UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTA' DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA GESTIONALE

TITOLO:

La raggiungibilità e la controllabilità nei sistemi di controllo

RELATORE: PROF. A. FERRANTE

LAUREANDO: ZAGO TOMMASO

ANNO ACCADEMICO: 2010/2011

INDICE

SOMMARIO

Lo scopo di questa tesi è quello di evidenziare, a partire da un sistema di controllo dato, che cosa si intenda per raggiungibilità e controllabilità e quali possono essere i metodi algebrici che vengono seguiti per verificare tali proprietà. Per prima cosa verranno trattati i sistemi a stati finiti in modo da comprendere cosa sia la raggiungibilità e la matrice di connettività poi nei due paragrafi successivi verrà analizzato in modo più approfondito il tema della raggiungibilità per quanto riguarda sistemi discreti e continui focalizzando l'attenzione sulle diversità e le analogie tra i due. Verranno indicati, inoltre, i vari passaggi che si devono seguire per capire se uno stato di un sistema più essere raggiunto oppure no e quale sia l'insieme degli stati raggiungibili a partire da uno stato predefinito. L'ultimo paragrafo del primo capitolo metterà in luce un metodo alternativo per la verifica della raggiungibilità. Nel secondo capitolo verrà affrontato il tema complementare alla raggiungibilità che è quello della controllabilità. Anche in questo caso verrà illustrata la controllabilità sia per sistemi continui che discreti sottolineando gli aspetti comuni.

INTRODUZIONE

Un problema molto importante nella teoria dei sistemi è il problema della raggiungibilità il quale è legato al problema altrettanto importante della controllabilità. Considerato un dispositivo fisico o, più in generale, un sistema di cui vogliamo conoscere l'evoluzione, esso può essere descritto in forma analitica tramite equazioni derivanti dal mondo della fisica; in altri termini si rappresenta sotto forma di modello matematico. In questa tesi si considereranno modelli composti da due equazioni: un'equazione differenziale di primo ordine, detta equazione dinamica, la cui soluzione evidenzia l'evoluzione dello stato iniziale del sistema ed un'equazione algebrica che invece rappresenta l'evoluzione dell'uscita del sistema. Per comprendere meglio quali siano le variabili in gioco possiamo partire da un semplice esempio che tratta dello studio di un circuito elettrico composto da un generatore e da una resistenza (fig.1). Se vogliamo che la tensione ai capi della resistenza R assuma un certo valore utilizziamo la legge di Ohm V=RI e quindi utilizziamo tre variabili. V rappresenta la variabile d'uscita il cui valore è un obbiettivo incognito che vogliamo raggiungere, la I è la corrente fornita dal generatore che rappresenta la variabile di ingresso che noi possiamo gestire e controllare per raggiungere il nostro scopo invece la R è un parametro del sistema che non possiamo modificare ma che serve solo come variabile ausiliaria per risolvere l'equazione.

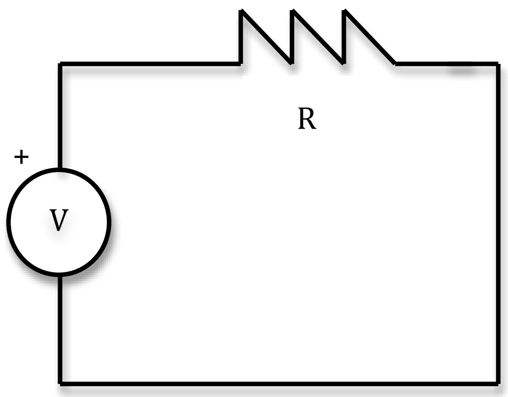

Fig1

CAPITOLO 1

Raggiungibilità

Il problema della raggiungibilità si inserisce proprio in questo contesto. Assegnati i valori iniziali delle variabili di stato del sistema, si cerca di conoscere quali sono i valori che le variabili possono assumere e di calcolare gli ingressi che permettono di raggiungere tali valori.

-1) Raggiungibilità per sistemi a stati finiti.

Può essere utile chiarire questo concetto mediante un esempio di un sistema con un numero finito di stati (automa a stati finiti). Consideriamo il sistema con tre stati A_1,A_2,A_3 come illustrato in fig 2.

