

# **Analisi di stabilità per sistemi non lineari**

**Relatore: prof. Mauro BISIACCO**

**Laureando: Massimiliano ZANATO**

**Corso di laurea: Ingegneria dell'Informazione**

**Anno Accademico 2010/2011**



# INDICE

Introduzione	p.1
<b>1. <u>Punto di equilibrio</u></b>	
Definizione e esempi	p.3
Stabilità e convergenza di un punto all'equilibrio	p.4
<b>2. <u>Stabilità dei sistemi lineari</u></b>	
Evoluzione libera e stati di equilibrio	p.5
Criteri di stabilità e convergenza per un sistema lineare	p.6
<b>3. <u>Introduzione al criterio di Lyapunov</u></b>	
Funzioni (semi)definite positive (negative)	p.8
Costruzione della funzione di Lyapunov	p.9
<b>4. <u>Criterio di Lyapunov</u></b>	
Enunciato e dimostrazione del Criterio di Lyapunov	p.10
Applicazione fisica: pendolo semplice	p.12
Simulazioni con Simulink del pendolo semplice.	p.13
<b>5. <u>Criterio di Krasowskii</u></b>	
Enunciato e dimostrazione del Criterio di Krasowskii	p.16
<b>6. <u>Criterio di instabilità di Lyapunov</u></b>	
Enunciato del Criterio di instabilità di Lyapunov	p.17
<b>7. <u>Equazione di Lyapunov e analisi della stabilità</u></b>	
Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità asintotica	p.18
<b>8. <u>Il modello preda-predatore di Lotka-Volterra</u></b>	
Illustrazione matematica del modello di Lotka-Volterra	p.19
Simulazioni con Simulink del modello di Lotka-Volterra	p.21
<b><u>APPENDICE A</u></b>	
Insieme invariante, punto limite, insieme limite	p.26
Teorema dell'insieme limite	p.27
<b><u>APPENDICE B - Bibliografia</u></b>	
Bibliografia	p.28



## **INTRODUZIONE**

All'interno della tesi verrà trattato il tema della stabilità di un punto di equilibrio, con particolare riferimento ai metodi di caratterizzazione validi per sistemi non lineari.

Per semplicità e chiarezza espositiva la scelta è stata quella di trattare unicamente sistemi continui autonomi, ovvero con ingresso nullo.

Partendo dalla definizione di punto (o stato) di equilibrio per un sistema non lineare autonomo, vengono introdotti i concetti di stabilità e convergenza.

Vengono poi presentati numerosi teoremi che caratterizzano la stabilità e la convergenza nel caso di un sistema lineare.

Successivamente verrà posta attenzione al caso non lineare, dapprima con la costruzione di una funzione  $V$  che sia una "funzione di Lyapunov", e successivamente con l'enunciato e la dimostrazione di due teoremi fondamentali: il Criterio di Lyapunov per quanto riguarda la stabilità e il Criterio di Krasowskii per quanto concerne la convergenza di un sistema non lineare.

Introdurremo a titolo esemplificativo il caso del pendolo semplice, analizzando la stabilità dei suoi punti di equilibrio attraverso il Criterio di Lyapunov e riportando alcuni grafici realizzati con il simulatore "Simulink" del pacchetto Matlab.

Infine verrà citato, senza dimostrarlo, il Criterio di instabilità di Lyapunov, che rappresenta un metodo per determinare con certezza l'instabilità di un punto di equilibrio per un sistema non lineare.

Dopo aver introdotto, senza dimostrazione, un metodo per la costruzione di una funzione di Lyapunov per sistemi lineari, verrà analizzato il modello di Lotka-Volterra, nel quale si troveranno due punti di equilibrio, uno dei quali risulterà instabile secondo il Criterio di instabilità di Lyapunov, mentre l'altro risulterà stabile.



## 1 . PUNTO DI EQUILIBRIO

Consideriamo un sistema non lineare autonomo continuo, cioè ad ingresso nullo, descritto dal modello di stato

$$(1.1) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

che nel caso di  $\Sigma$  lineare diventa

$$(1.2) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = F\mathbf{x}(t)$$

Definiamo **punto o stato di equilibrio** "uno stato  $\mathbf{x}_e$  tale per cui se esso è lo stato iniziale del sistema (cioè  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_e$ ), accade che  $\forall t \geq 0 \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e$ "

Rifacendoci alla (1.1) la definizione di punto di equilibrio si traduce nel fatto che sia verificata

$$(1.3) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = 0$$

Consideriamo ora un sistema invariante non autonomo descritto dal modello di stato

$$(1.4) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

e dimostriamo come nella ricerca dei punti di equilibrio sia possibile ricondursi a sistemi invarianti autonomi corrispondenti.

Ipotizziamo per semplicità che il sistema (1.4) sia controllato dall'ingresso costante  $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$ . Per ogni valore di  $t$  consideriamo la seguente trasformazione della  $\tilde{\mathbf{f}}$

$$(1.5) \quad \mathbf{f}(\bullet) = \tilde{\mathbf{f}}(\bullet, \bar{\mathbf{u}}) : X \rightarrow X : \mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}})$$

Attraverso la (1.5) ci siamo ricondotti dalla  $\tilde{\mathbf{f}}$  alla  $\mathbf{f}$ , e quindi ad un sistema invariante autonomo descritto dalla (1.1)

---

### **ESEMPIO 1:**

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua, con  $f(-2) \geq 0$  e  $f(3) \leq 0$ . Verifichiamo che il sistema del primo ordine  $\dot{x} = f(x)$  ha almeno un punto di equilibrio nell'intervallo  $[-2, 3]$

#### DIMOSTRAZIONE:

Poiché  $f$  è una funzione continua ed assume segno opposto agli estremi dell'intervallo chiuso  $[-2, 3]$ , per il teorema degli zeri esiste un punto  $\bar{x}$  tale per cui  $f(\bar{x}) = 0$  e questa è esattamente la condizione di equilibrio (1.3). //

## ESEMPIO 2:

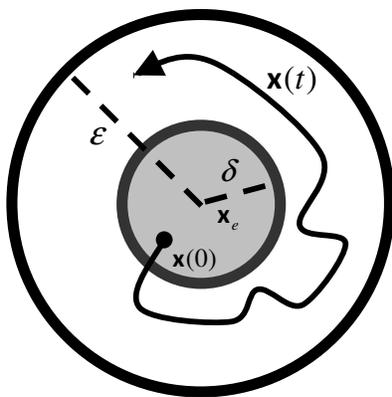
Consideriamo un sistema del primo ordine  $\dot{x} = f(x)$ , con  $f$  continua e tale da garantire l'unicità della soluzione per ogni stato iniziale assegnato. Verifichiamo che nessuna soluzione  $x(\bullet)$  può presentare oscillazioni (cioè nessuna soluzione può essere strettamente crescente su un intervallo e decrescente su un altro)

### DIMOSTRAZIONE:

Neghiamo per assurdo la tesi. Ciò significa quindi che per uno stesso valore di  $x = \bar{x}$  la derivata  $\dot{x}$  assumerebbe talvolta valore positivo (nei tratti in salita) e talvolta valore negativo (nei tratti in discesa) e quindi anche la  $f$ . Questo è assurdo perché abbiamo ipotizzato che la  $f$  garantisca l'unicità della soluzione e quindi se  $x(0) = \bar{x}$  la corrispondente soluzione o sale o scende, non può fare entrambe le cose. //

Introduciamo ora due concetti fondamentali che sono la stabilità e la convergenza di un punto di equilibrio.

A livello dell'intuizione, definiamo un punto di equilibrio **stabile** nel caso in cui un piccolo



scostamento dello stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$  da  $\mathbf{x}_e$  implichi che i punti della traiettoria perturbata siano tutti prossimi a  $\mathbf{x}_e$  e che, riducendo opportunamente lo scostamento, si possa ridurre a piacere l'intorno contenente la traiettoria perturbata.

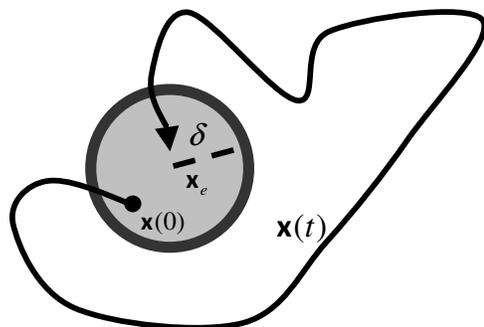
Formalmente la stabilità di un punto di equilibrio implica che  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  ( $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ ) tale che

$$(1.6) \quad \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_e\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

dove con  $\mathbf{x}(t)$  indichiamo gli stati per  $t \geq 0$  della traiettoria con origine in  $\mathbf{x}(0)$ .

In altre parole se  $\mathbf{x}(0)$  è interno a  $I_\delta$  (intorno più piccolo di raggio  $\delta$ ), allora la traiettoria  $\mathbf{x}(t)$  sarà completamente contenuta in  $I_\varepsilon$

Introduciamo, sempre a livello dell'intuizione, il concetto di equilibrio **convergente**, che è indipendente dall'idea di stabilità descritta dalla (1.6). Definiamo un punto di equilibrio **convergente** se  $\mathbf{x}_e$  funge da



attrattore asintotico per ogni traiettoria perturbata con inizio in  $\mathbf{x}(0)$  abbastanza prossimo a  $\mathbf{x}_e$ .

