Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Formulazioni lineari per il problema del taglio minimo

Relatore:
Prof. Marco Di Summa

Laureanda:
Sofia Bazzan
Matricola 1222390

Anno Accademico 2021-2022
23 Settembre 2022

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è quello di presentare alcune formulazioni lineari per il problema del taglio minimo. In particolare, dopo aver presentato i programmi lineari più noti per il problema e alcune sue variazioni, verrà analizzato uno studio riguardante una più recente formulazione che permette di semplificare il numero di variabili.

Il problema

Dato un grafo orientato $G = (V, E)$ dove $V = \{v_1, ..., v_n\}$ è un insieme finito di vertici e E un insieme finito di archi, tale che ogni arco $(v_i, v_j) \in E$ abbia una capacità $c_{i,j} \geq 0$ assegnata, un taglio è una partizione di V in due insiemi non vuoti S e $V - S$. La capacità di un taglio $C(S)$ è definita in [17] come la somma delle capacità degli archi che lo compongono, ovvero:

$$C(S) = \sum \{c_{i,j} \mid v_i \in S, v_j \in V - S, (v_i, v_j) \in E\}$$

Il problema che andremo a trattare consiste nel trovare un taglio $(S, V - S)$ di capacità $C(S)$ minima [17].

Programmazione matematica

L'ambito in cui lavoreremo è la programmazione matematica (detta anche ottimizzazione matematica), un ramo dell'ottimizzazione statica che studia come trovare i valori ottimali di una funzione soggetta a determinati vincoli. Si parla di programmazione lineare quando i vincoli e la funzione obiettivo sono lineari.

Questo settore ha avuto un grande impatto in numerosi ambiti dato che molti problemi possono rientrare nella struttura menzionata ed esistono algoritmi noti per risolvere i programmi lineari che sono stati ampiamente trattati da un punto di vista teorico ed efficienti nella pratica [4].

Uno degli ambiti in cui la programmazione matematica assume una grande importanza è la ricerca di algoritmi per problemi di ottimizzazione combinatoria, infatti alcuni dei più celebri risultati degli scorsi decenni sono stati trovati riducendo il problema ad un programma lineare [4], inoltre per i problemi di ottimizzazione combinatoria di classe NP i loro rilassamenti lineari sono utili per ricavare buoni algoritmi di approssimazione.

Questo non è l'unico modo in cui la programmazione matematica ha contribuito alla ricerca di soluzioni per problemi di tipo NP, è importante citare anche che uno degli approcci utilizzati per risolvere un considerevole numero di istanze di tali problemi consiste nel risolvere ripetutamente problemi di programmazione intera appartenenti alla classe P.

Un esempio in cui viene applicata tale metodologia è il problema del commesso viaggiatore, che oltre ad appartenere alla classe NP è anche NP-completo. Il problema può essere spiegato nel seguente modo: dato un elenco di città e la distanza tra ogni coppia di esse, determinare il tragitto di minima percorrenza che permette di visitare tutte le città una sola volta e tornare alla città di partenza. Questo problema appare distaccato dal problema del taglio minimo, oggetto del nostro studio, ma in realtà quest'ultimo costituisce una subroutine in alcuni algoritmi per il problema del commesso viaggiatore, perciò formulazioni con un minor numero di vincoli e variabili per il problema del taglio minimo possono portare ad algoritmi di risoluzione più veloci per il problema NP-completo.

Sommario dei contenuti

Nel capitolo due verrà presentata una prima formulazione, introdotta in [10], per il problema del taglio minimo nel caso in cui si richiede che separi due nodi s e t, imponendo quindi che $s \in S, t \notin S$. Il primo programma lineare verrà ottenuto partendo dal problema duale di quello su cui si concentra la tesi, noto come problema del flusso massimo e dimostrando che la formulazione così ottenuta è veramente un programma lineare per il problema del taglio minimo. Nella prima sezione del capitolo tre verranno introdotte altre due formulazioni per il problema del taglio minimo che separa s da t, sviluppate in [17], che insieme a quella presentata nel capitolo precedente costituiscono quelle tradizionalmente più note. Successivamente nelle sezioni due e tre verrà mostrato come estendere i programmi lineari introdotti ai problemi dei D-tagli, il "multicommodity minimum cut problem" e alla descrizione dei poliedri dei tagli, come mostrato in [17] e [6].
Nella sezione quattro sarà analizzato il risultato più innovativo tra quelli presentati in questa tesi, presentato nell'articolo "Compacting cuts: a new linear formulation for minimum cut" [4]. Nell'articolo in questione viene descritto un programma lineare per il problema del taglio minimo che sconnette un grafo che si differenzia da tutti quelli dei capitoli precedenti perché richiede $\mathcal{O}(|V|^2)$ variabili e $\mathcal{O}(|V|^3)$ vincoli, invece che $\mathcal{O}(|V||E|)$.

Capitolo 2

Flusso massimo e taglio minimo

2.1 Duale del flusso massimo

In questa sezione, con lo scopo di ricavare una formulazione per il problema del taglio minimo, verrà introdotto il suo problema duale, conosciuto come problema del flusso massimo. Per tale problema sia le definizioni presentate che le varie formulazioni sono tratte da [10].

Siano $G = (V, E)$ un grafo orientato, $s \neq t$ due nodi fissati $\in V$ e $c_{u,v} \geq 0$ delle capacità non negative assegnate ad ogni arco $(u, v) \in E$. Viene definito flusso un vettore $f_{u,v}$ con $(u, v) \in E$ soggetto ai due vincoli seguenti:

1. $f_{u,v} \geq 0 \; \forall \; (u, v) \in E$
2. $\sum_{u:(u,v)\in E} f_{u,v} = \sum_{u:(u,v)\in E} f_{v,u} \; \forall \; u \neq s, t.$

Di conseguenza ogni flusso deve rispettare un vincolo di non negatività (1) e il vincolo (2) che viene detto legge di conservazione del flusso e richiede che in ogni nodo diverso da s e t la somma dei flussi entranti sia uguale alla somma dei flussi uscenti.
Se un flusso f è tale da non eccedere la capacità di nessun arco $(u, v) \in E$, ovvero se soddisfa anche il vincolo

3. $f_{u,v} \leq c_{u,v} \; \forall \; (u, v) \in E$

viene detto ammissibile.

Dato un flusso f da s a t (ammissibile o meno) il valore di f è la quantità uscente dalla sorgente s:

$$Val(f) = \sum_{v:(s,v)\in E} f_{s,v} - \sum_{u:(u,s)\in E} f_{u,s} \tag{2.1}$$

Si può inoltre dimostrare che il flusso uscente da s è uguale al flusso entrante in t, quindi il valore del flusso può essere riscritto come:

$$Val(f) = \sum_{u:(u,t)\in E} f_{u,t} - \sum_{v:(t,v)\in E} f_{t,v} \tag{2.2}$$

Il problema del flusso massimo consiste nel trovare, in un grafo orientato $G = (V, E)$ con $s \neq t \in V$ e capacità $c_{u,v}$ $\forall\, (u, v) \in E$, il flusso ammissibile di valore massimo.
In programmazione lineare tale problema può essere formulato nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{v:(s,v)\in E} f_{s,v} - \sum_{u:(u,s)\in E} f_{u,s} \\
\text{s.a.} \quad \sum_{u:(u,v)\in E} f_{u,v} - \sum_{u:(u,v)\in E} & f_{v,u} = 0 \quad \forall\, u \in V \neq s, t \\
0 \leq\ & f_{u,v} \qquad \forall\, (u, v) \in E \\
f_{u,v} \leq\ & c_{u,v} \qquad \forall\, (u, v) \in E
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

In questo programma lineare la funzione obiettivo è il valore del flusso (espresso come quantità di flusso uscente da s) e i vincoli da soddisfare sono nell'ordine: conservazione del flusso, non negatività e ammissibilità. Esso può essere riscritto aggiungendo una variabile θ che andrà a rappresentare il valore del flusso e dei vincoli ((2.4c) e (2.4d)) che garantiscono questa condizione, in accordo con (2.1) e (2.2).

$$\max \quad \theta \tag{2.4a}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{u:(u,v)\in E} f_{u,v} - \sum_{u:(u,v)\in E} f_{v,u} = 0 \qquad \forall\, u \in V \neq s, t \tag{2.4b}$$

$$-\theta + \sum_{u:(u,s)\in E} f_{u,s} - \sum_{u:(u,s)\in E} f_{s,u} = 0 \tag{2.4c}$$

$$\theta + \sum_{u:(u,t)\in E} f_{u,t} - \sum_{u:(u,t)\in E} f_{t,u} = 0 \tag{2.4d}$$

$$f_{u,v} \leq c_{u,v} \qquad \forall\, (u, v) \in E \tag{2.4e}$$

$$f_{u,v} \geq 0 \qquad \forall\, (u, v) \in E \tag{2.4f}$$

Il cui duale è:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(u,v)\in E} c_{u,v} z_{u,v} \\
\text{s.a.} \quad & y_u - y_v + z_{u,v} \geq 0 \quad \forall\, (u, v) \in E \\
& y_t - y_s = 1 \\
& z_{u,v} \geq 0 \quad \forall\, (u, v) \in E
\end{aligned}
$$

Quest'ultimo programma lineare, essendo costruito come duale del precedente, associa ad ogni vertice $v \in V$ una variabile y_v, a cui impone i vincoli di conservazione del flusso e per ogni spigolo $(u, v) \in E$ viene creata una variabile $z_{u,v}$.
Dimostreremo nella sezione 3 che questa scrittura è effettivamente una formulazione per il problema del taglio minimo ma per farlo sono necessari alcuni concetti sulle matrici totalmente unimodulari, sviluppati nella prossima sezione. Tutti i risultati che verranno presentati fanno riferimento alle dispense "Note del corso di Ricerca Operativa" [9].

2.2 Matrici totalmente unimodulari

Definizione 1 ([9]). *Una matrice $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ si dice totalmente unimodulare se tutte le sue sottomatrici quadrate hanno determinante uguale a 0,1 o -1.*

Da questa definizione si può osservare che tutte le componenti di una matrice totalmente unimodulare, dato che possono essere considerate come sottomatrici di dimensione 1×1, sono uguali a 0 1 o -1 e che matrici trasposte o sottomatrici di matrici totalmente unimodulari sono ancora totalmente unimodulari.

Vediamo ora alcune proprietà di tali matrici.

Teorema 1 (Hoffman e Kruskal [13]). *Data una matrice $A \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ e un vettore $b \in \mathbb{Z}^m$ le soluzioni ammissibili di base del sistema:*

$$\begin{aligned} Ax &\le b \\ x &\ge 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

sono tutte intere, indipendentemente dalle componenti di b, se e solo se A è totalmente unimodulare.

Tale teorema può essere generalizzato dal seguente corollario, dove $\sim$ indica uno qualsiasi tra i simboli : "$=$", "$\le$" e "$\ge$"

Corollario 1 ([13]). *Data una matrice $A \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ e un vettore $b \in \mathbb{Z}^m$, le soluzioni ammissibili di base del sistema $Ax \sim b$, sono tutte intere, indipendentemente dalle componenti di b se e solo se A è totalmente unimodulare.*

Una conseguenza importante di questo risultato è che dato un programma lineare intero della forma:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^{\mathsf{T}}x \\ \text{s.a.} \quad & Ax \sim b \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \tag{2.6}$$

con A totalmente unimodulare e b intero, applicando il metodo del simplesso al rilassamento del problema si trova una soluzione ottima intera.

Abbiamo quindi ottenuto un'importante proprietà per i programmi lineari la cui regione ammissibile è descritta da una matrice totalmente unimodulare, per poterla applicare al problema del taglio minimo, vediamo quindi una caratterizzazione che permette di distinguere tali matrici.

