UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE ED AZIENDALI "M.FANNO"

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

CORSO DI LAUREA IN: Scienze dell'economia e della gestione aziendale

PROVA FINALE

"L'IMPATTO DELL'IMMIGRAZIONE ILLEGALE SULLA CRESCITA DEI CONSUMI"

RELATORE:

BRUNO VISCOLANI

FEDERICO URBANI

MATRICOLA N° 1168010

ANNO ACCADEMICO 2019/2020

Indice

INTRODUZIONE

Attraverso l'integrazione di numerosi concetti affrontati nelle varie discipline durante il primo, il secondo e il terzo anno ho cercato di redigere un elaborato che mi permetta di concludere in maniera consapevole il percorso di studi in scienze dell' economia. Principalmente mi occuperò di presentare, sviluppare e analizzare un problema di controllo ottimo, per il quale è risultato necessario servirsi delle conoscenze e competenze sviluppate, inizialmente per comprenderne i passaggi e successivamente per sviluppare le argomentazioni che seguiranno.
L'obiettivo è voler dimostrare l'esito positivo di un cammino multidisciplinare di crescita personale che culmini in questa produzione e che possa rispecchiarsi a tutti gli effetti nel significato doverosamente attribuibile ad una "prova finale".
Nello specifico analizzeremo l'impatto dell'immigrazione illegale nel percorso di crescita ottimale del consumo domestico pro-capite, attraverso un problema di controllo ottimo applicato all'economia con orizzonte infinito. Precisiamo subito che con domestico intendiamo quella componente della domanda aggregata, che consente di misurare la spesa in beni o servizi da parte delle famiglie residenti nel Paese.

Il percorso di studi

L'ambito matematico di questo elaborato presuppone l'apprendimento di conoscenze e abilità fondamentali derivanti dal corso di matematica generale. Ci serviremo di numerosi strumenti matematici tra i quali, per citarne alcuni, riscontriamo: derivate, matrici, equazioni differenziali
Microeconomia è una delle colonne portanti della nostra laurea, contiene un insieme di metodi analitici e concettuali che ci aiutano ad interpretare la realtà attraverso rappresentazioni semplificate e formalizzate. Nel nostro caso attraverso le condizioni di primo e secondo ordine, che dovranno essere necessariamente soddisfatte da ogni punto critico del nostro problema, dimostreremo in che modo e con quali condizioni l'immigrato illegale sostituisce il lavoratore residente nel paese.
Il corso economics of information and uncertainty ha l'obbiettivo ci aiuta a comprendere come sintonizzarci per affrontare problemi diversi, dove la massimizzazione della nostra utilità è l'unico obiettivo. Tramite il concetto di "reservation wage" saremo in grado di cogliere gli aspetti alla base dell'imposizione del salario minimo.
Direttamente dal corso di economia internazionale trarremo il concetto di mobilità del fattore produttivo lavoro e di equalizzazione dei salari tra due paesi in apertura commerciale.
Ci appoggeremo alla nostra esperienza coi modelli di produzione aggregata di lungo periodo per ottenere e discutere i risultati trovati.
Per una parte del corso di Macroeconomia ci siamo occupati di analizzare tramite il modello di Solow l'evoluzione di un'economia nel lungo periodo, requisito fondamentale per apprezzare gli svariati modelli macroeconomici con orizzonti elevati o infiniti.
Infine ci tengo a citare come ultimi requisiti le conoscenze e competenze maturate durante il corso di matematica finanziaria. Esso in prima battuta si sviluppa attorno ad esercizi sulle equazioni differenziali e sulla programmazione non lineare, che ci forniranno quegli strumenti matematici utili alla rappresentazione di sistemi dinamici e alla loro ottimizzazione. Il corso si sofferma su quei temi della macroeconomia che costituiscono il modello di crescita di Solow e il modello di crescita neoclassica o anche detto di Ramsey. Su quest'ultimo in particolare si fonderanno le analisi dei prossimi capitoli. Il nostro di fatto è un problema di controllo ottimo applicato all'economia con orizzonte infinito, basato sul tema del calcolo delle variazioni proposto inizialmente da Ramsey, per la massimizzazione dell'utilità complessiva relativa ai consumi dei cittadini residenti in un'economia.

Dal corso di matematica finanziaria ho tratto la maggior parte delle nozioni più teoriche, mentre d'alcune pagine del manuale I. Huntley, R. M. Johnson, "Linear and Nonlinear Differential Equations", Ellis Horwood, Chicester, 1983, ho appreso alcuni metodi matematici complessi che mi sono serviti a trattare un sistema non lineare composto da due equazioni differenziali a due incognite.

Introduzione al modello mono-settoriale

Ci limiteremo ad analizzare un modello di crescita mono-settoriale, con l'obiettivo di semplificare la matematica per raggiungere, si spera, una maggiore chiarezza espositiva, meno cose, ma fatte meglio..
Studiando il fenomeno migratorio, suddividendo i risultati sulla base del grado di sostituibilità tra la forza lavoro rappresentata dai cittadini rispetto a quella rappresentata dai migranti illegali, otterremo risultati diversi.
Tratteremo due casi: in quello che chiameremo "primo caso" il fattore produttivo "lavoro immigrato illegale" (M) penetra nella funzione di produzione come un perfetto sostituto del fattore produttivo "lavoro cittadino residente" (L), mentre in quello che chiameremo "secondo caso" esso penetra come un fattore a se stante.
In questa prova finale mi servirò anche di termini più generici come migranti o immigrati per riferirmi ad M, mentre col termine "forza lavoro" mi riferirò sia ad L che ad M, ad esempio quando esplicherò argomentazioni dove non c'è la necessità di sottintendere.
Ad "M" attribuirò due significati diversi ma strettamente collegati, indicherà sia il vero e propriamente detto "fattore produttivo lavoro immigrato illegale", sia la semplice presenza del fenomeno nel paese (ad esempio con M>0 indicheremo la presenza di immigrati nell'economia). Spero dal contesto si possa astrarre il significato più appropriato, la stessa elasticità va impiegata per l'interpretazione di "L".

La struttura dell'elaborato

Il primo capitolo incorpora un insieme di nozioni frutto del nostro percorso multidisciplinare, in grado di fornirci gli strumenti per comprendere una serie di implicazioni che caratterizzano la crescita.
Nel secondo e terzo capitolo si analizza il modello di crescita ottimale tratto dagli studi degli economisti Bharat R. Hazari e Pasquale M. Sgro, riassunti nell'articolo "The simple analytics of optimal growth with illegal migrants" e pubblicato nel "Journal of Economic Dynamics Control" 28 (2003, 141-151).
L'articolo ci permetterà di osservare gli effetti che si rifletteranno nell'economia di un Paese quando essa si apre all'immigrazione illegale. Tutto ciò assumendo una perfetta sostituibilità tra M ed L nel secondo capitolo e un'imperfetta sostituibilità nel terzo capitolo.
Nel quarto ed ultimo capitolo troviamo un riesame dell'articolo sopracitato, da parte degli economisti cinesi Hon Man Moy e Chong K. Yip, intitolato "The simple analytics of optimal growth with illegal migrants: A clarification", pubblicato anch'esso nel "Journal of Economic Dynamics Control" 30 (2006, 2469–2475).
Questo secondo articolo, supportato da strumenti matematici più complessi, ci permetterà di giungere ad importanti conclusioni, in parte contrastanti con i risultati ottenuti nel secondo e terzo capitolo.

1 L'università e i suoi frutti

1.1 L'SMST e il rapporto tra i salari

Un'impresa, per massimizzare i propri guadagni, deve scegliere attentamente il proprio mix di fattori produttivi. Partiamo da un concetto base della microeconomia, il saggio marginale di sostituzione (SMS).
L'SMS tra x ed y si calcola come rapporto tra l'utilità marginale del bene x e l'utilità marginale del bene y. L'utilità marginale di un bene è pari all'incremento del livello di utilità, ricollegabile ad aumenti marginali nel consumo del bene, dato e costante il consumo di tutti gli altri beni.

$$SMS_{xy} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}.$$

Il paniere di beni ottimale si trova nel punto di tangenza tra la curva d'indifferenza più alta tra quelle raggiungibili e il vincolo di bilancio, punto nel quale risulterà verificata l'uguaglianza $SMS_{xy} = \frac{px}{py}$.
Dal concetto di SMS traiamo quello di saggio marginale di sostituzione tecnica (SMST), esemplificativo del rapporto col quale i fattori produttivi risulteranno interscambiabili ai fini della produzione.
Introduciamo il prodotto marginale (Pm), ovvero la quantità addizionale di output prodotta utilizzando un'unità aggiuntiva di input.
Nel nostro modello il prodotto marginale sia del capitale che della forza lavoro è decrescente, diminuisce al crescere della quantità utilizzata. Il prodotto marginale si calcolo ad esempio per K come:

$$Pm_K = \frac{\partial F(k, L)}{\partial K}$$

Il saggio marginale di sostituzione tecnica tra M ed L è dato dal rapporto tra PmL e PmM.
Se $SMSTml = 1$ i fattori produttivi sono perfetti sostituti e hanno la medesima produttività marginale. Non ci cambierebbe minimamente assumere un lavoratore residente rispetto all'immigrato in quanto a produttività, se non per il fatto che il salario che andremo ad offrire a quest'ultimo sarà sempre inferiore al primo.

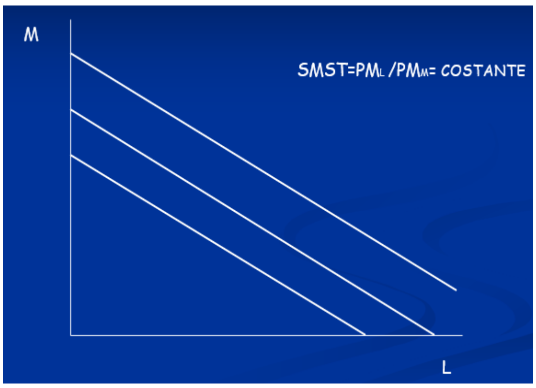

Figura 1

Indichiamo con w_l il salario del lavoratore residente nel paese e con w_m il salario del migrante illegale.
Il rapporto tra i prezzi w_l e w_m è maggiore di 1.