Formalmente la convergenza di un punto di equilibrio implica che  $\exists \delta > 0$  ( $\delta \in \mathbb{R}$ ) tale che

$$(1.7) \quad \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_e\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e$$

Con maggiore precisione possiamo dire che la (1.7) introduce un concetto di **convergenza locale**, in quanto  $\mathbf{x}(0)$  viene preso in un intorno limitato di  $\mathbf{x}_e$ .

Vedremo nel prossimo paragrafo che per i sistemi lineari l'eventuale convergenza in un punto è sempre **globale**, ovvero per ogni punto dello spazio  $\mathbb{R}^n$  da cui si desidera far partire la traiettoria perturbata vale  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e$

Definiamo infine un punto di equilibrio **asintoticamente stabile** quando è allo stesso tempo stabile e convergente.

## **2 . STABILITÀ DEI SISTEMI LINEARI**

Considerando un sistema lineare continuo descritto dalla (1.2), l'evoluzione libera è espressa dalla relazione

$$(2.1) \quad \mathbf{x}(t) = e^{Ft} \mathbf{x}(0)$$

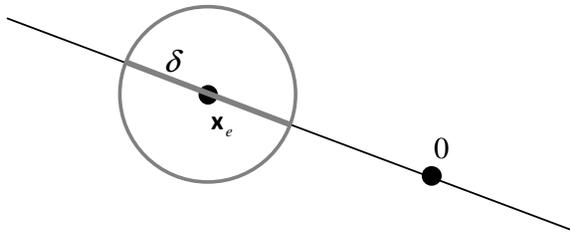
L'insieme  $X_e$  degli stati di equilibrio è un sottospazio dello spazio di stato ed è determinato dalla formula

$$(2.2) \quad X_e = \{\mathbf{x} : F\mathbf{x} = 0\} = \ker F$$

Quando la matrice  $F$  è singolare esistono stati di equilibrio diversi dall'origine. In questo caso  $\dim(\ker F) = \dim U_0$  (autospazio relativo all'autovalore  $\lambda = 0$ ) ha dimensione uguale alla molteplicità geometrica dell'autovalore  $\lambda = 0$ .

Le seguenti proposizioni stabiliscono le regole riguardanti convergenza e stabilità dell'equilibrio nei sistemi lineari

**PROPOSIZIONE:** se il sistema (1.2) ha uno stato di equilibrio convergente questo è necessariamente lo stato zero e nessun altro stato può essere di equilibrio



DIMOSTRAZIONE:

Supponiamo per assurdo che  $\mathbf{x}_e \neq 0$  sia un punto di equilibrio. Allora saranno punti di equilibrio anche tutti i punti della retta  $\alpha \mathbf{x}_e$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ). In questo caso l'equilibrio in  $\mathbf{x}_e$  non può essere convergente perché comunque si scelga un intorno  $I_\delta$  (con  $\delta$  "piccolo"), in tale intorno troviamo altri punti di equilibrio partendo dai quali non si converge in  $\mathbf{x}_e$ . Inoltre in questo caso, per il motivo sopra citato, non può essere convergente l'equilibrio in zero. Pertanto se esiste uno stato di equilibrio convergente questo deve essere necessariamente lo stato zero (cioè  $X_e = \{0\}$ ). //

**PROPOSIZIONE:** l'equilibrio nell'origine è convergente per il sistema (1.2) se e solo se la matrice  $F$  ha tutti gli autovalori con parte reale negativa

DIMOSTRAZIONE:

Ipotizziamo per assurdo che  $F$  possieda almeno un autovalore a parte reale non negativa. Allora almeno un elemento di  $e^{Ft}$  non converge a zero per  $t \rightarrow +\infty$ . Se tale elemento si trova in posizione  $(i, j)$  allora  $\forall \delta \neq 0$  lo stato iniziale  $\mathbf{x}(0) = \delta e_j$  induce un'evoluzione di stato che non converge a  $\mathbf{0}$  e pertanto l'equilibrio in zero non sarà convergente.

Se invece per tutti gli autovalori  $\lambda_i$  di  $F$  vale  $\text{Re}\{\lambda_i\} < 0$  allora ogni elemento di  $e^{Ft}$  converge a zero per  $t \rightarrow +\infty$ . Quindi ogni stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$  porta ad un'evoluzione di stato  $\mathbf{x}(t) = e^{Ft} \mathbf{x}(0)$  convergente a  $\mathbf{0}$  per  $t \rightarrow +\infty$ . //

**PROPOSIZIONE:** l'eventuale convergenza all'equilibrio nell'origine è globale

DIMOSTRAZIONE:

Per la linearità, se  $e^{Ft} \bar{x}$  converge a zero allora lo stesso comportamento lo ha anche  $e^{Ft} (\alpha \bar{x}) \forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Per ogni  $x$  tale che  $\bar{x} = \frac{x}{\alpha}$  in modo tale che sia verificato  $\bar{x} \in I_\delta$ ,  $e^{Ft} \bar{x}$  converge solo se converge anche  $e^{Ft} x$  //

**PROPOSIZIONE:** se il sistema (1.2) possiede un punto di equilibrio stabile, ogni altro punto di equilibrio ha la medesima proprietà di stabilità o instabilità

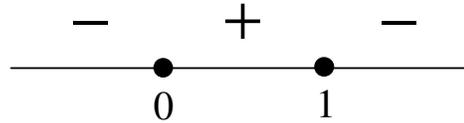
DIMOSTRAZIONE:

Facendo un cambio di variabili  $z = x - x_{eq}$  si riconduce lo studio della stabilità di  $x_{eq}$  allo studio di stabilità dell'origine. Inoltre  $\dot{x} = Fx \Rightarrow \dot{z} = F(x - x_{eq})$  e dalla condizione (1.3) si ottiene  $\dot{z} = Fz$  //

Il senso della ultima proposizione è che nel caso di sistemi lineari, tutti i punti di equilibrio si comportano allo stesso modo. Ciò non vale nel caso di sistemi non lineari come possiamo verificare proponendo un semplice esempio:

**ESEMPIO:**

Consideriamo il seguente sistema non lineare del primo ordine  $\dot{x} = x(1-x)$ . Si individuano facilmente due punti di equilibrio  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$ . Dallo studio del segno della derivata prima si ricava il seguente diagramma dei segni



Pertanto è evidente come l'equilibrio in  $x_1 = 0$  non sia stabile, mentre l'equilibrio in  $x_2 = 1$  lo è



**PROPOSIZIONE:** l'equilibrio nell'origine è stabile se e solo se la matrice  $F$  ha tutti autovalori con parte reale non positiva e gli autovalori con parte reale nulla sono radici semplici del suo polinomio minimo

DIMOSTRAZIONE:

Le condizioni date nella proposizione equivalgono alla limitatezza di  $e^{Ft}$ . Da questa è immediato dedurre la stabilità. Se invece le condizioni non valgono  $e^{Ft}$  è illimitata e si trovano stati iniziali  $x(0)$  tali per cui  $x(t)$  non è limitato //

**PROPOSIZIONE: se l'origine è punto di equilibrio convergente, allora esso è anche stabile e quindi asintoticamente stabile**

DIMOSTRAZIONE:

La convergenza equivale a  $e^{Ft}$  convergente a zero, che significa che  $e^{Ft}$  sia anche limitata e quindi che ci sia anche stabilità //

### **3 . INTRODUZIONE AL CRITERIO DI LYAPUNOV**

Nel metodo proposto da Lyapunov l'analisi della stabilità viene effettuato impiegando l'equazione di stato e opportune funzioni scalari definite nello spazio degli stati, dette appunto **funzioni di Lyapunov**. I criteri di stabilità e instabilità si riconducono essenzialmente all'analisi del segno di queste funzioni e delle loro derivate lungo le traiettorie del sistema.

