

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Stime di Strichartz per l'equazione di Schrödinger e applicazioni.

Relatore:
Prof. **Federico Cacciafesta**

Laureando:
Lamberto Tresoldi
Matricola 1224383

Anno Accademico 2021-2022

21 luglio 2022

Alla mia famiglia, che mi ha sempre spronato a non accontentarmi della via più comoda e a percorrerla con onestà e umiltà,

Ai miei amici tutti, che inspiegabilmente mi sono ancora vicini e ogni giorno mi offrono il dono prezioso dell'allegria,

A Lei, che con instancabile pazienza sopporta e addolcisce il mio animo spigoloso e non sempre leggero.

Senza il sostegno dato dal vostro affetto e dal vostro amore, nulla di tutto questo sarebbe stato anche solo pensabile.

*Per questo, sentitamente,
Vi ringrazio.*

Introduzione.

La tesi è focalizzata sullo studio dell'equazione di Schrödinger, delle stime di Strichartz e il loro fondamentale impiego per l'analisi qualitativa delle soluzioni al caso lineare e non lineare.

A tal fine, nel primo capitolo sono introdotti gli spazi di Sobolev, che, formulando un concetto più debole di derivata, costituiscono l'ambiente naturale per lo studio di equazioni dispersive alle derivate parziali.

Nella trattazione, vengono presentate due costruzioni alternative degli spazi di Sobolev: gli spazi di Sobolev-Slobodeckij, che utilizzano la nozione di derivata debole, e la definizione tramite il potenziale di Bessel, che sfrutta invece la trasformata di Fourier e l'operatore Laplaciano frazionario. Questa seconda caratterizzazione rappresenterà il setting naturale dello studio: infatti, la teoria di Fourier e in particolare dei suoi moltiplicatori risulta determinante per generalizzare agilmente agli spazi di Sobolev le stime ricavate negli spazi di Lebesgue.

Il secondo capitolo è incentrato sull'analisi dell'equazione di Schrödinger lineare. In dettaglio, si vede come nel caso omogeneo sia possibile ricavarne la soluzione esplicita senza molte difficoltà, mentre in quello non omogeneo si dispone di una scrittura integrale, data dalla formula di Duhamel. Proprio per gestire quest'ultima situazione, diventano necessarie delle stime di controllo che permettano di prevedere l'evolvere della soluzione. Le famiglie di stime su cui si concentra lo studio sono quelle dispersive, ottenute per tempi t fissati, e le stime di Strichartz. Le prime permettono di dedurre il comportamento asintotico della soluzione, mentre le seconde ne evidenziano il carattere di regolarizzazione e decadimento.

Infine, nel terzo capitolo approfondiamo l'equazione di Schrödinger non lineare (più brevemente NLS) e la sua buona positura. In modo informale, con tale concetto si intende se la soluzione esista unica e se essa sia solamente locale o anche globale. Nel caso non lineare, il nuovo termine forzante si contrappone alla parte lineare dell'equazione: infatti, se il primo tende a concentrare la soluzione in picchi e singolarità, l'altra tende piuttosto a disperderla e appianarla. A seguito della com-

petizione tra i due caratteri funzionali, abbiamo che la buona positura dipenderà in modo cruciale da un certo parametro legato al termine forzante, detto esponente di non linearità. Indagando come tale variabile infici il comportamento delle soluzioni, emerge un particolare esponente p_c critico, che tripartisce le casistiche del problema.

Infatti, limitandosi allo studio di NLS con dati iniziali in L^2 , si vede che in un contesto subcritico, ovvero per $p < p_c$, il termine non lineare non riesce a imporsi nell'equazione ed è possibile stabilire risultati di buona positura locale, sfruttando le stime di Strichartz e il teorema delle contrazioni; nel caso critico, quando $p = p_c$, la buona positura è ancora raggiungibile, a patto però di rafforzare le ipotesi sul dato iniziale; infine, per esponenti $p > p_c$ detti supercritici, la comparsa di singolarità e di problemi di esistenza è inevitabile, decretando la cattiva positura dell'equazione.

Notazioni.

Iniziamo con introdurre le notazioni più usate e ricorrenti, sperando con ciò di facilitare la lettura.

Sia $u(t, x) : I_t \times \mathbb{R}_x^d \rightarrow \mathbb{C}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo (spesso si avrà $I = \mathbb{R}$), una funzione misurabile, allora:

- $\partial_x^\alpha u$ definisce la derivata parziale secondo la notazione multi-indice, per cui $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ con $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ e

$$\partial_x^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_d} \right)^{\alpha_d}.$$

Inoltre, si scriverà $\partial_t u$ e $\partial_j u$ intendendo rispettivamente $\frac{\partial}{\partial t} u$ e $\frac{\partial}{\partial x_j} u$.

- $\|u\|_{L_t^q L_x^r(I \times \mathbb{R}^d)}$ è la norma associata agli spazi misti di Lebesgue $L_t^q L_x^r(I \times \mathbb{R}^d)$, definita come

$$\|u\|_{L_t^q L_x^r(I \times \mathbb{R}^d)} = \left(\int_I \|u(t)\|_{L_x^r(\mathbb{R}^d)} dt \right)^{1/q} = \left(\int_I \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^r dx \right)^{q/r} dt \right)^{1/q}.$$

- Si scriverà $X \lesssim_q Y$, intendendo che $X \leq C_q Y$ per una qualche costante C_q dipendente solamente da q .
- $\Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial_j^2}$ denota l'operatore Laplaciano, mentre $\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2$ è l'operatore d'Alambertiano. Gli scalari \hbar e c indicano rispettivamente la costante di Planck e la velocità della luce.

Indice

Introduzione.	iii
Notazioni.	v
1 Spazi di Sobolev.	1
1.1 Spazi di Sobolev a esponente intero.	1
1.2 Spazi di Sobolev a esponente frazionario.	4
1.3 Operatore Laplaciano frazionario	6
2 Equazione di Schrödinger lineare.	13
2.1 Introduzione alle equazioni lineari dispersive.	13
2.2 Soluzione dell'equazione di Schrödinger.	16
2.3 Stime dispersive.	17
2.4 Stime di Strichartz.	19
3 Equazione di Schrödinger non lineare.	25
3.1 Il concetto di soluzione.	25
3.2 Buona positura in L_x^2	26
3.3 Un esempio di cattiva positura.	31
A Complementi.	35
Bibliografia.	35

Capitolo 1

Spazi di Sobolev.

1.1 Spazi di Sobolev a esponente intero.

L'argomento principale della trattazione, come già anticipato, sarà l'analisi delle soluzioni dell'equazione di Schrödinger e in particolare lo studio della buona positura per modelli non lineari con dati "poco regolari". Una delle questioni fondamentali in ambiti simili è, forse più della determinazione stessa della soluzione, riuscire a enunciare e garantire risultati di esistenza, unicità e regolarità.

Proprio a tale scopo, risulta necessario presentare una piccola digressione sugli spazi di Sobolev, i quali costituiscono l'ambiente funzionale naturale per affrontare il problema. Per ulteriori approfondimenti e dettagli, si vedano ad esempio [3] e [1]. Con un esempio chiarificatore risulterà evidente la forza di tale approccio, che espande significativamente quello usualmente visto nello studio delle equazioni differenziali ordinarie.

Esempio 1. Si ponga il seguente problema, con $f \in C([a, b])$,

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & \text{in } [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Determinare una soluzione classica $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ significa trovare $u \in C^2([a, b])$ che risolve (1.1). Se invece si moltiplica (1.1) per $\varphi \in C_c^1([a, b])$, e si integra per parti, si ottiene

$$\int_a^b u' \varphi' + \int_a^b u \varphi = \int_a^b f \varphi, \quad \forall \varphi \in C^1([a, b]) \text{ con } \varphi(a) = \varphi(b) = 0. \quad (1.2)$$

Si noti che in questo caso, perché la scrittura abbia significato, è sufficiente assumere $u \in C^1([a, b])$, mentre prima, in (1.1), si doveva supporre u derivabile due volte.

In modo intuitivo si può quindi dire che se $u \in C^1([a, b])$ verifica (1.2), essa risolverà il problema (1.1) in un qualche senso "debole".

Definizione 1.1 (Spazio di Sobolev $W^{1,p}$).

Siano I un intervallo della retta reale e $p \in [1, \infty]$. Si definisce lo *spazio di Sobolev* $W^{1,p}(I)$ come

$$W^{1,p}(I) := \left\{ u \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) \text{ tale che } \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I) \right\}.$$

Tale g si denota con u' e si dice *derivata debole* di u .

Lo spazio $W^{1,p}(I)$ è dotato della norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)}$ definita come

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} := \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)}.$$

In particolare, per $p = 2$, si indica $H^1(I) = W^{1,2}(I)$: esso è dotato del prodotto scalare

$$(u, v)_{H^1(I)} := (u, v)_{L^2(I)} + (u', v')_{L^2(I)} = \int_I u v + \int_I u' v',$$

la cui norma associata

$$\|u\|_{H^1(I)} = (\|u\|_{L^2(I)}^2 + \|u'\|_{L^2(I)}^2)^{1/2}$$

è equivalente alla norma $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$.

Osservazione. È immediato verificare che una funzione derivabile in senso classico ammette derivata debole, e che le due derivate coincidono (a meno di insiemi di misura nulla). Segue quindi che la derivata debole generalizza la definizione di derivata tradizionale. Inoltre, è importante sottolineare come tale formulazione estesa non ponga richieste di differenziabilità sulla funzione f , ma solo di integrabilità.

Si noti anche che le regole classiche di derivazione di somma e prodotto valgono analogamente nel caso debole.

Si presentano di seguito alcune prime proprietà degli spazi di Sobolev.

Teorema 1.1 (Completezza di $W^{1,p}$).

Lo spazio $(W^{1,p}(I), \|\cdot\|_{W^{1,p}(I)})$ è uno spazio di Banach. In particolare, $H^1(I)$ è uno spazio di Hilbert.

Dimostrazione.

Sia $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $W^{1,p}(I)$, ovvero tale che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon : \forall n, m > N_\varepsilon \text{ si ha che } \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(I)} < \varepsilon.$$

Segue quindi che $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{u'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sono due successioni di Cauchy in $L^p(I)$, spazio di Banach. Dunque $u_n \rightarrow u$ in L^p e $u'_n \rightarrow g$ in L^p .

Allora, da

$$\int_I u_n \varphi' = - \int_I u'_n \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I),$$

passando al limite

$$\int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I).$$

Quindi $u \in W^{1,p}(I)$, con $u' = g$, e $\|u_n - u\|_{W^{1,p}(I)} \rightarrow 0$. \square

Teorema 1.2 (C_c^∞ denso in $W^{1,p}$).

Sia $p \in [1, \infty)$. Allora, lo spazio $C_c^\infty(\mathbb{R})$ è denso in $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Dimostrazione.