Ciò comporta che nel primo caso:
$SMSTml \leq \frac{w_l}{w_m}$, per ogni quantità scelta saremo sempre disposti a rinunciare ad un ulteriore unità di L in cambio di un ulteriore unità di M.
Con un'imperfetta sostituibilità tra L ed M, $SMSTml \neq 1$ e non potremo, perciò, osservare il semplice rapporto tra i salari.

1.2 L'exloiting effect

I datori di lavoro di sfruttano la condizione d'illegalità nella quale gli immigrati riversano e ciò si tradurrà in un tasso salariale di sfruttamento che seguirà la proporzione: $w_m = \beta w$ con $0 < \beta < 1$.
Con w che indica il salario del lavoratore residente, w_m il salario del migrante e il termine "β" il fattore differenziale. β dev'essere positivo ed inferiore all'unità e lo considereremo come un fattore esogeno. La localizzazione del clandestino non fa parte degli obiettivi delle autorità, poiché l'introduzione di ingenti spese non economicamente giustificabili per individuarlo e rimpatriarlo non avrebbe alcun senso in un'ottica ottimizzatrice.

1.3 Reservation wage, mobilità ed equalizzazione dei prezzi

Dal corso "economics of information and uncertainty" prendiamo in prestito il concetto di "reservation utility/wage" (w_0), il quale definisce il livello minimo del salario che deve essere garantito da un contratto per renderlo accettabile da un soggetto. Ci serviremo di un vincolo detto "partecipation constraint" (PC) che, se soddisfatto, ci assicurerà un impiego dell'energie dell'individuo per la nostra causa; ciò accadrà fino al momento in cui lo stipendio risulterà maggiore o uguale alla nostra w_0. Siamo ora in grado di definire la quantità totale q. Prima di introdurre il salario di riserva potevamo chiederci: perché non posso fissare un fattore differenziale β talmente basso da produrre una quantità di output molto elevata? Poiché essendo che w viene adeguato sulla base della produttività marginale del lavoro, ed essendo quest'ultima decrescente, l'equazione $w_m = w_0$ si verificherebbe con livelli di produzione decisamente inferiori.
In sintesi la migrazione avverrà finché $w_m > w_0$ e terminerà quando il salario eguaglierà il reservation wage.
Il nostro modello si fonda sulla possibilità che ha il fattore produttivo "lavoro migrante" (M) di spostarsi dal paese meno a quello più ricco, infatti se le economie dei due paesi risultassero chiuse non sarebbe possibile parlarne adesso. Il concetto di "mobilità" è alla base di numerosi modelli affrontati durante il corso di Economia Internazionale dal quale andremo a recuperare alcune importanti nozioni.
Il modello H-O ci ha insegnato che l'apertura commerciale tra due paesi porterà ad un'equalizzazione dei prezzi dei fattori produttivi. Un soggetto infatti sarà sempre incentivato a spostarsi nel paese dove l'impiego delle proprie forze risulti meglio retribuito.
Sappiamo che PmL è decrescente, ed essendo il salario offerto proporzionale ad essa, l'ultimo migrante che verrà assunto sarà pagato come se stesse impiegando le sue energie nel paese d'origine.

1.4 Le condizioni d'ottimalità del primo e del secondo ordine

In questo e nel prossimo paragrafo scriveremo semplicemente w, senza distinguere tra salario del cittadino e salario dell'immigrato illegale, poiché la distinzione non è necessaria.
Assumiamo l'ipotesi di un'impresa che per produrre dispone di un unico fattore produttivo, la forza lavoro L.
Microeconomia ci insegna che la condizione di ottimo per la singola impresa si verifica nel punto in cui la derivata prima del ricavo totale rispetto a q (ricavo marginale), è uguale alla derivata prima del costo totale (costo marginale), sempre rispetto a q. L'eguaglianza $RM = CM$ è detta condizione di ottimalità di primo ordine per la massimizzazione del profitto.
Il ricavo marginale si calcola in funzione del prezzo di vendita dell'output: fissato un prezzo di vendita costante $p = 1$, $RM = p = 1$. Il costo marginale invece si calcola in funzione del salario offerto e della produttività marginale del lavoro, secondo la formula $CM = w/PmL$. Il lavoro ha una produttività marginale decrescente all'aumentare di q, perciò il salario offerto non è fisso, esso decrescerà con la produttività marginale.
La condizione di ottimalità di primo ordine impone alle imprese che nel punto di produzione ottimale $q*$ risulti verificata l'equazione $RM = CM$. Nel nostro modello ciò equivale all'uguaglianza $p = w/PmL$.
La condizione di ottimalità di secondo ordine, invece, si verifica quando la curva del costo marginale è crescente nel punto ottimo.
Il datore di lavoro può produrre finché $w_0 = w$. Prima che l'uguaglianza risultasse verificata si poteva cercare di compensare la diminuzione della produttività marginale al crescere di q riducendo w.
Perciò si raggiungerà inevitabilmente un punto $q*$ in cui risulteranno verificate sia la condizione d'ottimalità del primo ordine, $RM = CM$, sia la condizione di ottimalità del secondo ordine, w/PmL crescente all'aumentare di q.

1.5 Come si determina il livello dei migranti

Introduciamo un grafico per determinare il livello di migranti nel Paese. Esso riporta nell'asse delle ascisse il totale dei migranti, mentre nell'asse delle ordinate il salario w. La curva BB' rappresenta la produttività marginale del fattore lavoro, mentre la curva AB'' rappresenta la funzione βw, ovvero una traslazione verso il basso della prima curva data dal fattore differenziale β. Nel punto C avremo $\beta w = w_0$, riportando il punto sull'asse delle ascisse ci risulta facile determinare il totale dei migranti, dato dal segmento $OM*$. Importante è cogliere come l'area w_0CDZ raffiguri quanto il datore di lavoro risparmierà assumendo immigrati illegali al posto di lavoratori residenti nel paese, per ognuno di essi risparmierà $(1 - \beta)Z$

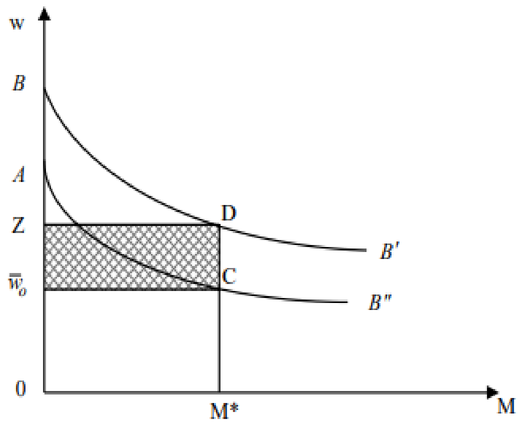

Figura 2

2 Modello mono-settoriale con L ed M perfetti sostituti

2.1 La funzione di produzione

Servendosi del capitale, della forza lavoro domestica e degli immigrati illegali il Paese produce un output Y. La produzione Y=Y(t) è il risultato dell'impiego nel sistema dei fattori produttivi K(t), L(t) e M(t), che rappresentiamo come:

$$Y = F[K, L + M]$$

$F(K, L + M)$ è chiamata funzione di produzione aggregata, essa soddisferà determinate ipotesi:
Ipotesi 1 (comportamento rispetto a ciascun fattore produttivo)
Supponiamo che la funzione di produzione aggregata sia di classe C^2 e tale che:

$$\frac{\partial F(K,L+M)}{\partial K} > 0 \qquad \frac{\partial F(K,L+M)}{\partial (L+M)} > 0$$

$$\frac{\partial^2 F(K,L+M)}{\partial^2 K} < 0 \qquad \frac{\partial^2 F(K,L+M)}{\partial^2 (L+M)} < 0$$

L'intensità di produzione sia strettamente crescente e la produttività marginale strettamente decrescente sia rispetto al capitale che alla forza lavoro, ossia l'intensità di produzione sia strettamente crescente e strettamente concava, separatamente, in ciascun fattore produttivo.
Ipotesi 2 (comportamento per fattori produttivi in rapporto costante)
Supponiamo che F(K,L+M) abbia rendimenti di scala costanti (il prodotto totale cresce esattamente nella stessa proporzione dei fattori produttivi), cioè sia linearmente omogenea (omogenea di grado 1).

$$F(\lambda K, \lambda(L + M)) = \lambda F(K, L + M), \qquad \lambda > 0, (K, L + M) \in [0. + \infty)^2$$

Apriamo una piccola parentesi sulle funzioni differenziali.
-La funzione $g : A - - > R$, dove A^n sia un cono, è detta linearmente omogenea di grado $m \geq 0$ se

$$g(\lambda x)x = \lambda^m g(x), \qquad \lambda > 0, x \in A$$

-Teorema di Eulero:
Sia data la funzione $g : A --> R$, dove A^n sia un cono, e sia g differenziabile in ogni punto di A, allora g è omogenea di grado m se e solo se

$$\nabla g(x)x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} x_i = mg(x), \qquad x \in A$$

Ipotesi 3 (condizioni di Inada) La funzione di produzione aggregata soddisferà inoltre le condizioni di Inada (1966)

$$\lim_{K\to 0} \frac{\partial F(K, L+M)}{\partial K} = +\infty, \qquad \lim_{K\to +\infty} \frac{\partial F(K, L+M)}{\partial K} = 0, L+M > 0$$

$$\lim_{(L+M)\to 0} \frac{\partial F(K, L+M)}{\partial (L+M)} = +\infty, \qquad \lim_{(L+M)\to +\infty} \frac{\partial F(K, L+M)}{\partial (L+M)} = 0, \text{ K>0}$$

$$F(0, L+M) = 0, \;\; L+M \geq 0 \qquad F(K, 0) = 0, \;\; K \geq 0$$

Conseguenza immediata delle condizioni di Inada è che le immagini delle produttività marginali sono tutta la semiretta (0,+inf):

$$Im \frac{\partial F(K, L+M)}{\partial K} = (0, +\infty) \quad \forall (L+M) > 0$$

$$Im \frac{\partial F(K, L+M)}{\partial (L+M)} = (0, +\infty) \quad \forall K > 0$$

pertanto, per ogni $\varphi > 0$ e $L+M > 0$ esiste un valore del capitale, $K_{\varphi, L+M}$, per cui la produttività marginale del capitale è esattamente φ,

$$\frac{\partial F(K_{\varphi,L}, L+M)}{\partial K} = \varphi,$$

e analogamente per $\dfrac{\partial F(K, L+M)}{\partial (L+M)}$, per ogni $\varphi > 0$ e $K > 0$
Le derivate parziali di F(K,L+M) sono funzioni omogenee di grado 0.