Teorema 2 (Ghouila-Houri [12]). *Una matrice $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ con tutte le componenti uguali a 0,1 o -1 è totalmente unimodulare se e solo se ogni sottomatrice di A ammette una bicolorazione equa delle sue colonne, ovvero esiste una partizione dell'insieme $\{1,\ldots,n\}$ in due sottoinsiemi R e B tali che:*

$$\sum_{j\in R} a_{i,j} - \sum_{j\in B} a_{i,j} \in \{0, \pm 1\} \; i = 1,..,m \tag{2.7}$$

2.3 Dimostrazione

Verrà ora dimostrato che il programma lineare introdotto nella sezione 1:

$$\min \quad \sum_{(u,v)\in E} c_{u,v} z_{u,v} \tag{2.8a}$$

$$\text{s.a.} \quad y_u - y_v + z_{u,v} \geq 0 \qquad \forall\, (u,v) \in E \tag{2.8b}$$

$$y_t - y_s = 1 \tag{2.8c}$$

$$z_{u,v} \geq 0 \qquad \forall\, (u,v) \in E \tag{2.8d}$$

è una formulazione lineare per il problema del taglio minimo. Per prima cosa mostriamo che ad ogni taglio che separa s da t può essere associata una soluzione ammissibile per (2.8). Sia quindi $(S, V-S)$ una partizione di V, tale che $s \in S$, $t \in V-S$, indicato con $\delta^+(S) = \{(u,v) \mid u \in S, v \in V-S\}$ definiamo, come in [10], una soluzione $(\overline{y}, \overline{z})$ nel seguente modo:

$$\overline{y}_v = \begin{cases} 0 & v \in S \\ 1 & v \in V-S \end{cases} \qquad \overline{z}_{u,v} = \begin{cases} 0 & (u,v) \notin \delta^+(S) \\ 1 & (u,v) \in \delta^+(S) \end{cases} \tag{2.9}$$

Tale soluzione, per come viene definita, soddisfa i vincoli (2.8d) e (2.8c) infatti $\overline{z}_{u,v} \in \{0,1\}\ \forall\, (u,v) \in E$ e poiché $s \in S, t \in V-S$ $\overline{y}_t - \overline{y}_s = 1 - 0 = 1$. Resta da dimostrare che $(\overline{y}, \overline{z})$ soddisfa anche il vincolo (2.8b), perciò calcoliamo $\overline{y}_u - \overline{y}_v + \overline{z}_{u,v}$ che a seconda di $(u,v) \in E$ può assumere i seguenti valori:

- $u \in S, v \in V-S \implies \overline{z}_{u,v} = 1, \overline{y}_u = 0, \overline{y}_v = 1 \implies \overline{y}_u - \overline{y}_v + \overline{z}_{u,v} = 0 - 1 + 1 \geq 0$
- $u \in S, v \in S \implies \overline{z}_{u,v} = 0, \overline{y}_u = 0, \overline{y}_v = 0 \implies \overline{y}_u - \overline{y}_v + \overline{z}_{u,v} = 0 - 0 + 0 \geq 0$
- $u \in V-S, v \in V-S \implies \overline{z}_{u,v} = 0, \overline{y}_u = 1, \overline{y}_v = 1 \implies \overline{y}_u - \overline{y}_v + \overline{z}_{u,v} = 1 - 1 + 0 \geq 0$
- $u \in V-S, v \in S \implies \overline{z}_{u,v} = 0, \overline{y}_u = 1, \overline{y}_v = 0 \implies \overline{y}_u - \overline{y}_v + \overline{z}_{u,v} = 1 - 0 + 0 \geq 0$

Dato che in tutti e quattro i casi $\overline{y}_u - \overline{y}_v + \overline{z}_{u,v} \geq 0$ il vincolo (2.8b) è verificato.
Si può inoltre osservare che il valore della funzione obiettivo $\sum_{(u,v)\in E} c_{u,v}\overline{z}_{u,v}$ coincide con la capacità del taglio poiché $\overline{z}_{u,v} = 1$ soltanto se $(u,v) \in \delta^+(S)$.

Abbiamo quindi dimostrato che ad ogni taglio può essere associata una soluzione ammissibile per il problema il cui valore è la capacità del taglio. Per poter concludere che (2.8) è un programma lineare valido per il problema del taglio minimo mostriamo che esiste sempre una soluzione ottima che sia un taglio.

L'idea alla base della dimostrazione è di utilizzare le matrici unimodulari e la dualità tra problema del flusso massimo e taglio minimo, pertanto riprendiamo la formulazione per il problema del flusso massimo vista nella sezione 1:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \theta & & \qquad\qquad\qquad\qquad (2.10a) \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{u:(u,v)\in E} x_{u,v} - \sum_{u:(u,v)\in E} x_{v,u} = 0 & \forall\, u \in V \neq s,t & \qquad\qquad\qquad\qquad (2.10b) \\
& -\theta + \sum_{u:(u,s)\in E} x_{u,s} - \sum_{u:(u,s)\in E} x_{s,u} = 0 & & \qquad\qquad\qquad\qquad (2.10c) \\
& \theta + \sum_{u:(u,t)\in E} x_{u,t} - \sum_{u:(u,t)\in E} x_{t,u} = 0 & & \qquad\qquad\qquad\qquad (2.10d) \\
& x_{u,v} \leq c_{u,v} & \forall\, (u,v) \in E & \qquad\qquad\qquad\qquad (2.10e) \\
& x_{u,v} \geq 0 & \forall\, (u,v) \in E & \qquad\qquad\qquad\qquad (2.10f)
\end{aligned}
$$

Sia $G(V,E)$ il grafo su cui viene costruito il problema, definito $G'(V,E')$ come il grafo G a cui viene aggiunto un arco da t a s, corrispondente alla variabile θ, è possibile costruire la matrice di incidenza A di G', seguendo quanto riportato in [9], associando ad ogni riga di A un nodo $i \in V$, ad ogni colonna un arco $e \in E'$ e definendo:

$$
a_{i,e} = \begin{cases} -1 & \text{se l'arco } e \text{ esce dal nodo } i \\ 1 & \text{se l'arco } e \text{ entra nel nodo } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{2.11}
$$

La matrice A così definita ha al massimo due elementi non nulli per ogni riga perciò considerando due insiemi R e B e ponendo gli elementi diversi da 0 di ciascuna riga nello stesso insieme se hanno segno opposto o nei due insiemi distinti se hanno lo stesso segno, si ottiene una bicolorazione equa delle colonne, che implica A totalmente unimodulare per il teorema di Ghouila-Houri.

Utilizzando la matrice A e sostituendola ai vincoli (2.10b), (2.10c) e (2.10d), il programma lineare (2.10) può essere riscritto come:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \theta \\
\text{s.a.} \quad & Ax = 0 \\
& x_{u,v} \leq c_{u,v} \quad \forall\, (u,v) \in E \\
& x_{u,v} \geq 0 \qquad \forall\, (u,v) \in E
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

Il duale di questo programma lineare è ancora (2.8) ed è ora possibile affermare che la matrice che ne descrive la regione ammissibile è totalmente unimodulare, essendo la trasposta di A.

A questo punto consideriamo il seguente programma lineare:

$$\min \sum_{(u,v)\in E} c_{u,v} z_{u,v} \tag{2.13a}$$

$$\text{s.a.} \quad y_u - y_v + z_{u,v} \geq 0 \qquad \forall\, (u,v) \in E \tag{2.13b}$$

$$y_t - y_s = 1 \tag{2.13c}$$

$$z_{u,v} \geq 0 \qquad \forall\, (u,v) \in E \tag{2.13d}$$

$$0 \leq z_{u,v} \leq 1 \qquad \forall\, (u,v) \in E \tag{2.13e}$$

$$0 \leq y_v \leq 1 \qquad \forall\, v \in V \tag{2.13f}$$

La matrice che caratterizza la regione ammissibile resta totalmente unimodulare (anche se a causa dei vincoli (2.13e) e (2.13f) il programma lineare non è più il duale del problema del flusso massimo) perciò (2.13) ammette una soluzione ottima intera (y^*, z^*) che avrà tutte le componenti uguali a 0 o 1 per i vincoli (2.13e) e (2.13f). In più possiamo trovare una partizione $(S, V - S)$ di V richiedendo che $v \in S$ se e solo se $y^*_v = 0$ e $(u, v) \in \delta^+(S)$ se e solo se $z^*_{u,v} = 1$. In questo modo si ottiene che (y^*, z^*) rappresenta un taglio perché il problema è di minimizzazione e i coefficienti della funzione obiettivo sono tutti non negativi, quindi il vincolo (2.13b) fa si che $z^*_{u,v} = 1$, cioè $z^*_{u,v} \in \delta^+(S)$ soltanto quando $y^*_u = 0$ e $y^*_v = 1$ ovvero $(y_u \in S, y_v \in V - S)$.

In conclusione abbiamo ricavato un programma lineare (2.13) che ha come soluzione ottima un vettore descrivente un taglio e per cui tutti i tagli sono soluzioni ammissibili, perché possono essere rappresentati dai vettori in (2.9) che hanno componenti $\in \{0, 1\}$, che è quindi una formulazione valida per il problema del taglio minimo.

Capitolo 3

Tagli che separano s da t e generalizzazioni

3.1 Formulazioni classiche

Sono note (Ford e Fulkerson [11]) due formulazioni classiche per il problema del taglio minimo che separa s da t su un grafo orientato $G = (V, E)$. La prima di esse è quella presentata nel capitolo due ed associa una variabile u_v ad ogni nodo $v \in V$ e una variabile $y_{u,v}$ ad ogni spigolo $(u, v) \in E$.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(u,v)\in E} c_{u,v} y_{u,v} \\
\text{s.a.} \quad & u_u - u_v + y_{u,v} \geq 0 \quad \forall\, (u, v) \in E \\
& u_t - u_s = 1 \\
& y_{u,v} \geq 0 \quad \forall\, (u, v) \in E
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Vediamo ora la seconda formulazione per il problema che, a differenza della precedente, utilizza soltanto delle variabili $y_{u,v}$ per gli archi, ma può comunque avere un numero di vincoli esponenziale rispetto a $|V|$. Per semplicità di notazione supponiamo che i nodi del grafo siano numerati in modo che il primo nodo corrisponda alla sorgente s e l'ultimo al terminale t, ovvero che $V = \{s = v_1, ..., t = v_n\}$ e indichiamo con $E' = \{(i, j) : (v_i, v_j) \in E\}$. Per terminare le notazioni definiamo un cammino P da v_1 a v_n come una sequenza $e_1, ..., e_q$ di archi $\in E$ tale che ad ogni arco $e_h = (v_i, v_j)$ segua $e_{h+1} = (v_j, v_k)$, cosicché il nodo di arrivo di e_h sia il nodo di partenza di e_{h+1}. Ogni cammino P può anche essere considerato come un sottoinsieme di E, perciò per ciascuno di essi indichiamo con P' il seguente insieme: $P' = \{(i, j) : (v_i, v_j) \in P, i, j = 1, ..., n\}$.
Il problema, sfruttando la definizione di cammino può essere formulato come in [17]:

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in E'} c_{i,j} y_{i,j} \tag{3.2a}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{(i,j)\in P'} y_{i,j} \geq 1 \qquad \forall \text{ cammino } P \text{ da } v_1 \text{ a } v_n \tag{3.2b}$$

$$y_{i,j} \geq 0 \qquad \forall\, (i, j) \in E' \tag{3.2c}$$

Una proprietà di questa scrittura, dimostrata da Ford e Fulkerson e valida anche restringendo il problema a valori di $y \leq 1$, è che tutti i punti estremi sono vettori le cui componenti $\in \{0, 1\}$ [17]. Possiamo inoltre affermare che esiste una soluzione ottima dato che il programma lineare è ammissibile (perché ad esempio la soluzione $y_{i,j} = 1 \; \forall \; i, j$ è ammissibile) e non illimitato poiché da definizione un problema di minimo è illimitato se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste y ammissibile tale che $c^\intercal y \leq \alpha$, perciò siccome $c \geq 0$ per ipotesi ponendo $y \geq 0$ come imposto dall'ultimo vincolo, non è possibile per nessun $\alpha < 0$. Pertanto, data una soluzione ottima y^*, definendo un taglio $(S, V - S)$ in modo che $y^*_{i,j} = 1$ se e solo se $(v_i, v_j) \in \delta^+(S)$, il vincolo (3.2b) implica che ogni cammino da s a t contiene almeno un arco del taglio, cioè che una volta rimossi gli spigoli del taglio non possono più esserci cammini che congiungono i due nodi.

