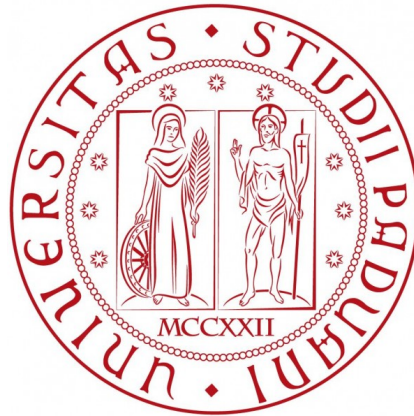


Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica



TESI DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA

STRUTTURA FISICA DELL'INTERNO DI
PIANETI TERRESTRI E GIGANTI

Relatore: Prof. Francesco Marzari

Laureando: Letizia Elia

ANNO ACCADEMICO 2015-2016

05/12/2016

*... Pourquoi l'azur muet et l'espace insondable?
Pourquoi les astres d'or fourmillant comme un sable? ...*
Arthur Rimbaud (Soleil et chair)

Indice

Introduzione	1
1 Classificazione dei pianeti	3
1.1 I materiali costitutivi dei pianeti	3
1.2 Classi di pianeti nella composizione	4
2 Equazioni di struttura	7
2.1 Equazioni di struttura dei <i>pianeti giganti</i>	8
2.1.1 Conservazione della massa	8
2.1.2 Conservazione dell'energia	8
2.1.3 Equilibrio idrostatico	10
Pressione interna ai <i>pianeti giganti</i>	11
2.1.4 Equazione di Stato (EOS)	12
2.2 Equazioni di struttura dei <i>pianeti terrestri</i>	15
2.2.1 Conservazione della massa	15
2.2.2 Equilibrio idrostatico	15
Pressione interna ai <i>pianeti terrestri</i>	15
2.2.3 Profilo adiabatico di temperatura	16
2.2.4 Equazione di stato (EOS)	18
L'equazione di Birch-Murnaghan	19
La formulazione di Mie-Grüneisen-Debye	22
3 Relazione raggio-massa	25
Conclusioni	27
A La <i>finite strain theory</i> ed il <i>green strain</i>	29
B La costante di Grüneisen	32
Bibliografia	35

Introduzione

Viviamo in un'epoca di continue scoperte in ambito scientifico, che allargano le nostre conoscenze in senso sia pratico che teorico. Ci siamo spinti persino oltre i confini del sistema solare.

Ciò che ci ha permesso di andare oltre questi limiti è l'intima convinzione, maturata da secoli, che la fisica non dipende nei suoi dettagli da dove si esegue un esperimento; configurando le peculiarità dei pianeti extra-solari in termini di pressioni, densità, e altro, possiamo in virtù di ciò studiare i pianeti all'interno del nostro sistema solare, per conoscere in linea di principio i meccanismi fisico-chimici alla base anche di altri pianeti: questo è il motivo per cui ci accingiamo a studiare il nostro sistema solare, in tutta la sua complessità.

Quest'ultimo, il cui motore primo è il Sole, è composto, secondo le moderne classificazioni (non tenendo conto di Plutone, declassato a pianeta nano nel 2006 dalla UAI¹) da ben 8 pianeti: Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove, Saturno, Urano, Nettuno; senza dimenticare la complessità caratterizzata dalla fascia principale e dalle miriadi di planetesimi e asteroidi Troiani, in lotta da secoli sotto le forze della gravità e le attenzioni di Marte e Giove.

Gli otto pianeti del nostro sistema solare sono molto diversi gli uni dagli altri, sia per caratteristiche cinematiche e dinamiche, sia per motivi chimico-fisici.

Nella nostra tesi avremo modo di esaltare queste ultime peculiarità, facendo emergere come una diversa composizione chimica dei pianeti si rifletta in diverse equazioni di struttura, alterando pressioni interne, densità e raggio, noti a livello sperimentale dal lavoro di diverse agenzie spaziali quali l'ESA e la NASA.

Molteplici sono le osservazioni e le spedizioni documentate che permettono uno studio approfondito dei pianeti del Sistema Solare. Si pensi alla missione Cassini, che aveva come obiettivo lo studio di Saturno e delle sue lune; le varie missioni su Marte, come *Mars Express* e *2001 Mars Odyssey*; i vari telescopi spaziali, come Hubble e Spitzer, che hanno rivoluzionato la visione che l'uomo ha dell'universo, oppure una delle ultime missioni, la celebre Rosetta, volta allo studio della cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko.

Queste missioni spaziali ci hanno permesso di conoscere in grande dettaglio diverse caratteristiche del nostro sistema solare. L'enorme interesse suscitato nella comunità scientifica internazionale ha condotto a confrontarle con quelle di sistemi extra solari. Le prime tracce degli esopianeti, infatti, risalgono al 1988, anno in cui un team di astronomi canadesi annunciò la scoperta di un oggetto extrasolare nella costellazione del Cefeo, identificandolo come un esopianeta. Purtroppo le misurazioni non erano abbastanza buone da costituire una base solida per la scoperta, e soltanto nel 2002 un altro team di astronomi del *Planetary Systems and their Formation Workshop* affermò con certezza che l'oggetto in questione fosse un pianeta, noto oggi come Tadmor. Ad oggi, grazie a nuovi telescopi spaziali come lo Spitzer, in base alle recenti

¹Unità astronomica internazionale.

classificazioni in continuo aggiornamento², sappiamo con certezza dell'esistenza di almeno 3541 pianeti extra-solari.

I metodi di indagine e studio non sono i medesimi utilizzati per i nostri pianeti; si pensi alle ovvie distanze che ci separano da loro (non dell'ordine di qualche U.A., bensì di anni e anni-luce). Ciononostante, la materia di cui sono composti è la medesima che possiamo studiare all'interno del nostro sistema solare: da qui una ulteriore motivazione dell'impostazione del nostro studio, che lungi dal voler essere una mera tassonomia planetaria, si prefigge lo scopo di gettare le basi di un dizionario cosmico. È pertanto di estrema importanza conoscere a fondo la grammatica di questo linguaggio, che per la fisica dei pianeti è composta dalle equazioni di struttura.

La filosofia naturale è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi, io dico l'universo, ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.
Galileo Galilei (Il Saggiatore)

²Ultimo aggiornamento al 12 Novembre 2016

Capitolo 1

Classificazione dei pianeti

In questo capitolo si discuterà la classificazione dei pianeti in base alla loro composizione chimica, a prescindere dalle caratteristiche dinamiche/orbitali. Si definiranno le classi di pianeti, a partire dalla classificazione chimica dei loro principali costituenti.

1.1 I materiali costitutivi dei pianeti

Il luogo di formazione dei sistemi planetari sono i dischi di accrescimento protoplanetari, cioè strutture discoidali di gas e polveri in orbita attorno ad una stella o ad una protostella. A livello cosmico, i materiali più presenti nei dischi protoplanetari, possono essere divisi in tre gruppi generici in base alla loro composizione chimica:

- *Gas*: i materiali che non condensano sotto le plausibili condizioni in cui si forma il pianeta, tra cui ad esempio H_2 e He;
- *Ghiacci*: i materiali che formano composti volatili e condensano solo a basse temperature, come H_2O e CH_4 ;
- *Rocce*: i materiali che condensano ad alte temperature, i quali costituiscono i "mattoni" che compongono i *pianeti terrestri*; essi includono sia materiali metallici (come Fe), che quelli comunemente chiamati rocce (ossidi e silicati).

Gas, *ghiacci* e *rocce* rappresentano anche una classificazione dei materiali in ordine decrescente di volatilità, che in genere corrisponde ad un ordine crescente di densità e rigidità del materiale. La rigidità è ben descritta dai parametri termodinamici:

$$\begin{array}{ll} \text{Modulo di compressibilità isoterma} & K_T = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \\ \text{Modulo di compressibilità adiabatica} & K_S = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \end{array}$$

dove p è la pressione, T la temperatura, ρ la densità e S l'entropia. I coefficienti di comprimibilità sono una misura del grado di interazione tra le molecole nei materiali: se le molecole sono poco legate o volatili, i materiali si comprimono facilmente (coefficiente di comprimibilità alto); se le molecole sono molto legate, i materiali sono rigidi (coefficiente di comprimibilità basso).

1.2 Classi di pianeti nella composizione

La classificazione dei pianeti in base alla composizione chimica si basa sulla distinzione dei materiali *gas*, *ghiacci* e *rocce*.

I pianeti si formano in dischi circumstellari, i quali hanno abbondanze elementali simili alle loro stelle. Le abbondanze cosmiche sono determinate dalla fisica nucleare, per cui è naturale pensare che - come dimostrato sperimentalmente - la maggior parte delle stelle abbiano simili abbondanze elementali, e di conseguenza che valga lo stesso per i loro pianeti.

