

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA



Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria dell'Automazione

Tesi di Laurea Magistrale

**STIMA DEGLI ANGOLI DI INSTALLAZIONE
DI DISPOSITIVI "BLACK BOX"**

Relatore: Prof. Lorenzo Vangelista
Correlatore/Tutor: Ing. Andrea Topan

Laureando: MATTEO FURLAN

ANNO ACCADEMICO: 2013-2014

Abstract

Lo scopo di questa tesi è quello di realizzare un algoritmo per semplificare le fasi di installazione di un dispositivo Black Box (scatola nera) sugli autoveicoli. Il problema principale legato a questa procedura è l'allineamento degli assi dei sensori inerziali interni al dispositivo con gli assi del veicolo. Questo permette di leggere in maniera corretta i dati forniti da accelerometri ed eventualmente dai giroscopi e ottenere informazioni sul reale comportamento del veicolo. Combinando i dati provenienti da un accelerometro tri-assiale con i dati sulla velocità e sulla direzione del moto forniti da un ricevitore GPS, è possibile evitare la dispendiosa e a volte imprecisa procedura di allineamento manuale. La soluzione proposta consiste nello stimare, tramite l'approccio del filtro di Kalman e della cinematica dei quaternioni, gli angoli di rotazione che legano gli assi dei sensori con gli assi del veicolo. I dati utilizzati nell'algoritmo possono, in alcuni casi, non essere sufficienti per una corretta stima dei parametri di interesse. Perciò sono stati introdotte alcune variabili booleane che, monitorando la presenza di particolari situazioni di guida durante l'esecuzione dell'algoritmo, giudicano affidabili o meno i risultati. Infine, un'ulteriore verifica sulle stime prodotte ne testa l'attendibilità e determina la chiusura o meno del programma.

Indice

1	Introduzione	6
2	TMD, TEXA Mobile Diagnostics	8
2.1	TMD2	8
3	Stato dell'arte	10
3.1	Introduzione al problema	10
3.2	Procedura di installazione del TMD2	11
3.3	Matrici di rotazione	15
3.4	Angoli di Eulero	16
3.5	Algoritmi di stima	17
4	Soluzione proposta	21
4.1	Filtro di Kalman	21
4.2	Modello del sistema	22
4.2.1	Rappresentazione dell'orientazione tramite quaternioni	23
4.2.2	Dinamica	23
4.3	EKF	25
4.4	MEKF	26
4.5	Discretizzazione	28
4.6	Modello delle misure	30
4.7	Modello dei rumori	34
5	Risultati	37
5.1	Acquisizione dati	37
5.2	Simulazioni in Matlab	41
5.2.1	Analisi dell'osservabilità	42
5.2.2	Analisi dei risultati e problemi riscontrati	46
5.2.3	Analisi degli errori	51
5.3	Assestamento e valore affidabile	52
5.4	Routine di test	55
5.5	Cambio orientamento	57

6 Implementazione in TMD2	59
6.1 Il Micro-Processore	59
6.2 Flow chart	60
7 Conclusioni	62
A GPS	64
A.1 Global Positioning System (GPS)	64
B Accelerometri MEMS	67
B.1 Principio di funzionamento	67
B.2 Caratteristiche	69
B.3 Calibrazione	69
B.4 Accelerometro MMA7341L	71
C Quaternioni unitari	72
C.1 Da quaternioni unitari ad angoli di Eulero	73
C.2 Da angoli di Eulero a quaternioni unitari	74
Bibliografia	75

Capitolo 1

Introduzione

Negli ultimi anni, con l'evoluzione della miniaturizzazione elettronica, sono comparsi nel mercato dei dispositivi per l'autoveicolo detti Black Box (Scatole Nere) che, appositamente collegati ad esso, sono in grado di acquisire e registrare una elevata mole di dati sullo stato dinamico del veicolo.

Attualmente è sempre più diffuso il modello di mercato secondo il quale, chi necessita di un parco auto aziendale non lo acquista direttamente, ma preferisce il noleggio tramite società terze che oltre al veicolo forniscono servizi tutto compreso: manutenzione, assicurazione, finanziamenti e sostituzione periodica del veicolo. Le compagnie di noleggio che forniscono questo tipo di servizio hanno un forte interesse nel monitorare lo stato del veicolo. In particolare desiderano sapere se il veicolo viene utilizzato correttamente, se il numero di interventi manutentivi rientra nella norma, la posizione dell'autoveicolo nel caso di furto, gli eventuali sinistri subiti dal mezzo. Tutto ciò ha un'influenza diretta sui costi di gestione del servizio e spinge le compagnie di noleggio a fornire veicoli già muniti di Black Box.

Allo stesso modo le Black Box facilitano le compagnie assicurative nelle pratiche di attribuzione delle responsabilità in caso di sinistro e nella individuazione di truffe, riducendone i relativi costi anche a vantaggio dell'utente finale. La diffusione di tali dispositivi è un vantaggio anche per la comunità in quanto permette soccorsi tempestivi e quindi la riduzione delle vittime di incidenti stradali: alcuni di questi dispositivi sono in grado, infatti, di inviare delle comunicazioni tempestive a distanza tramite rete telefonica cellulare.

I dispositivi Black Box sono in grado di registrare molte statistiche di viaggio, in merito ai chilometri percorsi, le posizioni geografiche, la velocità istantanea, lo stile di guida del conducente, le accelerazioni e frenate brusche. Le informazioni fornite da tali dispositivi possono essere utilizzate per differenti scopi a seconda

delle esigenze del fruitore finale dei dati.

Le Black Box, oltre a fornire informazioni immediate sulle modalità con cui eventuali sinistri si sono verificati, sono estremamente utili in caso di furto d'auto e per monitorare lo stato del veicolo. È importante considerare che nei veicoli moderni è sempre più diffuso l'uso di centraline elettroniche, in gergo ECU (Engine Control Unit), in grado di fornire tutta una serie di dati direttamente dagli impianti della vettura: iniezione elettronica, sistema frenante, sistemi di controllo della stabilità, sospensioni, fino ad anche lo stato del bagagliaio e delle portiere. Alcuni dispositivi Black Box per auto sono in grado di leggere direttamente i dati delle ECU della vettura, questo permette loro di tenere sotto controllo le condizioni del veicolo e identificare eventuali condizioni di errore dovute a guasti o anomalie di funzionamento. Di conseguenza, con le Black Box in grado collegarsi alla rete telefonica cellulare, è anche possibile monitorare a distanza le condizioni del veicolo.

L'installazione delle Black Box ha un costo non banale perché legato direttamente alla manodopera di personale specializzato. Tali dispositivi, essendo dotati di particolari sensori di movimento, necessitano di un posizionamento e una orientazione accurate per non comprometterne le funzionalità.

Il lavoro di questa tesi mira a semplificare drasticamente tale procedura, riducendone i costi e migliorandone al contempo la precisione. Una volta fissato all'interno del veicolo, in una qualunque orientazione, il dispositivo svolgerà in automatico le operazioni necessarie per capire l'orientamento dei propri assi rispetto agli assi del veicolo.

Nel capitolo 2 viene descritto il prodotto con il quale si è lavorato ossia il TEXA TMD2. Nel capitolo 3 viene introdotto il problema in esame e le soluzioni presenti in letteratura. Nel capitolo 4 viene descritta la soluzione utilizzata per questo progetto. Nel capitolo 5 si mostrano i risultati ottenuti, le problematiche riscontrate e il modo in cui esse sono state risolte. Nel capitolo 6 si riassume il funzionamento dell'intero programma sviluppato. Infine, nell'ultimo capitolo si traggono le conclusioni generali sul lavoro svolto e si riportano alcune idee relative agli sviluppi futuri del progetto.

Capitolo 2

TMD, TEXA Mobile Diagnostics

TEXA è un'azienda italiana specializzata nella progettazione, industrializzazione e costruzione di strumenti di diagnosi per autovetture, moto, camion imbarcazioni e mezzi agricoli. Recentemente l'azienda ha investito nella ricerca e nello sviluppo di sistemi Black Box (scatole nere per auto) in grado di leggere i dati dalle centraline elettroniche del veicolo (ECU), dai sensori di cui il dispositivo è equipaggiato, di registrare e comunicare in remoto: posizione, stato ed eventi relativi al veicolo.

2.1 TMD2



Figura 2.1: TMD2.

TEXA TMD è una linea di prodotti sviluppati come soluzione universale per monitorare diversi tipologie di veicoli, dalle automobili ai mezzi pesanti ([1], [2]). Il TMD2, il più recente tra questo filone di prodotti, sfrutta i dati GPS (vedi Appendice A) e le misure fornite dai suoi sensori interni per eseguire un accurato monitoraggio del veicolo, registrando spostamenti ed eventi di interesse. Il TMD2 offre un controllo sia da un punto di vista geografico sia dal punto di

vista meccanico e della manutenzione dei veicoli. Tramite comunicazione con l'elettronica dell'auto il TMD2 permette di effettuare diagnostica senza ispezione fisica, registrando e rendendo accessibili i dati motore e dei vari organi del veicolo. Nel campo della rilevazione di sinistri il TMD2 non si limita al riconoscimento di tale evento e delle coordinate GPS nelle quali è avvenuto, ma permette anche una prima ricostruzione delle sue dinamiche. I dati di accelerazione e velocità del veicolo negli istanti prima, dopo e durante l'urto sono registrati direttamente dalla Black Box. I dati vengono quindi inviati ad un server Internet dedicato, nel quale essi vengono analizzati e rielaborati in forma di rapporto e resi disponibili direttamente al fruitore del servizio.

Capitolo 3

Stato dell'arte

3.1 Introduzione al problema

L'individuazione, la ricostruzione della dinamica di un incidente e l'analisi dello stile di guida di un automobilista possono essere eseguite mediante l'utilizzo di particolari sensori installati all'interno delle Black Box. Tali sensori, detti accelerometri, misurano l'entità dell'accelerazione applicata alla piattaforma sulla quale sono fissati.

Un solo accelerometro è in grado di fornire la misura dell'accelerazione in una sola direzione, ossia la direzione in cui è fissato. La pratica comune è quella di posizionare 3 accelerometri in maniera da coprire le tre direzioni caratterizzanti uno spazio tridimensionale. I sensori così prodotti sono detti accelerometri tri-assiali. Dall'analisi dei dati forniti dai 3 accelerometri è possibile quindi ricostruire non solo l'entità di una accelerazione ma anche la direzione lungo la quale essa avviene.

Nella ricostruzione di un sinistro le accelerazioni di interesse sono quelle derivanti dalle brusche frenate e dagli impatti tra veicoli o tra veicoli e oggetti fissi. In particolare le decelerazioni dovute ad impatti si distinguono per la loro elevata intensità sui 2 assi principali della vettura: l'asse longitudinale, cioè l'asse rappresentante la direzione del moto, e l'asse trasversale, ossia l'asse parallelo al suolo e perpendicolare al precedente. Installando i 2 sensori di accelerazione opportunamente allineati con tali assi e combinando le misure fornite nel periodo di tempo nel quale è avvenuto l'impatto, è possibile fornire una stima della direzione e della forza d'impatto sulla scocca del veicolo.

Nel caso gli accelerometri non siano fissati nelle direzioni concordi agli assi del veicolo le accelerazioni misurate non rispecchiano più le reali dinamiche dell'incidente. In particolare, quando gli assi degli accelerometri non sono paralleli al

suolo, l'accelerazione di gravità ne corrompe inevitabilmente le misure. Possiamo concludere quindi che una corretta installazione di dispositivi con sensori di accelerazione è soggetta a forti vincoli e limitazioni che, se non rispettati, ne causano l'impossibilità di utilizzo.

Il dispositivo TMD2 è equipaggiato con un accelerometro tri-assiale il cui principio di funzionamento e caratteristiche tecniche sono riportate in Appendice B. Questo tipo di sensore è rappresentabile come una terna di assi (x, y e z) tra essi perpendicolari e con origine comune, che costituisce la terna di riferimento per le misure di accelerazione. Essa verrà d'ora in poi indicata con la sigla A-frame. Date le misure accelerometriche relative ai tre assi, è possibile ricostruire l'entità e la direzione dell'accelerazione risultante rispetto alla terna di riferimento descritta.

L'orientazione dell'A-frame all'interno del TMD2 è nota ed è riportata in Figura 3.1.

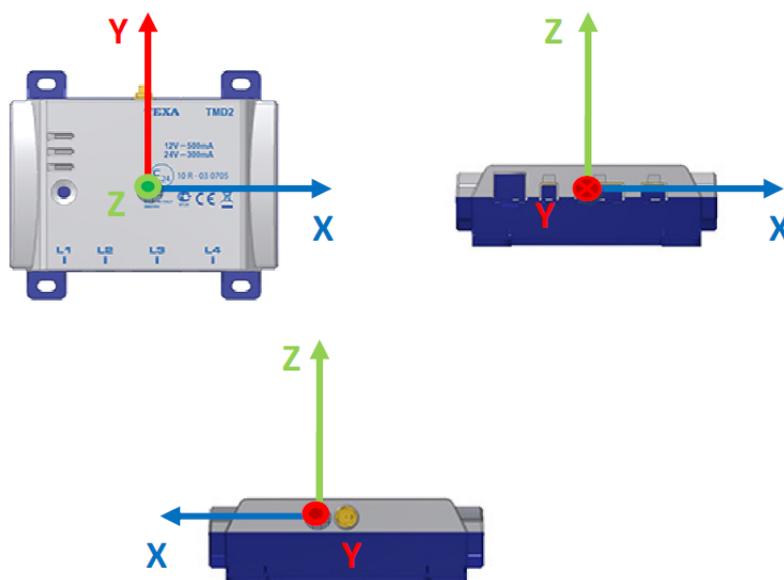


Figura 3.1: Terna di riferimento dell'accelerometro.

3.2 Procedura di installazione del TMD2

L'attuale procedura di installazione del TMD2 è basata sul posizionamento del dispositivo nell'abitacolo del veicolo con un'orientazione specifica. Per meglio comprendere tale operazione si introduce un nuovo sistema di riferimento, il V-frame, costituito da una terna di assi perpendicolari e con origine comune. Per semplicità tale origine è posta nel centro di massa del veicolo. Come visibile in

Figura 3.2, nel caso in cui il veicolo si trovi su una superficie perfettamente piana l'asse z è perpendicolare al suolo mentre gli assi x e y sono paralleli ad esso. In particolare l'asse x individua la direzione del moto del veicolo mentre l'asse y completa la terna.

L'obiettivo di una corretta installazione è quello di allineare gli assi dell'A-frame

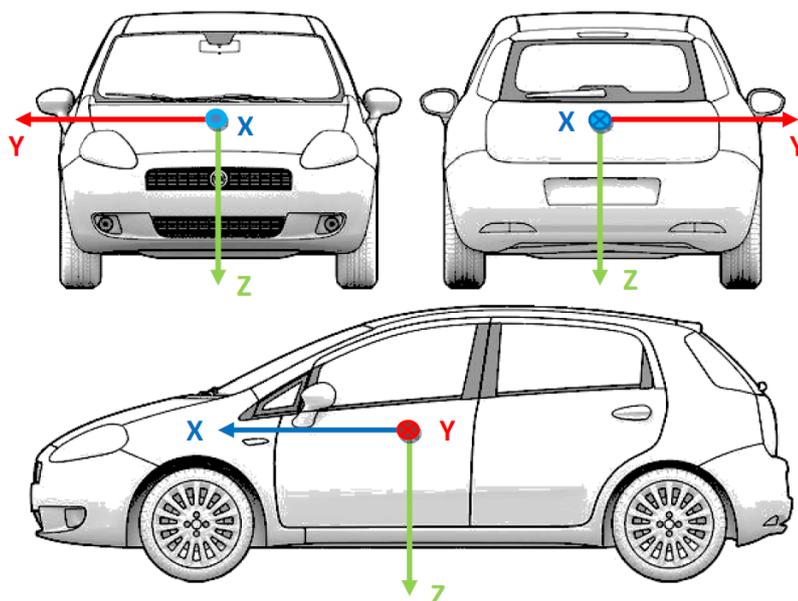


Figura 3.2: Terna di riferimento del veicolo.

con gli assi del V-frame. TEXA ha appositamente sviluppato un'applicazione per PC che guida l'operatore in questo compito.

La procedura può essere suddivisa in due fasi. In una prima fase, l'operatore è tenuto a posizionare il TMD2 in maniera da garantire che almeno un asse dell'A-frame sia perpendicolare al suolo. L'algoritmo alla base del programma sfrutta l'accelerazione di gravità come riferimento.

L'accelerazione di gravità, indicata con g , può essere ritenuta costante sia come entità ($9.81m/s^2$) sia come direzione. Essa è diretta verso il centro della terra, ossia in direzione perpendicolare al suolo. Un accelerometro tri-assiale legge tale accelerazione scomponendola nei suoi tre assi.

L'applicazione comunica con il TMD2 e utilizza le misure accelerometriche fornite dal dispositivo. La configurazione ideale prevede una misura nulla su due degli assi dell'A-frame e una misura di $1g$ sull'asse perpendicolare al suolo. Per chiarezza ipotizziamo che quest'asse sia l'asse z del A-frame. Nella pratica imprecisioni di posizionamento minime causano la comparsa di componenti dell'accelerazione di gravità anche nei restanti assi del sensore. L'applicazione comunica all'operatore quando la misura sull'asse z del A-frame è pari all'accelerazione di gravità

a meno di una soglia di errore, stabilita nella fase di progettazione. Una soglia troppo restrittiva comporta un eccessivo lavoro per l'operatore, ma al contempo una soglia troppo alta comporta l'introduzione di errori di installazione non trascurabili. Con una soglia di errore del 5%, ossia misure sull'asse z nell'intervallo $[1 \pm 0.05]g$, si accettano sfasamenti tra l'asse z dell'A-frame e l'asse z del V-frame fino a un massimo di $\delta = 18.19[^\circ]$.

Questo sfasamento comporta l'introduzione di un errore in modulo pari a:

$$g_z = g(1 - \cos(\delta)) \quad (3.1)$$

sull'asse z dell'accelerometro e di:

$$g_{x,y} = g(\sin(\delta)) \quad (3.2)$$

sui restanti assi. La Figura 3.3 mostra come l'angolo δ influisca sulla misure dell'asse z e y dell'accelerometro.

Nella seconda fase dell'installazione l'operatore orienta il TMD2 in maniera tale

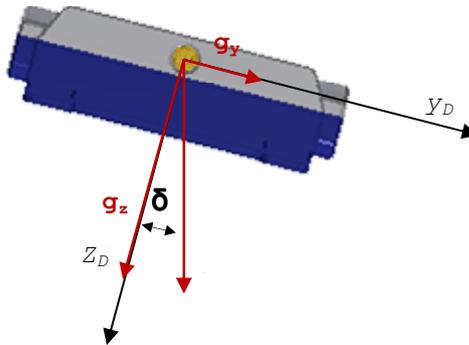


Figura 3.3: Errori introdotti con un angolo di sfasamento δ .

da completare l'allineamento tra A-frame e T-frame. Poiché tale orientazione non è univoca, la scelta dovrà essere comunicata selezionando tra una serie di configurazioni possibili mostrate su un apposito schermo.

Si riportano per chiarezza due screenshot dell'applicazione di installazione descritta. La Figura 3.4 mostra il risultato di un posizionamento errato e l'effettivo sfasamento tra A-frame e V-frame. La Figura 3.5 riporta invece il risultato di una corretta installazione che può proseguire con la scelta tra una delle 4 figure proposte in base all'effettiva orientazione del TMD2 rispetto al veicolo.

Una volta terminate tutte le fasi dell'installazione, il TMD2 è posizionato in maniera corretta all'interno del veicolo e si conoscono le relazioni che legano gli

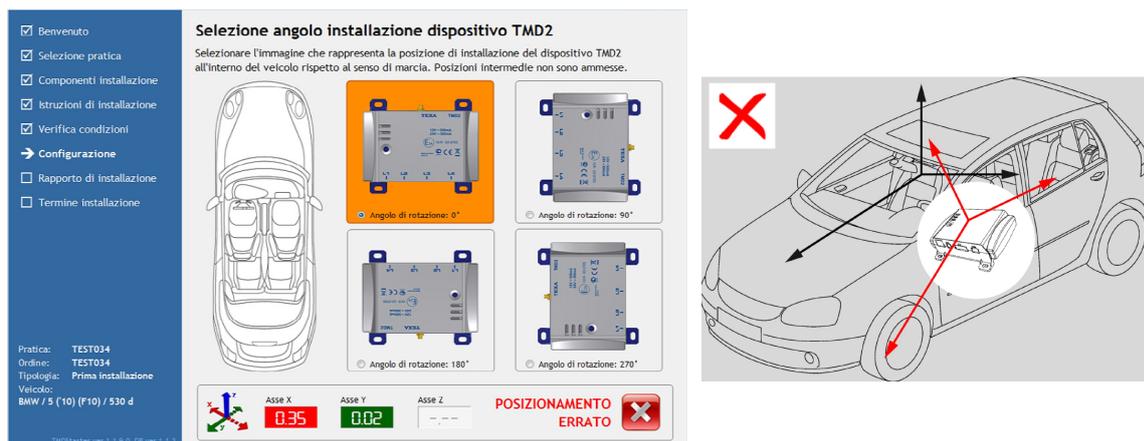


Figura 3.4: Screenshot di un'installazione sbagliata.

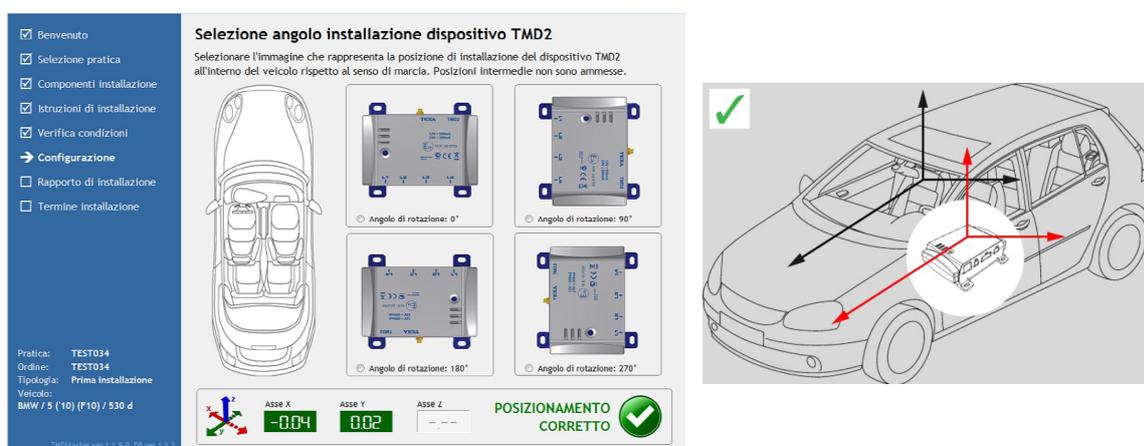


Figura 3.5: Screenshot di un'installazione corretta.

assi dell'A-frame con quelli del V-frame.

