rimedi a questo inconveniente non desiderato e che renda più veloce il tempo di risposta del sistema ai segnali di ingresso.

## 4.2 Rete anticipatrice (cancellazione zero-polo)

I leggeri miglioramenti ottenuti con un'azione di feedback puramente proporzionale conducono all'idea di un compensatore più complesso che introduca una cancellazione zero-polo (a parte reale negativa); il pregio di questa variante, la cui  $\tilde{G}_u(s)$  all'apparenza differisce poco da quella della soluzione adottata in precedenza, consiste nel fatto di poter modificare la posizione di un polo a parte reale negativa a seconda delle esigenze (ciò non era possibile con il compensatore proporzionale, perciò si ha un grado di libertà), andando ad incidere sulle prestazioni del sistema.

Affinchè  $C(s)$  sia almeno propria, è richiesta la presenza di un polo (che, come verrà giustificato in seguito, deve essere posizionato preferibilmente in alta frequenza); si tratta allora di una *rete anticipatrice*, poichè lo zero di  $C(s)$  è collocato a sinistra del polo.

A tale scopo, si deve fissare lo zero del controllore in corrispondenza ad uno dei due poli reali negativi di  $G_u(s)$  mentre il polo del controllore può essere scelto liberamente purchè rispetti il vincolo di essere allocato a destra dello zero:

$$C(s) = K \cdot \frac{1 + \frac{s}{z_1}}{1 + \frac{s}{p_1}}, \quad p_1 > z_1, p_1 \gg 1 \quad (4.3)$$

dove le possibili scelte  $z_1 = 0.04$  oppure  $z_1 = 0.0035$  danno luogo a due diverse funzioni di trasferimento del sistema retroazionato dal comportamento simile (cambiano leggermente i valori dei parametri coinvolti). Per semplicità e chiarezza di esposizione, dato che i risultati non differiscono di molto, nel seguito si tratta il caso:

$$C(s) = K \cdot \frac{1 + \frac{s}{0.0035}}{1 + \frac{s}{p_1}}, \quad p_1 > 0.0035, p_1 \gg 1. \quad (4.4)$$

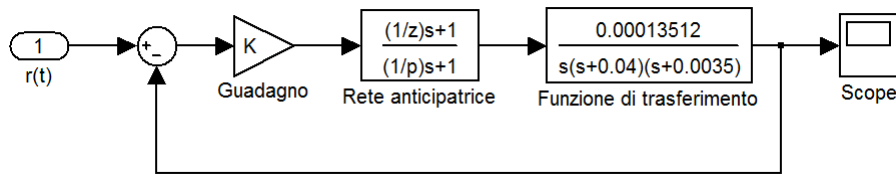


Figura 4.7: Modello *Simulink* del sistema controllato da una *rete anticipatrice*.

A questo punto si pone

$$\tilde{G}_u(s) = C(s)G_u(s) = \frac{K}{s} \frac{0.965}{\left(1 + \frac{s}{0.04}\right) \left(1 + \frac{s}{p_1}\right)}, \quad p_1 \gg 1,$$

dato che, nel caso specifico, si è ipotizzata la cancellazione zero-polo in  $s = -0.0035$ .

Una volta inserita la (4.4) nella (4.1), ricavando

$$\tilde{W}_u(s) = \frac{\tilde{G}_u(s)}{1 + \tilde{G}_u(s)} = \frac{\tilde{n}_{G_u}(s)}{\tilde{d}_{G_u}(s) + \tilde{n}_{G_u}(s)} = \frac{0.965K}{s \left(1 + \frac{s}{0.04}\right) \left(1 + \frac{s}{p_1}\right) + 0.965K},$$

si vogliono determinare i valori del parametro  $K$  che rendono BIBO stabile il sistema in catena chiusa. A tal fine è sufficiente applicare il *criterio di Routh* al denominatore di  $\tilde{W}_u(s)$ , del quale sono illustrati i passaggi. A partire dal polinomio

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{G_u}(s) + \tilde{n}_{G_u}(s) &= s \left(1 + \frac{s}{0.04}\right) \left(1 + \frac{s}{p_1}\right) + 0.965K \\ &= \frac{s^3}{0.04p_1} + \frac{0.04 + p_1}{0.04p_1} s^2 + s + 0.965K, \end{aligned}$$

si costruisce la *tabella di Routh*

3	$\frac{1}{0.04p_1}$	1
2	$\frac{0.04 + p_1}{0.04p_1}$	0.965 K
1	$c_1$	0
0	0.965 K	0

dove  $c_1$  viene determinato secondo la procedura di costruzione della tabella come segue:

$$c_1 = - \left( \frac{0.04 + p_1}{0.04p_1} \right)^{-1} \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{0.04p_1} & 1 \\ \frac{0.04 + p_1}{0.04p_1} & 0.965K \end{array} \right| = 1 - \frac{0.965K}{0.04 + p_1} .$$

Per garantire la caratteristica di BIBO stabilità è necessario che tutti i poli di  $\tilde{W}_u(s)$  abbiano parte reale negativa e questa situazione, per quanto afferma l'enunciato del *criterio di Routh*, è verificata se (e solo se) tutti gli elementi che figurano nella 1<sup>a</sup> colonna della *tabella di Routh* hanno lo stesso segno. Poiché il primo elemento è sicuramente positivo per ipotesi, il sistema risulta BIBO stabile se e solo se le condizioni  $c_1 > 0$  e  $K > 0$  vengono rispettate contemporaneamente:

$$c_1 > 0 \iff 1 - \frac{0.965K}{0.04 + p_1} > 0 \iff K < \frac{0.04 + p_1}{0.965} = K_{max}$$

Dunque, il sistema retroazionato è BIBO stabile per valori del guadagno di Bode del compensatore  $K = K_B(C)$  nell'intervallo  $(0, K_{max})$ , il quale a sua volta è legato alla pulsazione di taglio del polo  $p_1$  introdotto dall'azione correttiva: ogniqualvolta  $p_1$  aumenti di un fattore pari a 10 (ovvero venga spostato a destra di una decade nei diagrammi di Bode) il massimo valore di  $K$  che garantisce la stabilità BIBO sarà all'incirca decuplicato. Si noti che il sistema retroazionato risultante è di tipo 1 a causa della presenza del termine integratore in  $\tilde{G}_u(s)$ , quindi il suo errore di regime permanente alla rampa lineare

$$e_{rp}^{(2)} = \frac{1}{K_B(G_u)K_B(C)} = \frac{1}{0.965K}$$

dev'essere finito non nullo ed è inversamente proporzionale al valore assunto da  $K$ . Questo implica che all'aumentare di  $K$  si assisterà ad un corrispondente decremento di  $e_{rp}^{(2)}$  e si tratta di un notevole passo avanti rispetto al risultato del precedente controllore puramente proporzionale.

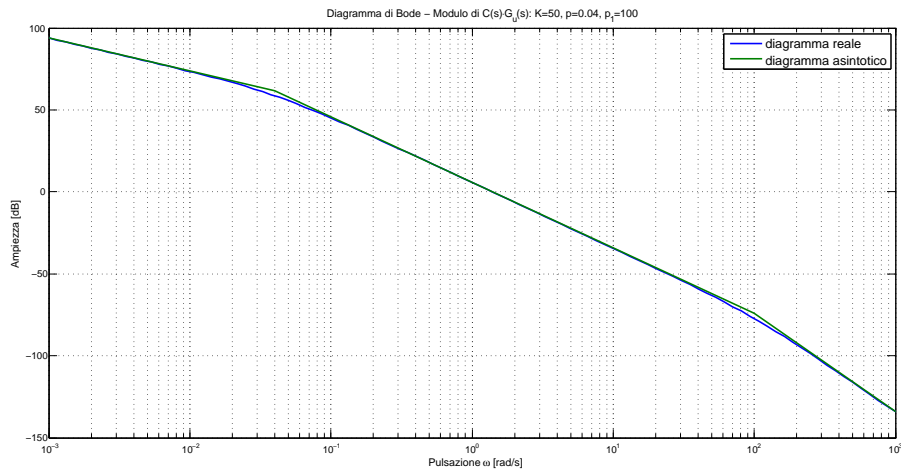


Figura 4.8: Diagramma di Bode del modulo di  $\tilde{G}_u(s)$  per  $K = 50$ ,  $p = 0.04$  e  $p_1 = 100$ .