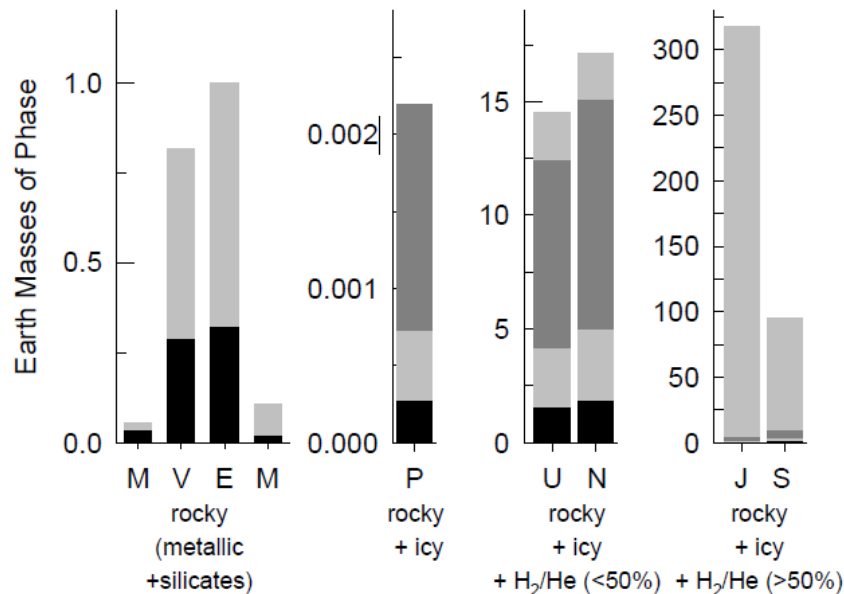


Figura 1.1. I quattro tipi di pianeti rappresentati da oggetti del sistema solare. Le ombreggiature indicano i contributi (in masse Terrestri) delle differenti classi di materiali: nei *pianeti terrestri* si hanno in nero i metalli, in grigio i silicati; negli altri si hanno in nero i metalli, in grigio scuro i ghiacci, in grigio chiaro H₂ e He gassosi. (Lodders, 2009, [10])

Nel sistema solare, e dunque molto probabilmente nei sistemi di esopianeti, si possono individuare quattro tipi di pianeti:

- *Pianeti di tipo terrestre*: sono composti principalmente di materiali rocciosi (silicati e metalli). Le atmosfere presenti danno un contributo marginale alla massa totale.
Nel Sistema Solare sono rappresentati da Mercurio, Venere, Terra.
- *Giganti di gas*: in tali pianeti dominano l'idrogeno e l'elio, rappresentando anche più del 50% della massa totale. La loro composizione è molto simile a quella della stella ospitante, se non per la presenza di una modesta percentuale di elementi di tipo *ghiacci* e *rocce*.
Nel Sistema Solare sono rappresentati da Saturno e Giove, pertanto sono noti come pianeti *Gioviani*.
- *Giganti di ghiacci*: sono prevalentemente composti da materiali di tipo *ghiaccio* e *rocce* (in ordine decrescente di frazioni di massa), e da *gas* idrogeno ed elio in percentuale molto minore che nei *giganti di gas* (sotto il 50%).

Esponenti di questa classe di pianeti nel Sistema Solare sono Urano e Nettuno, in cui le percentuali di idrogeno ed elio non sono oltre il 20%. Ci si riferisce a tali pianeti come *Nettuniani*.

- *Pianeti di tipo rocce e ghiacci*: sono composti quasi completamente da *ghiacci* e *rocce* e, specie i più massivi, possono avere atmosfere composte di *ghiacci* evaporati.

Nel Sistema Solare i pianeti di questo tipo, detti *Plutoniani*, sono molti, Plutone, parte degli Oggetti Trans-Nettuniani (TNO), in particolare quelli della fascia di Kuiper.

Le abbondanze relative di *gas*, *ghiacci* e *rocce* in unità di masse terrestri per i pianeti del Sistema Solare è rappresentata nella figura 1.1.

Capitolo 2

Equazioni di struttura

I pianeti sono degli oggetti compatti, e in quanto tali la loro struttura interna dipende fortemente dalla composizione, a differenza degli oggetti espansi, come le stelle, dove il bilancio meccanico dipende debolmente dalla composizione, ma fortemente dalla temperatura.

In generale, per costruire un modello, si parte dalla composizione più plausibile in base ai dati sperimentali (come densità media, schiacciamento polare e altri), si costruisce un modello i cui dati di *output* sono da confrontare con i dati sperimentali e dal confronto si può dedurre la precisione del modello. Nel caso in cui il confronto non sia positivo, bisogna assumere una composizione diversa e costruire un nuovo modello. Il processo viene reiterato fino a quando i dati di *output* del modello e i dati sperimentali coincidono entro i limiti stabiliti in base al grado di accuratezza che si vuole ottenere.

I modelli di struttura interna dei pianeti accoppiano due tipi di equazioni: le equazioni della meccanica e l'equazione di stato. L'equazione di stato dipende dalla composizione e dalla distribuzione della materia costituente, e per poterla scrivere è necessario conoscere quali sono i materiali che compongono il pianeta, le abbondanze relative, la distribuzione all'interno del pianeta e gli stati di aggregazione possibili per ciascun materiale.

Per cui, dato che le composizioni chimiche dei pianeti determinano in modo significativo la struttura interna del pianeta, è di particolare interesse lo studio dell'interno dei *pianeti terrestri* e dei *pianeti giganti*, dove questi ultimi comprendono i *giganti di gas* e i *giganti di ghiacci*.

Lo scopo di questo capitolo è discutere le equazioni di struttura (della meccanica e di stato) di queste due classi di pianeti, evidenziandone analogie e differenze, dovute in particolare alle dimensioni e alla composizione differenti.

Per costruire i vari modelli si assume che il sistema "pianeta" si possa considerare con buona approssimazione come un sistema chiuso. Infatti, gli unici scambi di materia con l'esterno si devono a collisioni con oggetti extraplanetari, tuttavia, negli intervalli temporali tipici della termodinamica del pianeta, questi apporti di materia sono trascurabili rispetto alla massa totale.

In prima approssimazione un pianeta si considera come un oggetto fluido non rotante e privo di campo magnetico, in cui la gravità e la pressione sono le uniche forze agenti al suo interno. Queste ipotesi implicano che i risultati che si andranno a cercare debbano avere simmetria sferica. Supponiamo inoltre che il materiale del pianeta sia isotropo.

2.1 Equazioni di struttura dei *pianeti giganti*

La grande maggioranza della materia planetaria, nel sistema solare e della galassia, è nascosta all'interno dei *pianeti giganti*. Si considera in prima approssimazione che i *pianeti giganti* abbiano una composizione cosmica (H, He), senza tenere conto della presenza dei materiali pesanti, i quali potrebbero presentarsi mescolati a H e He, oppure potrebbero formare un *core* solido nel centro del pianeta. Pertanto si parte con lo studio dei cosiddetti *giganti di gas*, come Giove e Saturno. La ragione per la quale queste teorie sono state sviluppate primariamente per questa classe, risiede nel fatto che per questi pianeti sono presenti molti più dati sperimentali che per Nettuno e Urano, i quali, data la loro posizione, consentono osservazioni meno precise.

Si considera poi che all'interno dei *pianeti giganti* la viscosità sia trascurabile.

Le equazioni di struttura dei *pianeti giganti* danno la massa, la pressione, la temperatura e la luminosità in funzione del raggio, e l'equazione di stato modella il materiale interno al pianeta.

2.1.1 Conservazione della massa

Dato che consideriamo la presenza di sole forze centrali, supponiamo che il pianeta abbia forma sferica. Consideriamo dunque una sovrapposizione di gusci sferici (*shell*) di spessore infinitesimo dr , ognuna con un definito valore di densità ρ , la quale dipende dalla composizione del pianeta, dalla temperatura T e dalla pressione p .

La prima equazione della meccanica è la seguente

$$dM = 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad , \quad (2.1)$$

la quale rappresenta la massa entro una generica *shell* di spessore dr .

La massa totale del pianeta di raggio R è

$$M = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r) dr \quad . \quad (2.2)$$

2.1.2 Conservazione dell'energia

Sin dagli inizi del '900 si iniziò a pensare che l'interno dei pianeti *Gioviani* potesse essere caldo, e che, data l'imponente massa, potessero presentare una luminosità intrinseca non trascurabile. La luminosità intrinseca L , grandezza ancor più nota nell'ambito della struttura stellare, è l'energia totale emessa per unità di tempo dal pianeta (o comunque da qualsiasi oggetto astronomico).

È intuitivo pensare che la luminosità diventi considerevole per oggetti molto massivi, ed infatti verrà considerata solo per i *pianeti giganti*, e non i *terrestri*.

La luminosità nei pianeti può essere causata da espansioni o contrazioni¹ (dunque, in termini termodinamici, lavoro), oppure da cambi dell'energia interna, mentre viene trascurato il contributo positivo alla luminosità dovuto alla pressione di radiazione (la pressione di radiazione diventa importante oltre le 10 masse *Gioviane*).

Sotto le stesse ipotesi dei paragrafi precedenti, si avrà allora che la variazione di luminosità per una *shell* infinitesima del pianeta, compresa tra r e $r + dr$, è:

$$\frac{dL}{dr} = -4\pi r^2 \rho \left(p \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad , \quad (2.3)$$

¹Si veda ad esempio il meccanismo di Kelvin-Helmholtz, secondo il quale le contrazioni sono dovute al raffreddamento del pianeta.

dove $L = L(r)$ è l'energia che fluisce attraverso una sfera di raggio r , u è l'energia interna per unità di massa, V è il volume specifico, t il tempo, p la pressione. Dal primo e secondo principio della termodinamica, la (2.3) può essere riscritta come

$$\frac{dL}{dr} = -4\pi r^2 \rho \left(T \frac{\partial s}{\partial t} \right) \quad , \quad (2.4)$$

dove s è l'entropia per unità di massa.

Si noti che valgono le osservazioni qualitative fatte in precedenza: la luminosità L dipende dalla massa del pianeta, e a parità di entropia specifica s , sarà maggiore per pianeti più massivi.

Per un modello più completo bisognerebbe inserire una equazione che descrive il trasporto dell'energia. Supponiamo che il trasporto dell'energia sia dovuto alla radiazione, allora il flusso di energia obbedisce all'equazione di diffusione

$$\mathbf{j} = -D\nabla U_\nu \quad , \quad (2.5)$$

dove \mathbf{j} è il flusso di radiazione, D è il coefficiente di diffusione, che si dimostra possa essere uguale a $\frac{cl_{ph}}{3}$ (Clayton 1968), dove c è la velocità della luce e l_{ph} è il cammino libero medio dei fotoni, e U_ν è la densità di energia per una data frequenza.

Dato che tutte le variabili variano solo radialmente, si può riscrivere l'equazione di diffusione come:

$$\phi_\nu = -\frac{c}{3\kappa_\nu \rho} \frac{\partial U_\nu}{\partial r} \quad , \quad (2.6)$$

dove ϕ_ν è il flusso radiale per unità di lunghezza d'onda e superficie.