Numerosi problemi sono legati a questo tipo di installazione:

- posizionare il TMD2 all'interno dell'abitacolo della vettura, rispettando la soglia di errore stabilita, risulta spesso problematico per l'operatore. Se non sono presenti superfici piane su cui fissare il dispositivo sono necessarie staffe e supporti appositi. Questo comporta più ore di lavoro e conseguentemente costi maggiori. Rilassare la soglia di errore è compromettente per lo scopo finale del dispositivo;
- anche se eseguita in modo accurato, questa procedura introduce errori di sfasamento piuttosto rilevanti, specie nella seconda fase dell'operazione. In questa fase, infatti, l'operatore non è supportato dal programma e rischia di commettere gravi errori nella valutazione dell'effettivo asse longitudinale del veicolo;
- il personale addetto all'installazione va istruito adeguatamente per tale compito;

- l'orientazione scelta per il TMD2 potrebbe variare nel tempo, a causa di sistemi di fissaggio impropri o a causa di urti o forti vibrazioni subite dal veicolo. Ammesso che il problema venga individuato (osservando anomalie nei dati accelerometrici da esso forniti in remoto), il TMD2 necessiterebbe comunque di una nuova procedura di installazione.

3.3 Matrici di rotazione

È evidente che procedure di installazione di tipo manuale, oltre a richiedere tempo e costi non indifferenti, portano inevitabilmente ad errori in alcuni casi inaccettabili per una pratica delicata come la ricostruzione di un incidente. Da qui il bisogno di semplificare e se possibile eliminare tale procedimento sfruttando ad esempio algoritmi più complessi che permettano al TMD2 di effettuare una sorta di installazione automatica, liberando l'operatore dall'onere dell'allineamento degli assi.

Nel caso gli assi del dispositivo e del veicolo non siano allineati, per capire il rapporto tra le accelerazioni misurate dall'accelerometro e quelle relative al veicolo è necessario introdurre brevemente i concetti di vettore e di matrice di rotazione. Un vettore nello spazio tridimensionale è una terna di numeri reali che acquisisce un significato fisico se in relazione con un sistema di riferimento. Il vettore delle accelerazioni riferite all'A-frame è costituito dalle tre misure di accelerazioni fornite dall'accelerometro triassiale:

$$\mathbf{a}_{A-frame} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}_{A-frame} \quad (3.3)$$

Il vettore delle accelerazioni riferite al V-frame contiene le reali accelerazioni sugli assi del veicolo:

$$\mathbf{a}_{V-frame} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}_{V-frame} \quad (3.4)$$

La relazione che intercorre tra i due vettori è data da:

$$\mathbf{a}_{V-frame} = R_A^V \mathbf{a}_{A-frame} \quad (3.5)$$

Dove con R_A^V si è indicata la matrice di rotazione che lega i due sistemi di riferimento, A-frame e V-frame.

Nota la matrice R_A^V è quindi possibile ricavare le accelerazioni riferite al veicolo

sfruttando i dati forniti dall'accelerometro tramite (3.5).

La matrice di rotazione che lega due sistemi di riferimento tridimensionali contiene le informazioni sulle operazioni necessarie per far coincidere i rispettivi assi. Una matrice rappresentante una pura rotazione nello spazio tridimensionale, cioè senza traslazione tra le origini dei due sistemi di riferimento, è una matrice 3×3 ortogonale. Quindi, nonostante contenga 9 elementi, essa può essere parametrizzata utilizzando un minimo di 3 parametri in accordo col fatto che la rotazione di un corpo nello spazio tridimensionale è soggetta a soli tre gradi di libertà.

3.4 Angoli di Eulero

Nella rappresentazione tramite angoli di Eulero l'orientazione di un oggetto rispetto a un sistema di riferimento fisso è parametrizzata da tre valori. Tali valori rappresentano gli angoli di rotazione da applicare in sequenza agli assi del sistema di riferimento per portarli a coincidere con gli assi dell'oggetto.

In letteratura si trovano diverse tipologie di angoli di Eulero e, a seconda della convenzione utilizzata, essi possono assumere vari nomi. Ciascuna tipologia di angoli di Eulero è caratterizzata da:

- l'ordine con cui le rotazioni sono applicate;
- gli assi sui quali ciascuna rotazione agisce;
- la convenzione riguardo il senso di rotazione;
- la scelta di applicare le rotazioni sugli assi mobili o sugli assi fissi;

Per questo progetto è stata scelta la convenzione presentata in [3], dove gli angoli di Eulero θ , ϕ e ψ sono detti rispettivamente *attitude*, *heading* e *bank*¹.

La prima rotazione, θ , è applicata all'asse y del sistema di riferimento. La relativa matrice di rotazione è:

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} c(\theta) & 0 & s(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s(\theta) & 0 & c(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

¹In [3], *attitude* rappresenta la rotazione rispetto all'asse z , mentre l'*heading* rappresenta la rotazione rispetto all'asse y .

Quindi viene applicata la seconda rotazione, ϕ , sull'asse z. La matrice corrispondente è:

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} c(\phi) & -s(\phi) & 0 \\ s(\phi) & c(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

L'ultima rotazione è applicata sull'asse x della terna mobile:

$$R_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -s(\psi) \\ 0 & s(\psi) & c(\psi) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Una delle caratteristiche delle matrici di rotazione è quella di poterle moltiplicare tra di loro, ponendo attenzione all'ordine, per ottenere rappresentazioni di rotazioni complesse. Utilizzando le matrici di rotazione precedentemente introdotte si ottiene la:

$$\begin{aligned} R(\theta, \phi, \psi) &= R_y(\theta)R_z(\phi)R_x(\psi) = \\ &= \begin{pmatrix} c(\phi)c(\theta) & s(\phi)s(\psi) - c(\phi)c(\psi)s(\theta) & c(\psi)s(\phi) + c(\phi)s(\psi)s(\theta) \\ s(\theta) & c(\psi)c(\theta) & -c(\theta)s(\psi) \\ -c(\theta)s(\phi) & c(\phi)s(\psi) + c(\psi)s(\phi)s(\theta) & c(\phi)c(\psi) - s(\phi)s(\psi)s(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.9)$$

dove $R(\theta, \phi, \psi)$ è la matrice di rotazione che rappresenta la relazione tra due sistemi di riferimento parametrizzata dai tre valori θ , ϕ e ψ .

3.5 Algoritmi di stima

Nel campo dei sistemi di navigazione inerziale il problema della stima degli angoli di installazione è ben noto e già affrontato in numerosi lavori.

Per navigazione inerziale si intende un metodo alternativo per tracciare il movimento di un veicolo senza l'ausilio di sensori esterni al veicolo stesso. Essa si basa sull'utilizzo esclusivo di strumenti sensibili al moto, quali ad esempio accelerometri e giroscopi². Conoscendo la posizione iniziale e possibile stabilire il percorso del veicolo nel periodo successivo elaborando esclusivamente i dati provenienti da tali sensori.

Per poter comprendere le soluzioni presentate in questo ambito è necessario l'introduzione di un sistema di riferimento inerziale, ossia un sistema di riferimento fisso sulla base del quale rappresentare la dinamica di un veicolo. Per un veicolo

²Il giroscopio è uno strumento che misura la velocità di rotazione della piattaforma su cui esso viene montato. Dalla conoscenza dell'orientazione iniziale della piattaforma, tramite integrazione sulle misure fornite, si può quindi individuare l'entità della rotazione.

sulla superficie terrestre il sistema di riferimento con origine al centro della Terra e con assi concordi con essa, che indicheremo con la sigla I-frame, può essere considerato un sistema di riferimento inerziale. Tuttavia, nel campo della navigazione terrestre si preferisce utilizzare un sistema di riferimento locale, il T-frame, centrato su un punto della superficie della Terra e con gli assi x ed y a formare un piano tangente ad essa. L'asse x punta nella direzione del Nord geografico, l'asse y nella direzione dell'Est e z punta verso l'origine dell'I-frame. T-frame ed I-frame sono raffigurati in Figura 3.6. Per un veicolo terrestre il T-frame si può assumere a tutti gli effetti un sistema di riferimento inerziale visto che la sua orientazione rispetto all'I-frame rimane pressoché immutata.

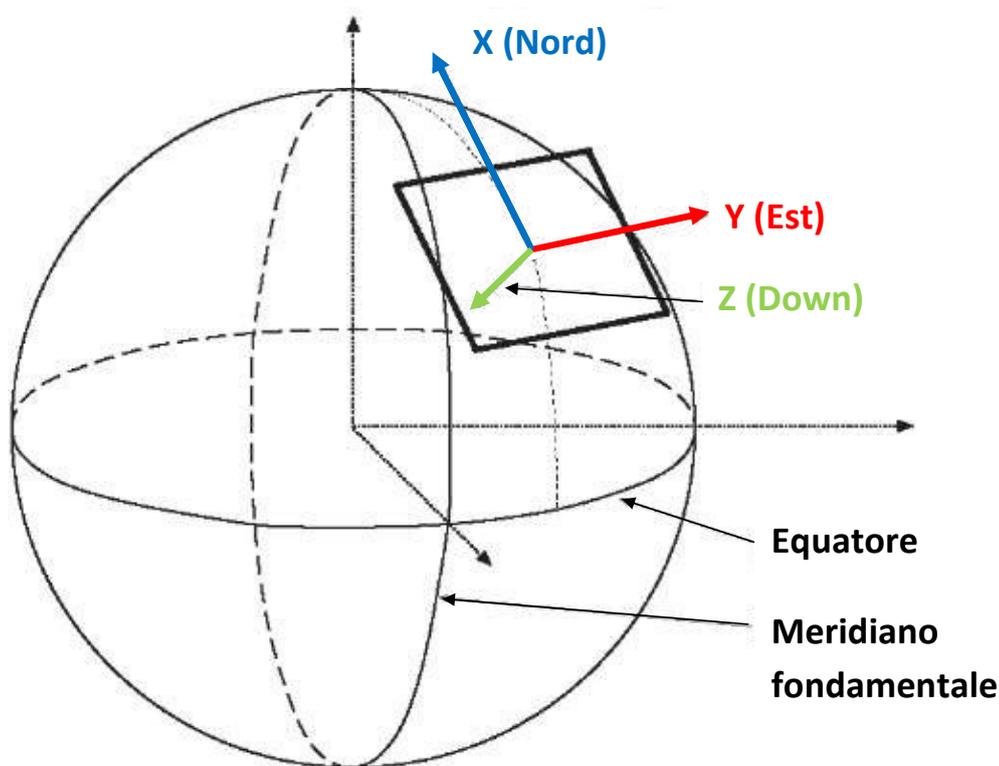


Figura 3.6: Rappresentazione dell'I-frame e del T-frame.

In [4] il problema dell'individuazione degli angoli di installazione viene trattato in maniera approfondita, ma viene risolto con strumenti di misura esterni come gli inclinometri e la girobussola. Gli inclinometri individuano gli angoli di inclinazione del piano x,y dell'accelerometro mentre la girobussola ne individua l'orientazione.

In [5] il problema viene affrontato nel caso di un IMU (inertial measurement unit), ossia uno strumento di navigazione inerziale provvisto di 3 accelerometri, 3 giroscopi e un ricevitore GPS. L'algoritmo ha la funzione di fornire informazioni

sulla posizione e sulla velocità del sistema su cui l'IMU è fissato. In questo, come nella maggior parte degli studi affini, lo scopo principale è quello di determinare l'iniziale assetto (orientazione) dell'A-frame (sistema di riferimento dell'accelerometro) rispetto al T-frame, rappresentato dalla matrice R_T^A , mentre R_A^V viene quasi sempre supposta nota o pari alla matrice unitaria (il che significa che l'A-frame è già stato allineato con il V-frame in fase di installazione). I dettagli relativi alla matrice R_A^V sono riportati al paragrafo 3.3.

Una prima soluzione che si avvicina a quella cercata si ha in [6], dove si utilizzano le accelerazioni del veicolo in direzioni note per determinare gli angoli di installazione dell'accelerometro.

L'algoritmo prevede due fasi:

- Stima dei due angoli di Eulero che individuano l'inclinazione del piano x-y dell'A-frame utilizzando le misure di accelerazione. L'autore utilizza le formule fornite in [7]. Tale procedura va eseguita solo nel caso in cui il veicolo sia fermo o in movimento a velocità costante. Infatti, gli algoritmi di stima di inclinazione si basano sulle misurazioni dell'accelerazione di gravità e non prevedono la presenza di altro tipo di accelerazioni.
- Stima del terzo angolo di installazione. A tale scopo vengono utilizzate accelerazioni/decelerazioni frontali del veicolo, $a_{forward}$, la cui entità è ricavata tramite derivazione a partire dalle misure di velocità fornite dal GPS. Si imposta quindi il sistema di equazioni:

$$\mathbf{a}_{A-frame} = R_V^A \begin{bmatrix} a_{forward} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_V^A R_T^V \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

dove R_T^V è supposta nota nel caso si conoscano le caratteristiche del manto stradale, o pari alla matrice identità se queste informazioni non sono disponibili. Nel primo caso si sfruttano le conoscenze sull'inclinazione laterale e la pendenza della strada per ricavare la matrice di rotazione tra V-frame e T-frame. Nel secondo caso la strada è considerata piana e quindi gli assi del veicolo sono paralleli a quelli del T-frame. Non essendoci rotazioni tra gli assi dei due sistemi di riferimento la matrice di rotazione che ne identifica il reciproco orientamento è la matrice identità.

Per individuare le situazioni di accelerata/decelerata frontale, necessarie alla stima, si utilizzano ancora una volta i dati GPS analizzando le misure di posizione nel tempo.

L'algoritmo descritto presenta alcuni problemi rilevanti, tra cui:

- la presenza di pendenze è fonte di errore sul risultato delle stime in quanto la superficie stradale è supposta piana;
- le singolarità che caratterizzano la rappresentazione dell'orientazione tramite angoli di Eulero: a seconda della tipologia di angoli di Eulero scelta, la presenza di angoli di installazione prossimi a 90° può portare a problemi numerici;
- la necessità di specifiche condizioni stradali e di guida: accelerazione costante, moto rettilineo;
- le accelerazioni $a_{forward}$ sono ottenute derivando i valori di velocità forniti dal GPS, valori forniti con una frequenza bassa rispetto ai dati provenienti dagli accelerometri. Per poter impostare equazioni che coinvolgano sia dati GPS sia dati accelerometrici è necessario quindi interpolare le misure GPS cercando di aumentarne artificialmente la frequenza.

Una soluzione per alcune delle lacune di [6] si trova in [8]. Nell'articolo viene descritto un metodo alternativo per la stima degli angoli di installazione, basata su un filtro di Kalman esteso che combina dati GPS sulla velocità e le misure fornite da un accelerometro triassiale. Sarà appunto questa la strada scelta per la stima degli angoli di installazione della Black Box nel veicolo.

Capitolo 4

Soluzione proposta

In questo capitolo verranno approfonditi gli aspetti principali legati alla soluzione presentata in [8], introducendo gli strumenti matematici in essa utilizzati ed evidenziandone le potenzialità in funzione del problema in esame. Inoltre verranno descritte le modifiche introdotte e le strategie adottate per risolvere i problemi riscontrati.

4.1 Filtro di Kalman

Il filtro di Kalman è uno strumento per stimare lo stato di un sistema dinamico lineare perturbato da rumore, sulla base di misure (o osservazioni) dallo stato e corrotte anch'esse da rumore. Un sistema dinamico lineare (discreto, con periodo T), può essere descritto tramite equazioni matriciali lineari, ossia:

$$\mathbf{x}(k+T) = F\mathbf{x}(k) + G\mathbf{w}(k) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y}(k) = H(\mathbf{x}(k)) + D\mathbf{v}(k) \quad (4.2)$$

Lo stato del sistema \mathbf{x} è il vettore contenente le variabili o le quantità fisiche che caratterizzano l'evoluzione del sistema nel tempo. Tale evoluzione è stabilita dalla matrice F , la quale esprime la dipendenza tra stato precedente e stato successivo. Nella maggior parte dei casi le componenti dello stato non sono direttamente misurabili, ma possono essere stimate sulla base della loro dipendenza dalle misure disponibili. Le misure contenute nel vettore \mathbf{y} sono funzioni delle componenti dello stato del sistema nella relazione descritta dalla matrice H . I rumori che corrompono le misure, $\mathbf{v}(k)$, entrano nel sistema attraverso la matrice D . Infine l'incertezza del modello matematico, ossia la discrepanza tra equazioni matematiche e realtà fisica, si rappresenta tramite l'aggiunta del rumore $\mathbf{w}(k)$, detto rumore di processo.

Il filtro di Kalman, sfruttando un modello matematico del sistema dinamico e un

modello del legame tra stati e misure, produce una stima dello stato del sistema. Si tratta di un algoritmo ricorsivo: ad ogni ciclo, la precedente stima dello stato e le nuove misure permettono la stima dello stato corrente.

Il filtro di Kalman è caratterizzato da due fasi:

- la fase di predizione: la stima dello stato del sistema relativa all'iterazione precedente viene utilizzata per produrre una stima dello stato attuale sulla base del modello matematico del sistema (stima a priori, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-T}$);
- la fase di aggiornamento: le misure disponibili vengono utilizzate per migliorare la stima dello stato corrente (stima a posteriori, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$).

Le formule verranno trattate in maniera approfondita nel paragrafo 4.3.

4.2 Modello del sistema

Per poter utilizzare il filtro di Kalman la cosa fondamentale è costruire un modello del sistema. Creare un modello matematico di un sistema dinamico risulta un compromesso tra l'accuratezza, ossia quanto "bene" si vuole che il modello simuli la realtà, e i parametri e le misure che si hanno effettivamente a disposizione per stimarne l'evoluzione. Nel caso la conoscenza del sistema e la varietà delle misure in possesso siano limitate rispetto alle dinamiche da rappresentare è buona norma costruire il modello in maniera più semplice possibile, trattandone solo gli aspetti fondamentali. Inoltre l'idea di caratterizzare il modello del veicolo utilizzando dati specifici, come ad esempio la lunghezza, la larghezza, la posizione del centro di massa e il peso, renderebbe l'algoritmo di stima applicabile solo a quel particolare tipo di veicolo.

In [8] il veicolo viene identificato come una massa puntiforme situata nell'origine del V-frame. Essa può muoversi solo nella direzione dell'asse x del V-frame, perciò fenomeni di slittamento laterale non sono presi in considerazione. I cambi di direzione sono rappresentati introducendo nel modello un parametro fittizio, corrispondente all'angolo di sterzata delle ruote. L'assetto del veicolo, ossia gli angoli che ne caratterizzano l'orientazione rispetto al T-frame, e la sua evoluzione nel tempo sono rappresentati tramite l'utilizzo dei quaternioni e la relativa cinematica. Gli angoli di installazione dell'accelerometro rispetto al veicolo sono trattati come parametri incogniti del modello e anch'essi vengono parametrizzati tramite l'utilizzo dei quaternioni.

4.2.1 Rappresentazione dell'orientazione tramite quaternioni

L'utilizzo dei quaternioni per rappresentare l'assetto di un veicolo o l'orientazione di un oggetto qualsiasi nello spazio deriva essenzialmente dall'esigenza di risolvere i problemi di singolarità che caratterizzano gli angoli di Eulero. Negli algoritmi di stima, a seconda della tipologia di angoli di Eulero scelta, la presenza di discontinuità e singolarità al raggiungimento di particolari valori degli angoli porta inevitabilmente a problemi di tipo numerico, ossia l'instabilità delle stime. In letteratura sono presenti algoritmi atti a risolvere questo tipo di problemi ([9]), ma presuppongono la conoscenza a priori degli angoli raggiungibili nella dinamica dell'oggetto in esame. Nel caso degli angoli di installazione del TMD2 o di un qualsiasi dispositivo con accelerometro, essi possono assumere qualsiasi valore, perciò non c'è modo di evitare il problema delle singolarità se non adottando una parametrizzazione dell'orientamento differente.

Per una introduzione sui quaternioni e sul loro uso per parametrizzare matrici di rotazione si rimanda all'Appendice C.

4.2.2 Dinamica

Si faccia riferimento alle notazioni utilizzate per indicare i vari sistemi di riferimento introdotte nei paragrafi 3.2 e 3.5. Sia \mathbf{q}_V il quaternione che esprime l'orientazione del V-frame rispetto al T-frame. L'equazione cinematica fondamentale per un veicolo può essere semplificata come segue ([10]):

$$\dot{\mathbf{q}}_V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{q}_V \quad (4.3)$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ è il vettore degli velocità angolari relative al V-frame. Il veicolo può ruotare solamente rispetto all'asse z, perciò l'unica componente non nulla di $\boldsymbol{\omega}$ è l'ultima:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Le rimanenti equazioni che esprimono la dinamica del veicolo sono:

$$\dot{v}_x = a_x \quad (4.5)$$

$$\dot{a}_x = 0 \quad (4.6)$$

$$\dot{\omega}_z = 0 \quad (4.7)$$

dove:

- v_x è la velocità longitudinale del veicolo, ossia la velocità con cui il veicolo si muove nella direzione x del V-frame;
- a_x è l'accelerazione longitudinale del veicolo, lungo l'asse x del V-frame;
- ω_z è la velocità angolare riferita all'asse z del V-frame, che determina i cambi di direzione del veicolo.

A queste si aggiunge un'ulteriore equazione:

$$\dot{\mathbf{q}}_A = 0 \quad (4.8)$$

dove \mathbf{q}_A è il quaternion che esprime l'orientazione del A-frame rispetto al V-frame e, come facilmente intuibile, essendo l'accelerometro fisso rispetto al veicolo il suo orientamento non cambia nel tempo.

Lo stato complessivo del sistema risulta quindi:

$$\mathbf{x} = \left[v_x \quad a_x \quad \omega_z \quad \mathbf{q}_V^T \quad \mathbf{q}_A^T \right]^T \quad (4.9)$$

Va precisato che in [8] i cambiamenti di direzioni venivano rappresentati tramite un parametro fittizio, x_{steer} , ossia l'angolo di sterzata delle ruote. Tale parametro veniva inserito all'interno di (4.9) in sostituzione di ω_z . La velocità di rotazione del veicolo veniva invece ricavata tramite la:

$$\omega_z = v_x x_{steer} \quad (4.10)$$

dove si sfruttava la relazione tra velocità angolare e velocità tangenziale del moto su una circonferenza di raggio R, con l'approssimazione:

$$R \simeq 1/x_{steer} \quad (4.11)$$

Si è preferito utilizzare ω_z come stato del sistema in quanto, come sarà chiaro in seguito, esso è uno stato direttamente osservabile, essendo una misura ricavabile dai dati GPS.

Il modello basato sull'equazione (4.3) presenta due aspetti problematici che ne rendono impossibile l'utilizzo all'interno del filtro di Kalman:

- il modello risulta non lineare, vista la presenza di prodotti tra stati del sistema: il filtro di Kalman nella formulazione classica richiede un modello lineare;

- \mathbf{q}_V e \mathbf{q}_A per essere effettivamente parametrizzazioni dell'orientamento di un oggetto nello spazio, devono preservare la norma unitaria, caratteristica che viene persa con l'evoluzione nel tempo basata su (4.3).

Per risolvere i due problemi presentati, in [8] si fa uso di una versione particolare del filtro di Kalman, ossia il filtro di Kalman esteso (Extended Kalman Filter, EKF, [11]) e di una particolare tecnica che permette di preservare la norma unitaria dei quaternioni \mathbf{q}_V e \mathbf{q}_A . Tale soluzione è nota come *Multiplicative Extended Kalman Filter* (MEKF, [10]).