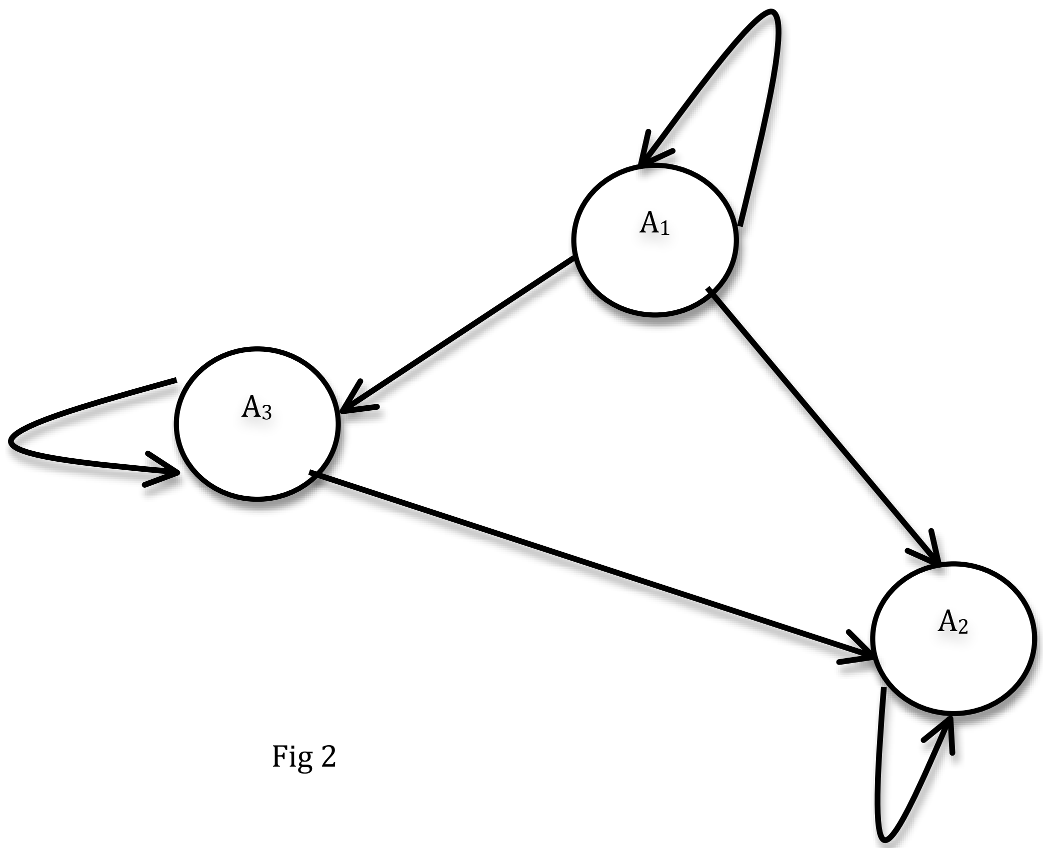

Fig 2

Il sistema evolve a tempo discreto ed in corrispondenza del tempo t esso si trova in uno degli stati Ai con i=1,2,3. Come si nota non tutti gli stati sono collegati ovvero A1 può evolvere in A2, A3 ma anche su se stesso ovvero non mutare. Quando il sistema si trova nello stato A2 invece rimarrà sempre stabile non potrà evolvere in alcuno degli altri stati se si trovasse invece in A3 può rimanervi oppure può evolvere in A2. Generalmente l'insieme degli stati raggiungibili da un sistema è indicato tra parentesi graffe ad esempio l'insieme degli stati raggiungibili in un solo passo da A1 è $\{A1,A2,A3\}$. Da A2 è $\{A2\}$ e da A3 è $\{A2,A3\}$. È possibile rappresentare tutto attraverso una costruzione matriciale detta matrice di connettività. Quest'ultima è una matrice quadrata di ordine n pari al numero degli stati dove ad ogni casella c_{ij} si assegna 1 se c'è un lato orientato dal nodo i al nodo j altrimenti 0.

Nel nostro caso la matrice di connettività è:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quanto detto fin'ora riguarda il caso-studio dell'evoluzione di un sistema a stati finiti in un unico passo a partire da uno stato iniziale assegnato. Se si volesse invece determinare l'insieme degli stati che si possono raggiungere in k passi si dovrebbero calcolare le potenze di ordine k della matrice di connettività ottenuta attraverso le considerazioni che abbiamo fatto in precedenza. Poichè gli unici valori che gli elementi della matrice possono assume sono 1 e 0, basta applicare le operazioni di prodotto e somma descritte dalle tavole dell'algebra di Boole . Tali tavole sono messe qui in evidenza.

+	0	1
0	0	1
1	1	1

*	0	1
0	0	0
1	0	1

si procede calcolando le potenze c^2,c^3, … , c^k dove ogni elemento della matrice di connettività è calcolato attraverso la relazione $c_{ij}{}^2 = \sum_k c_{ik}c_{kj}$..

Riassumendo quanto detto possiamo dire che $c_{ij}{}^t$ vale 1 se esiste un cammino di t archi, dove t esprime dunque il numero di passi da compiere per raggiungere il sistema j partendo da i, orientato da i a j.

Una volta costruita la matrice c^t è facile individuare l'insieme degli stati che un sistema può raggiungere a partire da uno stato assegnato. Ogni riga rappresenta uno stato iniziale ed ogni colonna un'evoluzione di quello stato se il corrispondente valore cij è 1. Pertanto la matrice va letta per riga per ottenere l'insieme di raggiungibilità per ogni stato iniziale.

-2) Raggiungibilità per sistemi discreti

Fatto questo breve ma necessario preambolo per introdurre il tema che ci accingiamo a trattare, possiamo iniziare a discutere del problema della raggiungibilità per sistemi lineari discreti.

Definizione

Si dice sistema discreto il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x(k)=F^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} F^{k-1-i}Gu(i) \\ y(k)=Hx(k) \end{cases}$$

Indicheremo il sistema con il simbolo Σ dove la prima equazione si dice evoluzione dinamica mentre la seconda equazione si dice evoluzione all'uscita. F,G,H sono delle matrici di coefficienti di ordine nXn, nXm, pXn.

Nel proseguo della trattazione di sistemi discreti ci riferiremo sempre al sistema Σ(FGH).