2.2 Ottimizzazione dell'impresa ed equilibrio

Il nostro obiettivo in questo paragrafo è imporre le condizioni per determinare i prezzi dei fattori produttivi. A tal fine la forza lavoro totale la riporteremo semplicemente con L, poiché ci basta trovare w per determinare w_m. Supponiamo che il prezzo dell'output sia $P(t) = 1$, per un'impresa l'intensità di profitto è pari a:

$$\Pi(t) = F(K(t), L(t)) - r(t)K(t) - w(t)L(t),$$

con $r(t)$ pari al prezzo di noleggio del capitale e $w(t)$ pari al salario del lavoratore.
Richiediamo che il mercato dei fattori produttivi sia competitivo in ogni istante e perciò che i prezzi $r(t)$ e $w(t)$ al tempo t siano tali da rendere $(K(t), L(t))$ soluzione ottima del problema dell'impresa. Una soluzione ottima interna soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} - r(t) = 0$$

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} - w(t) = 0$$

Le condizioni del primo ordine per l'ottimalità caratterizzano effettivamente le soluzioni ottime interne, essendo anche sufficienti, perché la funzione obiettivo è concava e la regione ammissibile convessa.

Se esiste una soluzione ottima $(K*, L*)$, essa può appartenere alla frontiera, ma questo è escluso dall'ipotesi 3, o essere una soluzione interna con quindi: $K* > 0$ e $L* > 0$, in tal caso abbiamo che per l'omogeneità di grado 0 delle derivate parziali di $F(k, L), \forall \lambda > 0$ vale

$$\frac{\partial F(\lambda K*, \lambda L*)}{\partial K} = \frac{\partial F(K*, L*)}{\partial K} = r(t)$$

$$\frac{\partial F(\lambda K*, \lambda L*)}{\partial L} = \frac{\partial F(K*, L*)}{\partial L} = w(t)$$

e quindi otteniamo che $(\lambda K*, \lambda L*)$ è soluzione ottima per ogni $\lambda > 0$. Le soluzioni ottime sono tutti i punti di una semiretta uscente dall'origine e sono caratterizzate dal valore del rapporto $K * /L*$.

La funzione di produzione può essere trasformata nella sua forma intensiva:

$$y = Y/(L + M) = f(k)$$

con $k = K/(L + M)$

y rappresenta l'intensità di produzione pro-capite rispetto alla forza lavoro totale, mentre k l'intensità di capitale pro-capite.

Dal Teorema di Eulero sappiamo che

$$K\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} + L\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = F(K,L);$$

ora la lineare omogeneità di F implica

$$\frac{K}{L}\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} + \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \frac{F(K,L)}{L} = F(\frac{K}{L}, 1) = f(k)$$

e quindi

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = f(k) - k\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = f(k) - kf'(k)$$

dove l'ultima uguaglianza vale per l'omogeneità di grado 0 della derivata parziale di $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}$, abbiamo infatti che

$$v = \frac{\partial F}{\partial K}(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}) = \frac{\partial F(k,1)}{\partial K}$$

Le condizioni di ottimalità perciò sono:

$r(t) = f'(k(t))$
$w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t))$

Il salario, come già anticipato, non è costante, ma dipende dalla produttività marginale del capitale pro-capite.

2.3 Il problema di controllo ottimo

2.3.1 Introduzione al problema di controllo ottimo

Si consideri l'economia di un Paese aperto all'immigrazione illegale, con M perfetto sostituto del lavoro domestico, nell'arco temporale $[0, +\infty)$. L'intensità di produzione $Y = Y(t)$ è il risultato dell'impiego dei fattori produttivi $K(t)$ e $L(t) + M(t)$.
Abbiamo che:

$$Y(t) = F[K(t), L(t) + M(t)]$$

La funzione di produzione aggregata $F[K, L + M]$ specifica la relazione tra produzione e input produttivi.
Siano L_0 e M_0 le componenti della forza lavoro totale al tempo iniziale t_0. Supponiamo che $L(t)$ e $M(t)$ evolvano esponenzialmente, seguendo le formule: $L(t) = L_0 e^{nt}$ e $M(t) = M_0 e^{nt}$
Definiamo le funzioni:
-capitale pro capite $k(t) = \dfrac{K(t)}{L(t) + M(t)}$;
-intensità di consumo domestico pro capite $c(t) = \dfrac{C(t)}{L(t)}$;
-intensità di produzione pro capite $y(t) = \dfrac{Y(t)}{(L(t) + M(t))} = f(k)$;
-intensità d'investimento pro capite $i(t) = \dfrac{I(t)}{L(t)}$.
L'equazione di bilancio impone:

$$Y(t) = C(t) + \beta wM + I(t)$$

Con βwM pari al salario totale concesso ai migranti. Assumiamo che i migranti non risparmino o accumulino capitale, essi esauriscono per il totale il loro reddito.
Diversamente da Solow il capitale non è soggetto ad un fenomeno di obsolescenza, perciò vale che: $I(t) = K'(t)$
Ricaviamo l'equazione del moto:

$$K'(t) = F(K(t), L(t) + M(t)) – C(t) – \beta wM.$$

A differenza del modello di Solow non ipotizzeremo l'intensità di consumo e l'intensità d'investimento proporzionali all'intensità di produzione secondo fattori costanti endogeni, ma al contrario supporremo che l'intensità di consumo sia funzione di controllo del nostro sistema. Il flusso di consumo individuale viene valutato con l'ausilio di una funzione d'utilità, in modo tale che $U(c)$ rappresenti l'intensità di utilità conseguente all'intensità di consumo c.
$U(c)$ per assunzione appartiene alla classe C^2 e ha le seguenti caratteristiche:
-$U'(c) > 0$;
-$U''(c) < 0$;
-$\lim_{c\to 0} U'(c) = +\infty$;
-$\lim_{c\to +\infty} U'(c) = 0$.
L'intensità d'utilità è una funzione strettamente crescente e concava, mentre l'utilità marginale del consumo ha immagine in $[0, +\infty)$.

2.3.2 Massimizzazione

Introduciamo il funzionale obiettivo:

$$max \int_0^{\infty} U(c)e^{-\rho t}, dx$$

$U(c)$ rappresenta l'utilità in funzione del consumo domestico pro capite ($c = C/L$), mentre ρ rappresenta il tasso di attualizzazione dei consumi. A causa dell'intervallo di tempo all'interno del quale il problema viene considerato, i flussi di utilità determinati dal consumo verranno valutati tenendo conto della distribuzione nel tempo degli stessi. Ciò si ottiene moltiplicando la funzione $U(c)$ per una funzione di attualizzazione, continua, a valori in (0,1] e decrescente. La funzione di attualizzazione è $e^{-\rho t}$, dove $\rho > 0$ è un parametro fissato, chiamato tasso istantaneo di impazienza.
Sappiamo che l'equazione di bilancio impone $Y(t) = C(t) + BwM + I(t)$, da essa definiamo il consumo domestico come segue:
$C(t) = Y(t) – \dot{K} – \beta wM$
Che in termini di consumo pro capite diventa:
$\alpha c = y \text{-} \frac{\dot{K}}{L+M} \text{-} \frac{\beta wM}{L+M}$
con $\alpha = \frac{L}{L+M}$, inferiore all'unità essendo $M > 0$.
Deriviamo a questo punto l'espressione per $\dot{k}$ a partire da $k = \frac{K}{L+M}$:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} \text{-} n\alpha \text{-} (1\text{-}\alpha)\frac{\dot{M}}{M}$$

dove n è derivato dall'equazione di crescita della forza lavoro: $L = L_0 e^{nt}$.
Isoliamo $\dot{k}$:

$$\dot{k} = f(k)\text{-}nk\text{-}\alpha c - \beta w(1 - \alpha)$$

La funzione $\dot{k}$ è chiamata "equazione del moto per il capitale pro-capite".
A questo punto, ispirandoci al modello di Ramsey, presentiamo il problema di controllo ottimo nella forma di Lagrange e le sue rispettive condizioni necessarie fornite dal **"Principio del Massimo di Pontryagin"**.
Formulato nel 1956 dal matematico russo Lev Pontryagin assieme ai suoi studenti, esso è un importante risultato nella teoria del controllo ottimo. Il principio consiste nell'identificazione delle condizioni necessarie per realizzare il controllo ottimo che porti un sistema dinamico da uno stato iniziale ad uno finale, specialmente in presenza di vincoli per lo stato o per i controlli. La funzione obiettivo deve necessariamente raggiungere un estremo all'interno dei controlli considerati.
Impostiamo il problema di ottimizzazione come segue:

$$max \int_0^{\infty} U(c)e^{-\rho t}\, dx$$

sul vincoli:
$\dot{k} = f(k)\text{-}nk\text{-}\alpha c\text{-}\beta w(1\text{-}\alpha)$
$k(0) = k_0$

$0 \leq c \leq f(k)$

Per formulare le condizioni per l'ottimalità definiamo la funzione Hamiltoniana a valore corrente (H^c)

$$H^c = U(c)e^{-pt} + \mu[f(k) - nk - \alpha c - \beta(f(k) - kf'(k))(1 - \alpha)]$$

H^c è una combinazione lineare del funzionale obiettivo max $\int_0^\infty U(c)e^{-\rho t}$ e dell'equazione del moto $\dot{k}$. Per ipotesi tali funzioni sono continue e dotate di derivate parziali continue in k. Tali proprietà sono ereditate dalla funzione hamiltoniana, che risulta essere una funzione lineare affine (un polinomio di primo grado) nelle variabili aggiunte $\mu(t)$. Per tanto anche H^c è continua e dotata di derivate parziali prime continue in $\mu(t)$.