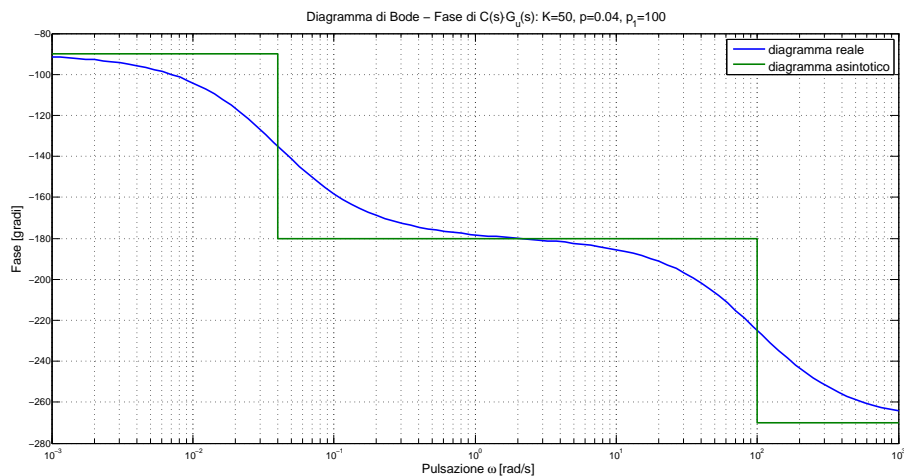


Figura 4.9: Diagramma di Bode del modulo di  $\tilde{G}_u(s)$  per  $K = 50$ ,  $p = 0.04$  e  $p_1 = 100$ .

Al fine di mostrare come il valore di  $K$  (nei limiti della stabilità BIBO) influenzi le prestazioni del sistema retroazionato, si presentano alcuni esempi numerici (nell'ipotesi che valga  $p = 0.04$  e imponendo  $p_1 = 100$ ):

$K$	<b>1</b>	<b>10</b>	<b>50</b>	<b>100</b>
$m_\psi$	11.5°	3.33°	0.854°	0.04°
$\omega_A$	0.194 rad/s	0.621 rad/s	1.39 rad/s	1.96 rad/s
$e_{rp}^{(2)}$	1.036	0.104	0.02	0.01



Dalla tabella si evince che, per poli fissati, un incremento del parametro  $K$  sposta verso destra la pulsazione di attraversamento  $\omega_A$ , così riducendo il tempo di salita  $t_r$ ; d'altro canto, si indebolisce la robustezza della BIBO stabilità del sistema man mano che il margine di fase cala.

Quindi, utilizzando la *rete anticipatrice*  $C(s)$  che induce una cancellazione zero-polo, occorre fissare opportunamente il polo in alta frequenza (e, di conseguenza, il guadagno di Bode  $K$ ) nel caso in cui sia richiesto di rispettare un vincolo sul massimo errore di regime permanente alla rampa lineare ( $e_{rp}^{(2)} < e_{rp,max}^{(2)}$ ). Questa soluzione è efficace quando i poli della funzione di trasferimento  $G_u(s)$  sono ben noti ed indipendenti da terzi parametri, altrimenti si potrebbe avere una quasi cancellazione zero-polo non desiderata che andrebbe ad intaccare notevolmente la qualità della retroazione.

Dato che il sistema è BIBO stabile se i parametri coinvolti assumono i valori  $p = 0.04, p_1 = 100$  e  $K = 50$ , ha senso verificare che la risposta al gradino unitario  $\delta_{-1}(t)$  del sistema in catena chiusa sia limitata partendo da (4.1):

$$\begin{aligned}\tilde{W}_u(s) &= \frac{0.965Kpp_1}{s^3 + (p + p_1)s^2 + pp_1s + 0.965Kpp_1} \\ &= \frac{193}{s^3 + 100.04s^2 + 4s + 193} \\ &\approx \frac{193}{(s + 100.02)(s^2 + 0.02s + 1.932)} \\ &= \frac{193}{(s + 100.02)(s + 0.01 + j1.39)(s + 0.01 - j1.39)}\end{aligned}$$

La trasformata di Laplace della risposta indiciale è data dall'espressione:

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{-1}(s) &= \frac{\tilde{W}_u(s)}{s} \\ &= \frac{193}{(s + 100.02)(s + 0.01 + j1.39)(s + 0.01 - j1.39)} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + 100.02)} + \frac{C}{(s + 0.01 + j1.39)} + \frac{\bar{C}}{(s + 0.01 - j1.39)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + 100.02)} + \frac{D + Es}{(s - \sigma)^2 + \omega^2},\end{aligned}$$

dove  $\sigma = -0.01$ ,  $\omega = 1.39$ ,  $D = 2\Re\{C\}$  ed  $E = -2\sigma\Re\{C\} - 2\omega\Im\{C\}$ . I coefficienti possono essere facilmente ricavati mediante il calcolo dei residui:

$$\begin{aligned}A &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \tilde{W}_{-1}(s) = 1 \\ B &= \lim_{s \rightarrow -100.02} s \cdot (s + 100.02) \tilde{W}_{-1}(s) = -1.93 \cdot 10^{-4} \\ C &= \lim_{s \rightarrow -0.01 - j1.39} (s + 0.01 + j1.39) \cdot \tilde{W}_{-1}(s) = -0.499 - j0.0105 \\ \bar{C} &= \lim_{s \rightarrow -0.01 + j1.39} (s + 0.01 - j1.39) \cdot \tilde{W}_{-1}(s) = -0.499 + j0.0105.\end{aligned}$$

Ora, sapendo che  $D = -0.998 \approx -1$  ed  $E = 0.0192$ , si pone la trasformata di Laplace della risposta al gradino in una forma che consenta l'antitrasformazione in modo immediato:

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{-1}(s) &= \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + 100.02)} + D \frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \frac{E + D\sigma}{\omega} \frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1.93 \cdot 10^{-4}}{(s + 100.02)} - \frac{s + 0.01}{(s + 0.01)^2 + 1.39^2} + 0.021 \frac{1.39}{(s + 0.01)^2 + 1.39^2}.\end{aligned}$$

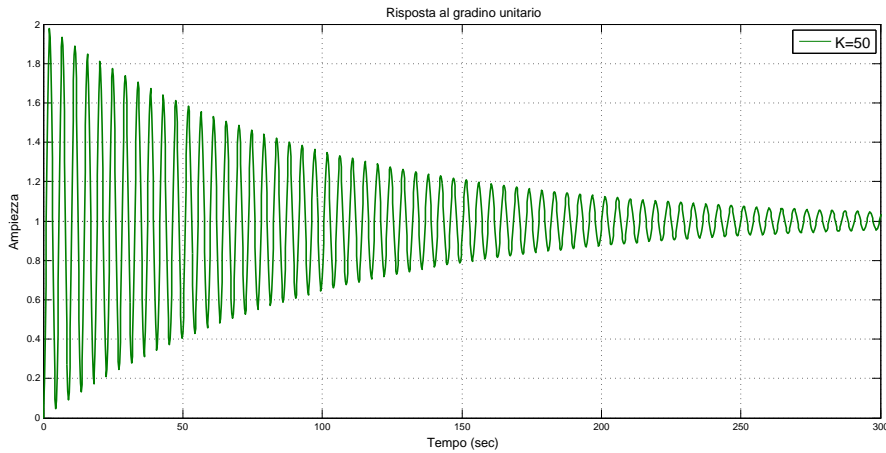


Figura 4.10: Andamento temporale di  $\tilde{w}_{-1}(t)$  per  $K = 50$ ,  $p = 0.04$  e  $p_1 = 100$ .

La risposta del sistema retroazionato al gradino unitario  $\delta_{-1}(t)$  in questo caso specifico vale

$$\begin{aligned}\tilde{w}_{-1}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \tilde{W}_{-1}(s) \right\} (t) \\ &= \left[ 1 - 1.93 \cdot 10^{-4} e^{-100.02t} \right] \delta_{-1}(t) \\ &\quad + \left[ -e^{-0.01t} \cos(1.39t) + 0.021 e^{-0.01t} \sin(1.39t) \right] \delta_{-1}(t)\end{aligned}$$

ed è riportata graficamente per accertare la sua convergenza al valore 1 dopo un periodo transitorio nel quale si distinguono i modi oscillatori convergenti dovuti ai due poli complessi coniugati a parte reale negativa.