4.3 EKF

Il filtro di Kalman esteso è una versione non-lineare del filtro di Kalman usata quando l'evoluzione o l'osservazione dello stato del sistema sono non-lineari. Si consideri il sistema discreto:

$$\mathbf{x}(k+T) = f(\mathbf{x}(k), \mathbf{w}(k)) \quad (4.12)$$

$$\mathbf{y}(k) = h(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{v}(k) \quad (4.13)$$

dove $f(\mathbf{x}(k), \mathbf{w}(k))$ e $h(\mathbf{x}(k))$ sono funzioni non lineari.

Il filtro di Kalman esteso sfrutta una linearizzazione del sistema intorno alla stima corrente. Si basa cioè sullo sviluppo in serie delle equazioni non-lineari arrestato al primo ordine. Quindi, sul sistema così linearizzato si applicano le usuali formule del filtro di Kalman.

Di seguito le formule principali suddivise nelle due fasi caratteristiche:

- predizione:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-T} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-T|k-T}, 0) \quad (4.14)$$

$$F_x = \frac{\delta f(\hat{\mathbf{x}}_{k-T|k-T}, 0)}{\delta \mathbf{x}} \quad (4.15)$$

$$F_w = \frac{\delta f(\hat{\mathbf{x}}_{k-T|k-T}, 0)}{\delta \mathbf{w}} \quad (4.16)$$

$$P_{k|k-T} = F_x P_{k-T|k-T} F_x^T + F_w Q_w F_w^T \quad (4.17)$$

- aggiornamento:

$$\hat{\mathbf{e}}(k) = \mathbf{y}(k) - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-T}) \quad (4.18)$$

$$H_x = \frac{\delta h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-T})}{\delta \mathbf{x}} \quad (4.19)$$

$$S = H_x P_{k|k-T} H_x^T + R_v \quad (4.20)$$

$$K = P_{k|k-T} H_x^T S^{-1} \quad (4.21)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-T} + K \hat{\mathbf{e}}(k) \quad (4.22)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-T} + K \hat{\mathbf{e}}(k) K^T \quad (4.23)$$

dove:

- $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-T}$ è la predizione dello stato all'istante k ;
- $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ è la stima dello stato all'istante k ;
- F_x è la matrice Jacobiana della funzione non-lineare $f(\mathbf{x}(k), \mathbf{w}(k))$ rispetto a \mathbf{x} , calcolata sostituendo al suo interno i valori dello stato predetto e $\mathbf{w} = 0$;
- F_w è la matrice Jacobiana della funzione non-lineare $f(\mathbf{x}(k), \mathbf{w}(k))$ rispetto a \mathbf{w} , calcolata sostituendo al suo interno i valori dello stato predetto e $\mathbf{w} = 0$;
- $P_{k|k-T}$ e $P_{k|k}$ sono le matrici di covarianza dell'errore di predizione ($\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-T}$) e di stima ($\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$);
- $\mathbf{y}(k)$ è il vettore delle misure all'istante k ;
- H_x è la matrice Jacobiana della funzione non-lineare $h(\mathbf{x}(k))$ rispetto a \mathbf{x} , calcolata sostituendo al suo interno i valori dello stato predetto;
- $\hat{\mathbf{e}}(k)$ è l'errore di osservazione, detto anche innovazione o residuo.

4.4 MEKF

Le formule del filtro di Kalman esteso, a meno di non imporre particolari vincoli, non preservano la norma unitaria nei quaternioni \mathbf{q}_V e \mathbf{q}_A . L'idea elaborata in [10] e ripresa da [8] consiste nell'introdurre un quaterniono di riferimento, \mathbf{q}_{ref} , e rappresentare l'orientamento attuale come uno scostamento da tale riferimento. In formule:

$$\mathbf{q} = \delta \mathbf{q}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{q}_{ref} \quad (4.24)$$

dove $\delta\mathbf{q}(\mathbf{a})$ è un quaternione a norma unitaria che rappresenta lo scostamento dell'attuale orientamento (indicato con \mathbf{q}) dal riferimento. Il quaternione $\delta\mathbf{q}(\mathbf{a})$ è parametrizzato dalle tre componenti del vettore \mathbf{a} .

In [12] vengono presentate diverse scelte relative al vettore \mathbf{a} . Una di questa è la *Rodrigues vector representation*, dove:

$$\mathbf{a} = 2\delta\mathbf{q}_{1:3}/\delta q_4 \quad (4.25)$$

Da (4.25) si ricava:

$$\delta\mathbf{q}(\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{4 + \|\mathbf{a}\|^2}} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Applicando (4.24) ai quaternioni \mathbf{q}_V e \mathbf{q}_A , si ottengono le due relazioni:

$$\mathbf{q}_V = \delta\mathbf{q}(\mathbf{a}_V) \cdot \mathbf{q}_{V,ref} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{q}_A = \delta\mathbf{q}(\mathbf{a}_A) \cdot \mathbf{q}_{A,ref} \quad (4.28)$$

dove si sono introdotti i due quaternioni di riferimento $\mathbf{q}_{V,ref}$ e $\mathbf{q}_{A,ref}$.

L'idea di base del MEKF è di sostituire \mathbf{q}_V e \mathbf{q}_A in (4.9) con \mathbf{a}_V e \mathbf{a}_A . Il vantaggio è quello di poter stimare \mathbf{a}_V e \mathbf{a}_A senza il vincolo sulla norma che caratterizza i quaternioni unitari.

Ad ogni iterazione \mathbf{a}_V e \mathbf{a}_A vengono stimate utilizzando le formule dell'EKF. Quindi, tramite (4.26) vengono calcolati i quaternioni $\delta\mathbf{q}_V(\mathbf{a})$ e $\delta\mathbf{q}_A(\mathbf{a})$. I quaternioni di riferimento vengono infine aggiornati sulla base dei loro valori precedenti utilizzando (4.24):

$$\mathbf{q}_{V,ref} = \delta\mathbf{q}(\mathbf{a}_V) \cdot \mathbf{q}_{V,ref} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{q}_{A,ref} = \delta\mathbf{q}(\mathbf{a}_A) \cdot \mathbf{q}_{A,ref} \quad (4.30)$$

Poiché il prodotto tra quaternioni unitari è ancora un quaternione unitario si è certi che i due quaternioni di riferimento continuano ad essere due valide rappresentazioni di orientazione nello spazio. Al termine di ogni iterazione i vettori \mathbf{a}_V e \mathbf{a}_A vengono azzerati.

Essendo \mathbf{a}_V e \mathbf{a}_A utilizzati come variabili di stato del modello del sistema è necessario stabilire l'equazione che ne regola l'evoluzione temporale. Nel caso di \mathbf{a}_A , utilizzando (4.8), il risultato è immediato:

$$\dot{\mathbf{a}}_A = 0 \quad (4.31)$$

Invece l'evoluzione di \mathbf{a}_V si ottiene a partire dall'equazione (4.3) mediante opportune operazioni algebriche interamente sviluppate in [10]. Di seguito se ne

riportano i passaggi principali e si rimanda al testo citato per i dettagli.

Inserendo $\mathbf{q}_{V,ref}$ all'interno di (4.3) risulta:

$$\dot{\mathbf{q}}_{V,ref} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{ref} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{q}_{V,ref} \quad (4.32)$$

dove $\boldsymbol{\omega}_{ref}$ rappresenta il vettore delle velocità angolari relativo al quaternioni di riferimento. Calcolando la derivata temporale di (4.24) e utilizzando (4.3) e (4.32) si ottiene:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{q}_V = \delta \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{a}_V) \cdot \mathbf{q}_{V,ref} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{q}(\mathbf{a}_V) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ref} \cdot \mathbf{q}_{V,ref} \quad (4.33)$$

Sostituendo (4.24) nella (4.33), moltiplicando a destra ambo i membri per \mathbf{q}_{ref}^{-1} e rielaborando l'equazione, risulta:

$$\delta \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{a}_V) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \delta \mathbf{q}(\mathbf{a}_V) - \delta \mathbf{q}(\mathbf{a}_V) \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{ref} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (4.34)$$

Calcolando la derivata temporale di (4.25) e utilizzando (4.34) segue che:

$$\dot{\mathbf{a}}_V = -\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{4} \mathbf{a}_V \mathbf{a}_V^T \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \mathbf{a}_V \times \boldsymbol{\omega} \quad (4.35)$$

Infine (4.35) può essere approssimata come:

$$\dot{\mathbf{a}}_V \simeq -\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \mathbf{a}_V \times \boldsymbol{\omega} \quad (4.36)$$

4.5 Discretizzazione

Per poter utilizzare le formule del filtro di Kalman esteso, le equazioni che esprimono l'evoluzione degli stati del modello devono essere discretizzate e organizzate come in (4.12). Introducendo il periodo T , le (4.5), (4.6) e (4.7) si discretizzano come:

$$v_x(k+T) = v_x(k) + T a_x \quad (4.37)$$

$$a_x(k+T) = a_x(k) \quad (4.38)$$

$$\omega_z(k+T) = \omega_z(k) \quad (4.39)$$

La (4.31) a tempo discreto risulta:

$$\mathbf{a}_A(k+T) = \mathbf{a}_A(k) \quad (4.40)$$

La (4.36) necessita di ulteriori passaggi algebrici. Essa può essere riscritta, utilizzando (4.4), come:

$$\dot{\mathbf{a}}_V \simeq \left(-I_{3 \times 3} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -a_{V,3} & a_{V,2} \\ a_{V,3} & 0 & -a_{V,1} \\ -a_{V,2} & a_{V,1} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} = \omega_z \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}a_{V,2} \\ \frac{1}{2}a_{V,1} \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

dove $a_{V,1}$, $a_{V,2}$ e $a_{V,3}$ sono le componenti di \mathbf{a}_V . Utilizzando l'approssimazione:

$$\dot{\mathbf{a}}_V = \frac{\mathbf{a}_V(k+T) - \mathbf{a}_V(k)}{T} \quad (4.42)$$

possiamo scrivere:

$$\mathbf{a}_V(k+T) = \mathbf{a}_V(k) + T\dot{\mathbf{a}}_V \quad (4.43)$$

Combinando (4.41) e (4.43), e supponendo ω_z costante all'interno di un periodo T , risulta:

$$\mathbf{a}_V(k+T) = \mathbf{a}_V(k) + T\omega_z(k) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}a_{V,2} \\ \frac{1}{2}a_{V,1} \\ -1 \end{bmatrix} = \quad (4.44)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\omega_z(k)\frac{T}{2} & 0 \\ \omega_z(k)\frac{T}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{a}_V(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_z(k)T \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Rielaborando opportunamente le forme a tempo discreto delle equazioni dinamiche del modello si ottiene:

$$\mathbf{x}(k+T) = F(\mathbf{x}(k))\mathbf{x}(k) + L(x(k)) \quad (4.46)$$

dove:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} v_x(k) & a_x(k) & \omega_z(k) & \mathbf{a}_V^T(k) & \mathbf{a}_A^T(k) \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$F(\mathbf{x}(k)) = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ 0 & F_2(\mathbf{x}(k)) & 0 \\ 0 & 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$F_2(\mathbf{x}(k)) = \begin{bmatrix} 1 & -\omega_z(k)\frac{T}{2} & 0 \\ \omega_z(k)\frac{T}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$L(x(k)) = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 1} \\ -\omega_z(k)T \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

4.6 Modello delle misure

Per poter utilizzare i dati provenienti dai vari sensori all'interno del filtro di Kalman esteso (e modificato secondo l'approccio del MEKF), è necessario creare un modello che metta in relazioni le variabili di stato del sistema dinamico con i valori misurati.

Essendo la natura dei sensori in gioco differente, essi forniscono misure relative a sistemi di riferimento diversi.

L'accelerometro fornisce misure relative al A-frame e registra sia l'accelerazione statica di gravità sia le accelerazioni dinamiche che interessano il moto del veicolo. L'accelerazione di gravità è diretta lungo l'asse z del T-frame, da cui:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}_{T-frame} \quad (4.52)$$

Le accelerazioni dinamiche, applicate al centro di massa del veicolo, possono essere rappresentate nel V-frame come:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_c \\ 0 \end{bmatrix}_{V-frame} \quad (4.53)$$

dove a_x raccoglie le accelerazioni e decelerazioni del veicolo che si suppone avvengano lungo la direzione dell'asse x. La componente a_c rappresenta invece il modulo dell'accelerazione centripeta che si sviluppa nei cambi di direzione. Quando un veicolo curva a velocità costante il suo centro di massa si muove lungo un arco di circonferenza con centro O e raggio di curvatura R . R è dato dalla distanza tra O e il centro di massa. L'accelerazione centripeta è un vettore con direzione pari alla congiungente di O ed il centro di massa del veicolo e con modulo:

$$a_c = \frac{v_x^2}{R} = \omega_z v_x \quad (4.54)$$

In (4.53) si assume che l'accelerazione centripeta agisca solo lungo l'asse y del V-frame. In realtà, come mostrato in Figura 4.1, un modello più accurato del veicolo dovrebbe tener conto anche dell'angolo tra la direzione dell'accelerazione centripeta e l'asse y del veicolo. I dettagli relativi a questi modelli più complessi si

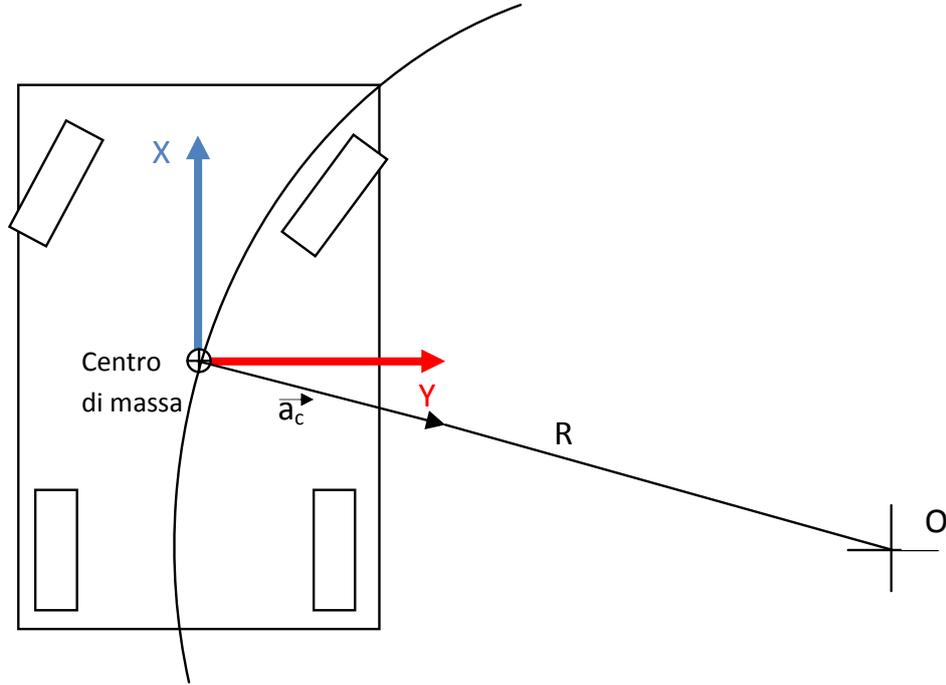


Figura 4.1: Direzione dell'accelerazione centripeta rispetto agli assi di un veicolo durante una curva di raggio R .

possono trovare in [13]. Tale angolo varia in funzione della velocità con cui la curva viene affrontata, in base alle caratteristiche della curva stessa e dei parametri geometrici che caratterizzano il veicolo (lunghezza, interasse, posizione del centro di massa). Trascurarlo non pregiudica i risultati delle stime essendo esso parte dell'incertezza del modello.

Il vettore delle accelerazioni nell'A-frame si ottiene sfruttando le relazioni tra i diversi sistemi di riferimento:

$$\mathbf{y}_{accel,A-frame} = R_V^A R_T^V \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + R_V^A \begin{bmatrix} a_x \\ -\omega_z v_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Parametrizzando le matrici di rotazione con i quaternioni \mathbf{q}_V e \mathbf{q}_A , ed applicando le sostituzioni (4.28) e (4.27), si ottiene:

$$\mathbf{y}_{accel,A-frame} = R^T(\mathbf{q}_{A,ref})R^T(\delta\mathbf{q}(\mathbf{a}_A))R^T(\mathbf{q}_{V,ref})R^T(\delta\mathbf{q}(\mathbf{a}_V)) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$+ R^T(\mathbf{q}_{A,ref})R^T(\delta\mathbf{q}(\mathbf{a}_A)) \begin{bmatrix} a_x \\ -\omega_z v_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Secondo il modello dinamico adottato, il veicolo si muove solamente lungo l'asse x del V-frame. Il vettore delle velocità riferito al V-frame risulta quindi:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{V-frame} \quad (4.58)$$

I dati sulla velocità provenienti dal GPS sono invece riferiti al T-frame. Agendo come fatto in precedenza per le misure dell'accelerometro:

$$\mathbf{y}_{speed,T-frame} = R(\delta\mathbf{q}(\mathbf{a}_V))R(\mathbf{q}_{V,ref}) \begin{bmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Il sistema GPS fornisce inoltre un'ulteriore misura, il *course angle*. Esso è la misura dell'angolo tra la direzione del moto e l'asse del T-frame corrispondente al Nord geografico. È possibile ottenere una stima della velocità angolare ω_z del veicolo utilizzando due misure successive del *course angle* e il tempo intercorso tra di esse. Il dato così ottenuto è un'osservazione diretta di uno stato del sistema dinamico e possiamo quindi scrivere:

$$y_\omega = \omega_z \quad (4.60)$$

Il modello completo che mette in relazione le misure disponibili con gli stati del sistema risulta quindi:

$$\mathbf{y}(k) = h(\mathbf{x}(k), \mathbf{q}_{V,ref}, \mathbf{q}_{A,ref}) \quad (4.61)$$

dove:

$$h(\mathbf{x}(k)) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{accel,A-frame}(k) \\ \mathbf{y}_{speed,T-frame}(k) \\ y_{\omega}(k) \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

GPS e accelerometri forniscono i rispettivi dati a frequenze diverse. Gli accelerometri attualmente in commercio utilizzano frequenze di campionamento tipicamente attorno ai 200 Hz, mentre i dati forniti da un sistema GPS difficilmente superano i 5 Hz. Per poter utilizzare entrambe le misure nello stesso algoritmo si può procedere in due modi differenti:

- utilizzare i dati accelerometrici alla frequenza dei dati GPS, utilizzando algoritmi di decimazione e scartando gran parte delle misure dell'accelerometro;
- estendere i dati GPS nel tempo tramite algoritmi di interpolazione e campionare in seguito con la stessa frequenza dei dati accelerometrici.

È evidente che la seconda soluzione impone un carico computazionale non indifferente per il calcolatore: con una frequenza di 200 Hz i nuovi dati devono essere processati ogni 5 *ms* mediante le formule dell'EKF. Talvolta, specie lavorando con micro-processori dalla limitata potenza di calcolo, tali frequenze di lavoro sono improponibili. Inoltre si può verificare che da tale approccio non si hanno particolari vantaggi dal punto di vista dei risultati finali. Infatti, utilizzare i dati accelerometrici alla massima frequenza possibile risulta inutile o addirittura deleterio viste le frequenze tipiche con cui variano le variabili del sistema dinamico in esame.

Le misure che si ottengono da un accelerometro fissato al telaio di un'auto sono soggette a una serie di disturbi di vario genere che si sommano ai segnali caratteristici della dinamica del veicolo. L'interazione tra l'auto e il manto stradale è la principale fonte di rumore nelle misure, in quanto provoca vibrazioni nel telaio del veicolo. In [14] queste vibrazioni vengono caratterizzate in base alla loro frequenza propria:

- 1-3 Hz : vibrazione delle masse sospese ¹ ed oscillazioni verticali e rotatorie attorno agli assi principali;
- 4-8 Hz: vibrazioni delle ruote a velocità basse;
- 10-20 Hz: vibrazioni delle masse sospese e non sospese a medie ed alte velocità, vibrazioni dovute a motore e trasmissione, vibrazioni del telaio e degli assi delle ruote.

¹Le masse sospese sono le porzioni del veicolo sorrette dalle sospensioni

Utilizzando un filtro passa basso decimatore sui dati accelerometrici si eliminano gran parte dei disturbi dovuti alle vibrazioni. In Figura 4.2 viene illustrato il risultato della decimazione con fattore 50 sulle misure a 200 Hz relative all'asse longitudinale del veicolo. Si può concludere quindi che la scelta di processare le misure di accelerometro e GPS alla frequenza dei dati GPS (4 Hz) non pregiudica i risultati delle stime.

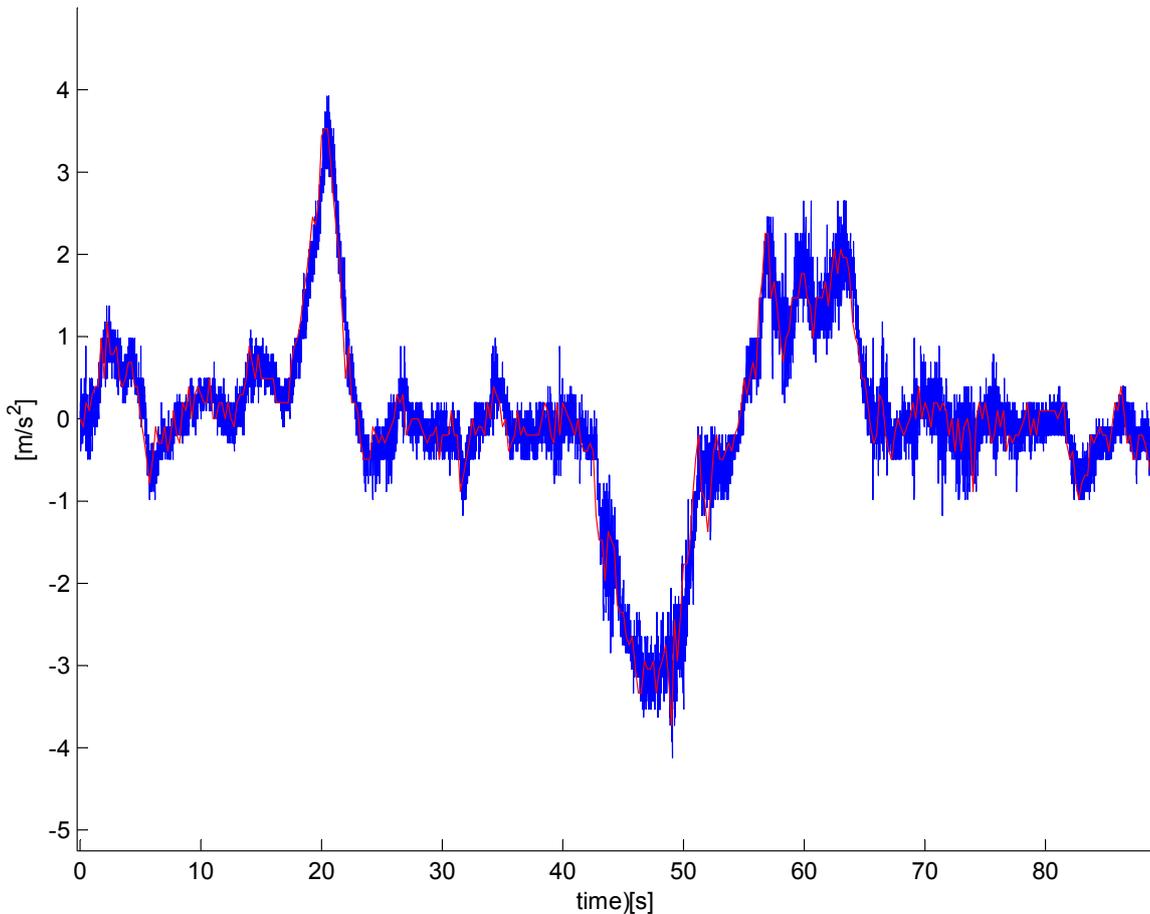


Figura 4.2: Misure dell'accelerazione longitudinale del veicolo con frequenza di acquisizione 200 Hz (linea blu) e relativa decimazione con fattore 50 (linea rossa).