TEOREMA Per il problema di controllo ottimo nella forma di Lagrange con attualizzazione ed orizzonte infinito, sia $c*(t)$ un controllo ottimo continuo a tratti, definito su $[t_0, +\infty)$, a cui sia associata la funzione di stato $k*(t)$ e sia $(c*(t), k*(t))$ una soluzione ottima; allora esiste una costante $\mu_0 \in R$ ed una funzione di classe C^1 definita a tratti e continua $\mu(t)(\mu : [0, +\infty)- > R)$ tali che, per ogni $t \in [0, +\infty)$, valgono le seguenti condizioni:
1) $(\mu_0, \mu(t)) \neq (0, 0)$, μ_0 e $\mu(t)$, per ogni $t \in [0, +\infty)$, non possono risultare ambedue uguali a zero.
2) $c*(t)$ è punto di massimo di $H^c(k*(t), c, \mu(t), t) su[0, +\infty)$, a questa condizione ci riferiamo parlando di "condizione di massimo". Essa, equivalentemente, può essere riscritta imponendo che $c*(t)$ massimizzi semplicemente la funzione:

$$\mu_0 U(c) – \mu(t)\alpha c, \qquad \text{con } c \geq 0.$$

3) tranne che per i tempi t in cui $c*(t)$ è discontinua, la funzione aggiunta $\mu(t)$ è differenziabile e soddisfa l'equazione:

$$\mu'(t) = -\frac{\partial H^c(k*(t), c*(t), \mu(t), t)}{\partial k} -(p - n)\mu(t) = (-f'(k*(t)) + \rho)\mu(t);$$

Ci riferiamo ad essa parlando di "equazione aggiunta".
4) $\mu_0 = (0, 1)$, in qualsiasi istante $t \in [0, +\infty)$, μ_0 assumerà come valore o 0 o 1.

$\underline{\mu_0 = 1}$: Per la condizione 1 sappiamo che la costante aggiunta μ_0 e la variabile aggiunta $mu(t)$, in un qualsiasi istante $t \in [0, +\infty)$, non possono assumere ambedue valore 0. Per la condizione 4 sappiamo che μ_0 potrà assumerà in t o 0 o 1 come valore.. Se $\mu_0 = 0$, allora $\mu(t)$ deve essere sempre diverso da zero per ogni t. Per il Principio del Massimo $\mu(t)$ deve essere continua, perciò o $\mu(t) > 0$ o $\mu(t) <0$ per ogni t compreso tra $[o, +\infty)$. La condizione di massimo (2) richiede che $c(t)$ sia punto di massimo per $-\mu(t)\alpha c$.
Otteniamo che:
-$\mu(t) < 0$, la funzione non ha soluzione ottima e nessun controllo ottimo $c*(t)$ può essere individuato. Infatti $c*(t)$ si dovrebbe riscontrare in un punto in cui $\frac{\partial H^c}{\partial c}$ si annulla, ciò con $\mu(t) < 0$ risulta impossibile;
-$\mu(t) > 0$, per ogni t la funzione individua come unica soluzione ottima il controllo $c*(t) = 0$, ma un intensità di consumo nulla non ci risulta economicamente appropriata per i nostri studi. In conclusione, se deve esistere un controllo ottimo $c*(t)$ non identicamente nullo, esso deve soddisfare le condizioni necessarie per cui $\mu 0 = 1$.

2.4 Derivazione di $\dot{c}$ e $\dot{k}$

$$H = U(c)e^{-pt} + \mu[f(k) - nk - \alpha c - \beta(f(k) - kf'(k))(1 - \alpha)$$

Deriviamo le condizioni di primo ordine:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = U'(c)e^{-pt} - \mu\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial k} = -\mu[f'(k) - \alpha n + (1 - \alpha)\beta kf''] \qquad (2)$$

riscriviamo la (1)

$\frac{\partial H}{\partial c} = U'(c)e^{-pt} = \mu\alpha$

Derivando per μ

$\dot{\mu} = \frac{1}{\alpha}e^{-pt}[U''(c)\dot{c}\text{-}\rho U'(c)]$ (3)

Eguagliando la (2) e la (3)

$\dot{c} = \frac{f'(k) - (n + \rho) + (1 - \alpha)\beta kf''(k)}{\eta(c)}c$ (4)

Dove $\eta(c) = -c\frac{U''(c)}{U'(c)}$ è l'elasticità con la quale l'utilità marginale del consumo diminuisce al crescere del consumo. L'elasticità assume un valore positivo poiché $U'(c) > 0$, $U''(c) < 0$ e $c \geq 0$ per ipotesi, l'utilità marginale dei consumi è di fatto decrescente all'aumentare di c.

Otteniamo un sistema nelle due equazioni differenziali $\dot{c}$ e $\dot{k}$:

$\dot{c} = \frac{f'(k) - (n + \rho) + (1 - \alpha)\beta kf''(k)}{\eta(c)}c$

$\dot{k} = f(k)\text{-}nk\text{-}\alpha c\text{-}\beta w(1\text{-}\alpha)$

2.5 Rappresentazione e analisi grafica dei risultati

La crescita ottimale con migranti illegali si ottiene nel punto che ha per coordinate $(c*, k*)$. In tale punto le derivate prime di c e k si annullano in t.

Se $\dot{c} = 0$, $f'(k) = (n + \rho)–(1 - \alpha)\beta kf''$ (5).

L'inclinazione di $f(k)$ è pari a $(n + \rho)–(1 - \alpha)Bkf''$ ed è rappresentata dal punto A nella metà superiore della figura 3.

Nella metà inferiore della figura 3 tracciamo la curva verticale $c' = 0$. Alla sinistra della verticale $\dot{c} = 0$ riscontreremo un consumo crescente poiché $\dot{c} > 0$, mentre alla destra di $\dot{c} = 0$ riscontreremo un consumo decrescente poiché $\dot{c} < 0$.

Se $\dot{k} = 0$, $c = \frac{f(k) - nk - \beta w(1 - \alpha)}{\alpha}$ (6)

Isolando c possiamo tracciare nella metà inferiore della figura 4 la curva $k' = 0$. Il punto B, con coordinate $(c*, k*)$, rappresenta il percorso di crescita ottimale nel caso in cui il Paese si aprisse all'ingresso di migranti illegali.

Dalla (6) isoliamo f(k) e troviamo:

$f(k) = nk + \alpha c + (1-\alpha)\beta w$ (7)

Per analizzare i risultati dobbiamo comparare la soluzione trovata con la soluzione ottima del modello standard senza immigrazione illegale.
M=0
Procediamo con l'annullamento delle derivate prime ($\dot{c}_0 = 0, \dot{k}_0 = 0$).
Notiamo che le espressioni per $\dot{c}_0 = 0$ e $\dot{k}_0 = 0$ si riducono alle seguenti nel caso in cui $M = 0$:

Se $\dot{c}_0 = 0$, $f'(k) = n + p$; (8)

Se $\dot{k}_0 = 0$, $f(k) = nk + c$. (9)

Con $M = 0$, $\alpha = 1$ e $\beta w(1-\alpha) = 0$

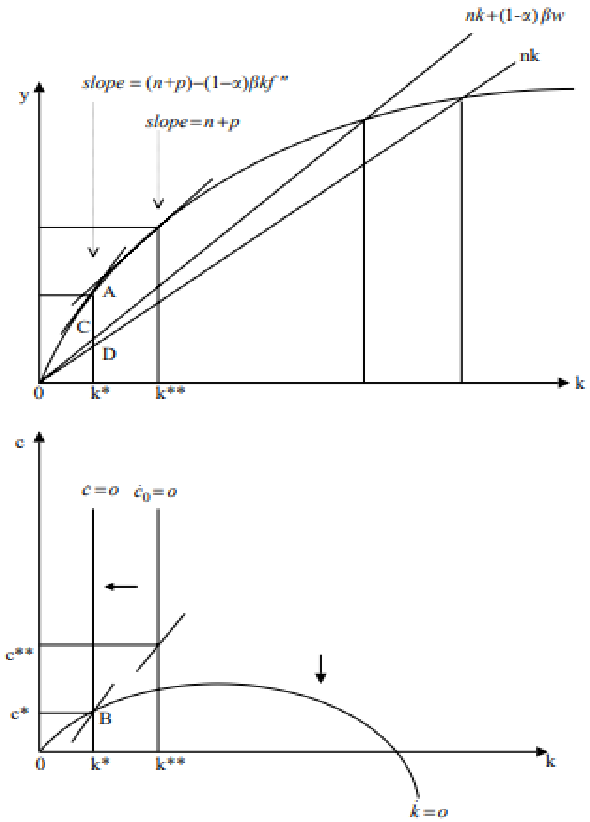

Figura 3

Le condizioni appena trovate (8) e (9) dobbiamo compararle con le corrispondenti (5) e (7):
-Confrontiamo l'equazione (5) con la (8).
Chiamiamo E il punto in cui la funzione $f(k)$ ha un inclinazione pari a $n + p$. Riscontriamo che l'inclinazione di $f(k)$ nella (5) è maggiore di quella della (8), infatti, poichè $f''(k) < 0$, abbiamo:

$$(n + p)–(1 - \alpha)\beta k f(k)'' > n + p.$$

Tracciamo ora la verticale $\dot{c}_0 = 0$ nella metà inferiore della figura 3 partendo dal punto E. Noteremo che la verticale $\dot{c}_o = 0$ si troverà alla destra della verticale $\dot{c} = 0$.
Con $M = 0$ si raggiungeranno livelli di consumo pro capite maggiori.

-Confrontiamo l'equazione 7 con la 9.

La curva $\dot{k_0} = 0$ sarà ovunque, ma sempre sopra la curva $\dot{k} = 0$. Dalla metà superiore osserviamo infatti che l'inclinazione di nk è sempre inferiore rispetto all'inclinazione di $nk + (1 - alpha)\beta w$, anche se risulta, nostro malgrado, impossibile tracciare la curva esatta.
Abbiamo che

$$nk + (1 - alpha)\beta w > nk.$$

I valori $c**$ e $k**$ rappresentano rispettivamente il consumo pro capite (non serve specificare domestico essendo $M = 0$) e il capitale pro capite d'equilibrio ottimale in assenza di immigrati illegali. Possiamo concludere che il consumo pro capite con $M = 0$ è maggiore rispetto al caso in cui il fenomeno migratorio sia presente, $c** > c*$, stessa cosa vale per il capitale pro capite, $k** > k*$.