Ricordiamo in prima battuta la nozione di funzione **definita positiva (negativa) e semidefinita positiva (negativa) in un punto  $x_0$**  :

Sia  $W \subseteq X = \mathbb{R}^n$  un insieme aperto contenente il punto  $x_0$  . Una funzione continua

$V : W \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow V(x)$  è:

- **SEMIDEFINITA POSITIVA** se  $V(x_0) = 0$  ed esiste un intorno  $I(x_0) \subseteq W$  del punto in cui  $V$  assume valori non negativi
- **DEFINITA POSITIVA** se è semidefinita positiva ed esiste un intorno  $I(x_0) \subseteq W$  del punto in cui  $V$  si annulla solo in  $x_0$
- **SEMIDEFINITA NEGATIVA** se  $V(x_0) = 0$  ed esiste un intorno  $I(x_0) \subseteq W$  del punto in cui  $V$  assume valori non positivi
- **DEFINITA NEGATIVA** se è semidefinita negativa ed esiste un intorno  $I(x_0) \subseteq W$  del punto in cui  $V$  si annulla solo in  $x_0$

Di seguito riportiamo alcuni esempi specificando sempre l'insieme in cui la funzione sarà (semi)definita positiva (negativa). Nell'applicazione specifica al Criterio di Lyapunov faremo riferimento esclusivamente all'origine come punto di equilibrio, situazione alla quale è sempre

possibile ricordarsi con una traslazione degli assi coordinati. Pertanto dal paragrafo 4 in poi assumeremo  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$

---

**ESEMPIO:**

(1)  $V : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z, t) \rightarrow V(x, y, z, t) = x^2 + y^4 + z^6 + t^2$  è definita positiva nell'origine

(2)  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow V(x, y) = \frac{x^2 + y^4}{2x^2}$  non è definita positiva nell'origine, in quanto nell'origine non assume un valore ben preciso

(3)  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow V(x, y) = \frac{x^2}{2 + x^4}$  è semidefinita positiva nell'origine. Infatti essa si annulla in  $(0, 0)$  e in tutti i punti appartenenti all'intorno dell'origine del tipo  $(0, y)$

---

Preoccupiamoci ora della costruzione di una funzione  $V$  e della sua derivata  $\dot{V}$  che ci sarà utile per enunciare il Criterio di Lyapunov. Consideriamo il sistema (1.2) e supponiamo la funzione  $\mathbf{f}$  continua. Sia inoltre  $W \subseteq X = \mathbb{R}^n$  un insieme aperto sul quale è definita una funzione scalare continua con le sue derivate prime

$$(3.1) \quad V : W \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{x} \rightarrow V(\mathbf{x})$$

e sia il suo gradiente indicato con

$$(3.2) \quad \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad}V = \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]$$

Consideriamo ora una nuova funzione a valori scalari

$$(3.3) \quad \dot{V} : W \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{x} \rightarrow \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(\mathbf{x}) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(\mathbf{x})$$

Tale funzione rappresenta la derivata della (3.1) rispetto al tempo (derivazione delle funzioni composte, sfruttando il fatto che  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ) ed è continua nell'insieme  $W$  per ipotesi. Sia  $\mathbf{x}(\bullet)$  una generica soluzione della (1.2), allora la funzione composta

$$(3.4) \quad V(\mathbf{x}(\bullet)) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} : t \rightarrow \mathbf{x}(t) \rightarrow V(\mathbf{x}(t))$$

associa ad ogni istante  $t$  il valore di  $V$  nello stato  $\mathbf{x}(t)$ . In altre parole al variare di  $t$  fornisce i valori di  $V$  lungo la traiettoria descritta da  $\mathbf{x}(t)$ . La derivata rispetto al tempo della (3.4) è

$$(3.5) \quad \frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n(t) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(\mathbf{x}(t)) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(\mathbf{x}(t)) = \dot{V}(\mathbf{x}(t))$$

La (3.5) altro non è che la (3.3) valutata nello stato  $\mathbf{x}(t)$  e fornisce la derivata rispetto al tempo della (3.4) lungo la traiettoria (1.2)

#### **4 . CRITERIO DI LYAPUNOV**

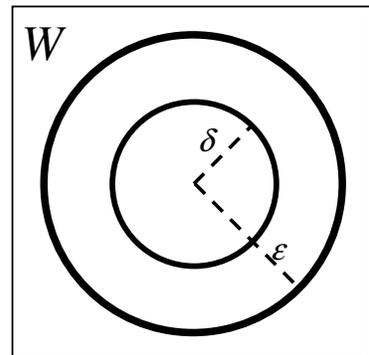
**ENUNCIATO:** Sia  $\mathbf{x} = 0$  punto di equilibrio per il sistema (1.2), sia  $W$  un intorno dell'origine e sia  $V : W \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua con le sue derivate prime in  $W$  e ivi definita positiva.

- a. Se la funzione  $\dot{V} : W \rightarrow \mathbb{R}$  è semidefinita negativa, allora l'origine è punto di equilibrio stabile.
- b. Se invece  $\dot{V}$  è definita negativa allora l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile

DIMOSTRAZIONE (a):

Dimostriamo la prima parte, cioè  $\dot{V}$  semidefinita negativa implica che l'equilibrio in  $\mathbf{0}$  è stabile.

Consideriamo una arbitraria sfera chiusa  $\bar{S}(\mathbf{0}, \varepsilon)$  di centro l'origine e raggio  $\varepsilon$  contenuta in  $W$  e dimostriamo l'esistenza di una sfera  $S(\mathbf{0}, \delta) \subset \bar{S}(\mathbf{0}, \varepsilon)$  tale che ogni movimento del sistema con inizio in  $S(\mathbf{0}, \delta)$  rimanga interamente confinato entro  $\bar{S}(\mathbf{0}, \varepsilon)$ .



Poiché per ipotesi la funzione  $V$  è continua, indicando con  $\partial \bar{S}(\mathbf{0}, \varepsilon) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = \varepsilon\}$  la frontiera della sfera di raggio  $\varepsilon$  (che è un insieme compatto), allora per il Teorema di Weierstrass esisterà un punto su  $\partial \bar{S}(\mathbf{0}, \varepsilon)$  nel quale  $V$  assume il valore minimo. Indicando con  $m$  tale valore, sarà necessariamente  $m > 0$  poiché  $V$  è definita positiva e  $\mathbf{0} \notin \bar{S}(\mathbf{0}, \varepsilon)$ . Poiché  $V$  è continua nell'origine allora esisterà una sfera di raggio  $\delta$  per la quale  $\forall \mathbf{x} \in S(\mathbf{0}, \delta) \Rightarrow 0 < V(\mathbf{x}) < m$ .

Terminata la costruzione dei due intorni sferici, consideriamo ora la traiettoria  $\gamma$  descritta dall'equazione di stato (1.1) e con inizio in  $\mathbf{x}(0) \in S(\mathbf{0}, \delta)$  in cui  $V(\mathbf{x}(0)) < m$ . Poiché questa è una curva continua, se uscisse dall'intorno di raggio  $\varepsilon$  allora dovrebbe intersecare la frontiera  $\partial \bar{S}(\mathbf{0}, \varepsilon)$  in un istante  $t^*$  e per tale valore sarebbe

$$(4.1) \quad V(\mathbf{x}(t^*)) \geq m$$

Ma per ipotesi  $\dot{V}$  è semidefinita negativa quindi  $\forall t \in [0, t^*]$  vale  $\frac{\partial V}{\partial t} \leq 0$  e quindi  $V$  è non crescente lungo la curva  $\gamma$ . Per queste considerazioni possiamo scrivere

$$(4.2) \quad V(\mathbf{x}(t^*)) < m$$

Confrontando (4.1) e (4.2) giungiamo ad un assurdo, pertanto la curva  $\gamma$  rimane confinata entro  $\bar{S}(\mathbf{0}, \varepsilon)$ . //

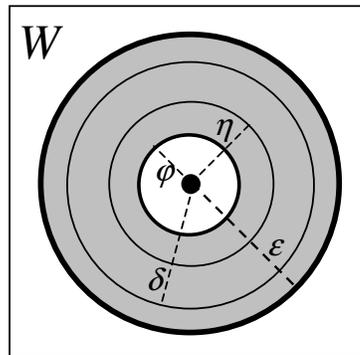
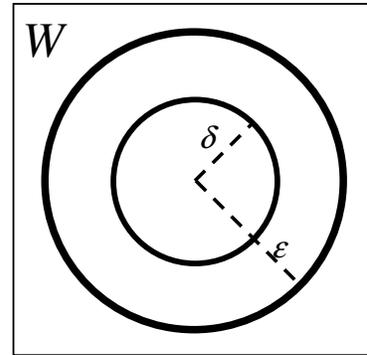
DIMOSTRAZIONE (b):

Utilizziamo la stessa costruzione della dimostrazione del punto a, ovvero consideriamo una sfera chiusa

$\bar{S}(\mathbf{0}, \varepsilon) \subset W$  e una sfera  $S(\mathbf{0}, \delta)$  con  $\delta \leq \varepsilon$  tale per cui

$\forall t \geq 0$  vale  $\mathbf{x}(0) \in S(\mathbf{0}, \delta) \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in \bar{S}(\mathbf{0}, \varepsilon)$ .

Dobbiamo verificare che per ogni movimento con inizio in  $S(\mathbf{0}, \delta)$  converge allo stato  $\mathbf{0}$ , ovvero preso  $\eta$  piccolo a



piacere, considerando  $S(\mathbf{0}, \eta)$  vale

$\forall \mathbf{x}(0) \in S(\mathbf{0}, \delta) \Rightarrow \exists t^* : \mathbf{x}(t) \in S(\mathbf{0}, \eta), \forall t \geq t^*$

Poiché nel punto a abbiamo dimostrato che l'equilibrio nell'origine è stabile allora possiamo associare a  $S(\mathbf{0}, \eta)$

una sfera  $S(\mathbf{0}, \varphi)$  tale che  $\forall t \geq t^*$  vale

$\mathbf{x}(t^*) \in S(\mathbf{0}, \varphi) \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in S(\mathbf{0}, \eta)$ . Si tratta quindi di provare

che esiste  $t^* \geq 0$  tale che  $\mathbf{x}(t) \in S(\mathbf{0}, \varphi)$ .