Supponiamo che lo stato iniziale del sistema sia x(0) = 0 da cui segue l'equazione:

$$x(k)= \sum_{i=0}^{k-1} F^{k-1-i}Gu(i)$$

Da tale equazione possiamo ottenere tutti i possibili stati finali del sistema dopo k passi. La formula precedente può essere rappresentata in termini di prodotto tra matrici nella forma

$$x(k) = [G\ FG\ \dots\ F^{k-1}G] \begin{pmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \\ \\ u(0) \\ \end{pmatrix}$$

Si evince quindi che l'insieme di tutti gli stati raggiungibili da un sistema il cui stato iniziale è nullo, è un elemento dell'immagine della matrice

$\mathbf{R}_k = [\ G\ FG\ \dots\ F^{k-1}G]$

Definizione

Si definisce l'insieme degli stati raggiungibili in k passi X_k^R = Im [G FG … F^{k-1}G].

Osservazione

Dalla definizione che abbiamo dato dell'insieme degli stati raggiungibili in k passi si nota facilmente che tale insieme ha la struttura di uno spazio vettoriale. Dato che questo spazio vettoriale contiene tutti gli stati raggiungibili dal sistema possiamo applicare tutte le operazioni lineari sulle equazioni che compongono il sistema stesso perciò possiamo asserire che una qualsiasi combinazione lineare delle colonne della matrice suddetta costituisce un elemento dello spazio e quindi un possibile stato raggiungibile in al più k passi.

A questo punto è indispensabile accennare ad un teorema che ci permetterà di proseguire nella trattazione e fare delle osservazioni interessanti. Tale teorema è il teorema di Cayley-Hamilton

Teorema

Se f è un endomorfismo di uno spazio vettoriale V a dimensione finita e p(x) è il suo polinomio caratteristico, allora p(f) = 0. Analogamente, se A è una matrice quadrata e p(x) il suo polinomio caratteristico, allora p(A) = 0.

Detto questo procedendo nell'analisi si osserva che tutti i sottospazi raggiunibili in 1,2,… passi soddisfano la seguente catena di inclusioni $X_1^R \subseteq X_2^R \subseteq \ldots \subseteq X_k^R \subseteq \ldots$ Con essa si intende che l'insieme degli stati raggiungibili in 1 passo è contenuto nell'insieme degli stati raggiungibili in 2 passi e così via.

Osservazione

Questa catena di inclusioni è piuttosto ovvia visto che se prendiamo un sistema il cui stato iniziale è lo stato x(0)=0, utilizzando l'equazione dell'evoluzione dinamica otteniamo che in corrispondenza in un ingresso pari al vettore nullo lo stato x(1)=0 questa uguaglianza si mantiene anche per quanto riguarda i sottospazi degli insiemi di raggiungibilità.

Per il teorema di Cayley-Hamilton si può asserire che la catena di inclusioni diventa stazionaria per k≥n ovvero $X_n^R = X_{n+1}^R = \ldots = X^R$ e ogni stato raggiungibile lo è in al più n passi. Si può osservare però che la catena può divenire stazionaria anche per k<n e in questo caso ogni stato raggiungibile lo è in al più k passi.

Fatte queste importanti osservazioni da questo momento in avanti considereremo l'insieme X^R così definito.

Definizione

Si definisce X^R l'insieme corrispondente al sottospazio raggiungibile del sistema Σ e tale sottospazio verifica questa uguaglianza X^R = Im **R** = [G FG … F^{n-1}G] dove **R** è definita matrice di raggiungibilità. Inoltre un sistema si dice raggiungibile se $X^R = X = \Re^n$

Dalla definizione precedente è possibile ricavare un risultato importante che ci permette di verificare se un sistema è raggiungibile oppure no

Proposizione.

Un sistema è raggiungibile se la sua matrice di raggiungibilità **R** ha rango pieno cioè rango **R** = n.

Definizione

Si dice indice di raggiungibilità di un sistema raggiungibile il minimo valore di k tale che il sistema è raggiungibile in k passi.

Dalla definizione e dalla proposizione precedente si osserva che una volta trovata la matrice di raggiungibilità, basta trovarne il rango r che indica il numero di passi attraverso i quali possiamo raggiungere il sistema a partire da un sistema dato. Il rango r sarà sempre minore o uguale ad n.

Proposizione

L'indice di raggiungibilità di un sistema lineare discreto è minore di n se e solo se il sistema ha due o più ingressi e almeno due di essi agiscono in modo indipendente. Tale condizione si realizza quando almeno due colonne della matrice G sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione.

Per quanto riguarda la sufficienza bisogna ritornare alla catena di inclusioni che abbiamo già visto prima e si osserva che se è vero che ${}_nX^R = {}_{n+1}X^R$ allora è vero anche che ${}_nX^R = {}_{n+1}X^R = {}_{n+2}X^R$ … infatti si ha che se le colonne di F^hG sono combinazioni lineari di G,FG, … , $F^{h-1}G$ allora è altresì vero che posso scrivere $F^{h+1}G$ moltiplicando a destra e a sinistra l'uguaglianza precedente per F ottenendo FG,F^2G, … , $F^hG = F^{h+1}G$. Verificata questa corrispondenza posso asserire che $F^{h+1}G$ è anche combinazione lineare di G,FG, … , $F^{h-1}G$ perciò è dimostrato che ${}_nX^R = {}_{n+2}X^R$ le successive uguaglianze si provano in modo analogo ripetendo il processo. Dal momento che la dimensione di ${}_nX^R$ =n, se il rango di G ≥ 2 allora almeno una delle inclusioni diventa un'uguaglianza dunque ${}_nX^R$ non può essere il primo elemento della catena ad avere dimensione n.