2.6 conclusione capitolo 2

La presenza degli immigrati illegali ha due effetti sulla crescita del paese ospitante.
Il primo è positivo ed è dato dal fatto che, venendo essi sfruttati, nell'affidare alcune mansioni ai migranti si ha un risparmio pari a $wM–\beta wM$, che può essere o accumulato o consumato.
Il secondo invece è negativo e deriva dallo spreco di capitale indirettamente destinato a produrre output che verrà consumato dai migranti.
In sintesi il primo determina un aumento del consumo domestico e/o dell'investimento, mentre il secondo spreca capitale. La risultante dei due, come sopra abbiamo dimostrato, è negativa.
Per concludere diciamo che il consumo da parte dei cittadini residenti decresce se il Paese si apre all'ingresso dell'immigrazione illegale.

Il crollo del rapporto c'/c può essere spiegato anche in altri termini.
Supponiamo che l'economia si trovi in uno stato d'equilibrio iniziale senza alcun migrante. Il Paese ad un tratto si apre, i migranti vengono impiegati e consumano il totale del loro reddito.
Come conseguenza la curva nk subisce una rotazione verso l'alto che la porta in $nk + (1 - \alpha)\beta w$.
La rotazione di nk in $nk+(1-\alpha)\beta w$ aumenta all'aumentare di β, perciò, per concludere, possiamo dire che un maggiore sfruttamento di M aiuta a contenere gli effetti di riduzione del consumo domestico pro capite.
$(1 - \alpha)\beta w$ indica il consumo da parte dei migranti illegali e troverà il suo massimo in $\beta = 1$, cioè al punto in cui non si può più parlare di sfruttamento poiché essi verrebbero pagati sulla base della loro produttività marginale.
Dalla figura 3 notiamo che nel punto $k*$ il consumo da parte di M si ricava dalla distanza CD.
Il rapporto tra capitale e forza lavoro, conseguentemente all'apertura, diminuirà fino al punto d'intersezione tra $f(k)$ e $nk + (1 - \alpha)\beta w$.
Inoltre si evince che l'economia avrà meno capitale per lavoratore rispetto a prima e sarà quindi più povera, perciò è scontato il fatto che in questo caso il rapporto c'/c debba diminuire.

3 Modello mono-settoriale con L ed M sostituti imperfetti

3.1 La funzione di produzione

Sempre servendosi del capitale, della forza lavoro domestica e degli immigrati illegali il Paese produce un output Y, ma a differenza di prima L ed M non sono più perfetti sostituti. Adesso abbiamo:

$$Y(t) = F(K, L, M)$$

dove $F(K, L, M)$ è la nuova funzione di produzione aggregata.
La funzione di produzione aggregata soddisferà le stesse ipotesi, solo con qualche differenza formale data dal fatto che M, adesso, penetra nella funzione di produzione come un fattore a se stante.
Riportiamole in breve.
Ipotesi 1 (comportamento rispetto a ciascun fattore produttivo) Supponiamo che la funzione di produzione aggregata sia di classe C^2 e tale che:

$$\frac{\partial F(K,L,M)}{\partial K} > 0 \qquad \frac{\partial F(K,L,M)}{\partial L} > 0 \qquad \frac{\partial F(K,L,M)}{\partial M} > 0$$

$$\frac{\partial^2 F(K,L,M)}{\partial^2 K} < 0 \qquad \frac{\partial^2 F(K,L,M)}{\partial^2 L} < 0 \qquad \frac{\partial^2 F(K,L,M)}{\partial^2 M} < 0$$

L'intensità di produzione sia strettamente crescente e la produttività marginale strettamente decrescente rispetto a K, L ed M, ossia l'intensità di produzione sia strettamente crescente e strettamente concava, separatamente, in ciascun fattore produttivo.
Ipotesi 2 (comportamento per fattori produttivi in rapporto costante)
Supponiamo che F(K,L,M) abbia rendimenti di scala costanti (il prodotto totale cresce esattamente nella stessa proporzione dei fattori produttivi), cioè sia linearmente omogenea (omogenea di grado 1).

$$F(\lambda K, \lambda L, \lambda M) = \lambda F(K, L, M), \qquad \lambda > 0, (K, L, M) \in [0. + \infty)^2$$

Ipotesi 3 (condizioni di Inada) La funzione di produzione aggregata soddisferà inoltre le condizioni di Inada (1966)

$$\lim_{K\to 0} \frac{\partial F(K,L,M)}{\partial K} = +\infty, \qquad \lim_{K\to +\infty} \frac{\partial F(K,L,M)}{\partial K} = 0, \text{ con L>0 e/o M>0}$$

$$\lim_{L\to 0} \frac{\partial F(K,L,M)}{\partial L} = +\infty, \qquad \lim_{L\to +\infty} \frac{\partial F(K,L,M)}{\partial L} = 0, \text{ K>0}$$

$$\lim_{M\to 0} \frac{\partial F(K,L,M)}{\partial M} = +\infty, \qquad \lim_{M\to +\infty} \frac{\partial F(K,L,M)}{\partial M} = 0, \text{ K>0}$$

$$F(0, L, M) = 0, \;\; L + M \geq 0 \qquad F(K, 0, 0) = 0, \;\; K \geq 0$$

Supponiamo che si possa produrre anche se uno tra M ed L è uguale a zero, basta che nello stesso istante non lo siano tutti e due. Mentre se $K = 0$, Y sarà sempre zero, anche se $L > 0$ e $M > 0$, L ed M perciò da soli non permettono di produrre. Conseguenza immediata delle condizioni di Inada è che le immagini delle produttività marginali sono tutta la semiretta (0,+inf):

$$Im \frac{\partial F(K,L,M)}{\partial K} = (0, +\infty) \quad \forall (L + M) > 0$$

$$Im \frac{\partial F(K,L,M)}{\partial L} = (0, +\infty) \quad \forall K > 0$$

$$Im\frac{\partial F(K,L,M)}{\partial M} = (0,+\infty) \quad \forall K > 0$$

pertanto, per ogni $\varphi > 0$ e $L+M > 0$ esiste un valore del capitale, $K_{\varphi,L+M}$, per cui la produttività marginale del capitale è esattamente φ,

$$\frac{\partial F(K_{\varphi,L}, L, M)}{\partial K} = \varphi$$

e analogamente per $\frac{\partial F(K,L,M)}{\partial L}$ e $\frac{\partial F(K,L,M)}{\partial M}$, per ogni $\varphi > 0$ e $K > 0$

3.2 Ottimizzazione dell'impresa ed equilibrio

Ora che L ed M non sono più perfetti sostituti, consideriamo i migranti illegali come un fattore produttivo a se stante. La funzione di produzione aggregata diventa $F(K, L, M)$, perciò otteniamo una funzione di produzione della forma:

$$Y = F(K, L, M)$$

Che in forma intensiva diventa:
$y = Y/L = f(k, m)$
dove $k = K/L$ e $m = M/L$.
Ricaviamo le condizioni sulla produttività marginale come in precedenza:
$r = f'(k, m)$;
$w = f(k, m)–kf'(k, m)–mg'(k, m)$;
$w_m = B'g'(k, m)$.
dove $f' = \frac{\partial f}{\partial k}$, $g' = \frac{\partial f}{\partial m}$ e $0 < \beta' < 1$
Gli immigrati irregolari non vengono pagati con il valore della loro produttività marginale.

3.3 Il problema di controllo ottimo

3.3.1 Introduzione al problema di controllo ottimo

Si consideri l'economia di un Paese aperto all'ingresso dell'immigrazione clandestina (M) come imperfetto sostituto del lavoro domestico (L), nell'arco temporale $[0, +\infty)$. L'intensità di produzione $Y = Y(t)$ è il risultato dell'impiego dei fattori produttivi $K(t)$, $L(t)$ e $M(t)$.
Abbiamo che:

$$Y(t) = F[K(t), L(t), M(t)]$$

con $F[K, L + M]$ che indica la funzione di produzione aggregata.
Il consumo continua ad essere la variabile di controllo del nostro sistema.
Il flusso di consumo individuale viene valutato con l'ausilio di una funzione d'utilità, in modo tale che $U(c)$ rappresenti l'intensità di utilità conseguente all'intensità di consumo c.
$U(c)$ per assunzione appartiene alla classe C^2 e ha le stesse caratteristiche presentate nel capitolo precedente.

3.3.2 Massimizzazione

Introduciamo il funzionale obiettivo:

$$max \int_0^\infty U(c)e^{-\rho t}\,dx$$

Abbiamo che l'equazione di bilancio impone

$$Y(t) = C(t) + I(t) + w_m M,$$

dove $w_m M$ è pari al consumo totale da parte dei migranti.
Abbiamo che $k = \frac{K}{L}$ e $m = \frac{M}{L}$.
Sapendo che $I(t) = K'(t)$, possiamo definire il consumo domestico come segue:

$$C(t) = Y(t) - K' – w_m M$$

Come in precedenza l'espressione può essere convertita in termini di intensità di consumo pro capite:

$$c(t) = y – \frac{K'}{L} - w_m m$$

Conoscendo la relazione per cui $k = \frac{K}{L}$ possiamo derivare l'equazione del moto per il capitale pro-capite k':

$$k' = f(k,m) - c – nk - w_m m$$

A questo punto, ispirandoci al modello di Ramsey, presentiamo il problema di controllo ottimo nella forma di Lagrange e le sue rispettive condizioni necessarie fornite dal **"Principio del Massimo di Pontryagin"**.
Impostiamo il problema di ottimizzazione come segue:

$$max \int_0^\infty U(c)e^{-\rho t}\,dx$$

sul vincoli:
$\dot{k} = f(k,m)$-nk-c-$w_m m$
$k(0) = k_0$
$0 \leq c \leq f(k)$
Per formulare le condizioni per l'ottimalità definiamo la funzione Hamiltoniana a valore corrente (H^c)

$$H^c = U(c)e^{-pt} + \mu[f(k,m) - nk - c - w_m m]$$

3.4 Derivazione di c' e k'

Abbiamo:

$$H = U(c)e^{-pt} + \mu[f(k,m) - nk - c - w_m m]$$

Deriviamo le condizioni di primo ordine:

$$\frac{\partial H^c}{\partial c} = U'(c)e^{-pt} - \mu(t) = 0 \qquad (10)$$

$$-\frac{\partial H^c}{\partial k} = \dot{\mu} = -\mu(t)(f'(k) – n – m\frac{\partial w_m}{\partial k}), \qquad con\frac{\partial_m}{\partial k} > 0 \qquad (11)$$