Consideriamo il compatto  $\bar{S}(\mathbf{0}, \varepsilon) \setminus S(\mathbf{0}, \varphi)$  evidenziato in figura. La funzione continua e definita negativa  $\dot{V}(\bullet)$  ha un massimo negativo  $-\mu < 0$ . Pertanto  $\forall t \geq 0$  sarà

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -\mu < 0 \text{ e potremo scrivere } V(\mathbf{x}(t)) = V(\mathbf{x}(0)) + \int_0^t \dot{V}(\mathbf{x}(\sigma)) d\sigma \leq V(\mathbf{x}(0)) - \mu t.$$

Per  $t \rightarrow +\infty$  la funzione  $V$  diventa negativa in  $\bar{S}(\mathbf{0}, \varepsilon)$  dove però è non negativa, da cui

l'assurdo. Quindi  $\exists t^* : \mathbf{x}(t^*) \in S(\mathbf{0}, \varphi)$  e  $\forall t \geq t^*$  vale  $\mathbf{x}(t) \in S(\mathbf{0}, \eta)$ . //

Vediamo ora un primo esempio nel quale usiamo il metodo di Lyapunov:

**ESEMPIO:**

Consideriamo il pendolo piano ideale, formato da un'asta rigida di lunghezza  $L$  e massa  $m$  concentrata per semplicità sull'estremità mobile. Indichiamo con  $R$  la reazione vincolare e  $g$  il modulo dell'accelerazione di gravità.

Usiamo la rappresentazione in coordinate polari. La componente coseno viene compensata dalla reazione vincolare, pertanto la forza agente sulla massa opposta alla direzione del moto è

$$(4.3) \quad F = -mg \sin \vartheta$$

Dalla (4.3) si ricava facilmente il momento meccanico  $M$  risultante, moltiplicando la forza per il braccio

$$(4.4) \quad M = F \cdot L = -mg \sin \vartheta \cdot L$$

Dalle equazioni della fisica sappiamo che

$$(4.5) \quad M = I \ddot{\vartheta} \quad \text{con } I = \text{momento d'inerzia}$$

dove nel nostro caso

$$(4.6) \quad I = mL^2$$

Sostituendo (4.4) e (4.5) nella (4.6) otteniamo

$$(4.7) \quad mL^2 \ddot{\vartheta} = -mLg \sin \vartheta \Rightarrow \ddot{\vartheta} = -\frac{g}{L} \sin \vartheta \Rightarrow \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \vartheta$$

Poniamo  $\begin{cases} \dot{x}_1 = \vartheta \\ x_2 = \dot{\vartheta} \end{cases}$  pertanto il sistema si scrive nella forma

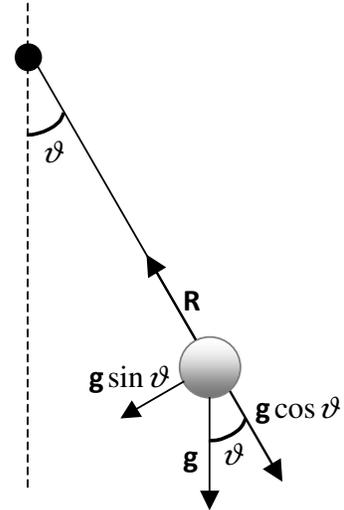
$$(4.8) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin x_1 \end{cases}$$

e ha due punti di equilibrio  $(0,0)$  e  $(\pi,0)$ . Prendiamo ora la seguente funzione di Lyapunov

$$(4.9) \quad V(x_1, x_2) = \frac{g}{L}(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$$

Tale funzione è definita positiva in un intorno di  $(0,0)$  e inoltre

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \left(\frac{g}{L} \sin x_1\right) x_2 - x_2 \left(\frac{g}{L} \sin x_1\right) = 0$$



Tale funzione è nulla  $\forall(x_1, x_2)$  e pertanto è semidefinita negativa. Si può quindi applicare il criterio di Lyapunov e possiamo asserire che  $(0, 0)$  è punto di equilibrio stabile.

Se consideriamo l'altro punto di equilibrio  $(\pi, 0)$ , vediamo che  $V(\pi, 0) \neq 0$  e pertanto non è definita positiva. Quindi in questo caso non possiamo applicare il criterio di Lyapunov e nulla possiamo dire circa la stabilità dell'equilibrio nel punto considerato ricorrendo alla stessa  $V(x)$  //

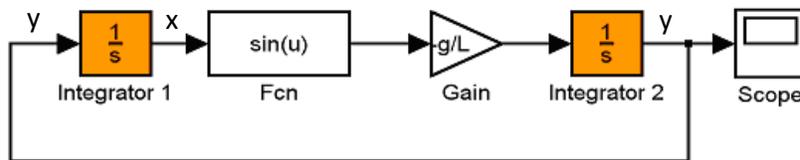


Eseguiamo ora un simulazione del modello del pendolo semplice utilizzando Simulink, un programma della libreria di Matlab. Per comodità riscriviamo la (4.8) ponendo  $x_1 = x$  e  $x_2 = y$  ovvero

$$(4.10) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{g}{L} \sin x \end{cases}$$

La prima equazione della (4.10) si traduce in  $x = \int y$ , ovvero nell'introduzione di un integratore, mentre la seconda equazione della (4.10) richiede l'uso di un blocco "function" ( $\sin(u)$ ), di un blocco "gain" (guadagno) e di un integratore ( $y = \int \left(-\frac{g}{L} \sin x\right) dt$ ).

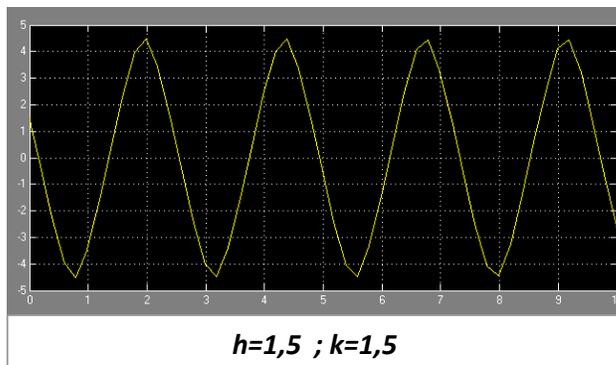
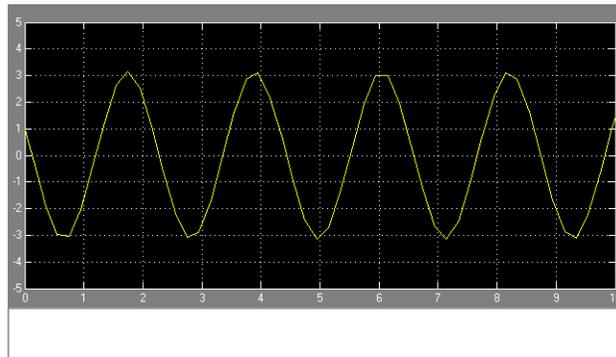
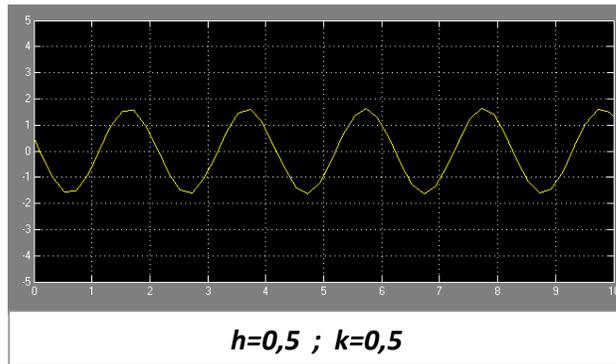
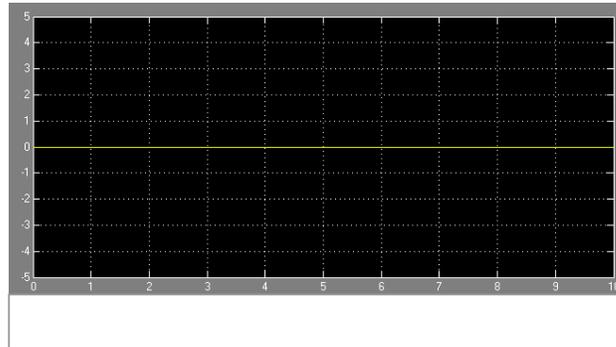
Lo schema conclusivo è il seguente:



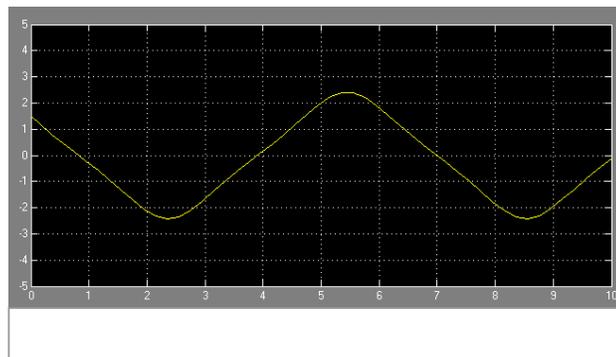
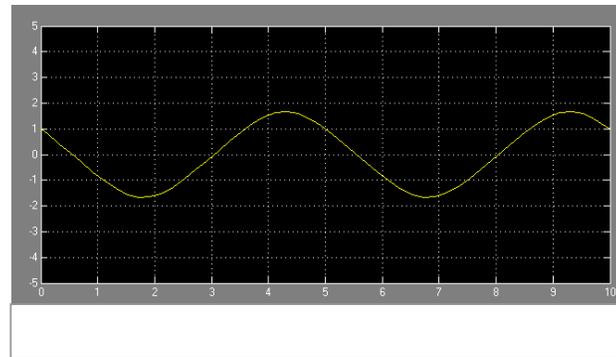
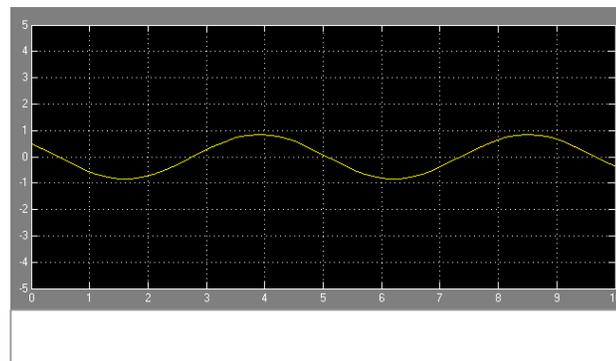
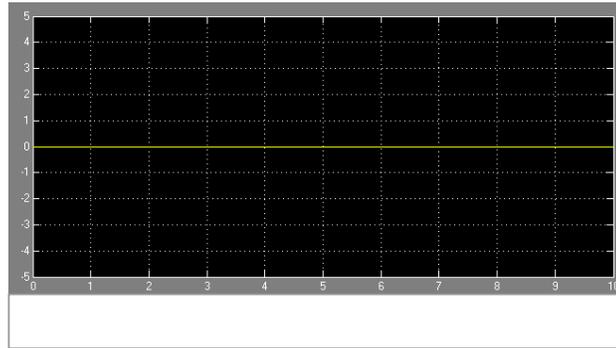
Eseguiamo ora alcune simulazioni utilizzando pendoli di lunghezza differente e studiando l'evoluzione dell'uscita che rappresenta il grafico di  $\vartheta$ .

I parametri  $h$  e  $k$  rispettivamente del primo e del secondo integratore sono passati da tastiera e variano da simulazione a simulazione

1.  $L = 1$  metro



2.  $L = 5$  metri



## 5 . CRITERIO DI KRASOWSKII

Oltre che al concetto di **stabilità** siamo interessati anche al concetto di **convergenza** (e quindi di **stabilità asintotica**) dell'equilibrio per sistemi non lineari. In questo caso ci è utile enunciare e dimostrare il Criterio di stabilità di Krasowskii.

**ENUNCIATO:** Sia  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  punto di equilibrio per il sistema (1.2). Supponiamo che in un intorno  $W$  dell'origine la funzione  $V : W \rightarrow \mathbb{R}$  continua con le sue derivate prime, sia definita positiva e che la funzione  $\dot{V} : W \rightarrow \mathbb{R}$  sia semidefinita negativa. Se il più grande insieme invariante contenuto in  $\mathbf{N} = \{\mathbf{x} \in W : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$  coincide con l'origine, allora  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  è punto di equilibrio **asintoticamente stabile**

Prima di procedere con la dimostrazione specifichiamo cosa significa che il più grande insieme invariante contenuto in  $\mathbf{N}$  coincide con l'origine. Possiamo esprimere questa proprietà dicendo che  $\mathbf{N}$  non contiene traiettorie perturbate o anche dicendo che ogni traiettoria con inizio in  $\mathbf{N} \setminus \{\mathbf{0}\}$  non è contenuta interamente nell'insieme  $\mathbf{N}$ .

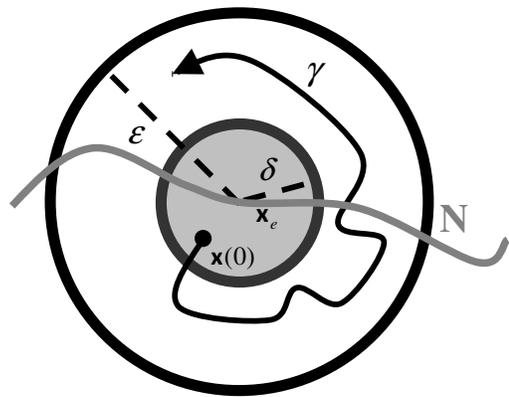
### DIMOSTRAZIONE:

Poiché in un intorno dell'origine per ipotesi  $V$  è definita positiva e  $\dot{V}$  è semidefinita negativa, possiamo applicare il Criterio di stabilità di Lyapunov, ovvero fissata una sfera chiusa  $\bar{S}(\mathbf{0}, \varepsilon) \subset W$  allora  $\exists S(\mathbf{0}, \delta)$  tale che ogni movimento  $\mathbf{x}(\cdot)$  del sistema con inizio in  $S(\mathbf{0}, \delta)$  rimane confinato entro  $\bar{S}(\mathbf{0}, \varepsilon)$ .

**Vogliamo dimostrare che se  $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$  allora  $\mathbf{x}(t)$  converge allo stato  $\mathbf{0}$  per  $t \rightarrow +\infty$ .**

Notiamo che la traiettoria  $\gamma$  è limitata poiché  $\gamma \subset \bar{S}(\mathbf{0}, \varepsilon)$  e pertanto il suo insieme limite  $\omega(\gamma)$  è un sottoinsieme compatto e non vuoto di  $\bar{S}(\mathbf{0}, \varepsilon)$ . Poiché  $V$  è definita positiva e  $\dot{V}$  è semidefinita negativa, allora la (3.4) è non negativa e non crescente lungo  $\gamma$  al divergere di  $t$  e varrà

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t)) = m \geq 0$$



Sappiamo che ogni punto  $\mathbf{p}$  dell'insieme limite è limite di una successione  $\{\mathbf{x}(t_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  per  $t_k \rightarrow +\infty$ . Ma il limite precedente non cambia se valutato lungo una successione di istanti che diverge a  $+\infty$  e per la continuità di  $V$  sarà

$$V(p) = \left( \lim_{t_k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t_k) \right) = \lim_{t_k \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t_k)) = \lim_{t_k \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t)) = m$$

Pertanto in tutti i punti di  $\omega(\gamma)$  la funzione  $V$  assume valore costante  $m$ .

Poiché  $\omega(\gamma)$  è invariante (vedi Appendice A) allora comunque venga presa una curva  $\gamma$  con inizio in  $\mathbf{x}(0) \in \omega(\gamma)$  si ha che  $\gamma \in \omega(\gamma)$ . Pertanto lungo la traiettoria sarà  $V = m$ ,  $\dot{V} = 0$  e  $\omega(\gamma) \subseteq \mathbf{N}$ .

Allora l'insieme limite non potrà contenere punti diversi dall'origine quindi  $\omega(\gamma) = \{\mathbf{0}\}$ .

Per la proposizione presentata nell'Appendice A sarà

$$(5.1) \quad 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}(t), \omega(\gamma)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}(t), \mathbf{0})$$

e la (5.1) significa proprio

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

//

## **6 . CRITERIO DI INSTABILITÀ DI LYAPUNOV**

Accanto ai teoremi di stabilità consideriamo in seguito le condizioni che ci permetteranno di valutare l'equilibrio nell'origine come non stabile. Secondo i criteri descritti nei paragrafi precedenti poi potremo valutare la non stabilità dell'equilibrio anche per punti diversi da  $\mathbf{0}$ .

**ENUNCIATO:** Sia  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  punto di equilibrio per il sistema (1.2). Supponiamo che in un intorno  $W$  aperto dell'origine

**1. Sia definita la funzione  $V : W \rightarrow \mathbb{R}$  continua con le sue derivate prime, tale che**

**$V(\mathbf{0}) = 0$  e che l'origine sia punto di accumulazione per l'insieme**

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in W, V(\mathbf{x}) > 0\}$$

**2. Sia  $\mathbf{P} \subseteq \{\mathbf{x} : \dot{V}(\mathbf{x}) > 0\}$**

**Allora l'equilibrio nell'origine non è stabile**

### ESEMPIO:

Consideriamo il sistema  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1 x_2 \end{cases}$ . Dimostriamo in questo caso che l'origine è punto di

equilibrio instabile.

