



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA
LAUREA TRIENNALE IN FISICA

**Test di modelli di Energia Oscura
attraverso lo studio del Fattore di
Crescita lineare delle strutture
cosmologiche**

Autore:
Gorini Nicola,
1050136

Relatori:
Dott. Liguori Michele
Dott. Bartolo Nicola

Anno accademico 2014–2015

Ai miei genitori

Indice

| | |
|---|-----------|
| Introduzione | v |
| 1 Preliminari | 1 |
| 1.1 Principio Cosmologico ed Espansione dell'Universo | 1 |
| 1.2 Occhi sull'Universo | 2 |
| 2 Modelli di Friedmann | 3 |
| 2.1 Le Equazioni di Friedmann | 3 |
| 2.2 La Geometria dell'Universo | 5 |
| 2.3 Modelli di Friedmann | 6 |
| 2.4 Parametri di Densità e Decelerazione | 10 |
| 3 Oltre il modello di Friedmann | 11 |
| 3.1 La Costante Cosmologica Λ | 11 |
| 3.2 Densità dell'Universo e Materia Oscura | 13 |
| 4 Le Perturbazioni | 15 |
| 4.1 Modello di Jeans: Universo Statico | 15 |
| 4.2 Modello di Jeans: Universo in Espansione | 18 |
| 4.3 Lo Spettro delle Perturbazioni | 19 |
| 4.4 Perturbazioni per la Materia Oscura | 23 |
| 4.5 L'Energia Oscura | 25 |
| Conclusioni | 27 |

Introduzione

Quanto ci proponiamo di fare in questa tesi è, partendo da modelli classici sull'evoluzione dell'Universo, modificandoli poi con correzioni relativistiche, definire il Growth Factor (Fattore di Crescita) e vederne l'importanza nella Cosmologia Moderna.

Nel primo capitolo vedremo alcuni concetti di base della Cosmologia, quindi le ipotesi di validità della nostra trattazione: il *Principio Cosmologico* e le sue scale di validità e il fatto che l'Universo sia in *Espansione*.

Nel secondo capitolo inizieremo a dare una certa solidità matematica alle nostre ipotesi, in particolare daremo vita ad un modello che descriverà l'evoluzione dell'Universo; ritroveremo le due fondamentali *Equazioni di Friedmann* che risolveremo per le varie geometrie in gioco. Introdurremo dei parametri osservativi quali il *Parametro di Decelerazione* e il *Parametro di Densità*, fondamentali per la classificazione delle differenti cosmologie.

Nel terzo capitolo faremo una breve introduzione alla *Costante Cosmologica* cercando di darle un certo significato fisico; introdurremo infine il concetto di *Materia Oscura*.

Nel quarto capitolo ci occuperemo di studiare le perturbazioni e le loro evoluzioni utilizzando i *Modelli di Jeans*. Faremo in seguito un'introduzione alla trattazione statistica del campo delle fluttuazioni di densità mettendo in evidenza il concetto di *Spettro di Potenza*. Nella parte finale del capitolo generalizzeremo la trattazione dell'evoluzione delle perturbazioni in un contesto relativistico, mettendo l'accento su come cambia *Growth Factor* a seconda del modello cosmologico utilizzato, in particolare nel caso in cui sia presente una componente di Energia Oscura.

Capitolo 1

Preliminari

In questo capitolo ci proponiamo di presentare e discutere le due principali ipotesi di lavoro per la formulazione di una teoria sull'evoluzione dell'Universo: il *Principio Cosmologico* e l'*Espansione dell'Universo*.

1.1 Principio Cosmologico ed Espansione dell'Universo

Il Principio Cosmologico afferma che l'Universo debba essere omogeneo e isotropo, ossia che debbano valere in qualsiasi punto e lungo qualsiasi direzione le stesse identiche leggi della natura. Per prendere in considerazione tale principio, le scale che interesseranno a noi saranno, dunque, molto al di là della grandezza delle galassie, quelle per cui effettivamente l'Universo apparirà popolato in maniera omogenea.

Abbiamo parlato di scale, definiamo quindi le principali unità di misura che vengono utilizzate in Cosmologia:

- Unità Astronomiche: è la distanza media Terra-Sole, utile per quantificare le distanze entro in nostro Sistema Solare. $1 \text{ UA} = 149\,597\,870,700 \text{ km}$
- Anno Luce: è la distanza che percorre la luce in un anno, utile per quantificare la distanza tra le stelle fino a quella tra le Galassie. $1 \text{ al} = 63\,286 \text{ UA} = 9,461 \times 10^{12} \text{ km}$
- Parsec: è la distanza di un corpo che vede il semiasse maggiore dell'orbita terrestre sotto un angolo di $1''$, utile per quantificare la distanza tra le Galassie e tra i relativi Cluster (Gruppi di Galassie). $1 \text{ pc} = 3,261 \text{ al}$

Si può verificare sperimentalmente che la scala per cui risulta vero il Principio Cosmologico è circa dell'ordine delle centinaia di Megaparsec e, come prima accennato, ben oltre la grandezza delle galassie. L'idea di fondo è quella di trattare un insieme discreto, l'Universo, come un continuo per opportune scale, proprio come è possibile studiare un fluido utilizzando la Meccanica Quantistica, oppure la Fluidodinamica.

Assumiamo ora, come affermato inizialmente, l'ipotesi di un Universo in espansione. L'ipotesi che stiamo prendendo in considerazione fu dovuta ad Edwin Hubble nel 1929, il quale, studiando il *Redshift* che subivano gli spettri delle galassie, dovuto all'*Effetto Doppler*, concluse che la spiegazione fosse quella di un allontanamento reciproco tra queste ultime, proporzionale alla loro distanza: il

coefficiente di proporzionalità venne chiamato, impropriamente, come vedremo più in dettaglio nella sezione (2.3), *Costante di Hubble H*.

Ad oggi la gran parte delle galassie a noi visibili presentano uno spettro spostato verso il rosso, sintomo che si stanno tutte allontanando da noi; una celebre eccezione è la galassia di Andromeda, la quale invece, al contrario delle altre, presenta uno spostamento verso il blu (*Blueshift*).

1.2 Occhi sull'Universo

Ci pare scontato, anche se in realtà non lo è, che quanto possiamo percepire dell'Universo dipende da quale strumento utilizziamo per guardarlo. L'Universo in effetti è fonte di tante componenti dello spettro elettromagnetico e rivelarle è utile per scoprire ciò che non ci risulta immediatamente visibile agli occhi:

- Onde Radio: utili per la mappatura di galassie molto distanti
- Infrarossi: utili per studiare le zone più oscure, dove la luce non può arrivare.
- Raggi X: utili allo studio di nebulose e residui di gas ad alte temperature (circa 10^7 K) derivati dalla mancata formazione di stelle.
- Microonde: detta anche CMBR (Cosmic Microwave Background Radiation) è forse la più importante tra i tipi di radiazione a noi disponibile poiché consente lo studio dei primi istanti di vita dell'Universo.

Nell'Universo è possibile trovare, oltre alla radiazione, la materia. La materia è una componente fondamentale in quanto è quella da cui dipende la sua espansione ed evoluzione; essa, infatti, è la componente a cui è sottoposto il costante braccio di ferro tra la forza di Gravità e le forze di Pressione, di cui tratteremo più avanti.

Facciamo quindi una breve rassegna di ciò che ci aspettiamo di trovare:

- Barioni: Particelle formate da quarks, come i protoni e i neutroni, mattoni fondamentali per quella che chiamiamo materia "ordinaria".
- Neutrini: Particelle prive di carica e di massa quasi nulla (trattate nel Modello Standard con massa proprio nulla) che interagiscono pochissimo con la materia ordinaria.
- Materia Oscura: Ipotizzata per spiegare fenomeni osservativi altrimenti non spiegabili, interagisce, per quello che è noto, solo mediante interazione gravitazionale ed è dunque, essendo la Gravità la meno forte tra le 4 interazioni fondamentali, molto difficile rivelarla. È importante notare che la Gravità è ciò che domina incontrastata sulle scale cosmologiche, risulta dunque fondamentale considerare tutto ciò che può interagire mediante essa.

Capitolo 2

Modelli di Friedmann

2.1 Le Equazioni di Friedmann

Partendo ora dalle ipotesi sperimentali prima introdotte, cerchiamo un modello matematico che descriva, almeno in prima approssimazione, l'espansione dell'Universo. Consideriamo perciò un volume di materia sferico e una particella in moto sulla sua superficie:

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad \implies \quad V = -\frac{GMm}{r} = -\frac{4}{3}\pi G\rho m r^2$$

Applicando la conservazione dell'energia otteniamo:

$$cost = U = T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4}{3}\pi G\rho m r^2$$

Avendo supposto l'Universo omogeneo, tale relazione varrà per ogni punto dell'Universo stesso. Come abbiamo supposto però, esso è in espansione: se abbiamo una coppia di particelle a riposo, la distanza \vec{r} tra di esse varierà nel tempo proprio per tale effetto¹. Risulta quindi necessario definire un nuovo sistema di coordinate che tenga conto dell'espansione:

$$\vec{r}(t) = a(t)\vec{x}$$

Con $a(t)$ detto *Fattore di Scala* e \vec{x} detto *Distanza Comovente*. Possiamo interpretare le coordinate comoventi \vec{x} come un'etichettatura del punto, ossia una sequenza di coordinate che indicano la posizione di un corpo su una griglia che segue di pari passo l'espansione dell'universo e perciò che ne è solidale.

¹Il discorso non si applica agli atomi che compongono il nostro corpo, i quali sono tenuti insieme dalle forze interatomiche, infatti, solo su scale per cui vale il Principio Cosmologico risulta evidente l'effetto dell'espansione

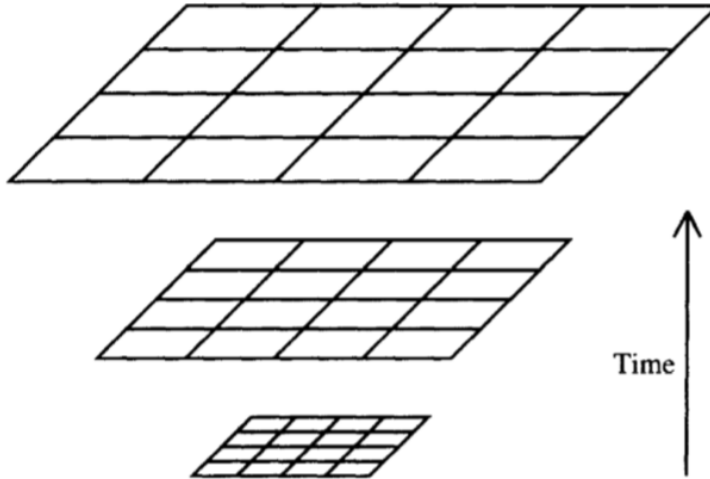


Figure 3.2 The comoving coordinate system is carried along with the expansion, so that any objects remain at fixed coordinate values.