4.7 Modello dei rumori

I rumore di processo \mathbf{w} e di misura \mathbf{v} , introdotti in 4.1, sono modellati come vettori di rumore bianco con distribuzione di probabilità di tipo Gaussiano a media nulla e con matrici di covarianza rispettivamente Q_w ed R_v . \mathbf{w} e \mathbf{v} sono considerati tra loro indipendenti, ossia dal punto di vista probabilistico non sono influenzati l'uno dall'altro.

La matrice G introdotta in (4.1), modella il modo in cui le componenti del vettore \mathbf{w} incidono sugli stati del sistema. Essa è una matrice quadrata di dimensione pari alla dimensione del vettore degli stati. Quando non è nota essa viene solitamente scelta diagonale ².

In [8] si utilizza una matrice diagonale funzione degli stati del sistema. Essa inibisce l'aggiunta di rumore nelle situazioni in cui alcuni stati del sistema diventino non osservabili, ossia non possano essere stimati con le misure in possesso.

Con questi accorgimenti risulta:

$$G(\mathbf{x}(k)) = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_z I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_z I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Ed il modello complessivo del sistema può essere riscritto come:

$$\mathbf{x}(k+T) = F(\mathbf{x}(k))\mathbf{x}(k) + L(x(k)) + G(\mathbf{x}(k))\mathbf{w}(k) \quad (4.64)$$

$$\mathbf{y}(k) = h(\mathbf{x}(k), \mathbf{q}_{V,ref}, \mathbf{q}_{A,ref}) + \mathbf{v}(k) \quad (4.65)$$

In generale le caratteristiche dei rumori \mathbf{w} e \mathbf{v} non sono parametri noti. Il problema di definire i valori per le matrici di covarianza Q_w ed R_v può essere affrontato in diversi modi. Uno degli approcci più eleganti è l'utilizzo del filtro di Kalman adattativo ([15]), la cui implementazione per sistemi con forti non-linearità può risultare però difficoltosa. Il modo di procedere più diffuso, invece, è quello di scegliere tali matrici come diagonali o diagonale a blocchi e di assegnarne i valori in maniera sperimentale, effettuando una sorta di *tuning* su di essi.

La matrice Q_w ha la forma:

$$Q_w = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_4 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

²Una matrice diagonale è una matrice quadrata con elementi non nulli solo lungo la diagonale

dove:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 \frac{T^3}{3} & \sigma_a^2 \frac{T^2}{2} \\ \sigma_a^2 \frac{T^2}{2} & \sigma_a^2 T \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$Q_2 = \sigma_{w_z}^2 \quad (4.68)$$

$$Q_3 = \sigma_{a_V}^2 I_{3 \times 3} \quad (4.69)$$

$$Q_4 = \sigma_{a_A}^2 I_{3 \times 3} \quad (4.70)$$

con $\sigma_a^2, \sigma_{w_z}^2, \sigma_{a_V}^2$ e $\sigma_{a_A}^2$ varianze delle componenti di \mathbf{w} . Per la definizione di Q_1 si è utilizzato il *Wiener-Process Acceleration Model* che permette di assegnare la matrice delle covarianze Q in un modello cinematico lineare del secondo ordine utilizzando un solo parametro, σ_a^2 . Per i dettagli su questo argomento si rimanda a [16].

La matrice R_v è scelta invece come:

$$R_v = \begin{bmatrix} \sigma_{accl}^2 I_{3 \times 3} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{GPS, speed}^2 I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{GPS, \omega}^2 I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

con σ_{accl}^2 , $\sigma_{GPS, speed}^2$ e $\sigma_{GPS, \omega}^2$ varianze dei rumori presenti nelle misure dell'accelerometro e del GPS.

Nel capitolo successivo viene descritta la fase della raccolta dei dati necessaria al lavoro di *tuning*, le note sull'implementazione e le soluzioni pensate per risolvere i problemi riscontrati nel funzionamento dell'algoritmo.

Capitolo 5

Risultati

Per poter effettivamente implementare sul dispositivo TMD2 l'algoritmo introdotto in [8], è necessario prima valutarne l'efficacia e sottolinearne gli aspetti negativi tramite simulazione. Il software Matlab permette di osservare il comportamento dell'algoritmo sulla base di dati reali e settarne opportunamente i parametri fino ad ottenere risultati soddisfacenti.

5.1 Acquisizione dati

Per dati reali si intendono le misure GPS e accelerometriche ottenute fissando il TMD2 all'interno del veicolo, in una determinata orientazione rispetto ad esso, ed avviando un programma appositamente sviluppato per sincronizzare e registrare i dati dai sensori. Il programma citato, sviluppato in TEXA, acquisisce i dati accelerometrici con periodo $T_{acc} = 0.005 \text{ ms}$ e la stringa di dati GPS con periodo $T_{GPS} = 0.25 \text{ ms}$, accorpando le due informazioni in un'unica stringa qualora i riferimenti temporali delle due misure coincidano con un certo grado di sfasamento. Il risultato di questa operazione è un file di testo dove i dati sono organizzati sotto forma di stringhe. Un esempio di stringa e dell'organizzazione dei dati al suo interno è riportato in Figura 5.1), dove:

- *sample number* è l'indicazione del numero di stringhe acquisite;
- *OSTime* è un indicazione temporale fornita in *ms* in riferimento all'inizio della sessione di acquisizione dati;
- *Longitudine*, *Latitudine* sono le coordinate GPS fornite in gradi decimali;
- *Altitudine* è l'indicazione della quota della posizione GPS in riferimento al livello del mare, espressa in metri. Per indicarla useremo il simbolo h_{GPS} ;

- *Speed over ground* è la velocità di movimento del ricevitore GPS sul piano del T-frame, fornita in Km/h . Per semplificarne la trattazione verrà indicata con v_{GPS} ;
- *Course angle* è l'angolo tra la direzione di spostamento e l'asse del T-frame relativo al Nord geografico, calcolato in senso antiorario e fornito in gradi. Nel seguito verrà indicato col simbolo ψ_{GPS} ;
- *fix* è un indicazione sullo stato del segnale GPS. Quando vale 1 i dati GPS sono disponibili.

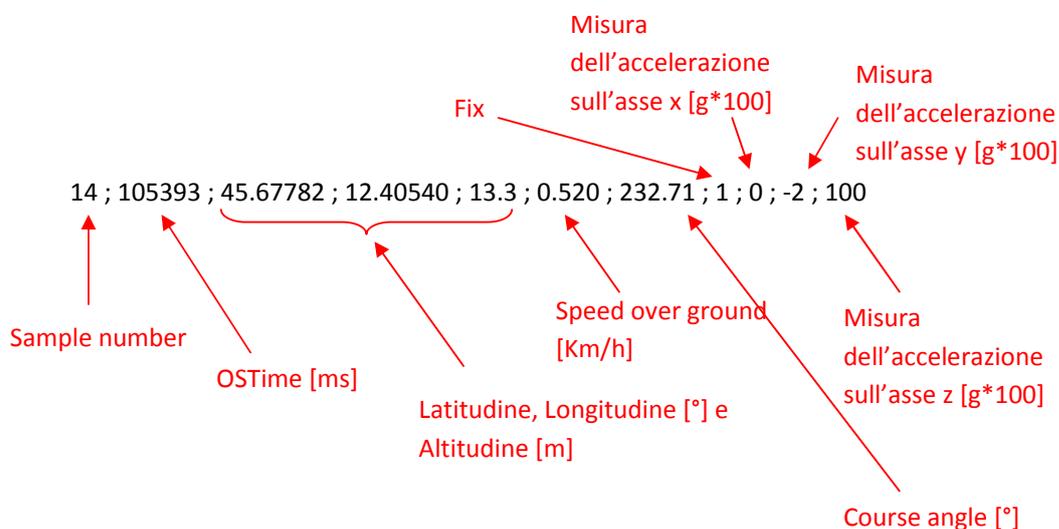


Figura 5.1: Stringa di dati.

Infine gli ultimi tre valori sono le misure dell'accelerometro relative ai suoi tre assi, fornite come valore in percentuale in riferimento all'accelerazione di gravità (ad esempio, un valore pari a 100 equivale a una volta il valore dell'accelerazione di gravità, ossia $g \simeq 9.81 \text{ m/s}^2$).

Elaborando le informazioni contenute all'interno della stringa di dati presentata è possibile organizzare le misure sotto forma di vettori da utilizzare nelle formule del filtro di Kalman. Facendo riferimento alle nozioni introdotte in 4.6, il vettore delle misure $\mathbf{y}_{accel,A-frame}(k)$ contiene le tre misure fornite dall'accelerometro all'istante k , mentre le tre componenti del vettore $\mathbf{y}_{speed,T-frame}(k)$ si ottengono come:

$$\mathbf{y}_{speed,T-frame}(k) = \begin{bmatrix} v_{GPS}(k) \cos(\psi_{GPS}(k)) \\ -v_{GPS}(k) \sin(\psi_{GPS}(k)) \\ \frac{h_{GPS}(k) - h_{GPS}(k-1)}{OSTime(k) - OSTime(k-1)} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Le prime due componenti di (5.1) si basano sulla proiezione della v_{GPS} sugli assi x ed y del T-frame, utilizzando l'angolo ψ_{GPS} . La terza componente è la velocità di spostamento lungo l'asse z del T-frame, ottenuta dalla differenza di altitudine tra due successive posizioni ed il tempo intercorso tra di esse.

Infine, utilizzando ancora una volta il *Course angle*:

$$y_{\omega}(k) = \frac{\psi_{GPS}(k) - \psi_{GPS}(k-1)}{OSTime(k) - OSTime(k-1)} \quad (5.2)$$

Una semplice routine Matlab permette di rielaborare i file di testo prodotti dal software di acquisizione e organizzarli come appena illustrato.

Essendo lo scopo dell'algoritmo quello di stimare gli angoli di installazione del TMD2 all'interno del veicolo, per valutare la bontà o meno dei risultati ottenuti in fase di simulazione, è necessario conoscere con precisione tali angoli. Ossia, ogni sessione di acquisizione dati deve essere preceduta da un accurato lavoro di misurazione degli angoli di installazione. Tale lavoro fornirà i riferimenti necessari a giudicare le stime ottenute dalla simulazione.

A tale scopo è stata pensata e costruita una piattaforma rotante con tre gradi di libertà, in grado di orientare il TMD2 a seconda della terna di angoli scelta. Un braccio con due giunti mobili sorregge e mantiene fissa la piattaforma conferendogli due gradi di libertà, ossia i due angoli che ne determinano l'inclinazione rispetto al suolo. Essi possono essere misurati sfruttando i valori forniti da un inclinometro a due assi, posto in maniera opportuna sopra la piattaforma. Il braccio è solidale a una cilindro su cui è fissato un goniometro. La struttura è posta su una base e può ruotare rispetto ad essa. L'entità della rotazione, fornita dal goniometro, rappresenta il terzo grado di libertà. La base deve essere posizionata su una superficie piana all'interno dell'abitacolo e allineata rispetto agli assi del veicolo. La Figura 5.2 mostrata la piattaforma descritta durante una sessione di acquisizione dati.

La procedura di posizionamento del TMD2 e di misurazione degli angoli presenta alcuni problemi:

- trovare una superficie piana all'interno dell'abitacolo, per posizionare la base della piattaforma, è un'operazione spesso complicata;
- gli angoli forniti dall'inclinometro rappresentano l'inclinazione della piattaforma rispetto al suolo, ossia rispetto al piano individuato dagli assi x ed y del T-frame. Affinchè essi possano essere considerati riferiti al V-frame, il veicolo deve essere posto su una superficie il più piana possibile;
- gli errori di allineamento della base della struttura con gli assi del veicolo si ripercuotono sulla misura fornita dal goniometro.

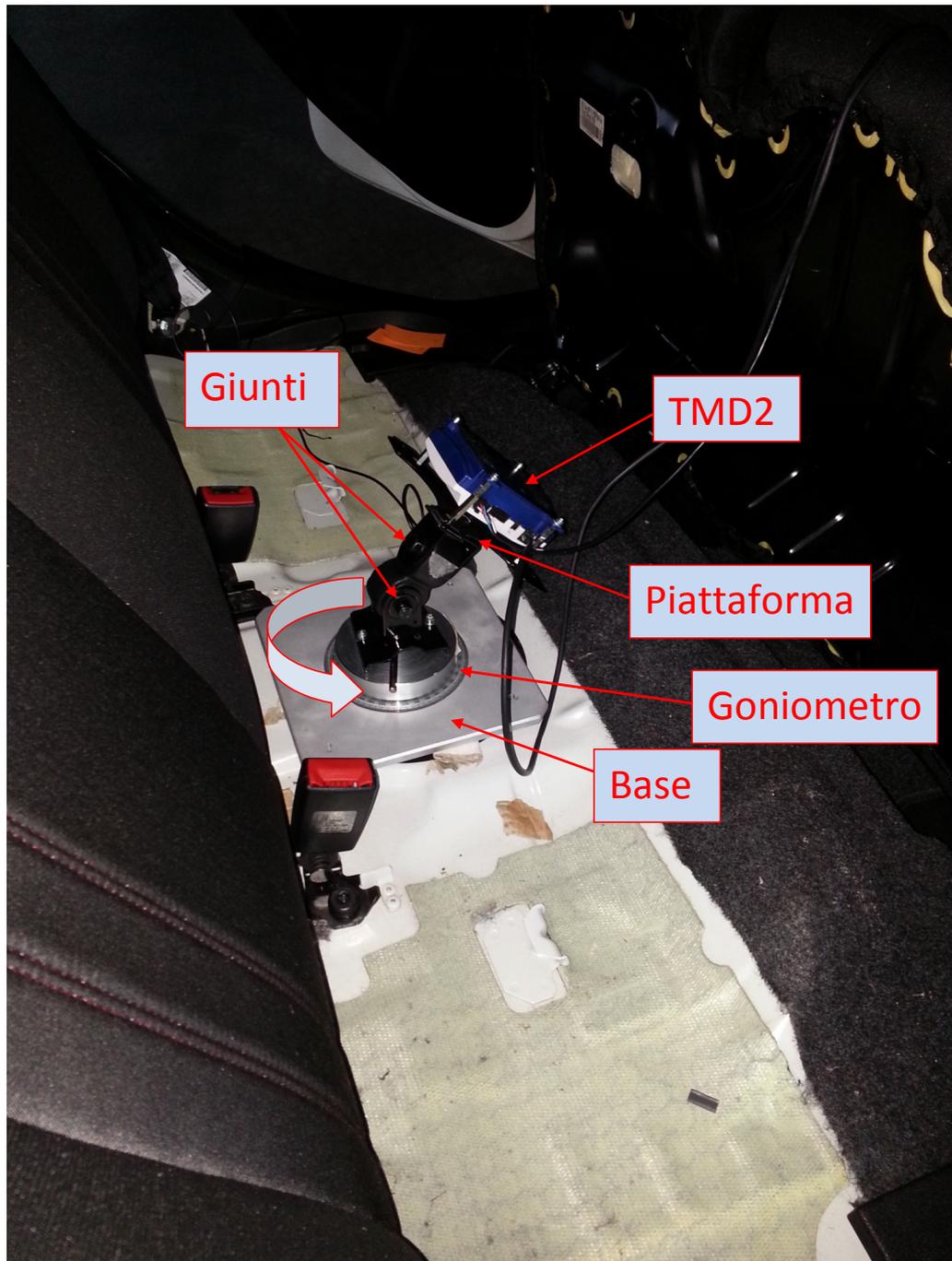


Figura 5.2: Piattaforma per il posizionamento del TMD2.

Nelle sessioni di acquisizioni dati si è posta particolare attenzione nel ricreare la maggior quantità possibile di situazioni riscontrabili nella realtà, variando:

- il tipo di percorso: percorso con molte curve, percorso perfettamente dritto, percorso in salita o in discesa;

- le condizioni stradali: strada con o senza buche;
- tipologia di guida: guida scattosa o rilassata, velocità di percorrenza delle curve, entità delle frenate e delle accelerate;
- l'orientazione del TMD2.

Intuitivamente, maggiore è la varietà dei dati acquisiti, maggiore è la probabilità di riscontrare lacune o comportamenti patologici dell'algoritmo e di settarne opportunamente i parametri. Come sarà chiaro nel seguito, i dati acquisiti da un percorso perfettamente dritto non portano agli stessi risultati di un percorso con molte curve. I casi limite sono fondamentali perché permettono di capire fino a che punto l'algoritmo è da ritenersi affidabile e dove intervenire per migliorarne il comportamento.

5.2 Simulazioni in Matlab

Nell'implementazione dell'algoritmo di stima in Matlab si è fatto uso delle formule dell'EKF, presentate in 4.3, applicate alle equazioni del sistema complessivo riportate in (4.65) e (4.64). Il calcolo delle Jacobiane è stato eseguito utilizzando le funzioni apposite già presenti all'interno di Matlab.

Essendo il filtro di Kalman un algoritmo ricorsivo lo stato del sistema, i quaternioni di riferimento e la matrice di covarianza dell'errore di stima devono essere inizializzati. Si è scelto di inizializzare tali valori come segue:

- $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbf{0}_{9 \times 1}$;
- $\mathbf{q}_{V,ref} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$;
- $\mathbf{q}_{A,ref} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$;
- $P_{0|0} = Q_w$.

Concluse le fasi di predizione e aggiornamento, seguendo il principio di funzionamento dell'MEKF, i quaternioni di riferimento $\mathbf{q}_{V,ref}$ e $\mathbf{q}_{A,ref}$ vengono aggiornati utilizzando le stime correnti di \mathbf{a}_V e \mathbf{a}_A . Il quaternionone $\mathbf{q}_{A,ref}(k)$ è il risultato della stima degli angoli di installazione dopo k campioni, dove con k si intende il numero di iterazioni o cicli eseguiti tramite filtro di Kalman. Le componenti di $\mathbf{q}_{A,ref}(k)$ possono essere considerati il metro di misura per valutare l'esito complessivo dell'algoritmo di stima, essendo essi valori confrontabili con gli angoli di installazioni misurati (come illustrato in 5.1). Questi ultimi devono essere prima convertiti in un quaternionone unitario, in simboli $\mathbf{q}_{measured}$, che esprima la

σ_a^2	10
σ_{wz}^2	$5 * 10^{-3}$
σ_{aV}^2	10^{-4}
σ_{aA}^2	0.1
σ_{accl}^2	15
$\sigma_{GPS,speed}^2$	0.3
$\sigma_{GPS,\omega}^2$	2

Tabella 5.1: Valori individuati per le matrici Q_w e R_v .

medesima orientazione parametrizzata dai tre angoli. Le formule impiegate per tale procedimento sono riportate in Appendice C. Poiché $\mathbf{q}_{measured}$ e $-\mathbf{q}_{measured}$ rappresentano la stessa orientazione entrambe sono valori validi per $\mathbf{q}_{A,ref}(k)$. Osservando l'andamento delle componenti del quaternion $\mathbf{q}_{A,ref}(k)$ in riferimento ai valori delle componenti di $\mathbf{q}_{measured}$ al variare dei parametri delle matrici Q_w ed R_v , si è completata in maniera opportuna la fase di *tuning*. Si tralasciano i particolari riguardanti questa fase, essendo esso poco significativo vista la base empirica su cui si fonda. I parametri individuati sono quelli che, oltre a portare a delle stime corrette, offrono risultati accettabili sia nei tempi di convergenza sia nei tempi di assestamento. I primi identificano i tempi impiegati dalle componenti di $\mathbf{q}_{A,ref}$ per avvicinarsi ai valori di $\mathbf{q}_{measured}$ e i secondi fanno riferimento ai tempi per assestarsi attorno a tali valori in maniera stabile. I valori individuati sono riportati in Tabella 5.1.

Si è notato che nonostante gli sforzi nella fase di *tuning*, elaborando i dati acquisiti in situazioni di guida particolari, le componenti di $\mathbf{q}_{A,ref}$ non solo avevano lunghi tempi di convergenza ma si assestavano a valori diversi da quelli di $\mathbf{q}_{measured}$. Questo dimostra il forte contributo che le caratteristiche del percorso e lo stile di guida hanno sui risultati dell'algoritmo ed evidenzia come i dati acquisiti tramite accelerometro e GPS non sempre offrono le informazioni sufficienti per elaborare delle stime corrette.

5.2.1 Analisi dell'osservabilità

Il concetto di osservabilità (in k passi) applicato a un sistema dinamico si riferisce alla possibilità di ricostruire le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0)$, supposte incognite, a partire dalle misure delle variabili accessibili del sistema dall'istante 0 all'istante k . Nel campo della stima con il filtro di Kalman tale concetto può essere esteso alla possibilità di stimare gli stati di un sistema ed i parametri che lo identificano utilizzando una serie di misure fino all'istante k . Si vorrebbe in questo modo caratterizzare la bontà o meno dei dati utilizzati in un determinato intervallo

temporale e verificare se essi sono sufficienti alla ricostruzione dei parametri di interesse. Intuitivamente, situazioni in cui il veicolo è fermo o si muove su percorsi rettilinei non forniscono informazioni sufficienti a distinguere tra un'orientazione e l'altra dell'accelerometro. Per verificare ciò si è utilizzato la metodologia illustrata in [17], dove si dimostra che l'autovalore più grande della matrice $P_{k|k}$ è la varianza dello stato o della combinazione degli stati che sono scarsamente osservabili con i dati precedenti all'istante k . Questo fatto suggerisce come sia possibile ottenere informazioni sul grado di osservabilità del sistema semplicemente osservando gli autovalori della matrice di covarianza dell'errore di stima. Risulta conveniente normalizzare tale matrice in modo da fornire un determinato intervallo di variabilità per i suoi autovalori. Sfruttando il fatto che la traccia di una matrice, ossia la somma degli elementi sulla diagonale, è pari alla somma degli autovalori, $P_{k|k}$ può essere normalizzata come:

$$P'_{k|k} = \frac{n}{\text{traccia}(P_{k|k})} P_{k|k} \quad (5.3)$$

Gli autovalori di $P'_{k|k}$ ora variano da 0 a n dove n è la dimensione della matrice. Tracciando il comportamento dell'autovalore più grande della matrice $P'_{k|k}$ si ha un'idea del grado di osservabilità del sistema sulla base delle misure utilizzate fino all'istante k . Quando tale autovalore si avvicina al valore di n esso identifica un pessimo grado di osservabilità. Questo procedimento non è parte essenziale dell'algorithm ma serve a verificare in maniera semplice ed immediata le iniziali congetture sul mal funzionamento dell'algorithm in certe situazioni.