Consideriamo la funzione di Lyapunov  $V(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ . Si ha che  $V(0,0) = 0$  e l'origine è punto di accumulazione per l'insieme  $\mathbf{P}$  dei punti in cui  $V$  è positiva. La funzione

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = 2x_1^2(1 - x_2) + 2x_2^2(1 - x_1)$$
 è definita positiva in un intorno di  $(0,0)$ . Sono

pertanto verificate le ipotesi del criterio di instabilità di Lyapunov e pertanto in  $(0,0)$  l'equilibrio non è stabile

## 7 . EQUAZIONE DI LYAPUNOV E ANALISI DELLA STABILITÀ

Fino a questo punto abbiamo sempre trattato le funzioni di Lyapunov senza stabilire alcun criterio su come ricavarne un modello esplicito per un qualche caso specifico. Abbiamo solamente verificato che, data la funzione  $V$ , se su questa risultavano verificate alcune precise condizioni, allora l'equilibrio nell'origine risultava stabile o instabile.

Di seguito ci porremo il problema di analizzare la natura della funzione  $V$ , definendo alcuni criteri per la costruzione nel caso di un sistema lineare. Per fare ciò ci serviremo dell'equazione di Lyapunov, ovvero di un'equazione lineare di tipo matriciale che fornisce una tecnica per la costruzione di funzioni di Lyapunov di tipo quadratico.

**PROPOSIZIONE: condizione necessaria e sufficiente per la stabilità asintotica del sistema (1.2) è che,  $\forall Q$  matrice simmetrica definita positiva, l'equazione matriciale**

$$(7.1) \quad F^T X + XF = -Q$$

**(con matrice incognita  $X$  di dimensione  $n \times n$ ) ammetta una soluzione simmetrica  $P$  definita positiva. Tale soluzione è inoltre unica**

Quando il sistema lineare è asintoticamente stabile è possibile scegliere una funzione di Lyapunov  $V$  di tipo quadratico per la quale  $\dot{V}$  sia un'arbitraria forma quadratica definita negativa. Basterà

scegliere la matrice  $Q$  in modo che  $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$  sia la forma quadratica che si desidera ottenere, risolvere in corrispondenza la (7.1) e porre  $V = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$

Il motivo di interesse principale della possibilità di verificare la stabilità asintotica di un sistema lineare senza determinare esplicitamente gli autovalori della matrice  $F$  sta nel fatto che l'eventuale soluzione  $P$  definita positiva fornisce una forma quadratica  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$  che risulta essere una funzione di Lyapunov per il sistema. Oltre a ciò il calcolo degli autovalori richiede di trovare le radici di un polinomio, mentre il di Lyapunov è lineare e quindi facilmente risolvibile

## **8 . IL MODELLO PEDA-PREDATORE DI LOTKA-VOLTERRA**

Un'interessante applicazione dei metodi visti finora si ha nella risoluzione delle equazioni di Lotka-Volterra che forniscono un modello classico per la rappresentazione all'interno di un ecosistema dell'interazione di tipo preda-predatore tra due diverse specie animali.

$$(8.1) \quad \begin{cases} \dot{n}_1 = an_1 - bn_1n_2 \\ \dot{n}_2 = -cn_2 + dn_1n_2 \end{cases}$$

Nella (8.1) l'equazione  $n_1(t)$  rappresenta la popolazione della preda al tempo  $t$ , mentre l'equazione  $n_2(t)$  rappresenta la popolazione del predatore. Le costanti  $a, b, c, d$  sono tutte positive e rappresentano:

$a$  = Tasso di crescita della popolazione preda in assenza di predatore ( $n_2 = 0$ )

$c$  = Tasso di estinzione della popolazione predatore in assenza di preda ( $n_1 = 0$ )

Si tenga presente che, in presenza di entrambe le specie, la frequenza degli incontri è proporzionale al prodotto delle due popolazioni, e che ogni incontro induce una diminuzione del numero di prede e un incremento del numero di predatori.

Non è possibile fornire una soluzione della (8.1) espressa tramite funzioni elementare, mentre risulta molto interessante uno studio qualitativo basato sulla determinazione dei punti di equilibrio e dell'analisi della loro stabilità.

I **punti di equilibrio** sono le soluzioni del sistema

$$(8.2) \quad \begin{cases} 0 = an_1 - bn_1n_2 \\ 0 = -cn_2 + dn_1n_2 \end{cases}$$

e sono i punti  $(0,0)$  e  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ . Effettuando la seguente trasformazione  $\begin{cases} x_1 \triangleq \frac{d}{c} n_1 \\ x_2 \triangleq \frac{b}{a} n_2 \end{cases}$  la (8.1) diventa

$$(8.3) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = ax_1(1-x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = -cx_2(1-x_1) \end{cases}$$

e i punti di equilibrio della (8.3) sono ora  $(0,0)$  e  $(1,1)$ .

Dimostriamo l'instabilità dell'equilibrio nel primo punto. Introducendo infatti la funzione

$$(8.4) \quad V(x_1, x_2) = cx_1^2 - ax_2^2$$

si può facilmente verificare che essa ha l'origine come punto di accumulazione per l'insieme dei punti in cui essa è positiva. Inoltre per  $|x_1|, |x_2| < 1$  si ha

$$(8.5) \quad \dot{V}(x_1, x_2) = 2ac(x_1^2(1-x_2) + x_2^2(1-x_1))$$

che è non negativa e nulla nell'origine. Pertanto sono verificate le condizioni del criterio di instabilità di Lyapunov.

Il punto  $(1,1)$  invece è di equilibrio stabile. Introduciamo infatti una funzione  $W$  che risulti costante lungo le traiettorie. Dalla (8.3) ricaviamo

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = -\frac{cx_2(1-x_1)}{ax_1(1-x_2)} \quad \Rightarrow \quad -a\frac{\dot{x}_2}{x_2} + a\dot{x}_2 - c\frac{\dot{x}_1}{x_1} + c\dot{x}_1 = 0$$

Passando sotto il segno di integrale otteniamo:

$$-a \ln x_2 + ax_2 - c \ln x_1 + cx_1 = \text{costante}$$

quindi la funzione  $W(x_1, x_2) \triangleq -a \ln x_2 + ax_2 - c \ln x_1 + cx_1$  è una costante del moto ed ogni traiettoria appartiene ad una curva con caratteristica  $W = \text{costante}$ .

Definiamo come segue la funzione  $V(x_1, x_2)$

$$(8.6) \quad V(x_1, x_2) \triangleq W(x_1, x_2) - W(1,1) = a(x_2 - 1 - \ln x_2) + c(x_1 - 1 - \ln x_1)$$

È facile verificare che la (8.6) è definita positiva nell'intorno del punto  $(1,1)$  dato che

$\forall k > 0, x_k > 0$  si ha

$$x_k - 1 - \ln x_k = \begin{cases} = 0 & \text{per } x_k = 1 \\ > 0 & \text{per } x_k \neq 1 \end{cases}$$

In un intorno di  $(1,1)$  inoltre  $\dot{V}(x_1, x_2)$  è semidefinita negativa perché

$$\dot{V}(x_1, x_2) = c\left(1 - \frac{1}{x_1}\right)(ax_1(1-x_2)) - a\left(1 - \frac{1}{x_2}\right)(cx_2(1-x_1)) = 0$$

Pertanto è possibile applicare il criterio di stabilità di Lyapunov che ci garantisce la stabilità dell'equilibrio nel punto  $(1,1)$ .

Si noti che la stabilità è semplice ma non asintotica. Infatti  $N = \mathbb{R}^2$  implica che

$V(\mathbf{x}(t)) = V(\mathbf{x}(0)) = \text{costante} > 0$  se  $x(0) \neq (1,1)$ . Quindi può esserci convergenza a  $(1,1)$  per  $t \rightarrow +\infty$  //



Eseguiamo ora una simulazione del modello di Lotka-Volterra utilizzando Simulink. Per comodità riscriviamo la (8.1) ponendo  $n_1 = x$  e  $n_2 = y$  ovvero

$$(8.7) \quad \begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$$

Poiché i due insiemi di blocchi che rappresentano le due equazioni sono simili, ci limitiamo a descrivere la costruzione del primo insieme, relativo all'equazione

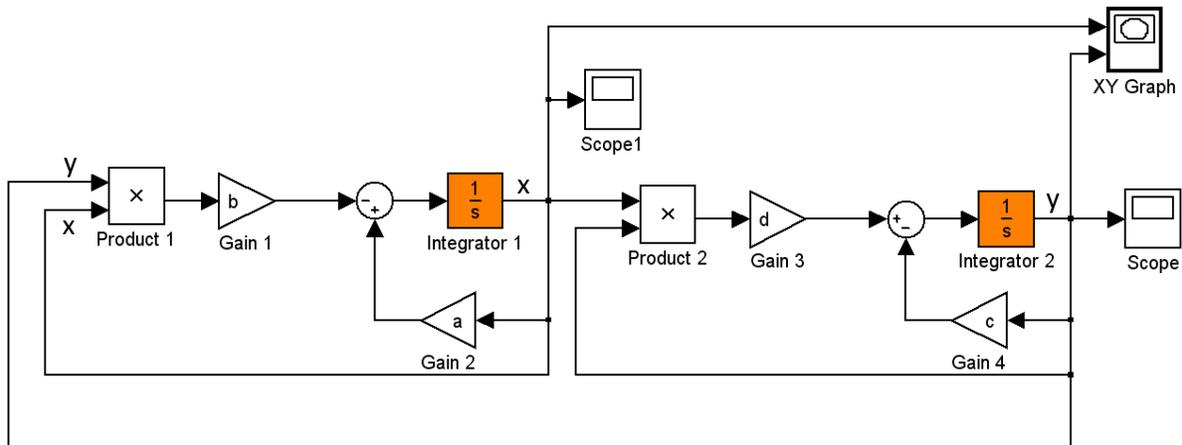
$$(8.8) \quad \dot{x} = ax - bxy$$

Riscrivendo la (8.8)

$$x = \int (ax - bxy) dt$$

vediamo subito che all'uscita dovrà esserci un blocco integratore. Dovremo inoltre trovare un blocco sommatore, due blocchi "gain" (guadagno) e un blocco moltiplicatore.