E' lecito chiedersi come si comporti  $\tilde{w}_{-1}(t)$  mantenendo fissi i poli di  $\tilde{W}_u(s)$  ( $p = 0.04$  e  $p_1 = 100$ ) e facendo variare il parametro  $K$  nell'intervallo  $(0, 103.67)$  che garantisce la BIBO stabilità: dal confronto dei grafici nelle Figure 4.10, 4.11 e 4.12 si vede che per valori piccoli di  $K$  la risposta

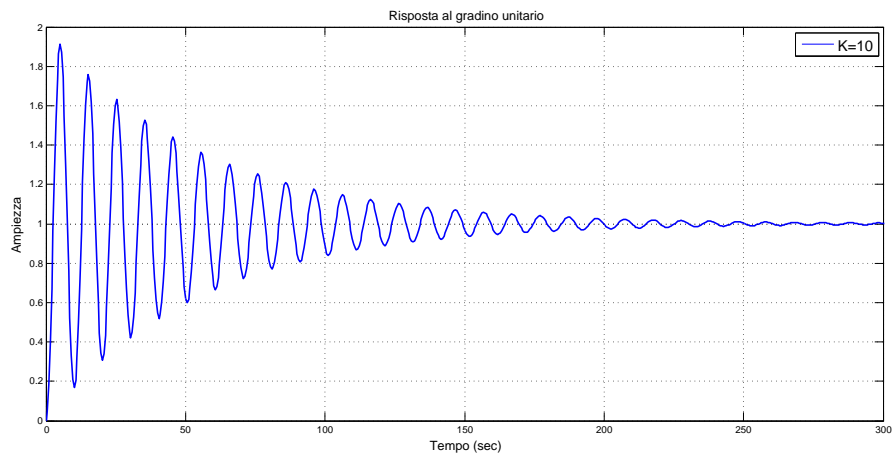


Figura 4.11: Andamento temporale di  $\tilde{w}_{-1}(t)$  per  $K = 10$ ,  $p = 0.04$  e  $p_1 = 100$ .

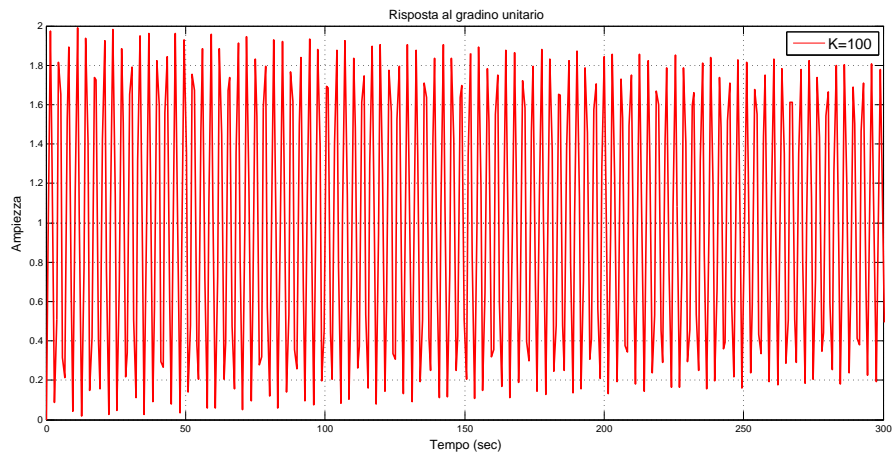


Figura 4.12: Andamento temporale di  $\tilde{w}_{-1}(t)$  per  $K = 100$ ,  $p = 0.04$  e  $p_1 = 100$ .

al gradino unitario si assesta meno lentamente e con oscillazioni di periodo maggiore, mentre l'incremento di  $K$  allunga il tempo necessario a convergere al valore unitario e rende più fitte le oscillazioni intorno ad esso. Ad ogni modo, il tempo di assestamento  $t_s$  è dell'ordine delle centinaia di secondi in ciascuno dei tre casi analizzati (situazione vicina all'instabilità!); questa situazione, nonostante sia stata prevista sin dall'inizio, è deprecabile a livello pratico.

Si può utilizzare una *rete attenuatrice* per il controllo in retroazione?

Una soluzione di questo tipo non è conveniente sebbene abbia la stessa forma di una *rete anticipatrice* (uno zero ed un polo a parte reale negativa); infatti in una rete posticipatrice il polo precede lo zero, ossia  $p_1 < z_1$ , e questo andrebbe ad intaccare l'ampiezza del parametro  $K$  e di conseguenza l'errore di regime permanente assumerebbe un valore elevato.

### 4.3 Rete anticipatrice (senza cancellazione)

Dopo aver analizzato in dettaglio gli effetti della *rete anticipatrice* (4.4) sul sistema, è lecito chiedersi se introdurre una cancellazione zero-polo sia davvero la soluzione ottimale; il principale pregio di questa soluzione consiste nel semplificare la funzione di trasferimento utile in catena aperta, anche se ciò non significa che non esistano soluzioni più complicate dalle prestazioni migliori. Sia quindi

$$\tilde{G}_u(s) = C(s)G_u(s) = \frac{0.965K}{s} \frac{\left(1 + \frac{s}{z_1}\right)}{\left(1 + \frac{s}{0.04}\right) \left(1 + \frac{s}{0.0035}\right) \left(1 + \frac{s}{p_1}\right)},$$

nella quale si pone  $p_1 = 100$  per stabilire un confronto con la *rete anticipatrice* dove avviene la cancellazione zero-polo mentre si mantiene incognito il valore di  $z_1$ .

A questo fine risulta utile l'ambiente *Sisotool*: esso è un toolbox di MATLAB per la progettazione di un compensatore con la possibilità di inserire, riposizionare e togliere zeri e poli verificandone in tempo reale pregi e difetti. Allora, importando la funzione di trasferimento (2.4) e imponendo un controllore che rispetti la (4.4) (dove  $p_1 = 100$  mentre  $z_1$  viene fatto variare lungo l'asse orizzontale), dall'analisi grafica si conclude che la migliore soluzione in termini di margine di fase  $m_\psi$  è data da  $z_1 \approx 0.015$  rad/s; tale punto è all'incirca equidistante dai due poli di  $G_u(s)$  e garantisce al sistema ad anello chiuso la proprietà di stabilità BIBO.

Per diversi valori di  $K$  si perviene ai seguenti risultati riportati in tabella:

$K$	<b>1</b>	<b>10</b>	<b>50</b>	<b>100</b>
$m_\psi$	16.5°	5.25°	2.05°	1.18°
$\omega_A$	0.091 rad/s	0.299 rad/s	0.671 rad/s	0.949 rad/s
$e_{rp}^{(2)}$	1.036	0.104	0.02	0.01

Le precisazioni fatte osservando la tabella riportata nel caso di *rete anticipatrice* con cancellazione zero-polo sono tuttora valide. Tuttavia, si vede come la soluzione appena proposta, a parità del parametro  $K$  (e quindi di errore a regime permanente alla rampa lineare), presenta un margine di fase

di poco maggiore (ma sempre inferiore a valori accettabili) ed una pulsazione di attraversamento minore: in altre parole, la stabilità del sistema è più robusta ma il sistema reagisce più lentamente agli ingressi. Anche in queste condizioni la risposta al gradino presenta un comportamento oscillante molto accentuato a causa di  $m_{\omega_p}$  ed il tempo di salita  $t_r$ , condizionato dal valore di  $\omega_A$  (minore di quello richiesto nelle specifiche), e quello di assestamento  $t_s$  sono elevati al punto da rendere improponibile questa alternativa di controllo.

#### 4.4 Rete PD

Dato che nell'espressione di  $G_u(s)$  è già presente un termine integratore, si può pensare di utilizzare un feedback che combini un'azione proporzionale con una derivativa, cioè un compensatore di tipo PD con funzione di trasferimento

$$C_{PD}(s) = K_p(1 + s\tau) \quad , \quad (4.5)$$

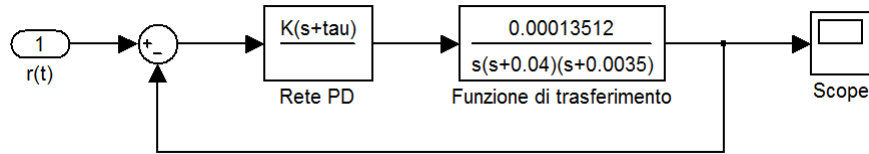


Figura 4.13: Modello *Simulink* del sistema controllato da una rete PD.