Tenendo dunque conto dell'espansione dell'Universo riscriviamo tutto con le nuove coordinate:

$$U = \frac{1}{2}m\dot{a}^2x^2 - \frac{4}{3}\pi G\rho m a^2x^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2U}{ma^2x^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho$$

Scrivendo ora $Kc^2 = -\frac{2U}{mx^2}$ otteniamo:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{Kc^2}{a^2} \quad (2.1)$$

Abbiamo ottenuto la *Prima Equazione di Friedmann*, la quale ci descrive, date le opportune condizioni al contorno, come evolve il fattore di scala nel tempo². In tale equazione compare la costante K , la cui unità di misura è m^{-2} , il cui significato è rappresentare il valore della *Curvatura* dell'Universo; su di essa ci ritorneremo più avanti e in maniera più dettagliata.

L'equazione (2.1) non è però di alcun aiuto se non sappiamo come varia nel tempo la densità considerata. Prendiamo perciò un volume sferico di fluido e ne scriviamo il *Secondo Principio della Termodinamica*

$$dE + PdV = TdS \quad (2.2)$$

Tenendo conto dell'espansione, scriviamo l'energia a riposo $E = mc^2$ e calcoliamone la variazione per unità di tempo:

$$E = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho c^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dE}{dt} = \frac{4}{3}\pi(3a^2\dot{a})\rho c^2 + \frac{4}{3}\pi a^3 c^2 \frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = 4\pi a^2 \dot{a}$$

Sostituiamo opportunamente nella (2.2) i risultati ottenuti assumendo $dS = 0$:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0 \quad (2.3)$$

²L'equazione venne formulata da Friedmann nel 1922, il quale, per primo, considerò gli effetti di espansione dell'Universo quando all'epoca era ancora in voga il modello statico; la legge di Hubble infatti era ancora lontana dall'essere scoperta.

Abbiamo quindi ottenuto un'equazione che ci descrive l'evoluzione temporale della densità a seguito di un'espansione reversibile³. Notiamo che tra parentesi abbiamo il contributo di diluizione progressiva della materia dovuto all'espansione e quello dovuto al lavoro compiuto a causa della componente di pressione per un volume variabile nel tempo. Notiamo che, per risolvere l'equazione (2.3) ed esplicitare ρ e P , è necessaria un'ulteriore equazione che lega tali due parametri, quindi, un'*Equazione di Stato*.

Combinando le due equazioni ottenute, è possibile ottenerne una terza, detta *Seconda Equazione di Friedmann*; deriviamo perciò nel tempo la (2.1) e sostituiamoci la (2.3):

$$\begin{cases} 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{8}{3}\pi G\dot{\rho} + 2\frac{\dot{a}}{a^3}Kc^2 \\ \dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) \end{cases} \implies 2\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) = \frac{8\pi G}{3}\left(-3\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{Kc^2}{a^2}$$

Semplificando il tutto, in pochi passaggi, arriviamo alla:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) \quad (2.4)$$

Vediamo subito che se la materia ha pressione non nulla allora il contributo gravitazionale, che comporta la decelerazione dell'espansione, aumenta.

2.2 La Geometria dell'Universo

Come abbiamo visto precedentemente, nella (2.1) compare una costante K che abbiamo definito essere la Curvatura dell'Universo. Facciamo dunque un breve excursus sui possibili modelli geometrici che possiamo estrapolare al variare del valore di K .

Ridefinendo opportunamente il parametro $a(t)$, è possibile ottenere 3 valori discreti di K a cui è associabile una rispettiva geometria:

$$\hat{a} = \frac{a}{\sqrt{|K|}} \implies \left(\frac{\dot{\hat{a}}}{\hat{a}}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho \pm \frac{1}{\hat{a}^2}$$

I possibili valori⁴ ora sono: $K = 0, \pm 1$. Vediamo i differenti casi al variare di tali valori:

- Per $K = 0$ abbiamo la cosiddetta *Geometria Piatta o Euclidea*. In un tale contesto ci sono due particolari condizioni che valgono:

$$\mathcal{L}(\text{Circonferenza}) = 2\pi r \quad \sum_i \theta_i = 180^\circ$$

triangolo

l'Universo descritto da questa geometria è necessariamente *aperto e infinitamente esteso*, per non violare il principio di isotropia.

³E' importante notare che non abbiamo considerato, a differenza di prima, i termini gravitazionali, difatti, per rimanere in un approccio classico, abbiamo supposto implicitamente di lavorare in uno spazio curvo, proprio in virtù del principio di Equivalenza di Einstein.

⁴N.B. Abbiamo usato le unità naturali per cui è convenzionalmente posto $c=1$

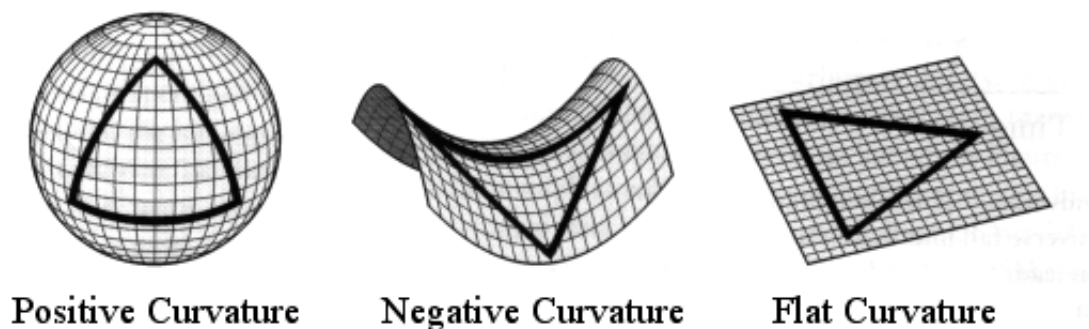


Figura 2.1: Differenti geometrie determinate al variare della Curvatura K

- Per $K = 1$ abbiamo la *Geometria Sferica*, per la quale le relazioni precedenti divengono:

$$\mathcal{L}(\text{Circonferenza}) < 2\pi r \quad \sum_{i \text{ triangolo}} \theta_i > 180^\circ$$

Ora l'Universo è *Chiuso e finito*; il principio di isotropia si mantiene in maniera naturale.

- Per $K = -1$ abbiamo la *Geometria Iperbolica* per la quale si hanno ancora diverse relazioni:

$$\mathcal{L}(\text{Circonferenza}) > 2\pi r \quad \sum_{i \text{ triangolo}} \theta_i < 180^\circ$$

L'Universo, per le considerazioni precedenti, risulta essere di nuovo aperto e infinitamente esteso.

Lo studio della geometria dell'Universo, come vedremo più avanti attraverso la definizione del *Parametro di Densità* Ω , sarà fondamentale per comprenderne qualitativamente l'evoluzione, inizio e fine compresi. Quest'ultima in particolare, vedremo, sarà molto diversa a seconda dei vari casi.

2.3 Modelli di Friedmann

Nel paragrafo precedente abbiamo ricavato le due equazioni di Friedmann le quali descrivono, in maniera semplice ed elegante, l'evoluzione dell'Universo in base ai parametri in gioco, densità ρ e pressione P .

Ora, prima di occuparci della risoluzione delle equazioni, ricaviamo brevemente alcuni importanti risultati della Cosmologia che confermarono, come già annunciato nel primo capitolo, le evidenze sperimentali riguardo l'espansione dell'Universo:

- *Legge di Hubble*. Definiamo la *Velocità di Recessione* come $\vec{v}_r = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ed esplicitiamola con il parametro di scala $a(t)$:

$$\vec{v}_r = \frac{d|\vec{r}|}{dt} \hat{r} = \dot{r} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r} \implies \vec{v} = H \vec{r} \quad \text{con} \quad H = \frac{\dot{a}}{a}$$

H non dipende dallo spazio in virtù del Principio Cosmologico, dipende invece sicuramente dal tempo poichè $a = a(t)$; parleremo perciò di *Parametro di Hubble*, e non di "Costante" di Hubble, indicandolo con $H(t)$.

Sostituendo la formula ottenuta per H nella (2.1) otteniamo un'equazione che ci esprime l'evoluzione nel tempo di tale parametro:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}$$

- Relazione tra il fattore di scala $a(t)$ e il *Redshift*. Supponiamo di avere due punti a distanza dr tra i quali viene scambiato un fotone; utilizzando la Legge di Hubble per esprimere la loro velocità relativa e le formule dell'Effetto Doppler otteniamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} dv = Hdr = \frac{\dot{a}}{a}dr \\ \frac{d\lambda}{\lambda_e} = \frac{dv}{c} \quad \text{con} \quad d\lambda = \lambda_{ric} - \lambda_{em} \end{array} \right. \implies \frac{d\lambda}{\lambda_e} = \frac{\dot{a}}{a} \frac{dr}{c} = \frac{\dot{a}}{a} dt = \frac{da}{a}$$

Ora integrando otteniamo:

$$\ln \lambda = \ln a + \text{cost} \implies \lambda \propto a$$

Si può dimostrare che la proporzionalità tra λ e a vale per ogni possibile coppia di punti. In generale, per trarre informazioni sull'entità dell'espansione, viene più comodamente usato un parametro z , detto *Parametro di Redshift*, così definito:

$$1 + z = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)}$$

Come preannunciato, cerchiamo ora di risolvere, in due particolari casi, le equazioni di Friedmann.