La formulazione (3.2) può inoltre essere utilizzata per ricavare un terzo programma lineare per il problema che, come la (3.2), utilizza solo variabili per gli archi.
Supponendo che E contenga tutti i possibili spigoli orientati, esso si presenta come segue

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j) \in E'} c_{i,j} y_{i,j} & \\
\text{s.a.} \quad & y_{1,n} \geq 1 & \\
& y_{i,j} + y_{j,k} \geq y_{i,k} & \forall \; i, j, k = 1, .., n, \\
& & i \neq j, \; i \neq k, \; j \neq k \\
& y \geq 0 &
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Questo programma lineare è effettivamente una formulazione per il problema del taglio minimo, come mostrato dal seguente risultato.

Teorema 3 ([17]). *Il programma lineare (3.3) ha una soluzione ottima binaria $\overline{y}$, in più $\overline{y}$ è una soluzione ottima per il problema del taglio minimo che separa s da t.*

Dimostrazione. Dimostriamo l'equivalenza tra (3.3) e (3.2), da cui deriva l'enunciato del teorema.
Per prima cosa mostriamo che se y è soluzione di (3.3) lo è anche di (3.2): consideriamo un cammino P in $G(V, E)$ che connette $v_1 = s$ e $v_n = t$ e sia $y_{1,j(1)}, y_{j(1),j(2)}, ..., y_{j(k),n}$ la sequenza di variabili corrispondente alla sequenza di archi in P. Per mostrare che la somma di queste variabili è ≥ 1, quindi che è ammissibile per (3.2), usiamo ripetutamente le due disequazioni che caratterizzano la regione ammissibile del problema (3.3) e ricaviamo $y_{1,j(1)} + y_{j(1),j(2)} + ... + y_{j(k),n} \geq y_{1,n} \geq 1$.
Da questa catena di disuguaglianze otteniamo che (3.3) è una restrizione di (3.2), quindi per dimostrare il teorema è sufficiente provare che data una soluzione ottima di (3.2) esiste una soluzione ammissibile di (3.3) di costo inferiore o uguale. Sia dunque y' soluzione ottima di (3.2), mostriamo che esiste un vettore binario $\overline{y}$, appartenente alla regione ammissibile di (3.3) tale che $\overline{y} \leq y'$, che siccome $c \geq 0$ implica che il costo di $\overline{y}$ sarà minore o uguale a quello di y'. Supponiamo che ad ogni arco (v_i, v_j) venga associata la lunghezza $y'_{i,j}$ e definiamo $\overline{y}_{i,j}$ come la lunghezza del cammino minimo da v_i a v_j, in questo modo $\overline{y}$ è un vettore binario tale che $\overline{y} \leq y'$ e per costruzione soddisfa le equazioni di (3.3). $\square$

3.2 Generalizzazione per il multicommodity problem

La formulazione (3.3) può essere estesa al problema del taglio minimo multicommodity, problema che consiste nel trovare il taglio di capacità minima in grado di separare più sorgenti e terminali contemporaneamente. In questa sezione verrà mostrato, come esempio, il problema del "two-commodity minimum cut" ma esistono generalizzazioni di (3.3) anche a tutti gli altri casi.

Il "two-commodity minimum cut problem" viene espresso in [17] nel modo seguente: dato un grafo non orientato $G(V, E)$ tale che ogni arco abbia una capacità ≥ 0 e assegnate due coppie di sorgenti e terminali (s_1, t_1) e (s_2, t_2), trovare l' insieme di spigoli di capacità minima che separa entrambe le coppie. Una formulazione nota per il problema è la (3.4) [14] che utilizza le seguenti notazioni: $E = \{(v_i, v_j) \mid i, j = 1, ..., n \text{ e } i \neq j\}$, $E' = \{(i, j) \mid i, j = 1, ..., n \text{ e } i \neq j\}$ e $V = \{v_1 = s_1, v_2 = s_2..., v_{n-1} = t_2, v_n = t_1\}$.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{\{i,j\}\in E} c_{i,j} y_{i,j} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{\{i,j\}\in P'} y_{i,j} \geq 1 \quad \forall\, P \text{ da } s_p \text{ a } t_p \quad p = 1, 2 \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Questo programma lineare è l'analogo del (3.2) per il "two-commodity minimum cut problem", inoltre è possibile ripetere il ragionamento della dimostrazione del teorema 3, considerando però due sorgenti e due terminali e ottenere un'equivalenza con il problema seguente che può essere invece considerato come una generalizzazione del (3.3):

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{\{i,j\}\in E} c_{i,j} y_{i,j} \\ \text{s.a.} \quad & y_{1,n} \geq 1 \\ & y_{2,n-1} \geq 1 \\ & y_{i,j} + y_{j,k} \geq y_{i,k} \qquad \forall\, i, j, k = 1, .., n, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad i \neq j,\ i \neq k,\ j \neq k \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.3 *D*-tagli

In questa sezione verrà mostrato come i programmi lineari (3.1) e (3.3), validi per il problema del taglio minimo che separa s da t, possono essere generalizzati al problema del minimo D-taglio (seguendo quanto mostrato in [17]). Tale problema richiede, dato un insieme D di coppie ordinate di vertici $D = \{(v_{i(q)}, v_{j(q)}), q = 1, ..., p\}$, di trovare il D-taglio di capacità minima, dove un D-taglio è una partizione $(S, V - S)$ di V tale che $v_i(q)$ appartenga ad S e $v_j(q)$ a $V - S$ per qualche $q = 1, 2, ...p$.

A prima vista il problema del D-taglio e quello del "multicommodity minimum cut" possono sembrare identici, tuttavia presentano una differenza fondamentale: nel caso presentato nella sezione precedente lo scopo è ricavare un taglio di capacità minima che separa contemporaneamente tutte le sorgenti dai rispettivi terminali, nel D-taglio viene richiesto

un taglio di capacità minima che separa almeno una coppia di nodi, ma non necessariamente tutte.
Come prima formulazione consideriamo il seguente programma lineare:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{q=1}^{p} \sum_{i,j \in A'} c_{i,j} y_{i,j}^q && && \text{(3.6a)}\\
\text{s.a.} \quad & u_i^q - u_j^q + y_{i,j}^q \geq 0 && q = 1, 2, ..., p \qquad (i,j) \in A' && \text{(3.6b)}\\
& \sum_{q=1}^{p} (u_{j(q)}^q - u_{i(q)}^q) = 1 && && \text{(3.6c)}\\
& y_{i,j}^q \geq 0 && q = 1, 2, ..., p \qquad (i,j) \in A' && \text{(3.6d)}
\end{aligned}$$

e il suo duale, che rappresenta il problema di flusso p-commodity:

$$\begin{aligned}
\max \quad & F \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{\{j|(i,j)\in A'\}} x_{i,j}^q - \sum_{\{j|(j,i)\in A'\}} x_{j,i}^q = \begin{cases} F & \text{se } i = i(q) \\ 0 & \text{se } i \neq i(q), j(q) \\ -F & \text{se } i = j(q) \end{cases} \\
& x_{i,j}^q \leq c_{i,j} \;\; q = 1, 2, ..., p \; (i,j) \in A' \\
& x_{i,j}^q \geq 0 \;\; q = 1, 2, ..., p \; (i,j) \in A'
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Dimostreremo, utilizzando nuovamente il concetto di dualità, che (3.6) è una formulazione valida per il problema del D-taglio, che va ad estendere la (3.1).

Teorema 4 ([17]). *Supponiamo che il minimo D-taglio sia realizzato da un taglio $(S, V - S)$, dove $v_{i(r)} \in S$ e $v_{j(r)} \in V - S$, per qualche r, $r = 1, ..., p$. Allora una soluzione ottima per (3.6) è definita ponendo:*

$$\begin{aligned}
& u_i^r = 0 && \textit{per } v_i \in S \\
& u_i^r = 1 && \textit{per } v_i \in V - S \\
& u_i^q = 0 && \textit{per } q = 1, ..., p, q \neq r \quad i = 1, ..., n \\
& y_{i,j}^q = max\{0, u_j^q - u_i^q\} && \textit{per } q = 1, ..., p, \qquad (i,j) \in A'
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Dimostrazione. Per come è definito il vettore (3.8) è sicuramente ammissibile per il problema (3.6), mostriamo ora che ha come valore ad esso associato il valore ottimo del taglio minimo che separa $v_{i(r)}$ e $v_{j(r)}$. Innanzitutto si può osservare che $(S, V - S)$ è un taglio minimo che separa $v_{i(r)}$ e $v_{j(r)}$, perché altrimenti non potrebbe essere un minimo D-taglio, inoltre da definizione avrà capacità:

$$C(S) = \sum \{c_{i,j} \mid v_i \in S, v_j \in V - S\} \tag{3.9}$$

Consideriamo ora la funzione obiettivo valutata nella soluzione (3.8):

$$\sum_{q=1}^{p} \sum_{i,j \in A'} c_{i,j} y_{i,j}^q \tag{3.10}$$

Dalla definizione di u unita all'ultimo vincolo si può osservare che $y^q_{i,j} = 0$ per ogni $q \neq r$, quindi tale valore diventa:

$$\sum_{i,j \in A'} c_{i,j} y^r_{i,j} \tag{3.11}$$

Ora, $y^r_{i,j}$ è uguale a 1 (invece che 0) solo nel caso in cui viene considerato un arco che collega un vertice $v_i \in S$ ad un vertice $v_j \in V - S$, quindi il valore della funzione obiettivo valutata in (3.8) coincide con la capacità del taglio $(S, V - S)$. Sia $F_{(r)}$ tale valore allora $\forall\ q = 1, ..., p$ il valore del taglio minimo che separa $v_{i(q)}$ e $v_{j(q)}$ è almeno $F_{(r)}$ (altrimenti il minimo D-taglio non si otterrebbe separando $v_{i(r)}$ da $v_{j(r)}$) e questo implica per il teorema del flusso massimo e del taglio minimo, applicato al problema del taglio minimo che separa $v_{i(r)}$ e $v_{j(r)}$ e al suo duale, che esiste una soluzione ammissibile per (3.7) con $F = F_{(r)}$. Perciò usando la dualità dei problemi (3.6) e (3.7), sempre per il teorema del flusso massimo e taglio minimo ma considerando (3.6) e (3.7), concludiamo che il vettore definito è una soluzione ottima per (3.6). □

Un altro risultato importante da citare è il seguente:

Teorema 5 ([17]). *La matrice dei coefficienti di (3.6) è totalmente unimodulare.*

Quest'ultimo teorema, ricordando quanto visto sulle matrici totalmente unimodulari, implica che esiste una soluzione ottima intera $(\overline{u}, \overline{y})$ per il problema (3.6). Tale soluzione per soddisfare il vincolo (3.6c) dovrà avere $(\overline{u}^r_{j(r)} - \overline{u}^r_{i(r)}) = 1$ per qualche $r \in \{1, ..., p\}$ e $(\overline{u}^q_{j(q)} - \overline{u}^q_{i(q)}) = 0\ \forall\ q = 1, ..., p\ q \neq r$, inoltre i vincoli (3.6b) e (3.6d) impongono $\overline{y}^r_{i,j} \geq 1$ e $\overline{y}^q_{i,j} \geq 0\ \forall\ q = 1, ..., p\ q \neq r$. Se per assurdo queste ultime due disequazioni non fossero soddisfatte ad uguaglianza esisterebbe un'altra soluzione ammissibile intera di valore inferiore, perciò si deve avere $\overline{y}^r_{i,j} = 1$ e $\overline{y}^q_{i,j} = 0\ \forall\ q = 1, ..., p\ q \neq r$ e questo significa che $(\overline{u}, \overline{y})$ rappresenta un D-taglio.
Pertanto il teorema 5 implica che il programma lineare (3.6) ha una soluzione ottima che costituisce un D-taglio e il teorema 4 che il minimo D-taglio è una soluzione ottima del programma lineare, quindi possiamo concludere che (3.6) è veramente una formulazione per il problema.

Mostriamo ora come estendere la formulazione (3.3) al problema del minimo D-taglio. Assumiamo senza perdita di generalità che l'insieme degli archi E contenga tutti i possibili archi orientati e consideriamo il seguente programma lineare.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{q=1}^{p} \sum_{i,j \in E'} c_{i,j} y^q_{i,j} \\
\text{s.a.} \quad & y^q_{i,j} + y^q_{j,k} \geq y^q_{i,k} \forall\ i, j, k = 1, .., n, \\
& \qquad\qquad\qquad i \neq j, i \neq k, j \neq k, q = 1, ..., p \\
& \sum_{q=1}^{p} y^q_{i(q),j(q)} \geq 1 \\
& \qquad y \geq 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Proveremo che è una formulazione per il problema del minimo D-taglio che può essere considerata come un'estensione del programma lineare (3.3).