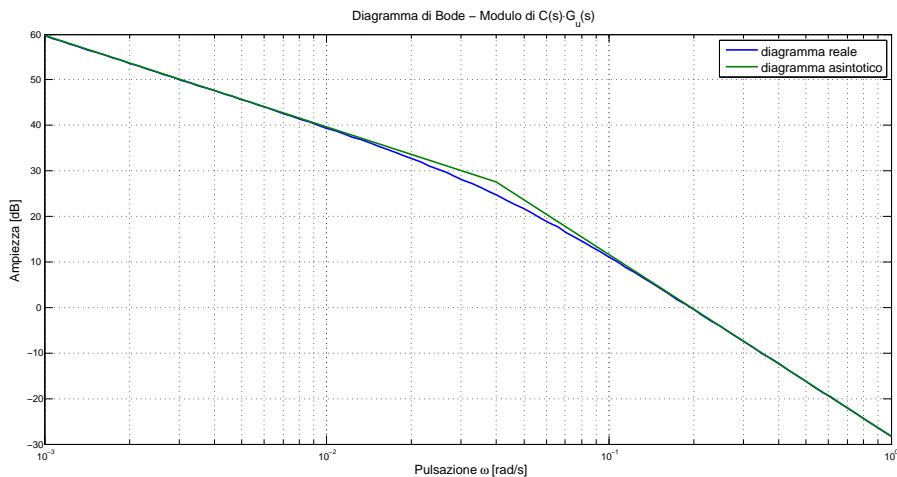


Figura 4.14: Diagramma di Bode del modulo di  $\tilde{G}_u(s)$  per  $K = 1$  e  $p = 0.04$ .

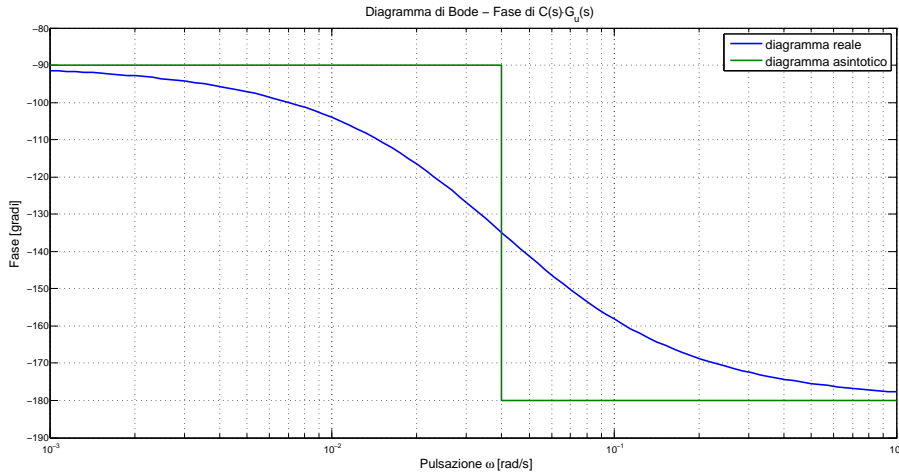


Figura 4.15: Diagramma di Bode della fase di  $\tilde{G}_u(s)$  per  $K = 1$  e  $p = 0.04$ .

con  $\tau = (0.04)^{-1}$  oppure  $\tau = (0.0035)^{-1}$  per semplificare la funzione di trasferimento risultante in catena aperta con una cancellazione zero-polo. A questo punto, imponendo  $p = 0.0035$  se  $\tau = (0.04)^{-1}$  oppure  $p = 0.04$  se  $\tau = (0.0035)^{-1}$ , dalla (4.5) si ricava:

$$\tilde{G}_u(s) = C_{PD}(s) \cdot G_u(s) = \frac{0.965K_p}{s \left(1 + \frac{s}{p}\right)}.$$

La corrispondente funzione di trasferimento ad anello chiuso  $\tilde{W}_u(s)$  è BIBO stabile per ogni  $K_p$  positivo, infatti il suo denominatore

$$\text{denom} \left\{ \tilde{W}_u(s) \right\} = s \left(1 + \frac{s}{p}\right) + 0.965K_p = \frac{s^2}{p} + s + 0.965K_p$$

è un *polinomio di Hurwitz*, essendo  $p > 0$  per ipotesi.

Si fissi per esempio  $\tau = (0.0035)^{-1}$  nella (4.5), in maniera che  $p = 0.04$  (il caso analogo differisce di poco), allora al variare di  $K_p$  le grandezze rilevanti del sistema valgono:

$K_p$	<b>1</b>	<b>10</b>	<b>50</b>	<b>100</b>
$m_\psi$	11.6°	3.69°	1.65°	1.17°
$\omega_A$	0.194 rad/s	0.621 rad/s	1.39 rad/s	1.96 rad/s
$e_{rp}^{(2)}$	1.036	0.104	0.02	0.01

Si nota che le pulsazioni di attraversamento sono le stesse già viste nel caso di una *rete anticipatrice* che introduce una cancellazione zero-polo nella funzione di trasferimento in catena aperta. D'altra parte, a parità di  $K$  e di

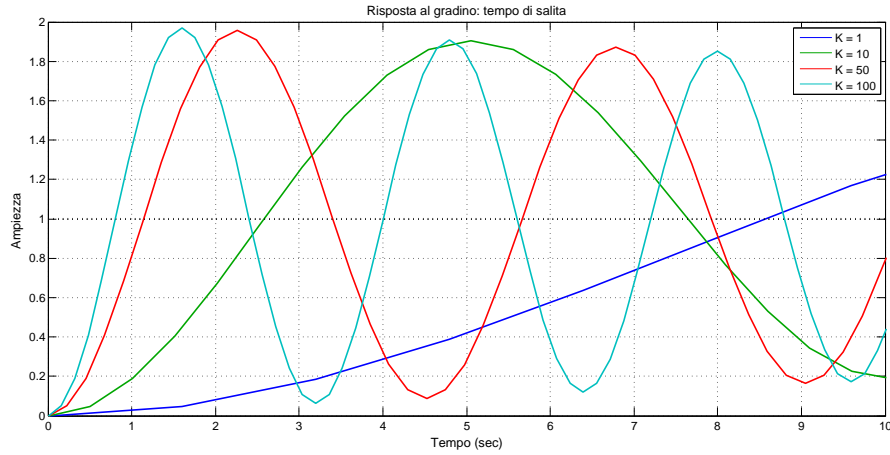


Figura 4.16: Andamento temporale di  $w_{-1}(t)$  nel caso in cui la *rete PD* introduca una cancellazione.

$e_{rp}^{(2)}$ , la rete PD con cancellazione zero-polo garantisce maggiori valori del margine di fase  $m_\psi$  e quindi una maggiore robustezza della stabilità (la differenza si riscontra più notevolmente per elevati valori del parametro  $K$ ). Questo discorso è valido solamente finché il polo della *rete anticipatrice* non è collocato distante da  $\omega_A$ , in caso contrario le due soluzioni si equivalgono; di fatto, le conclusioni tratte in precedenza sull'inefficienza della retroazione rimangono invariate, come confermano le ampie oscillazioni presenti in Figura 4.16.