Cominciamo col caso *Matter Dominated Universe*⁵: partiamo affermando che lavoreremo in uno spazio piatto, quindi con $K = 0$, e supponiamo che $P = 0$.⁶ Possiamo dunque impostare il problema:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \implies \frac{1}{a^3} \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0 \implies \rho \propto \frac{1}{a^3}$$

Troviamo, come ci si poteva aspettare, una proporzionalità tra ρ e $1/a^3$.

Considerando la (2.1) notiamo che, per $K = 0$, siamo liberi di riscalarare il parametro a in maniera arbitraria; convenzionalmente porremo $a(t_0) = 1$, ossia $a(t)$ calcolato al tempo presente t_0 .

Riscriviamo perciò la densità ρ in funzione di a sfruttando la legge di proporzionalità trovata precedentemente:

$$\frac{\rho(t)}{\rho(t_0)} = \frac{a(t_0)^3}{a(t)^3} \implies \rho(t) = \frac{\rho(t_0)}{a(t)^3}$$

⁵Per "materia" intendiamo tutto ciò che va trattato in maniera non relativistica, viceversa per la "radiazione".

⁶Tale condizione non è affatto restrittiva poichè gli atomi, in questo caso, interagiscono tra loro molto raramente. La descrizione è perciò molto buona per un Universo "raffreddato".

Sostituendo il tutto nell'equazione (2.1) otteniamo⁷:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \frac{1}{a}$$

Cercando una soluzione del tipo $a(t) = t^q$ troviamo facilmente che $q = 2/3$. Imponendo ora che $a(t_0) = 1$ otteniamo la soluzione unica $a(t)$ e, di conseguenza, $\rho(t)$:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \implies \rho(t) = \frac{\rho_0}{a^3} = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}$$

Essendo ora $H = \frac{\dot{a}}{a}$ vediamo subito che esso risulta proporzionale a $1/t$; il parametro di Hubble perciò, per un Universo dominato dalla materia, calando nel tempo, ci indica qualitativamente che l'Universo subirà un rallentamento progressivo, senza però mai fermarsi.

Per il caso *Radiation Dominated Universe* vale lo stesso identico procedimento fatto precedentemente tenendo conto che stavolta abbiamo $P \neq 0$, questo perchè è presente una pressione di radiazione del valore $P = \frac{\rho c^2}{3}$.

Svolgendo i conti si ottiene:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \implies \rho(t) = \frac{\rho_0}{a^4} = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}$$

Vediamo che la densità $\rho(t)$ scala nel tempo in maniera esattamente uguale al caso precedente, viceversa, il parametro $a(t)$ ha andamento differente. È importante notare che la densità stavolta scala come a^{-4} ; la presenza del termine a^{-1} aggiuntivo può essere spiegato in due modi principali: il riscaldamento della lunghezza d'onda associata alla radiazione⁸, oppure, al lavoro extra compiuto da $P \neq 0$ per un volume V che varia nel tempo.

Ci rimane infine da considerare un Universo "misto" ossia composto da entrambe le componenti. Distinguiamo anche qui due situazioni: nel caso domini inizialmente la radiazione abbiamo:

$$a(t) \propto t^{1/2} \quad \rho_{rad} \propto \frac{1}{t^2} \quad \rho_{mat} \propto \frac{1}{a^3} \propto \frac{1}{t^{3/2}}$$

nel caso domini inizialmente la materia invece:

$$a(t) \propto t^{2/3} \quad \rho_{mat} \propto \frac{1}{t^2} \quad \rho_{rad} \propto \frac{1}{a^4} \propto \frac{1}{t^{8/3}}$$

Notiamo che nel primo caso la densità di radiazione cala più velocemente di quella della materia e dunque si avrà un cambiamento nel dominio globale tra le due componenti: siamo in una situazione *Instabile*. Nel secondo caso la densità di radiazione cala di nuovo più velocemente rispetto a quella della materia e dunque si avrà una situazione di *Stabilità* in cui permarrà il dominio della materia.

⁷Poniamo per brevità le quantità calcolate in t_0 con il pedice 0, ad esempio $X(t_0) = X_0$

⁸ $E \propto \frac{1}{\lambda} \propto \frac{1}{a}$

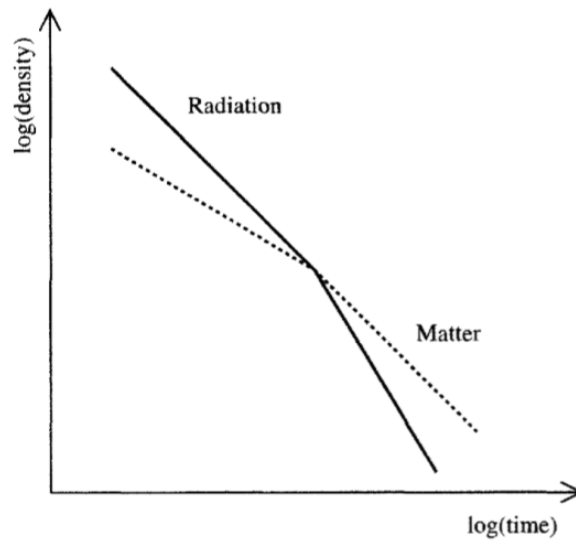


Figura 2.2: Un'illustrazione schematica dell'evoluzione di un Universo contenente sia materia che radiazione.

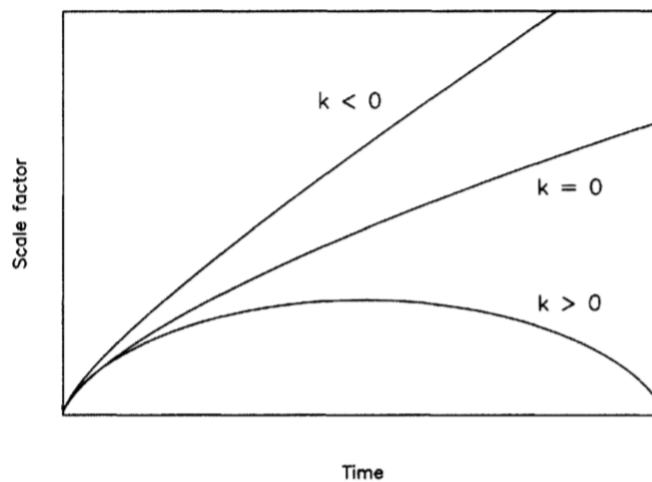
Estendiamo ora il nostro semplice modello di Universo al caso $K \neq 0$. La descrizione sarà qualitativa, giusto per avere una visione globale dell'evoluzione nei vari casi.

Consideriamo l'equazione (2.1) nel caso $K < 0$. Essendo $\rho \propto a^{-3}$, per tempi molto lunghi prevarrà il termine K/a^2 . L'equazione diviene perciò:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{K}{a^2} \implies \dot{a}^2 = -K \implies a \propto t \quad (t \rightarrow +\infty)$$

L'Universo con curvatura negativa, come ci si poteva aspettare a priori, assumerà una velocità di espansione costante per sempre, con una proporzionalità diretta tra a e t : questo modello è detto di *Espansione Libera*.

Considerando ora un modello con $K > 0$ le cose non vanno così bene; per tempi molto lunghi il termine di curvatura tenderà progressivamente ad aumentare fino a dominare su quello gravitazionale, provocando così una situazione di stallo e infine di *Collasso*. Lo schema riassuntivo è il seguente:



2.4 Parametri di Densità e Decelerazione

Cerchiamo ora di riparametrizzare la teoria fino ad ora sviluppata in funzione di termini più comodamente determinabili sperimentalmente, in particolare dovremo descrivere l'evoluzione dell'Universo non in funzione di K ma in funzione del *Parametro di Densità* Ω .

Definiamo la densità critica come la densità che dovrebbe avere l'Universo affinché $K = 0$, utilizziamo perciò la solita (2.1):

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} \implies \rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Da qui definiamo il parametro Ω e lo sostituiamo nella prima equazione:

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_{crit}(t)} \implies H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{crit}\Omega - \frac{K}{a^2} = H^2\Omega - \frac{K}{a^2}$$

Il risultato finale è perciò:

$$\Omega = \frac{K}{a^2 H^2} + 1 = -\Omega_k + 1 \implies \Omega + \Omega_k = 1 \quad \text{con} \quad \Omega_k = -\frac{K}{H^2 a^2}$$

Ricaviamo ora un'ulteriore parametro utile allo studio dell'evoluzione dell'Universo, detto *Parametro di Decelerazione* q_0 . Espandiamo in serie di Taylor, attorno al tempo presente t_0 , il fattore di scala $a(t)$:

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots$$

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{q_0}{2}H_0^2(t - t_0)^2 + \dots \quad \text{con} \quad q_0 = -\frac{a(t_0)\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)H_0^2}$$

Supponendo di trovarci, ad esempio, in un Universo dominato dalla materia ($P = 0$) otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) \\ \implies \frac{\ddot{a}_0}{a_0} &= -\frac{4\pi G}{3}\rho_0 \implies q_{mat}(t_0) = -\frac{a(t_0)\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)H_0^2} = \frac{4\pi G\rho_0}{3} \frac{3}{8\pi G\rho_{crit}(t_0)} = \frac{\Omega_{mat}(t_0)}{2} \end{aligned}$$

Ripetendo i calcoli per un Universo dominato dalla radiazione, si ottiene:

$$q_{rad}(t_0) = \Omega_{rad}(t_0)$$

Complessivamente perciò, in un Universo "misto", avremo:

$$q_{tot}(t_0) = \frac{\Omega_{mat}(t_0)}{2} + \Omega_{rad}(t_0)$$

Misure più recenti di q_0 indicano che $q_0 < 0$; diversamente da quanto ci aspettavamo, l'universo sta accelerando. Nel prossimo capitolo tratteremo uno dei contributi principali che si ritiene essere responsabile di questo fenomeno, la *Costante Cosmologica* Λ .