Iniziamo la dimostrazione riformulando (3.7) come massimo problema di packing di cammini da $v_{i(q)}$ a $v_{j(q)}$. Denotando per ogni $q = 1, ..., p$ con $\{P_l^q\}, l \in L^q$ l'insieme dei cammini da $v_{i(q)}$ a $v_{j(q)}$ e associando una variabile x_l^q ad ogni cammino P_l^q possiamo scrivere tale riformulazione come segue.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & F \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{\{l | l \in L^q, (v_i, v_j) \in P_l^q\}} x_l^q \leq c_{i,j} \quad q = 1, ..., p \quad (i,j) \in A' \\
& \sum_{l \in L^q} x_l^q \geq F \quad q = 1, ..., p \\
& x_l^q \geq 0 \quad q = 1, ..., p \qquad l \in L^q \\
& F \geq 0
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Il duale di questo programma lineare è:

$$\min \quad \sum_{q=1}^{p} \sum_{(i,j) \in A'} c_{i,j} y_{i,j}^q \tag{3.14a}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{\{(i,j) | (v_i, v_j) \in P_l^q\}} y_{i,j}^q \geq z^q \qquad \forall\ P_l^q,\ l \in L^q \tag{3.14b}$$

$$\sum_{q=1}^{p} z^q \geq 1 \tag{3.14c}$$

$$y_{i,j}^q \geq 0 \qquad q = 1, ..., p\ (i,j) \in A' \tag{3.14d}$$

$$z^q \geq 0 \qquad q = 1, ..., p \tag{3.14e}$$

I problemi (3.13) e (3.14) corrispondono rispettivamente a (3.7) e (3.6). In particolare se una soluzione ottima per il problema del D-taglio minimo è ottenuta da una partizione $(S, V - S)$, dove $v_{i(r)} \in S$ e $v_{j(r)} \in V - S$, per qualche $r = 1, ..., p$, allora una soluzione ottima di (3.14) è ottenuta fissando:

$$
z^q = \begin{cases} 1 & \text{se } q = r \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad y_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } q = r,\ v_i \in S,\ v_j \in V - S \text{ e } (i,j) \in A' \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
\tag{3.15}
$$

Questo risultato dimostra il seguente teorema:

Teorema 6 ([17]). *Ogni D-taglio minimo definisce una soluzione ottima al problema (3.14)*

Perciò dimostrando anche che esiste una soluzione ottima del problema che rappresenta un D-taglio possiamo concludere che (3.14) è una formulazione valida per il problema del D-taglio.

Teorema 7 ([17]). *Esistono una soluzione ottima binaria al problema (3.14) e $r \in \{1, ..., p\}$ tali che $y_{i,j}^q = 0\ \forall\ q = 1, ..., p,\ q \neq r$ e $(i,j) \in E'$ e l'insieme degli archi (v_i, v_j) che soddisfano $y_{i,j}^q = 1$ definisce un taglio di capacità minima che separa $v_{i(r)}$ da $v_{j(r)}$. Tale taglio è un minimo D-taglio.*

Dimostrazione. Applichiamo la stessa idea usata nel teorema 3. Sia una y una soluzione ammissibile arbitraria di (3.12) e per ogni q, $q = 1, ..., p$ definiamo $z^q = y^q_{i(q),j(q)}$. Utilizzando ripetutamente i vincoli $y_{i,j} + y_{j,k} \geq y_{i,k}$ in (3.12) (come nella dimostrazione del teorema 3) possiamo mostrare che la coppia (y, z) è soluzione ottima per (3.14). Questo implica che (3.12) è una restrizione di (3.14).
Consideriamo ora una soluzione ottima per (3.14) e supponiamo che sia anche un taglio che separa $v_{i(r)}$ e $v_{j(r)}$ per qualche $r \in \{1, ..., p\}$. Grazie al teorema 3 si ottiene che essa è ammissibile per (3.12) □

3.4 Poliedri dei tagli

Nella sezione corrente verrà mostrato come utilizzare le diverse formulazioni presentate per descrivere i poliedri dei tagli.

Definizione 2 ([6]). *Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, il poliedro dei tagli è l'inviluppo convesso generato dai vettori che dominano vettori di incidenza di tagli non vuoti.*

Per vettore di incidenza di un sottoinsieme di spigoli $U \subset E$ si intende il vettore $\chi(U)$ $\in \mathbb{R}^E$ tale che

$$\chi(U)(e) = \begin{cases} 1 \text{ se } e \in U \\ 0 \text{ se } e \notin U \end{cases} \tag{3.16}$$

Utilizzando $\chi(U)$ per indicare il vettore di incidenza e $\delta(S)$ per gli spigoli del taglio il poliedro dei tagli può essere rappresentato come segue.

$$cut(G) = Conv\{x \in \mathbb{R}^E_+ \mid x \geq \chi(\delta(S)) \text{ per qualche } \emptyset \subset S \subset V\} \tag{3.17}$$

Dalle definizioni deriva la seguente osservazione che sarà molto importante in seguito:

Osservazione 1 ([6]). *Dato un grafo $G = (V, E)$ con n nodi e fissato $s = n$ come sorgente, qualunque taglio $\delta(S)$ con $\emptyset \subset S \subset V$ è un taglio che separa s da t per qualche $t = 1, ..., n - 1$.*

Sia $cut_{s,t}(G) = Conv\{x \in \mathbb{R}^E \mid x >= \chi(\delta(S))$ per qualche $\{s\} \subset S \subset V - \{t\}\}$, utilizzando l'osservazione possiamo scrivere $cut(G)$ come segue.

Proposizione 1 ([6]). $cut(G) = Conv(\bigcup_{t=1}^{n-1} cut_{s,t}(G))$

Proposizione 2 ([2]). *Siano $P^i = \{x \in \mathbb{R}^d_+ \mid A^i x \geq b^i\}$ per $i = 1, ..., k$ poliedri con lo stesso cono di recessione, ovvero $R^i = \{x \in \mathbb{R}^d_+ \mid A^i x \geq 0\}$ sono identici $\forall$ i. Allora:*
$Conv(\bigcup_{i=1}^k P^i) = proj_x\{(x, z_1, ..., z_k, \lambda) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{kd}_+ \times \mathbb{R}^k_+ \mid x = \sum_{i=1}^k z^i, A^i z^i \geq b^i \lambda_i$ *per* $i = 1, ..., k$ $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\}$

Dimostrazione. ($\subseteq$) In generale l'inviluppo convesso di un insieme X è costituito da tutte le combinazioni convesse degli elementi di X, quindi dato che $proj_x\{\ (x, z_1, ..., z_k, \lambda) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{kd}_+ \times \mathbb{R}^k_+ \mid x = \sum_{i=1}^k z^i, A^i z^i \geq b^i \lambda_i$ per $i = 1, ..., k$ $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\}$ contiene tutte le possibili combinazioni convesse degli elementi dell'unione conterrà anche $Conv(\bigcup_{i=1}^k P^i)$

($\supseteq$) Supponiamo sia dato un punto ammissibile $(x,z_1\ ,...,z_k,\lambda)$. Siano $I = \{i : \lambda_i > 0\}$, $v = \sum_{i \notin I} z^i$ e $x^i = z^i/\lambda_i$ per $i \in I$. Ora $\forall\ i \in I\ x^i + v \in P^i$ e $V \in R^i$, quindi $x = \sum_{i=1}^{k}(x_i + v)\lambda_i$ con $\sum_i \lambda_i = 1$ e $\lambda_i \geq 0\ \forall\ i$ implica $x \in Conv(\bigcup_{i=1}^{k} P_i)$ $\square$

Questo mostra che conoscendo una formulazione compatta per dei generici poliedri P^i, se k non è troppo grande e i poliedri hanno tutti lo stesso cono di recessione, si può ottenere una formulazione compatta per $Conv(\bigcup_{i=1}^{k} P^i)$.
Nel caso specifico di $cut(G)$ sappiamo dalla proposizione 1 che è l'inviluppo convesso dell'unione di $cut_{s,t}(G)$ al variare di t, inoltre il cono di recessione di $cut_{s,t}(G)$ è il quadrante non negativo $\forall\ t$, perciò è sufficiente prendere qualunque formulazione per $cut_{s,t}(G)$ e applicare la proposizione 2 per ottenere una formulazione estesa di $cut(G)$.

I programmi lineari presentati nelle sezioni precedenti sono adatti a descrivere $cut_{s,t}(G)$ ma solo nel caso in cui G è un grafo orientato, mentre il poliedro di taglio è stato definito per un grafo non orientato. Per risolvere questo problema definiamo il grafo orientato $D = (V, A)$ ponendo gli archi (i, j) e (j, i) in A se e solo se lo spigolo $e = (i, j) \in E$. In questo modo possiamo considerare le varie formulazioni analizzate.
Vediamo ad esempio come estendere la (3.1):

$$
\begin{aligned}
& z_e = y_{i,j} + y_{j,i} && \forall\ e = (i, j) \in E && (3.18a)\\
& \pi_j - \pi_i \leq y_{i,j} && \forall\ (i, j) \in A - \{s, t\} && (3.18b)\\
& \pi_t - \pi_s = 1 && && (3.18c)\\
& y_{i,j} \geq 0 && \forall\ (i, j) \in A && (3.18d)
\end{aligned}
$$

In questo caso, oltre ai tre vincoli della formulazione, è stato aggiunto il vincolo (3.18b) necessario per passare da D, il grafo orientato appena costruito, a G, il grafo non orientato di partenza.

Applicando la proposizione 2 e proiettando via le variabili z e λ si ottiene la seguente formulazione estesa:

$$
\begin{aligned}
& x_e = \sum_{t=1}^{n-1}(y^t_{i,j} + y^t_{j,i}) && \forall\ e = (i, j) \in E\\
& \pi^t_j - \pi^t_i \leq y^t_{i,j} && \forall\ (i, j) \in A - \{ts\},\ t = 1, ..., n-1\\
& \sum_{t=1}^{n-1}(\pi^t_t - \pi^t_s) = 1 && \\
& \pi^t_t - \pi^t_s \geq 0 && \forall\ t = 1, ..., n-1\\
& y^t_{i,j} \geq 0 && \forall\ (i, j) \in A,\ t = 1, ..., n-1
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Inoltre, senza perdita di generalità si può fissare $\pi^t_r = 0$ per $t = 1, ..., n-1$.

Una seconda formulazione estesa per $cut_{s,t}(G)$ si ottiene partendo dalla (3.3), che introduce delle variabili y per ogni spigolo del grafo completo K_n e utilizza le disuguaglianze triangolari per caratterizzare la regione ammissibile.

$$
\begin{array}{ll}
x_e \geq y_e & \forall\ e = (i,j) \in E,\ t = 1, ..., n-1 \\
y_e + y_f \geq y_g & \forall\ \text{ triangolo } \{e, f, g\} \in K_n \\
y_e = 1 & e = (s,t) \\
y_e \geq 0 & \forall\ e \in K_n
\end{array}
\tag{3.20}
$$

Osserviamo che le disuguaglianze triangolari e $y_{s,t} = 1$ implicano che $\sum_{e \in P} y_e \geq 1$ per ogni cammino P da s a t. Utilizzando ancora una volta la proposizione 2 ed eliminando z e λ si ottiene:

$$
\begin{array}{ll}
x_e \geq \displaystyle\sum_{t=1}^{n-1} y_e^t & \forall\ e = (i,j) \in E,\ t = 1, ..., n-1 \\
y_e^t + y_f^t \geq y_g^t & \forall \text{ triangolo } \{e, f, g\} \in K_n,\ t = 1, ..., n-1 \\
\displaystyle\sum_{t=1}^{n-1} y_{s,t}^t = 1 & \\
y_e^t \geq 0 & \forall\ e \in K_n,\ t = 1, ..., n-1
\end{array}
\tag{3.21}
$$

Capitolo 4

Una formulazione alternativa per il problema del taglio minimo

In questo capitolo verrà analizzata una più recente formulazione per il problema del taglio minimo, presentata nell'articolo "Compacting cuts: a new linear formulation for minimum cut"[4], che si distingue da quelle precedentemente note per una minore complessità computazionale.
Infatti qualunque formulazione tradizionale per il problema del taglio minimo utilizza $\mathcal{O}(|V||E|)$ variabili e vincoli e può essere interpretata come una composizione di $(|V|-1)$ poliedri mentre quella analizzata nell'articolo mostra una modellizzazione che sfrutta la connessione globale e richiede solamente $\mathcal{O}(|V|^2)$ variabili e $\mathcal{O}(|V|^3)$ riducendo, nel caso in cui il grafo è denso, di un fattore $|V|$ il numero di variabili.