Si veda [1, Teorema 8.6, p. 202]. \square

La formulazione dello spazio di Sobolev $W^{1,p}$ può essere estesa a un generico esponente m intero, definendo così lo spazio delle funzioni tali che f e le sue derivate deboli fino all'ordine m abbiano norma L^p finita.

Definizione 1.2 (Spazio di Sobolev $W^{m,p}$).

Siano I un intervallo della retta reale, $p \in [1, \infty]$ e $m \geq 2$ intero. Si definisce per ricorrenza lo spazio di Sobolev $W^{m,p}(I)$ come

$$W^{m,p}(I) := \{u \in W^{m-1,p}(I) : u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

In particolare, per $p = 2$, si pone $H^m(I) = W^{m,2}(I)$.

È immediato verificare che $u \in W^{m,p}(I)$ se e solo se esistono m funzioni $g_1, \dots, g_m \in L^p(I)$ tali che

$$\int_I u \varphi^{(j)} = (-1)^j \int_I g_j \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I) \quad \forall j = 1, \dots, m,$$

ove $\varphi^{(j)}$ indica la derivata di ordine j di φ . Tali g_1, \dots, g_m sono dunque le derivate deboli di ordine successivo $u', \dots, u^{(m)}$ di u .

Lo spazio $W^{m,p}(I)$ è dotato della norma $\|\cdot\|_{W^{m,p}(I)}$ definita come

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} := \|u\|_{L^p(I)} + \sum_{\alpha=1}^m \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(I)}.$$

In particolare, per $p = 2$, lo spazio $H^m(I) = W^{m,2}(I)$ è munito del prodotto scalare

$$(u, v)_{H^m(I)} := (u, v)_{L^2(I)} + \sum_{\alpha=1}^m (u^{(\alpha)}, v^{(\alpha)})_{L^2(I)}.$$

Infine, non è difficile generalizzare gli spazi di Sobolev $W^{m,p}$ a dimensione d qualsiasi.

Definizione 1.3 (Spazio di Sobolev $W^{m,p}$ in dimensione d).

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto, $p \in [1, \infty]$ e $m \geq 2$ intero. Si definisce lo *spazio di Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ come

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \partial_x^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\},$$

dove ∂_x^α denota la derivata parziale definita in senso debole.

Analogamente a quanto visto in precedenza, si pone $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$. Lo spazio $W^{m,p}(\Omega)$ è dotato della norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial_x^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

e lo spazio $H^m(\Omega)$ è dotato del prodotto scalare

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial_x^\alpha u, \partial_x^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

1.2 Spazi di Sobolev a esponente frazionario.

È possibile definire gli spazi di Sobolev con esponente positivo qualsiasi, non necessariamente intero. In particolare, costruiamo ora $W^{s,p}$ per $s \in (0, 1)$, ottenendo in tal modo uno spazio funzionale, ancora di Banach, tra $L^p(= W^{0,p})$ e $W^{1,p}$.

Per ulteriori estensioni anche a esponenti negativi, si veda [3, Sezione 2].

Definizione 1.4 (Spazio di Sobolev $W^{s,p}$).

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto, $p \in [1, \infty)$ e $s \in (0, 1)$. Si definisce lo *spazio di Sobolev* $W^{s,p}(\Omega)$ come

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{d}{p} + s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}, \quad (1.3)$$

dotato della norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u|^p dx + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{d+sp}} dx dy \right)^{1/p},$$

dove il termine

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{d+sp}} dx dy \right)^{1/p}$$

si chiama *seminorma di Gagliardo*.

Ancora una volta, per $p = 2$, si pone $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$, il quale è uno spazio di Hilbert.

Osservazione. In letteratura, tali spazi a esponente frazionario sono comunemente noti come *spazi di Sobolev-Slobodeckij*. Si noti inoltre che, per $p = \infty$, $W^{s,\infty}$ coincide con lo spazio delle funzioni s -h olderiane.

Teorema 1.3 (Teorema di immersione).

Siano $p \in [1, \infty)$, $0 < s \leq s' < 1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto. Data $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile, allora

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s',p}(\Omega)},$$

per una qualche costante positiva $C = C(d, s, p) \geq 1$. In particolare,

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega).$$

Dimostrazione.

Si noti preliminarmente che,

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{d+sp}} dx dy \leq \int_{\Omega} \left(\int_{|z| \geq 1} \frac{1}{|z|^{d+sp}} dz \right) |u(x)|^p dx \leq C(d, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p,$$

grazie all'integrabilit  di $1/|z|^{d+sp}$ per $|z| \geq 1$, essendo $d + sp > d$.

Segue quindi che, per $|x - y| \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{d+sp}} dx dy &\leq 2^{p-1} \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x)|^p + |u(y)|^p}{|x-y|^{d+sp}} dx dy \\ &\leq 2^p C(d, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p \end{aligned}$$

e d'altra parte, per $|x - y| < 1$,

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| < 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{d+sp}} dx dy \leq \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| < 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{d+s'p}} dx dy.$$

Unendo le due stime, si ottiene

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{d+sp}} dx dy \leq 2^p C(d, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{d+s'p}} dx dy$$

e dunque

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p &\leq (2^p C(d, s, p) + 1) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{d+s'p}} dx dy \\ &\leq C(d, s, p) \|u\|_{W^{s',p}(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Ovvero, a patto di rimodulare la costante $C(d, s, p)$, ci  che si voleva. \square

Se $s > 1$ è non intero, tramite la scrittura $s = m + \sigma$, con $m \in \mathbb{Z}$ e $\sigma \in (0, 1)$, lo spazio di Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$ è definito da

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{m,p}(\Omega) : \partial_x^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega), \forall |\alpha| \leq m \right\},$$

dotato della norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial_x^\alpha u\|_{W^{\sigma,p}(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Osservazione. Chiaramente, se $s = m$ è intero, lo spazio $W^{s,p}(\Omega)$ coincide con lo spazio di Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$.

1.3 Operatore Laplaciano frazionario

Di qui in avanti si porrà un'attenzione particolare al caso $p = 2$, ovvero allo spazio $H^s(\mathbb{R}^d) = W^{s,2}(\mathbb{R}^d)$, per cui è possibile dare un'altra definizione equivalente tramite la trasformata di Fourier. A tal proposito, affinché quest'ultima sia ben definita, ci si porrà nello spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, o spazio delle funzioni a decrescenza rapida. Per procedere alla nuova costruzione, che denoteremo con $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$, definiamo preliminarmente il seguente operatore.

Definizione 1.5 (Operatore Laplaciano frazionario $(-\Delta)^s$).

Sia $s \in (0, 1)$. L'operatore Laplaciano frazionario $(-\Delta)^s : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ si definisce come

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x) &:= C(d, s) P.V. \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{d+2s}} dy \\ &= C(d, s) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial^+ B_\varepsilon(x)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{d+2s}} dy. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Il simbolo *P.V.* indica il valore principale di Cauchy e $C(d, s)$ è una costante data da

$$C(d, s) = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - \cos \zeta_1}{|\zeta|^{d+2s}} d\zeta \right)^{-1} \quad \text{con } \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d) \in \mathbb{R}^d. \quad (1.5)$$

Si enuncia di seguito un utile lemma tecnico che permette di rappresentare in modo equivalente, ma più maneggevole, l'operatore Laplaciano frazionario.

Lemma 1.4. *Siano $s \in (0, 1)$ e $(-\Delta)^s$ definito come in (1.4). Allora, per ogni $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, si ha*

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2} C(d, s) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{d+2s}} dy. \quad (1.6)$$

Dimostrazione.

Si veda [3, Lemma 3.2, p. 529]. \square

È possibile ora definire lo spazio sopraccitato attraverso la trasformata di Fourier.

Definizione 1.6 (Spazio \mathcal{H}^s).

Sia $s > 0$. Si definisce lo spazio $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ come

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}. \quad (1.7)$$

Osservazione. Con questo nuovo approccio si richiede solamente che s sia positivo, a differenza di quanto visto in (1.3), dove $s \in (0, 1)$.

Affinché sia chiaro il profondo intreccio tra $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ e $(-\Delta)^s$, è necessario introdurre il concetto di *moltiplicatore di Fourier*, ovvero un operatore lineare capace di alterare le trasformate delle funzioni in argomento.

Definizione 1.7 (Moltiplicatore di Fourier).

Data una funzione localmente integrabile $m : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ di crescita al più polinomiale, si definisce il suo moltiplicatore $m(\nabla/i) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ tramite la trasformata di Fourier con la formula

$$m(\nabla/i)u = \mathcal{F}^{-1}(m(\xi)(\mathcal{F}u)),$$

dove $m(\xi)$ è detto simbolo dell'operatore $m(\nabla/i)$.

Osservazione. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ indica il duale dello spazio di Schwartz ed è comunemente noto come spazio delle distribuzioni temperate.

Proposizione 1.5 (Proprietà dei moltiplicatori di Fourier).

Dati m, m_1, m_2 moltiplicatori di Fourier, valgono le seguenti proprietà:

1. $m(\nabla/i)^* = \overline{m}(\nabla/i)$;
2. $m_1(\nabla/i) + m_2(\nabla/i) = (m_1 + m_2)(\nabla/i)$;
3. $m_1(\nabla/i)m_2(\nabla/i) = (m_1m_2)(\nabla/i)$.

In particolare, i moltiplicatori di Fourier commutano, formalmente, tra loro.

Ecco che allora l'operatore Laplaciano frazionario $(-\Delta)^s$ risulta essere un moltiplicatore di Fourier.

Proposizione 1.6. *Sia $s \in (0, 1)$ e sia $(-\Delta)^s$ definito come in (1.4). Allora, per ogni $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, vale*

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}(\mathcal{F}u)), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (1.8)$$

Dimostrazione.

Dal Lemma 1.4, si può focalizzare l'attenzione sulla nuova identità (1.6) del Laplaciano frazionario. Si indichi dunque con $\mathcal{L}u$ tale integrale, ovvero

$$\mathcal{L}u(x) = -\frac{1}{2}C(d, s) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{d+2s}} dy.$$

Essendo \mathcal{L} un operatore lineare, l'obiettivo è trovare il suo simbolo, cioè una funzione $\mathcal{S} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

$$\mathcal{L}u = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S}(\xi)(\mathcal{F}u)). \quad (1.9)$$

È chiaro quindi che lo scopo è provare che

$$\mathcal{S}(\xi) = |\xi|^{2s}, \quad (1.10)$$

dove ξ indica la variabile di frequenza.