Assumendo che la densità di energia sia proporzionale alla funzione di Planck per il corpo nero $B_\nu(T)$, si ha

$$U_\nu(T) = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\frac{h\nu}{kT} - 1} \quad . \quad (2.7)$$

Il flusso totale si può ottenere integrando su tutte le frequenze:

$$\phi = -\left[\frac{4\pi}{3\rho} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu \right] \frac{\partial T}{\partial r} \quad . \quad (2.8)$$

È conveniente definire il parametro opacità media di Rosseland come

$$\kappa_R = \left[\frac{\pi}{acT^3} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu \right]^{-1} \quad . \quad (2.9)$$

Assumendo poi che l'interno del pianeta sia prevalentemente un ambiente radiativo, si ha che vale la relazione tra luminosità L e flusso di energia F : $L = 4\pi r^2 F$, per cui, dalle (2.8) e (2.9)

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{3}{16\pi ac} \frac{\kappa_R \rho L}{r^2 T^3} \quad . \quad (2.10)$$

In un ambiente radiativo, come l'interno di un *gigante gassoso*, la variazione della temperatura sarà più rapida quando la luminosità è più alta. Se invece la luminosità fosse nulla si otterrebbero isoterme, come ci si aspetta dalla termodinamica.

Nel caso di *giganti gassosi*, sono molti gli elettroni liberi all'interno del pianeta. Questi contribuiscono al trasporto del calore all'interno del pianeta, e dunque portano ad un aumento dell'opacità e contribuiscono all'andamento della variazione di temperatura.

Se K_c è la conduttività termometrica (deriva dall'equazione di diffusione del flusso di calore $\mathbf{Q} = -K_c \nabla T$), si ha che la relazione tra quest'ultima e l'opacità dovuta alla conduttività è

$$\kappa_c = \frac{4acT^3}{3K_c\rho} \quad . \quad (2.11)$$

Si dimostra che le opacità per la radiazione e conduzione sono additive, si può pertanto definire l'opacità totale:

$$\kappa^{-1} = \kappa_R^{-1} + \kappa_c^{-1} \quad (2.12)$$

che caratterizza in modo complessivo l'equazione di diffusione e il profilo della temperatura.

2.1.3 Equilibrio idrostatico

Si cerca una relazione che esprima la variazione della pressione P in funzione del raggio r .

Assumiamo che il pianeta sia in equilibrio idrostatico sotto la sua stessa gravità, cioè che la forza di gravità, diretta verso l'interno, bilanci esattamente la pressione dovuta ai costituenti del pianeta, diretta verso l'esterno. L'evoluzione del pianeta è sufficientemente lenta, per cui è ragionevole assumere che la sua struttura interna sia costante e, di conseguenza, che l'assunzione di equilibrio idrostatico sia ben giustificata.

Ipotizziamo nuovamente che il pianeta sia un oggetto non rotante, e che quindi la materia sia distribuita al suo interno con simmetria sferica, cioè che la densità ρ dipenda solo dalla coordinata sferica r .

Sia $dM(r)$ la massa del guscio sferico compreso tra r e $r + dr$:

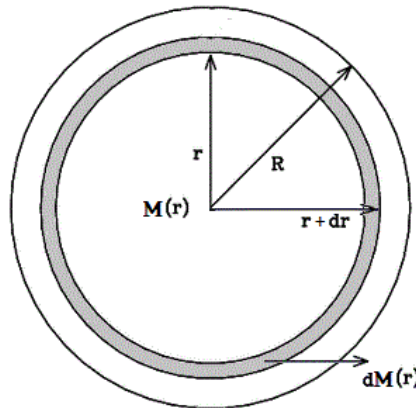


Figura 2.1. Un pianeta di raggio R . La quantità $dM(r)$ rappresenta la massa del guscio sferico di raggio interno ed esterno r e $r + dr$ rispettivamente.

Allora la forza gravitazionale agente su tale guscio sferico, ipotizzando che il materiale fuori dal guscio non dia alcun contributo, è

$$F_g = -\frac{GM(r)dM(r)}{r^2} \quad ,$$

in cui G è la costante gravitazionale, $G \approx 6.674 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2\text{kg}}$.

In condizione di equilibrio idrostatico la forza gravitazionale sarà equilibrata dalla

pressione interna agente sul guscio. Sia $dp(r)$ la variazione di pressione tra r e $r + dr$; si ottiene così l'equazione di *equilibrio idrostatico* o di *compressione gravitazionale*:

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\rho(r)g(r) \quad (2.13)$$

dove l'accelerazione di gravità g è espressa da²

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} \quad . \quad (2.15)$$

Si indichi con z la profondità $z = R - r$, l'equazione (2.13) si può riscrivere come

$$\frac{dp}{dz} = \frac{GM(R-z)}{(R-z)^2} \rho(R-z) \quad . \quad (2.16)$$

Combinando le due equazioni della meccanica (2.1) e (2.13), si ottiene

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dp}{dr} \right) = -4G\pi r^2 \rho(r) \quad , \quad (2.17)$$

la quale è l'*equazione della struttura meccanica* ed è l'equazione necessaria per ricavare il profilo di densità $\rho(r)$ di corpi massivi autogravitanti.

Pressione interna ai *pianeti giganti*

Per i pianeti di tipo gigante ci si aspettano grandi variazioni della densità all'interno, essendo essi costituiti da materiale molto comprimibile. Non si può pertanto pensare di approssimare il valore della densità ρ con il suo valore medio. I pianeti giganti si trattano dunque come le stelle, partendo dall'equazione dell'equilibrio idrostatico. Si suppone che la pressione sulla superficie del pianeta sia nulla ($p(R) = 0$), ipotesi la cui validità prescinde dalla pressione atmosferica, essendo le pressioni interne molto alte, dell'ordine di 10^6 bar - 100 GPa. Con un'opportuna approssimazione si ottiene

$$\frac{dp}{dr} \rightarrow \frac{P_c}{R} \simeq \frac{GM}{R^2} \frac{M}{R^3} \quad , \quad (2.18)$$

dove P_c è la pressione al centro del pianeta gigante, da cui

$$P_c \simeq \frac{GM^2}{R^4} \quad . \quad (2.19)$$

L'equazione (2.19) fornisce una stima della pressione centrale per corpi molto massivi. Per Giove, emblema dei *pianeti giganti*, il valore di P_c risulterebbe pari a

$$P_c \simeq \frac{6.67 \times 1^{-8} (1.9 \times 10^{30})^2}{(7 \times 19^9)^4} \simeq 10^{14} \text{Ba} = 10 \text{ TPa} \quad ,$$

dello stesso ordine di grandezza del valore di P_c calcolato con un modello realistico, pari a 4.5 TPa.

²La relazione (2.15) si ricava dal teorema di Gauss, in base al quale il flusso di gravità \mathbf{g} attraverso la superficie S è dato dall'integrale

$$\varphi_{\mathbf{g}} = \int_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -g \int_S \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dS = -g4\pi r^2 = -4\pi GM(r) \quad , \quad (2.14)$$

in cui si è usato il fatto che S è una superficie sferica.

2.1.4 Equazione di Stato (EOS)

Si cerca l'equazione di stato per materiali planetari ad alta pressione, ovvero la relazione tra la pressione p e la densità ρ .

Per procedere, bisogna prima fare delle considerazioni fisiche: confrontando le pressioni trovate all'interno dei *pianeti giganti* con le pressioni minime necessarie per delocalizzare gli elettroni più esterni degli atomi componenti il materiale, si trova che le pressioni interne centrali sono talmente elevate da dar luogo alla delocalizzazione o liberazione degli elettroni più esterni. Tale fenomeno è detto metallizzazione indotta dalla pressione: sia i materiali conduttori che non, ad una pressione sopra ai 100 GPa, si comportano come metalli in cui gli elettroni più esterni sono liberi di muoversi entro un potenziale approssimativamente costante, pur rimanendo confinati entro il metallo.

Infatti l'energia minima per la delocalizzazione degli elettroni esterni è dell'ordine di

$$B = \Delta E \simeq 5 \text{ eV} \quad ,$$

e la pressione necessaria per compiere un lavoro di tale ordine di grandezza è approssimativamente

$$p = \frac{\Delta E}{\Delta V} \simeq \frac{5 \text{ eV}}{9(5.29)^3 \times 10^{-33} \text{ m}^3} \simeq 200 \text{ GPa} \quad ,$$

dove $\Delta V = (3a_0)^3$ è il volume medio del costituente elementare su cui agisce la pressione, e a_0 è il raggio di Bohr.

Per pressioni maggiori a 200 GPa avviene allora il fenomeno della metallizzazione indotta; gli interni planetari di *pianeti giganti* presentano una pressione che supera di gran lunga tale valore, ragion per cui il materiale interno si comporterà come un metallo.

Per cui per un corpo costituito da idrogeno, la presenza di pressioni superiori a 200 GPa implica la transizione da idrogeno molecolare a idrogeno metallico. Lo stato fisico dei pianeti pertanto sarà composto dal gas di elettroni di conduzione liberati dalla metallizzazione, e dagli atomi originari privati degli elettroni esterni resi liberi (*core* ionici).

Per trovare l'equazione di stato di un *pianeta gigante* bisogna tenere conto di questo fenomeno.

Si consideri un volume V dell'interno planetario, abbastanza grande da poter applicare la meccanica statistica e abbastanza piccolo da poter ritenere costante la densità. Sia N il numero di elettroni liberi nel volume V e n la loro densità numerica ($n = \frac{N}{V}$). A ciascun elettrone si associa il volume $v = \frac{V}{N} = \frac{1}{n}$ e sia s il raggio della sfera di volume uguale a v . Pertanto si avrà $n = \frac{3}{4\pi s^3}$. Il parametro s fornisce una misura della distanza interelettronica e la distanza tra due elettroni adiacenti è $r_e = \left(\frac{4}{3}\pi\right)^{\frac{1}{3}} s$.

Sia Z il numero di elettroni di conduzione per *core* ionico, dato dalla differenza tra il numero di elettroni dell'atomo e il numero di elettroni legati al *core* ($Z = Z_{\text{atomo}} - Z_{\text{core}}$) e sia A il numero di massa del *core* ionico. La densità numerica si può esprimere anche come

$$n = Z \frac{\rho}{A m_p} \quad , \quad (2.20)$$

dove $\frac{\rho}{A m_p}$ è il numero di *core* ionici per unità di volume e m_p è la massa del protone (si ricordi che la relazione tra la massa del protone e il numero di avogadro è $N_A m_p = 1$

g).