Si riprende la formulazione (4.5), al pari di quanto fatto in precedenza per ogni tipologia di controllore analizzata, senza indurre una cancellazione zero-polo; l'obiettivo è quello di studiare

$$\tilde{G}_u(s) = \frac{0.965K_p}{s} \frac{(1 + s\tau)}{\left(1 + \frac{s}{0.04}\right) \left(1 + \frac{s}{0.0035}\right)}$$

mediante un'analisi grafica in *Sisotool* al variare dei parametri  $K$  e  $\tau$ . I risultati ottenuti, ottimali in termini di  $m_\psi$  per  $\tau \approx (0.015)^{-1}$  (valore intermedio tra i due poli di  $G_u(s)$ ), vengono raccolti in tabella:

$K_p$	1	10	50	100
$m_\psi$	16.6°	5.42°	2.43°	1.72°
$\omega_A$	0.095 rad/s	0.299 rad/s	0.671 rad/s	0.949 rad/s
$e_{rp}^{(2)}$	1.036	0.104	0.02	0.01

Le pulsazioni di attraversamento  $\omega_A$  eguagliano quelle della *rete anticipatrice* che evita la cancellazione zero-polo, tuttavia a parità di  $K$  si vince

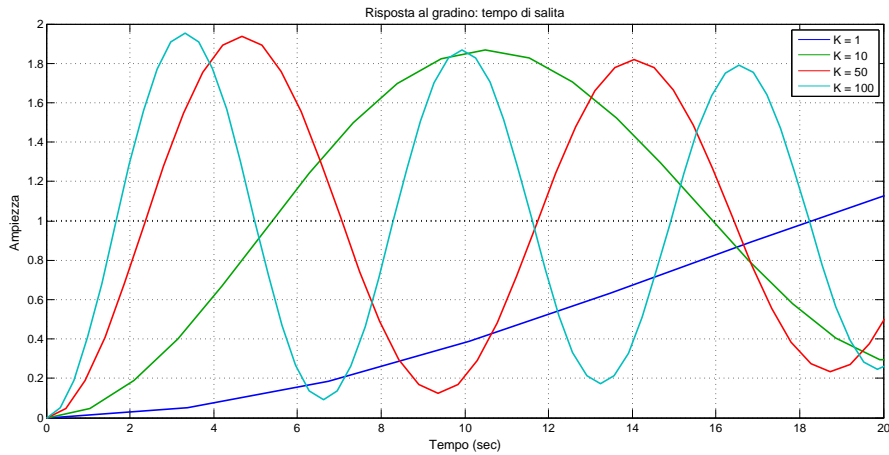


Figura 4.17: Andamento temporale di  $w_{-1}(t)$  nel caso in cui la rete PD non introduca cancellazioni.

come la rete PD (anch'essa non inducente semplificazioni) abbia valori leggermente maggiori di  $m_\psi$ , pur restando nettamente inferiori alle specifiche richieste per un buon sistema. La risposta al gradino unitario, di cui è presentato un particolare iniziale in Figura 4.17, ha un tempo di salita (al 10%) non soddisfacente in quanto la pulsazione di attraversamento è inferiore a quella desiderata.

## 4.5 Rete PID

Una rete correttiva di tipo PID esercita un'azione combinata di tipo proporzionale, integrativo e derivativo sul segnale in ingresso ed è esprimibile nella forma classica

$$C_{PID}(s) = \frac{K_i}{s} (1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) \quad (4.6)$$

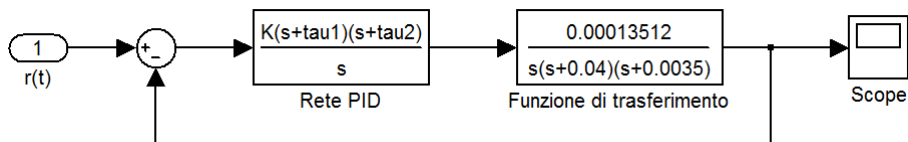


Figura 4.18: Modello *Simulink* del sistema controllato da una rete PID.

Nel caso in esame è possibile operare una doppia cancellazione zero-polo (entrambi a parte reale negativa) imponendo ai parametri del controllore i



valori  $\tau_1 = (0.04)^{-1}$  e  $\tau_2 = (0.0035)^{-1}$ . Applicando la (4.6) nell'espressione di  $\tilde{G}_u(s)$  si ottiene la funzione di trasferimento ad anello aperto

$$\tilde{G}_u(s) = C_{PID}(s) \cdot G_u(s) = \frac{0.965K_i}{s^2} .$$

Il diagramma di Bode del modulo di  $\tilde{G}_u(s)$  è una retta con pendenza pari a -40 dB/dec la cui pulsazione di attraversamento  $\omega_A = 0.965K_i$  cresce proporzionalmente al valore di  $K_i$ , mentre il diagramma di Bode del modulo è stazionario a -180° a causa del doppio termine integratore e quindi il margine di fase  $m_\psi$  è nullo per qualsiasi valore di  $K_i$ .

Si nota immediatamente che il denominatore della funzione di trasferimento in catena chiusa è il polinomio  $s^2 + 0.965K_i$ : esso è un termine trinomio dove il coefficiente di smorzamento  $\xi$  risulta nullo (nel diagramma di Bode del modulo si assiste al cosiddetto “imbuto infinito”), per cui le sue radici sono una coppia di poli immaginari coniugati.

Il sistema retroazionato non gode di BIBO stabilità per nessun valore del guadagno  $K_i$ , dunque il compensatore PID che introduce una doppia cancellazione zero-polo è una pessima soluzione per controllare il sistema in esame; la volontà di semplificare l'espressione di  $\tilde{G}_u(s)$  non ha avuto gli esiti sperati. A questo punto, si analizza

$$\tilde{G}_u(s) = C(s)G_u(s) = \frac{0.965K_i}{s} \frac{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}{\left(1 + \frac{s}{0.04}\right) \left(1 + \frac{s}{0.0035}\right)} ,$$

per via grafica con *Sisotool* allo scopo di verificare se sono possibili condizioni di BIBO stabilità e, in caso positivo, quali siano le loro prestazioni. Allo scopo della stabilità, dopo alcuni tentativi si accerta che i due zeri devono essere entrambi posizionati a sinistra del polo di  $G_u(s)$  contraddistinto dalla pulsazione di taglio maggiore ( $s = -0.04$ ).

Sia ad esempio

$$C(s) = \frac{1}{s} (1 + 100s) (1 + 100s) = \frac{1}{s} (1 + 100s)^2 ,$$

allora dai diagrammi di Bode della funzione di trasferimento ad anello aperto si vede che il margine di fase e la pulsazione di attraversamento valgono rispettivamente  $m_\psi = 1.16^\circ$  e  $\omega_A = 1.16$  rad/s.

Invece, imponendo ai parametri i valori  $K = 10$ ,  $\tau_1 \approx (0.003)^{-1}$  e  $\tau_2 \approx (0.014)^{-1}$ , si ottiene un margine di fase pari a  $m_\psi = 0.268^\circ$  mentre la pulsazione di attraversamento si attesta a  $\omega_A = 5.67$  rad/s; per crescenti valori di  $K$ ,  $m_\psi$  cala sempre più (fino a valori prossimi a zero), al contrario  $\omega_A$  aumenta portandosi sull'ordine delle decine. Dunque, per elevati valori di  $K$  (nei limiti della BIBO stabilità) il sistema risponde più prontamente ai segnali in ingresso ma può facilmente diventare instabile in caso di piccole variazioni parametriche; dall'ampiezza delle oscillazioni in Figura 4.19 è chiaro come

il ristretto margine di fase comporti un esteso periodo di assestamento del sistema prima di convergere al valore unitario.

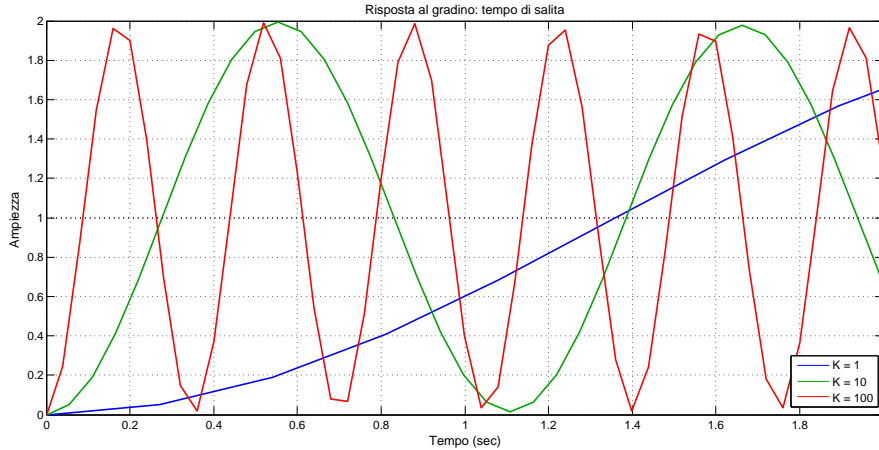


Figura 4.19: Andamento temporale di  $w_{-1}(t)$  e  $t_r$  del sistema per un controllo di tipo PID.