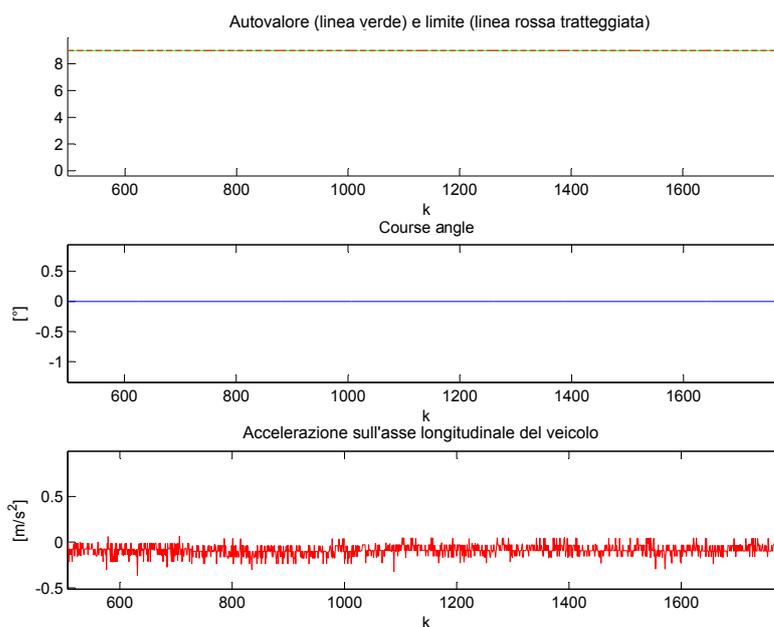


Figura 5.3: Analisi dell'osservabilità nel caso di veicolo fermo.

Si considerino due casi limite: una situazione in cui il veicolo è fermo ed una situazione in cui il veicolo si muove su una strada dritta. Nel primo caso il metodo descritto porta ai risultati di Figura 5.3: nel primo riquadro si mostra l'andamento dell'autovalore più grande della matrice $P_{k|k}$ in funzione degli istanti temporali k , mentre nei due grafici sottostanti si riportano il *course angle* e le misure accelerometriche relative all'asse longitudinale del veicolo. La scarsa osservabilità del sistema in questa situazione è evidenziata dall'andamento dell'autovalore di interesse, il quale va a sovrapporsi al valore di n (indicato con la linea rossa tratteggiata).

Nel secondo caso il veicolo si muove lungo il percorso di Figura 5.4. Il fatto

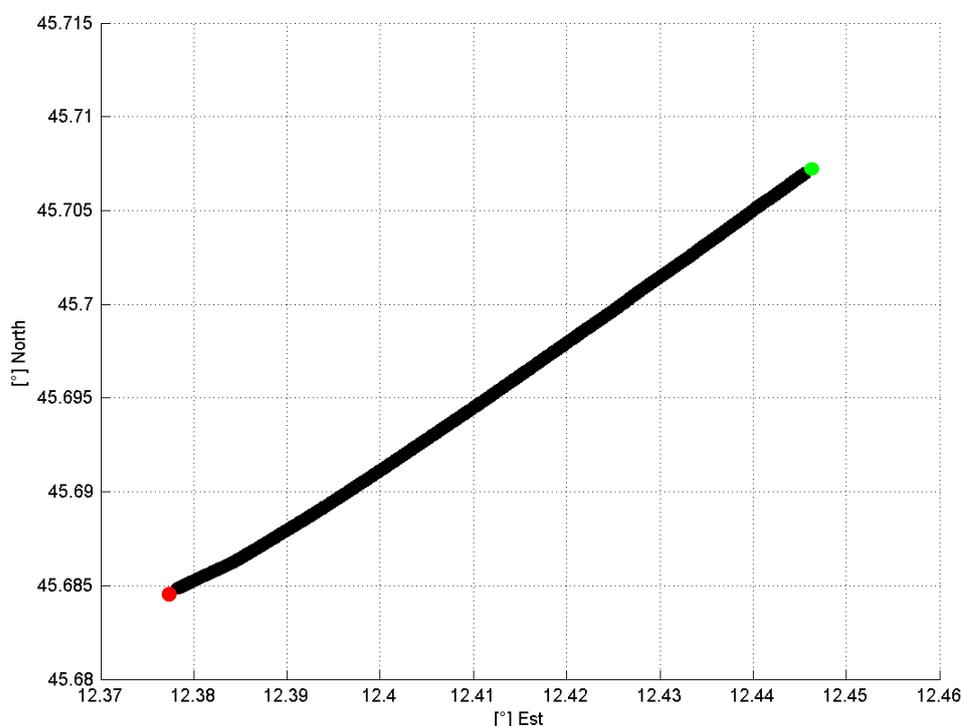


Figura 5.4: Percorso rettilineo. I punti di colore verde e rosso indicano rispettivamente la partenza e l'arrivo.

che il veicolo subisca accelerazioni longitudinali migliora il grado di osservabilità del sistema rispetto al caso precedente. Le accelerazioni laterali però sono ancora insufficienti a determinare in maniera univoca l'assetto del veicolo e gli angoli di installazione dell'accelerometro. In Figura 5.5 si riporta l'analisi dell'osservabilità nel caso in esame.

Infine, in Figura 5.7 si riporta la medesima analisi condotta per i casi limite ma riferita ora ad una situazione di guida con rapidi cambi di direzione. Il percorso seguito dal veicolo, mostrato in Figura 5.6 presenta una serie di curve che rendono il sistema completamente osservabile.

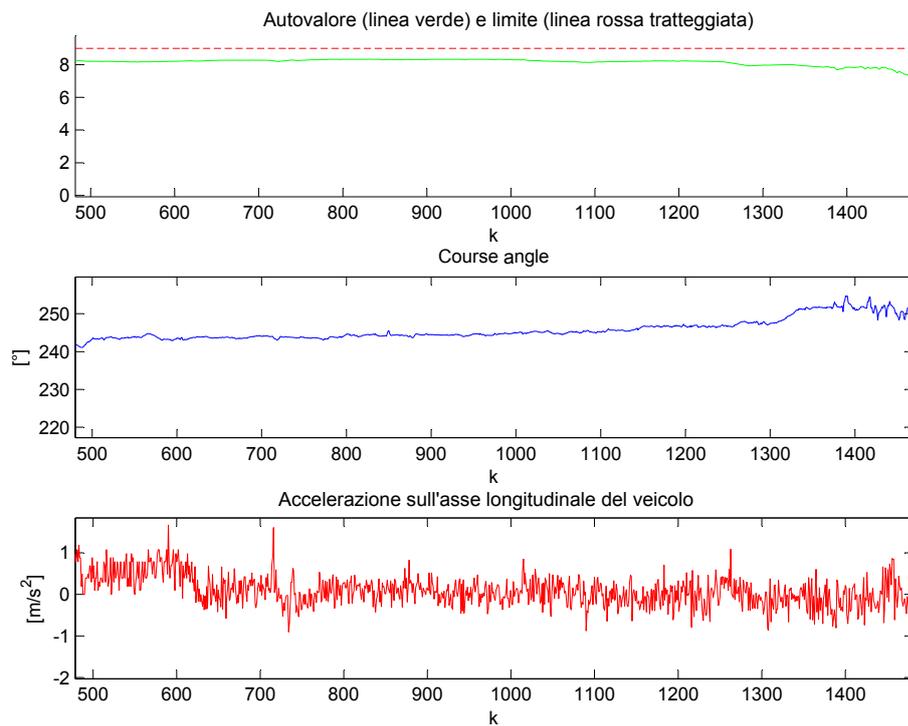


Figura 5.5: Analisi dell'osservabilità nel caso di percorso rettilineo.

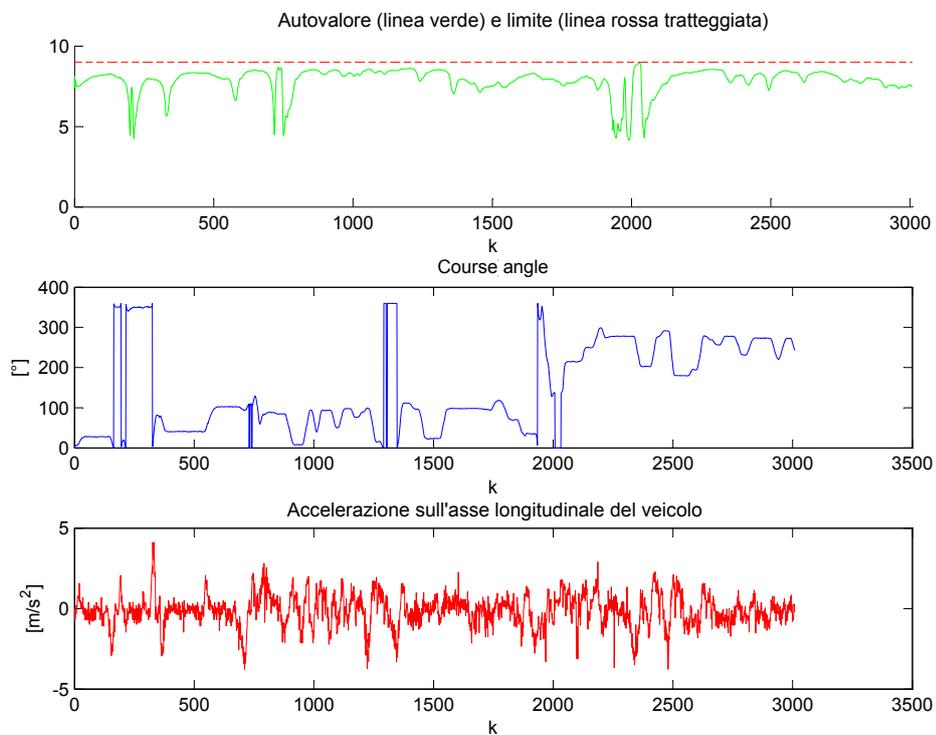


Figura 5.6: Analisi dell'osservabilità nel caso di un percorso con curve.

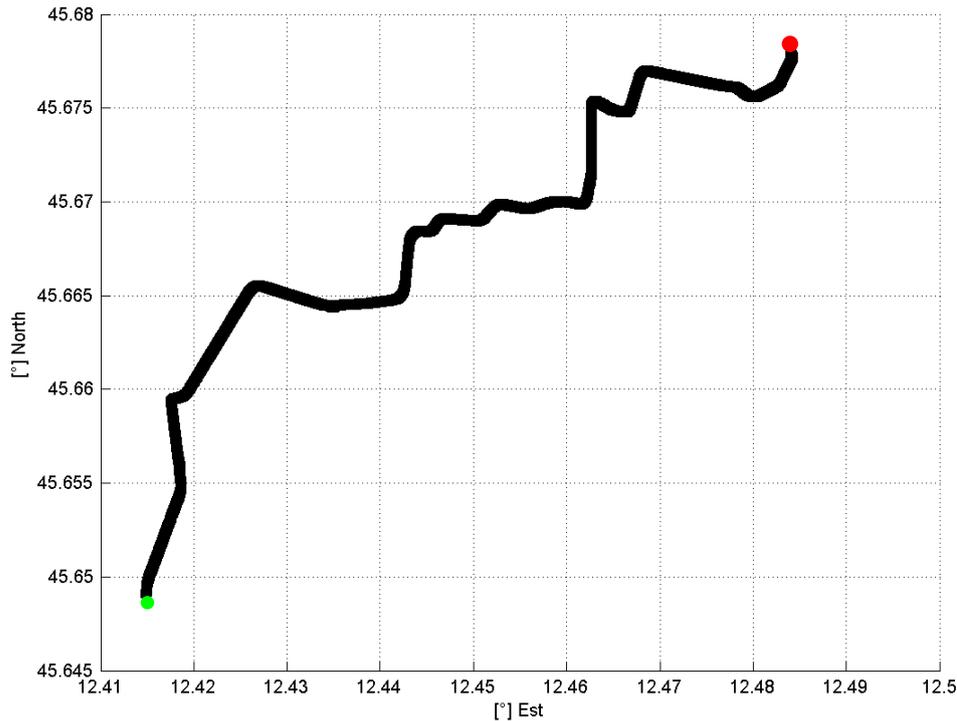


Figura 5.7: Percorso con curve. I punti di colore verde e rosso indicano rispettivamente la partenza e l'arrivo.

5.2.2 Analisi dei risultati e problemi riscontrati

Si riprendono ora i casi precedentemente introdotti analizzandoli dal punto di vista dei risultati sulle stime di $\mathbf{q}_{A,ref}$. Come spiegato in precedenza, ogni sessione di acquisizione dati per simulazione in Matlab è preceduta dalla misura degli angoli di installazione e la loro conversione in quaternioni unitari $\mathbf{q}_{measured}$. L'andamento delle componenti di $\mathbf{q}_{A,ref}$ in funzione del tempo trascorso dall'inizio delle elaborazioni vengono rappresentate assieme ai valori corrispondenti di $\mathbf{q}_{measured}$. Nei quattro grafici risultanti la componente i -esima di $\mathbf{q}_{A,ref}$ (indicata con $\mathbf{q}_{A,ref}^i$) dovrebbe tendere (convergere) al valore i -esimo di $\mathbf{q}_{measured}$ (indicata con $\mathbf{q}_{measured}^i$) o al suo opposto, come accennato nella sezione 5.2. Le componenti di $\mathbf{q}_{measured}$ e del suo opposto vengono rappresentate con colori rosso e verde rispettivamente, perciò in una simulazione corretta o tutte le componenti di $\mathbf{q}_{A,ref}$ convergono al riferimento rosso o tutte convergono al riferimento verde.

Per chiarezza nella presentazione dei risultati si è scelto di posizionare il TMD2 nella stessa orientazione in tutti e tre i casi: veicolo fermo, moto rettilineo e percorso con curve.

Gli angoli di installazione scelti sono:

- $\theta = -180^\circ$
- $\phi = 90^\circ$
- $\psi = 0^\circ$

Si è cercato di posizionare il dispositivo in tale orientazione in maniera più accurata possibile, con l'aiuto dell'inclinometro e del goniometro alla base della piattaforma. Tuttavia questa è una procedura manuale e, in quanto tale, soggetta ad errori e imprecisioni.

In Figura 5.8 si mostrano i risultati ottenuti nel caso di veicolo fermo.

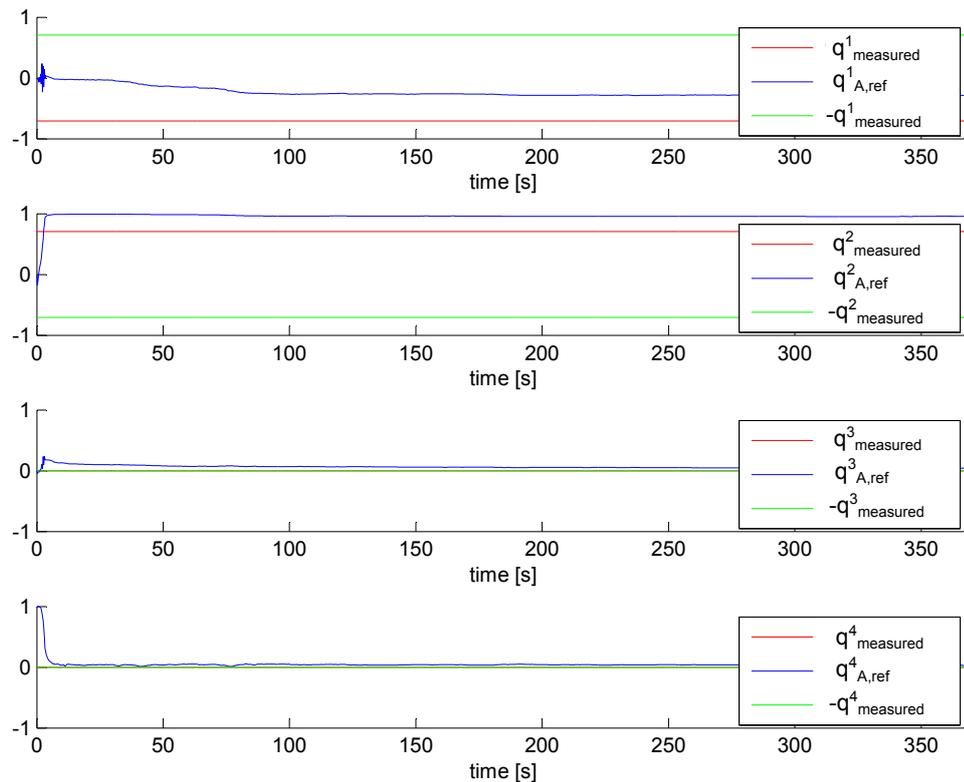


Figura 5.8: Andamento delle componenti di $\mathbf{q}_{A,ref}$ in una situazione di veicolo fermo.

Le componenti di $\mathbf{q}_{A,ref}$ oltre ad avere lunghi tempi di assestamento, convergono a valori errati. Dopo circa 95 secondi dall'inizio del processo di elaborazione dei dati, tempo necessario in questo caso all'assestamento delle stime, l'ultimo valore assunto da $\mathbf{q}_{A,ref}$ viene convertito in angoli ottenendo:

- $\hat{\theta} = 175.65^\circ$
- $\hat{\phi} = -46.77^\circ$
- $\hat{\psi} = -2.51^\circ$

In Figura 5.9 si riportano i risultati nel caso del percorso in Figura 5.4. Gli angoli ottenuti dalla conversione del valore di $\mathbf{q}_{A,ref}$ dopo 157 secondi sono:

- $\hat{\theta} = 172.38^\circ$
- $\hat{\phi} = -29.712^\circ$
- $\hat{\psi} = -9.779^\circ$

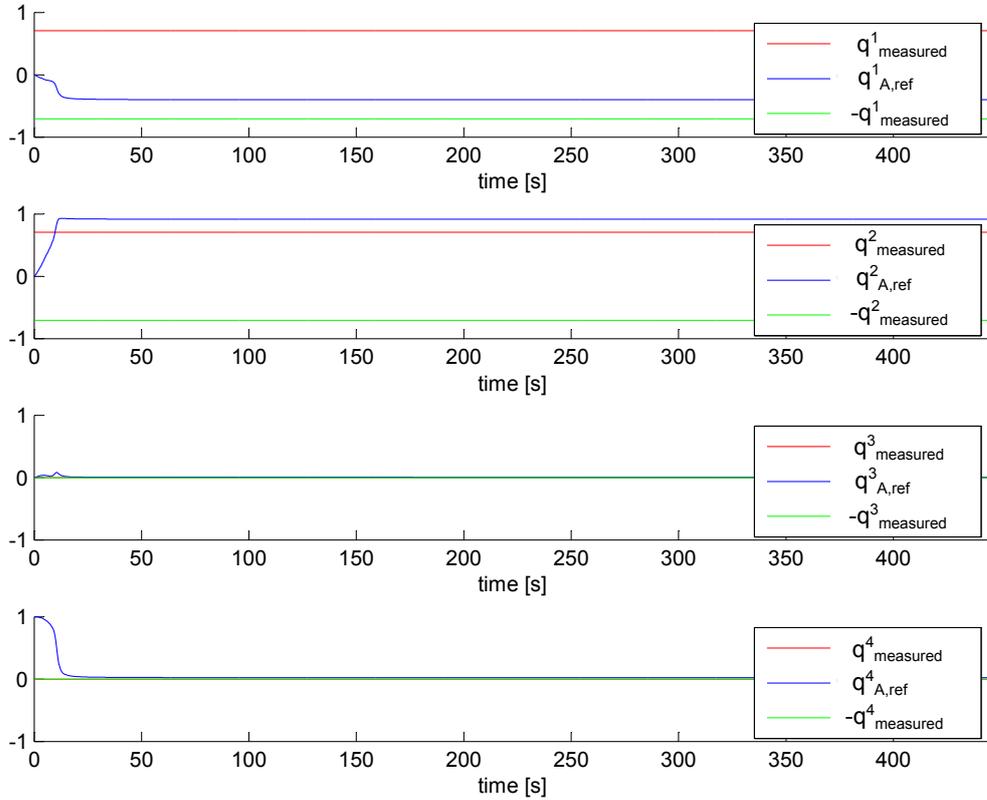


Figura 5.9: Andamento delle componenti di $\mathbf{q}_{A,ref}$ in una situazione di moto rettilineo.

La Figura 5.10 fa riferimento al percorso di Figura 5.7 e fornisce un esempio di stima corretta in un tempo di 57 secondi:

- $\hat{\theta} = -176.8^\circ$
- $\hat{\phi} = 90.02^\circ$
- $\hat{\psi} = 0.02^\circ$

Per concludere si riporta un caso in cui i risultati delle stime migliorano in maniera evidente da un certo istante in poi. In questo esempio il veicolo percorre una strada inizialmente dritta interrotta da una prima rotatoria solamente dopo diversi secondi. Il percorso è mostrato in Figura 5.11.

Durante il tratto rettilineo le componenti di $\mathbf{q}_{A,ref}$ si assestano attorno a valori errati, in linea con quanto illustrato in precedenza. Negli istanti successivi alla rotatoria le stime deviano dai valori precedenti fino ad assestarsi ai valori corretti. Tale comportamento è ben visibile in Tabella 5.2, dove si sono convertiti i diversi

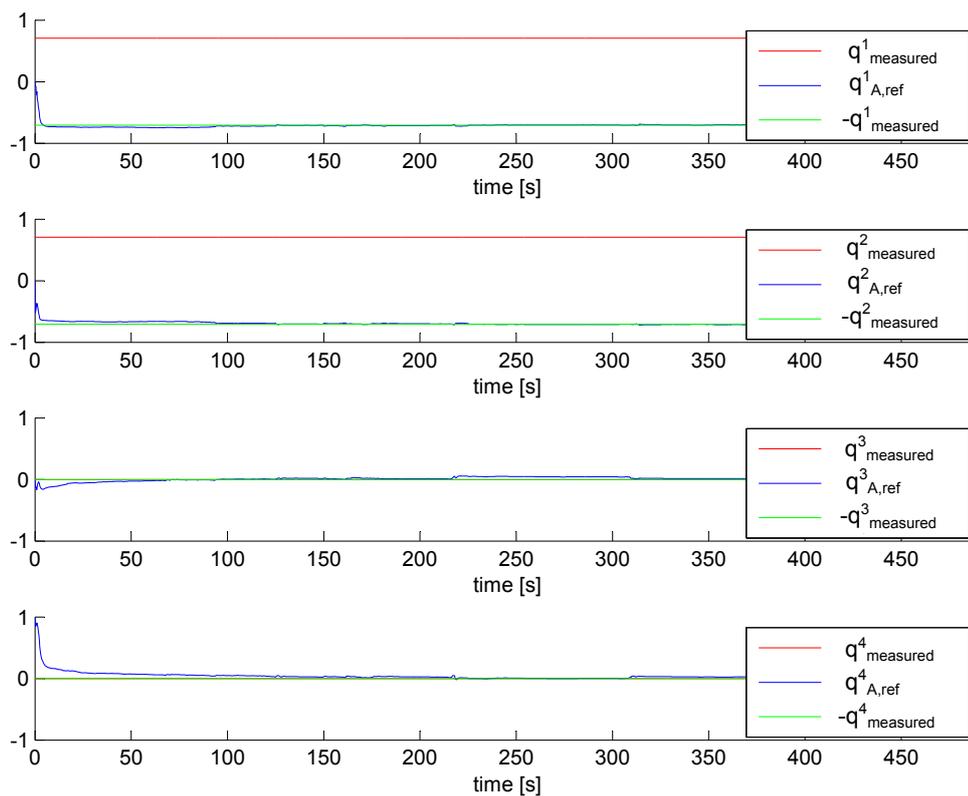


Figura 5.10: Andamento delle componenti di $\mathbf{q}_{A,\text{ref}}$ nel caso di un percorso con curve.