Per quanto riguarda la necessità la condizione è ovvia infatti dicendo che almeno due colonne sono indipendenti vuol dire che almeno un'altra colonna è combinazione lineare delle altre e perciò può essere eliminata e in tal modo il rango è sicuramente minore di n.

c.v.d

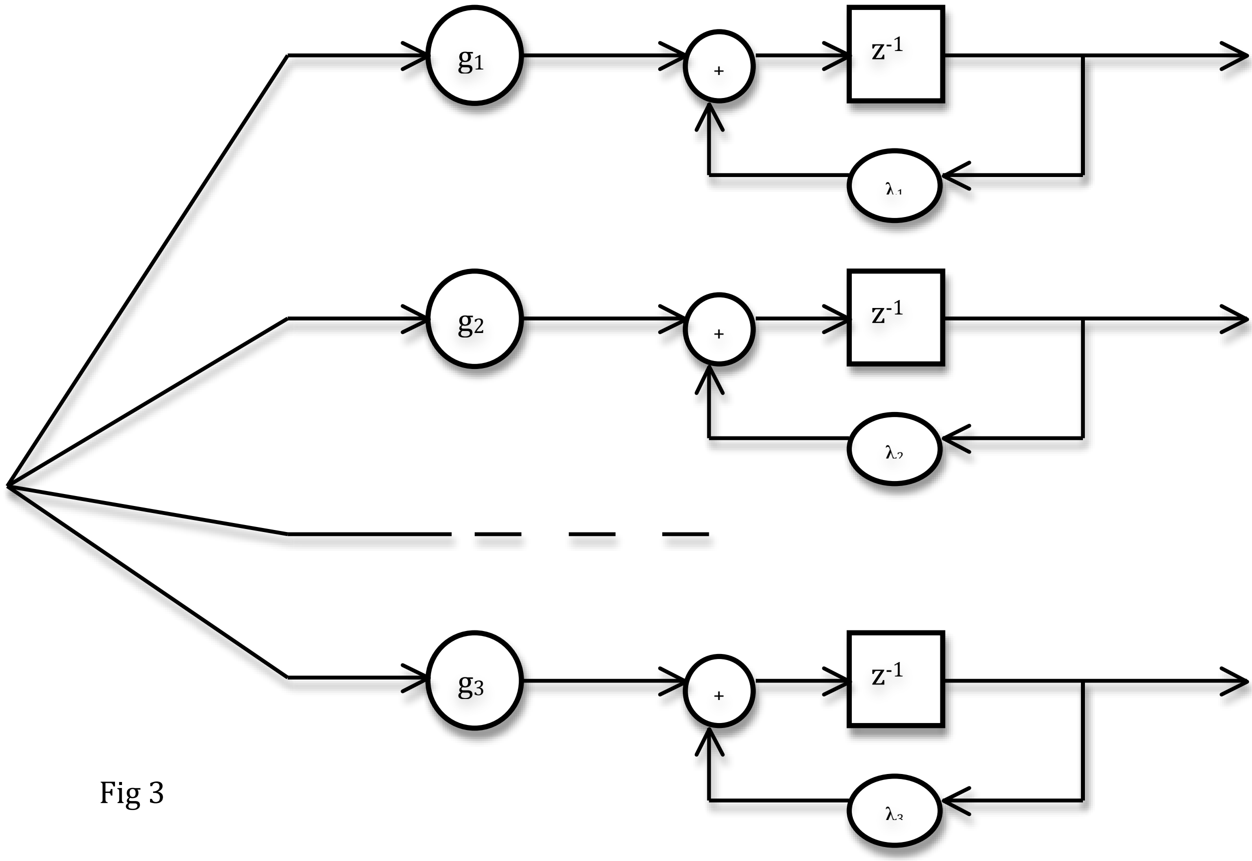

Fig 3

Abbiamo visto che l'indice di raggiungibilità è sempre minore o uguale ad n ma possono capitare casi in cui tale indice è strettamente minore di n. Nei seguenti risultati se ne avrà la riprova.

Supponiamo un sistema come in fig 3. La matrice R ad esso associata è:

$$R = \begin{pmatrix} g_1 & \lambda_1 g_1 & \lambda_1^2 g_1 & \lambda_1^{n-1} g_1 \\ g_2 & \lambda_2 g_2 & \lambda_2^2 g_2 & \lambda_2^{n-1} g_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n & \lambda_n g_n & \lambda_n^2 g_n & \lambda_n^{n-1} g_n \end{pmatrix}$$

Questa matrice può essere scomposta come segue nel prodotto di due matrici

$$R = \begin{pmatrix} g_1 & & \\ & g_2 & \\ & & \ddots \\ & & & g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Si nota che la seconda matrice del secondo membro è una matrice di Vandermonde. Per ottenere rango massimo è fondamentale che entrambe le sottomatrici non siano singolari e ciò avviene quando tutti gli ingressi g_i sono diversi da 0 e quando tutti gli autovalori λ_i sono distinti. La necessità di queste condizioni è presto detta: se almeno un valore di g è pari a 0 allora la prima matrice ha una riga nulla e il det R = 0 ed allo stesso modo se almeno due auto valori sono uguali allora almeno due righe della seconda sottomatrice sono proporzionali e quindi il det R = 0. In tali condizioni il sistema non è raggiungibile in n passi. Ovviamente vale anche il viceversa pertanto se il det R = 0 allora almeno un ingresso è nullo oppure almeno due autovalori sono uguali.