Nel caso di un *gigante gassoso* ($A = 1, Z = 1$) si ha che la densità è $n \sim 10^{30} \text{ m}^{-3}$ e $s \sim 0.6 \times 10^{-10} \text{ m}$. Data l'alta densità numerica si può applicare la teoria di Fermi-Dirac: gli elettroni mantengono una distanza media mutua dell'ordine di 10^{-10} m e si muovono di moto browniano, non tanto per evitare le collisioni, ma quanto per mantenere una determinata distanza in modo da soddisfare il principio di indeterminazione, o quello di esclusione di Pauli.

Lo stato macroscopico di Giove è lo stato liquido, mentre quello microscopico sarà pertanto un gas di elettroni immersi tra i *core* (protoni).

Si può dunque trovare la relazione tra pressione p e distanza interelettronica s : si considera la variazione di energia

$$dE = TdS - pdV + \mu dN \quad , \quad (2.21)$$

dove dS è la variazione di entropia, TdS è il calore assorbito dagli elettroni, μ è la massa del *core* ionico e dN è la variazione del numero di elettroni. Nel caso in considerazione $TdS = 0$ poiché gli effetti termici non riguardano gli elettroni al di sotto di 10^5 K (temperatura interna ad un pianeta come Giove) e $dN = 0$, per cui si ha $p = - \left(\frac{dE}{dV} \right)_{S,N}$. Rimaneggiando tale equazione, si ha

$$p = - \frac{dE}{dV} = - \frac{d(E/N)}{d(V/N)} = - \frac{de}{dV} = - \frac{1}{4\pi s^2} \frac{de}{ds} \quad , \quad (2.22)$$

in cui si è ridefinito il volume $V \equiv \frac{V}{N}$ come volume specifico.

Per procedere si deve trovare la relazione tra l'energia per costituente elementare e e la distanza interelettronica s . Si risolve l'equazione di Shroedinger

$$H\psi = E\psi \quad (2.23)$$

con

$$H = - \sum_i \frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_i^2 - \sum_j \frac{\hbar^2}{2Am_p} \nabla_j^2 + \sum_{i < i'} \frac{e^2}{r_{ii'}} + \sum_{j < j'} \frac{Z^2 e^2}{r_{jj'}} - \sum_{ij} \frac{Ze^2}{r_{ij}} \quad . \quad (2.24)$$

L'hamiltoniano H è somma delle energie cinetiche e potenziali (dovuti all'interazione coulombiana) degli elettroni e dei *core* ionici. Poiché la massa dei *core* è molto grande, si può trascurare in prima approssimazione il secondo termine dell'hamiltoniano, e, dato che l'interazione tra i *core* viene schermata dagli elettroni, si può trascurare anche il quarto termine. Il termine cinetico invece prevale alle alte pressioni, essendo l'energia cinetica degli elettroni inversamente proporzionale al quadrato della distanza s .

L'equazione di Schroedinger può essere risolta tramite approssimazioni successive: scrivendo l'hamiltoniano H come somma di due termini $H = H_0 + H'$ si ha

$$H\psi_0 = H_0\psi_0 + H'\psi_0 = E\psi_0 \quad , \quad (2.25)$$

dove ψ_0 è una combinazione di prodotti di stati di particelle singole che va opportunamente antisimmetrizzata e l'energia è

$$E = \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | H_0 | \psi_0 \rangle + \langle \psi_0 | H' | \psi_0 \rangle = E_0 + E_{coul} + E_{sc} \quad , \quad (2.26)$$

dove E_0 è l'energia cinetica quantistica, E_{coul} è l'energia coulombiana classica e E_{sc} è l'energia coulombiana di scambio (teoria di Thomas-Fermi-Dirac).

Si possono dunque ricavare le energie per costituente elementare:

$$\epsilon_0 = \frac{3}{5} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{e^2}{2a_0} \frac{1}{(s/a_0)^2} = \frac{30.05}{(s/a_0)^2} \text{eV} \quad (2.27)$$

$$\epsilon_{coul} = -24.48 \frac{Z^{\frac{2}{3}}}{s/a_0} \text{eV} \quad (2.28)$$

$$\epsilon_{sc} = - \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{3}{4\pi} \frac{e^2}{s} = \frac{-12.46}{s/a_0} \text{eV} \quad . \quad (2.29)$$

Come illustrato, la pressione interna di origine microscopica nasce dal comportamento quantistico del materiale planetario; pertanto la pressione sarà

$$p = -\frac{dE}{dV} = -\frac{1}{4\pi s^2} \frac{d\epsilon(s)}{ds} = -\frac{1}{4\pi a_0^3} \frac{1}{(s/a_0)^2} \frac{d\epsilon(s/a_0)}{d(s/a_0)} = -0.86 \frac{1}{(s/a_0)^2} \frac{d\epsilon(s/a_0)}{d(s/a_0)} \quad , \quad (2.30)$$

dove ϵ è l'energia totale media, data da

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_{coul} + \epsilon_{sc} = \left(\frac{30.05}{(s/a_0)^2} - \frac{24.48Z^{\frac{2}{3}}}{s/a_0} - \frac{12.46}{s/a_0} \right) \text{eV} \quad ; \quad (2.31)$$

derivandola rispetto alla distanza interelettronica s si ottiene la pressione

$$p = 86 \left(\frac{60.1}{(s/a_0)^5} + \frac{24.48Z^{\frac{2}{3}}}{(s/a_0)^4} + \frac{12.46}{(s/a_0)^4} \right) \text{GPa} = \frac{51.7}{(s/a_0)^5} - \frac{21.1Z^{\frac{2}{3}} + 10.7}{(s/a_0)^4} \times 10^2 \text{GPa} \quad , \quad (2.32)$$

dove il primo termine è detto pressione di degenerazione, il secondo pressione coulombiana.

Ridefinendo la distanza s come

$$s = a_0 \left(\frac{3Am_p}{4\pi Z\rho} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.33)$$

ci si può scrivere la pressione in funzione della sola densità $p = p(\rho)$, e inserendola nell'*equazione di struttura meccanica* (2.17)

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dp}{dr} \right) = -4G\pi r^2 \rho(r) \quad ,$$

si ottiene l'equazione di stato. L'equazione di stato è per una sola specie di materia (A fissato), mentre per le miscele di specie bisogna calcolare separatamente la pressione per ciascuna specie e poi sommare le pressioni, tenendo conto delle frazioni in volume delle varie specie presenti.

Tale equazione di stato, nella pratica, si risolve numericamente, determinando pressione, densità, gravità, momenti di inerzia e altro.

2.2 Equazioni di struttura dei *pianeti terrestri*

La maggior parte dei modelli fisici assume che l'interno dei *pianeti terrestri* sia formato da tre materiali di base (ferro, silicati e acqua), fra loro miscelati e presenti in varie fasi, e che ogni pianeta presenti composizione e struttura interna propri. Per via di questa composizione, i materiali dei *pianeti terrestri* vengono considerati come materiali plastici, e, in particolare le equazioni di stato, dipenderanno dagli elementi chimici presenti.

2.2.1 Conservazione della massa

Le ipotesi fatte nel caso dei *pianeti giganti* valgono anche per i *pianeti terrestri*: il pianeta si considera un sistema chiuso e con forma sferica. Tuttavia, i *pianeti terrestri* hanno una composizione diversa dai giganti, e questo implica delle conseguenze. Nel caso di *pianeti terrestri* si ipotizza che il pianeta sia formato da più strati concentrici (*layers*), ognuno con la sua composizione. Ad esempio nel caso della terra i *layers* sono in prima approssimazione il nucleo, il mantello e la crosta. Data la diversa composizione, la densità ρ varierà passando da un *layer* all'altro, diciamo in modo discontinuo. Per cui l'integrale (2.2), che si riporta nuovamente qui,

$$M = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r) dr \quad .$$

si dividerà in più integrali, che rappresentano l'equazione di stato di ogni singolo *layer*

$$M_{terr} = 4\pi \sum_{i=1}^n \int_{R_i}^{R_{i+1}} r^2 \rho_i(r) dr \quad , \quad (2.34)$$

dove i è l'indice di ogni *layer*, ρ_i è la densità del singolo *layer* e $R_1 = 0$.

2.2.2 Equilibrio idrostatico

L'equilibrio idrostatico per i *pianeti terrestri*, assume la stessa forma che nei *pianeti giganti* (2.1.3), dato che le ipotesi da cui partire sono le stesse. Pertanto l'equazione di equilibrio idrostatico o di compressione gravitazionale per un pianeta terrestre sarà

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\rho(r)g(r) \quad , \quad (2.35)$$

dove g è l'accelerazione di gravità, e allo stesso modo si ha l'equazione di struttura meccanica

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dp}{dr} \right) = -4G\pi r^2 \rho(r) \quad . \quad (2.36)$$

Pressione interna ai *pianeti terrestri*

Tramite l'equazione di equilibrio idrostatico è possibile dare una stima della pressione interna al pianeta. Integrando l'equazione di equilibrio idrostatico si ottiene

$$\int_{p(r)}^{p(R)} dp = -G \int_r^R \frac{M(r')\rho(r')}{r'^2} dr' \quad . \quad (2.37)$$

In modo analogo a quanto fatto per i *pianeti Gioviniani*, si suppone che la pressione sulla superficie del pianeta sia nulla $p(R) = 0$, per cui si ha

$$p(r) \simeq G \int_r^R \frac{\rho(r')M(r')}{r'^2} dr' \quad . \quad (2.38)$$

Inserendovi l'espressione della massa (2.2), si ottiene

$$p(r) \simeq G \int_r^R \frac{\rho(r')}{r'^2} \left(\int_0^{r'} 4\pi r''^2 \rho(r'') dr'' \right) dr' \quad . \quad (2.39)$$

Si osservi che, essendo un integrale doppio, la pressione che si ottiene ha un andamento continuo e difficilmente può dare informazioni sulla stratificazione della materia interna, indice di discontinuità.

La pressione massima è la pressione centrale:

$$p(0) = P_c \simeq G \int_0^R \rho(r) \frac{M(r)}{r^2} dr \quad . \quad (2.40)$$

Per i pianeti di tipo terrestre, al fine di dare delle stime, si può sostituire alla densità $\rho(r)$ il suo valore medio ρ_0 , non essendo essi costituiti da materiale molto comprimibile.