Si osserva che

$$\begin{aligned} & \frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|^{d+2s}} \leq \\ & \leq 4 \left(\chi_{B_1}(y) |y|^{2-d-2s} \sup_{B_1(x)} |D^2 u| + \chi_{\mathbb{R}^d \setminus B_1}(y) |y|^{-d-2s} \sup_{\mathbb{R}^d} |u| \right) \\ & \leq C \left(\chi_{B_1}(y) |y|^{2-d-2s} (1 + |x|^{d+1})^{-1} + \chi_{\mathbb{R}^d \setminus B_1}(y) |y|^{-d-2s} \right) \in L^1(\mathbb{R}^{2d}). \end{aligned}$$

Segue allora, dal teorema di Fubini-Tonelli, che l'integrale in y e la trasformata di Fourier in x si possono scambiare. Applicando la trasformata di Fourier in x all'equazione (1.9), si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\xi)(\mathcal{F}u)(\xi) &= \mathcal{F}(\mathcal{L}u) \\ &= -\frac{1}{2}C(d, s) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathcal{F}(u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))}{|y|^{d+2s}} dy \\ &= -\frac{1}{2}C(d, s) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\xi \cdot y} + e^{-i\xi \cdot y} - 2}{|y|^{d+2s}} dy (\mathcal{F}u)(\xi) \\ &= C(d, s) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - \cos(\xi \cdot y)}{|y|^{d+2s}} dy (\mathcal{F}u)(\xi). \end{aligned}$$

Per ottenere (1.10), quindi, è sufficiente mostrare che

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - \cos(\xi \cdot y)}{|y|^{d+2s}} dy = C(d, s)^{-1} |\xi|^{2s}. \quad (1.11)$$

Ricordando che, per $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d) \in \mathbb{R}^d$ vicino a $\zeta = 0$, si ha

$$\frac{1 - \cos \zeta_1}{|\zeta|^{d+2s}} \leq \frac{|\zeta_1|^2}{|\zeta|^{d+2s}} \leq \frac{1}{|\zeta|^{d-2+2s}},$$

segue che

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - \cos \zeta_1}{|\zeta|^{d+2s}} d\zeta$$

è positivo e finito.

Si consideri la funzione $\mathcal{I} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$\mathcal{I}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - \cos(\xi \cdot y)}{|y|^{d+2s}} dy,$$

la quale risulta essere invariante per rotazioni, cioè

$$\mathcal{I}(\xi) = \mathcal{I}(|\xi|e_1),$$

dove e_1 indica il primo vettore della base di \mathbb{R}^d . Infatti, per $d = 1$, ciò si deduce dal fatto che $\mathcal{I}(-\xi) = \mathcal{I}(\xi)$, mentre per $d \geq 2$ si consideri una rotazione R tale che $R(|\xi|e_1) = \xi$. In tal modo, sostituendo $\tilde{y} = R^T y$, si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - \cos((R(|\xi|e_1)) \cdot y)}{|y|^{d+2s}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - \cos((|\xi|e_1) \cdot (R^T y))}{|y|^{d+2s}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - \cos((|\xi|e_1) \cdot \tilde{y})}{|\tilde{y}|^{d+2s}} d\tilde{y} \\ &= \mathcal{I}(|\xi|e_1). \end{aligned}$$

Da tali considerazioni e sostituendo $\zeta = |\xi|y$, si ricava infine,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\xi) &= \mathcal{I}(|\xi|e_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - \cos(|\xi|y_1)}{|y|^{d+2s}} dy \\ &= \frac{1}{|\xi|^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - \cos \zeta_1}{|\zeta/|\xi||^{d+2s}} d\zeta \\ &= C(d, s)^{-1} |\xi|^{2s}. \end{aligned}$$

Avendo ottenuto (1.11), segue (1.10) e dunque la tesi. \square

Teorema 1.7 (Equivalenza tra $H^s(\mathbb{R}^d)$ e $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$).

Sia $s \in (0, 1)$. Allora lo spazio di Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ definito in (1.3) coincide con $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ definito in (1.7). In particolare, per ogni $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, vale

$$[u]_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2 = 2C(d, s)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi.$$

Dimostrazione.

Per ogni $y \in \mathbb{R}^d$ fissato, ponendo il cambio di variabile $z = x - y$ si ha

$$\begin{aligned}
[u]_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{d+2s}} dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(z + y) - u(y)|^2}{|z|^{d+2s}} dz dy && \text{[Tonelli]} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{u(z + y) - u(y)}{|z|^{d/2+s}} \right|^2 dy \right) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left\| \frac{u(z + \cdot) - u(\cdot)}{|z|^{d/2+s}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left\| \mathcal{F} \left(\frac{u(z + \cdot) - u(\cdot)}{|z|^{d/2+s}} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dz . && \text{[Plancherel]}
\end{aligned}$$

Dunque, dalla relazione (1.11), si ricava infine

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \left\| \mathcal{F} \left(\frac{u(z + \cdot) - u(\cdot)}{|z|^{d/2+s}} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dz &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{i\xi \cdot z} - 1|^2}{|z|^{d+2s}} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi dz \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - \cos(\xi \cdot z)}{|z|^{d+2s}} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 dz d\xi \\
&= 2C(d, s)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi .
\end{aligned}$$

□

Osservazione. Si noti che tale teorema si fonda sulla formula di Plancherel, valida solo per $p = 2$.

Proposizione 1.8. *Siano $s \in (0, 1)$ e $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Allora,*

$$[u]_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2 = 2C(d, s)^{-1} \|(-\Delta)^{s/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 .$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
[u]_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2 &= 2C(d, s)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi = 2C(d, s)^{-1} \| |\xi|^s \mathcal{F}u \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
&= 2C(d, s)^{-1} \| \mathcal{F}(-\Delta)^{s/2} u \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = 2C(d, s)^{-1} \| (-\Delta)^{s/2} u \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 .
\end{aligned}$$

□

Da tali risultati emerge quindi che, ponendo

$$\begin{aligned}
\langle D \rangle^s u &:= \mathcal{F}^{-1} \left((1 + |\xi|^2)^{s/2} (\mathcal{F}u) \right) = (1 - \Delta)^{s/2} u , \\
|D|^s u &:= \mathcal{F}^{-1} \left(|\xi|^s (\mathcal{F}u) \right) ,
\end{aligned}$$

$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ può essere scritto, riprendendo (1.7), nel modo seguente:

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) = \{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \langle D \rangle^s u \in L^2(\mathbb{R}^d) \} ,$$

dotato della norma

$$\|u\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)} = \|\langle D \rangle^s u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \approx \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \||D|^s u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (1.12)$$

Più in generale, estendendo agli spazi $L^p(\mathbb{R}^d)$ la costruzione tramite la trasformata di Fourier, si definiscono

$$\mathcal{H}^{s,p}(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^d) : \langle D \rangle^s u \in L^p(\mathbb{R}^d)\},$$

comunemente noti in letteratura come spazi di Sobolev, espressi tramite il *potenziale di Bessel*, con norma associata

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{s,p}(\mathbb{R}^d)} = \|\langle D \rangle^s u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \approx \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \||D|^s u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \quad (1.13)$$

Il setting naturale in cui lavoreremo di qui in avanti sarà quello degli spazi $\mathcal{H}^{s,p}$. Infatti, la loro norma, grazie alle proprietà di commutatività dei moltiplicatori di Fourier, risulterà più maneggevole per generalizzare agli spazi $\mathcal{H}^{s,p}$ stime e disuguaglianze ottenute in L^p .

Quando si avrà $p = 2$, scriveremo direttamente H^s senza ambiguità, in virtù del Teorema 1.7. Si noti che anche in altri casi è possibile dimostrare l'equivalenza tra gli spazi di Sobolev-Slobodeckij $W^{s,p}$ e gli spazi espressi tramite il potenziale di Bessel $\mathcal{H}^{s,p}$, ma per simili approfondimenti si veda [7].

Capitolo 2

Equazione di Schrödinger lineare.

2.1 Introduzione alle equazioni lineari dispersive.

Definizione 2.1 (Equazione dispersiva lineare a coefficienti costanti).

Un'equazione differenziale alle derivate parziali lineare dispersiva a coefficienti costanti ha la seguente forma

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = Lu(t, x) \\ u(0, x) = u_0(x) , \end{cases} \quad (2.1)$$

dove $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione a valori complessi e L un operatore differenziale antihermitiano a coefficienti costanti in \mathbb{C} , ovvero

$$Lu(x) := \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \partial_x^\alpha u(x) \text{ con } c_\alpha \in \mathbb{C} .$$

Scrivendo $L = ih(\nabla/i)$, con $\nabla/i = (\frac{1}{i}\partial_{x_1}, \dots, \frac{1}{i}\partial_{x_d})$, si può definire $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ come il *polinomio di relazione di dispersione*

$$h(\xi_1, \dots, \xi_d) := \sum_{|\alpha| \leq k} i^{|\alpha|-1} c_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_d^{\alpha_d} .$$

In particolare, $h(\nabla/i)$ è un moltiplicatore di Fourier.

Osservazione. Si noti che, assumere L antihermitiano, ovvero

$$\int (Lu(x), v(x))_V dx = - \int (u(x), Lv(x))_V dx ,$$

equivale a imporre che i coefficienti del polinomio h siano autoaggiunti. Esso sarà quindi a valori reali nel caso scalare.

Le equazioni dispersive compaiono soprattutto in ambiti fisici, e in particolare in meccanica quantistica. Infatti, tra le più famose ricordiamo l'*equazione di Schrödinger*:

$$i\partial_t u + \frac{\hbar}{2m}\Delta u = 0, \quad (2.2)$$

dove $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ e la massa m è uno scalare positivo fissato. In tal caso, essendo $L = -\frac{\hbar}{2im}\Delta$, il polinomio di dispersione risulta $h(\xi) = -\frac{\hbar}{2m}|\xi|^2$.

Si menzionano, inoltre, due equazioni altrettanto celebri: l'*equazione di Airy*

$$\partial_t u + \partial_{xxx} u = 0,$$

dove $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la quale è fortemente collegata all'*equazione di Korteweg-De Vries*

$$\partial_t u + \partial_{xxx} u = 6u \partial_x u,$$

e l'*equazione di Klein-Gordon*, che generalizza l'*equazione delle onde*,

$$\square u = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} u; \quad u(0, x) = u_0(x); \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x),$$

dove $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$. Le equazioni di Schrödinger, di Korteweg-De Vries e di Klein-Gordon in letteratura, costituiscono le cosiddette *big three*.

Il motivo per cui simili equazioni sono connotate con l'aggettivo "dispersive" risiede nel fatto che le frequenze in gioco tendono a propagarsi in diverse direzioni e velocità, disperdendo appunto la soluzione. Tale comportamento così peculiare caratterizza questa classe di equazioni e la distingue ad esempio dalle equazioni dissipative, dove le frequenze, invece di disperdersi, si attenuano fino a scomparire.

Per poter godere dell'impianto teorico costruito nel capitolo precedente, si assumerà che le soluzioni appartengano allo spazio di Schwartz $\mathcal{S}_x(\mathbb{R}^d)$. Inoltre, per semplificare la trattazione le equazioni saranno considerate al caso scalare, cosicché il polinomio di relazione di dispersione h sia a valori reali.