In conclusione dell'analisi di raggiungibilità per un sistema lineare discreto, è possibile dare una caratterizzazione geometrica dei concetti fin'ora esposti.

Teorema.

Sia dato Σ(FGH). allora il sottospazio di raggiungibilità X^R è il più piccolo sottospazio F-invariante di X contenente Im G.

Dimostrazione

$X^R = \mathrm{Im}[\,G\ FG\ \dots\ F^{k-1}G]$ che ovviamente contiene anche ImG. Per il teorema di Cayley Hamilton si dimostra che è F-invariante. Per verificare, invece, che esso è il minimo sottospazio consideriamo un generico sottospazio S che sia F-invariante contenente Im G. Da questa caratterizzazione si osserva che S contiene anche Im F^kG $\forall$ k e quindi anche X^R è contenuto nel sottospazio S.

c.v.d

Osservazione

Utilizzando la notazione che normalmente viene impiegata per descrivere gli spazi ciclici, ovvero gli spazi vettoriali che nascono a partire da un unico elemento, si esprime il più piccolo sottospazio F-invariante contenente ImG in questo modo $X^R = \langle F|G \rangle$.

Ora cercheremo di rispondere a cosa accade se ci troviamo di fronte allo studio di più sistemi equivalenti. Sistemi di questo tipo, infatti, possiedono le stesse proprietà di raggiungibilità; tuttavia per affrontare l'argomento con successo sarà opportuno conoscere ottimamente le operazioni di cambiamento di base poiché è con esse che si avrà a che fare. Si considerino due sistemi $\Sigma(FGH)$ e $\underline{\Sigma(FGH)}$ algebricamente equivalenti e sia T la matrice di cambiamento di base.

$\underline{F}=T^{-1}FT$

$\underline{G}=T^{-1}G$

$\underline{H}=HT$.

È possibile stabilire la seguente relazione tra le matrici di raggiungibilità R e $\underline{R}$:

$R = T^{-1}\underline{R}$

I sottospazi di raggiungibilità di $\Sigma(FGH)$ e $\underline{\Sigma(FGH)}$ sono quindi legati dalla seguente equazione

$\underline{X}_k^R = \mathrm{Im}\ [\ \underline{G}\ \underline{FG} \dots \underline{F^{k-1}G}] = \mathrm{Im}\ [T^{-1}G\ T^{-1} FG \dots T^{-1} F^{k-1}G]=$

$\mathrm{Im}\ T^{-1} [\ G\ FG \dots F^{k-1}G] = T^{-1}X_k^R$

I due sottospazi hanno la medesima dimensione e gli elementi dell'uno si ricavano trasformando i corrispondenti elementi dell'altro. Se è stato verificato che i due sistemi $\Sigma(FGH)$ e $\underline{\Sigma(FGH)}$ sono raggiungibili, conoscendo le due matrici R e $\underline{R}$ è possibile calcolarsi la matrice T di cambiamento di base. Basta procedere in questo modo:

per prima cosa moltiplico a destra le matrici dell'equazione $R = T^{-1}\underline{R}$ per $\underline{R}^T$ ottenendo in questo modo

$\underline{R}\underline{R}^T = T^{-1}R\underline{R}^T$ quindi $T = R\underline{R}^T * (\underline{R}\underline{R}^T)^{-1}$

La matrice ottenuta dal prodotto $\underline{R}\underline{R}^T$ è sicuramente invertibile dato che $\underline{R}$ ha rango pieno di riga. Se i sistemi hanno un solo ingresso, $\underline{R}$ e R sono quadrate e non singolari cioè il det≠0 e sono quindi invertibili allora:

$T = R\underline{R}^{-1}$

-3) Raggiungibilità per sistemi continui

Approfonditi a sufficienza i sistemi discreti è giunto il momento di dedicarsi ai sistemi continui. In generale si arriverà a risultati molto simili a quelli ricavati nel caso precedente. La differenza più rilevante è che tutte le sommatorie verranno sostituite con delle integrazioni.

Prima di tutto è opportuno, come nel caso discreto, dare una definizione rigorosa di sistema continuo.

Definizione

Si dice sistema continuo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} dx/dt = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t)=Hx(t) \end{cases}$$

Indicheremo il sistema con il simbolo Σ dove la prima equazione si dice evoluzione dinamica mentre la seconda equazione si dice evoluzione all'uscita. F,G,H sono delle matrici di coefficienti di ordine nXn, nXm, pXn.

Nel proseguo della trattazione di sistemi continui ci riferiremo sempre al sistema Σ(FGH).

A partire da questa definizione si osserva facilmente che il problema principale in questo caso è dato dal fatto che essendo lo spazio delle funzioni d'ingresso di dimensione infinita, non sarà possibile utilizzare le consuete operazioni matriciali ma partendo dall'equazione dell'evoluzione dinamica si procederà in questo modo:

$dx/dt = Fx(t)+Gu(t)$

Supponiamo che lo stato iniziale di sistema sia $x(0) = 0$.