Sostituendo alla massa $M(r)$ il valore $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0$, si ottiene

$$P_c \simeq G \frac{4}{3} \pi \rho_0^2 \int_0^R r dr = G \frac{2}{3} \pi \rho_0^2 R^2 \quad (2.41)$$

da cui, essendo $\rho_0 = \frac{3M}{4\pi R^3}$, si ha

$$P_c \simeq \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4} \quad . \quad (2.42)$$

Per la Terra, il più conosciuto tra i *pianeti terrestri*, il valore della pressione centrale risulterebbe pari a

$$P_c \simeq \frac{3}{8\pi} \frac{6.67 \times 10^{-8} (6 \times 10^{27})^2}{(6.37 \times 10^8)^4} Ba = 1.74 \times 10^{12} Ba \sim 200 \text{ GPa}$$

Pur trattandosi di un'approssimazione, si ottiene l'ordine di grandezza corretto. Il valore dato dai modelli realistici di P_c è infatti uguale a 380 GPa.

2.2.3 Profilo adiabatico di temperatura

La temperatura è un parametro termodinamico molto importante per lo studio dell'interno dei pianeti perché ne influenza molti aspetti, tra i quali viscosità e convezione. Pertanto si vuole tracciare un profilo adiabatico della temperatura, e per farlo si ipotizza che il pianeta sia un sistema termodinamico chiuso (dalla conservazione della massa), ma anche adiabatico.

Si definiscono i calori specifici a volume costante c_V e a pressione costante c_p :

$$\begin{aligned} c_V &= \left(\frac{dq}{dT} \right)_V = T \left(\frac{ds}{dT} \right)_V \\ c_p &= \left(\frac{dq}{dT} \right)_p = T \left(\frac{ds}{dT} \right)_p \end{aligned} \quad , \quad (2.43)$$

dove q è la quantità di calore specifica, s è l'entropia per unità di massa, V è il volume per unità di massa. Per la trattazione successiva è utile ricordare anche la definizione del coefficiente di dilatazione termica

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{T} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \quad (2.44)$$

e del modulo di compressibilità isoterma

$$K_T = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = p \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_T \quad , \quad (2.45)$$

dove il penultimo passaggio è giustificato dalla conservazione della massa già espressa in (2.2).

Si tenga conto anche delle quattro relazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_s &= - \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_V & \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s &= \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p \\ \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p &= - \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T & \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_T &= \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \end{aligned} \quad . \quad (2.46)$$

La quantità di calore specifica q , in base al Secondo Principio della termodinamica, per un sistema in equilibrio termodinamico, è:

$$dq = T ds = T \left[\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp \right] \quad ,$$

in cui si sono poste la temperatura e la pressione come variabili indipendenti. Infatti, per il Primo e il Secondo Principio della termodinamica, in un sistema adiabatico la quantità di calore specifica può essere scritta come $dq = T ds = du + pdV$, in cui compaiono quattro variabili termodinamiche, di cui solo due sono indipendenti.

Allo stesso modo si ha

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T dV \quad . \quad (2.47)$$

Da questo si ottiene

$$dq = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT + T \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \left[\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T dV \right] \quad .$$

Si può ora studiare la dipendenza del calore dalla temperatura, col vincolo di volume costante ($dV = 0$):

$$\left(\frac{dq}{dT} \right)_V = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p + T \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad .$$

Dalle equazioni (2.43) e (2.46), si ottiene dunque

$$c_p - c_V = T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad . \quad (2.48)$$

La seconda derivata parziale può essere riscritta notando che il differenziale totale per dV è

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp \quad .$$

Dato che il volume è tenuto costante, usando le (2.45) e (2.44), si ha

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} = \alpha K_T \quad . \quad (2.49)$$

Si consideri adesso l'espressione per la variazione di entropia, ottenuta da (2.43) e dalle relazioni di Maxwell (2.46):

$$ds = \frac{c_V}{T} dT + \left(\frac{dp}{dT}\right)_V dV \quad . \quad (2.50)$$

Mettendo insieme (2.50), (2.49) e usando il fatto che $dV = -\frac{d\rho}{\rho^2}$, si può scrivere la quantità di calore specifica come

$$dq = tds = c_v dT - \frac{1}{\rho} T \alpha K_T \frac{d\rho}{\rho} \quad .$$

Il rapporto $\frac{d\rho}{\rho}$ si può riscrivere come

$$\frac{d\rho}{\rho} = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln p}\right)_T d \ln p + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_p d \ln T = \frac{dp}{K_T} - \alpha dT \quad ,$$

in cui si è tenuto conto delle (2.44) e (2.45).
Pertanto la quantità di calore specifica è

$$dq = \left(c_V + \frac{T \alpha^2 K_T}{\rho}\right) dT - \frac{T \alpha}{\rho} dp \quad ,$$

che in virtù della (2.48) diventa

$$dq = c_p dT - \frac{T \alpha}{\rho} dp \quad .$$

Supponendo che il pianeta sia anche un sistema adiabatico ($dq = 0$ e entropia specifica costante), si ottiene il profilo adiabatico della temperatura

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{T \alpha}{\rho c_p} \quad . \quad (2.51)$$

2.2.4 Equazione di stato (EOS)

L'equazione di stato lega la densità alla temperatura e alla pressione. Le equazioni di struttura di *pianeti terrestri* vogliono modellizzare l'interno del pianeta guardandolo come un materiale plastico, dalla viscosità non trascurabile. Nello studio dell'interno dei pianeti si usano due differenti approcci che si fondano rispettivamente sull'equazione di stato di Birch-Murnaghan e sulla formulazione di Mie-Grüneisen-Debye.

L'equazione di Birch-Murnaghan

Questo approccio tiene conto dell'influenza della temperatura sui parametri che descrivono i materiali presenti nell'interno del pianeta, partendo da considerazioni termodinamiche e meccaniche, senza scendere alla scala atomica.

L'obiettivo dello studio che ha portato a questa equazione, era quello di trovare un modello fisico che rispecchiasse la tendenza di un materiale, sotto un certo range di pressioni, ad essere deformato sotto la compressione, e la sua inerzia alla compressione al crescere dello sforzo applicato.

L'equazione di Birch-Murnaghan deriva dalla *finite strain theory* (si veda l'appendice A), una teoria sullo studio della meccanica dei sistemi continui, in particolare di materiali plastici e fluidi, la quale ne modella la deformazione.

La *finite strain theory* poggia sulle ipotesi che le deformazioni siano determinate esclusivamente dagli sforzi, che esse siano reversibili, e che siano abbastanza grandi da non poter trascurare i quadrati delle deformazioni.

Sotto queste ipotesi, uno dei parametri definiti dalla *finite strain theory*, che verrà usato nella trattazione, è il *green strain*:

$$f = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{V_{T,0}}{V} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \quad (2.52)$$

che quantifica la deformazione del sistema, dove V è il volume del sistema deformato, mentre $V_{T,0}$ è il volume del sistema a riposo.

Equazione di Birch-Murnaghan al second'ordine Si prenda in considerazione l'energia libera di Helmholtz F , intesa come energia del sistema - in particolare del materiale plastico di cui supponiamo si composto il pianeta - dipendente dal *green strain*; in questa trattazione si decide di assegnarle un valore nullo in assenza di deformazione. È conveniente usare un potenziale termodinamico, come F , perché è una funzione di stato; in particolare si sceglie di usare proprio l'energia libera di Helmholtz perché è la più utile se si vogliono tenere come variabili indipendenti la temperatura T e il volume V .

Per procedere, si assume che - per deformazioni piccole, e quindi per *green strain* piccoli - si possa sviluppare in serie di Taylor la variazione di energia libera di Helmholtz F , in seguito a una deformazione del materiale, fermandosi al secondo ordine:

$$F = a(T) + b(T)f + c(T)f^2$$

Per stimare i coefficienti a, b e c , si applicano delle condizioni al contorno: se non c'è deformazione il parametro di *green strain* è nullo, poiché si ha che $V = V_{T,0}$, e deve essere nulla anche l'energia libera ($F = 0$). Questo implica che il primo coefficiente a sia nullo.

Dalla relazione termodinamica tra la pressione, l'energia libera e il volume, si ha che la pressione dovuta alla deformazione è

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = - \left(\frac{dF}{df} \right) \left(\frac{df}{dV} \right)$$

La seconda derivata si può scrivere come

$$\left(\frac{df}{dV} \right) = \frac{d \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{V_{T,0}}{V} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \right\}}{dV} = \frac{-(1 + 2f)^{\frac{5}{2}}}{3V_{T,0}}$$

in cui si è usata la (2.52).

Si ha dunque che la pressione è

$$p = (b + 2cf) \left(\frac{(1 + 2f)^{\frac{5}{2}}}{3V_{T,0}} \right) .$$

Si applicano nuovamente le condizioni al contorno: se la deformazione è nulla, anche la pressione dovrà esserlo, e questo implica che anche b sia nullo, e che quindi

$$p = 2cf \frac{(1 + 2f)^{\frac{5}{2}}}{3V_{T,0}} . \quad (2.53)$$

Resta da scoprire qual è la forma della costante c . Si tenga conto che per le condizioni al contorno, quando non si ha deformazione ($f = 0$)

$$K_T = K_{T,0}^0 \quad \text{e} \quad V = V_{T,0} \quad ,$$

dove $K_{T,0}^0$ è il modulo di compressibilità isoterma, in assenza di sollecitazione del materiale, per un valore fissato di temperatura T .