Lo schema conclusivo è il seguente:



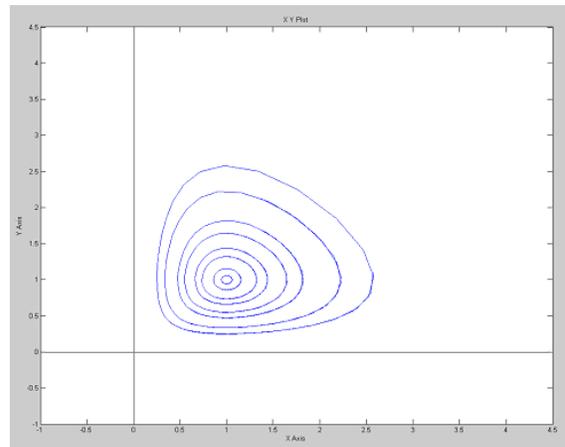
Fissiamo i valori delle costanti  $a = b = c = d = 1$  e siano

$h$  = condizione iniziale del primo integratore (Integrator 1)

$k$  = condizione iniziale del secondo integratore (Integrator 2)

Eseguiamo alcune simulazioni per diversi valori di  $h$  e  $k$  notando che:

- Per  $h = 0$  e  $k = 0$  il sistema rimane nel punto di equilibrio  $(0, 0)$
- Per  $h = 1$  e  $k = 1$  il sistema rimane nel punto di equilibrio  $(1, 1)$
- Nei casi  $\{0 < h < 1\} \cup \{0 < k < 1\}$  e  $\{h > 1\} \cup \{k > 1\}$  otteniamo delle curve chiuse che circondano il punto  $(1, 1)$



**Figura 1: XY Graph**

Cambiamo ora i valori delle costanti ponendo

$$a = 2$$

$$b = 4$$

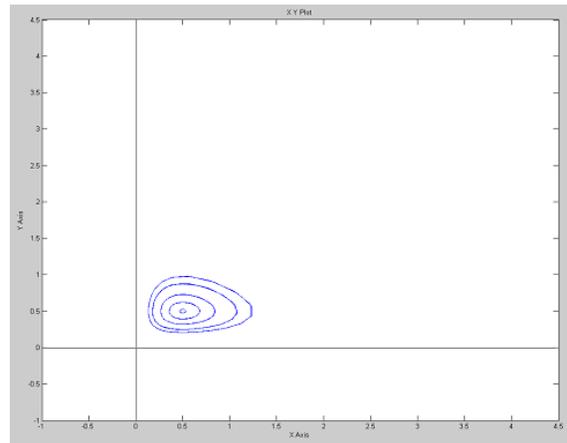
$$c = 1$$

$$d = 2$$

Vediamo come il grafico abbia come secondo punto di equilibrio il punto  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . Le

considerazioni sulle curve sono analoghe a quelle viste in precedenza, ovvero:

- Per  $h = 0$  e  $k = 0$  il sistema rimane nel punto di equilibrio  $(0,0)$
- Per  $h = \frac{1}{2}$  e  $k = \frac{1}{2}$  il sistema rimane nel punto di equilibrio  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- Nei casi  $\{0 < h < \frac{1}{2}\} \cup \{0 < k < \frac{1}{2}\}$  e  $\{h > \frac{1}{2}\} \cup \{k > \frac{1}{2}\}$  otteniamo delle curve chiuse che circondano il punto  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

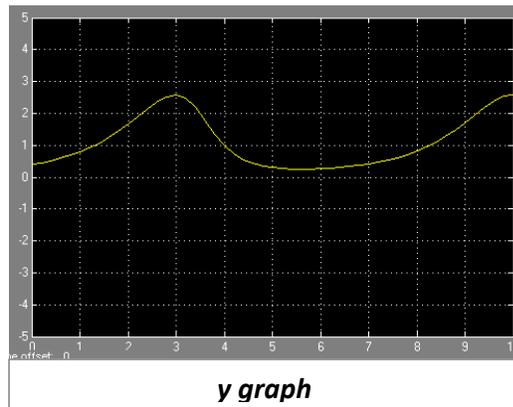
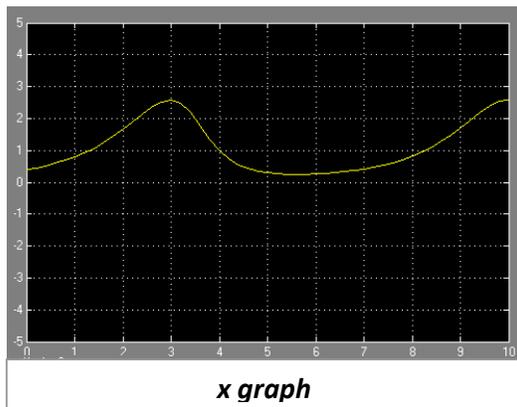


**Figura 2: XY Graph**

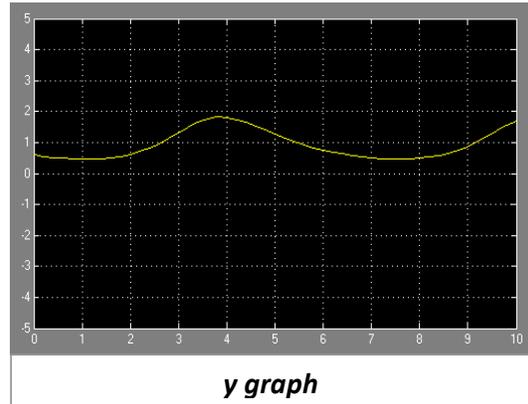
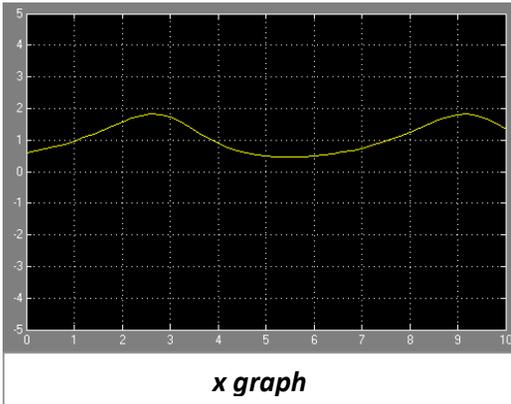
Analizziamo ora con il simulatore il comportamento all'uscita del primo blocco (segnale  $x$ ) e all'uscita del secondo blocco (segnale  $y$ ) del sistema al variare dei parametri  $h$  e  $k$  rispettivamente del primo e secondo integratore in funzione del tempo.

Riportiamo i grafici per il primo caso analizzato, ovvero per i valori  $a = b = c = d = 1$  (il tempo di simulazione varia nell'intervallo  $0 \leq t \leq 10$  secondi )

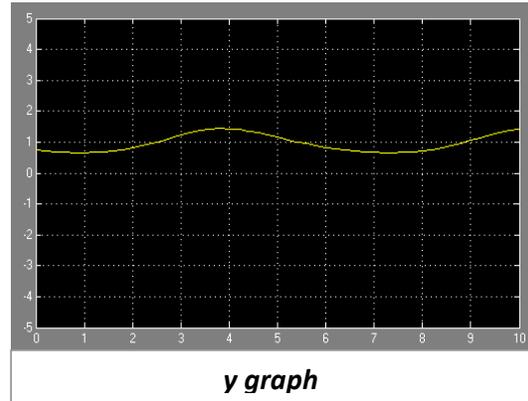
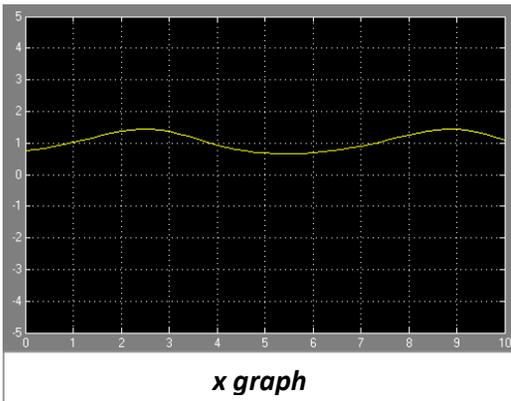
**$h=0,4 ; k=0,4$**