Risolvendo l'equazione differenziale integrandola otteniamo

$$x(t) = \int_0^t e^{F(t-\sigma)}Gu(\sigma)d\sigma$$

quindi possiamo formalizzare la seguente definizione

Definizione

Sia x uno stato di un sistema continuo, esso è raggiungibile al tempo t se esiste un ingresso u(t) tale per cui

$$x = \int_0^t e^{F(t-\sigma)}Gu(\sigma)d\sigma.$$

In completa analogia con ciò che abbiamo visto per il caso di sistemi discreti, il nostro obiettivo è di determinare un operatore che ci permetta ti trovare l'insieme degli stati raggiungibili prima come uno sottospazio di dimensione finita e poi come immagine di una matrice

Definizione

Sia U lo spazio di dimensione infinita delle funzioni d'ingresso (per esempio lo spazio delle funzioni continue a tratti) ed X lo spazio di dimensione finita degli stati di sistema, si definisce un operatore lineare R_t attraverso la seguente caratterizzazione:

$R_t : U \to X$

$R_t : u() \mapsto \int_0^t e^{F(t-\sigma)}Gu(\sigma)d\sigma.$

Definizione

x è uno stato raggiungibile nell'intervallo [0,t] se e solo se appartiene all'immagine dell'operatore R_t che rappresenta quindi l'insieme di tutti gli stati raggiungibili al tempo t>0.

Attraverso queste due definizioni siamo riusciti a caratterizzate l'insieme degli stati raggiungibili come un sottospazio vettoriale a dimensione finita. Questo risultato è importante perché è perfettamente in linea con quanto detto nei sistemi discreti. Il passo successivo sarà quello di rappresentare lo spazio di raggiungibilità come l'immagine di una matrice. Per fare ciò ci serviamo dello strumento matematico degli operatori aggiunti.

Definizione

Sia W_t un operatore così definito

$W_t : X \to U$

$W_t(x) : x \mapsto u(\sigma) = G^T e^{F^T(t-\sigma)}x \qquad 0 \leq \sigma \leq t$

Osservazione

Si può osservare che dalla caratterizzazione di W_t vista anche la dimensione finita di ImR_t allora $ImR_t = Im\,[R_t \circ W_t]$.

Introduciamo un ultimo operatore S_t dato dalla composizione di R_t e W_t

Definizione

L'operatore S_t è così caratterizzato

$S_t : X \to X$

$S_t(x) : x \mapsto \int_0^t e^{F(t-\sigma)}G\, G^T e^{F^T(t-\sigma)}d\sigma\ \ x$

Con quest'ultimo operatore finalmente siamo giunti alla caratterizzazione del sottospazio raggiungibile in [0,t] come immagine di una matrice; quindi possiamo formulare il tutto attraverso una definizione

Teorema

Il sottospazio di raggiungibilità al tempo t è definito come l'immagine di $\mathbf{P}_t$ così determinata:

$$\mathbf{P}_t = \int_0^t e^{F(t-\sigma)} G\, G^T e^{F^T(t-\sigma)} d\sigma$$

Detta gramiano di raggiungibilità.

Osservazione

Si può dimostrare che a differenza dei sistemi discreti nel caso di sistemi continui il sottospazio di raggiungibilità non dipende dall'intervallo [0,t) in cui agisce la funzione d'ingresso. In altre parole

$$\mathrm{Im}(\mathbf{P}_{t1}) = \mathrm{Im}(\mathbf{P}_{t2}) \qquad \forall\ t1,t2 > 0$$

L'osservazione precedente è diretta conseguenza di un teorema molto importante che è possibile così formulare.

Teorema

Il sottospazio raggiungibile al tempo t>0 è l'immagine della matrice di raggiungibilità

$$\mathbf{R} = [G \mid FG \mid \dots \mid F^{n-1}G]$$

Questo risultato è fondamentale per lo svolgimento dei problemi riguardanti sistemi continui poiché praticamente si è definito un metodo efficace che ci permette di legare la raggiungibilità di un sistema con la sua struttura interna. Una volta definita la matrice **R** basta calcolarne il rango ed osservare se esso è minore o uguale ad n e poi trarre le conclusioni a cui siamo pervenuti e di cui abbiamo ampiamente discusso nel caso di sistemi discreti.

Osservazione

Da questo risultato a cui siamo pervenuti che riguarda la determinazione dell'insieme degli stati raggiungibili da un sistema lineare continuo si è potuto dimostrare che sostanzialmente il sottospazio degli stati raggiungibili da un sistema è il medesimo sia che gli ingressi siano continui sia che essi siano discreti quindi vale l'uguaglianza $X^R_{\text{continui}} = X^R_{\text{discreti}}$

-4) Ulteriori criteri di raggiungibilità.

In questa trattazione abbiamo visto dei metodi validi che ci permettono di ottenere gli insieme degli stati raggiungibili sia per sistemi discreti che per sistemi continui e abbiamo osservato che tali insieme coincidono. Esistono tuttavia altri metodi validi che ci permettono di pervenire a questi risultati ed uno di questi è il criterio di Popov, Belevitch e Hautus.

Teorema (criterio di Popov, Belevitch, Hautus).

Il sistema continuo o discreto $\Sigma(F,G,H)$ è raggiungibile se e solo se la matrice

$[F\text{-}sI \mid G]$

ha rango pieno per ogni valore $s \in C$.