Si sviluppa il modulo di compressibilità isoterma, usando l'espressione per la pressione (2.53), e la definizione del *green strain* (2.52); si ottiene:

$$\begin{aligned} K_T &= -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = -V \left(\frac{dp}{df} \right) \left(\frac{df}{dV} \right) = \\ &= \frac{2cV}{9V_{T,0}^2} (1 + 2f)^{\frac{5}{2}} \left[5f(1 + 2f)^{\frac{3}{2}} + (1 + 2f)^{\frac{5}{2}} \right] \end{aligned}$$

Applicando le condizioni al contorno si ha

$$K = K_{T,0}^0 = \frac{2c}{9V_{T,0}} \quad ,$$

per cui il coefficiente c sarà

$$c = \frac{9V_0 K_{T,0}^0}{2} \quad (2.54)$$

e la pressione

$$p = 3K_0 f (1 + 2f)^{\frac{5}{2}} .$$

Sostituendo la (2.52) in quest'ultima espressione della pressione si ottiene

$$p(V, T) = \frac{3}{2} K_{T,0}^0 \left[\left(\frac{V_{T,0}}{V} \right)^{\frac{7}{3}} - \left(\frac{V_{T,0}}{V} \right)^{\frac{5}{3}} \right] . \quad (2.55)$$

Quest'ultima è l'*equazione di Birch-Murnaghan al second'ordine*.

Il modulo di compressibilità isoterma si ricava direttamente dalla (2.55):

$$\begin{aligned} K_T &= \frac{\rho}{\rho_{T,0}} \frac{dp}{d\left(\frac{\rho}{\rho_{T,0}}\right)} \\ K_T &= \frac{K_{T,0}}{2} \left[7 \left(\frac{\rho}{\rho_{T,0}} \right)^{\frac{7}{3}} - 5 \left(\frac{\rho}{\rho_{T,0}} \right)^{\frac{5}{3}} \right] \end{aligned} \quad (2.56)$$

e usando la (A.11) si ha:

$$K_T = K_{T,0}(1 + 7f)(1 + 2f)^{\frac{5}{2}} \quad . \quad (2.57)$$

Dalla (2.57) si può ricavare anche la derivata del modulo di compressibilità isoterma,

$$\left(\frac{dK_T}{dp}\right)_{p=0} = K'_{T,0} = \frac{dK_T}{df} \frac{df}{dp}$$

$$K'_{T,0} = \frac{12 + 49f}{3 + 21f} \quad , \quad (2.58)$$

la quale comparirà nell'equazione di Birch-Murnaghan al terz'ordine. È interessante notare come per deformazioni piccole ($f \rightarrow 0$) la derivata del modulo di compressibilità isoterma assuma un valore ben definito: $K'_{T,0} = 4$.

Equazione di Birch-Murnaghan al terz'ordine L'equazione al terz'ordine, si ricava appunto sviluppando al terz'ordine l'energia libera di Helmholtz

$$F = a(T) + b(T)f + c(T)f^2 + d(T)f^3$$

e imponendo nuovamente le condizioni al contorno per trovare il coefficiente d . Si ha che la pressione p è

$$p = 3K_{T,0}f(1 + 2f)^{\frac{5}{2}} \left(1 + \frac{3df}{2c}\right) \quad . \quad (2.59)$$

Per $p = 0$ ($f = 0$), $K = K_{T,0}$ e $K' = K'_{T,0}$. Inserendo queste condizioni nella (2.59), si ha l'equazione di stato di Birch-Murnaghan al terz'ordine

$$p(\rho, T) = \frac{3}{2}K_{T,0}^0 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_{T,0}}\right)^{\frac{7}{3}} - \left(\frac{\rho}{\rho_{T,0}}\right)^{\frac{5}{3}} \right] \left\{ 1 - \frac{3}{4} \left(4 - K'_{T,0}\right) \left[\left(\frac{\rho}{\rho_{T,0}}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \right\} \quad , \quad (2.60)$$

dove $K_{T,0}^0, K'_{T,0}$ sono stati ricavati nel paragrafo precedente ((2.57), (2.58)).

Uno degli svantaggi che presenta questa equazione di stato è che, come tutte le teorie basate sulla *finite strain theory*, poggia su basi empiriche: tale forma analitica fa uso dei parametri, $K_{T,0}, K'_{T,0}, \rho_{T,0}$, i quali vengono regolati per adattarli al comportamento dei vari materiali.

I coefficienti $K_{T,0}^0, K'_{T,0}, \rho_{T,0}$ dipendono dai loro corrispettivi K_0, K'_0, ρ_0 , noti a temperatura ambiente ($T_0 = 300\text{K}$), secondo le relazioni

$$\begin{cases} K_{T,0}^0 = K_0 + a_p(T - T_0) \\ K'_{T,0} = K'_0 \\ \rho_{T,0} = \rho_0 \exp\left(\int_{T_0=300}^T \alpha_{T,0} dT\right) \\ \alpha_{T,0} = a_T + b_T T - c_T T^{-2} \end{cases} \quad , \quad (2.61)$$

dove a_p, a_T, b_T, c_T sono parametri ricavati sperimentalmente.

La formulazione di Mie-Grüneisen-Debye

Nella formulazione di Birch-Murnaghan sono indistinguibili il contributo termico e il contributo statico alla pressione. Il loro contributo complessivo è computato usando le relazioni (2.61).

Al contrario, la formulazione di Mie-Grüneisen-Debye, divide la pressione totale $p(\rho, T)$ in due contributi: il contributo statico $p(\rho, T_0)$, ad una temperatura standard T_0 (usualmente assunta pari a 300 K), ed il contributo termico Δp_{th} . Si ha dunque:

$$p(\rho, T) = p(\rho, T_0) + \Delta p_{th} \quad . \quad (2.62)$$

Il contributo statico $p(\rho, T_0)$ si ricava tramite la Birch-Murnaghan ad una temperatura T_0 di riferimento

$$p(\rho, T_0) = \frac{3}{2} K_0 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{7}{3}} - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{5}{3}} \right] \left\{ 1 - \frac{3}{4} (4 - K'_0) \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \right\} \quad , \quad (2.63)$$

dove ρ_0, K_0, K'_0 sono la densità, il modulo di compressibilità isoterma e la derivata del modulo di compressibilità isoterma alla temperatura di riferimento T_0 .

Il contributo termico Δp_{th} viene ricavato utilizzando il modello di Debye per la Densità di Stati, che tratta le vibrazioni atomiche come fononi in una scatola:

$$\Delta p_{th} = \left(\frac{\gamma}{V} \right) [E(T, \theta_D) - E(T_0, \theta_D)] \quad , \quad (2.64)$$

dove E, θ_D, γ sono l'energia dei fononi, la temperatura di Debye, il coefficiente di Grüneisen, i quali sono legati tramite le relazioni:

$$\begin{cases} E = 9nRT \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} dt \frac{t^3}{(e^t - 1)} \\ \theta_D = \theta_{D0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \\ \gamma = \gamma_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-q} \end{cases} \quad , \quad (2.65)$$

in cui θ_{D0}, n, γ_0 e q sono rispettivamente la temperatura di Debye di riferimento, il numero di moli, la costante di Grüneisen alla temperatura di riferimento T_0 e un esponente di scala.

L'energia E si ricava dal modello di Debye. Il materiale all'interno del pianeta è composto da minerali, cioè da solidi con struttura cristallina, ed in prima approssimazione si considera che essi abbiano un reticolo cubico. Sotto queste ipotesi lavora il modello di Debye, secondo il quale gli atomi del reticolo sono accoppiati e vibrano collettivamente, con onde stazionarie, dovute alle condizioni al contorno del solido. Inoltre il modello assume che il solido sia un mezzo continuo e che abbia una relazione di dispersione lineare:

$$\omega = \bar{v}k \quad , \quad (2.66)$$

dove \bar{v} è una velocità media delle onde acustiche, e che questa valga per tutto lo spettro vibrazionale. Tutti i modi normali di oscillazione sono considerati acustici, con la stesso valore della velocità media.

Si può dimostrare³ che la densità di stati, sotto queste ipotesi, è

$$D(\omega) = \frac{V\omega^2}{2\pi^2\bar{v}^3} \quad (2.67)$$

³ cfr. [6] cap. 5.

e che l'energia termica dei fononi si ottiene dall'integrale

$$E = 3 \int d\omega D(\omega) \langle n(\omega) \rangle \hbar\omega = \int_0^{\omega_D} d\omega \left(\frac{3V\omega^2}{2\pi^2v^3} \right) \left(\frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \right) ,$$

dove $\langle n(\omega) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$ è la funzione di distribuzione di Plank.

Proseguendo si ha

$$E = 9nRT \left(\frac{T}{\theta_{D,0}} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta_{D,0}}{T}} dt \frac{t^3}{e^t - 1} , \quad (2.68)$$

in cui $t = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$ e $\theta_{D,0}$ è la temperatura di Debye:

$$\theta_{D,0} = \frac{\hbar v}{k_B} \left(\frac{6\pi^2 N}{V} \right)^{\frac{1}{3}} . \quad (2.69)$$

Nel modello di Mie-Grüneisen-Debye la temperatura di Debye $\theta_{D,0}$ viene corretta tramite la costante di Grüneisen γ (vedi appendice B), un parametro empirico che tiene conto delle interazioni non lineari nei cristalli cubici: in particolare essa descrive gli effetti che ha un cambio di volume del reticolo cristallino sulle sue proprietà vibrazionali.

Nello studio dell'interno dei *pianeti terrestri*, vengono applicate entrambe le formulazioni, sia quella di Birch-Murnaghan che quella di Mie-Grüneisen-Debye, facendone un differente uso: l'equazione di Birch-Murnaghan si presta a descrivere meglio il mantello superiore e la crosta, dove le pressioni si limitano sotto i 25 GPa, perchè il termine del quart'ordine della Birch-Murnaghan, non trascurabile a pressioni più alte, è più grande del terzo, e questo ne compromette la convergenza; la formulazione di Mie-Grüneisen-Debye viene preferita nello studio del nucleo e del mantello inferiore, in cui le pressioni sono alte e si deve tenere ben conto del contributo dei moti vibrazionali del reticolo alla pressione termica.

Per via dell'elevata pressione al centro dei *pianeti terrestri*, si dovrebbe tenere conto della pressione elettronica, dovuta al fenomeno della metallizzazione. Obiettivo dei modelli futuri sarà dunque quello di includere questo contributo nell'equazione di stato. Si potrebbe pensare di usare la teoria di Thomas-Fermi-Dirac, approccio utilizzato nello studio dei *pianeti giganti*: purtroppo tale teoria è nata per gas ionizzati sotto pressione, e pertanto non può descrivere legami chimici, presenti all'interno dei minerali dei *pianeti terrestri*. Difatti i risultati computazionali ottenuti tramite l'uso di modelli nati dalla teoria di Thomas-Fermi-Dirac sottostimano la pressione effettiva, ottenuta tramite simulazioni sperimentali.