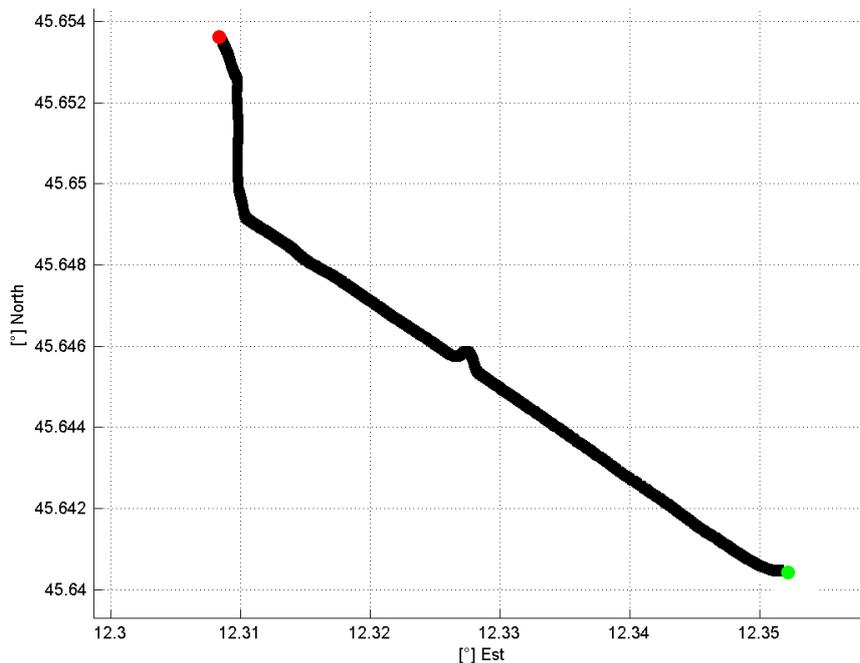


Figura 5.11: Percorso inizialmente dritto, seguito da una rotatoria. I punti di colore verde e rosso indicano rispettivamente la partenza e l'arrivo.

valori stabili assunti da $\mathbf{q}_{A,\text{ref}}$, dopo i rispettivi tempi di assestamento, in angoli di Eulero. In Figura 5.12 i risultati sono rappresentati graficamente.

	Angoli misurati	Prima stima	Seconda stima
θ	-90°	-93.2120°	-93.0093°
ϕ	0°	-5.6945°	-3.1417°
ψ	40°	23.3673°	39.9257°

Tabella 5.2: Risultati ottenuti sul percorso in Figura 5.11.

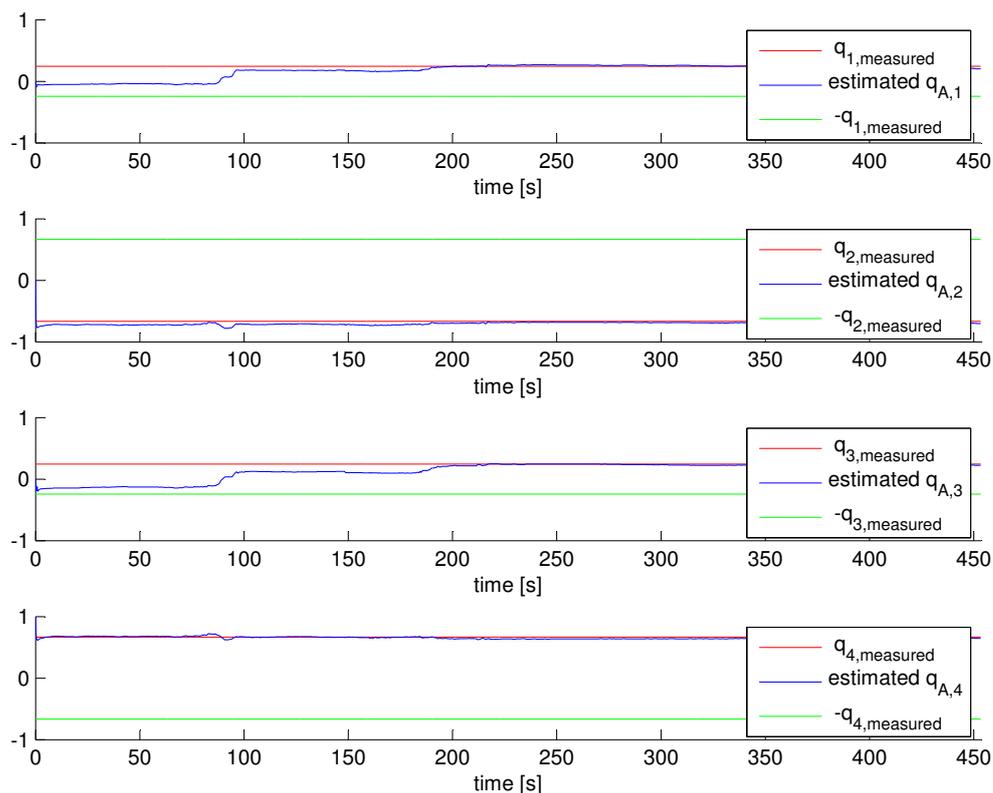


Figura 5.12: Andamento delle componenti di $\mathbf{q}_{A,ref}$ con il percorso di Figura 5.11.

Come sottolineato dall'analisi dell'osservabilità e dagli esempi qui riportati il funzionamento corretto dell'algoritmo fin qui descritto necessita di particolari situazioni di guida. L'idea di imporre all'utente finale del TMD2 una serie di manovre ad-hoc, tali da permettere di completare adeguatamente la fase di installazione, potrebbe essere una soluzione a tale problema. È pratica comune infatti, specie nel campo della calibrazione di strumenti dotati di sensori inerziali, stabilire una serie di movimenti da far eseguire al dispositivo per renderne possibile il suo utilizzo. Per un sistema di piccole dimensioni, come ad esempio un cellulare, questa è una soluzione nel complesso accettabile. La stessa cosa non si può dire di un veicolo.

Per questo progetto si è scelta una via alternativa che gestisca in automatico le

fasi di installazione del TMD2, senza bisogno di interagire con l'utente in alcun modo. Il tema sarà trattato in maniera approfondita nei paragrafi 5.3. e 5.4.

5.2.3 Analisi degli errori

Un'analisi degli errori è stata condotta sulla base dei risultati ottenuti su un'insieme di acquisizioni dalle caratteristiche diverse, sia nel tipo di percorso sia nell'orientazione del TMD2. Va sottolineato che per errori si intende la differenza tra valore stimato e valore misurato.

Ogni elaborazione viene considerata terminata quando le componenti di $\mathbf{q}_{A,ref}$ raggiungono tutte un valore stabile. Tale valore viene quindi utilizzato per la conversione in angoli di Eulero e per effettuare il confronto con gli angoli misurati. Quindi, l'algoritmo viene fatto ripartire, reinizializzando tutti i parametri e gli stati del filtro di Kalman.

Questa analisi comprende sia le stime su casi limite, come i percorsi rettilinei, sia le stime ottenute da percorsi con rapidi cambi di direzione. Quindi, a seconda dei dati utilizzati per assestarsi a un determinato valore la stima può essere affetta da errori di varia entità.

Nelle Figure 5.13, 5.14 e 5.15 si riportano le distribuzioni degli errori sui tre angoli di installazione sotto forma di istogrammi. In ascissa si indica l'errore in gradi, mentre in ordinata si ha l'indicazione del numero di stime per cui si è ottenuto tale errore. Il numero totale di stime prese in considerazione è pari a 79. L'errore medio e la deviazione standard per ciascun angolo stimato è riportato in Tabella 5.3.

La presenza di errori superiori ai 10° influenza negativamente le statistiche ri-

	Mean Err.	STD
θ	3.6428°	5.0191°
ϕ	2.3623°	2.8730°
ψ	5.1307°	7.1856°

Tabella 5.3: Errore medio e deviazione standard (STD) per le stime dei tre angoli di installazione.

portate ma, come più volte sottolineato, essa non dipende dall'algoritmo di stima ma dalla scarsità dei dati a disposizione e dalle caratteristiche dei tratti di strada percorsi.

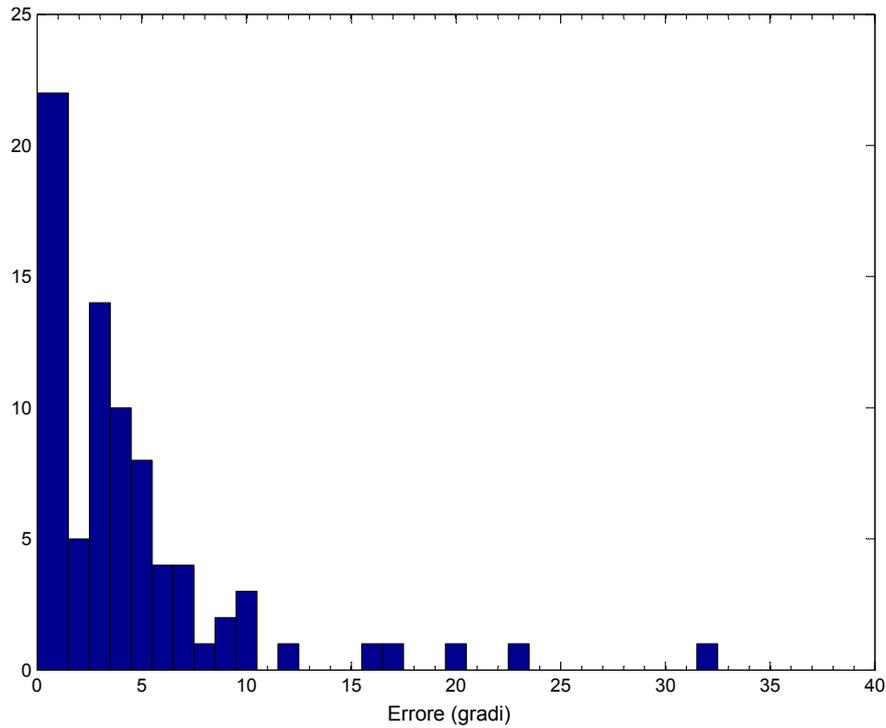


Figura 5.13: Distribuzione dell'errore per θ .

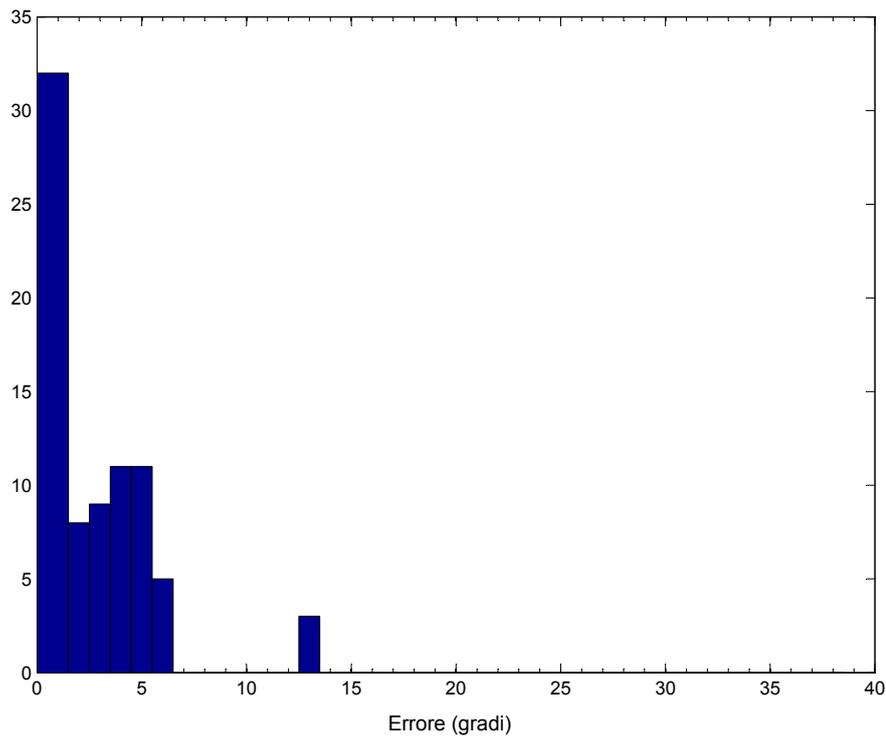


Figura 5.14: Distribuzione dell'errore per ϕ .

5.3 Assestamento e valore affidabile

Nelle sezioni precedenti si è introdotto il concetto di assestamento delle componenti di $\mathbf{q}_{A,ref}$ attorno ad un valore. Il raggiungimento dell'assestamento è stato fin ora utilizzato come un indice per stabilire la conclusione o meno del processo

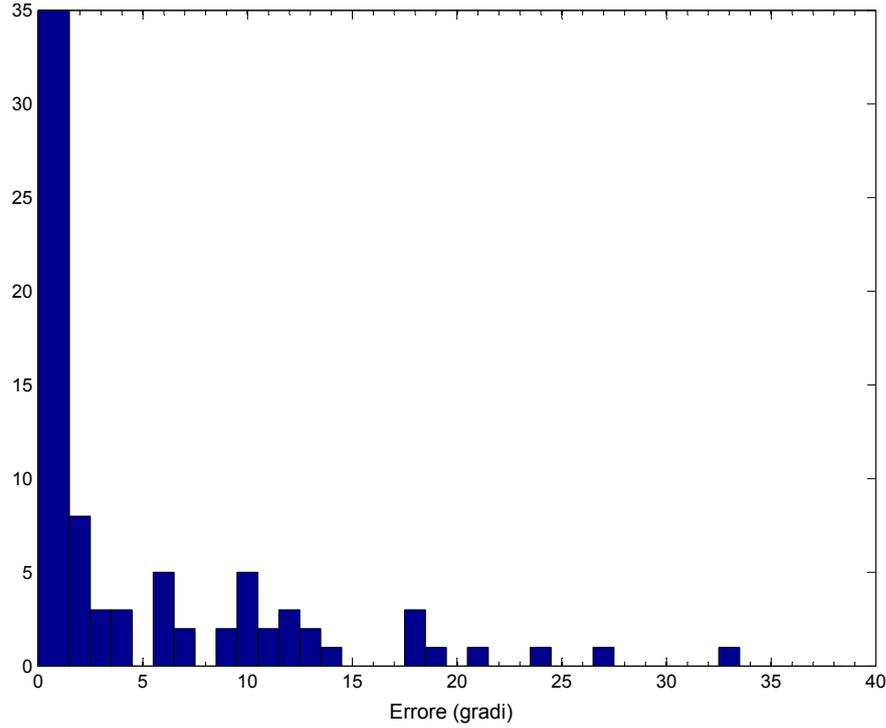


Figura 5.15: Distribuzione dell'errore per ψ .

di stima. Per capire se una componente del quaternion $\mathbf{q}_{A,ref}$ abbia raggiunto o meno un valore stabile si utilizza la combinazione di un filtro a media mobile ed una variabile booleana di controllo, indicata con *STABLE*. Se si osserva gli andamenti nel tempo dei quattro valori di $\mathbf{q}_{A,ref}$ si nota che, terminato il transitorio iniziale, essi presentano oscillazioni (a volte picchi di lieve entità) attorno al valore medio. Mediando $\mathbf{q}_{A,ref}(k)$ in una finestra temporale di ampiezza n si rimuovono tali componenti di disturbo. Il valore $n = 100$ è stato scelto su base sperimentale. L'uscita del filtro a media mobile $\bar{\mathbf{q}}_{A,ref}(k)$ è data da:

$$\bar{\mathbf{q}}_{A,ref}(k) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{q}_{A,ref}(k+j) \quad (5.4)$$

In Figura 5.16 viene mostrato il risultato dell'operazione di filtraggio su una delle componenti di $\mathbf{q}_{A,ref}$. La differenza tra il valore $\bar{\mathbf{q}}_{A,ref}$ all'istante k e il suo valore all'istante precedente viene utilizzata per stabilire se la stima ha raggiunto un valore stabile o meno. Se tale differenza è al di sotto di una soglia prestabilita, la variabile booleana *STABLE* assume valore positivo.

Il raggiungimento di un valore stabile per le componenti di $\bar{\mathbf{q}}_{A,ref}$ non garantisce che i valori sulle quali esse si assestano siano risultati accettabili. Come è stato mostrato nei paragrafi precedenti, tale aspetto dipende fortemente dai dati usati nelle elaborazioni. Per cercare di aggirare tale problema si è introdotta una nuova variabile booleana, indicata con *RELIABLE*.

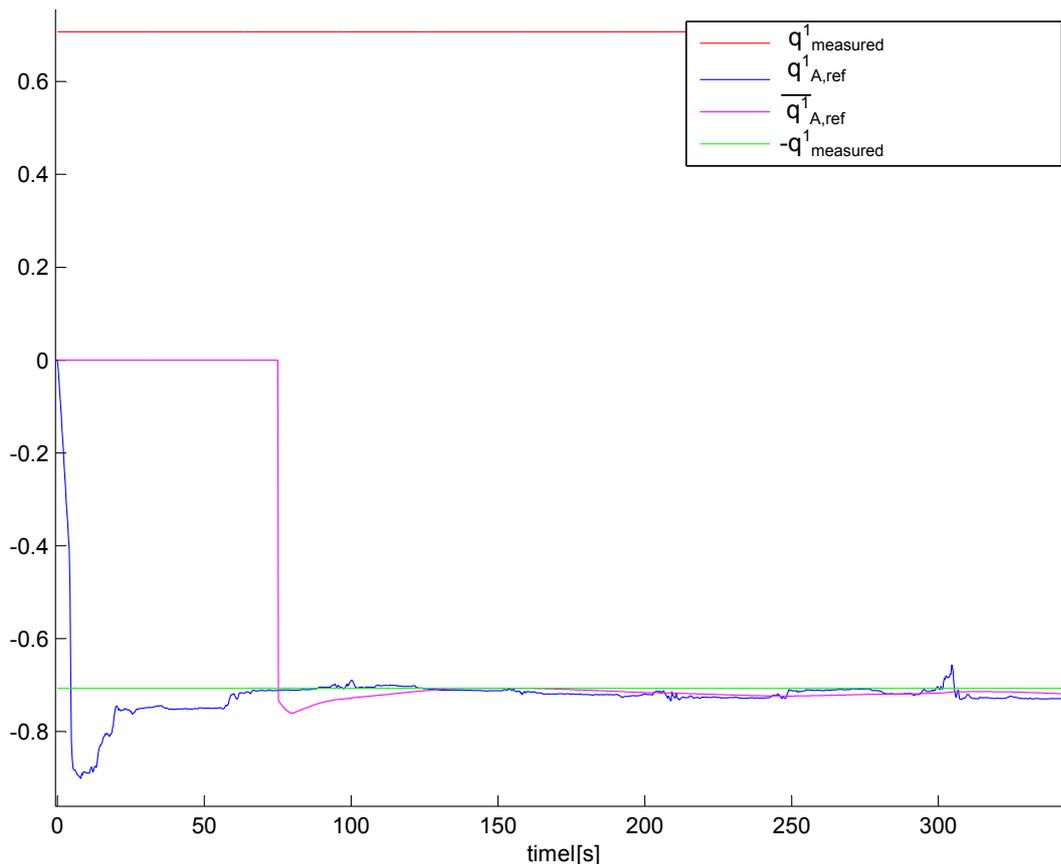


Figura 5.16: Filtro a media mobile sulla prima componente di $\mathbf{q}_{A,ref}$. Gli istanti iniziali dell'uscita del filtro sono nulli dovendo esso aspettare un numero di campioni in ingresso pari alla larghezza della finestra (n).

L'analisi sull'osservabilità e la serie di sperimentazioni eseguite su vari tipi di percorso, suggerisce come l'individuazione di una curva, specie se con raggio di curvatura ridotto, fornisca le informazioni adeguate per un assestamento delle stime ai valori corretti. Tale situazione è caratterizzata da un valore elevato di $y_\omega(k)$, ossia da cambi di direzione rapidi da parte del veicolo. La variabile *RELIABLE* assumerà quindi valore positivo solo nel caso $y_\omega(k)$ superi un determinato valore di soglia, opportunamente settato sulla base di dati sperimentali.

L'andamento $y_\omega(k)$ potrebbe presentare alcuni picchi, essendo esso legato alle caratteristiche della misura ψ_{GPS} . Quest'ultimo dato, nel caso il veicolo si muova nella direzione del Nord geografico, può passare improvvisamente da valori elevati (prossimi a 360°) a valori quasi nulli (prossimi a 0°). Da (5.2) è evidente che tale situazione porta a dei picchi in $y_\omega(k)$ senza alcun significato fisico e perciò da non prendere in considerazione.

Figura 5.17 mostra le misure di y_ω relative al percorso di Figura 5.11. Si può notare come nel periodo che precede la prima curva i valori di y_ω restino al di sotto di una certa soglia imponendo un valore negativo per la variabile *RELIABLE*. Negli istanti successivi alla curva *RELIABLE* assumerà valore positivo e le stime,

non appena raggiungeranno valori stabili, potranno essere considerate affidabili.

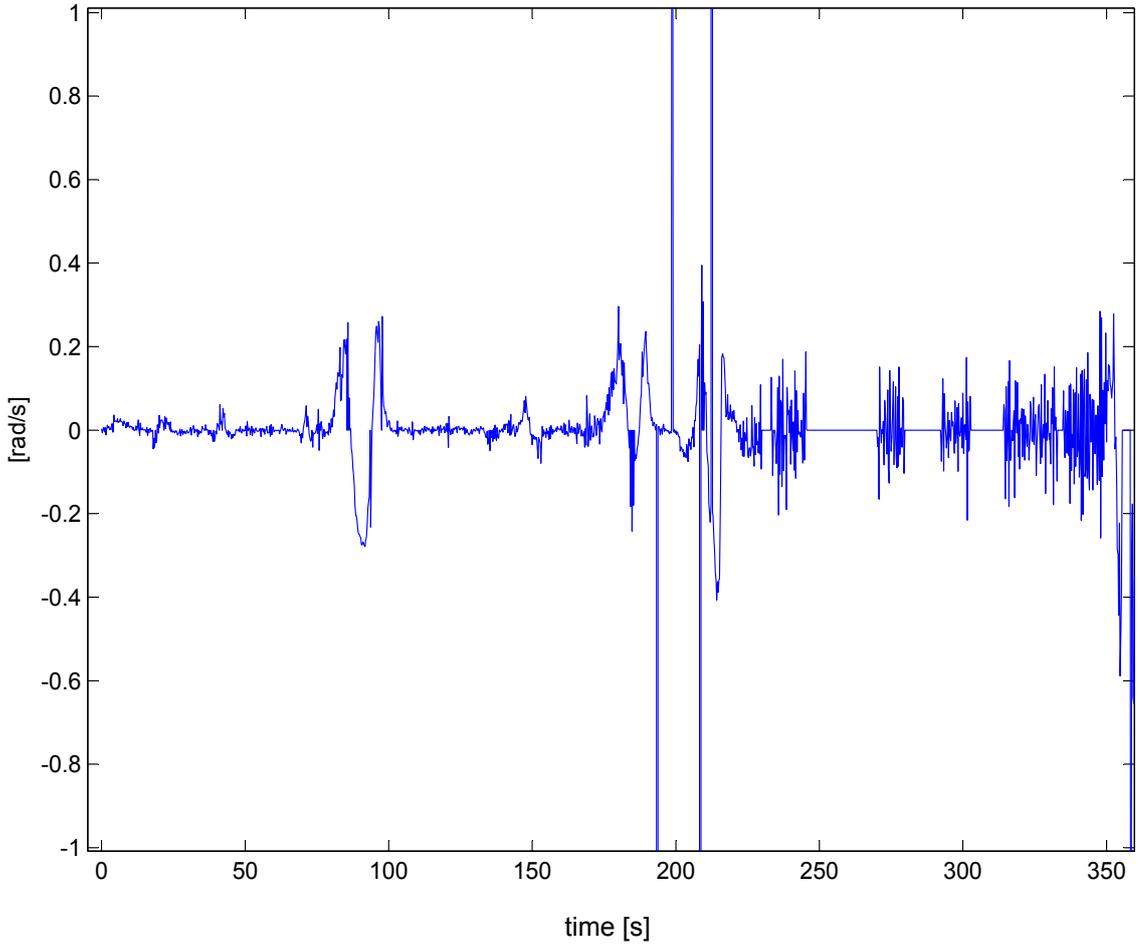


Figura 5.17: Andamento di y_ω relativo al percorso di Figura 5.11.