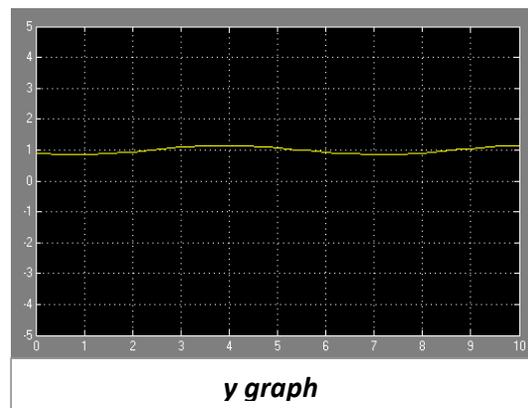
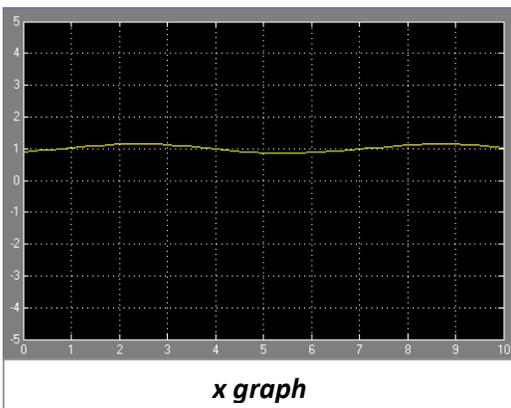
$h=0,6 ; k=0,6$



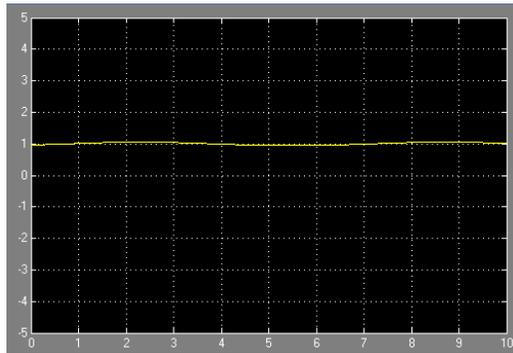
$h=0,75 ; k=0,75$



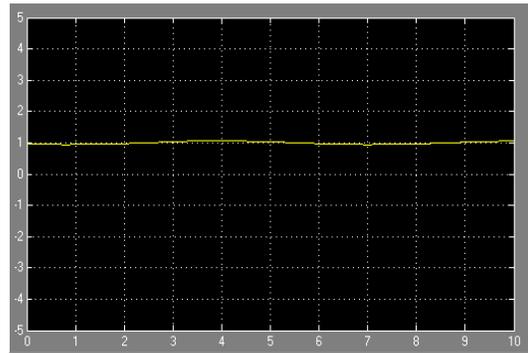
$h=0,9 ; k=0,9$



$$0,96 < h = 1,04 ; 0,96 < k = 1,04$$

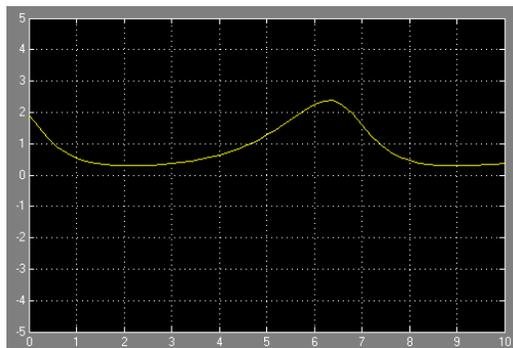


*x graph*

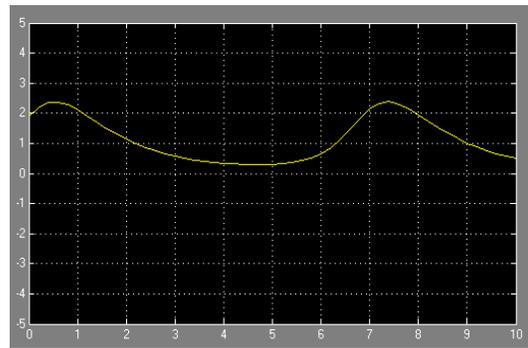


*y graph*

$$h = 1,9 ; k = 1,9$$



*x graph*



*y graph*

## **APPENDICE A**

Riportiamo in questa appendice alcune definizioni e teoremi matematici essenziali per la comprensione degli argomenti trattati nei paragrafi 5 e 6 non trattati in precedenza per evitare di appesantire la trattazione.

**INSIEME INVARIANTE:** definiamo **insieme invariante** del sistema (1.1) un insieme  $I \subseteq \mathbb{R}^n$  tale per cui  $\forall \mathbf{x} \in I$  la traiettoria con inizio in  $\mathbf{x}$  è completamente contenuta in  $I$

---

### **ESEMPI:**

- a. Un punto di equilibrio  $\mathbf{x}_e$  è un insieme invariante
  - b. Una traiettoria  $\gamma$  è un insieme invariante
- 

**PUNTO LIMITE:** sia  $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$  una traiettoria del sistema (1.1) e sia  $\mathbf{x}(\cdot)$  il movimento di cui essa è immagine. Un punto  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  si definisce **punto limite** di  $\gamma$  se esiste una successione di istanti  $\{t_k\}$  con  $t_k \rightarrow +\infty$  per  $k \rightarrow +\infty$  tale che  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{p}$

**INSIEME LIMITE:** definiamo **insieme limite** della traiettoria  $\gamma$  l'insieme  $\omega(\gamma)$  dei punti limite di  $\gamma$

Un importante teorema che lega il concetto di **insieme limite** e quello di **invarianza** è il seguente:

**PROPOSIZIONE:** Per ogni traiettoria  $\gamma$  l'insieme limite  $\omega(\gamma)$  è chiuso. Se inoltre in (1.1) la  $\mathbf{f}$  è continua, allora  $\omega(\gamma)$  è anche invariante

Una proprietà importante dell'insieme limite è che al divergere del tempo tutti i punti della traiettoria tendono ad assumere distanza infinitesima da quelli del suo insieme limite. Pertanto l'insieme  $\omega(\gamma)$  rappresenta la "struttura asintotica" dell'evoluzione di stato del sistema.

Enunciamo e dimostriamo formalmente questi concetti:

**PROPOSIZIONE:** Se la traiettoria  $\gamma$  è limitata allora l'insieme limite  $\omega(\gamma)$  è non vuoto e compatto e il movimento  $\mathbf{x}(\cdot)$  tende all'insieme limite (ovvero  $\mathbf{d}(\mathbf{x}(t), \omega(\gamma))$  tende a zero al divergere di  $t$ )

#### **DIMOSTRAZIONE INSIEME NON VUOTO:**

Consideriamo una arbitraria successione di istanti

$$(A.1) \quad \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ tale che } t_k \rightarrow +\infty \text{ per } k \rightarrow +\infty$$

Considerando la funzione composta (3.4), abbiamo che la successione di stati corrispondente ad (A.1) ovvero

$$(A.2) \quad \{\mathbf{x}(t_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$$

è limitata, dato che ogni elemento di (A.2) sta in  $\gamma$  che è limitata per ipotesi. Pertanto (A.2) contiene una sottosuccessione

$$(A.3) \quad \{\mathbf{x}(t_h^*)\}_{h \in \mathbb{N}}$$

convergente a qualche stato  $\mathbf{p}$  per il Teorema di Weierstrass //

DIMOSTRAZIONE COMPATTEZZA:

Se  $\gamma$  è limitata allora anche l'insieme limite sarà limitato. Poiché per la proposizione precedente sappiamo che  $\omega(\gamma)$  è chiuso, allora è dimostrato che esso è compatto //

DIMOSTRAZIONE DISTANZA TENDENTE A ZERO:

Ipotizziamo per assurdo che  $\mathbf{d}(\mathbf{x}(t), \omega(\gamma))$  non tenda a zero al divergere di  $t$ . In questo caso  $\exists \varepsilon > 0$  e una successione (A.1) tale per cui  $\forall k$  è verificata la condizione

$$(A.4) \quad \mathbf{d}(\mathbf{x}(t), \omega(\gamma)) > \varepsilon$$

La successione (A.1) è limitata, in quanto ogni suo elemento appartiene alla traiettoria  $\gamma$  limitata per ipotesi. Da essa si può allora estrarre una sottosuccessione (A.3) che converge a  $\mathbf{p} \in \omega(\gamma)$ . Ma allora sui punti della sottosuccessione (A.3) la condizione (A.4) non può

essere verificata, perché  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t_h^*) = \mathbf{p}$  implica  $\mathbf{d}(\mathbf{x}(t_h^*), \mathbf{p}) < \varepsilon$  per  $h \rightarrow +\infty$  //

## **APPENDICE B - Bibliografia**

E.Fornasini,G.Marchesini (2003),”Appunti di analisi dei sistemi”, Padova, Edizioni Libreria Progetto, pp.137-162, pp.167-168, pp.177-179