Capitolo 3

Oltre il modello di Friedmann

3.1 La Costante Cosmologica Λ

La *Costante Cosmologica* Λ venne introdotta per la prima volta da Einstein con l'intento di avere una soluzione, per la descrizione dell'Universo, che fosse statica. L'equazione di Friedmann, ricavata dalle equazioni della Relatività Generale modificate, appare perciò:

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.1)$$

Notiamo subito che essa ha esattamente le dimensioni di K (essendo a un parametro adimensionale), quindi $[l^{-2}]$. In generale i modelli che coinvolgono una costante cosmologica sono discussi con $K = 0$ e $\Lambda > 0$. Vediamo innanzitutto come diviene la (2.4):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3}$$

Notiamo subito che Λ dà un contributo positivo ad \ddot{a} , in particolare, se sufficientemente grande, può superare il contributo gravitazionale spiegando così l'accelerazione osservata dell'Universo.

È possibile definire, analogamente a quanto fatto per la curvatura, un nuovo parametro di densità dovuto al contributo di Λ , ottenendo la relazione per q_0 precedente ma con un termine aggiuntivo:

$$\Omega + \Omega_\Lambda - 1 = \frac{K}{H^2 a^2} \quad \text{con} \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$$

Possiamo ora descrivere l'evoluzione dell'Universo (con la semplificazione di trovarci in geometria piatta) e conseguentemente le diverse tipologie di fine, in questo modo:

$$\begin{aligned} 0 < \Omega + \Omega_\Lambda < 1 & \quad \text{APERTO} \\ \Omega + \Omega_\Lambda = 1 & \quad \text{PIATTO} \\ \Omega + \Omega_\Lambda > 1 & \quad \text{CHIUSO} \end{aligned}$$

Supponiamo di poter trattare Λ come un fluido che permei l'Universo, dotato di una propria densità ρ_Λ e di una propria pressione P_Λ . L'equazione (3.1) assume la forma:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_\Lambda) - \frac{K}{a^2}$$

Notiamo che in questa equazione è possibile definire in maniera naturale il parametro $\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{crit}}$, proprio come fatto in precedenza.

Scriviamo ora la (2.3), non per un fluido generico ma per il fluido Λ :

$$\dot{\rho}_\Lambda + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho_\Lambda + \frac{P_\Lambda}{c^2}\right) = 0$$

Se ora Λ avesse $\rho_\Lambda = cost$ allora otterremmo:

$$P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$$

Λ si comporta perciò come un fluido a *pressione negativa* sul quale viene compiuto lavoro se l'Universo si espande. Tale lavoro permette alla densità di energia di rimanere costante anche se il volume dell'Universo accresce.

Una delle interpretazioni più immediate che si possono fare sulla Costante Cosmologica è, attraverso considerazioni quantistiche, vederla come *Energia di Punto Zero del Vuoto*. Una tale interpretazione consente di avere un'energia $E \neq 0$ anche in completa assenza di particelle. La predizione teorica, secondo questa ipotesi, del valore di Λ è però di gran lunga più grande di quello che consentono le osservazioni sperimentali; non è perciò detto che tale interpretazione sia la più corretta¹.

Un'altra interpretazione del significato di Λ è la cosiddetta *Quintessenza* che permea anch'essa l'Universo. Tale fluido ha equazione di stato:

$$P_Q = w\rho_Q c^2$$

Notiamo che è possibile ricondursi al caso discusso poco sopra se $w = -1$. In generale l'espansione accelerata dell'Universo è consentita per valori di $w < -1/3$. È importante sottolineare che l'introduzione di una costante cosmologica modifica l'evoluzione prevista per ogni possibile valore di K . È infatti possibile uno scenario in cui un Universo chiuso non collassi e un Universo aperto raggiunga uno stato quasi statico:

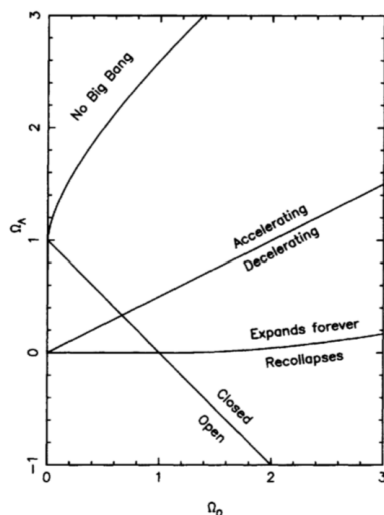


Figura 3.1: Possibili evoluzioni dell'Universo al variare di Ω_0 e Ω_Λ

¹Questo problema è anche noto come problema di *Fine tuning*. Le predizioni teoriche della Fisica delle Alte Energie, infatti, risultano essere sbagliate di un fattore di oltre 10^{120}

3.2 Densità dell'Universo e Materia Oscura

In questa sezione ci proponiamo di vedere come essa è divisa nelle sue varie componenti, ossia in che parte contribuiscono le diverse tipologie di materia che possiamo studiare.

La densità di materia dell'Universo è un'informazione che, come abbiamo visto attraverso il parametro Ω_0 , ci permette di studiarne l'evoluzione. Al tempo attuale abbiamo:

$$\rho_{crit} = 1,88h^2 \cdot 10^{-26} \frac{kg}{m^3}$$

Dove h è il parametro determinato sperimentalmente grazie allo studio del parametro di Hubble $H(t_0)$, parametrizzato nel seguente modo:

$$H(t_0) = h \cdot 10^2 \frac{km}{s \cdot Mpc} \quad \text{con} \quad h = 0.72 \pm 0.08$$

Guardando in un'ampia regione di Universo è possibile risalire, data la temperatura T e la Luminosità \mathcal{L} , alla massa di una stella e quindi calcolare il parametro di densità per quest'ultima. In realtà, però, non tutta la materia è concentrata nelle stelle, infatti sono presenti, in quella che è chiamata *Materia Barionica Luminosa*, nubi di gas interstellare incandescenti.

Dobbiamo naturalmente considerare anche altri corpi celesti considerati materia "non luminosa" come le nane brune oppure le cosiddette "stelle mancate", ad esempio Giove, che contribuiscono al conteggio del parametro di densità.

La teoria della *Nucleosintesi* ci dice che l'abbondanza degli elementi osservata al tempo attuale è tale solo se il parametro di densità della materia barionica rispetta certi parametri:

$$0,016 \leq \Omega_B h^2 \leq 0,024$$

Dunque otteniamo un limite inferiore e superiore entro i quali attenerci.

Le prime ipotesi su un'ulteriore componente barionica non visibile della materia vennero fatte a seguito dello studio delle curve di rotazione di alcune galassie. Si studiò perciò l'andamento della velocità delle stelle in funzione della distanza dal centro galattico². Risultò incredibilmente che la velocità, dopo una certa distanza, rimaneva pressappoco costante; per spiegare ciò fu necessario introdurre una gran quantità di materia "oscura" (non visibile) che bilanciava opportunamente le interazioni gravitazionali con tali stelle periferiche. Considerando però il contributo della materia barionica non visibile, di cui abbiamo fatto degli esempi in precedenza, si trovò che tale correzione fosse ampiamente trascurabile. Risultò perciò necessario introdurre un'ulteriore forma di materia, di natura diversa da quella considerata, interagente solo per via gravitazionale, che si calcolò essere in quantità circa 10 volte superiore alla materia barionica precedentemente considerata. Le conclusioni furono che un alone di materia oscura, nel quale è immersa la galassia, forniva abbastanza interazione gravitazionale da spiegare tale andamento della velocità delle stelle periferiche.

²Lo studio a cui ci riferiamo venne fatto sulla galassia NCG3198, il cui grafico è riportato nella pagina successiva.

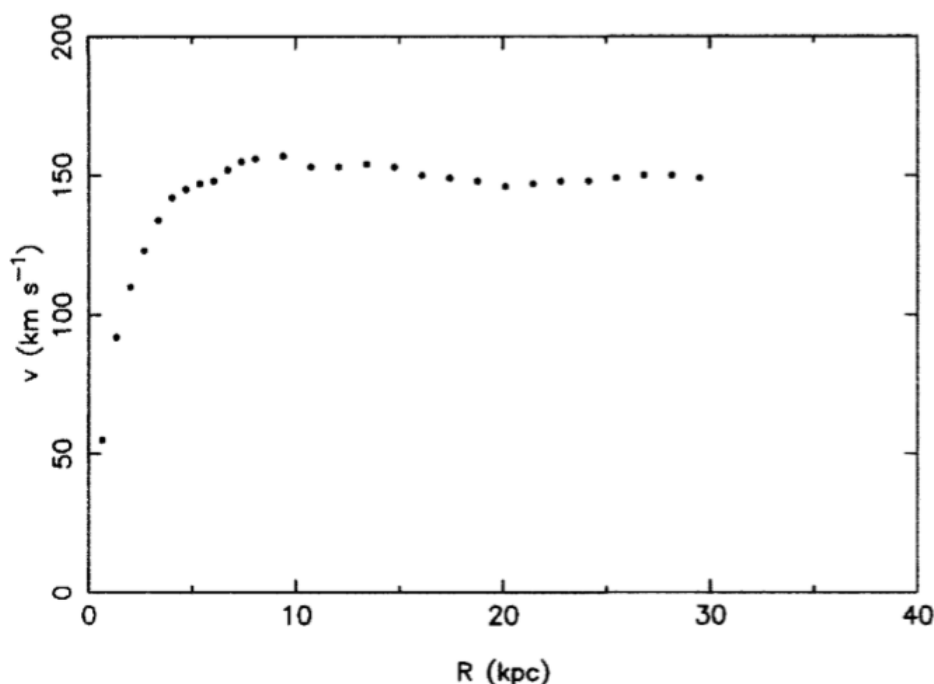


Figure 9.1 The rotation curve of the spiral galaxy NGC3198. We see that it remains roughly constant at large radii, outside the visible disk. Faster than expected orbits require a larger central force, and so they imply the existence of extra, dark, matter.

Sorge spontanea ora una domanda: ci sono ipotesi sulla composizione della materia oscura non barionica? Diciamo che la risposta è complessa, infatti sono presenti molti candidati, alcuni teoricamente previsti e osservati, altri invece previsti ma non osservati. Vediamone alcuni:

- Neutrini, la cui densità però non basta ad influire significativamente sul parametro di densità globale
- Particelle supersimmetriche leggere, ipotetiche, come il *Fotino*, il *Gravitino* e il *Neutralino*, anche note come WIMP (Weakly Interacting Massive Particles).
- Buchi Neri
- MACHOs (Massive Compact Halo Objects), corpi celesti estremamente compatti, rivelati grazie ad effetti di *Lente Gravitazionale* nella Nube di Magellano. Questi corpi, di natura sia barionica che non, sono per ora i migliori candidati

Facciamo un breve riassunto di quello che abbiamo capito sulla composizione della materia nell'Universo: la materia barionica luminosa vale circa l'1% della materia totale. La materia barionica prevale nella sua forma non luminosa sotto forma di nane brune, stelle mancanti e nubi interstellari di gas; nel complesso compone circa il 4% della materia totale. La quantità di materia oscura non barionica è circa 10 volte quella della materia barionica e la componente Λ dà il rimanente contributo (quindi anche quello maggiore) alla densità di materia totale.