Isoliamo $\mu(t)$ dalla (10):

$$\frac{\partial H^c}{\partial c} = U'(c)e^{-pt} = \mu(t)$$

derivando per μ otteniamo

$$\dot{\mu} = e^{-pt}[U''(c)\dot{c} - \rho U'(c)] \qquad (12)$$

Eguagliando la (11) alla (12)

$$\dot{c} = \frac{f'(k,m) - (n + \rho + m\frac{\partial w_m}{\partial k})}{\eta(c)}c,$$

Dove $\eta(c)$ è l'elasticità con la quale l'utilità marginale del consumo diminuisce al crescere di c. Otteniamo un sistema nelle due equazioni differenziali $\dot{c}$ e $\dot{k}$:

$$\dot{c} = \frac{f'(k,m) - (n + \rho + m\frac{\partial w_m}{\partial k})}{\eta(c)}c,$$

$$\dot{k} = f(k,m) - c – nk - w_m m$$

Per trovare i valori ottimali c* e k* poniamo $\dot{c} = 0$ e $\dot{k} = 0$.

A differenza di prima bisogna notare che la funzione di produzione aggregata $f(k,m)$ adesso dipenderà non solamente dal coefficiente $k = \frac{K}{L}$ (capital/labour ratio), ma anche dal rapporto $m = \frac{M}{L}$ (migrant/labour ratio).

Procediamo ugualmente a trovare $(c*,k*)$, punto in cui le derivate prime di c e k si annullano in t:

Se $\dot{c} = 0 \quad f'(k,m) = n + \rho + m\frac{\partial w_m}{\partial k}$

Se $\dot{k} = 0 \; f(k,m) = nk + c + w_m m$

3.5 Rappresentazione e analisi grafica dei risultati

Se $\dot{c} = 0$ la funzione di produzione $f(k,m)$ ha un inclinazione pari a $f'(k,m) = n + \rho + m\frac{\partial m}{\partial k}$, che in figura 4 è rappresentata dal punto F nella metà superiore e dalla verticale = 0 nella metà inferiore. Anche questa volta alla sinistra della verticale tracciata riscontreremo un consumo crescente $\dot{c} > 0$, mentre alla sua destra riscontreremo un consumo decrescente $\dot{c} < 0$.

Posto $\dot{k} = 0$, otteniamo $c = f(k,m) - nk - w_m m$; possiamo, quindi, tracciare la curva $\dot{k} = 0$ nella metà inferiore della figura 4. Il punto H di coordinate $(c*,k*)$, dato dall'incontro tra la verticale $\dot{c} = 0$ e la curva $\dot{k} = 0$, rappresenta il nostro percorso di crescita ottimale in presenza di M.

A questo punto dobbiamo confrontare i risultati ottenuti col caso di un'economia priva di migranti illegali.

Procediamo con l'annullamento delle derivate prime ($\dot{c_0} = 0, \dot{k_0}' = 0$).

$\dot{c} = 0$ e $\dot{k} = 0$ si riducono alle seguenti espressioni nel caso in cui $M = 0$:

Se $\dot{c_0} = 0 \quad f'(k) = n + \rho$

Se $\dot{k_0} = 0 \quad f(k) = nk + c$

Come nel caso precedente otteniamo i valori $c**$ e $k**$.
Poco fa abbiamo posto l'attenzione sul fatto che la funzione di produzione aggregata dipendesse sia dal capital/labour ratio (K/L) che dal migrant/labour ratio (M/L).
Non siamo in grado di comparare i valori $c*$ e $k*$ con i valori $c**$ e $k**$ poichè non ci è chiaro se la nuova soluzione si trovi alla sinistra o alla destra del caso privo d'immigrazione, in conclusione $c*$ e $k*$ potrebbero essere sia maggiori che minori di $c**$ e $k**$.

Di conseguenza, sta volta, non siamo in grado di escludere l'ipotesi per cui l'apertura commerciale possa portare, nel lungo termine, ad un aumento del livello di consumo domestico pro-capite.

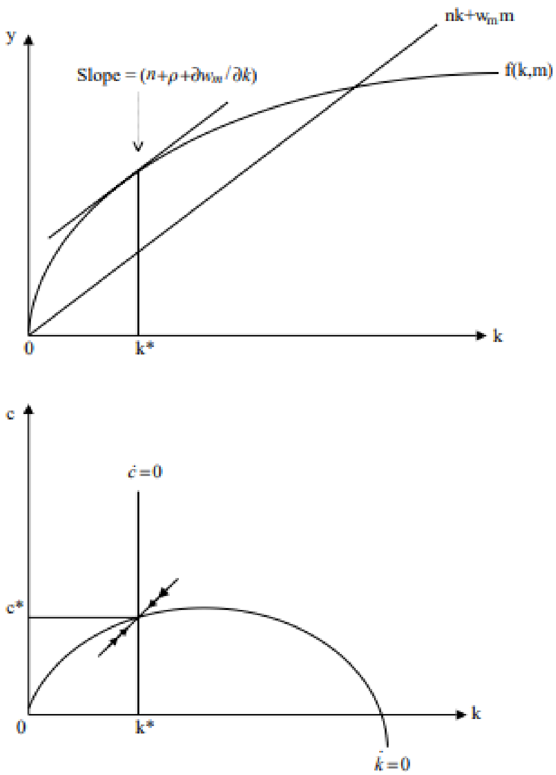

Figura 4

3.6 Funzione di produzione della classe Cobb Douglas

Considerando M come un fattore a se stante abbiamo riscontrato delle ambiguità.
Cerchiamo di spiegare i risultati trovati nel paragrafo precedente in un modo più intuitivo, permettendoci di fare alcune assunzioni:
-la funzione di produzione aggregata $F(K, L, M)$ appartiene alla classe delle "Cobb Douglas". Le Cobb Douglas presentano alcune proprietà molto convenienti, tra le quali la differenziabilità e la facilità con cui è possibile trattarle analiticamente.
Ricordiamo che la Cobb-Douglas è una funzione che si presenta sotto questa forma:

-U(c) è una funzione di utilità CES, ovvero con costante elasticità di sostituzione.
In tali condizioni l'intensità di produzione pro-capite sarà data da:

$$y = k^{\epsilon} m^{1-\epsilon-\epsilon^1}$$

Gli esponenti epsilon (ϵ) ed epsilon primo (ϵ^1) rappresentano rispettivamente gli esponenti di capitale e lavoro. La funzione integranda nel funzionale obiettivo diventa: $\int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta}$, dove θ è l'elasticità con la quale l'utilità marginale del consumo diminuisce al crescere di c.
Il problema di ottimizzazione si trova perciò nella forma:

$$max \int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta},$$

sul vincolo dato dall'equazione del moto pro-capite:
$\dot{k} = k^\epsilon m^{\epsilon-\epsilon^1}$
con sempre $k = \frac{K}{L}$ e $m = \frac{M}{L}$.
Usando le solite procedure, che per brevità non riporteremo, arriviamo ad isolare $\dot{c}$, ottenendo:

$$\dot{c} = \frac{\epsilon k^{\epsilon-1}m^{1-\epsilon-\epsilon'}[(1-\beta')+\beta'(\epsilon+\epsilon')]-(n+\rho)}{\theta}c \tag{13}$$

Riscriviamola la (13) portando c dall'altra parte dell'uguale:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\epsilon k^{\epsilon-1}m^{1-\epsilon-\epsilon'}[(1-\beta')+\beta'(\epsilon+\epsilon')]-(n+\rho}{\theta} \tag{14}$$

Ora dobbiamo confrontare l'equazione (14) col caso in cui $M = 0$.
Se $M = 0$ abbiamo:

$$\frac{\dot{c_0}}{c_0} = \frac{\epsilon k^{\epsilon-1}-(n+\rho)}{\theta}, \tag{15}$$

Confrontando la (14) con la (15) si aprono due casi.
Nel primo caso:

$$\frac{\dot{c}}{c} \geq \frac{\dot{c_0}}{c_0}, \qquad \text{se e solo se} \qquad 1 \geq m^{1-\epsilon-\epsilon'}[(1-\beta')+\beta'(\epsilon+\epsilon')]$$

Nel secondo caso:

$$\frac{\dot{c}}{c} \leq \frac{\dot{c_0}}{c_0}, \qquad \text{se e solo se} \qquad 1 \leq m^{1-\epsilon-\epsilon'}[(1-\beta')+\beta'(\epsilon+\epsilon')]$$

Consideriamo l'ipotesi in cui il rapporto c'/c sia maggiore nel caso in cui $\alpha = 1$. Ciò implica che $1 \leq m^{1-\epsilon-\epsilon'}[(1-\beta')+\beta'(\epsilon+\epsilon')]$. Facilmente otteniamo che $[(1-\beta')+\beta'(\epsilon+\epsilon')] < 0$, dobbiamo quindi imporre la condizione necessaria per la quale m>1 affinché l'equazione risulti verificata. Solamente se il numero dei lavoratori immigrati illegalmente è maggiore della forza lavoro domestica abbiamo che $m > 1$.. e in condizioni ragionevoli questo accade molto difficilmente.
Possiamo quindi constatare il fatto che il fenomeno dell'immigrazione illegale, se efficacemente sfruttato, risulta essere benefico per l'aumento dei consumi dei cittadini residenti, ciò nel caso in cui M ed L non sono perfetti sostituti.