Verranno date due dimostrazioni del risultato: la prima si basa sulla nozione di "splitting off" e fa induzione sulla dimensione di un minimo controesempio, così facendo la formulazione può essere vista come una sequenza di operazioni di "splitting off" che preservano la connettività (locale) riducendo il grafo. La seconda invece è una dimostrazione costruttiva che spiega come ricostruire una soluzione intera da una qualunque soluzione ottima frazionaria [4].

4.1 La formulazione

Supponiamo di avere un grafo completo $G = (V = V_n, E = E_n)$ e un vettore di costi $c \in \mathbb{Q}_+^E$. La formulazione presentata in [4] ha una variabile per ogni spigolo e richiede solo

$n-1$ variabili aggiuntive e $\mathcal{O}(n^3)$ vincoli:

$$\min \quad \sum_{i,j \in E} c_{i,j} x_{i,j} \tag{$P(n)$}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{2 \leq i \leq n} z_i = 1 \tag{4.1a}$$

$$x_{i,k} + x_{j,k} \geq x_{i,j} + 2z_k \qquad \forall\, ij \in E, k \in V \mid i,j < k \tag{4.1b}$$

$$x_{i,k} \geq z_k \qquad \forall\, i \in V, k \in V \mid i < k \tag{4.1c}$$

$$x_{i,j} \geq 0 \qquad \forall\, ij \in E \tag{4.1d}$$

$$z_i \geq 0 \qquad \forall\, i \in V - \{1\} \tag{4.1e}$$

Per mostrarne la correttezza iniziamo provando che i vettori di incidenza di un taglio in G possono essere estesi ad una soluzione ammissibile di $(P(n))$ e che le proiezioni di soluzioni intere di $(P(n))$ sulla variabile x sono in relazione con i tagli di G.

Lemma 1 ([4]). *Se x è il vettore di incidenza di un taglio $C \subseteq E$ allora esiste $z \in \{0,1\}^{V-\{1\}}$ tale che $(x,z) \in (P(n))$*

Dimostrazione. Sia $S \subset V$ un insieme tale che $C = \delta(S)$ ($\delta(S) = \{(u,v) \in V \mid u \in S, v \notin S\}$), costruiamo $z \in \{0,1\}^{V-\{1\}}$ in modo che $(x,z) \in (P(n))$.
Sia l il più piccolo indice tra quelli dei vertici in $V - S$, fissiamo $z_l = 1$ e $z_i = 0\ \forall\, i \neq l$. Tale scelta di z soddisfa i vincoli (4.1a) e (4.1e) e i membri di (4.1c) e (4.1b) con $k \neq l$ dato che si riducono a disuguaglianze triangolari. Rimangono da considerare (4.1c) e (4.1b) con $k = l$. Per la scelta di $l \in V - S$ con $i,j \in S$, per ogni $i,j < l$ si avrà $x_{i,l} = 1$, $x_{j,l} = 1$ e $x_{i,j} = 0$ perciò (x,z) soddisfa anche (4.1c) e (4.1b). □

Lemma 2 ([4]). *Se $(x,z) \in (P(n))$ è intero, allora x domina il vettore di incidenza di un taglio $C \subseteq E$*

Dimostrazione. Supponiamo sia $n \geq 2$ il numero minimo di nodi per cui l'affermazione è falsa:

- se $n = 2$, significa che il grafo ha solo due nodi: $1 = s$ e $2 = t$, ma (4.1a) e (4.1c) implicano $x_{1,2} \geq 1$, di conseguenza si ottiene che x domina l'unico taglio che separa s da t.

- se $n > 2$ da (4.1a) e (4.1e) si ricava che esiste $l \in V - \{1\}$ tale che $z_l = 1$. A questo punto se $l = n$ considerando (4.1c) per ogni $i < n$ si può vedere che x domina $\delta(n)$, quindi bisogna avere $l \neq n$. Sia ora $V' = V - \{1, n\}$, $x' = x|_{E_{n-1}}$ e $z' = z|_{V'}$, si può osservare che $(x', z') \in (P(n-1))$ e dall'assunzione iniziale sappiamo che esiste $S \subset V'$ tale che x' domina $\delta(S)$. Sia $T = V' - S$, è sufficiente mostrare che x domina $\delta(S \cup \{n\})$ o $\delta(T \cup \{n\})$ per ottenere una contraddizione. Il vettore x non domina nessuno dei due insiemi solo se $\exists\, i \in S$ e $j \in T$ tali che $x_{i,n} = x_{j,n} = 0$ ma siccome $x_{i,j} = 1$, la disuguaglianza in (4.1b) con $k = n$ lo impedisce.

□

Dal lemma 1 deriva che tutti i tagli sono soluzioni ammissibili di $(P(n))$ quindi che il valore ottimo di $(P(n))$ è al massimo $con(G, c)$, dove $con(G, c)$ denota il valore del taglio minimo di G rispetto al vettore di costi $c \geq 0$ e viene abbreviato a $con(G)$ se c è implicito. Mostreremo che in realtà il valore ottimo di $(P(n))$ è esattamente $con(G)$ tramite il seguente teorema.

Teorema 8 ([4]). *Il valore ottimale di $(P(n))$ è equivalente a $con(G)$.*

Per la dimostrazione ci servirà il seguente lemma, dovuto a Lovász:

Lemma 3 ([15]). *Sia G un multigrafo euleriano, $x \in V(G)$ e supponiamo G k-connesso $\forall$ coppia di vertici $u, v \neq x$. Allora possiamo trovare due nodi y, z adiacenti ad x tali che rimuovendo gli archi (x, y) e (x, z) e collegando y a z con un nuovo spigolo il grafo ottenuto è ancora k-connesso $\forall$ coppia di vertici $u, v \neq x$. In più se x ha almeno due nodi adiacenti distinti allora esistono y e z che soddisfano le condizioni sopra.*

Indichiamo l'operazione descritta come "splitting off (x, y, z) al vertice x". Le operazioni di splitting off caratterizzano la formulazione $(P(n))$ perché i vincoli descritti da (4.1b) : $x_{i,k} + x_{j,k} \geq x_{i,j} + 2z_k$ possono essere interpretati come come splitting off in G. Quest'idea fondamentale viene sviluppata nel seguente lemma.

Lemma 4 ([4]). *Se $G = K_n$ e c è un vettore intero pari allora per ogni vettore $(x, z) \in (P(n))$ esiste un vettore $d \in \mathbb{Z}_+^{V-\{1\}}$ tale che $cx \geq dz$ e $con(G, c) = \min_{2 \leq i \leq n} d_i$*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n. Se $n = 2$ la disuguaglianza (4.1c) implica $c_{1,2}x_{1,2} \geq c_{1,2}z_{1,2}$ perciò ponendo $d = c_{1,2}$, dato che nel caso di un grafo con soli due nodi e uno spigolo la capacità del taglio minimo è il costo dello spigolo, si ottiene $d = c_{1,2} = con(G, c)$ quindi $c_{1,2}x_{1,2} \geq c_{1,2}z_{1,2} = con(G, c)z_2$ $\forall$ (x, z) ammissibile.
Se $n > 2$ sia $G' = (V, E')$ il multigrafo che contiene esattamente $c_{u,v}$ spigoli paralleli $\forall$ coppia di vettori u, v cosicché

$$con(G, c) = con(G', \mathbb{1}) \tag{4.2}$$

Il lemma 3 garantisce l'esistenza di una sequenza di operazioni di splitting off, $S = ((n, s_1, t_1), ..., (n, s_k, t_k))$ in G' al vertice n tali che

- il vertice n ha un unico nodo adiacente $s \in V$ nel multigrafo risultante H'.
- $con(G', \mathbb{1}) = \min\{|\delta(G'(n))|, con(H', \mathbb{1})\}$. In più siccome nessun taglio minimo in H' separa s da n abbiamo:

$$con(G', \mathbb{1}) = \min\{|\delta(G'(n))|, con(H' - n, \mathbb{1})\} \tag{4.3}$$

Per ogni coppia $u, v \in V$ sia $h_{u,v}$ il numero di spigoli tra u e v in $H' - n$ in modo che:

$$con(H' - n, \mathbb{1}) = con(G - n, h). \tag{4.4}$$

Se $(x, z) \in (P(n))$ osserviamo che $(x, z)|_{E_{n-1} \times V_{n-1-\{1\}}} \in (P(n-1))$, quindi per ipotesi induttiva esiste un vettore $d \in \mathbb{Z}_+^{V_{n-1-\{1\}}}$ tale che $h \cdot x|_{E_{n-1}} \geq d \cdot z|_{\{2,...,n-1\}}$ e

$con(G-n,h) = \min_{2\leq i\leq n-1} d_i$.
Ponendo $d_n = |\delta(G'(n))|$ per dimostrare il lemma è sufficiente mostrare che $c\cdot x \geq d\cdot z + d_n \cdot z_n$ perché da (4.2), (4.3) e (4.4) abbiamo già stabilito che $con(G,c) = \min\{|\delta(G'(n))|, con(G-n,h)\} = \min_{2\leq i\leq n} d_i$.

Viene derivato h da c tramite la sequenza S di operazioni di splitting off e si può osservare che ciascuna delle (n, s_r, t_r) in S (con $r < k$) corrisponde ad un vincolo di (4.1b) soddisfatto ad uguaglianza, i cui coefficienti modellizzano le corrispondenti operazioni.

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in E(K_{n-})} h_{i,j}x_{i,j} &\geq \sum_{2\leq i\leq n-1} d_i z_i \\
+\sum_{1\leq i\leq k} (x_{s_i,n} + x_{t_i,n} - x_{s_i,t_i} &\geq 2z_n) \\
+|\delta(H'(n))|\cdot(x_{s,n} &\geq z_n) \\
= \sum_{i,j\in E(K_n)} c_{i,j}x_{i,j} \geq d_n z_n &+ \sum_{2\leq i\leq n-1} d_i z_i
\end{aligned}$$

□

Dimostrazione teorema 8. Senza perdita di generalità possiamo assumere che c sia stato scalato in modo da diventare un vettore intero con componenti pari. Per ogni $d \in \mathbb{Z}_+^{V-\{1\}}$ ed ogni soluzione ammissibile $(x,z) \in (P(n))$, (4.1a) e (4.1e) implicano che $d\cdot z \geq \min_{2\leq i\leq n} d_i$. Perciò per il lemma 4 abbiamo $c\cdot x \geq con(K_n, c)$ □

Abbiamo quindi mostrato che il valore ottimo di $(P(n))$ è esattamente $con(G)$. Siccome $(P(n))$ può essere pensato come il rilassamento di un programma lineare intero è possibile ricavare, seguendo quanto mostrato nell'articolo "randomized metarounding"[3] o la procedura descritta nella prossima sezione, una soluzione intera di $(P(n))$ che abbia valore $con(G)$. Il lemma 2 implica che tale soluzione intera domina il vettore di incidenza di un taglio e dato che il suo valore è $con(G)$ dovrà quindi rappresentare un taglio. Ricordando inoltre che per il lemma 1 tutti i tagli sono soluzioni ammissibili di $(P(n))$, possiamo concludere che $(P(n))$ è una formulazione per il problema del taglio minimo.

4.2 Decomposizione costruttiva

In questa sezione viene data una dimostrazione alternativa del teorema 8. Tale dimostrazione, presentata anch'essa in [4], a differenza di quella già vista è una prova costruttiva e fornisce un algoritmo per estrarre una soluzione intera da una soluzione ottima del problema.