Capitolo 4

Le Perturbazioni

4.1 Modello di Jeans: Universo Statico

Abbiamo visto l'evoluzione dell'Universo in una condizione di omogeneità ed isotropia, non ci rimane perciò che inserire delle piccole perturbazioni e vedere come esse evolvano nel tempo. Ciò che introdurremo in questa sezione sarà dunque il modello di Jeans nel caso di un Universo statico e, nella prossima, discuteremo il caso di un Universo in espansione, sia in caso di dominio della materia, che di dominio della radiazione.

Partiamo dunque nel considerare un fluido omogeneo, isotropo e stazionario e scriviamone le equazioni che ne regolano il moto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{Equazione di Continuità} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P - \vec{\nabla} \phi \quad \text{Equazione di Eulero} \quad (4.2)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad \text{Equazione di Poisson} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s = 0 \quad \text{Equazione di Continuità per l'Entropia} \quad (4.4)$$

Notiamo che, ponendo come condizioni iniziali $\rho = \rho_0$, $\vec{v} = 0$, $s = s_0$, $P = P_0$ otteniamo dall'equazione (4.2), $\vec{\nabla} \phi = 0$. Tale risultato contraddice evidentemente l'equazione di Poisson ma ciò ha un significato ben preciso: non possiamo avere una condizione statica del fluido, quindi alla perturbazione seguirà un collasso gravitazionale o un'espansione.

Introduciamo, per le nostre quattro incognite, le rispettive perturbazioni dall'equilibrio: $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $P = P_0 + \delta P$, $\phi = \phi_0 + \delta\phi$, $s = s_0 + \delta s$, $\vec{v} = \delta\vec{v}$ e sostituiamo nel sistema di equazioni precedente. Quello che otterremo saranno delle equazioni per le perturbazioni¹:

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{v}) = 0 \quad (4.5a)$$

$$\frac{\partial \delta\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{s=\text{cost}} \vec{\nabla} \delta\rho + \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_{\rho=\text{cost}} \vec{\nabla} \delta s \right] + \vec{\nabla} \delta\phi = 0 \quad (4.5b)$$

$$\nabla^2 \delta\phi = 4\pi G \delta\rho \quad (4.5c)$$

$$\frac{\partial \delta s}{\partial t} = 0 \quad (4.5d)$$

¹Abbiamo trascurato i termini del secondo ordine

Cerchiamo ora una soluzione in forma di onda piana $Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$, e definiamo dunque la forma delle soluzioni per ogni incognita:

$$\delta u_i = \delta_i(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad \text{supponendo} \quad \delta_i(t) = \delta_{0i}e^{i\omega t} \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, 4$$

Le ampiezze delle onde piane saranno: D , \vec{V} , ϕ , Σ che indicano rispettivamente il campo di densità, velocità, potenziale gravitazionale e l'entropia.

Sostituendo il tutto nel (4.5) otteniamo²:

$$\begin{cases} \omega \frac{D}{\rho_0} + \vec{k} \cdot \vec{V} = 0 \\ k^2 \phi + 4\pi G D = 0 \\ \omega \Sigma = 0 \\ \omega \vec{V} = -\frac{1}{\rho_0}(v_s^2 D \vec{k} + (\frac{\partial P}{\partial s})_{\rho=\text{cost}} \vec{k} \Sigma) - \vec{k} \phi \end{cases}$$

Cerchiamo di semplificare ulteriormente le equazioni trovate, supponiamo quindi di considerare perturbazioni adiabatiche ($\Sigma = 0$), dipendenti dal tempo ($\omega \neq 0$) e che $\vec{k} \cdot \vec{V} \neq 0$ (trascuriamo le componenti trasversali, per cui assumiamo direttamente che siano longitudinali, ossia $\vec{k} \cdot \vec{V} = |\vec{k}||\vec{V}| = kV \neq 0$). Con queste considerazioni il sistema diviene:

$$\begin{cases} \omega \frac{D}{\rho_0} + \vec{k} \cdot \vec{V} = 0 \\ k^2 \phi + 4\pi G D = 0 \\ \omega \vec{V} + \frac{1}{\rho_0} v_s^2 D \vec{k} + \vec{k} \phi = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Definendo $\delta_0 = \frac{D}{\rho_0}$ cerchiamo delle soluzioni non banali al sistema (4.6) per δ_0 , \vec{V} , ϕ , imponendo la condizione di annullamento del determinante:

$$0 = \begin{vmatrix} \omega & \vec{k} & 0 \\ 4\pi G \rho_0 & 0 & k^2 \\ \vec{k} v_s^2 & \omega & \vec{k} \end{vmatrix} = \omega(-\omega k^2) - \vec{k}(4\pi G \rho_0 \vec{k} - k^2 v_s^2 \vec{k}) = -\omega^2 k^2 - k^2(4\pi G \rho_0 - k^2 v_s^2)$$

$$\implies \omega^2 + 4\pi G \rho_0 - k^2 v_s^2 = 0$$

Quello che abbiamo ottenuto è un'equazione algebrica in ω , detta *Relazione di Dispersione*.

Esplicitiamo dunque le due radici:

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{k^2 v_s^2 - 4\pi G \rho_0} = \pm v_s k \sqrt{1 - \frac{4\pi G \rho_0}{k^2 v_s^2}}$$

Scrivendo ora $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ otteniamo:

$$\omega_{1,2} = \pm v_s k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)^2}$$

Dove abbiamo definito $\lambda_j^2 = \frac{\pi v_s^2}{G \rho_0}$ detta *Lunghezza di Jeans*.

Con la definizione di λ_j che abbiamo dato, possiamo ora facilmente studiare la natura di ω e dunque la natura delle soluzioni. Discutiamo perciò i vari casi al variare di λ in funzione di tale parametro:

² $(\frac{\partial P}{\partial \rho}) = v_s^2$ con v_s velocità del suono nel mezzo considerato

- Se $\lambda < \lambda_j$ allora $\omega \in \mathbb{R}$. Le soluzioni saranno perciò delle onde dette *Sonore*, che si propagheranno nello spazio in direzione $\pm K$, la cui forma sarà³:

$$\begin{aligned}\delta\rho &= D e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}\pm|\omega|t)} \\ \delta\vec{v} &= \vec{V} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}\pm|\omega|t)} = \mp v_s \delta_0 \frac{\vec{k}}{k} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)^2} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}\pm|\omega|t)} \\ \delta\phi &= -\delta_0 v_s^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)^2 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}\pm|\omega|t)}\end{aligned}$$

- Se $\lambda > \lambda_j$ allora $\omega \in \mathbb{C}$, in particolare sarà un valore puramente immaginario. Le soluzioni, in questo caso, saranno delle onde stazionarie con ampiezza che dipende esponenzialmente dal tempo:

$$\begin{aligned}\delta\rho &= D e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})} e^{\pm|\omega|t} \\ \delta\vec{v} &= \mp v_s \delta_0 \frac{\vec{k}}{k} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)^2} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})} e^{\pm|\omega|t} \\ \delta\phi &= -\delta_0 v_s^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)^2 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})} e^{\pm|\omega|t}\end{aligned}$$

Con un tempo caratteristico di crescita o decrescita dell'ampiezza che sarà $\tau = |\omega|^{-1}$

Le soluzioni che abbiamo qui ricavato al variare di λ rappresentano quello che è definito il fenomeno dell'*Instabilità di Jeans*. Il fenomeno in questione dimostra in maniera semplice come un Universo statico, approssimato come un fluido omogeneo e isotropo, sia in realtà in una condizione di instabilità e non di stabilità come verrebbe immediato pensare. Vediamo ora in pratica che significato ha λ_j .

Consideriamo inizialmente $\lambda \gg \lambda_j$. Prendendo un volume sferico di raggio λ e $\delta\rho > 0$, l'ampiezza della fluttuazione crescerà nel tempo se prevarrà la forza di autogravitazione sulla forza di pressione, in pratica dunque:

$$\begin{aligned}\frac{F_{grav}}{m} \simeq \frac{G\rho\lambda^3}{\lambda^2} > F_{press} \simeq \frac{P\lambda^2}{\rho\lambda^3} \simeq \frac{v_s^2}{\lambda} \implies G\rho\lambda > \frac{v_s^2}{\lambda} \\ \implies \lambda > \sqrt{\frac{1}{G\rho}} v_s \simeq \lambda_j\end{aligned}$$

λ_j rappresenta perciò la scala oltre la quale si ha Collasso Gravitazionale. Un ragionamento esattamente analogo si può fare supponendo che valga il viceversa, ossia $\lambda \ll \lambda_j$. In questo caso avremo semplicemente la propagazione di un'onda sonora dovuta alla prevalenza della forza di pressione su quella di autogravità.