Si tenga presente che il sistema controllato da una rete PID è di tipo 2 (mentre le specifiche richiedono che il sistema sia di tipo 1), dato che la sua funzione di trasferimento in catena aperta presenta un doppio termine integratore; si parla quindi di errore a regime permanente alla rampa iperbolica,  $e_{rp}^{(3)}$ , il quale è comunque calcolabile con la formulazione (4.2). Il doppio polo nell'origine è la causa principale dell'inefficienza di questa soluzione proposta, infatti non è possibile rimediare al pesante contributo di  $-180^\circ$  che esso introduce nel diagramma di Bode della fase.

## 4.6 Rete a sella con doppia cancellazione zero-polo

Una *rete a sella* è uno schema di retroazione che unisce gli effetti di una *rete anticipatrice* e di una *rete ritardatrice*; essa è dunque composta da due zeri e da due poli tutti a parte reale negativa, ovvero:

$$C_{SL}(s) = K \frac{\left(1 + \frac{s}{z_1}\right) \left(1 + \frac{s}{z_2}\right)}{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right) \left(1 + \frac{s}{p_2}\right)}, \quad p_1 < z_1 \leq z_2 < p. \quad (4.7)$$

Risulta spontaneo, almeno inizialmente, porre  $z_1 = 0.0035$  e  $z_2 = 0.04$  al fine di constatare una doppia cancellazione zero-polo (a parte reale negativa)

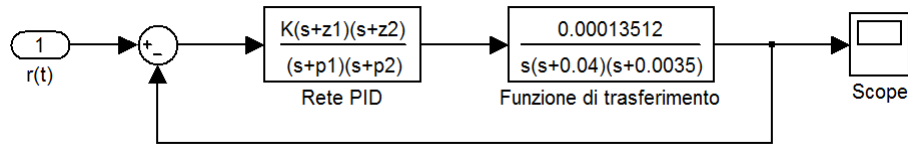


Figura 4.20: Modello *Simulink* del sistema controllato da una *rete a sella*.

nella funzione di trasferimento ad anello aperto

$$\tilde{G}_u(s) = \frac{0.965K}{s} \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right) \left(1 + \frac{s}{p_2}\right)}, \quad p_1 < 0.0035 < 0.04 < p_2, \quad ,$$

il cui comportamento è influenzato dai parametri  $K$ ,  $p_1$  e  $p_2$  (da fissare sulla base dei vincoli imposti sul sistema).

Il modo più semplice per studiare la BIBO stabilità del sistema ad anello chiuso è l'applicazione del *criterio di Routh* al denominatore della  $\tilde{W}_u(s)$  che si ricava con questa configurazione; gli eventuali valori del guadagno  $K$  che rendono il sistema stabile dipenderanno dalla posizione dei due poli incogniti  $p_1$  e  $p_2$ .

Dall'espressione (4.1)

$$\tilde{W}_u(s) = \frac{\tilde{n}(s)}{\tilde{d}(s)} = \frac{0.965K p_1 p_2}{s^3 + (p_1 + p_2)s^2 + p_1 p_2 s + 0.965K p_1 p_2}$$

si costruisce la *tabella di Routh* per  $\tilde{d}(s) = s^3 + (p_1 + p_2)s^2 + p_1 p_2 s + 0.965K p_1 p_2$  di seguito:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & p_1 p_2 \\ 2 & p_1 + p_2 & 0.965 K p_1 p_2 \\ 1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0.965 K p_1 p_2 & 0 \end{array}$$

Per garantire che il sistema in catena chiusa sia BIBO stabile occorre che il parametro  $K$  sia positivo e lo stesso valga per la quantità  $c_1$ :

$$c_1 = p_1 p_2 - \frac{0.965K p_1 p_2}{p_1 + p_2} > 0 \iff K < \frac{p_1 + p_2}{0.965} .$$

Questo risultato ricalca quello visto in precedenza nel caso della *rete anticipatrice* con cancellazione zero-polo, con la differenza che ora si hanno due gradi di libertà sui poli di  $\tilde{G}_u(s)$  (anzichè uno) nei limiti della BIBO stabilità. Fatto questa precisazione, si vuole entrare nei particolari per capire le prestazioni del sistema imponendo ad esempio  $p_1 = 0.003 < 0.0035 = z_1$  e

$p_2 = 100 > 0.04 = z_2$ , così che l'espressione (4.7) produca la funzione di trasferimento in catena aperta

$$\tilde{G}_u(s) = \frac{0.965K}{s} \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{0.003}\right) \left(1 + \frac{s}{100}\right)}.$$

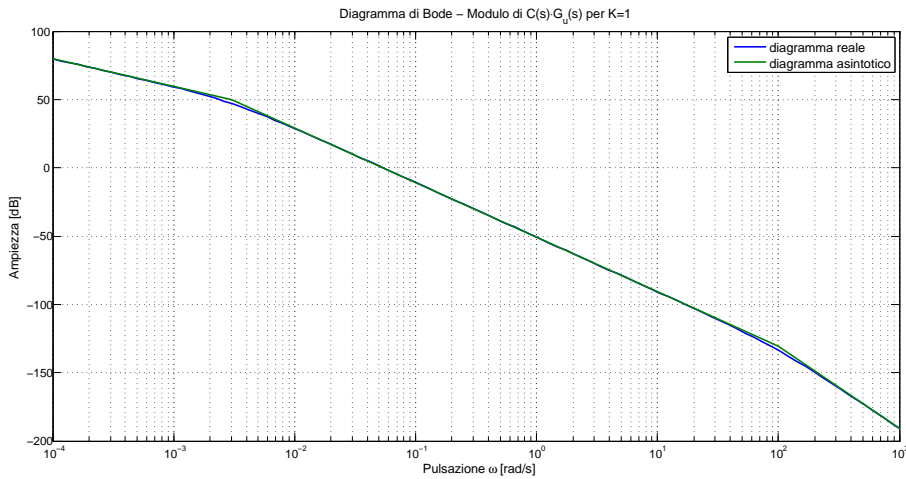


Figura 4.21: Diagramma di Bode del modulo di  $\tilde{G}_u(s)$  per  $K = 1$ , nel caso la rete a sella introduca una doppia cancellazione zero-polo.

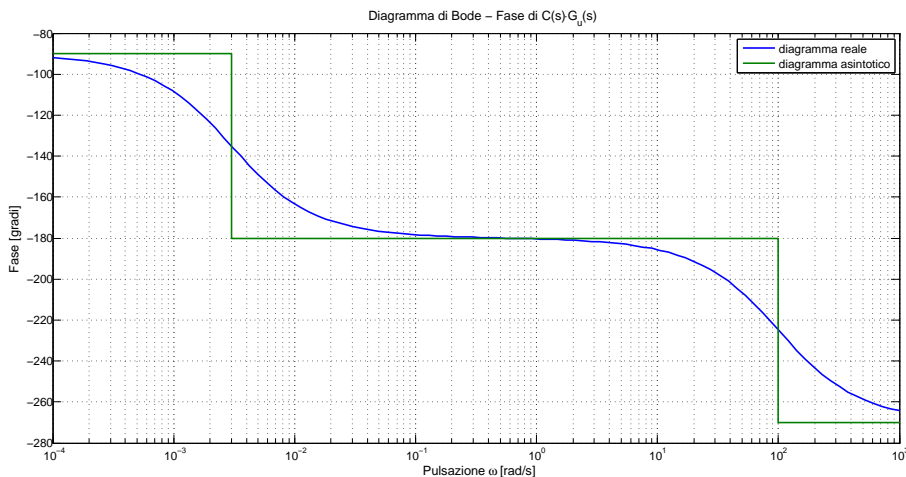


Figura 4.22: Diagramma di Bode della fase di  $\tilde{G}_u(s)$  per  $K = 1$ , nel caso la rete a sella introduca una doppia cancellazione zero-polo.