Date queste premesse, iniziamo con l'enunciare un primo importante risultato sulla struttura della soluzione dell'*equazione (2.1)* in generale.

Teorema 2.1 (Soluzione di un'*equazione lineare dispersiva*).

Sia $u_0 \in \mathcal{S}_x(\mathbb{R}^d)$ dato iniziale, allora per $t \neq 0$

$$u(t, x) = e^{tL} u_0(x) = u_0 * K_t(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) K_t(x - y) dy, \quad (2.3)$$

ove K_t , detto *soluzione fondamentale*, è l'inverso della trasformata di Fourier di e^{tL}

$$K_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x \cdot \xi + th(\xi))} d\xi,$$

risolve l'*equazione lineare dispersiva (2.1)* e appartiene allo spazio di Schwartz.

Dimostrazione.

Se $u \in C_{t,loc}^1 \mathcal{S}_x(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ è una soluzione classica di (2.1), applicando la trasformata di Fourier, si ha

$$\partial_t \mathcal{F}u(\xi) = ih(\xi) \mathcal{F}u(\xi) \quad :$$

integrando in tempo, tutta l'equazione ammette come soluzione unica

$$\mathcal{F}u(\xi) = e^{ith(\xi)} \mathcal{F}u_0(\xi) \quad . \quad (2.4)$$

Si noti che, essendo h reale e $\mathcal{F}u_0$ nello spazio di Schwartz, anche $\mathcal{F}u$ appartiene a tale spazio per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora, poiché la trasformata di Fourier è un automorfismo lineare sullo spazio di Schwartz, è lecito applicare la formula di inversione e ottenere

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ith(\xi) + ix \cdot \xi} \mathcal{F}u_0(\xi) d\xi \quad . \quad (2.5)$$

Da ciò, definiamo $e^{tL} = e^{ith(\nabla/i)}$ il *propagatore lineare* come

$$e^{tL}u_0(x) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{ith(\xi) + ix \cdot \xi} \mathcal{F}u_0(\xi) d\xi \quad .$$

Infine, applicando a (2.5) il teorema della convoluzione per la trasformata di Fourier

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g) \quad ,$$

si ricava la soluzione di un'equazione dispersiva di dato iniziale u_0 :

$$u(t, x) = e^{tL}u_0(x) = u_0 * K_t(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) K_t(x - y) dy \quad ,$$

dove K_t è, come si voleva, l'inverso della trasformata di Fourier di e^{tL}

$$K_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ith(\xi) + ix \cdot \xi} d\xi \quad .$$

□

Osservazione. Il propagatore lineare $e^{ith(\nabla/i)}$ è un moltiplicatore di Fourier.

Per concludere tale sezione introduttiva, si enuncia di seguito un'identità fondamentale nell'ambito delle equazioni differenziali in generale, e che, nello specifico, risulterà indispensabile nell'analisi delle equazioni dispersive al caso non lineare.

Teorema 2.2 (Formula di Duhamel).

Dato I intervallo, sia $u \in C_t^1 \mathcal{S}_x(I \times \mathbb{R}^d)$ soluzione dell'equazione

$$\partial_t u = Lu + F \quad ,$$

con termine forzante $F \in C_t^0 \mathcal{S}_x(I \times \mathbb{R}^d)$. Allora, $\forall t_0, t \in I$, vale la formula

$$u(t) = e^{(t-t_0)L}u(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)L}F(s) ds \quad . \quad (2.6)$$

Dimostrazione.

Si veda [9, Proposizione 1.35, p. 42]. \square

2.2 Soluzione dell'equazione di Schrödinger.

Avendo posto una buona base riguardo i concetti principali delle equazioni lineari dispersive, focalizziamo ora l'attenzione sull'equazione di Schrödinger.

Teorema 2.3 (Soluzione dell'equazione di Schrödinger).

Sia $u_0 \in \mathcal{S}_x(\mathbb{R}^d)$ dato iniziale, allora per $t \neq 0$

$$u(t, x) = e^{it\hbar\Delta/2m} u_0(x) = \frac{1}{(2\pi i\hbar t/m)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{im|x-y|^2/(2\hbar t)} u_0(y) dy \quad (2.7)$$

risolve l'equazione di Schrödinger (2.2) e appartiene allo spazio di Schwartz.

Dimostrazione.

La tesi segue immediatamente dal Teorema 2.1. Infatti, nel caso dell'equazione di Schrödinger, $L = -\frac{\hbar}{2im}\Delta$ e quindi risulta $h(\xi) = -\frac{\hbar}{2m}|\xi|^2$. Sfruttando la nota identità integrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a}, \quad \text{con } \Re(a) > 0,$$

segue che la soluzione fondamentale è

$$K_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x\xi - t\hbar|\xi|^2/2m)} d\xi = \frac{1}{(2\pi i\hbar t/m)^{d/2}} e^{im|x|^2/(2\hbar t)}.$$

Sostituendo in (2.3), si ottiene l'espressione cercata

$$u(t, x) = e^{it\hbar\Delta/2m} u_0(x) = u_0 * K_t(x) = \frac{1}{(2\pi i\hbar t/m)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{im|x-y|^2/(2\hbar t)} u_0(y) dy. \quad \square$$

Se in assenza del termine forzante è stato possibile ricavare esplicitamente la soluzione all'equazione di Schrödinger, nel caso non omogeneo

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{\hbar}{2m}\Delta u = F \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (2.8)$$

si dispone, grazie alla formula di Duhamel (2.6), di una scrittura in forma integrale della soluzione

$$u(t) = e^{it\hbar\Delta/2m} u_0 - i \int_0^t e^{i(t-s)\hbar\Delta/2m} F(s) ds. \quad (2.9)$$

In tal modo, risultano evidenti e ben separati i due elementi che determinano l'evoluzione della soluzione: il dato iniziale e il termine forzante. Riuscire a stimare in norma ambo i membri di (2.9) è l'obiettivo delle prossime sezioni.

2.3 Stime dispersive.

Uno degli aspetti cruciali dello studio delle equazioni differenziali è essere in grado di stabilire efficaci stime di controllo sulla soluzione, in funzione del dato iniziale e del termine forzante, quando presente. Un tale approccio permette di passare dal caso lineare a quello non lineare, più complesso da gestire, ma anche più ricco.

Proprio per quantificare la "grandezza" della soluzione, si definiscono gli spazi misti di Lebesgue $L_t^q L_x^r(I \times \mathbb{R}^d)$, con I intervallo, dotati della norma seguente

$$\|u\|_{L_t^q L_x^r(I \times \mathbb{R}^d)} = \left(\int_I \|u(t)\|_{L_x^r(\mathbb{R}^d)} dt \right)^{1/q} = \left(\int_I \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^r dx \right)^{q/r} dt \right)^{1/q}.$$

Notazione. Di qui in avanti, per alleggerire la trattazione, si porranno $\hbar = m = 1$ e si trascurerà il fattore $1/2$ di modo che il propagatore lineare di Schrödinger sarà semplicemente $e^{it\Delta}$.

Date tali premesse, il primo passo è quello di costruire stime preliminari che funzionino per un tempo t fissato, imponendo che u_0 appartenga ad un qualche spazio di Sobolev.

Teorema 2.4 (Legge di conservazione in L_x^2 e H_x^s).

Sia fissato $d \geq 1$. Allora, il propagatore di Schrödinger conserva la norma H_x^s , e in particolare la norma L_x^2 . Ovvero, valgono le seguenti stime:

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} = \|u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)}, \quad (2.10)$$

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{H_x^s(\mathbb{R}^d)} = \|u_0\|_{H_x^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Dimostrazione.

Essendo $e^{it\Delta}$ un operatore unitario, segue immediatamente la scrittura (2.10).

Inoltre, dalla definizione (1.12) e dalla commutatività di $e^{it\Delta}$ con gli altri moltiplicatori di Fourier, si ricava

$$\begin{aligned} \|e^{it\Delta} u_0\|_{H_x^s(\mathbb{R}^d)} &= \|\langle D \rangle^s e^{it\Delta} u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} = \|e^{it\Delta} u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} + \||D|^s e^{it\Delta} u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \|e^{it\Delta} u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} + \|e^{it\Delta} |D|^s u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \|u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} + \||D|^s u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} = \|\langle D \rangle^s u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \|u_0\|_{H_x^s(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

□

Si possono ora ricavare delle stime dispersive, per u_0 in spazi di Lebesgue e di Sobolev rispettivamente, che risultano molto efficaci per dedurre l'andamento asintotico dell'equazione di Schrödinger.

Teorema 2.5 (Stima dispersiva in spazi L_x^p).

Siano fissati $d \geq 1$ e $2 \leq p \leq \infty$. Posto p' l'esponente coniugato di p , ovvero tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, vale la stima:

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L_x^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim_d t^{-d/2+d/p} \|u_0\|_{L_x^{p'}(\mathbb{R}^d)}. \quad (2.11)$$

Dimostrazione.

Si osserva preliminarmente, che vale la seguente disuguaglianza

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L_x^\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim_d t^{-d/2} \|u_0\|_{L_x^1(\mathbb{R}^d)}. \quad (2.12)$$

Infatti, da (2.7)

$$\begin{aligned} |e^{it\Delta}u_0| &= \left| \frac{1}{(4\pi it)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i|x-y|^2/4t} u_0(y) dy \right| \leq \left| \frac{1}{(4\pi it)^{d/2}} \right| \int_{\mathbb{R}^d} |e^{i|x-y|^2/4t} u_0(y)| dy \\ &= |4\pi t|^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(y)| dy = |4\pi t|^{-d/2} \|u_0\|_{L_x^1(\mathbb{R}^d)} = C|t|^{-d/2} \|u_0\|_{L_x^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Grazie al teorema di interpolazione di Riesz-Thorin A.1, applicato alla disuguaglianza appena ricavata e a (2.10), segue la stima generalizzata (2.11). \square

Osservazione. Le stime (2.10) e (2.12) evidenziano il comportamento della soluzione (sufficientemente regolare in termini di integrabilità e decadimento), al variare del tempo. Infatti, se da un lato la massa L_x^2 della soluzione si conserva, dall'altro questa viene dispersa su una regione man mano più ampia.

Ancora una volta, sfruttando la commutatività dei moltiplicatori di Fourier e la definizione (1.13), è possibile ricavare una stima dispersiva valida negli spazi di Sobolev.

Teorema 2.6 (Stima dispersiva in spazi $\mathcal{H}_x^{s,p}$).