Capitolo 3

Relazione raggio-massa

Lo studio dell'interno dei pianeti si propone in particolare di fornire una relazione tra il raggio e la massa di un pianeta, in particolare di un esopianeta. Nel caso di *pianeti terrestri*, poco comprimibili, ci si aspetta una proporzionalità tra raggio e massa del pianeta, del tipo $R \propto M^{\frac{1}{3}}$. Usando metodi numerici basati sulle equazioni di Birch-Murnaghan e Mie-Grüneisen-Debye a seconda del layer in analisi, e le prima due equazioni di struttura, si ottiene la relazione

$$\frac{R}{R_{Terra}} = \left(\frac{M}{M_{Terra}} \right)^{0.274} \quad (3.1)$$

per pianeti con massa M tale che $M_{Terra} < M < 10M_{Terra}$.

Si noti che l'esponente è minore di $\frac{1}{3}$, valore che si otterrebbe considerando la densità costante, poiché nelle equazioni di struttura la densità varia con la pressione, la temperatura e la profondità.

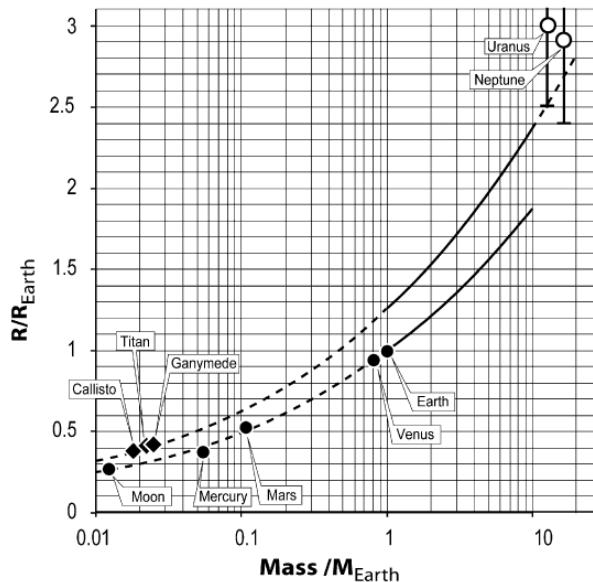


Figura 3.1. La relazione massa raggio per pianeti simili alla Terra nel Sistema Solare. Per pianeti più massivi di quelli terrestri si ottiene un diverso trend, in cui l'esponente varia da 0.274 a 0.306. (Sotin et al. 2007, [14])

Nel caso dei *pianeti giganti* invece si ottiene un andamento del tipo $R \propto M^{\frac{1}{10}}$, dovuto all'alta comprimibilità del materiale interno al pianeta.

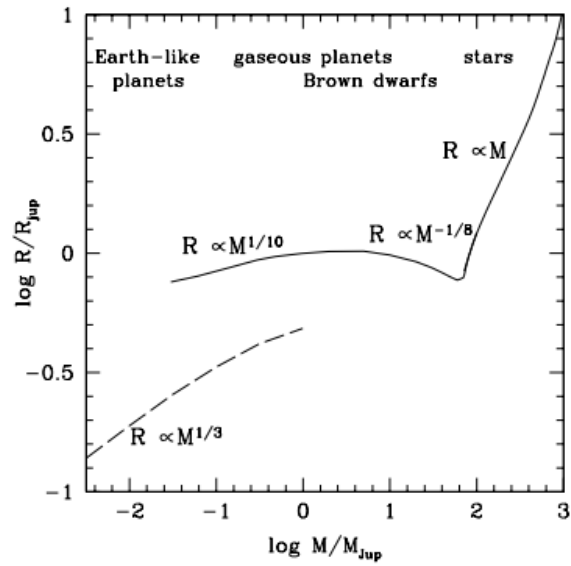


Figura 3.2. La relazione massa raggio per *pianeti giganti* ($R \propto M^{\frac{1}{10}}$) e altri oggetti stellari e substellari. (Fortney et al. 2010, [8])

Conclusioni

In questo lavoro sono state illustrate le equazioni che governano la struttura interna dei *planeti terrestri* e *giganti*. Si è visto come, in base alla composizione del pianeta, ci sia la necessità di creare modelli differenti per descrivere il comportamento del suo interno. Mentre le equazioni che descrivono la conservazione della massa e l'equilibrio idrostatico sono molto simili, non si può dire lo stesso delle equazioni di stato o sul profilo della temperatura.

Nel caso dei *giganti gassosi*, si è fatto uso di teorie quantistiche per modellizzare il comportamento degli elettroni delocalizzati dell'idrogeno metallico, ritenuto in prima approssimazione unico costituente del *gigante gassoso*; nel caso dei *planeti terrestri*, invece, la struttura interna è quella di un minerale, pensato come un solido soggetto a forti pressioni e, dunque, a deformazioni, ed il sistema complessivo è stato considerato adiabatico (per via della composizione e della struttura - solida - dell'interno del pianeta).

Lo studio dell'interno dei planeti è un lavoro molto complesso, che richiede strumenti ancora più ampi di quelli sopra presentati.

In questo lavoro si è cercato di illustrare quali sono le "prime armi" a disposizione di chi intraprende tale studio, in modo tale da capire come si ricavano per via teorica i parametri più importanti nella descrizione di un pianeta, cioè densità, pressione, raggio.

Si sono qui affrontate dunque le basi e, come sempre nello sviluppo di nuove teorie, sono state fatte delle ipotesi molto restrittive: i planeti sono stati visti come oggetti non rotanti, privi di campo magnetico, e pertanto si è fornito un modello soddisfacente dei planeti, ma non abbastanza realistico. Per esempio in Giove, per via della forte presenza di idrogeno metallico, si pensa che vi sia presente un forte campo magnetico, anche in superficie, ma questo dettaglio viene trascurato dal modello presentato. Oppure nel nucleo dei *planeti terrestri*, si trascura la pressione elettronica, poiché non si possiede ancora un modello che la includa nel computo della pressione totale.

Attualmente sono già presenti alcuni modelli più avanzati, che si basano su ipotesi iniziali meno restrittive, i quali però partono dai concetti esposti in questo lavoro. Partendo dagli studi recenti, nel futuro prossimo si cercherà di ampliare sempre di più la grammatica di questo settore, in modo tale da ottenere un linguaggio sempre più articolato e colorato. In futuro si dovranno perfezionare i modelli per la descrizione di *planeti terrestri* e *giganti gassosi*, e non solo: lo stesso studio dovrà essere approfondito anche per planeti *Nettuniani* e *Plutoniani*, e per gli ipotizzati *Ocean planets*, planeti molto massivi di tipo *rocce e ghiacci*.

Inoltre si spera un giorno anche di superare difficoltà sperimentali, che attualmente lasciano soltanto dubbi, ma non certezze. Ad esempio, per quanto riguarda Giove, non si è ancora certi della sua composizione: attraverso osservazioni astronomiche,

non si è in grado nè di quantificare la percentuale di elementi pesanti al suo interno, nè di verificare la presenza di un eventuale nucleo solido. Oppure, per quanto riguarda i pianeti extrasolari, non si è in grado di dare molte informazioni, dato che la gran parte delle osservazioni sono indirette.

Si spera che siano dunque molti gli strumenti che si avranno a disposizione in futuro per sviluppare la fisica dell'interno dei pianeti, che rimane ancora oggi una materia molto giovane, e seppure il percorso scientifico appaia pieno di insidie, giorno per giorno si potrà disporre di modelli fisici sempre più fedeli alla realtà.

Appendice A

La *finite strain theory* ed il *green strain*

L'equazione di Birch-Murnaghan deriva dalla *finite strain theory*, una teoria sullo studio della meccanica dei sistemi continui, in particolare di materiali plastici e fluidi, la quale ne modella la deformazione.

Le ipotesi principali, su cui poggia la *finite strain theory*, sono due: le deformazioni sono determinate esclusivamente dagli sforzi, ed esse sono reversibili. La deformazione del materiale, inoltre, sarà abbastanza grande da poter considerare non trascurabili almeno i quadrati delle deformazioni.

La deformazione di un materiale è intesa come la variazione della distanza tra due punti quando si applica una forza sul sistema.

Consideriamo un solido negli assi coordinati $Ox_1x_2x_3$, e sia ds la distanza tra due punti P di coordinate x_i ($i = 1, 2, 3$) e Q di coordinate $x_i + dx_i$. Abbiamo:

$$ds^2 = \sum_i (dx_i)^2 \quad . \quad (\text{A.1})$$

Adesso siano i punti P e Q spostati in P' e Q' da un vettore di spostamento $\mathbf{u}(x_i)$, il quale è funzione delle coordinate dei due punti:

$$\begin{aligned} P(x_i) &\rightarrow P'(x_i + u_i) \\ Q(x_i + dx_i) &\rightarrow Q'(x_i + dx_i + u_i + du_i) \end{aligned}$$

Dato che \mathbf{u} non è costante per tutti i punti, il che corrisponderebbe ad una traslazione rigida, la distanza dS tra i punti P' e Q' sarà differente da ds : il solido subirà una deformazione.