L'analisi grafica mediante l'ambiente *Sisotool* conduce ai seguenti risultati circa le grandezze rilevanti del sistema:

$K$	1	10	50	100
$m_\psi$	$3.16^\circ$	$0.91^\circ$	$0.234^\circ$	$\approx 0^\circ$
$\omega_A$	0.054 rad/s	0.17 rad/s	0.38 rad/s	0.538 rad/s
$e_{rp}^{(2)}$	1.036	0.104	0.02	0.01

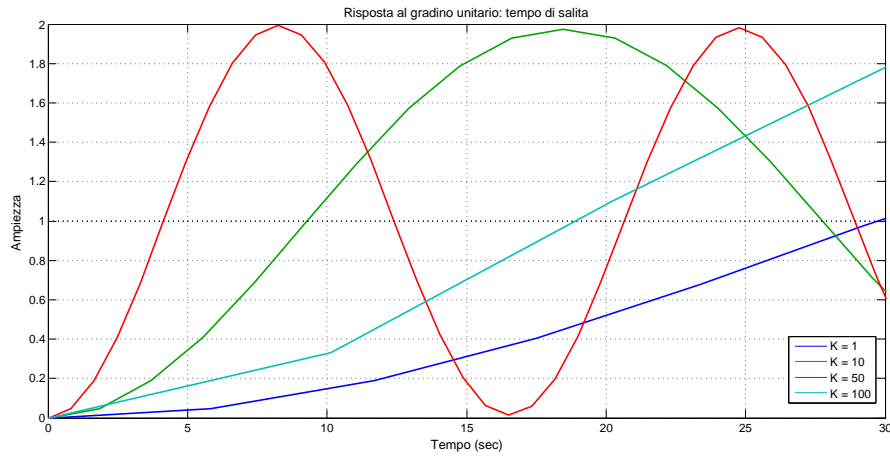


Figura 4.23: Andamento temporale di  $w_{-1}(t)$  nel caso in cui la *rete a sella* introduca una doppia cancellazione.

Si nota immediatamente come i valori del margine di fase siano piccoli anche per bassi valori del parametro  $K$ , quindi il controllore a sella che esegue una doppia cancellazione zero-polo nella funzione di trasferimento in catena aperta non è una valida soluzione al problema; il tempo di salita  $t_r$  è elevato, come evidenziato in Figura 4.23. Considerare  $p_2 = 10^3$  non cambia di molto la situazione:  $\omega_A$  rimane invariata mentre  $m_\psi$  aumenta leggermente, ma non si tratta di variazioni rilevanti.

## 4.7 Rete a sella senza cancellazioni zero-polo

Le prestazioni della *rete a sella* non sono soddisfacenti nel caso in cui  $\tilde{G}_u(s)$  venga semplificata da una cancellazione zero-polo, per questo si cerca di ottimizzare graficamente le prestazioni di

$$\tilde{G}_u(s) = \frac{0.965K}{s} \frac{\left(1 + \frac{s}{z_1}\right) \left(1 + \frac{s}{z_2}\right)}{\left(1 + \frac{s}{0.04}\right) \left(1 + \frac{s}{0.0035}\right) \left(1 + \frac{s}{p_1}\right) \left(1 + \frac{s}{p_2}\right)},$$

priva di semplificazioni (e tenendo bene a mente che  $p_1 < z_1 \leq z_2 < p_2$ ), dove si pone subito  $p_1 = 0.003$  e  $p_2 = 100$  per poter fare un confronto con il caso della *rete a sella* che prevede una doppia cancellazione. Grazie all'editor del compensatore disponibile in *Sisotool*, si giunge in modo euristico ai seguenti risultati:

$K$	<b>1</b>	<b>10</b>	<b>50</b>	<b>100</b>
$z_1 = z_2$	0.0095	0.0106	0.0115	0.0117
$m_\psi$	21.4°	7.43°	3.2°	2.12°
$\omega_A$	0.062 rad/s	0.188 rad/s	0.39 rad/s	0.543 rad/s
$e_{rp}^{(2)}$	1.036	0.104	0.02	0.01

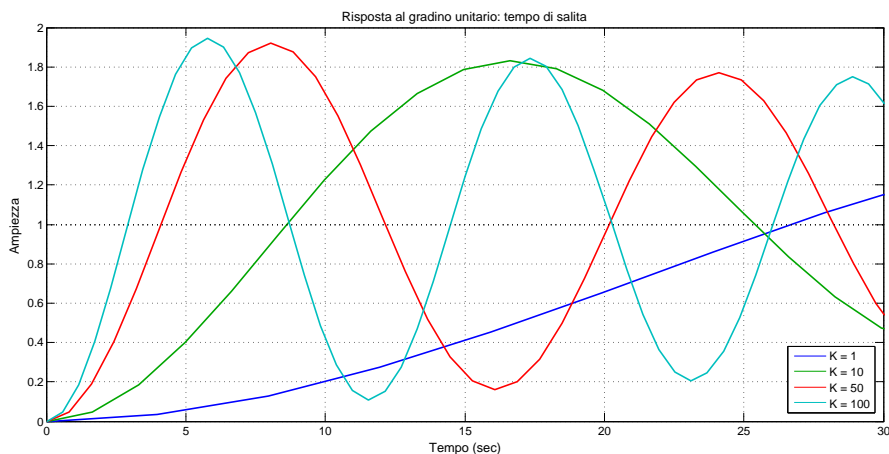


Figura 4.24: Andamento temporale di  $w_{-1}(t)$  nel caso in cui la *rete a sella* non introduca alcuna cancellazione.

Vi è un notevole incremento nei valori di  $m_\psi$  (che restano comunque contenuti) rispetto al caso della *rete a sella* che semplifica  $\tilde{G}_u(s)$ , inoltre le pulsazioni di attraversamento  $\omega_A$  sono leggermente maggiori, dunque tali da ridurre (anche se di poco) il tempo di salita  $t_r$ ; in pratica, il sistema retroazionato gode di una stabilità BIBO più robusta e di un tempo di salita poco inferiore.

## 4.8 Doppia rete anticipatrice

Dopo aver analizzato in dettaglio le più comuni tipologie di feedback si capisce come, nonostante si siano fissati in modo arbitrario determinati parametri, i risultati ottenuti non siano per niente soddisfacenti: anche nei casi

migliori, i ristretti valori del margine di fase  $m_\psi$  (ben inferiori al minimo valore accettabile dal punto di vista del picco di risonanza, pari a  $\frac{\pi}{4}$ ) rendono molto debole la stabilità del sistema e causano l'andamento fortemente oscillatorio della risposta al gradino che si assesta al valore unitario per tempi molto elevati; in aggiunta, le piccole pulsazioni di attraversamento  $\omega_A$  vanno ad influire sui tempi di salita  $t_r$ , rendendo il sistema lento.

In termini di stabilità, la soluzione che più si distingue tra quelle studiate è la *rete a sella* che non introduce alcuna cancellazione zero-polo nell'espressione di  $\tilde{G}_u(s)$ . Risulta perciò lecito pensare che una soluzione efficace al problema del controllo del sistema in esame necessiti di almeno due zeri (e non uno solamente), in maniera tale da agire contemporaneamente sul margine di fase e sulla pulsazione di attraversamento. Un'accurata analisi tramite *Sisotool* conferma che l'utilizzo di una doppia *rete anticipatrice*

$$C(s) = K \frac{\left(1 + \frac{s}{z}\right)^2}{\left(1 + \frac{s}{p}\right)^2}, \quad z < p,$$

è una valida soluzione, con il doppio polo reale negativo  $p$  allocato in alta frequenza (o comunque a destra di  $\omega_A$  nel diagramma di Bode) al fine di rendere il compensatore una funzione di trasferimento propria.

Si ottiene quindi la funzione di trasferimento in catena aperta

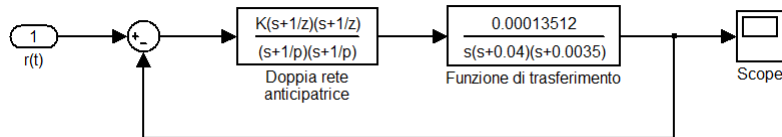


Figura 4.25: Modello *Simulink* del sistema controllato da una doppia *rete anticipatrice*.

$$\tilde{G}_u(s) = 0.965K \frac{\left(1 + \frac{s}{z}\right)^2}{s \left(1 + \frac{s}{0.04}\right) \left(1 + \frac{s}{0.0035}\right) \left(1 + \frac{s}{p}\right)^2}, \quad z < p,$$

della quale sono riportati i diagrammi di Bode in Figura 4.26 nel caso i parametri incogniti valgano  $z = 0.03$ ,  $p = 100$  e  $K = 10$ .