5.4 Routine di test

Se all'istante k' entrambe le variabili *RELIABLE* e *STABLE* hanno valore positivo, il quaternione $\bar{\mathbf{q}}_{A,ref}(k')$ può essere considerato una stima affidabile sulla base dei dati disponibili fino a tale istante. La matrice di rotazione data dal quaternione $\bar{\mathbf{q}}_{A,ref}(k')$ permette il passaggio dal vettore di accelerazioni nel A-frame al vettore di accelerazioni nel V-frame:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}_{V-frame} = R(\bar{\mathbf{q}}_{A,ref}(k')) \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}_{A-frame} \quad (5.5)$$

Utilizzando il valore di a_x del vettore riferito al V-frame, ossia l'accelerazione longitudinale del veicolo, è possibile implementare una routine di test che verifichi l'accuratezza del quaternione $\bar{\mathbf{q}}_{A,ref}(k')$. Tale routine esegue un confronto tra la

velocità fornita dal GPS (v_{GPS}) e il valore ottenuto integrando nel tempo la a_x . Tale valore, indicato con $v_{x,test}$, viene calcolato come:

$$v_{x,test}(k) = v_{x,test}(k-1) + a_x(k)T \quad (5.6)$$

Nell'istante k' in cui l'algoritmo di stima fornisce un risultato affidabile, secondo il principio esposto nel paragrafo precedente, $v_{x,test}(0)$ viene inizializzato con il valore $v_{GPS}(k')$. Quindi $v_{x,test}$ viene aggiornato utilizzando esclusivamente i dati dell'accelerometro opportunamente riportati nel V-frame tramite matrice di rotazione (5.5). Se $R(\bar{\mathbf{q}}_{A,ref}(k'))$ è sufficientemente accurata $v_{x,test}$ dovrebbe seguire con un certo margine di errore i valori forniti dal GPS.

Gli errori nella stima della matrice di rotazione comportano l'introduzione di componenti indesiderati della gravità nel valore de a_x . Tali componenti, assieme agli errori intrinseci delle misure accelerometriche, integrate in (5.6) causano la divergenza nel tempo di $v_{x,test}$ rispetto al valore di v_{GPS} .

Il test implementato fornisce un risultato positivo se, dopo un certo periodo di tempo t_{test} , la differenza tra $v_{x,test}(t_{test})$ e $v_{GPS}(k' + t_{test})$ risulta inferiore a una soglia prestabilita. Il valore di t_{test} e della soglia per il confronto possono essere assegnati sulla base di dati sperimentali e tenendo conto dei limiti intrinseci di un approccio come quello presentato in (5.6). Tutti i sistemi di navigazione inerziale infatti soffrono di deriva di integrazione: piccoli errori nelle misurazioni dell'accelerazione vengono integrati in errori progressivamente maggiori nella velocità.

Si consideri ancora una volta il percorso di Figura 5.11. Processando i dati relativi ad esso, tramite l'algoritmo implementato, si ottengono una prima stima poco precisa, seguita da un risultato abbastanza positivo (vedi Tabella 5.2). La routine di test applicata a questo caso è mostrata in Figura 5.18. La prima stima eseguita è affetta da un elevato errore ($\simeq 17^\circ$) che si ripercuote nella matrice di rotazione e quindi nel valore dell'accelerazione a_x utilizzato in (5.6). Ciò porta alla rapida divergenza nel tempo tra $v_{x,GPS}$ e $v_{x,test}$. Con la seconda stima eseguita (ed anche la terza) l'errore è molto ridotto e il processo di integrazione offre i risultati riportati in Tabella 5.4.

	10 secondi	20 secondi	40 secondi	1 minuto
Prima stima	0.3[m/s]	1.05[m/s]	3.6[m/s]	8.1[m/s]
Seconda stima	0.24[m/s]	0.52[m/s]	1.1[m/s]	2.2[m/s]

Tabella 5.4: Divergenza tra $v_{x,GPS}$ e $v_{x,test}$ nel tempo in relazione ai risultati ottenuti sul percorso di Figura 5.11.

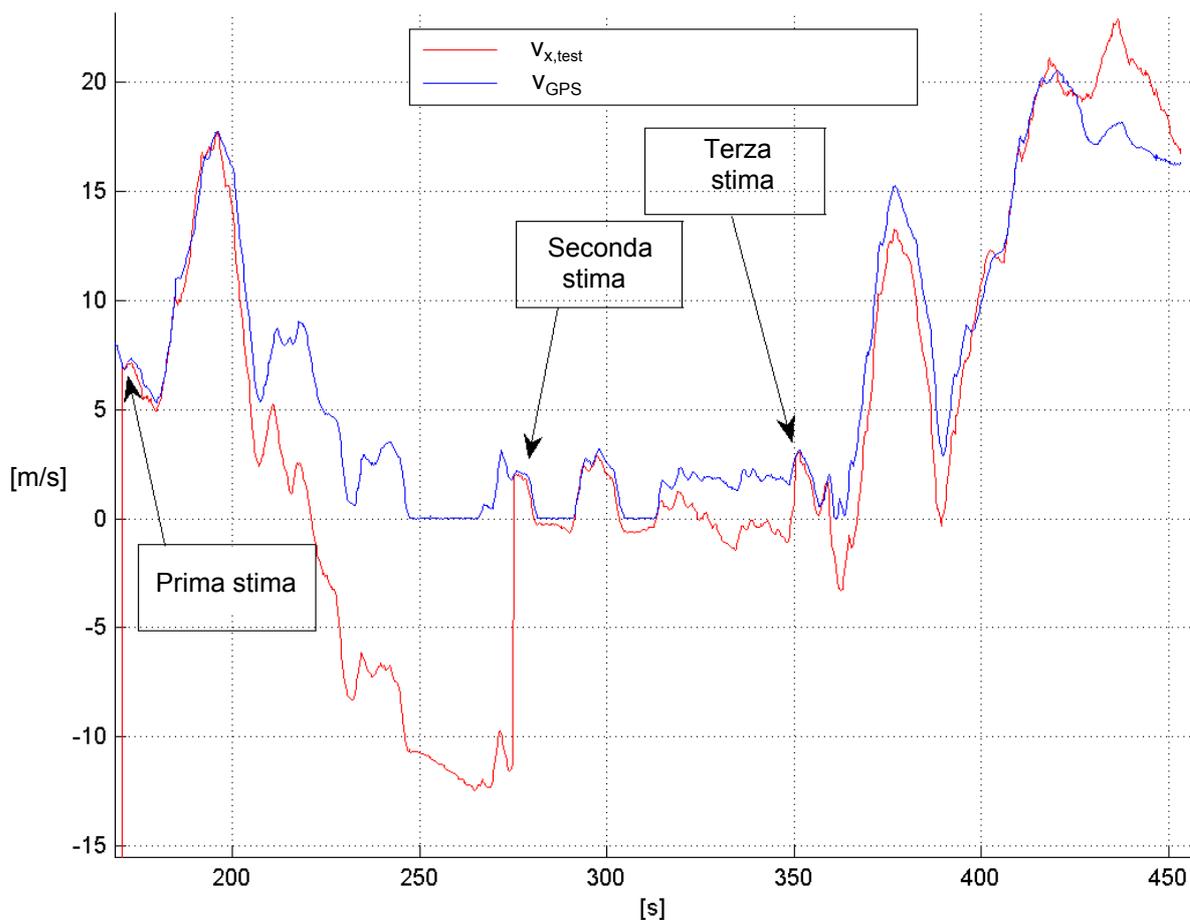


Figura 5.18: Routine di test sui risultati ottenuti sul percorso di Figura 5.11.

Come visibile dai dati tabellati, una scelta di $t_{test} = 40 s$ e $2.5[m/s]$ per la soglia di errore è un buon compromesso tra la necessità di discriminare tra risultati buoni e non e i problemi legati alla deriva di integrazione.

5.5 Cambio orientamento

Uno dei vantaggi offerti dalla procedura automatica di installazione descritta è la possibilità di rilevare eventuali spostamenti del TMD2 rispetto alla sua orientazione originaria. Come è stato introdotto nel paragrafo 3.2 la procedura di installazione manuale non gestisce eventi di questo genere: anche se venisse rilevato il problema sarebbe comunque necessario ripetere l'installazione in tutte le sue fasi.

Programmando un avvio periodico dell'algoritmo di stima è invece possibile rilevare gli spostamenti indesiderati del TMD2 e eseguire nuovamente le operazioni necessarie per il suo corretto funzionamento, senza interventi manuali da parte

dell'operatore. Tale soluzione sfrutta il valore del quaternionione \mathbf{q}_A risultato dell'ultima stima eseguita, confrontandolo con i risultati dell'esecuzione periodica del programma. Nel caso venga individuata una differenza sostanziale il TMD2 può inviare un messaggio di allarme e, a seconda delle specifiche, salvare il nuovo valore di \mathbf{q}_A continuando le sue consuete attività. Anche in questo caso un'opportuna soglia è stata scelta in maniera da discriminare differenze dovute ad effettivi cambi di orientamento e differenze dovute al diverso set di dati utilizzate nei due casi.

Capitolo 6

Implementazione in TMD2

La fase di simulazione in Matlab ha permesso di impostare in maniera opportuna sia i parametri del filtro di Kalman sia le varie soglie utili a migliorarne i risultati e prevenirne eventuali errori. Gli algoritmi iterativi di stima, di cui il filtro di Kalman è un esempio, sono largamente usati in sistemi embedded¹, specialmente per scopi di navigazione e controllo.

6.1 Il Micro-Processore

Il micro-processore è l'unità centrale di elaborazione che coordina e controlla il lavoro delle varie componenti e sensori di un calcolatore elettronico e, nel nostro caso, di un sistema embedded. L'algoritmo descritto in tutte le sue parti nel



Figura 6.1: Micro-processore ARM7.

capitolo precedente è stato scritto nel linguaggio di programmazione *C++* per

¹Un sistema embedded è un sistema elettronico di elaborazione a microprocessore progettato appositamente per una determinata applicazione, spesso con una piattaforma hardware ad-hoc, integrati nel sistema che controllano ed in grado di gestirne tutte o parte delle funzionalità richieste.

poterne testare il funzionamento nel dispositivo TMD2. Anche se la complessità dei calcoli matriciali e la memoria richiesta dall'applicazione sviluppata potrebbe inizialmente risultare proibitiva per alcuni sistemi embedded, un'accurata gestione delle risorse hardware tramite opportune strategie di programmazione ha permesso di superare tale scoglio.

Il TMD2 monta un micro-processore ARM7 a 32-bit (Figura 6.1) con una frequenza di clock di 50 MHz e memoria RAM pari a 64 KByte. È un processore economico e versatile progettato per dispositivi portatili e altri strumenti elettronici a basso consumo di energia. Le sue capacità di calcolo e di memoria sono limitate rispetto ai micro-processori attualmente in commercio ma sono sufficienti per il carico computazionale richiesto dall'applicazione sviluppata.

6.2 Flow chart

Il flow chart (diagramma di flusso) dell'applicazione sviluppata è interamente riportato in Figura 6.2. Il blocco di inizializzazione oltre ad eseguire le operazioni riportate nel paragrafo 5.2 inizializza a un valore negativo le variabili booleane. Il blocco “*EKF step*” esegue i passi di predizione ed aggiornamento riportati nel paragrafo 4.3. Seguendo il principio del MEKF illustrato nel paragrafo 4.4 i quaternioni $\mathbf{q}_{A,ref}$ e $\mathbf{q}_{V,ref}$ vengono aggiornati e gli stati del sistema \mathbf{a}_V e \mathbf{a}_A vengono azzerati. Il filtro a media mobile elabora ad ogni ciclo l'ingresso $\mathbf{q}_{A,ref}$ fornendo in output $\bar{\mathbf{q}}_{A,ref}$ come mostrato nel paragrafo 5.3. Le variabili booleane STABLE e RELIABLE vengono interrogate nei rispettivi blocchi. Se entrambe hanno valore positivo e non è presente una stima precedente in memoria il valore di $\bar{\mathbf{q}}_{A,ref}$ viene salvato. Ha inizio quindi la routine di test descritta nel paragrafo 5.4. Mentre essa continua in background il processo di stima prosegue dopo una *inizializzazione (soft)*. Tale inizializzazione prevede il solo reset delle variabili booleane a un valore negativo. Ad ogni iterazione viene controllato lo stato della routine di test: se il tempo t_{test} è scaduto si esegue il confronto tra v_{GPS} e $v_{x,test}$. Un risultato positivo determina il salvataggio del quaternioni testato e la chiusura del programma. Ciò permette di liberare le risorse hardware del TMD2 appena possibile. Nel flow chart è rappresentato anche il sistema di controllo degli spostamenti indesiderati del TMD2 introdotto nel paragrafo 5.5.

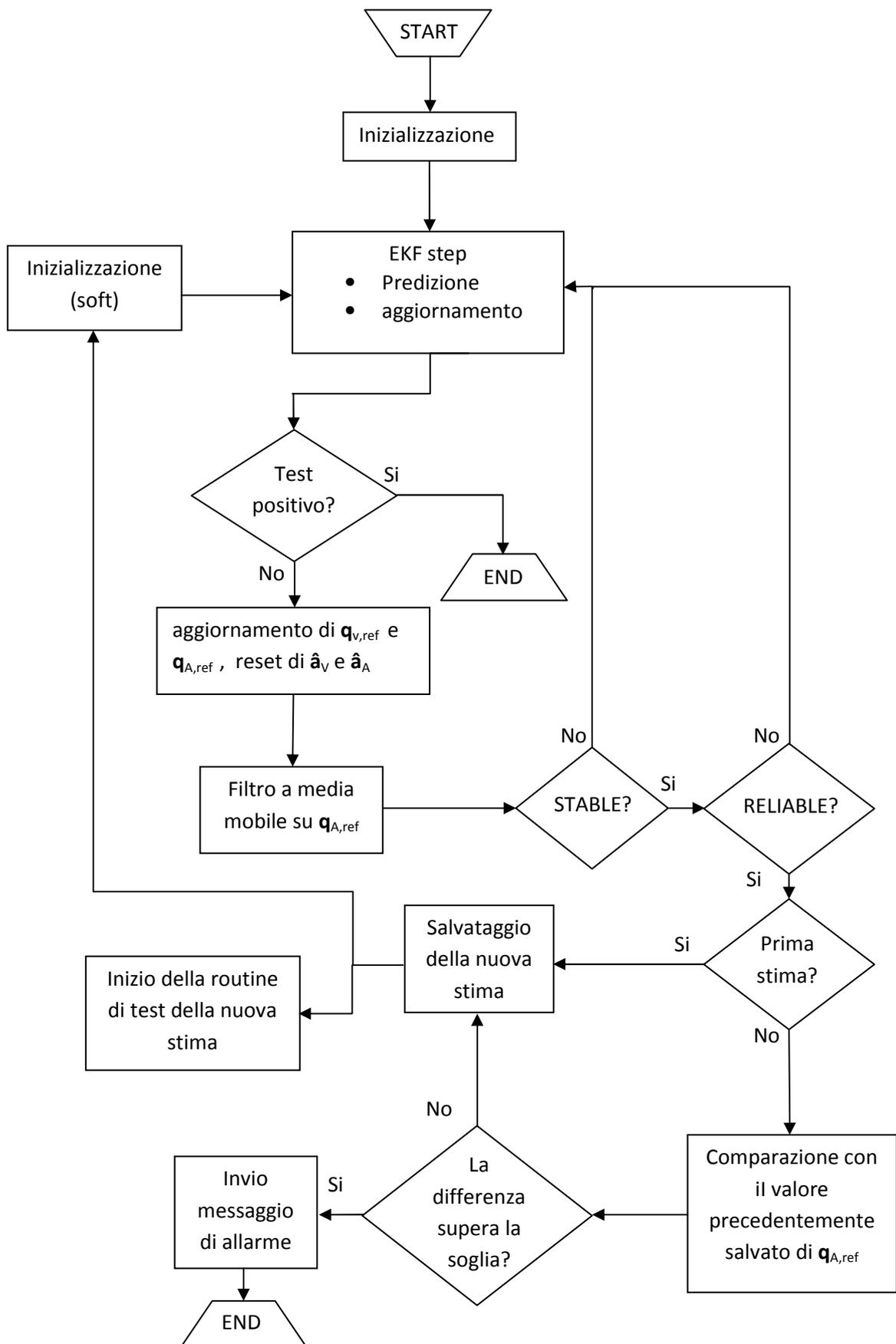


Figura 6.2: Diagramma di flusso del programma (flow chart).

Capitolo 7

Conclusioni

In questo progetto è stato sviluppato un programma che completa in modo automatico le fasi di installazione di dispositivi Black Box (scatola nera) per autoveicoli. Esso permette di evitare la lunga e imprecisa procedura di allineamento manuale tra gli assi dell'accelerometro e gli assi del veicolo necessaria al corretto funzionamento della Black Box. Il programma viene eseguito nel periodo successivo al fissaggio del dispositivo mentre l'auto è in movimento, con un notevole risparmio in termini di tempi e costi di installazione. Il programma è eseguibile anche su sistemi embedded dalle prestazioni limitate e necessita esclusivamente delle misure di un accelerometro tri-assiale e di un ricevitore GPS. La precisione che offre è sicuramente superiore a quella ottenibile con la procedura di allineamento manuale. Inoltre un'esecuzione periodica del programma permette la rilevazione di spostamenti del TMD2 dall'orientazione iniziale causata da urti, vibrazioni o strumenti di fissaggio inadeguati.

Il programma si basa su un filtro di Kalman esteso applicato a un sistema non-lineare che modella le dinamiche del moto di un veicolo e le misure dei sensori. Gli angoli di installazione della Black Box e l'assetto del veicolo sono rappresentati tramite i quaternioni unitari e la relativa cinematica per evitare i problemi di singolarità caratteristici degli angoli di Eulero. Il principio dell'MEKF (Multiplicative Extended Kalman Filter) permette di preservare la norma unitaria dei quaternioni durante la dinamica del sistema.

Le simulazioni in Matlab mostrano i limiti del filtro di Kalman dovuti essenzialmente alle caratteristiche dei dati disponibili per elaborare le stime. Una serie di regole, soglie e variabili booleane di controllo hanno permesso di aggirare tali problemi.

Il programma può essere adattato facilmente per lavorare con misure da giroscopi. Essi devono essere opportunamente integrati nell'hardware e allineati con gli assi dell'accelerometro. I giroscopi permettono di monitorare in maniera precisa i movimenti del veicolo e offrono un notevole vantaggio sia in termini di tempo

sia in termini di precisione nei risultati delle stime. Gli sviluppi futuri prevedono oltre all'introduzione dei giroscopi, lo sviluppo di un programma di navigazione inerziale che, dopo l'iniziale stima dell'orientamento, permetta di tracciare i movimenti del veicolo nei periodi in cui il segnale GPS non sia disponibile.

Appendice A

GPS

Il TMD2 è dotato di una ricevitore GPS u-blox 6 (Figura A.1) con frequenza di acquisizione dati superiore ai 4 Hz. Per informazione tecniche dettagliate vedere [18].



AMY-6M:
6.5 x 8.0 x 1.1 mm

Figura A.1: Ricevitore GPS.

A.1 Global Positioning System (GPS)

Il GPS ([19]) è un sistema di localizzazione e navigazione satellitare. Esso comprende una costellazione di 24 satelliti che orbitano attorno alla Terra e una serie di stazioni di controllo situate al suolo. Il ricevitore GPS a disposizione dell'utente acquisisce i segnali provenienti dai satelliti ed elabora le informazioni in essi contenute per ottenere la sua esatta posizione. Con la tecnologia attuale è possibile ottenere una misura di posizione con errori dell'ordine del centimetro. Il principio base su cui si basa il funzionamento del sistema GPS è la triangolazione. Essa consiste nella misurazione della distanza del ricevitore da almeno tre punti, di cui si conosce la posizione, in modo da calcolare le coordinate di un quarto punto, ossia la posizione del ricevitore. Conoscendo la propria distanza

da un punto, si è certi di essere da qualche parte lungo la circonferenza con centro tale punto e con raggio la distanza da esso. Inoltre, conoscendo la propria distanza da un secondo punto, si è certi di trovarsi in una delle due posizioni in cui le due circonferenze si intersecano. Infine, conoscendo la distanza da un terzo punto è possibile individuare univocamente la propria posizione, ossia nel luogo in cui le tre circonferenze si intersecano.

Un esempio di triangolazione, riportata per semplicità nello spazio bidimensionale, è rappresentata in Figura A.2. I dati noti al ricevitore sono le posizioni dei satelliti A,B,C e le loro distanze d_1 , d_2 , d_3 . Il ricevitore GPS calcola la distanza da ciascun satellite misurando il tempo necessario al segnale per viaggiare dal satellite al ricevitore. Poiché il segnale viaggia alla velocità della luce, conoscendo il tempo che esso impiega per raggiungere il ricevitore, è possibile misurare la distanza dal satellite. Le distanze calcolate sono soggette ad errori dovuti all'offset (sfasamento) tra l'orologio interno del ricevitore e l'ora GPS dei satelliti. A causa dell'offset le tre circonferenze descritte in precedenza non si intersecano in un punto ma individuano un'area a forma di triangolo. In Figura A.3 ciascuna

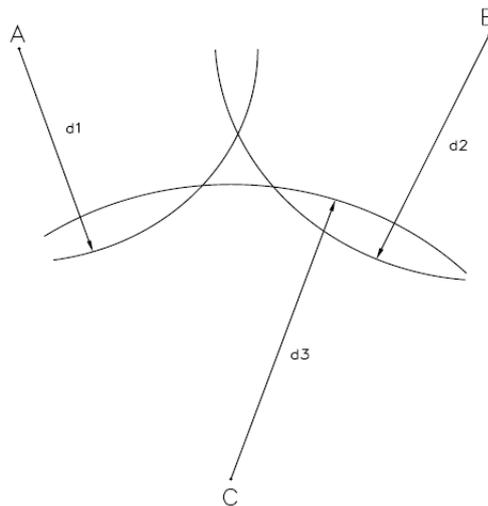


Figura A.2: Esempio di triangolazione nello spazio bidimensionale.

distanza viene aggiustata della stessa quantità t , in modo da individuare un unico punto. Le coordinate di tale punto rappresentano la posizione del ricevitore e t rappresenta l'effetto dell'offset dei riferimenti temporali precedentemente introdotto.