Siano fissati $d \geq 1$ e $2 \leq p \leq \infty$. Posto p' l'esponente coniugato di p , ovvero tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, vale la stima:

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{\mathcal{H}_x^{s,p}(\mathbb{R}^d)} \lesssim_d t^{-d/2+d/p} \|u_0\|_{\mathcal{H}_x^{s,p'}(\mathbb{R}^d)}. \quad (2.13)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \|e^{it\Delta}u_0\|_{\mathcal{H}_x^{s,p}(\mathbb{R}^d)} &= \|\langle D \rangle^s e^{it\Delta}u_0\|_{L_x^p(\mathbb{R}^d)} = \|e^{it\Delta}u_0\|_{L_x^p(\mathbb{R}^d)} + \|\langle D \rangle^s e^{it\Delta}u_0\|_{L_x^p(\mathbb{R}^d)} \\ &= \|e^{it\Delta}u_0\|_{L_x^p(\mathbb{R}^d)} + \|e^{it\Delta} \langle D \rangle^s u_0\|_{L_x^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\lesssim_d t^{-d/2+d/p} (\|u_0\|_{L_x^{p'}(\mathbb{R}^d)} + \|\langle D \rangle^s u_0\|_{L_x^{p'}(\mathbb{R}^d)}) \\ &= t^{-d/2+d/p} \|\langle D \rangle^s u_0\|_{L_x^{p'}(\mathbb{R}^d)} = t^{-d/2+d/p} \|u_0\|_{\mathcal{H}_x^{s,p'}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

\square

Osservazione. Da questa prima serie di stime, emerge distintamente come il propagatore di Schrödinger preservi la norma L_x^p solo nel caso $p = 2$ e, più in generale, la norma H_x^s .

2.4 Stime di Strichartz.

Le stime dispersive finora viste sono molto utili, come già accennato, per lo studio dell'andamento asintotico, specie quando u_0 ha buone proprietà di integrabilità. Tuttavia, in molti casi le ipotesi su u_0 sono molto deboli e dunque stime ulteriori, quali quelle di Strichartz, risultano necessarie. Per poterle enunciare, e dimostrare, è necessario però richiamare un'importante disuguaglianza dell'analisi funzionale.

Teorema 2.7 (Disuguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev).

Siano $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione misurabile, $0 < \alpha < d$ e $1 < p < q < \infty$ tali che $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{d-\alpha}{d}$. Allora vale

$$\left\| f * \frac{1}{|x|^\alpha} \right\|_{L_x^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{p,q,d} \|f\|_{L_x^p(\mathbb{R}^d)}. \quad (2.14)$$

Dimostrazione.

Si veda ad esempio [7, Sezione 5]. □

Presentiamo finalmente le *stime di Strichartz*, introdotte negli anni Settanta dal matematico Robert S. Strichartz [8] e da allora ancora studiate e impiegate in una moltitudine di applicazioni.

Teorema 2.8 (Stime di Strichartz per l'equazione di Schrödinger).

Fissato $d \geq 1$, una coppia di esponenti (q, r) si dice ammissibile se

$$2 \leq q, r \leq \infty, \quad \frac{2}{q} + \frac{d}{r} = \frac{d}{2} \quad e \quad (q, r, d) \neq (2, \infty, 2).$$

Allora, per ogni coppia di esponenti ammissibili (q, r) e (\tilde{q}, \tilde{r}) si hanno le seguenti stime di Strichartz:

- *stima omogenea*

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,q,r} \|u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)}, \quad (2.15)$$

- *stima omogenea duale*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} F(s) ds \right\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,\tilde{q},\tilde{r}} \|F\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)}, \quad (2.16)$$

- *stima non omogenea*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} F(s) ds \right\|_{L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,q,r,\tilde{q},\tilde{r}} \|F\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}' }(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)}, \quad (2.17)$$

- *stima non omogenea troncata*

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s) ds \right\|_{L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,q,r,\tilde{q},\tilde{r}} \|F\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}' }(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)}. \quad (2.18)$$

Dimostrazione.

Passo 1. Stima autoduale di Strichartz.

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} F(s) ds \right\|_{L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} = \\ & = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} F(s) ds \right\|_{L_x^r(\mathbb{R}^d)} \right)^q dt \right)^{1/q} \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \|e^{i(t-s)\Delta} F(s)\|_{L_x^r(\mathbb{R}^d)} ds \right)^q dt \right)^{1/q} \quad [\text{Minkowski}] \\ & = \left\| \int_{\mathbb{R}} \|e^{i(t-s)\Delta} F(s)\|_{L_x^r(\mathbb{R}^d)} ds \right\|_{L_t^q(\mathbb{R})} \\ & \lesssim_{d,r} \left\| \int_{\mathbb{R}} |t-s|^{-d/2+d/r} \|F(s)\|_{L_x^{r'}(\mathbb{R}^d)} ds \right\|_{L_t^q(\mathbb{R})} \quad [\text{Dispersiva}] \\ & = \left\| \|F\|_{L_x^{r'}(\mathbb{R}^d)} * \frac{1}{|t|^{d/2-d/r}} \right\|_{L_t^q(\mathbb{R})} \\ & \lesssim_{d,q,r} \|F\|_{L_t^p L_x^{r'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)}, \quad [\text{HLS}] \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio, perché sia lecito applicare la disuguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev (2.14), si deve avere

$$\begin{cases} 0 < \frac{d}{2} - \frac{d}{r} < 1 \\ \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + 1 - \left(\frac{d}{2} - \frac{d}{r} \right) \\ 1 < p < q < \infty. \end{cases}$$

Scegliendo $p = q'$, si ottiene quindi la stima autoduale di Strichartz

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} F(s) ds \right\|_{L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,q,r} \|F\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)},$$

con la condizione di ammissibilità $\frac{2}{q} + \frac{d}{r} = \frac{d}{2}$.

In particolare, essendo $\frac{d}{2} - \frac{d}{r} \in (0, 1)$, segue che $2 < r < \frac{2d}{d-2}$ e $2 < q < \infty$.

Si osservi inoltre che, in modo analogo, si ricava la medesima stima al caso troncato

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s) ds \right\|_{L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,q,r} \|F\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)}.$$

Osservazione. Si noti che, dalla legge della conservazione in L_x^2 (2.10), la coppia $(\infty, 2)$ risulta ammissibile.

Passo 2. Metodo TT^* .

Per procedere, si utilizza ora il metodo TT^* , che permette di dedurre la continuità di un operatore lineare T , e del suo aggiunto T^* , verificando la limitatezza della loro composizione TT^* .

Lemma 2.9. *Dato $A : L^2 \rightarrow L^p$ operatore lineare e $A^* : L^{p'} \rightarrow L^2$ il suo aggiunto, sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- (a) $A : L^2 \rightarrow L^p$ è un operatore limitato di norma M ;
- (b) $A^* : L^{p'} \rightarrow L^2$ è un operatore limitato di norma M ;
- (c) $AA^* : L^{p'} \rightarrow L^p$ è un operatore limitato di norma M^2 .

Dimostrazione.

(a) \Rightarrow (b). Siano $f \in L^{p'}$, $g \in L^2$,

$$|(A^*f, g)| = |(f, Ag)| \leq \|f\|_{L^{p'}} \|Ag\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p'}} \|A\| \|g\|_{L^2} \leq M \|f\|_{L^{p'}} \|g\|_{L^2} .$$

(b) \Rightarrow (a). Siano $f \in L^{p'}$, $g \in L^2$,

$$|(f, Ag)| = |(A^*f, g)| \leq \|A^*f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \leq \|A^*\| \|f\|_{L^{p'}} \|g\|_{L^2} \leq M \|f\|_{L^{p'}} \|g\|_{L^2} .$$

(b) \Rightarrow (c). Siano $f, g \in L^{p'}$,

$$\begin{aligned} |(AA^*f, g)| &= |(A^*f, A^*g)| \leq \|A^*f\|_{L^2} \|A^*g\|_{L^2} \leq \|A^*\|^2 \|f\|_{L^{p'}} \|g\|_{L^{p'}} \\ &\leq M^2 \|f\|_{L^{p'}} \|g\|_{L^{p'}} . \end{aligned}$$

(c) \Rightarrow (b). Siano $f, g \in L^{p'}$,

$$\begin{aligned} |(A^*f, A^*g)| &= |(AA^*f, g)| \leq \|AA^*f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} \leq \|AA^*\| \|f\|_{L^{p'}} \|g\|_{L^{p'}} \\ &\leq M^2 \|f\|_{L^{p'}} \|g\|_{L^{p'}} . \end{aligned}$$

□

Osservazione. Il lemma appena mostrato vale similmente con operatori lineari definiti su spazi di Lebesgue misti, cioè della forma $T : L^2 \rightarrow L^q L^r$ e $T^* : L^{q'} L^{r'} \rightarrow L^2$. Per un enunciato più generale si veda ad esempio [4, Sezione 2].

Dunque, definendo gli operatori $T : L_x^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_t^q L_x^{r'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ e il suo aggiunto $T^* : L_t^{q'} L_x^{r'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \rightarrow L_x^2(\mathbb{R}^d)$ come segue

$$\begin{aligned} Tf &= e^{it\Delta} f \\ T^* F &= \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} F(s) ds, \end{aligned}$$

si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} F(s) ds = e^{it\Delta} \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} F(s) ds = T \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} F(s) \right) = TT^* F,$$

e quindi, dal Passo 1,

$$\|TT^* F\|_{L_t^q L_x^{r'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,q,r} \|F\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)}.$$

Applicando il Lemma 2.9, seguono le disuguaglianze

$$\begin{cases} \|T^* F\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,q,r} \|F\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \\ \|Tf\|_{L_t^q L_x^{r'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,q,r} \|f\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)}, \end{cases}$$

ovvero (2.16) e (2.15)

$$\begin{cases} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} F(s) ds \right\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,q,r} \|F\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \\ \|e^{it\Delta} f\|_{L_t^q L_x^{r'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,q,r} \|f\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)}, \end{cases}$$

per ogni coppia di esponenti (p, q) ammissibili.

Componendo le due stime appena trovate con coppie diverse di esponenti ammissibili (q, r) e (\tilde{q}, \tilde{r}) segue (2.17), infatti

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} F(s) ds \right\|_{L_t^q L_x^{r'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} &\lesssim_{d,q,r} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} F(s) ds \right\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\lesssim_{d,q,r,\tilde{q},\tilde{r}} \|F\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Passo 3. Utilizzo dell'interpolazione.

Ricordando che $(\infty, 2)$ è una coppia ammissibile, si ricava che

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s) ds \right\|_{L_t^\infty L_x^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} &= \left\| e^{it\Delta} \int_0^t e^{-is\Delta} F(s) ds \right\|_{L_t^\infty L_x^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \\ &= \left\| \int_0^t e^{-is\Delta} F(s) ds \right\|_{L_t^\infty L_x^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \\ &= \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} F(s) \chi_{[0,t]} ds \right\|_{L_t^\infty L_x^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \\ &\lesssim_{d,q,r} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\chi_{[0,t]} F\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \\ &= \|F\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

per ogni coppia (q, r) ammissibile.