3.7 Conclusione capitolo 3

Nel capitolo 3 abbiamo continuato a riassumere gli studi svolti dagli economisti Bharat R. Hazari e Pasquale M. Sgro riguardo l'impatto dell'immigrazione illegale sul benessere di un'economia. La presenza di immigrati illegali comporta due effetti fondamentali sul benessere dei cittadini. Il primo è negativo ed è dato dal fatto che una parte del capitale viene destinata a produrre dell'output che verrà inevitabilmente consumato dai migranti, mentre il secondo, anche detto "exloitation effect", è positivo e deriva dal fatto che se viene assunto un immigrato illegale al posto del cittadino, per svolgere lo stesso lavoro il primo verrà pagato sempre meno.
In questo capitolo abbiamo concluso che se il fattore M entra nella funzione di produzione come un fattore a se stante, le analisi ci forniscono un risultato ambiguo. Però, considerando uno scenario realistico nel quale L risulta maggiore di M e assumendo la funzione di produzione della classe Cobb Douglas, possiamo gettare un po' di chiarezza sulla risultante dei due effetti. Queste semplificazioni ci permettono infatti di concludere che la presenza di immigrati illegali fa aumentare nel lungo periodo il consumo domestico pro-capite.

4 Il riesame del modello con perfetti sostituti

4.1 Introduzione

In questo capitolo riesamineremo gli effetti dell'immigrazione illegale sul benessere di un Paese studiati da Hazari e Sgro. In contrasto con le loro conclusioni negative otterremo che, anche nel caso di una perfetta sostituzione tra L ed M, non si può escludere l'ipotesi che l'apertura commerciale possa portare, nel lungo periodo, ad un miglioramento delle condizioni iniziali. Spiegheremo che l'ambiguità nei risultati trovati è dovuta alla presenza di due effetti di verso opposto, il primo positivo e dovuto allo sfruttamento, mentre il secondo negativo e di carattere intertemporale.

4.2 Il modello

Come base per le nostre analisi utilizzeremo il capitolo 2, eviteremo perciò di ripetere diversi passaggi che risulterebbero ridondanti. L'equazione di bilancio è nella forma:

$$Y(t) = F(K, L + M)$$

che in forma intensiva può essere scritta come: $y(t) = f(k)$, con $y = \dfrac{Y}{L+M}$ e $k = \dfrac{K}{L+M}$.
Vale che sempre che $w_m = \beta w$, con $0 < \beta < 1$ e $w = f(k) - kf'(k)$.
Dall'equazione di bilancio ricaviamo l'equazione per il consumo domestico:

$$C(t) = Y(t) - \dot{K} - \beta w M$$

Sapendo che $k = \dfrac{K}{L+M}$ con le solite manipolazioni ricaviamo l'equazione del moto per il capitale pro-capite

$$\dot{k} = f(k) - \alpha c - nk - \beta(1-\alpha)w(k).$$

A questo punto, ispirandoci al modello di Ramsey, applicando il Principio del Massimo di Pontryagin presentiamo il problema di controllo ottimo nella forma di Lagrange. Principio del

$$max \int_0^\infty U(c)e^{-\rho t}\, dx$$

sul vincoli:
$\dot{k} = f(k)$-nk-αc-βw(1-α)
$k(0) = k_0$
$0 \leq c \leq f(k)$
Dove $\alpha = \dfrac{L}{L+M}$
Definiamo la funzione Hamiltoniana a valore corrente (H^c)

$$H = U(c)e^{-pt} + \mu[f(k) - nk - \alpha c - \beta(f(k) - kf'(k))(1-\alpha)]$$

Il teorema applicato e le condizioni necessarie sono già stato/e enunciato/e nel capitolo 2. Da H^c ricaviamo le condizioni di primo ordine:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = U'(c)e^{-pt} - \mu\alpha = 0$$
$$-\frac{\partial H}{\partial k} = -\mu[f'(k) - \alpha n + (1-\alpha)\beta k f'']$$

riscriviamo la prima
$\dfrac{\partial H}{\partial c} = U'(c)e^{-pt} = \mu\alpha$
Derivandola per μ abbiamo
$\dot{\mu} = \dfrac{1}{\alpha}e^{-pt}[U''(c)\dot{c} -' (c)]$
Eguagliando per $\dot{\mu}$ otteniamo
$\dot{c} = \dfrac{f'(k) - (n+\rho) + (1-\alpha)\beta k f''(k)}{\eta(c)}c,$
dove ηc è l'elasticità dell'utilità marginale.
L'espressione $\dot{c}$ insieme all'equazione del moto $\dot{k}$ forma un sistema dinamico a due incognite (c e k).
$\dot{c} = \dfrac{f'(k) - (n+\rho) + (1-\alpha)\beta k f''(k)}{\eta(c)}c$
$\dot{k} = f(k)$-nk-αc-βw(1-α)
Il percorso di crescita ottimale ($c*$,$k*$) si ottiene nel punto in cui $\dot{c} = 0$ e $\dot{k} = 0$.
Per trovare le soluzione del nostro sistema dinamico in c e k procediamo linearizzandolo attorno alle soluzioni d'equilibrio $c*$ e $k*$, ciò significa espandere in Taylor tutto ciò che si può espandere in Taylor attorno ad un punto d'equilibrio. Definiamo "punto singolare" il punto in cui ambedue le funzioni $\dot{c}$ e $\dot{k}$ sono pari a zero, perciò anche l'equilibrio $c*$ $k*$ appartiene a questa categoria.
La linearizzazione del sistema dinamico si ottiene esprimendo le funzioni $\dot{c}$ e $\dot{k}$ sotto forma di serie di Taylor, attorno al punto singolare ($c*$,$k*$).
Questo ci dà:
$\dot{c} = a(x - x*) + b(y - y*)$

$\dot{k} = c(x - x*) + d(y - y*)$
dove $a = \frac{\partial \dot{c}}{\partial c}$, $b = \frac{\partial \dot{c}}{\partial k}$, $c = \frac{\partial \dot{k}}{\partial c}$ e $d = \frac{\partial \dot{k}}{\partial k}$ Affinchè (c*,k*) sia punto singolare e devono valere le seguenti espressioni:
$f'(k*) - (n + \rho) + (1 - \alpha)\beta k * f''(k*) = 0$
$f(k*) - nk * -\alpha c - (1 - \alpha)\beta w(k*) = 0$
Ricaviamo i coefficienti a,b,c,d.
$a = \frac{\partial \dot{c}}{\partial c} = f'(k*) - (n + \rho) + (1 - \alpha)\beta k * f''(k*) \frac{\partial c}{(\partial c)\eta(c)}, \quad = 0$ poiché $f'(k*) - (n + \rho) + (1 - \alpha)\beta k * f''(k*) = 0$
$b = \frac{\partial \dot{c}}{\partial k} = f''(k*) + (1 - \alpha)\beta[f''(k*) + k * f'''(k*)]\frac{c*}{\eta(c*)}$
$c = \frac{\partial \dot{k}}{\partial c} = -\alpha$
$d = \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} = f'(k) - n - \beta(1 - \alpha)w'(k)$
Linearizzando il sistema otteniamo:

$$\begin{bmatrix} c* \\ k* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f''(k*) + (1 - \alpha)\beta[f''(k*) + k * f'''(k*)]\frac{c*}{\eta(c*)} \\ -\alpha & f'(k*) - n - (1 - \alpha)\beta w'(k*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c - c* \\ k - k* \end{bmatrix}$$

Possiamo assumere valga l'ipotesi di "saddle path stability" e con ciò concludiamo che il determinante della matrice Jacobina appena trovata dev'essere negativo.

4.3 Il punto singolare (c*,k*)

Dallo studio del sistema lineare si ottengono informazioni relative al comportamento delle soluzioni del sistema non lineare.
Per il **Teorema di Poincaré** vale che la classificazione di ogni punto singolare del sistema non lineare, eseguita sulla base della tipologia e stabilità dell'equilibrio, corrisponda coi risultati della classificazione ottenuti considerando il sistema linearizzato, con la sola eccezione che se osservando il sistema lineare classifico l'equilibrio come un "centro", non posso dire con certezza se quel punto per il sistema non lineare va classificato come un "centro" o un "focus".
Per classificare l'equilibrio dobbiamo osservare la tipologia e il segno degli autovalori della matrice.
Ricerchiamo a questo punto le radici del polinomio caratteristico, per farlo sottraiamo λ dalla diagonale principale della matrice.

$$\begin{bmatrix} c* \\ k* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \lambda & f''(k*) + (1 - \alpha)\beta[f''(k*) + k * f'''(k*)]\frac{c*}{\eta(c*)} \\ -\alpha & f'(k*) - n - (1 - \alpha)\beta w'(k*) - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c - c* \\ k - k* \end{bmatrix}$$

Calcolando il determinante della nuova matrice ricaviamo il polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 - [f'(k*) - n - (1 - \alpha)\beta w'(k*)]\lambda + \alpha[f''(k*) + (1 - \alpha)\beta[f''(k*) + k * f'''(k*)]\frac{c*}{\eta(c*)}]$$

Per classificare il punto non serve trovare le radici caratteristiche, ci basta capire che segno esse assumono e se assumono valori all'interno dell'insieme dei numeri reali, o meno.

Sappiamo che il coefficiente di λ^2 è sempre positivo, mentre per la saddle path stability il determinante della matrice originale è negativo, perciò anche il termine noto del polinomio lo sarà.
Applichiamo il principio secondo il quale se c'è permanenza di segno tra due coefficienti adiacenti all'interno di un polinomio, una radice è per forza negativa, mentre, nel caso in cui ci sia una variazione del segno tra due coefficienti adiacenti, concludiamo che una radice è per forza positiva.
Sappiamo che il coefficiente λ^2 è positivo, mentre, per la saddle path stability il termine noto è negativo.
Essendo il polinomio caratteristico di secondo grado avremo solamente due soluzioni.
Dei tre termini conosciamo il segno dei due estremi e ciò comporta che per quello che interessa a noi, ovvero classificare il punto, non sia necessario conoscere il segno del coefficiente di λ, infatti, qualsiasi segno assuma, avremo in ogni caso una soluzione negativa e una positiva.
Ho presentato la dimostrazione per il totale, sarebbe bastato essendo la matrice 2x2 limitarci a osservare il segno del determinante, poiché il determinante è pari al prodotto delle soluzioni del polinomio caratteristico, ed essendo esso negativo, i segni delle soluzioni devono essere per forza discordi.
Ottenere due autovalori reali e di segno opposto ci permette di classificare l'equilibrio come un punto di sella, equilibrio che sarà, quindi, inevitabilmente instabile.