Per definire la nozione di deformazione si possono usare due formulazioni:

- La *formulazione Lagrangiana*, la quale definisce le coordinate nello stato deformato X_i in funzione delle coordinate del solido a riposo x_i :

$$X_i = x_i + u_i \quad (\text{A.2})$$

- La *formulazione di Eulero*, in cui le coordinate dello stato di riposo x_i vengono espresse in funzione delle coordinate X_i dello stato deformato:

$$x_i = X_i - u_i \quad (\text{A.3})$$

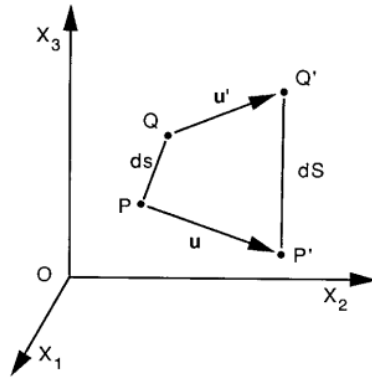


Figura A.1. La distanza ds tra due punti P, P' diventa dS dopo la deformazione, dovuto al fatto che il campo di spostamento \mathbf{u} non è uniforme. (Poirier, 2000, [1])

Le due formulazioni non sono equivalenti per deformazioni finite (e non infinitesime) e, come confermato sperimentalmente, la formulazione di Eulero è la più adatta alla descrizione dell'interno dei pianeti, anche perché è la più significativa a livello fisico. Infatti utilizzando la formulazione di Eulero tutte le quantità vengono espresse in termini delle coordinate dei punti del solido deformato, le quali, nella fisica dei pianeti, sono le uniche sperimentalmente accessibili. Per questo motivo per ricavare l'equazione di Birch-Murnaghan, e molte altre equazioni di stato, la formulazione di Eulero è la più utilizzata.

Si ha dunque:

$$dS^2 - ds^2 = \sum_i (dX_i)^2 - \sum_i (dx_i)^2 = 2 \sum_i dX_i du_i - \sum_i (du_i)^2 \quad . \quad (\text{A.4})$$

Se gli spostamenti \mathbf{u} sono funzioni continue e differenziabili di x_i , si ha:

$$du_i = \sum_k \frac{du_i}{dX_k} dX_k \quad . \quad (\text{A.5})$$

Il tensore di deformazione finita di Eulero ε_{ij} è definito da:

$$dS^2 - ds^2 = 2 \sum_{ij} \varepsilon_{ij} dX_i dX_j \quad , \quad (\text{A.6})$$

con

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) - \frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \quad . \quad (\text{A.7})$$

dimostrata, ma al contrario La (A.7) può essere riscritta come

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 \left(\delta_{ij} - \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \right) \quad , \quad (\text{A.8})$$

dove δ è la delta di Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ se $i = j$, $\delta_{i,j} = 0$ se $i \neq j$).

È facile dimostrarlo sostituendo $x_k = X_k - u_k$ nella (A.7):

$$2\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} - \sum_k \left(\frac{\partial X_k}{\partial X_i} \frac{\partial X_k}{\partial X_j} + \frac{\partial X_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial X_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} - \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

$$2\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} - \delta_{ij} + \delta_{ki} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \delta_{kj} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} - \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \quad .$$

che riporta alla (A.7).

Adesso ci si concentra su una deformazione isotropica sotto compressione, causata dall'applicazione di pressione idrostatica. Sotto queste ipotesi si ha

$$\frac{\partial u_1}{\partial X_1} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = \frac{\theta}{3} \quad , \quad (\text{A.9})$$

dove $\theta = \sum_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \frac{\Delta V}{V_0}$ è la traccia del tensore di deformazione.

Dalla (A.7) e dalla (A.9), si ha

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij}$$

con:

$$\varepsilon = \frac{\theta}{3} - \frac{1}{2} \frac{\theta^2}{9} \quad .$$

Un elemento cubico di volume infinitesimo $V = (dX_1)^3$ nello stato deformato, aveva un volume nello stato a riposo pari a $V_{T,0} = \left[dX_1 \left(1 - \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) \right]^3$ (alla temperatura T), per cui:

$$\frac{V_{T,0}}{V} = \frac{\rho}{\rho_{T,0}} = \left(1 - \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^3 = \left(1 - \frac{\theta}{3} \right)^3$$

Scivendo $\left(1 - \frac{\theta}{3} \right) = \left[\left(1 - \frac{\theta}{3} \right)^2 \right]^{3/2}$ si ha che

$$\frac{\rho}{\rho_{T,0}} = \left(1 - \frac{2\theta}{3} + \frac{\theta^2}{9} \right)^{\frac{3}{2}} = \left[1 - 2 \left(\frac{\theta}{3} - \frac{\theta^2}{18} \right) \right]^{\frac{3}{2}} = (1 - 2\varepsilon^{\frac{3}{2}}) \quad . \quad (\text{A.10})$$

Dato che ε è negativa per pressioni positive (cioè ε corrisponde a una compressione), si introduce la "compressione" $f = -\varepsilon$:

$$\frac{\rho}{\rho_{T,0}} = \frac{V_{T,0}}{V} = (1 + 2f)^{\frac{3}{2}} \quad , \quad (\text{A.11})$$

da cui si ricava il cosiddetto *green strain*

$$f = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{V_{T,0}}{V} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \quad (\text{A.12})$$

che quantifica la deformazione del sistema, e dove V è il volume del sistema deformato, mentre $V_{T,0}$ è il volume del sistema a riposo. Questo sarà un parametro fondamentale per ricavare l'equazione di stato di Birch-Murnaghan

Appendice B

La costante di Grüneisen

Si può dare una definizione termodinamica della costante di Grüneisen, partendo dal modello di Debye per i moti vibrazionali reticolari.

Si suppone che una vibrazione reticolare di un particolare vettore d'onda dipenda dal volume. Questo sarà un effetto non lineare. Si fa l'ipotesi che $\frac{V}{\omega_k} \frac{d\omega_k}{dV}$ sia una costante. Consideriamo l'energia libera di Helmholtz $F = E - TS$, da cui $dF = -pdV - SdT$ e $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$; $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$.

Allora

$$E = F + TS = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \quad . \quad (\text{B.1})$$

Si fa la seguente separazione (approssimata)

$$F = E_0(V) + F_D(T, V) \quad ; \quad E = E_0(V) + E_D(T, V) \quad ,$$

dove E_0 è l'energia interna a 0 K, E_D è il contributo delle vibrazioni reticolari all'energia e F_D è, nell'approssimazione di Debye, il contributo delle vibrazioni reticolari all'energia libera, la quale, nei modelli armonici o lineari, non dipenderebbe dal volume, ma solo dal numero di atomi. Si suppone che la dipendenza dell'energia libera F sia adeguatamente descritta con lo specificare la dipendenza della temperatura di Debye θ dal volume V .

Pertanto

$$p = -\frac{\partial E_0}{\partial V} - \frac{\partial F_D}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial V} \quad . \quad (\text{B.2})$$

Nell'approssimazione di Debye, l'energia interna E_D dovuta alle vibrazioni reticolari è la (2.68), che sostituita nella (B.1) mostra che F_D deve essere della forma

$$F_D = T f \left(\frac{\theta}{T} \right) \quad (\text{B.3})$$

e che

$$\frac{\partial F_D}{\partial \theta} = f' = \frac{E_D}{\theta} \quad . \quad (\text{B.4})$$

Dalla (B.2) abbiamo dunque l'equazione di stato di Debye

$$p = -\frac{\partial E_0}{\partial V} - \frac{E_D}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial V} = -\frac{\partial E_0}{\partial V} + \gamma \frac{E_D}{V} \quad , \quad (\text{B.5})$$

dove

$$\gamma = -\frac{d(\ln \theta)}{d(\ln V)} = -\frac{V}{\theta} \frac{d\theta}{dV} \quad (\text{B.6})$$

è la costante di Grüneisen. Assumiamo che le autofrequenze del modo siano indipendenti dalla temperatura, allora si può differenziare la (B.5) e ottenere

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\gamma}{V} C_v \quad , \quad (\text{B.7})$$

e, per le definizioni di coefficiente di dilatazione termica α (2.44), si ha

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{K_T} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \quad (\text{B.8})$$

per cui

$$\gamma = \frac{\alpha V K_T}{C_V} \quad . \quad (\text{B.9})$$

Bibliografia

- [1] POIRIER J.P.; *Introduction to the Physics of the Earth's Interior*, Cambridge University Press, 2000.
- [2] CASSEN P., GUILLOT T., QUIRRENBACH A.; *Extrasolar Planets: Saas Fee Advanced Course 31*, New York, Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [3] ELIEZER S., GHATAK A., HORA H.; *An introduction to equation of state: theory and applications*, Cambridge, Press Syndacate of the University of Cambridge, 1986.
- [4] PERRYMAN M.; *The Exoplanet Handbook*, Cambridge University Press, 2014.
- [5] KITTEL C.; *Introduzione alla Fisica dello Stato Solido - Prima edizione*, Torino, Bollati Boringhieri, 1971.
- [6] KITTEL C.; *Introduction to Solid State Physics - Seventh edition*, Hoboken, John Wiley & Sons, 1996.
- [7] SOTIN C., JACKSON J. M., SEAGER S.; *Terrestrial Planet Interior*, The University Arizona Press, Exoplanets, pp. 375-395, 2010.
- [8] FORTNEY J. J., BARAFFE I., MILITZER B.; *Giant Planet Interior Structure and Thermal Evolution*, The University Arizona Press, Exoplanets, pp. 397-418, 2010.
- [9] VANZANI V., *Lezioni di Fisica dei Pianeti*, cap. 4, A.A. 2001-2002.
- [10] LODDERS K.; *Exoplanet chemistry*, Wiley-Blackwell, Formation and Evolution of Exoplanets, pp. 157-186 2010.
- [11] VALENCIA D., O'CONNELL R. J., SASSELOV D.; *Internal structure of massive terrestrial planets*, Elsevier, Icarus, vol. 181, pp. 545-554, April 2006.
- [12] TANGE Y., KUWAYAMA Y., IRIFUNE T., FUNAKOSHI K., OHISHI Y.; *P-V-Tequation of state of MgSiO₃perovskite based on the MgO pressure scale: A comprehensive reference for mineralogy of the lower mantle*, Wiley-Blackwell, Journal of Geophysical Research: Solid Earth, vol. 117, n. B6, Jun 2012.
- [13] BALLARAN T. B.; *Equations of state and their applications in geosciences*, High-Pressure Crystallography From Fundamental Phenomena to Technological Applications, Springer, 2010.
- [14] SOTIN C., GRASSET O., MOCQUET A.; *Mass-radius curve for extrasolar Earth-like planets and ocean planets*, Elsevier, Icarus, vol. 191, pp. 337-351, March 2007.

- [15] GUILLOT T., *The interiors of giant planets: Models and Outstanding Questions*, Annual Reviews, Annu. Rev. Earth Planet Sci., vol.33, pp. 493-530, May 2005.