Nella dimostrazione viene fatta la seguente assunzione: Sia (x^*, z^*) soluzione ottima di $(P(n))$, assumiamo (x^*, z^*) minima, cioè che per ogni $x < x^*$ il vettore (x, z^*) non è ammissibile. Questa assunzione può essere fatta senza perdita di generalità perché $c_{i,j}$ è non negativo $\forall\, i,j$.
Per semplificare l'esposizione ci riferiamo a $x_{j,i}$ come $x_{i,j}$ e assumiamo $x_{i,i}$=0 $\forall\, i$.

Vediamo ora come estrarre una soluzione intera: Definiamo

$$
\begin{aligned}
&k^A = \max\{i \mid z_i^* > 0\} \\
&S = \{\{j,k\} \mid x_{j,k}^* > 0 \text{ e } (x_{k^A,j}^* = 0 \text{ o } x_{k^A,k}^* = 0)\} \\
&\lambda = \min(\{z_{k^A}^*\} \cup \{x_{i,j}^* \mid \{i,j\} \in S\})
\end{aligned}
$$

e il vettore intero (x^A, z^A):

$$
x_{i,j}^A = \begin{cases} 1 & \{i,j\} \in S \\ 0 & \{i,j\} \notin S \end{cases} \qquad z_i^A = \begin{cases} 1 & i = k^A \\ 0 & i \neq k^A \end{cases} \tag{4.5}
$$

Mostreremo che (x^A, z^A) è una soluzione ammissibile per il programma lineare, quindi per il lemma 1 un taglio.

Teorema 9 ([4]). *(x^A, z^A) è una soluzione ammissibile per il programma lineare $(P(n))$.*

Per la dimostrazione sono necessari i seguenti lemmi:

Lemma 5 ([4]). *Se $j < k$ e $x_{j,k}^* > z_k^*$ allora esiste un indice $i < k$, $i \neq j$ tale che $x_{i,k}^* + x_{j,k}^* - 2z_k^* = x_{i,j}^*$.*

Dimostrazione. Poiché abbiamo assunto (x^*, z^*) minima, deve esserci un vincolo attivo in $x_{i,j}^*$ (altrimenti potrebbe essere ridotta senza violare alcun vincolo) e assumendo $x_{j,k}^* > z_k^*$, il vincolo attivo dovrà necessariamente essere (4.1b). □

Lemma 6 (Disuguaglianza triangolare [4]). *Se $i \neq j \neq k$ allora $x_{i,j}^* + x_{j,k}^* \geq x_{j,k}^*$.*

Dimostrazione. Sia $m = \min_{\{i,j,k\} \in T}\{\max\{i,k,j\}\}$, dove $\{i,j,k\} \in T$ se e solo se soddisfano la seguente disequazione:

$$
x_{i,j}^* + x_{i,k}^* < x_{j,k}^* \tag{4.6}
$$

Assumiamo per simmetria $j < k$ ed analizziamo i due casi possibili:

1. Se $j < k < i$, il vincolo $x_{j,i}^* + x_{k,i}^* - 2z_i^* \geq x_{j,k}^*$ contraddice l'assuzione (4.6).
2. Se $i < k$, consideriamo $x_{j,k}^*$ che per il vincolo (4.1c) sarà $\geq z_k$.
   Se $x_{j,k}^* = z_k$, otteniamo quanto enunciato nel lemma dalla seguente catena di disuguaglianze:

$$
\begin{aligned}
x_{i,k}^* + x_{i,j}^* - x_{j,k}^* \quad &\geq x_{i,k}^* - x_{i,j}^* - x_{j,k}^* \\
&= x_{i,k}^* + x_{j,k}^* - 2x_{j,k}^* - x_{i,j}^* \\
&= x_{i,k}^* + x_{j,k}^* - 2z_k^* - x_{i,j}^* \\
&\geq 0
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

   dove l'ultima disuguaglianza deriva dal vincolo (4.1b).
   Se invece $x_{j,k}^* > z_k$ ricaviamo dal lemma 5 che esiste p tale che $p < k$, $p \neq j$ e:

$$
x_{j,k}^* + x_{p,k}^* - 2z_k^* = x_{p,j}^* \tag{4.8}
$$

Ora se $p = i$ quest'equazione diventa $x^*_{j,k} + x^*_{i,k} - 2z^*_k = x^*_{i,j}$ e sapendo che $x^*_{i,k} - z^*_k \geq 0$ possiamo sottrarre due volte tale quantità al membro di sinistra per ottenere $x^*_{j,k} - x^*_{i,k} \leq x^*_{i,j}$ che contraddice l'assunzione (4.6).
Nel caso in cui $p \neq i$ si avrà $i \neq j \neq p$ e $i, j, p < m$, perciò la scelta di m come minimo indice per cui la disuguaglianza triangolare non viene soddisfatta implica $x^*_{p,i} + x^*_{i,j} \geq x^*_{p,j}$. Da quest'ultima equazione sostituendo a $x^*_{p,j}$ il membro di sinistra di (4.8) ricaviamo $x^*_{p,i} + x^*_{i,j} \geq x^*_{j,k} + x^*_{p,k} - 2z^*_k$. Sappiamo inoltre, per il vincolo (4.1b) applicato a $i, p < k$, che $x^*_{i,k} + x^*_{p,k} - 2z^*_k \geq x^*_{p,i}$, perciò otteniamo:

$$x^*_{i,k} + x^*_{p,k} - 2z^*_k + x^*_{i,j} \geq x^*_{p,i} + x^*_{i,j} \geq x^*_{j,k} + x^*_{p,k} - 2z^*_k \tag{4.9}$$

che implica

$$x^*_{i,k} + x^*_{p,k} - 2z^*_k + x^*_{i,j} \geq x^*_{j,k} + x^*_{p,k} - 2z^*_k. \tag{4.10}$$

Una volta semplificata quest'ultima disequazione diventa $x^*_{i,k} + x^*_{i,j} \geq x^*_{j,k}$ che è in contraddizione con (4.6)

□

Lemma 7 ([4]). *Se $\{j, k\} \in S$, allora $x^*_{k^A,j} = 0$ oppure $x^*_{k^A,k} = 0$ ma non entrambi.*

Dimostrazione. Dalla definizione di S, $\{j, k\} \in S$ soltanto se $x^*_{j,k} > 0$ e ($x^*_{k^A,j} = 0$ o $x^*_{k^A,k} = 0$), perciò assumendo $\{j, k\} \in S$ non possono annullarsi sia $x^*_{k^A,j}$ che $x^*_{k^A,k}$ dato che la disuguaglianza triangolare imporrebbe $x^*_{j,k} = 0$ □

Lemma 8 ([4]). *Se $j < k^A$, allora $\{j, k^A\} \in S$.*

Dimostrazione. Per come viene definito S dobbiamo mostrare che $x^*_{j,k^A} > 0$ e ($x^*_{k^A,k^A} = 0$ o $x^*_{k^A,j} = 0$). Ricordando che k^A è il massimo valore tale che $z_{k^A} > 0$ e che per (4.1c) $x^*_{j,k^A} \geq z_{k^A}$ otteniamo che $x^*_{j,k^A} > 0$. Inoltre $x^*_{k^A,k^A}$ è definito uguale a 0, quindi è soddisfatto ($x^*_{k^A,k^A} = 0$ o $x^*_{k^A,j} = 0$). □

Lemma 9 ([4]). *Se $i, j < k^A$ allora $\{i, j\} \notin S$.*

Dimostrazione. Per mostrare che $\{i, j\} \notin S$ è sufficiente mostrare che $x^*_{i,k^A} \neq 0$ e $x^*_{j,k^A} \neq 0$. Dal lemma 8 ricaviamo che $\{i, k^A\} \in S$ e $\{j, k^A\} \in S$, da cui segue che $x^*_{i,k^A} > 0$ e $x^*_{j,k^A} > 0$. □

Lemma 10 ([4]). *Se $i \neq j \neq k$ allora $\{\{i, j\}, \{i, k\}, \{j, k\}\} \not\subset S$.*

Dimostrazione. Supponendo per assurdo $\{\{i, j\}, \{i, k\}, \{j, k\}\} \subset S$ si ottengono dal lemma 7 le seguenti condizioni: ($x^*_{k^A,i} = 0$ xor $x^*_{k^A,j} = 0$), ($x^*_{k^A,i} = 0$ xor $x^*_{k^A,k} = 0$) e ($x^*_{k^A,j} = 0$ xor $x^*_{k^A,k} = 0$), dove xor indica che vale una delle due uguaglianze ma non entrambe. Le condizioni così ottenute non possono mai essere soddisfatte contemporaneamente, quindi il lemma è verificato. □

Lemma 11 ([4]). *Se $i \neq j \neq k$ e $\{j, k\} \in S$ allora $\{i, j\} \in S$ o $\{j, k\} \in S$.*

Dimostrazione. Dati $i \neq j \neq k$ e $\{j,k\} \in S$ ragioniamo per assurdo e supponiamo $\{i,j\} \notin S$ e $\{j,k\} \notin S$. Dalla definizione di S, affinché questo sia possibile, si dovrà avere:

$$\begin{aligned} x^*_{j,k} > 0 \text{ e } (x^*_{k^A,j} = 0 \text{ o } x^*_{k^A,k} = 0), \\ x^*_{i,j} = 0 \text{ o } (x^*_{k^A,i} > 0 \text{ e } x^*_{k^A,j} > 0), \\ x^*_{i,k} = 0 \text{ o } (x^*_{k^A,i} > 0 \text{ e } x^*_{k^A,k} > 0), \end{aligned} \tag{4.11}$$

Siccome $x^*_{j,k} > 0$, dalla disuguaglianza triangolare otteniamo $x^*_{i,j} > 0$ oppure $x^*_{i,k} > 0$. Per simmetria possiamo limitarci a considerare solo uno dei due casi dato che l'altro sarà del tutto analogo. Assumiamo quindi $x^*_{i,j} > 0$ che implica ($x^*_{k^A,i} > 0$ e $x^*_{k^A,j} > 0$) per (4.11). Poiché $x^*_{k^A,j} > 0$ si ottiene da ($x^*_{k^A,j} = 0$ o $x^*_{k^A,k} = 0$) che $x^*_{k^A,k} = 0$ e applicando la disuguaglianza triangolare a $x^*_{k^A,k} = 0$ e $x^*_{k^A,j} > 0$ si ricava $x^*_{i,k} > 0$ che per (4.11) implica ($x^*_{k^A,i} > 0$ e $x^*_{k^A,k} > 0$), in contraddizione con $x^*_{k^A,k} = 0$. □

Lemma 12 ([4]). *Se $i, j < k$, $i \neq j$, $\{i,k\} \in S$ e $\{j,k\} \in S$, allora $x^*_{i,k} + x^*_{j,k} - 2\lambda \geq x^*_{i,j}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che esistano dei valori di i, j, k tali da soddisfare le condizioni del lemma ma con

$$x^*_{i,k} + x^*_{j,k} - 2\lambda < x^*_{i,j}. \tag{4.12}$$

Tra tali $\{i,j,k\}$ scegliamo quelli che minimizzano $m = \min\{i,j\}$ e assumiamo, per simmetria, $m = j > i$. Siccome per ipotesi $\{i,k\} \in S$ e $\{j,k\} \in S$, possiamo applicare il lemma 7 e ricavare ($x^*_{k^A,i} = 0$ xor $x^*_{k^A,k} = 0$) e ($x^*_{k^A,j} = 0$ xor $x^*_{k^A,k} = 0$). Ora se $x^*_{k^A,k} \neq 0$ per soddisfare le condizioni del lemma bisogna avere $x^*_{k^A,i} = 0$ e $x^*_{k^A,j} = 0$ che implicano $x^*_{i,j} = 0$ per la disuguaglianza triangolare. Inserendo $x^*_{i,j} = 0$ nella condizione (4.12) si ottiene $x^*_{i,k} + x^*_{j,k} - 2\lambda < 0$ ma poiché $\{i,k\} \in S$ e $\{j,k\} \in S$ si ha $x^*_{i,k} \geq \lambda$ e $x^*_{j,k} \geq \lambda$ che è in contraddizione con la disuguaglianza appena ottenuta.
Nel caso in cui $x^*_{k^A,k} \neq 0$ ma $x^*_{i,j} = 0$, seguendo lo stesso ragionamento del caso precedente, si ottiene ancora una contraddizione, quindi consideriamo l'ultimo caso rimanente $x^*_{k^A,k} \neq 0$ e $x^*_{i,j} > 0$. Per il lemma 10 si ottiene, dato che $\{i,k\} \in S$ e $\{j,k\} \in S$, che $\{i,j\} \notin S$ e ciò implica $j \neq k^A$ (altrimenti il lemma 8 imporrebbe $\{i,j\} \in S$). Questo permette di distinguere altri due casi:

1. $j < k^A$. Dal vincolo (4.1b) si ottiene $x^*_{i,k^A} + x^*_{j,k^A} - 2z^A_k \geq x^*_{i,j}$ e siccome, per come viene definito λ, $z^*_{k^A} \geq \lambda$, ricaviamo $x^*_{i,k^A} + x^*_{j,k^A} - 2\lambda \geq x^*_{i,j}$. Ora se $k = k^A$ si può concludere sostituendo k nella disequazione, quindi analizziamo il caso $k \neq k^A$: dato che $\{j,k\} \in S$ per il lemma 7 deriviamo che ($x^*_{j,k^A} = 0$ xor $x^*_{k,k^A} = 0$) che implica $x^*_{k,k^A} = 0$ perché $\{j,k^A\} \in S$ comporta $x^*_{j,k^A} > 0$ per il lemma 8. Applicando ora la disuguaglianza triangolare si ottiene che $x^*_{j,k^A} = x^*_{j,k}$ e $x^*_{i,k^A} = x^*_{i,k}$ che sostituiti nella disequazione $x^*_{i,k^A} + x^*_{j,k^A} - 2\lambda \geq x^*_{i,j}$ implicano $x^*_{i,k} + x^*_{j,k} - 2\lambda \geq x^*_{i,j}$,

2. $j > k^A$. Dalla definizione di k^A otteniamo che $z^*_j = 0$ e poiché $x^*_{i,j} > 0$ possiamo concludere che $x^*_{i,j} > z^*_j$. Ora per il lemma 5 esisterà p tale che $p < j$, $p \neq i$ e $x^*_{i,j} + x^*_{p,j} - 2z^*_j = x^*_{i,p}$, che in realtà significa $x^*_{i,j} + x^*_{p,j} = x^*_{i,p}$ dato che $z^*_j = 0$. A questo punto abbiamo altri due casi da considerare in base al valore di $x^*_{p,k}$:

- $x^*_{p,k} > 0$: in questo caso, per come è definito S e conoscendo già che $x^*_{k^A,k} = 0$, si avrà $\{p, k\} \in S$. Questo unito al fatto che $i, p < j = m$, $i, p < k$ e $i \neq p$ ci permette di utilizzare l'ipotesi sulla massimalità di $m = j$ per ottenere $x^*_{i,k} + x^*_{p,k} - 2\lambda \geq x^*_{i,p}$. Sostituendo $x^*_{i,j} + x^*_{p,j} = x^*_{i,p}$ la disequazione diventa $x^*_{i,k} + x^*_{p,k} - 2\lambda \geq x^*_{i,j} + x^*_{p,j}$ che può essere semplificata come $x^*_{i,k} + x^*_{p,k} - 2\lambda \geq x^*_{i,j}$.
- $x^*_{p,k} = 0$: dalla disuguaglianza triangolare ricaviamo $x^*_{i,k} = x^*_{i,p}$ e $x^*_{j,k} = x^*_{p,j}$. Sostituendoli in $x^*_{i,j} + x^*_{p,j} - 2z^*_j = x^*_{i,p}$ otteniamo $x^*_{i,j} - x^*_{j,k} = x^*_{i,k}$ a cui sottraiamo $x^*_{j,k}$ ad entrambi i membri per ricavare $x^*_{i,k} - x^*_{j,k} = x^*_{i,j}$. Osserviamo infine che $\{j, k\} \in S$ da cui deriva $x^*_{j,k} \geq \lambda$ quindi possiamo aggiungere $2(x^*_{j,k} - \lambda)$ al membro di sinistra dell'equazione precedente per ottenere $x^*_{i,k} + x^*_{j,k} - 2\lambda \geq x^*_{i,j}$.

□

Dimostrazione teorema 9. Per valutare se (x^A,z^A) è una soluzione ammissibile del problema consideriamo i vari vincoli che ne descrivono la regione ammissibile:

(4.1a) e (4.1e) sono vincoli di non negatività e tutte le componenti di $(x^A, z^A) \in \{0, 1\}$.

(4.1a) $\sum z^A_i = 1$ è soddisfatto dato che solo una componente di z^A è positiva, ed è uguale a 1.

(4.1c) $x_{i,k} \geq z_k \ \forall\ i \in V,\ k \in V \mid i < k$. Questo vincolo non equivale a $x_{i,k} \geq 0$, che è sempre soddisfatto, solo nel caso in cui $z^A_k > 0$ che si ottiene per $k = k^A$. Sia quindi $i < k = k_A$, per il lemma 8 abbiamo $\{i, k\} \in S$ che significa $x^A_{i,k} = 1$, perciò il vincolo diventa $1 \geq 1$ e di conseguenza viene soddisfatto anche in questo caso.

(4.1b) $x_{i,k} + x_{j,k} \geq x_{i,j} + 2z_k \ \forall\ ij \in E,\ k \in V \mid i, j < k$. Consideriamo tre indici $\{i, j, k\}$ tali che $ij \in E$, $k \in V$ e $i, j < k$. A seconda del valore di k dobbiamo distinguere due casi: Se $k = k^A$ allora $z^A_k = 1$, quindi il vincolo è equivalente a $x^A_{i,k} + x^A_{j,k} - 2 \geq x^A_{i,j}$. In questo caso siccome $\{i, k^A\}, \{j, k^A\} \in S$ per il lemma 8 si ottiene $x^A_{i,k^A} = 1 = x^A_{j,k^A}$ che permette di ridurre il vincolo a $1+1-2 \geq x^A_{i,j}$. Pertanto (4.1b) viene verificato se $x^A_{i,j} = 0$, condizione che è sicuramente soddisfatta perché $\{i, k^A\}$, $\{, k^A\} \in S$ quindi per il lemma 10 $\{i, j\} \notin S$.
Il secondo caso è $k \neq k^A$ che implica $z^A_k = 0$, quindi (4.1b) diventa $x^A_{i,k} + x^A_{j,k} \geq x^A_{i,j}$. A questo punto se nessuno tra $\{i, j\}, \{i, k\}$ e $\{j, k\}$ è contenuto in S vincolo diventa $0 + 0 \geq 0$, altrimenti il lemma 11 e il lemma 10 affermano che esattamente due tra $\{i, j\}, \{i, k\}$ e $\{j, k\}$ appartengono ad S e il vincolo si riduce a $1 + 1 \geq 0$ oppure $1 + 0 \geq 1$, quindi in entrambi i casi è soddisfatto.

□

Definiamo ora una nuova soluzione (x^B, z^B) tale che: $\lambda(x^A, z^A) + (1 - \lambda)(x^B, z^B) = (x^*, z^*)$

$$
\begin{aligned}
x^B_{i,j} &= \frac{1}{1-\lambda} \cdot \begin{cases} x^*_{i,j} - \lambda & \{i, j\} \in S \\ x^*_{i,j} & \{i, j\} \notin S \end{cases} \\
z^B_i &= \frac{1}{1-\lambda} \cdot \begin{cases} z^*_i - \lambda & i = k^A \\ z^*_i & i \neq k^A \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Vediamo perché questa soluzione soddisfa $\lambda(x^A, z^A)+(1-\lambda)(x^B, z^B) = (x^*, z^*)$ studiando separatamente x e z, ovvero verificando che $\lambda x^A_{i,j}+(1-\lambda)x^B_{i,j} = x^*_{i,j}$ e $\lambda z^A_k+(1-\lambda)z^B_k = z^*_k$. Sostituendo i corrispondenti valori otteniamo:

$$\lambda x^A_{i,j} + (1-\lambda)x^B_{i,j} = x^*_{i,j} \iff \begin{cases} \lambda + (x^*_{i,j} - \lambda) = x^*_{i,j} & \text{se } \{i,j\} \in S \\ 0 + x^*_{i,j} = x^*_{i,j} & \text{se } \{i,j\} \notin S \end{cases} \tag{4.14}$$

$$\lambda z^A_k + (1-\lambda)z^B_k = z^*_k \iff \begin{cases} \lambda + (z^*_k - \lambda) = z^*_k & \text{se } k = k^A \\ 0 + z^*_k = z^*_k & \text{se } k \neq k^A \end{cases} \tag{4.15}$$

perciò l'equazione $\lambda(x^A, z^A) + (1-\lambda)(x^B, z^B) = (x^*, z^*)$ è sempre soddisfatta.

Teorema 10 ([4]). *(x^B, z^B) è una soluzione ammissibile del programma lineare.*

Dimostrazione. Come prima cosa osserviamo che (x^B, z^B) soddisfa i vincoli di non negatività grazie alla definizione di λ. Il primo vincolo del programma lineare, (4.1a) richiede $\sum z^B_i = 1$ ed è verificato perché:

$$\sum z^B_i = \frac{1}{1-\lambda}(\sum_i z^*_i - \lambda) = \frac{1}{1-\lambda}(1-\lambda) = 1$$

Vediamo ora il secondo vincolo (4.1b) : $x^B_{i,k} \geq z^B_k$ per $i < k$. Questo vincolo è sicuramente verificato se $k = k^A$ perché dal lemma 9 ricaviamo che $\{i,k\} \notin S$ che implica $\{x^B, z^B\} = \frac{1}{1-\lambda}\{x^*, z^*\}$, perciò siccome $\{x^*, z^*\}$ soddisfa il vincolo, in quanto soluzione ammissibile, lo soddisfa anche $\{x^B, z^B\}$. Altrimenti, se $k > k^A$, dalla definizione di k^A si ottiene $z^B_k = z^*_k = 0$ e il vincolo diventa $x^B_{i,k} \geq 0$ che è soddisfatto perché abbiamo già stabilito che tutte le variabili sono non negative.
Il terzo vincolo di $(P(n))$, (4.1c) richiede $x^B_{i,k} + x^B_{j,k} - 2z^B_k \geq x^B_{i,j}$ per ogni $i, j < k$ con $i \neq j$. Tralasciamo la divisione per $(1-\lambda)$ dato che viene fatta ad entrambi i membri dell'equazione e consideriamo i vari casi che possono verificarsi a seconda degli spigoli appartenenti ad S. Per prima cosa vediamo cosa succede se nessuno tra $\{i,j\}, \{i,k\}$ e $\{j,k\}$ appartiene ad S: in questo caso sappiamo che $k \neq k^A$, altrimenti il lemma 8 imporrebbe $\{j,k\} \in S$ e questo significa che il vincolo rimane identico alla sua versione con $\{x^*, z^*\}$. Se invece almeno uno spigolo tra $\{i,j\}, \{i,k\}$ e $\{j,k\}$ appartiene ad S, per il lemma 11 e il lemma 10 otterremo che esattamente due degli spigoli appartengono ad S, da cui derivano i tre casi seguenti:

- Caso 1: $\{i,k\} \in S$ e $\{j,k\} \in S$. In questo caso, sempre tralasciando la divisione per $(1-\lambda)$, otteniamo $x^B_{i,k} = x^*_{i,k} - \lambda$ e $x^B_{j,k} = x^*_{j,k} - \lambda$, quindi il membro di sinistra del vincolo valutato su (x^B, z^B) si ottiene sottraendo 2λ dal membro di sinistra dello stesso vincolo per (x^*, z^*). Sappiamo inoltre che $k \geq k^A$ per il lemma 9 quindi se $k = k^A$ dobbiamo sottrarre 2λ anche dal membro di destra per ottenere $2z^B_k$, se invece $k \geq k^A$ dalla definizione di k^A otteniamo che $z^B_k = 0$ che implica per il lemma 12 che sottraendo 2λ dal vincolo valutato su (x^*, z^*) esso viene comunque rispettato.