Dimostrazione

Verrà dimostrata solo la sufficienza dell'implicazione per la necessità si rimanda ad una trattazione più accurata.

Sia $s \in C$

$x^T [F\text{-}sI \mid G] = 0$

$$\begin{cases} x^T G = 0 \\ x^T F = s\, x^T \end{cases}$$

$\Rightarrow x^T FG = s\, x^T G = 0$

$\Rightarrow x^T F^2G = s\, x^T FG = 0$

…

$\Rightarrow x^T F^kG = 0$

$\Rightarrow x^T [G \mid FG \mid \dots \mid F^{n-1}G] = 0$

$\Rightarrow [G \mid FG \mid \dots \mid F^{n-1}G]$ non ha rango pieno

$\Rightarrow$ Il sistema non è raggiungibile.

c.v.d

CAPITOLO 2

Controllabilità

Concluso un argomento tanto importante come il tema della raggiungibilità rimane da accennare qualcosa per quanto riguarda un tema strettamente correlato come il problema della controllabilità. Sarà opportuno dividere la trattazione in due parti una che riguarda i sistemi discreti ed una sistemi continui anche se come vedremo tra i due ci saranno poche differenze. È bene preliminarmente dare qualche delucidazione su che cosa sia la controllabilità prima di andare a definire i metodi per determinare le sequenze di ingresso.

-1) Controllabilità per sistemi discreti

Definizione

Uno stato x si dice controllabile (a zero) in k passi se esiste una successione di ingresso u(0), u(1), … , u(k-1) che porta il sistema Σ(F,G,H) discreto definito già nella definizione di raggiungibilità dallo stato x allo stato 0 nell'intervallo [0,k], ovvero se vale l'equazione:

$$0 = F^k x + \sum_{i}^{k-1} F^{k-1-i} G u(i)$$

o equivalentemente se

$$F^k x = -\sum_{i}^{k-1} F^{k-1-i} G u(i)$$

Osservazione

È facile osservare che questa condizione è la condizione di raggiungibilità in k passi di $-F^k x$ e quindi equivale alla:

$$F^k x \in \text{Im}\,[\,G\ FG\ \dots\ F^{k-1}G\,] = X_k^R$$

È immediato verificare che gli stati soddisfacenti questa condizione formano un sottospazio detto sottospazio degli stati controllabili in k passi indicato con X_k^C. Il sistema discreto Σ(F,G,H) è controllabile in k passi se ogni $x \in X$ lo è cioè se l'immagine di F^k è contenuta in X_k^R :

$$\text{Im}F^k \subseteq \text{Im}\,[\,G\ FG\ \dots\ F^{k-1}G\,] = X_k^R$$

Definizione

Il sistema Σ(F,G,H) si dice controllabile se l'intero spazio degli stati e controllabile in k passi per qualche valore di k.

Osservazione

Al primo impatto sembra che la verifica della controllabilità sia un processo molto lungo perché si dovrebbe andare alla ricerca di un k che verifichi le ipotesi suddette. Tuttavia si può facilmente dimostrare che sarà sufficiente considerare la situazione per k=n. In questo modo la condizione di controllabilità si riduce alla

$$\mathrm{Im}F^n \subseteq \mathrm{Im}\,[\,G\ FG\ \dots\ F^{n-1}G] = X^R$$

Questa osservazione vale la pena formalizzarla sotto forma di teorema data la sua rilevanza nello studio della controllabilità dato che, come detto, ci risparmierà un gran numero di operazioni.

Teorema

Il sistema $\Sigma(F,G,H)$ è controllabile se e solo se è controllabile in n passi se vale:

$$\mathrm{Im}F^n \subseteq \mathrm{Im}\,[\,G\ FG\ \dots\ F^{n-1}G] = X^R$$

Dimostrazione

Se il sistema è controllabile in n passi e vale la inclusione di cui sopra allora il sistema di dice controllabile per definizione. Viceversa se il sistema è controllabile in $k \leq n$, esso è controllabile in n passi, dato che può essere scelto $u(k) = u(k+1) = \dots = u(n-1) = 0$ per mantenere il sistema nello stato 0. Se $k > n$, ricordando che $\mathrm{Im}F^n = \mathrm{Im}F^k$, si ottiene:

$$\mathrm{Im}F^n = \mathrm{Im}F^k \subseteq \mathrm{Im}\,[\,G\ FG\ \dots\ F^{k-1}G] = \mathrm{Im}\,[\,G\ FG\ \dots\ F^{n-1}G].$$

c.v.d

In generale per i sistemi discreti la condizione di raggiungibilità e controllabilità non sono equivalenti però accade che la raggiungibilità implica sempre la controllabilità.

Un caso particolare in cui la condizione di controllabilità implica invece quella di raggiungibilità si ha quando F è non singolare. In tale circostanza infatti $\mathrm{Im}F^n = X$ e quindi sfruttando il teorema appena descritto possiamo scrivere:

$$X = \mathrm{Im}F^n \subseteq \mathrm{Im}\,[\,G\ FG\ \dots\ F^{n-1}G]$$

Si osserva immediatamente che:

rango$[\,G\ FG\ \dots\ F^{n-1}G] = n$.

e avvalendoci delle definizioni e della trattazione precedente sulla raggiungibilità si verifica che lo stato oltre ad essere controllabile è anche raggiungibile.