Infine, poiché

$$\begin{cases} \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s) ds \right\|_{L_t^\infty L_x^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \lesssim_{d, \tilde{q}, \tilde{r}} \|F\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}' }(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \\ \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s) ds \right\|_{L_t^{\tilde{q}} L_x^{\tilde{r}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \lesssim_{d, \tilde{q}, \tilde{r}} \|F\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}' }(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)}, \end{cases}$$

applicando il teorema di interpolazione di Riesz-Thorin A.1, si ottiene (2.18)

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s) ds \right\|_{L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \lesssim_{d, q, r, \tilde{q}, \tilde{r}} \|F\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}' }(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)},$$

per ogni (q, r) e (\tilde{q}, \tilde{r}) ammissibili. □

Osservazione. Similmente a quanto appena fatto, grazie alle commutatività dei moltiplicatori di Fourier, non è difficile derivare analoghe stime assumendo una regolarità più debole, quale ad esempio H_x^s . Si ha quindi che, fissato $d \geq 1$, se (q, r) e (\tilde{q}, \tilde{r}) sono due coppie di esponenti ammissibili e $u : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, con I intervallo contenente 0, è soluzione dell'equazione di Schrödinger non omogenea

$$i\partial_t u + \Delta u = F; \quad u(0, x) = u_0(x) \in H_x^s(\mathbb{R}^d),$$

vale la seguente stima generalizzata

$$\|u\|_{L_t^q \mathcal{H}_x^{s, r}(I \times \mathbb{R}^d)} \lesssim_{d, q, r, \tilde{q}, \tilde{r}, s} \|u_0\|_{H_x^s(\mathbb{R}^d)} + \|F\|_{L_t^{\tilde{q}'} \mathcal{H}_x^{s, \tilde{r}' } (I \times \mathbb{R}^d)}.$$

Osservazione. Le stime di Strichartz hanno il pregio di, a seconda della loro interpretazione, evidenziare i caratteri distintivi di un'equazione dispersiva:

- (i) Localmente nel tempo, la soluzione guadagna integrabilità rispetto al dato iniziale (infatti se $u_0 \in L_x^2$, allora $u(t) \in L_x^r$, $r > 2$), ovvero si ha un effetto di regolarizzazione della soluzione.
- (ii) Globalmente nel tempo, la norma L_x^r della soluzione $u(t)$ tende necessariamente a zero, per $t \rightarrow \infty$, almeno in una qualche norma L_t^q , e ciò sottolinea il carattere di decadimento della soluzione.

Concludiamo il capitolo accennando al fatto che analoghe stime di Strichartz sono ottenibili anche per le altre equazioni dispersive, come ad esempio l'equazione di Klein-Gordon. Inoltre, per quanto concerne l'equazione di Schrödinger, esistono ulteriori famiglie di disuguaglianze che permettono di approfondirne lo studio, come ad esempio le "local smoothing estimates". Per maggiori informazioni su simili aspetti, si veda [9, Sezione 2].

Capitolo 3

Equazione di Schrödinger non lineare.

3.1 Il concetto di soluzione.

Lo scopo di questa sezione introduttiva è fornire una prima e informale idea di cosa significhi cercare delle soluzioni nella classe, a priori così estremamente complessa e variegata, delle equazioni dispersive non lineari. Affrontare un simile problema significa studiare un'equazione della forma

$$\partial_t u = Lu + N(u)$$

dove, accanto all'operatore lineare L , compare un termine N , non lineare, le cui caratteristiche asintotiche, di regolarità e integrabilità influenzano l'evoluzione della soluzione stessa. Ciò determina una vera e propria contrapposizione tra i due caratteri funzionali, lineare e non lineare: infatti, se il primo tende a disperdere e appianare la soluzione, l'altro tende a concentrarla in picchi e singolarità. Ecco che, allora, il dato iniziale $u(0, x) = u_0(x)$, con la sua regolarità e la grandezza in norma, giocherà un ruolo fondamentale nell'analisi dell'equazione.

Fatta questa premessa, si dà ora una definizione intuitiva di cosa si richiede per avere una nozione di soluzione.

Definizione 3.1 (Concetto di buona positura, informale).

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u = Lu + N(u) \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

si dice ben posto localmente in uno spazio $Y_x(\mathbb{R}^d)$ (di seguito tale spazio sarà $L_x^2(\mathbb{R}^d)$) se valgono le seguenti:

1. $\forall u_0 \in X$, dove X è un sottoinsieme (debitamente scelto) di $C_t Y_x([-T, T] \times \mathbb{R}^d)$, esiste unica $u \in C_t Y_x([-T, T] \times \mathbb{R}^d)$ soluzione locale al problema;
2. la mappa $u_0 \mapsto u$ è continua.

Il problema risulta ben posto globalmente se la soluzione è estendibile a una $u \in C_t Y_x(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ globale.

Osservazione. In generale, il problema della buona positura globale è decisamente più complesso. Di seguito si vedrà come, per stabilire un simile risultato, saranno determinanti assunzioni aggiuntive, quali la piccolezza del dato iniziale e particolari leggi di conservazione.

Infine, si anticipa come nello studio delle equazioni dispersive non lineari si delineino in modo ricorrente tre possibili comportamenti della soluzione. Dipendentemente dal setting funzionale, si costituirà un particolare parametro di non linearità, definito a posteriori "critico", che farà da spartiacque per la buona positura del problema. Infatti, all'aumentare di tale variabile, ci si aspetterà che il carattere non lineare prevalga sul termine L , causando comportamenti patologici e singolarità, mentre al suo diminuire al di sotto della soglia critica seguirà una maggiore regolarità. La prima situazione sarà quindi detta "supercritica" e la seconda "subcritica". In merito al caso "critico", la comprensione della natura finale della soluzione dipenderà molto dalle proprietà del dato iniziale.

3.2 Buona positura in L_x^2 .

Nella seguente sezione, si affronterà l'equazione di Schrödinger non lineare, discutendo l'esistenza e l'unicità locale delle sue soluzioni. Il problema di Cauchy che sarà oggetto di studio è il seguente

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \mu |u|^{p-1} u \\ u(0, x) = u_0(x) \in L_x^2(\mathbb{R}^d), \end{cases} \quad (3.2)$$

che definisce l'equazione di Schrödinger non lineare (NLS). L'esponente $1 < p < \infty$ è fissato e definisce la potenza della non linearità dell'equazione, mentre $\mu \in \{-1, 1\}$ ne determina il carattere, ovvero *defocusing* o *focusing* rispettivamente.

La scelta di porre come termine forzante $F(u) = \mu|u|^{p-1}u$, dettata dalle necessità imposte dai modelli fisici applicativi, apporta all'equazione importanti proprietà, come simmetrie e invarianze (le quali, grazie al teorema di Noether, permettono di stabilire utili leggi di conservazione). Grazie ai numerosi parametri, la dimensione d , la potenza p , il segno μ e la regolarità s , l'equazione NLS (3.2) è uno dei modelli di perturbazione dell'equazione di Schrödinger al contempo più semplici e più versatili, risultando molto efficace nel descrivere fenomeni dai più svariati comportamenti. Normalmente, tale studio avviene costruendo processi iterativi basati sulla formula di Duhamel

$$\begin{cases} u^{(0)}(t) = u_0 \\ u^{(n)}(t) = u_0 + \int_0^t F(u^{(n-1)}(s)) ds, \end{cases}$$

generando così una successione approssimante, convergente alla soluzione reale.

Inoltre, simili argomenti iterativi applicati all'equazione NLS (3.2) permettono di utilizzare ancora, in modo indiretto, le stime di Strichartz ricavate precedentemente dallo studio dell'equazione di Schrödinger al caso lineare.

Per poter enunciare alcuni teoremi di esistenza locale e globale del problema (3.2), si dà di seguito una definizione più rigorosa del concetto di *buona positura*, relativamente allo spazio $C_t L_x^2([-T, T] \times \mathbb{R}^d)$, ambiente funzionale naturale per il propagatore di Schrödinger $e^{it\Delta}$.

Definizione 3.2 (Buona positura in L_x^2).

Il problema di Cauchy (3.2) si dice *localmente ben posto* in $L_x^2(\mathbb{R}^d)$ se per ogni $u_0^* \in L_x^2(\mathbb{R}^d)$, esiste un tempo $T > 0$ e una palla aperta B in $L_x^2(\mathbb{R}^d)$ contenente u_0^* , e un sottoinsieme X di $C_t^0 L_x^2([-T, T] \times \mathbb{R}^d)$, tali che per ogni $u_0 \in B$, esiste un'unica soluzione forte $u \in X$ all'equazione integrale

$$u(t) = e^{it\Delta}u_0 - i\mu \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^{p-1}u(s) ds \quad (3.3)$$

e tali che, inoltre, la mappa $u_0 \rightarrow u$ sia continua da B , con la topologia di L_x^2 , a X , con la topologia di $C_t^0 L_x^2([-T, T] \times \mathbb{R}^d)$.

Se T può essere scelto arbitrariamente grande, la buona positura si dice *globale*.

Si può ora procedere con risultati concreti di buona positura in L_x^2 per l'equazione NLS, dove emergerà l'importanza dell'esponente p di non linearità e la grandezza in norma del dato iniziale.

Teorema 3.1 (Caso critico – dato iniziale piccolo).

Siano $p_c = 1 + \frac{4}{d}$ e $\mu = \pm 1$. Se $u_0 \in L_x^2(\mathbb{R}^d)$ è tale che $\|u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$, per ε

sufficientemente piccolo, allora il sistema NLS (3.2) è globalmente ben posto in L_x^2 . Ovvero, se $\varepsilon \ll 1$, per ogni $u_0 \in B_\varepsilon = \{u_0 \in L_x^2(\mathbb{R}^d) : \|u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon\}$, esiste un'unica soluzione forte u a (3.2) in uno spazio $X = L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \cap C_t^0 L_x^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \subset C_t^0 L_x^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. Inoltre, la mappa $u_0 \rightarrow u$ da B_ε a X è continua.

Dimostrazione.

Un modo per dimostrare l'esistenza e l'unicità globale della soluzione u di dato iniziale u_0 è utilizzare un argomento di tipo iterativo, applicando il teorema delle contrazioni.

Dunque, l'obiettivo consiste nel provare che la mappa di Duhamel

$$\Phi(v) = e^{it\Delta}u_0 - i\mu \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |v(s)|^{p-1}v(s) ds, \quad (3.4)$$

è una contrazione su un qualche spazio della forma $L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ con (q, r) ammissibili, e per farlo useremo le stime di Strichartz. In tal modo, mostreremo l'esistenza di un unico il punto u tale che $\Phi(u) = u$ e ciò implicherà, dal Teorema 2.2, che u sarà soluzione dell'equazione di Schrödinger non lineare (3.2).