³Ricordiamo che abbiamo supposto di considerare soluzioni longitudinali, proprio come le onde sonore

4.2 Modello di Jeans: Universo in Espansione

Applichiamo ora la Teoria di Jeans ad un Universo in espansione. Modifichiamo opportunamente le equazioni (4.5) riscalandolo le nostre quantità per il fattore di scala $a(t)$:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \frac{a}{a_0} \quad \vec{v} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r} \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \quad \phi = \frac{2}{3} \pi G \rho r^2 \quad P = P(\rho, s) \quad s = \text{cost}$$

Cerchiamo di nuovo delle soluzioni in forma di onde piane $\delta u_i = u_i(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$. In questo caso le $u_i(t)$ non saranno scomponibili nel termine $u_i(0) e^{i\omega t}$, in quanto saranno i coefficienti stessi a dipendere dal tempo. Notiamo poi che il prodotto scalare $\vec{k}\cdot\vec{r}$ non dipende dal tempo⁴, dunque non sarà necessario derivare rispetto al tempo l'esponenziale. Sostituiamo ora la nuova forma delle soluzioni nelle equazioni, ricordando che i coefficienti non sono costanti ma dipendono dal tempo a causa dell'espansione (stiamo anche qui trascurando i termini del second'ordine):

$$\begin{cases} \dot{D} + 3\frac{\dot{a}}{a} + i\vec{v}\cdot\vec{k}D + i\rho\vec{k}\cdot\vec{V} = 0 \\ k^2\phi + 4\pi GD = 0 \\ \dot{\Sigma} + i\vec{v}\cdot\vec{k}\Sigma = 0 \\ \dot{\vec{V}} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{V} + i(\vec{v}\cdot\vec{k})\vec{V} + i\frac{\vec{k}}{\rho}(v_s^2 D + (\frac{\partial P}{\partial s})_{\rho=\text{cost}}\Sigma) - i\vec{k}\phi = 0 \end{cases}$$

Cerchiamo di nuovo soluzioni adiabatiche e longitudinali in un sistema di coordinate comovente, quindi per cui $\vec{v} = 0$:

$$\begin{cases} \dot{D} + 3\frac{\dot{a}}{a} + i\rho\vec{k}\cdot\vec{V} = 0 \\ \phi = -\frac{4\pi GD}{k^2} \\ \dot{\Sigma} = 0 \\ \dot{\vec{V}} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{V} + i\vec{k}(v_s^2 - \frac{4\pi G\rho}{k^2})\frac{D}{\rho} = 0 \end{cases}$$

Scriviamo tutto in funzione di delta, definita come $\delta = \frac{D}{\rho}$ e delle sue derivate. Con le opportune sostituzioni si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\delta} + ikV = 0 & \xrightarrow{\text{Derivando}} \ddot{\delta} + ik(\dot{\vec{V}} - \frac{\dot{a}}{a}\vec{V}) = 0 \\ \begin{cases} \dot{V} + \frac{\dot{a}}{a}V + ik(v_s^2 - \frac{4\pi G\rho}{k^2})\frac{D}{\rho} = 0 \\ \frac{\ddot{\delta}}{-ik} + \frac{\dot{\delta}}{a}V = \dot{V} \\ \dot{\delta} + ikV = 0 \end{cases} & \implies \frac{\ddot{\delta}}{-ik} + 2\frac{\dot{\delta}}{a}\left(\frac{\dot{\delta}}{-ik}\right) + ik\frac{D}{\rho}\left(v_s^2 - \frac{4\pi G\rho}{k^2}\right) = 0 \\ & \implies \ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} + \delta\left(v_s^2 - \frac{4\pi G\rho}{k^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

⁴ $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0 \frac{a}{a_0}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{a_0}{a} = k_0 \frac{a_0}{a} \implies kr = k_0 \frac{a_0}{a} r_0 \frac{a}{a_0} = k_0 r_0$

Abbiamo ottenuto una nuova relazione di dispersione, stavolta in funzione di δ e non ovviamente ω , la quale, risolvendola, dà luogo nuovamente a una soluzione oscillante per $\lambda < \lambda_j$ e un collasso per $\lambda > \lambda_j$.

L'informazione principale che differenzia tale caso dal precedente è che le fluttuazioni crescano o decrescano con un andamento t^α e non più $e^{\pm|\omega|t}$.

Vediamo un esempio concreto di quanto affermato ricavando un risultato che verrà utilizzato più avanti parlando di Materia Oscura. Consideriamo un Universo in espansione, dominato da un tipo di materia sottoposta alla sola forza di Gravità e non a quelle di Pressione, detta perciò *Non Collisionale*. Formalmente tale ipotesi è soddisfatta se ci troviamo a lunghezze molto maggiori della scala di Jeans, quindi per cui $\lambda \gg \lambda_j$. Imponendo tali ipotesi nella relazione di dispersione ricavata appena sopra otteniamo:

$$a = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \quad \rho = \frac{1}{6\pi G t^2} \quad \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{4\pi G}{6\pi G t^2}\delta = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{2}{3t^2}\delta = 0$$

Imponendo ora che la soluzione abbia la forma $\delta = t^\alpha$ otteniamo:

$$\alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2} + \frac{4\alpha}{3}t^{-1}t^{\alpha-1} - \frac{2}{3}t^{-2}t^\alpha = 0$$

Semplificando otteniamo un'equazione algebrica in α , con soluzioni:

$$3\alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{1,2} = +\frac{2}{3}, -1$$

La soluzione positiva è l'unica che ha senso fisico in questo caso dato che stiamo considerando gli accrescimenti delle perturbazioni senza che queste subiscano alcun tipo di resistenza da parte delle forze di pressione. In conclusione:

$$\delta \propto a \tag{4.7}$$

Come vedremo nella sezione (4.5), l'introduzione di un'ulteriore componente dominante, di natura diversa da quella della materia, detta *Energia Oscura*, farà sì che ci sia una condizione di allontanamento dalla linearità. Lo studio dell'andamento di δ , con contributi di questo tipo, è ad oggi fondamentale per determinare le caratteristiche di questa nuova componente, della quale quasi nulla è ancora conosciuto, e il suo comportamento sull'Universo.

4.3 Lo Spettro delle Perturbazioni

Nella sezione precedente abbiamo visto l'evoluzione lineare delle perturbazioni supponendo avessero una forma di onda piana. La descrizione risulta buona finché l'evoluzione è lineare, difatti è sempre possibile scomporre qualsiasi perturbazione in onde piane che si evolvono in maniera indipendente le une dalle altre. In questo capitolo tratteremo in maniera statistica il campo di densità perturbato studiando la scala per cui risulta avere dei picchi. Quello che faremo sarà perciò studiarne lo *Spettro*.

Partiamo considerando un volume cubico V_u di lato $L \gg l_s$, dove con l_s intendiamo la massima scala entro cui le fluttuazioni risultano evidenti. Definiamo perciò:

$$\delta(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x}) - \langle \rho \rangle_{V_u}}{\langle \rho \rangle_{V_u}}$$

Scriviamo la fluttuazione in Serie di Fourier:

$$\delta(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad \text{con} \quad \delta_{\vec{k}} = \frac{1}{V_u} \int_{V_u} \delta(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{x} \in \mathbb{C}$$

Notiamo che, per la conservazione della massa in V_u , per $\vec{k} = 0$ allora $\delta_{\vec{k}} = 0$.

Sapendo che i $\delta_{\vec{k}}$ sono coefficienti complessi allora possiamo scriverli:

$$\delta_{\vec{k}} = \Re\delta_{\vec{k}} + \Im\delta_{\vec{k}} = |\delta_{\vec{k}}| e^{i\theta_{\vec{k}}}$$

Dunque avrà senso chiedersi secondo quale densità di probabilità essi si distribuiranno. Supponiamo che la distribuzione sia omogenea e isotropa e Gaussiana⁵ e le fasi e i moduli seguano la statistica di Rayleigh:

$$P(|\delta_{\vec{k}}|, \theta_{\vec{k}}) d|\delta_{\vec{k}}| d\theta_{\vec{k}} = \frac{|\delta_{\vec{k}}|}{2\pi\delta_{\vec{k}}^2 V_u} e^{-\frac{|\delta_{\vec{k}}|^2}{2\delta_{\vec{k}}^2 V_u}} d|\delta_{\vec{k}}| d\theta_{\vec{k}} \quad P(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_{\vec{k}}^2 V_u}} e^{-\frac{w^2}{2\delta_{\vec{k}}^2 V_u}}$$

con $w = \Re\delta_{\vec{k}}$ o $\Im\delta_{\vec{k}}$

Con le ipotesi fatte finora risulta evidente che le fluttuazioni avranno media in tutto lo spazio nulla, ma non la varianza, definita come:

$$\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle_{V_u} - \langle \delta \rangle_{V_u}^2 = \langle \delta^2 \rangle_{V_u} \neq 0$$

Facendo tendere V_u all'infinito allora anche i modi k su cui sommiamo saranno infiniti, perciò:

$$\langle \delta^2 \rangle = \sum_{\vec{k}} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle = \frac{1}{V_u} \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}}^2 \xrightarrow{V_u \rightarrow +\infty} \sigma^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} P(\vec{k}) d^3k = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} P(k) k^2 dk$$

con $\delta_{\vec{k}}^2$ ridefinito come $P(\vec{k})$, detto *Spettro di Potenza*.

Proprio grazie al fatto che la Varianza è diversa da zero, sappiamo quanto le disomogeneità siano ampie per ogni scala considerata. In generale si assume che lo spettro di potenza abbia la forma $P(k) = k^n$, con n detto *Indice Spettrale*.

Notiamo che è possibile manipolare l'equazione che definisce la varianza in modo da ottenere un altro parametro utile nell'analisi dati:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} P(k) k^2 dk = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(k) k^3}{2\pi^2} \frac{dk}{k} = \int_{\mathbb{R}} \Delta(k) d(\ln k)$$

Dove $\Delta(k)$ è il contributo alla varianza per unità di intervallo logaritmico.

Se $\Delta(k)$ ha un massimo molto pronunciato allora possiamo ottenere una relazione che colleghi direttamente la varianza con lo spettro di potenza:

$$\sigma^2 \simeq \Delta(k_{max}) = \frac{1}{2\pi^2} P(k_{max}) k_{max}^3$$

Cerchiamo ora di visualizzare lo spettro entro certe regioni di nostro particolare interesse. La prima idea che potrebbe venirci in mente è quella di porre dei *Filtri* che annullino i contributi al di fuori di un certo intervallo regolato da un opportuno parametro, ad esempio, R .