Il procedimento di triangolazione è stato descritto supponendo i punti A, B e C giacenti sullo stesso piano. Il GPS funziona esattamente alla stessa maniera ma utilizza superfici di sfere anziché circonferenze. Per completare il calcolo in tre dimensioni è necessario conoscere la posizione di un quarto satellite e la sua

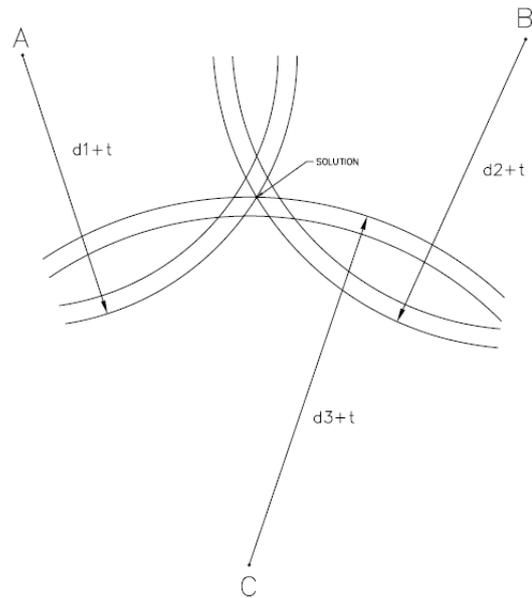


Figura A.3: Esempio di triangolazione nello spazio bidimensionale con compensazione dell'offset.

distanza dal ricevitore. In questo modo è possibile calcolare oltre alle coordinate della posizione sulla superficie terrestre (latitudine e longitudine) anche l'altezza rispetto al livello del mare (altitudine).

Appendice B

Accelerometri MEMS

Un accelerometro è un dispositivo elettromeccanico sviluppato per misurare le forze di accelerazione. Queste forze possono essere statiche, come la forza di gravità, o dinamiche, ossia causate dal movimento dell'accelerometro. Ci sono diverse tipi di accelerometri in commercio ma i più diffusi sono gli accelerometri MEMS (micro electromechanical system, [20]), grazie alle loro piccole dimensioni e al loro basso costo.

B.1 Principio di funzionamento

Un accelerometro MEMS è composto da una massa di prova mobile collegata tramite un sistema di sospensioni ad una piattaforma fissa. Sia la massa mobile sia la parte fissa presentano delle lamine opportunamente disposti tra di loro a formare le armature di un condensatore. Quando un'accelerazione è applicata alla piattaforma la massa si sposta per effetto dell'inerzia andando a modificare la distanza tra le armature. A partire dalla misura dello spostamento e dalla conoscenza dei parametri di tale sistema massa-molla è possibile ricavare l'entità dell'accelerazione.

La Figura B.1 descrive il principio di funzionamento di un accelerometro MEMS. Con C_1 e C_2 si indicano le capacità dei condensatori formati da una lamina della massa di prova e le due fisse della piattaforma. Tale sistema costituisce un'unità elementare dell'accelerometro. C_1 e C_2 sono funzioni dei rispettivi spazi x_1 e x_2 secondo:

$$C_1 = \epsilon_A \frac{1}{x_1} = \epsilon_A \frac{1}{d+x} = C_0 - \Delta C \quad C_2 = \epsilon_A \frac{1}{x_2} = \epsilon_A \frac{1}{d-x} = C_0 + \Delta C \quad (\text{B.1})$$

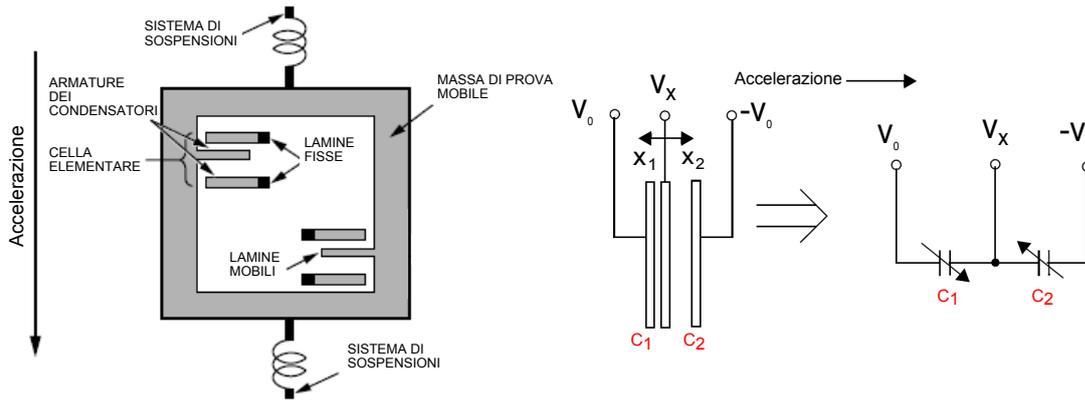


Figura B.1: Principio di funzionamento di un accelerometro MEMS.

dove ϵ_A è una costante che dipende dalle caratteristiche geometriche del condensatore e dal materiale che separa le armature, $C_0 = \epsilon_A \frac{1}{d}$ e d è la distanza tra le armature in condizioni di riposo. Infine x è lo spostamento della massa di prova dovuto all'accelerazione della piattaforma.

La differenza tra le due capacità è data da:

$$C_2 - C_1 = 2\Delta C = 2\epsilon_A \frac{x}{d^2 - x^2} \quad (\text{B.2})$$

Dalla conoscenza di ΔC è possibile ricavare x utilizzando (B.2). La tensione di uscita V_x relativa alle lamine della massa di prova cambia in maniera proporzionale con la tensione di ingresso V_0 . Osservando ancora una volta il circuito elettrico di Figura B.1 si ottiene:

$$(V_x + V_0)C_1 + (V_x - V_0)C_2 = 0 \rightarrow V_x = V_0 \frac{C_2 - C_1}{C_2 + C_1} = \frac{x}{d} V_0 \quad (\text{B.3})$$

Una volta noto lo spostamento x , utilizzando la legge di Hook e la seconda legge del moto di Newton, l'accelerazione è:

$$ma = F_S = k_S x \rightarrow a = \frac{k_S}{m} x \rightarrow a = \frac{k_S d}{m V_0} V_x \quad (\text{B.4})$$

dove F_S è la forza di reazione generata dal sistema di sospensione che lega massa di prova e piattaforma fissa, k_S è la costante elastica ed m è il valore della massa di prova. Un accelerometro è costituito da diverse unità elementari come quella descritta. Tutte i condensatori C_1 delle unità elementari sono collegati in parallelo a formare un unico condensatore. Lo stesso vale per i condensatori C_2 . Le equazioni presentate in questo paragrafo continuano a valere utilizzando i valori delle capacità dei due condensatori ottenuti tramite i collegamenti in parallelo.

B.2 Caratteristiche

Le caratteristiche più importanti relative ad un accelerometro sono:

- il tipo di misura in uscita, che può essere analogica o digitale;
- il *range*, che definisce la massima accelerazione misurabile dal dispositivo;
- la sensibilità, che definisce la minima variazione di accelerazione percepibile dal sensore. In alcuni dispositivi essa può essere aumentata abbassando il valore del *range*;
- la frequenza di acquisizione;
- il rumore, il quale è inversamente proporzionale alla frequenza di acquisizione. Il rumore influenza le misure dell'accelerometro specialmente quando si lavora con accelerazioni di bassa entità. La principale fonte di rumore in un accelerometro MEMS è legata alle vibrazioni della massa di prova e al circuito di condizionamento del segnale.

B.3 Calibrazione

La calibrazione è uno passaggio fondamentale per ottenere delle misure affidabili da un sensore inerziale come l'accelerometro. Essa è la procedura che permette di identificare i parametri di guadagno e di offset validi per un particolare dispositivo prodotto in serie. Tali parametri permettono una corretta lettura dei valori di accelerazione a partire dal segnale di tensione in uscita dall'accelerometro.

Un accelerometro tri-assiale presenta tre parametri di guadagno α_i , che convertono le tre misure da g a mV , e tre parametri di offset β_i , ossia errori costanti che si sommano ai segnali di uscita degli accelerometri. Poiché gli assi dei tre sensori non sono perfettamente ortogonali è necessario tener conto anche dei parametri di guadagno incrociati α_{ij} .

La procedura di calibrazione utilizzata per individuare i parametri α_i , β_i e α_{ij} relativi all'accelerometro tri-assiale utilizzato si basa su [21]. Tale procedura sfrutta l'accelerazione di gravità e un modello delle misure per stimare i parametri incogniti. Il modello per le uscite dei tre sensori è dato da:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix}}_V = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_x & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{xy} & \alpha_y & \alpha_{yx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{yx} & \alpha_z \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}}_{\bar{a}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{bmatrix}}_{\bar{\beta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}}_{\bar{w}} \quad (\text{B.5})$$

dove:

- v_x, v_y, v_z sono le tensioni di uscita relative ai tre accelerometri, mentre V è il vettore corrispondente;
- $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ sono i parametri di guadagno relativi ai tre accelerometri;
- $\alpha_{yx}, \alpha_{xy}, \alpha_{yx}$ sono i guadagni incrociati;
- $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ sono i parametri di offset, raccolti nel vettore $\bar{\beta}$;
- w_x, w_y, w_z sono gli errori residui, considerati come rumori gaussiani e raccolti nel vettore \bar{w} ;
- a_x, a_y, a_z sono le accelerazioni misurate dai tre accelerometri e \bar{a} è il vettore corrispondente.

In condizioni statiche, ciascun accelerometro misura la proiezione dell'accelerazione di gravità sul proprio asse. Se $g_x(t), g_y(t), g_z(t)$ sono le tre misure segue che, $\forall t$:

$$\|\bar{g}\|^2 = g_x^2(t) + g_y^2(t) + g_z^2(t) \quad (\text{B.6})$$

dove la norma $\|\bar{g}\|^2$ può essere considerata costante e pari al quadrato dell'accelerazione di gravità. Utilizzando (B.5) e (B.6) l'errore di misura può essere scritto come:

$$e(t) = \|\bar{g}\|^2 - (V(t) - \bar{\beta})^T (\mathbf{A}^{-1})^2 (V(t) - \bar{\beta}) \quad (\text{B.7})$$

Si consideri il sistema di equazioni costituito dalla varie misure eseguite negli istanti temporali t e sia p il vettore dei parametri incogniti definito come:

$$p = \left[\alpha_x \alpha_y \alpha_z \alpha_{yx} \alpha_{xy} \alpha_{yx} \beta_x \beta_y \beta_z \right] \quad (\text{B.8})$$

Il vettore p può essere stimato con il metodo dei minimi quadrati applicato alla funzione non lineare $e(t)$. La funzione costo:

$$S(p) = \sum_t e(t)^2 \quad (\text{B.9})$$

è minimizzata iterativamente utilizzando l'algoritmo di Levenberg-Marquardt (LMA). Tale algoritmo aggiorna ad ogni iterazione il vettore p , partendo dalle condizioni iniziali p_0 definite come parametri di default nel datasheet dell'accelerometro. L'algoritmo LMA si basa sulla linearizzazione di $e(t)$ fermata al primo ordine e calcolata attorno al valore corrente di p . Poiché ci sono nove parametri da stimare la procedura di calibrazione richiede un minimo di nove misure statiche acquisite posizionando l'accelerometro su un supporto e variandone l'orientazione. L'accuratezza offerta da tale algoritmo di stima è attorno ai 10^{-2} V per gli offset e 10^{-2} V/g per i guadagni.

B.4 Accelerometro MMA7341L

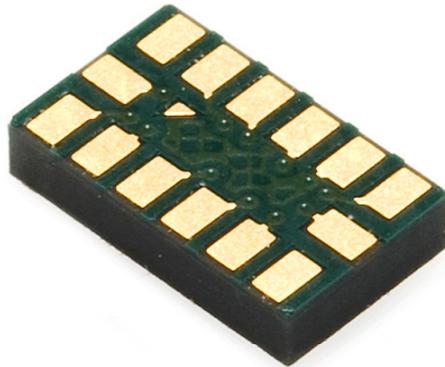


Figura B.2: Accelerometro MMA7341L

L'MMA7341L (Figura B.2) è accelerometro con tecnologia MEMS caratterizzato da un filtro passa basso ad 1 polo, compensazione della temperatura e la funzione g-Select, che permette di scegliere tra due valori di sensibilità aumentando o diminuendo l'intervallo di valori di accelerazione misurabili ($\pm 3g$ e $\pm 11g$). Per maggiori dettagli tecnici si veda [22].

Nel corso di questo progetto il *range* per l'accelerometro è stato settato a $\pm 11g$ con una sensibilità di 117.5 mV/g .

Appendice C

Quaternioni unitari

Un quaternione è un'entità matematica composta da una parte vettoriale, ossia un vettore con tre componenti indicato con $\mathbf{q}_{1:3}$, e una parte scalare, indicata con q_4 :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{1:3} \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Un quaternione è detto unitario se vale la:

$$\|\mathbf{q}\| = \mathbf{q} \mathbf{q}^T = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (\text{C.2})$$

Ogni quaternione unitario descrive una rotazione nello spazio tridimensionale. Perciò un quaternione \mathbf{q} con tale proprietà può essere utilizzato per rappresentare l'orientazione degli assi di un oggetto rispetto a un sistema di riferimento fisso. Noto \mathbf{q} , la matrice di rotazione che lega il sistema di riferimento dell'oggetto con il sistema di riferimento fisso si ricava da:

$$R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_4^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_1 - 2q_3q_4 & 2q_2q_4 + 2q_3q_1 \\ 2q_3q_4 + 2q_1q_2 & q_4^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_3q_2 - 2q_1q_4 \\ 2q_1q_3 - 2q_2q_4 & 2q_1q_4 + 2q_2q_3 & q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Sia z un vettore relativo al sistema di riferimento fisso e z' lo stesso vettore visto nel sistema di riferimento dell'oggetto. Segue che:

$$z = R(\mathbf{q})z' \quad z' = R(\mathbf{q})^T z \quad (\text{C.4})$$

Osservando la $R(\mathbf{q})$ è facile intuire che \mathbf{q} e $-\mathbf{q}$ rappresentano la stessa orientazione. Come per le matrici di rotazione, le sequenze successive di rotazioni possono essere rappresentate con il prodotto di quaternioni. Se \mathbf{q} e \mathbf{p} sono quaternioni unitari

segue che:

$$R(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) = R(\mathbf{q})R(\mathbf{p}) \quad (\text{C.5})$$

dove la moltiplicazione tra quaternioni è definita da:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = \begin{bmatrix} q_0 p_0 - \mathbf{q}_{1:3}^T \mathbf{p}_{1:3} \\ q_0 \mathbf{p}_{1:3} + p_0 \mathbf{q}_{1:3} + \mathbf{q}_{1:3} \times \mathbf{p}_{1:3} \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

La moltiplicazione tra quaternioni non è commutativa.

L'inverso del quaternione \mathbf{q} è rappresentato da:

$$\mathbf{q}^{-1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{q}_{1:3} \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

ed infatti risulta che:

$$R(\mathbf{q})R(\mathbf{q}^{-1}) = I_{3 \times 3} \quad (\text{C.8})$$

C.1 Da quaternioni unitari ad angoli di Eulero

Uno dei modi per convertire un quaternione unitario nella terna di angoli di Eulero rappresentante la medesima orientazione è passare attraverso la matrice di rotazione. Calcolata la $R(\mathbf{q})$ secondo la (C.3), gli angoli di Eulero si ottengono da:

$$R(\theta, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} R(1,1) & R(1,2) & R(1,3) \\ R(2,1) & R(2,2) & R(2,3) \\ R(3,1) & R(3,2) & R(3,3) \end{pmatrix} \quad (\text{C.9})$$

dove $R(i, j)$ sono i valori della matrice $R(\mathbf{q})$ mentre $R(\theta, \phi, \psi)$ ¹ è definita come:

$$\begin{pmatrix} c(\phi)c(\theta) & s(\phi)s(\psi) - c(\phi)c(\psi)s(\theta) & c(\psi)s(\phi) + c(\phi)s(\psi)s(\theta) \\ s(\theta) & c(\psi)c(\theta) & -c(\theta)s(\psi) \\ -c(\theta)s(\phi) & c(\phi)s(\psi) + c(\psi)s(\phi)s(\theta) & c(\phi)c(\psi) - s(\phi)s(\psi)s(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{C.10})$$

Comparando i valori di $R(\mathbf{q})$ e $R(\theta, \phi, \psi)$ segue che:

$$\phi = \text{atan2}(-R(3,1), R(1,1)) \quad (\text{C.11})$$

$$\theta = \text{asin}(R(2,1)) \quad (\text{C.12})$$

$$\psi = \text{atan2}(-R(2,3), R(2,2)) \quad (\text{C.13})$$

Le equazioni non sono valide quando $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ in quanto in queste particolari situazioni ϕ e ψ sono entrambi uguali a $\text{atan2}(0,0)$. Quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, utilizzando

¹Tale matrice fa riferimento alla convenzione introdotta in [3]

semplici formule trigonometriche, risulta che:

$$\phi + \psi = \text{atan2}(R(1, 2), R(3, 3)) \quad (\text{C.14})$$

mentre quando $\theta = -\frac{\pi}{2}$:

$$\phi - \psi = \text{atan2}(R(1, 2), R(3, 3)) \quad (\text{C.15})$$

L'algoritmo di conversione sviluppato in questo progetto verifica se ci si trova in tali situazioni di singolarità analizzando il valore di $R(2, 1)$. In tal caso le formule di conversione utilizzate sono:

$$\phi = \text{atan2}(R(1, 2), R(3, 3)) \quad (\text{C.16})$$

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2} \quad (\text{C.17})$$

$$\psi = 0 \quad (\text{C.18})$$

C.2 Da angoli di Eulero a quaternioni unitari

Siano $R(i, j)$ gli elementi della matrice $R(\theta, \phi, \psi)$ dopo la sostituzione all'interno della matrice dei tre valori degli angoli di Eulero. Il quaternione corrispondente si ottiene da:

$$R(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} R(1, 1) & R(1, 2) & R(1, 3) \\ R(2, 1) & R(2, 2) & R(2, 3) \\ R(3, 1) & R(3, 2) & R(3, 3) \end{pmatrix} \quad (\text{C.19})$$

dove $R(\mathbf{q})$ è definita come:

$$\begin{bmatrix} q_4^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_1 - 2q_3q_4 & 2q_2q_4 + 2q_3q_1 \\ 2q_3q_4 + 2q_1q_2 & q_4^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_3q_2 - 2q_1q_4 \\ 2q_1q_3 - 2q_2q_4 & 2q_1q_4 + 2q_2q_3 & q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.20})$$

Utilizzando semplici calcoli algebrici risulta:

$$q_4 = \pm \frac{\sqrt{1 + R(1, 1) + R(2, 2) + R(3, 3)}}{2} \quad (\text{C.21})$$

$$q_1 = (R(3, 2) - R(2, 3))/(4q_4) \quad (\text{C.22})$$

$$q_2 = (R(1, 3) - R(3, 1))/(4q_4) \quad (\text{C.23})$$

$$q_3 = (R(2, 1) - R(1, 2))/(4q_4) \quad (\text{C.24})$$

$$(\text{C.25})$$

Bibliografia

- [1] <http://www.texa.it>
- [2] <http://www.texatmd.com>
- [3] <http://www.euclideanspace.com>
- [4] David H. Titterton and John L. Weston, *Strapdown Inertial Navigation Technology-2nd Edition*, The Institution of Electrical Engineers, Chapter 10, 2004.
- [5] Nebot E., Durrant-Whyte H., *Initial Calibration and Alignment of Low Cost Inertial Navigation Units for Land Vehicle Applications*, Journal of Robotics Systems, Vol. 16, No. 2, February 1999, pp. 81-92.
- [6] Eric Vinande, Penina Axelrad, Dennis Akos, *Mounting-Angle Estimation for Personal Navigation Device*, IEEE TRANSACTION ON VEHICULAR TECHNOLOGY, 2010.
- [7] P. Groves, *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems*, Norwood, MA: Artech House, 2008.
- [8] Urban Maeder, Manfred Morari, *Attitude Estimation for Vehicles With Partial Inertial Measurement*, IEEE TRANSACTIONS ON VEHICULAR TECHNOLOGY, VOL.6, NO.4, MAY 2011.
- [9] Chul Woo Kang, Chan Gook Park, *Euler angle based attitude Estimation avoiding the singularity problem*, Mechanical and Aerospace Engineering Department, Seoul National University, Korea, September 2011.
- [10] F. Landis Markley, *Attitude Estimation or Quaternion Estimation?*
- [11] Maria Isabel Ribero, *Kalman and Extended Kalman Filters: Concept, Derivation and Properties*, Institute for Systems and Robotics, Lisboa, 2004.

- [12] Shuster, Malcolm D., *A Survey of Attitude Representations*, Journal of the Astronautical Sciences, Vol.41,1993.
- [13] Andrea Rindi, Susanna Papini, Luca Pugi, Jury Auciello, Mirko Ignesti, *Appunti del Corso di Meccanica del Veicolo-L'Autoveicolo*, Università degli studi di Firenze, 18 maggio 2012.
- [14] Wilmar Hernandez, *Improving the Responses of Several Accelerometers Used in a Car Under Performance Tests by Using Kalman Filtering*, Departments of Electronics and Instrumentation, University Institute for Automobile Research, Madrid, 2001.
- [15] Ali Almagbile, Jinling Wang, and Weidong Ding, *Evaluating the Performances of Adaptive Kalman Filter Methods in GPS/INS Integration*, Journal of Global Positioning Systems (2010) Vol.9, No.1.
- [16] X.Rong Li, Vesselin P.Jilkov, *A Survey of Maneuvering Target Tracking: Dynamic Models*, Department of Electrical Engineering, University of New Orleans, 2000.
- [17] Fredric M.Ham, R.Grover Brown, *Observability, Eigenvalues, and Kalman Filtering*, Department of Electrical Engineering, Iowa State University, March 1982.
- [18] u-blox 6 GPS module: Technical Data.
- [19] Carl Carter, *Principles of GPS, A Brief Primer on the Operation of the Global Positioning System*, ALLEN OSBORNE ASSOCIATES, February 1997.
- [20] Matej Andrejasic, *MEMS Accelerometers*, University of Ljubljana, 2008.
- [21] Frédéric Camps, Sébastien Harasse, André Monin, *Numerical calibration for 3-axis accelerometers and magnetometers*, University of Toulouse, France, 2009.
- [22] MMA7341L: Technical Data, Freescale Semiconductor.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare prima di tutto il mio relatore Lorenzo Vangelista per la disponibilità dimostratami nelle fasi cruciali della stesura della tesi.

Ringrazio il mio tutor Andrea Topan per la professionalità, il sostegno e i preziosi suggerimenti di carattere tecnico indispensabili per portare a termine il progetto.

Un ringraziamento va inoltre al gruppo di ricerca algoritmi e nuove tecnologie di TEXA per il contributo nelle varie fasi del lavoro e nella stesura della tesi: Stefano, Giulio, Roshanak.

Infine un grazie ai miei genitori per il prezioso supporto datomi in questi 5 lunghi anni di università.