Osservazione

Si può osservare che per ogni k il sottospazio raggiungibile in k passi ha dimensione minore o uguale del sottospazio controllabile in k passi.

Dopo questa discussione preliminare dove si è chiarito che cosa sia la controllabilità, può essere utile descrivere quale sia la procedura corretta per determinare gli ingressi che permettono di trasferire uno stato x(0) ad uno stato x(k). In particolare si parlerà di trasferibilità se lo stato iniziale $x(0) \neq 0$

Ovviamente prima di determinare tali ingressi è necessario verificare che essi esistano cioè che effettivamente il sistema dallo stato x(0) possa in qualche modo evolvere allo stato x(k) attraverso un ingresso u(t). Tale verifica di raggiungibilità è condotta attraverso la seguente appartenenza:

$$x(k) - F^k x(0) \in \mathrm{Im}\,[\,G\ FG \ldots F^{k-1}G\,] = X_k^R$$

ovvero se $x(k) - F^k x(0)$ essere raggiungibile a zero in k passi. Più semplicemente, fissato x(0) = 0, gli stati che possono essere raggiunti in k passi fanno parte dell'insieme $X_k^R + F^k x(0)$ ossia sono elementi dello spazio quoziente X/X_k^R .

Una volta verificata questa condizione per determinare i vari ingressi basterà procedere come segue:

$$x(k) - F^k x(0) = \mathbf{R}_k \begin{pmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \\ \\ u(0) \end{pmatrix} \qquad 1$$

ovviamente u(k-1), u(k-2), … , u(0) è il nostro vettore incognito.

Proposizione

Siano dati degli ingressi del tipo u(k-1), u(k-2), … , u(0), essi sono gli ingressi che fanno evolvere il sistema dallo stato x(k) allo stato x(0)=0 se risolvono il sistema lineare e non omogeneo (1). Consideriamo anche il sistema omogeneo

$$0 = \mathbf{R}_k \begin{pmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \\ \\ u(0) \end{pmatrix} \qquad 2$$

La soluzione generale di (1) è la somma di una soluzione particolare e una soluzione arbitraria del sistema omogeneo (2) associato.

Vale la pena spendere due parole sulla procedura che si segue per ricavare la soluzione particolare. Basta risolvere la seguente equazione:

$$(\mathbf{R}_k \mathbf{R}_k^T)\eta = x(k) - F^k x(0) \text{ nell'incognita } \eta$$

ponendo u = $\mathbf{R}_k^T\,\eta$.

Nel caso di sistemi raggiungibili in k passi possiamo esprimere la soluzione di queste due equazione in questa forma alla luce del fatto che la matrice $\mathbf{R}_k$ ha rango n e la matrice ($\mathbf{R}_k\,\mathbf{R}_k^T$) è invertibile. Quindi la soluzione sarà:

$$u = \mathbf{R}_k^T\,(\mathbf{R}_k\,\mathbf{R}_k^T)^{-1}(x(k) - F^k x(0)).$$

-2) Controllabilità per sistemi continui

Come detto nell'introduzione alla controllabilità i passaggi che si svolgeranno per arrivare alla soluzione di un problema riguardante un sistema continuo anziché discreto saranno i medesimi l'unica differenza è che riguardando spazi di dimensione infinita dovremmo utilizzare,come nel caso della raggiungibilità, operatori diversi che meglio si prestano a questa tipologia di sistemi.

Partiamo dapprima dimostrando che esiste un ingresso che risolve il problema della controllabilità verificando la seguente appartenenza

$$x(t) - e^{Ft}x(0) \in X^R$$

Quindi gli stati che possono essere raggiunti all'istante t a partire dallo stato iniziale x(0), sono quelli dell'insieme $e^{Ft}x(0) + X^R$

Per la determinazione esplicita dell'ingresso si deve risolvere la seguente equazione in u( )

$$X(t) - e^{Ft}x(0) = R_t\,u(\,) \qquad 3$$

Proposizione

Sia u() una ingresso del sistema continuo. La soluzione di (3) è data da una soluzione particolare e una soluzione arbitraria del sistema omogeneo associato 0 = $R_t\,u(\,)$.

Per quanto concerne la soluzione particolare si deve ricorrere alle proprietà degli operatori aggiunti risolvendo tutto nell'incognita η.

$\wp_t\eta = R_t\,R_t^*\eta = x(t) - e^{Ft}x(0)$

dove $\wp_t = R_t\,R_t^*$

Ponendo

$u(\,) = R_t^*\eta$

cosicché

$u(\sigma) = G^T e^{F^T(t-\sigma)}\eta$

di questa terna le prime due equazioni evidenziano una sola soluzione che corrisponde alla norma minima così identificata

$$\|\,u(\,)\,\| = \left(\int_0^t u^T(\sigma)u(\sigma)d\sigma\right)^{1/2}$$

se il sistema è raggiungibile allora $\wp_t$ è invertibile e l'ultima equazione della terna si può riscrivere in questo modo:

$$u(\sigma) = G^T e^{F^T(t-\sigma)} \wp_t^{-1}(x(t) - e^{Ft}x(0))$$

BIBLIOGRAFIA

E. Fornasini G. Marchesini, 1992, Appunti di TEORIA DEI SISTEMI, Padova, Italia, Edizioni Libreria Progetto