⁵se $\delta_{\vec{k}}$ si distribuisce secondo una gaussiana allora analogamente sarà per le $\delta(\vec{x})$

Consideriamo una sfera di raggio R, allora:

$$\langle M \rangle = \langle \rho \rangle V = \frac{4}{3}\pi \langle \rho \rangle R^3$$

Si definisce la *Varianza di Massa* entro un volume V la quantità:

$$\sigma_M^2 = \frac{\langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle}{\langle M \rangle^2} = \frac{\langle \delta M^2 \rangle}{\langle M \rangle^2}$$

Usando di nuovo la rappresentazione in serie di Fourier e rimaneggiando la definizione otteniamo:

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{V^2} \sum_{\vec{k}} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle \left(\int_V e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3y \right)^2 = \sum_{\vec{k}} \frac{\delta_{\vec{k}}^2}{V} W^2(kR) \quad \text{con} \quad W(kR) = \frac{1}{V} \int_V e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3y$$

La funzione $W(kR)$ è detta *Funzione Finestra*. La Funzione Finestra è sostanzialmente un Filtro nello spazio di Fourier, quindi, come accennato all'inizio, una funzione che restituisce valori solo entro un certo intervallo di lunghezze d'onda λ (o di vettori \vec{k}) ed è nulla al di fuori di questo; possiamo dire in generale che una funzione finestra è la trasformata di Fourier di un filtro.

È possibile sviluppare in armoniche sferiche l'integrando della formula precedente in modo da ottenere una funzione analitica precisa per la $W(kR)$. Facendo alcuni passaggi si ottiene:

$$W(kR) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4\pi}{k^3} (\sin kR - kR \cos kR) = \frac{3(\sin kR - kR \cos kR)}{(kR)^3}$$

Graficando con un calcolatore la funzione $W(x)$, è possibile notare che:

$$\begin{cases} |W(kR)| \leq \frac{1}{x^2} & \text{per } x \gg 1 \\ W(x) \simeq 1 & \text{per } |x| \leq 1 \end{cases}$$

Passando di nuovo al continuo otteniamo:

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} k^2 dk P(k) W^2(kR) < \sigma^2$$

Abbiamo perciò definito, per le fluttuazioni del campo di densità, uno spettro di potenza che sia filtrato sulla regione di nostro interesse, in questo caso un volume sferico di raggio R. L'espressione da sostituire, più in generale, per avere un filtro dei valori è: $P(k, R_f) = P(k) W^2(kR_f)$ con R_f parametro che ci indica la scala del filtraggio.

Definiamo ora un'ultima funzione che ci può essere utile nel trattare il campo di densità in maniera statistica: la funzione di *Covarianza*

$$\xi(\vec{r}) = \frac{\langle \rho(\vec{x}) \rho(\vec{x} + \vec{r}) \rangle - \langle \rho \rangle^2}{\langle \rho \rangle^2} = \frac{\langle [\rho(\vec{x}) - \langle \rho \rangle][\rho(\vec{x} + \vec{r}) - \langle \rho \rangle] \rangle}{\langle \rho \rangle^2} = \langle \delta(\vec{x}) \delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle$$

Passando ancora una volta in rappresentazione in serie di Fourier e svolgendo i vari conti otteniamo:

$$\xi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Nel continuo avremo perciò:

$$\xi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int P(k) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k}$$

Abbiamo ottenuto che la funzione di Covarianza è l'Antitrasformata di Fourier dello Spettro di Potenza; possiamo quindi ottenere facilmente la relazione inversa:

$$P(k) = \int \xi(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k}$$

La conseguenza fondamentale di ciò che abbiamo appena trovato è che lo Spettro di Potenza è la trasformata di Fourier della funzione di Covarianza. tale risultato va sotto il nome anche di *Teorema di Wiener-Khintchine*. Passando ora in coordinate sferiche, integrando lungo tutto l'angolo solido $d\Omega$ il contributo dell'esponenziale, visto che è l'unica dipendenza dalle direzioni che abbiamo, otteniamo⁶:

$$\int_{\Omega} e^{-ikr\mu} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} e^{ikr\mu} d\mu = 4\pi \frac{\sin kr}{kr}$$

Sostituendo il tutto otteniamo le due relazioni tra spettro di potenza e funzione di covarianza:

$$\begin{aligned} \xi(\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} P(k) \frac{\sin kr}{kr} k^2 dk \\ P(k) &= 4\pi \int_0^{+\infty} \xi(r) \frac{\sin kr}{kr} r^2 dr \end{aligned}$$

Notiamo ora che mediando su tutto il volume V_u , la funzione di covarianza è nulla, infatti:

$$\langle \xi(\vec{r}) \rangle_{\vec{r}} = \frac{1}{V_u} \sum_{\vec{k}} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle \underbrace{\int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{r}}_{=0} = 0$$

Sapendo che vale il principio cosmologico possiamo riscrivere il tutto come:

$$\langle \xi(\vec{r}) \rangle_{\vec{r}} = \frac{4\pi}{V_u} \int_0^{+\infty} \xi(\vec{r}) r^2 dr = 0 \quad \implies \quad \int_0^{+\infty} \xi(\vec{r}) r^2 dr = 0$$

Il significato di ciò che abbiamo trovato è il seguente: supponendo ci siano regioni di ampiezza r_0 entro cui si hanno variazioni $\delta > 0$ e $\delta < 0$, allora, per $r < r_0$, $\xi(\vec{r})$ sarà mediamente positiva, viceversa, per $r > r_0$ ⁷. La funzione di covarianza si annullerà perciò in regioni con $r \approx r_0$, infatti, dovendo avere integrale nullo su tutto lo spazio è come fosse dispari, non rispetto all'origine, ma rispetto al punto $r = r_0$. Tale valore ha il significato perciò di lunghezza di coerenza del campo delle fluttuazioni di densità. Si è soliti dire che nelle regioni per cui $\xi(\vec{r}) > 0$ vi è *Correlazione*, per quelle in cui $\xi(\vec{r}) < 0$ vi è *Anticorrelazione*.

⁶Ciò è perfettamente in linea con la validità del principio cosmologico

⁷Seguendo la definizione data all'inizio si può vedere che il prodotto è fatto tra fluttuazioni di segni concordi nel primo caso e discordi nel secondo

4.4 Perturbazioni per la Materia Oscura

In questa sezione cercheremo di descrivere, senza addentrarci nello sviluppo dei calcoli, come si comportano le perturbazioni nel caso la materia dominante non sia quella barionica, ma quella non barionica, altrimenti detta *Oscura*.

Come già accennato in precedenza, la Materia Oscura è un tipo di materia che interagisce solamente per via gravitazionale, conviene perciò introdurre un'analisi, non direttamente sulle perturbazioni di densità δ ma sulle perturbazioni al potenziale gravitazionale ϕ , per noi unica fonte di informazioni sensibili.

Supponiamo ora di poter fattorizzare in tale modo il potenziale per una generica scala di grandezza e tempo:

$$\Phi(\vec{k}, a) = \Phi_p(\vec{k}) \times \{\text{Funzione di Trasferimento}\} \times \{\text{Funzione di Crescita}\} \quad (4.8)$$

Vediamo perchè ci interessa una tale ipotesi di fattorizzazione: per distanze dell'ordine dell'Orizzonte Cosmologico⁸ due punti non possono necessariamente essere entrati in contatto causale, avremo perciò una situazione "congelata", ossia una zona in cui si sono preservate le condizioni iniziali, non essendo intervenuto alcun fattore esterno oltre alla semplice espansione in background. Per questo motivo risulta necessario individuare un potenziale primordiale $\Phi_p(\vec{k})$, dato dalle condizioni iniziali, su cui applicare una funzione che ne descriva l'andamento a diverse scale (Funzione di Trasferimento, che chiameremo $T(k)$) e, per una certa scala k fissata, l'evoluzione nel tempo a (Funzione di Crescita, che chiameremo $\frac{D_1(a)}{a}$, con $D_1(a)$ detto *Growth Factor*)⁹. Se ci troviamo perciò al di fuori dell'Orizzonte, il potenziale $\Phi(\vec{k}, a)$ risulterà essere semplicemente, per quanto detto sopra, $\Phi_p(\vec{k})$; la Funzione di Trasferimento varrà quindi convenzionalmente uno e la Fattore di Crescita, per un Universo di materia, pari ad a .

Per trattare tali perturbazioni è necessario però tenere conto dei contributi dovuti alla curvatura dell'Universo, proprio come quando consideriamo la Terra ad un livello globale e non più locale. La teoria migliore di cui disponiamo, per trattare il rapporto che sussiste tra la massa-energia e la curvatura dello spaziotempo, è la Relatività Generale.

Riportiamo, senza ricavarle, le estensioni relativistiche alle equazioni di Poisson, di Continuità e di Eulero, sia per la materia che per la radiazione:

$$\dot{\Theta}_{r,0} + k\Theta_{r,1} = -\dot{\Phi} \quad (4.9a)$$

$$\dot{\Theta}_{r,1} - \frac{k}{3}\Theta_{r,0} = -\frac{k}{3}\Phi \quad (4.9b)$$

$$\dot{\delta} + ikv = -3\dot{\Phi} \quad (4.9c)$$

$$\dot{v} + \frac{\dot{a}}{a}v = ik\Phi \quad (4.9d)$$

$$k^2\Phi + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a}\Phi\right) = 4\pi G a^2[\rho_{dm}\delta + 4\rho_r\Theta_{r,0}] \quad (4.9e)$$

$$k^2\Phi = 4\pi G a^2[\rho_{dm}\delta + 4\rho_r\Theta_{r,0} + \frac{3aH}{k}(i\rho_{dm}v + 4\rho_r\Theta_{r,1})] \quad (4.9f)$$

⁸L'Orizzonte Cosmologico è, per definizione, la distanza che hanno percorso i fotoni dal Big Bang a un certo tempo t_0 , non necessariamente il tempo della nostra epoca. La sua grandezza, per questo motivo, dipenderà dall'epoca considerata.

⁹Essendo $a(t)$ una funzione monotona del tempo, è possibile parametrizzare il tempo con tale parametro, oppure con il redshift z o il *tempo conforme* η . Ognuna di queste parametrizzazioni è utilizzata arbitrariamente per comodità.

dove abbiamo supposto che la densità di materia sia sostanzialmente dovuta alla componente di Materia Oscura¹⁰ e che ci siano solo i momenti di monopolo e di dipolo della radiazione, $\Theta_{r,0}$ e $\Theta_{r,1}$.

Una prima suddivisione che possiamo fare per vedere come si comporta il potenziale è distinguere l'Universo a grandi scale e a piccole scale; noi vedremo, in maniera più precisa solamente il caso *Super-horizon* e quello *Sub-horizon*¹¹.