Dopo aver posto  $p = 100$ , i casi ottimali da un punto di vista di robustezza della stabilità sono elencati nella seguente tabella:

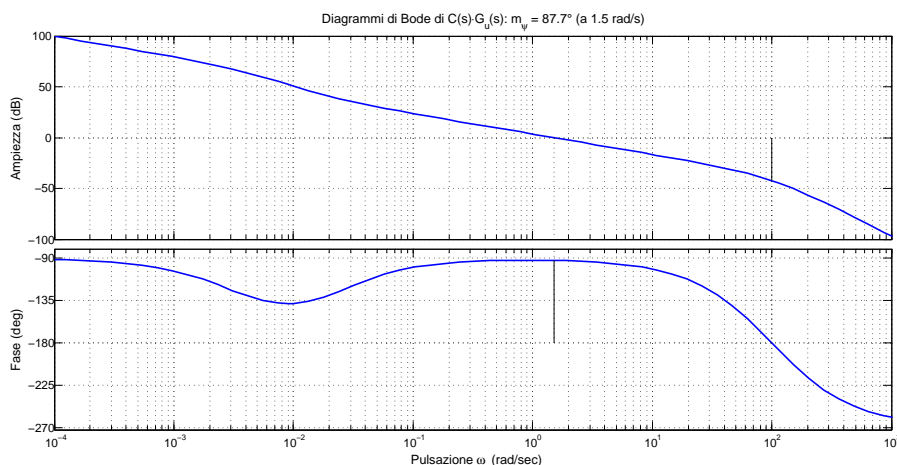


Figura 4.26: Diagrammi di Bode di  $\tilde{G}_u(s)$  per  $z = 0.03$ ,  $p = 100$  e  $K = 10$ .

$K$	<b>1</b>	<b>10</b>	<b>50</b>	<b>100</b>
$z$	0.02	0.03	0.05	0.07
$m_\psi$	$90.2^\circ$	$87.7^\circ$	$85.7^\circ$	$84.8^\circ$
$\omega_A$	0.337 rad/s	1.5 rad/s	2.7 rad/s	2.76 rad/s
$e_{rp}^{(2)}$	1.036	0.104	0.02	0.01

Si nota che per valori crescenti di  $K$  il valore del margine di fase cala leggermente, pur mantenendosi adeguatamente distante dal punto critico, mentre la pulsazione di attraversamento aumenta con l'effetto di ridurre i tempi di risposta del sistema ai segnali di ingresso. Porre  $p = 10^3$ , anzichè  $p = 100$ , comporta un leggero aumento del valore di  $m_\psi$ , lasciando invariato quello di  $\omega_A$  e quindi si tratta di un miglioramento trascurabile in quanto non influisce molto sul tempo di salita  $t_r$  e sulla stabilità del sistema.

Nei casi subottimali, ottenuti per valori di  $z$  diversi da quelli in tabella in corrispondenza di ogni  $K$  prefissato, si possono verificare due distinte situazioni:

- spostando il doppio zero reale negativo verso destra calano sia il margine di fase che la pulsazione di attraversamento, di conseguenza il sistema diventa più lento;
- spostandolo a sinistra, invece, il margine di fase cala mentre la pulsazione di attraversamento cresce: il sistema risponde più velocemente agli ingressi ma con andamento oscillatorio, seppur in modo contenuto.

In Figura 4.27 sono riportati gli andamenti temporali della risposta al gradino unitario nei quattro casi ottimali presentati nella precedente tabella: per



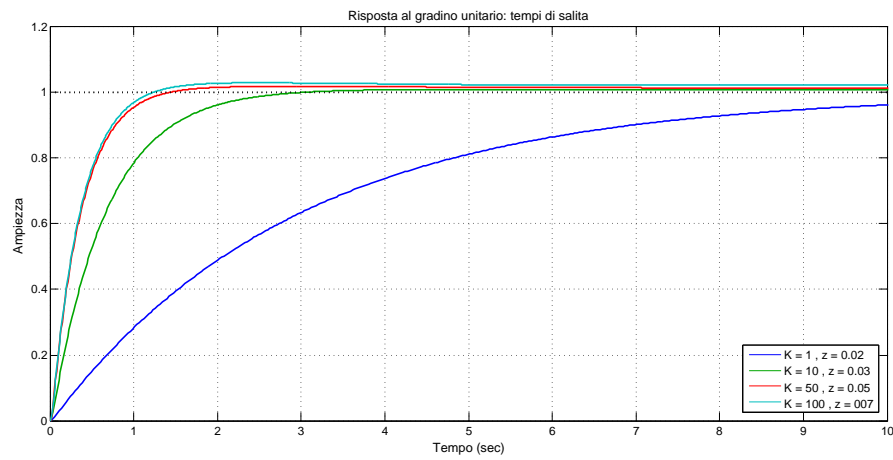


Figura 4.27: Tempi di salita in corrispondenza all'ingresso  $\delta_{-1}(t)$ .

valori del parametro  $K$  superiori a 10 è presente una lieve sovralongazione pari a circa il 2% ma in compenso si assiste ad un tempo di salita  $t_r < 1$  s.



## Capitolo 5

# Conclusioni

Si è condotta una scrupolosa analisi del modello matematico semplificato che rappresenta il moto verticale di un pallone aerostatico e si è eseguita con accuratezza la procedura di *sintesi per tentativi* allo scopo di progettare un'efficace dispositivo di retroazione in grado di migliorare le prestazioni del sistema in esame.

Ovviamente il primo passo è consistito nel rendere BIBO stabile il sistema, altrimenti sarebbero stati possibili ingressi in grado di far perdere il controllo sul moto della mongolfiera; dopodichè, ci si è concentrati sulla robustezza di tale stabilità e sulla qualità del moto, al fine di evitare il più possibile oscillazioni di altitudine che rendano spiacevole la permanenza delle persone a bordo; in ultima, ma non da un punto di vista della rilevanza, si è cercato di minimizzare il tempo di salita del sistema, dal momento che in presenza di ostacoli nella fase di volo (palazzi, alberi, tralicci) deve essere possibile superarli alzandosi di quota in un breve periodo onde evitare incidenti.

Le classiche tipologie di feedback (azione proporzionale, *rete anticipatrice*, azione PD, *rete a sella*) hanno prodotto risultati non soddisfacenti le condizioni che si erano prefissate, mentre la *rete ritardatrice* e l'azione PID si sono verificate del tutto inappropriate per questo problema. L'intuizione corretta è stata quella di introdurre un compensatore proprio contraddistinto da due zeri reali negativi che fossero in grado di aumentare il margine di fase  $m_\psi$  e contemporaneamente incrementare la pulsazione di attraversamento  $\omega_A$  (così da ridurre il tempo di salita (al 10%)  $t_r$ ); si è quindi dimostrata la bontà dell'utilizzo della doppia *rete anticipatrice* nel rispetto dei vincoli imposti prima di iniziare la *sintesi per tentativi*. Un tale dispositivo di controllo è di semplice realizzazione e per questo motivo garantisce un buon rapporto qualità-prezzo; un suo punto di forza è inoltre la flessibilità, dato che modificando arbitrariamente i parametri incogniti  $K$  e  $z$ , al pari di quanto mostrato in dettaglio, si è in grado di alleviare o rendere più stringenti le grandezze caratteristiche del sistema ( $m_\psi$ ,  $\omega_A$ ,  $t_r$ ) a seconda delle proprie esigenze.



# Bibliografia

- [1] Bisiacco Mauro, Valcher Maria Elena (2008), *Controlli automatici*, Libreria Progetto, Padova.
- [2] Bisiacco Mauro, Braghetto Simonetta (2010), *Teoria dei sistemi dinamici*, Società Editrice Esculapio, Bologna.
- [3] Fornasini Ettore, Marchesini Giovanni (2003), *Appunti di teoria dei sistemi*, Libreria Progetto, Padova.
- [4] Das Tuhin, Mukherjee Ranjan, Cameron Jonathan (2003), *Optimal trajectory planning for hot-air balloons in linear wind fields*, Journal of guidance, control and dynamics Vol. 26, No. 3, May–June.