- Casi 2 e 3: $\{i,k\} \in S$ e $\{i,j\} \in S$ o $\{j,k\} \in S$ e $\{i,j\} \in S$. In entrami i casi si ha $\{i,j\} \in S$ che implica $k \neq k^A$, perciò si ottiene che $z^B_k = z^*_k$ e il vincolo valutato su (x^B, z^B) sarà identico alla sua versione per (x^*, z^*) sottraendo λ da entrambi i membri.

□

Teorema 11 ([4]). *Se (x^*, z^*) è una soluzione ottima minima del programma lineare $(P(n))$, allora (x^A, z^A) è una soluzione ottima intera e il suo costo è uguale al costo di (x^*, z^*)*

Dimostrazione. Dai teoremi 9 e 10, ricordando che $\lambda(x^A, z^A)+(1-\lambda)(x^B, z^B) = (x^*, z^*)$, si ottiene che (x^*, z^*) è combinazione convessa di una soluzione ammissibile intera, (x^A, z^A) e un'altra soluzione ammissibile. Questo permette di concludere che (x^A, z^A) è una soluzione ottima per il programma lineare perché se una soluzione ottima è combinazione convessa di soluzioni ammissibili allora queste sono a loro volta ottime. □

L'equazione (4.5) e il teorema 11 mostrano come arrotondare una soluzione ottima frazionaria del programma lineare ad una soluzione intera di uguale costo. Un'affermazione più forte segue direttamente:

Teorema 12 ([4]). *Ogni soluzione ammissibile minima del programma lineare $(P(n))$ è una combinazione convessa di tagli.*

Dimostrazione. Sia (x^*, z^*) una soluzione ammissibile con la proprietà di minimalità, definiamo (x^A, z^A) e (x^B, z^B) come in (4.5) e (4.13). Se (x^B, z^B) è intera allora (x^A, z^A) e (x^B, z^B) formano la combinazione convessa cercata, perciò in tal caso si può concludere. Altrimenti possiamo applicare lo stesso metodo (x^B, z^B) ed estrarre altre soluzioni intere. Un processo di questo genere può avere al più $n - 1 + \binom{n}{2}$ iterazioni, perché ogni volta almeno una variabile aggiuntiva viene ridotta a 0, perciò alla fine si otterrà una sequenza di tagli che costituiscono una combinazione convessa.

Nella dimostrazione abbiamo assunto (x^B, z^B) minima in modo da poterla riscrivere come in (4.5) e (4.13), quindi resta da dimostrare che è effettivamente così. Se per assurdo esistesse una soluzione ammissibile $(x^C, z^C) <$ di (x^B, z^B) si otterrebbe un'altra soluzione $(x^D, z^D) = \lambda(x^A, z^A) + (1 - \lambda)(x^C, z^C)$ ammissibile (perché combinazione convessa di due soluzioni ammissibili) e strettamente dominata da (x^*, z^*), che non è possibile perché (x^*, z^*) è minima. □

4.3 Applicazioni

Verranno ora presentati due problemi che possono essere semplificati riducendo il numero di variabili e vincoli nelle formulazioni per il problema del taglio minimo.

Problema del commesso viaggiatore

Dato un grafo completo $G = (V = V_n, E = E_n)$ e un vettore di costi c, il problema consiste, in pratica, nel trovare un ciclo hamiltoniano in G di costo minimo.

Un rilassamento lineare noto ([7]) per il problema simmetrico del commesso viaggiatore è il seguente:

$$
\begin{array}{llll}
\min & \sum_{ij \in E} c_{i,j} x_{i,j} & & (Sep(n)) \\
\text{s.a.} & x(\delta(v)) = 2 & \forall\, v \in V & (4.16a) \\
 & x(\delta(S)) \geq 2 & \forall\, S \subseteq V \mid \emptyset \neq S \neq V & (4.16b) \\
 & 1 \geq x_{i,j} \geq 0 & \forall\, ij \in E & (4.16c)
\end{array}
$$

Questo programma lineare ha un numero esponenziale di vincoli, tuttavia si può ottenere una soluzione ottima in tempo polinomiale utilizzando il metodo dell'ellissoide dato che il problema di separazione per (4.16.b) è il problema del taglio minimo. Il problema di separazione è definito nel seguente modo:

Definizione 3 ([6]). *Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e un punto $\overline{x}$, trovare una disuguaglianza $ax \geq b$ valida per $Conv(S)$ tale che $a\overline{x} < b$ o dimostrare che non esiste una tale disuguaglianza.*

Consideriamo ora il seguente risultato:

Lemma 13 ([16],[5]). *Per una formulazione compatta di dimensione $M \times N$ del problema di separazione associato ad un problema di ottimizzazione, può essere costruita una formulazione compatta di dimensione $(N + 1) \times M$ per il problema di ottimizzazione.*

Applicando questo lemma ad una formulazione compatta per il problema del taglio minimo si ottiene un insieme di disuguaglianze che possono sostituire il vincolo (4.16.b), permettendo di ricavare una formulazione compatta per il problema di separazione con $\mathcal{O}(n^3)$ variabili e $\mathcal{O}(n^2)$ vincoli, riducendo la complessità di $\mathcal{O}(n^3)$ variabili e $\mathcal{O}(n^3)$ vincoli delle formulazioni precedentemente note.

In realtà è possibile trovare un insieme di disuguaglianze che sostituiscono il vincolo $x(\delta(S)) \geq r\ \forall S \subseteq V \mid \emptyset \neq S \neq V$ per ogni intero positivo r utilizzando $V_1 = V - \{1\}$ e $n - 1$ variabili $y^k \in \mathbb{R}^{E_k}$ per $k \in V_1$ e introducendo le seguenti disequazioni:

$$
\begin{array}{lll}
\sum_{k \in V_1} y_e^k = x_e & \forall\, e \in E & (4.17a) \\
y^k(\delta(k) \cap E_k) \geq r & \forall\, k \in V_1 & (4.17b) \\
y^k(\delta(i) \cap E_k) \geq 0 & \forall\, k \in V_1, i \in V \mid i < k & (4.17c) \\
y_{i,k}^k \geq 0 & \forall\, k \in V_1, i \in V \mid i < k & (4.17d) \\
y_{i,j}^k \leq 0 & \forall\, k \in V_1, ij \in E_{k-1} & (4.17e)
\end{array}
$$

Come preannunciato, escludendo i vincoli di non negatività e non positività (4.17.d) e (4.17.e), ci sono solamente $\mathcal{O}(n^3)$ variabili e $\mathcal{O}(n^2)$ vincoli. Se le variabili sono intere possiamo intuitivamente pensare ad ognuno degli y^k come un'aggiunta di un nuovo vertice k al sottografo r-connesso E_{k-1} definito da $y^2 + ... + y^{k-1}$ in modo da preservare la r-connessione. Infatti le disuguaglianze (4.17.b) e (4.17.d) richiedono l'aggiunta di r spigoli su $\delta(k) \cap E_k$, mentre (4.17.c) e (4.17.e) che degli spigoli di E_{k-1} appartenenti a $y^2 + ... + y^{k-1}$ possano essere cancellati mantenendo però il grafo r-connesso.

Quanto appena visto può essere sintetizzato dal seguente teorema che deriva dalla formulazione presentata nelle sezioni precedenti e il lemma 13.

Teorema 13 ([4]). *I vincoli (4.17) sono equivalenti a* $x(\delta(S)) \geq r$ *per ogni* $S \subset V \mid \emptyset \neq S \neq V$.

ℓ_1-embeddability

Vedremo ora come applicare la formulazione per il problema del taglio minimo presentata in [4] al problema NP-completo dell'ℓ_1-embeddability.

Definizione 4 ([8]). *Un "embedding" di uno spazio metrico* (V, d) *in* ℓ_1 *è una mappa* $f : V \to \mathbb{R}^k$ *tale che* $\forall\, x, y \in V$, $d(x, y) = ||f(x) - f(y)||_1$. *Indicheremo inoltre con metrica* ℓ_1 *l'esistenza di un* ℓ_1*-embedding.*

Data una metrica d è un problema NP-completo determinare se esiste un ℓ_1-embedding per d [1]. Un certificato dell'ℓ_1-embeddability di una metrica d è ad esempio la decomposizione di d come $\sum_i \alpha_i \delta(S_i)$ dove $\alpha_i > 0$ e $S_i \subseteq V$. Tale certificato consiste in un vettore α e una lista di insiemi S_i in più, siccome per il teorema di Carathéodory il numero di metriche di taglio non può superare $\binom{n}{2}$ [4], utilizza $O(n^2)$ numeri razionali e $O(n^2)$ vettori con componenti $\in \{0, 1\}$ (che rappresentano gli insiemi S_i). Il programma lineare che abbiamo introdotto nella sezione 1 permette di ricavare un certificato più compatto utilizzando le metriche di taglio. Tali (semi)metriche possono essere definite partendo da un taglio e fissando $d(v, w) = 1$ se v e w appartengono ai due insiemi distinti del taglio e $d(v, w) = 0$ altrimenti, inoltre sono legate alle metriche ℓ_1 perché ogni metrica ℓ_1 di un insieme V con n elementi può essere scritta come una combinazione non negativa di tagli di V [8]. Infatti data una metrica d e considerata la sua decomposizione come $\sum_i \alpha_i \delta(S_i)$, fissato $\lambda = \sum_i \alpha_i$ si ottiene che $d' = d/\lambda = \sum_i (\alpha_i/\lambda)\delta(S_i)$ è una combinazione convessa di metriche di taglio. Definendo z come un vettore di dimensione $n-1$ e $d'_{v,w} = d(v, w)/\lambda$ e dimostrando che (d', z) è ammissibile per il programma lineare è possibile utilizzare la procedura del teorema 9 per estrarre le metriche di taglio e verificare che d' è una loro combinazione convessa. Il vettore z insieme a λ forma un certificato per una decomposizione ℓ_1 di d di complessità $\mathcal{O}(n)$.

Bibliografia

[1] David Avis and Michel Deza. The cut cone, l1 embeddability, complexity, and multicommodity flows. *Networks*, 21(6):595–617, 1991.

[2] Egon Balas. Disjunctive programming: Properties of the convex hull of feasible points. *Discrete Applied Mathematics*, 1974.

[3] Robert Carr and Santosh Vempala. Randomized metarounding. In *Proceedings of the thirty-second annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 58–62, 2000.

[4] Robert D Carr, Goran Konjevod, Greg Little, Venkatesh Natarajan, and Ojas Parekh. Compacting cuts: a new linear formulation for minimum cut. *ACM Transactions on Algorithms (TALG)*, 5(3):1–16, 2009.

[5] Robert D Carr and Giuseppe Lancia. Compact vs. exponential-size lp relaxations. *Operations Research Letters*, 30(1):57–65, 2002.

[6] Michele Conforti, Giovanni Rinaldi, Laurence A Wolsey, et al. On the cut polyhedron. Technical report, Citeseer, 2000.

[7] George Dantzig, Ray Fulkerson, and Selmer Johnson. Solution of a large-scale traveling-salesman problem. *Journal of the operations research society of America*, 2(4):393–410, 1954.

[8] Michel Marie Deza, Monique Laurent, and R Weismantel. *Geometry of cuts and metrics*, volume 2. Springer, 1997.

[9] Marco Di Summa. Note del corso di ricerca operativa. *Università degli Studi di Padova*, 2012.

[10] Marco Di Summa. Note del corso di ottimizzazione discreta. *Università degli Studi di Padova*, 2020.

[11] Lester Randolph Ford and Delbert Ray Fulkerson. Flows in networks. In *Flows in Networks*. Princeton university press, 1962.

[12] Alain Ghouila-Houri. Caractérisation des matrices totalement unimodulaires. *Comptes Redus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris)*, 254:1192–1194, 1962.

[13] Alan J Hoffmann and Joseph B Kruskal. Integral boundary points of convex polyhedra. *Linear inequalities and related systems*, pages 223–246, 1956.

[14] T Chiang Hu. Multi-commodity network flows. *Operations research*, 11(3):344–360, 1963.

[15] L Lovász. Combinatorial problems and exercises. academiai kiadó, 1979.

[16] R Kipp Martin. Using separation algorithms to generate mixed integer model reformulations. *Operations Research Letters*, 10(3):119–128, 1991.

[17] Arie Tamir. Polynomial formulations of min-cut problems. *Manuscript, Department of Statistic and Operations Research, Tel Aviv University, Israel*, 1994.