Iniziamo con l'analisi a grandi scale: come abbiamo già accennato, ci troviamo in un ambiente in cui agisce solo l'espansione, senza contributi di *Microfisica*, ossia senza che ci sia connessione causale; si potranno perciò trascurare, nelle equazioni (4.9) i termini in k , essendo quest'ultimo per definizione molto piccolo. Impostando il sistema (4.9) in tale maniera, cambiando opportunamente variabile in $y = \frac{\rho_{dm}}{\rho_r}$ e risolvendo il tutto per il potenziale Φ , otteniamo:

$$\Phi = \frac{\Phi(0)}{10} \frac{1}{y^3} \left[16\sqrt{1+y} + 9y^3 + 2y^2 - 8y - 16 \right] \quad (4.10)$$

L'equazione (4.10) descrive l'evoluzione del potenziale nel tempo, a grandi scale. Notiamo che possiamo considerare due casi limite molto speciali che abbiamo già affrontato precedentemente in un contesto però classico: il dominio della radiazione, della materia ed una eventuale loro transizione. In un Universo dominato dalla radiazione, come già visto in precedenza, ci sarà uno scavalco a un certo istante, da parte della densità di materia su quella di radiazione. Utilizzando perciò la variabile, introdotta ad hoc, y , per differenziare tali casi otteniamo: per $y \rightarrow 0$, $\Phi = \Phi(0)$, dato dalle condizioni iniziali, per $y \rightarrow +\infty$, $\Phi = \frac{9}{10}\Phi(0)$. Si può notare che, sostituendo ciò che abbiamo ricavato in (4.7) nell'equazione di Poisson del caso classico, otteniamo:

$$k^2\Phi = 4\pi G\rho_{dm}\delta \quad \implies \quad \Phi \propto \frac{\rho_{dm}\delta}{k^2}$$

Il potenziale Φ è proporzionale a contributi le cui proporzionalità con il fattore a si elidono, dunque è costante per tutti i tempi. Quello che abbiamo perciò ottenuto è che a grandi scale si ha un passaggio dal dominio della radiazione a quello della materia, per cui, il potenziale passa da una certa costante, a un'ulteriore costante diminuita di un fattore 9/10. Una volta nota l'espressione per il potenziale è possibile poi ottenere un'espressione relativa per le fluttuazioni di densità δ in modo da poter calcolare lo spettro di Potenza $P(k)$.

Per trattare il caso di piccole scale vengono applicati gli stessi ragionamenti fatti prima: si suppone che $k \gg 1$, si scelgono le equazioni opportune da risolvere e si ricava l'espressione per le fluttuazioni δ . Per questo caso l'equazione da risolvere è chiamata *Equazione di Meszaros* ed è:

$$\delta'' + \frac{2+3y}{2y(y+1)}\delta' - \frac{3}{2y(y+1)}\delta = 0$$

Utilizzando ora il risultato trovato nella (4.7) è possibile dividere la soluzione generale in due¹². Imponendo tale condizione e risolvendo poi analiticamente

¹⁰Abbiamo già detto nei precedenti capitoli che la materia barionica compone solo circa il 10% del contributo della materia totale, quindi stiamo compiendo un'approssimazione molto buona

¹¹La parte centrale, detta di *Horizon-crossing* consiste nel collegare analiticamente le due soluzioni trovate per questi casi limite

¹²La prima soluzione sarà un polinomio di ordine uno in y

l'equazione si ottiene:

$$D_1(y) = y + \frac{2}{3} \quad D_2(y) = D_1(y) \ln \left[\frac{\sqrt{1+y} + 1}{\sqrt{1+y} - 1} \right] - 2\sqrt{1+y}$$

Dove i D_1 e D_2 sono i Growth Factor introdotti nella (4.8).

4.5 L'Energia Oscura

È fondamentale notare che siamo ancora in un contesto in cui domina la Materia Oscura, ossia che, rimanendo nell'ipotesi che essa sia nettamente prevalente rispetto alla materia barionica, $\Omega_m = 1$. I casi per $y \gg 1$ sono quelli che ora ci interessano, infatti, ai nostri giorni, domina incontrastata la materia sulla radiazione. Rimane però un problema aperto: come spiegare l'espansione accelerata dell'Universo? Nei modelli che abbiamo visto lungo questa trattazione, l'Universo è stato considerato sia dominato dalla radiazione, dalla materia, curvo, piatto, ma una cosa ci è sfuggita: tutto prevede un'espansione destinata a rallentare indefinitamente a meno che non introduciamo un nuovo parametro, quello che nei capitoli precedenti abbiamo chiamato Λ , la Costante Cosmologica.

Considerando il caso $y \gg 1$, prendiamo di nuovo l'equazione di Meszaros ma aggiungendo i contributi dovuti alla Λ :

$$\delta'' + ikv \left(\frac{d(aHy)^{-1}}{dy} - \frac{1}{aHy^2} \right) = \frac{2\Omega_m H_0^2}{2y^3 a^2 H^2 a_{eq}} \delta$$

Che riscritta più efficacemente con derivate rispetto al parametro a diviene:

$$\frac{d^2 \delta}{da^2} + \left(\frac{d \ln H}{da} + \frac{3}{a} \right) \frac{d\delta}{da} - \frac{3\Omega_m H_0^2}{2a^5 H^2} \delta = 0 \quad (4.11)$$

Una prima soluzione della (4.11) si può verificare essere $\delta \propto H$. Il problema di tale soluzione è che, come abbiamo già detto, il parametro di Hubble è in decrescita per modelli privi di contributi di Costante Cosmologica. Cercando ulteriori soluzioni si riesce, dopo alcuni cambi di variabile, a trovare:

$$D_1(a) \propto H(a) \int_0^a \frac{da'}{(a'H(a'))^3}$$

Considerando quindi un modello più raffinato, che vada oltre al semplice dominio della materia sulla radiazione, riusciamo a trovare un andamento del Growth Factor $D_1(a) \neq a$. Estendendo ancora il modello per un fluido di Quintessenza (del quale, come già detto nella sezione (3.1), la Costante Cosmologica è un caso particolare) otteniamo un'ulteriore dipendenza: il fattore w dovuto all'equazione di stato dinamica¹³ $P_\Lambda = w\rho_\Lambda c^2$.

Ad oggi il *Modello Λ -CDM* è quello che meglio descrive l'evoluzione del nostro Universo e il parametro, ragionando in termini di densità di energia Ω , è stabilito sperimentalmente essere $\Omega_\Lambda \simeq 0,7$.

¹³Il fluido è dinamico, evolve nel tempo proprio perchè $w = w(t)$

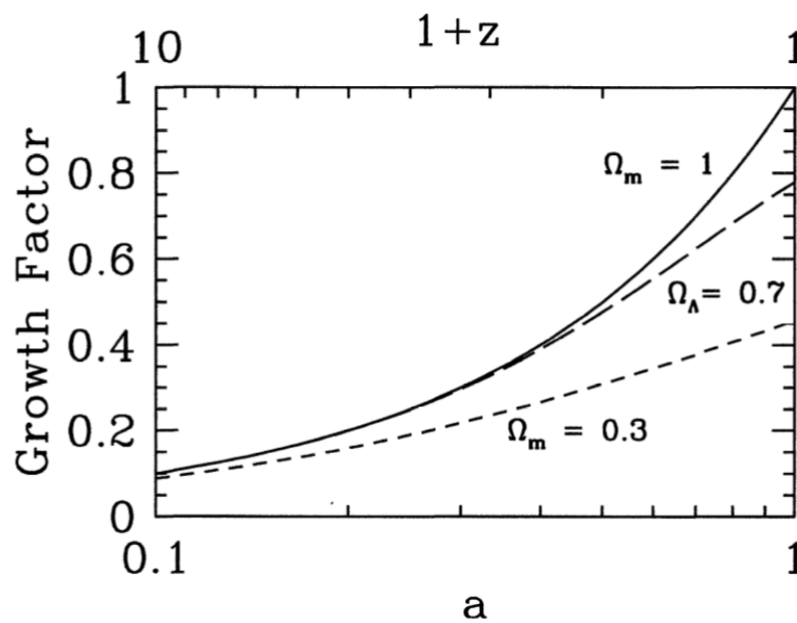


Figura 4.1: Andamento del Growth Factor per diverse cosmologie. Si può notare che, nel caso ci sia una Costante Cosmologica, la crescita del Growth Factor è più lenta rispetto ad un Universo interamente dominato dalla materia, infatti, c'è un'espansione accelerata che diluisce la materia più velocemente di quanto questa possa aggregarsi.

Conclusioni

In questa tesi sono stati presentati dal punto di vista classico i principali modelli che hanno portato ad una sempre più raffinata conoscenza dell'universo, senza tuttavia essere entrati, specialmente sul finale, nei dettagli tecnici. Sono stati introdotti i modelli di Friedmann, ognuno contenente le proprie specifiche sulla geometria dello spazio-tempo, i parametri misurabili sperimentalmente, soprattutto per discriminare l'esattezza di un modello rispetto ad un altro, e gli eventuali problemi legati a tali modelli. L'inesattezza della previsione teorica del parametro di decelerazione ci ha portato a pensare e ad introdurre un'ulteriore componente, tuttora poco nota, quale la Costante Cosmologica. Sono stati introdotti, sempre dal punto di vista newtoniano, i modelli di Jeans per le perturbazioni di materia e radiazione e si è parlato di come queste evolvano in Universi in cui domina l'una, l'altra, o convivono entrambe. Si è infine mostrato, con le opportune correzioni della Relatività Generale alle nostre equazioni classiche, come un modello non completamente dominato dalla materia ma da un termine di Energia Oscura parametrizzi alla perfezione l'evoluzione dell'Universo.

Lo studio dell'andamento del Growth Factor è di cruciale importanza per la Cosmologia Moderna poichè permette di comprendere la natura dell'Energia Oscura e come questa agisce sull'Universo.

Bibliografia

- [1] Liddle, Andrew, *An Introduction to Cosmology*, John Wiley and Sons, Chichester, West Sussex, England, 2003
- [2] Lucchin, Francesco, *Introduzione alla Cosmologia*, Zanichelli, Bologna, 1990
- [3] Dodelson, Scott, *Modern Cosmology*, Elsevier Science, San Diego, California, USA, 2003