4.4 Dimostrazione

Partiamo dalla (6) e differenziamo $c*$ rispetto ad α, otteniamo che: $\frac{dc*}{d\alpha} = \frac{\partial c*}{\partial \alpha} + \frac{\partial c*}{\partial k*}\frac{dk*}{d\alpha}$. Il primo termine rappresenta l'effetto diretto dell'immigrazione illegale dato il capitale totale presente, mentre il secondo termine è l'effetto indiretto col quale i migranti illegali influiscono sul benessere dei cittadini tramite l'accumulo di capitale nel tempo, quest'effetto è chiamato "intertemporal effect".
Utilizzando la (5) e differenziando $k*$ rispetto ad α otteniamo:
$\frac{dk*}{d\alpha} = \frac{\beta k * f''(k*)}{f''(k*) + (1-\alpha)\beta f''(k*)} > 0$
IL denominatore è, infatti, negativo per la saddle path stability.
Con l'ingresso dei migranti α diminuisce e ciò comporta che il capitale pro-capite d'equilibrio stazionario calerà anch'esso.
Utilizzando la (7) e derivando parzialmente $c*$ rispetto ad α e $k*$ otteniamo rispettivamente:
$\frac{\partial c*}{\partial \alpha} = \frac{\beta w(k*) - c*}{\alpha} < 0$
$\frac{\partial c*}{\partial k*} = \frac{f'(k*) - n + (1-\alpha)\beta k * f''(k*)}{\alpha} = \frac{\rho}{\alpha} > 0$
Come risultato abbiamo:

$$\frac{dc*}{d\alpha} = \frac{\beta w(k*) - c*}{\alpha} + (\frac{\rho}{\alpha})(\frac{\beta k * f''(K*)}{f''(k*) + (1-\alpha)\beta k f''(k*)}). \tag{13}$$

Il primo termine dell'espressione (13) cattura l'effetto positivo dovuto allo sfruttamento delle condizioni di precarietà dei migranti, ciò permette che c aumenti all'aumentare di M. IL secondo termine dell'espressione invece raccoglie l'effetto intertemporale, sottovalutato nei capitoli precedenti.
Se vogliamo confrontare questi risultati direttamente con quelli dervianti dagli studi di Hazari

e Sgro, ci basta compiere delle valutazioni assumendo dei casi limite.
Con $\alpha = 1$ otteniamo che:
$\frac{dc*}{d\alpha} = [\beta w(k*) - c*] + \rho\beta k*$ è o < 0 o > 0
Siccome l'exloitation effect e l'intertemporal effect giocano uno contro l'altro, giungiamo a risultati in contrasto con quelli di Hazari e Sgro, poiché questi non ci permettono di affermare che con una perfetta sostituibilità i migranti illegali sono sempre dannosi per il Paese ospitante.
Solamente a scopo illustrativo analizziamo il caso estremo in cui $\beta = 0$.
Dalla (13) otteniamo:

$$\frac{dc*}{d\alpha} = \frac{-c*}{\alpha}. \quad < 0$$

Ciò significa che, nel caso in cui l'exploitation effect sia particolarmente elevato, il consumo domestico pro capite aumenta all'aumentare di M.
Possiamo giungere alle stesse conclusioni anche adottando la stessa metodologia grafica dei capitoli precedenti.
Se α diminuisce, per la (5) abbiamo che, come conseguenza dell'intertemporal effect, l'inclinazione di $f(k)$ aumenta, ciò fa spostare la curva $\dot{c}$ verso sinistra e questo contribuisce ad un calo nel consumo domestico pro-capite d'equilibrio stazionario. Inoltre, se α diminuisce, abbiamo che per l'exploitation effect una parte delle risorse destinate alla produzione viene risparmiata, ciò fa aumentare $c*$ e permette alla curva $\dot{k} = 0$ di spostarsi verso l'alto. La risultante dei due effetti di verso opposto è perciò ambigua.

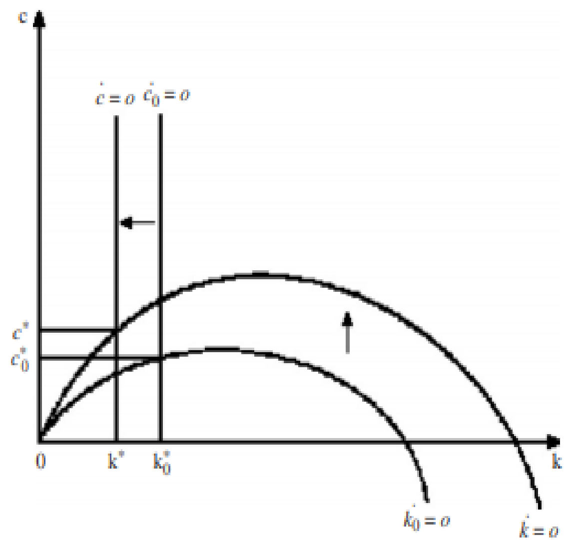

Figura 5

5 Conclusione

Basandoci sugli studi svolti dagli economisti Bharat R. Hazari e Pasquale M. Sgro riguardo l'impatto dell'immigrazione illegale sul benessere di un'economia, abbiamo dimostrato che l'immigrazione illegale comporta due effetti fondamentali.
Il primo è negativo ed è dovuto allo spreco di capitale inevitabilmente destinato alla produzione di output che verrà consumato dai migranti. Il secondo invece è positivo e deriva dal fatto che

per svolgere la stessa mansione il datore di lavoro pagherà meno il migrante illegale rispetto al residente nel Paese.
Inbbiamo concluso che l'impatto netto dell'immigrazione illegale sul consumo domestico dipende dal grado di sostituibilità che vige tra i fattori L ed M: se essi sono perfetti sostituti il risparmio dovuto allo sfruttamento dei migranti non compenserà mai lo spreco di capitale, mentre, se il fattore M penetra nella funzione di produzione come un fattore a se stante, le analisi effettuate non ci permettono di trarre delle conclusioni soddisfacenti.
Considerando, però, alcuni scenari realistici e assumendo la funzione di produzione della classe Cobb Douglas, possiamo gettare un po' di chiarezza sulla risultante dei due effetti, dimostrando che la presenza di immigrati illegali fa aumentare nel lungo periodo il consumo domestico pro-capite.
Nel quarto capitolo abbiamo riesaminato gli studi di Hazari e Sgro.
Nel caso in cui ci fosse stata una perfetta sostituibilità tra L ed M, Hazari e Sgro avevano escluso che l'apertura commerciale potesse in qualche modo portare ad un beneficio per il Paese, ma considerando l'effetto intertemporale dovuto all'accumulo di capitale, in parte trascurato dai due economisti, abbiamo rivoluzionato le nostre conclusioni. Siamo stati infatti in grado di dimostrare che l'immigrazione illegale non deve essere per forza dannosa per il Paese ospitante, ma, anzi, sotto alcune condizioni può portare nel lungo periodo ad un aumento del livello del consumo domestico pro-capite.
Nella stesura di questo elaborato, frutto di un cammino di crescita personale, ho preferito utilizzare la prima persona plurale ogni qualvolta si chiariva il modo di operare o si raggiungeva un risultato. Ho fatto questo perché volevo coinvolgere maggiormente coloro che l'avrebbero letto e condividere con essi, oltre al percorso di crescita personale ormai al termine, un lavoro in cui ho provato a metterci del mio.
Il corso di GGA2 ci ha insegnato che alcune conoscenze hanno la caratteristica di poterne generare delle altre, ora il concetto mi è più tangibile. Mi sono ampliamente servito delle numerose conoscenze apprese negli anni e grazie a queste si sono esplicati gli aspetti complessi della mia produzione. Per mia fortuna, in alcuni casi, queste conoscenze si sono rivelate insufficienti, cosicchè alcune astrazioni ed interpretazioni ho dovuto farle in autonomia.
Se avessi voluto servirmi semplicemente di concetti imparati a memoria, come alcune volte siamo stati invitati a fare, ne sarei stato fin da subito capace, ma ciò non fa per me. Provo molta più soddisfazione quando, sfruttando strumenti acquisiti, ragiono fissando una pagina anche per molto tempo fino a giungere a conclusioni non immediate.
A mio parere è questo il risultato più importante che il corso di studi mi ha permesso di raggiungere.

Bibliografia -A. Buratto, M. Grasselli, L. Grosset, B. Viscolani, *Matematica generale*. Padova: Libreria Progetto.
-A. Buratto, L. Grosset, B. Viscolani, 2017. *Ottimizzazione Dinamica*, modelli economici e gestionali.. Padova: Libreria Progetto.
-I. Huntley, R. M. Johnson, 1983. *Linear and Nonlinear Differential Equations*. Chicester: Ellis Horwood.
-Acemoglu D., 2009. Introduction to Modern Economic Growth.. Princeton: Princeton University Press. Capitoli 2 e 8.

Michael L. Katz, Harvey S. Rosen, 2007. *Microeconomia*. Italia: McGraw Hill, 2007 AUTORE, Data. Titolo dell'articolo. Titolo del giornale, volume (sezione), pagine. Bharat R. Hazari, Pasquale M. Sgro, 2003. *The simple analytics of optimal growth with illegal migrants*. Journal of Economic Dynamics Control, 28, 141-151.
Hon Man Moy, Chong K. Yip, 2006. *The simple analytics of optimal growth with illegal migrants: A clarification*. Journal of Economic Dynamics Control, 30, 2469–2475.

Sommario In questa prova finale ci siamo posti l'obiettivo di valutare gli effetti dell'immigrazione illegale sulla crescita ottimale di un'economia. Attraverso la risoluzione di un problema di controllo dell'ottimo abbiamo concluso che il grado di sostituibilità tra i lavoratori residenti e gli immigrati illegali caratterizzerà la crescita. Se c'è imperfetta sostituibilità la probabilità che la risultante degli effetti sia positiva è maggiore, ma abbiamo dimostrato che anche se c'è perfetta sostituibilità l'economia potrebbe comunque beneficiarne dall'apertura commerciale.

Parole totali: 9915