Si consideri quindi $X = C_t^0 L_x^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \cap L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, sul quale la mappa Φ è evidentemente continua.

Prendendo (q, r) e (\tilde{q}, \tilde{r}) due coppie di esponenti ammissibili, dalle stime di Strichartz nel Teorema 2.8, si ha

$$\|\Phi(v)\|_{L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \lesssim \|u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} + \|\mu|v|^{p-1}v\|_{L^{\tilde{q}'} L^{\tilde{r}'}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d).$$

Esplicitando il secondo termine, si ottiene

$$\|\mu|v|^{p-1}v\|_{L^{\tilde{q}'} L^{\tilde{r}'}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) = \| |v|^p \|_{L^{\tilde{q}'} L^{\tilde{r}'}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) = \|v\|_{L^{\tilde{q}'p} L^{\tilde{r}'p}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)^p.$$

Dovendo costruire una contrazione sullo spazio X , è naturale imporre che

$$q = \tilde{q}'p, \quad r = \tilde{r}'p.$$

Unendo a tali equazioni le condizioni di ammissibilità delle coppie (q, r) e (\tilde{q}, \tilde{r}) , si ha il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{\tilde{q}} & \frac{d}{2} = \frac{2}{q} + \frac{d}{r} \\ \frac{p}{r} = 1 - \frac{1}{\tilde{r}} & \frac{d}{2} = \frac{2}{\tilde{q}} + \frac{d}{\tilde{r}} \\ q, \tilde{q} \in (2, \infty] \\ r, \tilde{r} \in \left[2, \frac{2d}{d-2}\right) \quad \text{con } r, \tilde{r} \neq \infty. \end{cases} \quad (\star)$$

Manipolando come segue le due equazioni in cui compare p

$$2 \times \left(\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{\tilde{q}} \right) + d \times \left(\frac{p}{r} = 1 - \frac{1}{\tilde{r}} \right),$$

si ricava

$$p \left(\frac{2}{q} + \frac{d}{r} \right) = 2 + d - \left(\frac{2}{\tilde{q}} + \frac{d}{\tilde{r}} \right)$$

e infine, sostituendo le condizioni di ammissibilità degli esponenti,

$$p = 1 + \frac{4}{d} = p_c.$$

Riassumendo, se $p = p_c = 1 + \frac{4}{d}$ e (q, r) sono ammissibili, vale la condizione

$$\|\Phi(v)\|_{L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \lesssim \|u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} + \|v\|_{L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)}^p,$$

da cui, grazie alla nota disuguaglianza

$$\| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \| \lesssim_p |u - v| (|u|^{p-1} + |v|^{p-1}),$$

discende che

$$\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|_{L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \lesssim (\|v_1\|_{L^q L^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} + \|v_2\|_{L^q L^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)})^{p-1} \|v_1 - v_2\|_{L^q L^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)}.$$

Considerando una palla $B = B_M \subset X$, segue

$$\|\Phi(v)\|_{L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \lesssim \|u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} + M^p, \quad \forall v \in B.$$

Dunque, se M e $\|u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$ sono sufficientemente piccoli, allora $\Phi : B \rightarrow B$ e, da quanto ricavato sopra

$$\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|_{L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \lesssim M^{p-1} \|v_1 - v_2\|_{L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)}.$$

Prendendo M opportunamente piccolo, la mappa Φ è una contrazione e dunque esiste unico $u \in X = C_t L_x^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \cap L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ risolvente (3.2).

Infine, si noti che, avendo costruito Φ di modo che fosse una contrazione, è automaticamente garantita la continuità della mappa $u_0 \mapsto u$, essendo Φ lipschitziana. \square

Osservazione. L'esponente $p_c = 1 + \frac{4}{d}$, che compare esplicitamente dai conti della dimostrazione, si dirà *esponente critico*.

Osservazione. Si noti che per ogni $d \geq 2$, dato $p = 1 + \frac{4}{d}$, è sempre possibile trovare le coppie (q, r) e (\tilde{q}, \tilde{r}) risolvienti il sistema (\star) .

Il teorema precedente evidenzia come, per stabilire l'esistenza globale della soluzione, sia necessario imporre un forte controllo sul dato iniziale. Nel *caso subcritico*, ovvero per $p < 1 + \frac{4}{d} = p_c$, invece, è possibile avere soluzioni locali senza dover richiedere alcuna condizione sulla norma di u_0 . Enunciamo di seguito tale risultato e rimandiamo a [2] per ulteriori approfondimenti.

Teorema 3.2 (Caso subcritico).

Siano p un esponente tale che $1 < p < p_c = 1 + \frac{4}{d}$ e $\mu = \pm 1$. Allora il sistema NLS (3.2) è localmente ben posto in L_x^2 .

Ovvero, $\forall M > 0$, esiste un $T = T(d, p, M) > 0$ tale che per ogni $u_0 \in B_M = \{u_0 \in L_x^2(\mathbb{R}^d) : \|u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} < M\}$, esiste unica u soluzione forte a (3.2) in uno spazio $X = L_t^q L_x^p([-T, T] \times \mathbb{R}^d) \cap C_t^0 L_x^2([-T, T] \times \mathbb{R}^d) \subset C_t^0 L_x^2([-T, T] \times \mathbb{R}^d)$. Inoltre, la mappa $u_0 \rightarrow u$ da B_ε a X è continua.

Dimostrazione.

Il risultato segue modificando l'argomento del teorema precedente: l'obiettivo è, come prima, rendere la mappa di Duhamel (3.4) una contrazione su uno spazio misto di Lebesgue.

Fissati M e $p < p_c$, sia imposto il sistema (\star) per trovare le coppie (q, r) e (\tilde{q}, \tilde{r}) .

Tuttavia, in questo caso

$$\tilde{q}'p < \tilde{q}'p_c = q, \quad \tilde{r}'p < \tilde{r}'p_c = r,$$

ovvero, la coppia $(\tilde{q}'p, \tilde{r}'p)$ non è ammissibile. Certamente, però, è possibile ricavarne un'altra ammissibile, (q_1, r_1) , con

$$q_1 > \tilde{q}'p, \quad r_1 = \tilde{r}'p,$$

di modo che, similmente a quanto ottenuto sopra

$$\begin{aligned} \|\Phi(v)\|_{L_t^{q_1} L_x^{r_1}([-T, T] \times \mathbb{R}^d)} &\lesssim \|u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} + \|v\|_{L_t^{\tilde{q}'p} L_x^{r_1}([-T, T] \times \mathbb{R}^d)}^p \\ &\lesssim \|u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} + T^\sigma \|v\|_{L_t^{q_1} L_x^{r_1}([-T, T] \times \mathbb{R}^d)}^p. \quad [\text{H\"older in } t] \end{aligned}$$

Quindi, $\forall v_1, v_2 \in B_M = \{u_0 \in L_x^2(\mathbb{R}^d) : \|u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} < M\}$, si ha

$$\begin{aligned} \|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|_{L_t^{q_1} L_x^{r_1}([-T, T] \times \mathbb{R}^d)} &\lesssim \\ &\lesssim T^\sigma (\|v_1\|_{L_t^{q_1} L_x^{r_1}([-T, T] \times \mathbb{R}^d)} + \|v_2\|_{L_t^{q_1} L_x^{r_1}([-T, T] \times \mathbb{R}^d)})^{p-1} \|v_1 - v_2\|_{L_t^{q_1} L_x^{r_1}([-T, T] \times \mathbb{R}^d)} \\ &\lesssim T^\sigma M^{p-1} \|v_1 - v_2\|_{L_t^{q_1} L_x^{r_1}([-T, T] \times \mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Dunque, scegliendo T sufficientemente piccolo, Φ è una contrazione e la conclusione segue come dal teorema precedente. \square

Osservazione. Si noti che il tempo T , individuato nella dimostrazione precedente, può essere esteso riapplicando il teorema al problema di dato iniziale $u_1(x) = u(T, x)$. Tale processo può essere ripetuto fintanto che la norma della soluzione rimane finita, avendo quindi due possibilità: o il tempo massimale così ottenuto è $T^* = +\infty$ (buona positura globale) o $\|u\|_{L_t^\infty L_x^2([-T^*, T^*] \times \mathbb{R}^d)} = +\infty$.

Osservazione. Le due dimostrazioni appena presentate seguono lo stesso tipo di argomento, tuttavia vi è una sostanziale differenza che distingue il caso critico da quello subcritico. Infatti, in quest'ultima situazione, grazie alla disuguaglianza di Hölder, otteniamo un coefficiente T^σ da utilizzare per la costruzione della contrazione Φ . Invece, con un simile approccio nel caso critico, σ risulta nullo e dunque, non disponendo di tale fattore di riduzione, è necessario agire direttamente sulla norma del dato iniziale e imporla sufficientemente piccola perché si abbia ancora una contrazione.

Inoltre, si noti che il segno μ non ha giocato alcun ruolo: ciò è dovuto al fatto che con dati iniziali o tempi molto piccoli, μ non riesce ad influenzare significativamente l'evoluzione della soluzione. Tuttavia ciò non vale in generale: infatti, si vedrà nella prossima sezione un esempio emblematico in cui tale parametro può essere responsabile di cattiva positura.

3.3 Un esempio di cattiva positura.

Finora abbiamo visto risultati di buona positura; vi sono però anche casi in cui invece non è possibile stabilire condizioni di esistenza e unicità per il problema dato, e in simili contesti si parla di "cattiva positura". Ciò che accade è che la soluzione "esplode", ovvero le sue norme tendono all'infinito in un tempo finito, causando la non esistenza della soluzione.

Un classico risultato di cattiva positura, ad esempio, si può ottenere con il *metodo di Glassey* [5], sfruttando una nuova definizione di energia al caso non lineare e la cosiddetta identità viriale.

Definizione 3.3 (Energia).

Sia $u \in C_t^0 H_x^1((-T, T) \times \mathbb{R}^d)$ una soluzione di (3.2). Si definisce l'*energia* $E(t)$ come

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t, x)|^2 dx + \mu \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^{p+1} dx .$$

Osservazione. Con un calcolo diretto, si verifica che l'energia $E(t)$ si conserva nel tempo, ovvero $E(t) = E(0)$, per ogni $t \in (-T, T)$. Inoltre, tale quantità è finita essendo u in H_x^1 .

Teorema 3.3 (Identità viriale).

Sia $u_0 \in H_x^1(\mathbb{R}^d)$ tale che $|x|u_0(x) \in L_x^2(\mathbb{R}^d)$. Sia $u \in C_t^0 H_x^1((-T, T) \times \mathbb{R}^d)$ una soluzione locale di (3.2) e sia definita la quantità

$$V(t) := \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 |u(t, x)|^2 dx, \quad (3.5)$$

per $t \in (-T, T)$. Allora, valgono le seguenti identità:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 4\Im \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla u \cdot x) \bar{u} dx, \\ \frac{d^2V}{dt^2} &= 8 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t, x)|^2 dx + \mu \frac{4d(p-1)}{p+1} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^{p+1} dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

In particolare, per $p = 1 + \frac{4}{d}$, risulta

$$\frac{d^2V}{dt^2} = 8 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t, x)|^2 dx + \mu \frac{16}{p+1} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^{p+1} dx = 16E(t).$$

Dimostrazione.

Preliminarmente, si moltiplichino l'equazione NLS

$$i\partial_t u + \Delta u = \mu |u|^{p-1} u$$

per $2\bar{u}$ e, considerando la parte immaginaria, si ottiene

$$\frac{d}{dt} |u|^2 = -2\Im(\bar{u} \Delta u) = -2\nabla \cdot (\Im \bar{u} \nabla u).$$

Moltiplicando quanto appena ottenuto per $|x|^2$ e integrando per parti in x il termine di destra, segue la prima relazione enunciata.

Per dimostrare la seconda equazione (3.6), si procede moltiplicando l'equazione NLS per $2(x \cdot \nabla \bar{u})$, ottenendo quindi

$$2i(x \cdot \nabla \bar{u}) \partial_t u + 2(x \cdot \nabla \bar{u}) \Delta u = 2\mu(x \cdot \nabla \bar{u}) |u|^{p-1} u.$$

Integrando tale espressione su \mathbb{R}^d e considerando la parte reale, si ricava

$$2\Re \int_{\mathbb{R}^d} i(x \cdot \nabla \bar{u}) \partial_t u dx = -2\Re \int_{\mathbb{R}^d} (x \cdot \nabla \bar{u}) \Delta u dx + 2\Re \int_{\mathbb{R}^d} \mu(x \cdot \nabla \bar{u}) |u|^{p-1} u dx.$$

Tale scrittura può essere raggruppata come

$$I = II + III,$$

dove

$$\begin{aligned} \text{I} &= 2\Re \int_{\mathbb{R}^d} i(x \cdot \nabla \bar{u}) \partial_t u \, dx , \\ \text{II} &= -2\Re \int_{\mathbb{R}^d} (x \cdot \nabla \bar{u}) \Delta u \, dx , \\ \text{III} &= 2\Re \int_{\mathbb{R}^d} \mu(x \cdot \nabla \bar{u}) |u|^{p-1} u \, dx . \end{aligned}$$

Manipolando il primo termine, si ha

$$\begin{aligned} \text{I} &= \Re \int_{\mathbb{R}^d} i \sum_{j=1}^d x_j (\partial_j \bar{u} \partial_t u - \partial_j u \partial_t \bar{u}) \, dx \\ &= \Re \int_{\mathbb{R}^d} i \sum_{j=1}^d x_j \left(\frac{\partial}{\partial t} (\partial_j \bar{u} u) - \frac{\partial}{\partial x_j} (u \partial_t \bar{u}) \right) \, dx \\ &= \frac{d}{dt} \Re \int_{\mathbb{R}^d} i(x \cdot \nabla \bar{u}) u \, dx + d \Re \int_{\mathbb{R}^d} i u \partial_t \bar{u} \, dx . \end{aligned}$$

Dunque, sostituendo l'equazione NLS, in quanto appena ottenuto, segue che

$$\text{I} = \frac{d}{dt} \Im \int_{\mathbb{R}^d} (x \cdot \nabla u) \bar{u} \, dx - d \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \, dx - d \int_{\mathbb{R}^d} \mu |u|^{p+1} \, dx .$$

Integrando per parti il termine II, si ottiene

$$\text{II} = (2 - d) \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \, dx ,$$

mentre per quanto riguarda III, si ha

$$\text{III} = \mu \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} x_j |u|^{p-1} (2 \Re \partial_j \bar{u} u) \, dx .$$

Osservando che

$$|u|^{p-1} (2 \Re \partial_j \bar{u} u) = \frac{2}{p+1} \partial_j |u|^{p+1} ,$$

integrando per parti il termine III, risulta

$$\text{III} = -\mu \frac{2d}{p+1} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p+1} \, dx .$$

Infine, da $\text{I} = \text{II} + \text{III}$, si ricava

$$\frac{d}{dt} \Im \int_{\mathbb{R}^d} (x \cdot \nabla u) \bar{u} \, dx = 2 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \, dx + \mu d \frac{p-1}{p+1} ,$$

e dunque, essendo

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = \frac{d}{dt} 4 \Im \int_{\mathbb{R}^d} (x \cdot \nabla u) \bar{u} \, dx ,$$

segue la tesi. \square

Possiamo ora enunciare il teorema di Glassey per la cattiva positura dell'equazione di Schrödinger non lineare.

Teorema 3.4 (Caso supercritico – dato iniziale in H_x^1).

Siano $u_0 \in H_x^1(\mathbb{R}^d)$ tale che $|x|u_0(x) \in L_x^2(\mathbb{R}^d)$, $p \geq p_c = 1 + \frac{4}{d}$ e $\mu = -1$. Allora, esiste C_0 tale che, per ogni $C \geq C_0$, il sistema NLS (3.2) di dato iniziale Cu_0 ha soluzione unica $u \in C_t H_x^1((-T, T) \times \mathbb{R}^d)$ che esplosa in tempo finito.

Dimostrazione.

Dalla sua stessa definizione (3.5), è chiaro che la quantità $V(t)$ è positiva per ogni $t \in \mathbb{R}^d$. Poiché $\mu = -1$ e $p \geq 1 + \frac{4}{d}$, dall'identità viriale (3.6) segue che

$$\frac{d^2 V}{dt^2} \leq 8 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t, x)|^2 dx - \frac{16}{p+1} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^{p+1} dx = 16E(t).$$

Dalla conservazione dell'energia, sostituendo il dato iniziale Cu_0 , si ottiene

$$E(t) = E(0) = \frac{C^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_0(x)|^2 dx - \frac{C^{p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x)|^{p+1} dx.$$

Ora, prendendo C sufficientemente grande, si ha

$$\frac{d^2 V}{dt^2} \leq 16E(0) < 0.$$

Ovvero, risultando concava, $V(t)$ dovrebbe assumere valori negativi in un tempo finito T^* , e ciò prova esattamente che in quel tempo T^* la soluzione cessa di esistere. \square

Osservazione. I tre teoremi riguardo la buona positura dell'equazione NLS mostrano in modo significativo uno schema che vale più in generale per le PDE dispersive non lineari: infatti, si vede l'emergere di un esponente p_c critico che tripartisce le casistiche del problema:

- (i) se $p < p_c$, non è, tendenzialmente, difficile ricavare dei risultati di buona positura, almeno locale, e ciò motiva la definizione di tali esponenti come "subcritici".
- (ii) se $p = p_c$, lo studio risulta spesso complicato e solitamente per avere un problema ben posto sono necessarie ipotesi aggiuntive sul dato iniziale.
- (iii) se $p > p_c$, ovvero supercritico, in alcuni casi è possibile dimostrare esplicitamente che non solo non sia possibile stabilire l'esistenza e l'unicità della soluzione, ma che anzi quest'ultima esplosa e che, appunto, il problema soffra di cattiva positura.

Appendice A

Complementi.

In questa sezione è enunciato solamente il teorema di interpolazione di Riesz-Thorin: per la relativa dimostrazione e ulteriori approfondimenti si veda [6]. La forza di tale risultato risiede nel fatto che provare certe proprietà in due casi particolari (e sperabilmente più semplici) permette facilmente di dedurre per convessità, come si vede in figura, quelli rimanenti.

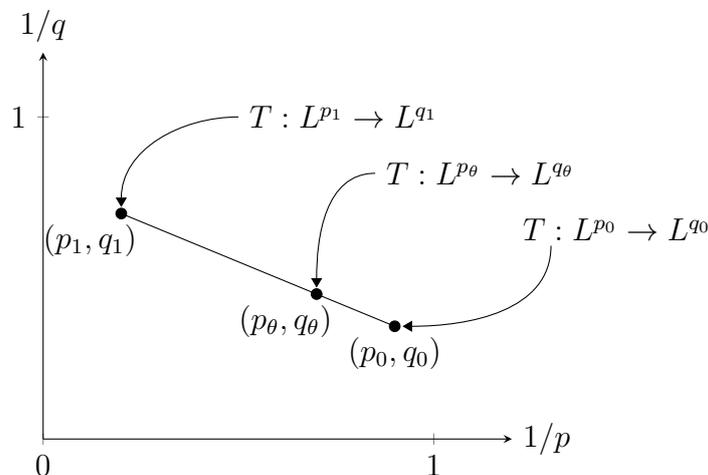
Teorema A.1 (Teorema di interpolazione di Riesz-Thorin).

Siano (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, ν) spazi σ -finiti. Siano $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ e $T : L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu) \rightarrow L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$ un operatore lineare tale che

$$\begin{cases} \|T\phi\|_{L^{q_0}} \leq M_0 \|\phi\|_{L^{p_0}}, & \forall \phi \in L^{p_0}(\mu) \\ \|T\phi\|_{L^{q_1}} \leq M_1 \|\phi\|_{L^{p_1}}, & \forall \phi \in L^{p_1}(\mu) \end{cases} \quad \text{con } M_0, M_1 > 0 \text{ costanti.}$$

Per $0 < \theta < 1$, siano p_θ, q_θ definiti da $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ e $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$. Allora

$$\|T\phi\|_{L^{q_\theta}} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|\phi\|_{L^{p_\theta}}, \quad \forall \phi \in L^{p_\theta}(\mu).$$



Bibliografia

- [1] H. Brezis, *Analisi funzionale: teoria e applicazioni*, Masson Editeur, 1983.
- [2] T. Cazenave e F.B. Weissler, *Some remarks on the nonlinear schrödinger equation in the critical case*, Nonlinear Semigroups, Partial Differential Equations and Attractors, Springer Berlin Heidelberg, 1989, pp. 18–29.
- [3] E. Di Nezza e G. Palatucci e E. Valdinoci, *Hitchhiker’s guide to the fractional sobolev spaces*, Bulletin des Sciences Mathématiques **136** (2012), 521–573.
- [4] J. Ginibre e G. Velo, *Smoothing properties and retarded estimates for some dispersive evolution equations*, Communications in Mathematical Physics **144** (1992), 163 – 188.
- [5] R.T. Glassey, *On the blowing up of solutions to the cauchy problem for nonlinear schrödinger equations*, Journal of Mathematical Physics **18** (1977), 1794–1797.
- [6] E.M. Stein, *Interpolation of linear operators*, Transactions of the American Mathematical Society **83** (1956), 482–492.
- [7] ———, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, 2016.
- [8] R.S. Strichartz, *Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations*, Duke Mathematical Journal **44** (1977), 705 – 714.
- [9] T. Tao, *Nonlinear dispersive equations: local and global analysis*, American Mathematical Soc., 2006.