



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Diagonalizzazione di matrici per fermioni “vector-like”

Relatore

Prof.ssa Ramona Groeber

Laureando

Anna Gussago

Anno Accademico 2023/2024

ABSTRACT

La scoperta del bosone di Higgs e dell'higgs Mechanism, fondamentale per spiegare in che modo le particelle elementari acquisiscono massa, ha permesso di completare il Modello Standard, teoria delle interazioni fondamentali in grado di conciliare le descrizioni di tre delle quattro forze fondamentali: forte, debole ed elettromagnetica. La validità del Modello Standard si mostra nel suo straordinario accordo con le misurazioni effettuate alle scale di energia accessibili ai nostri esperimenti.

Tuttavia, non è stato ancora possibile determinare dei vincoli su alcuni accoppiamenti dell'Higgs con le particelle del Modello Standard. Una soluzione papabile consiste nella possibilità di introdurre dei fermioni pesanti, di massa molto superiore alle energie misurabili ad oggi in laboratorio; questa estensione può dare adito a nuove interazioni, permettendo così di modificare e, auspicabilmente, amplificare, gli accoppiamenti problematici. Necessariamente, l'aggiunta di queste particelle non può inficiare le previsioni del Modello Standard a "basse energie", perché questo sarebbe in contraddizione con le osservazioni, perciò si ipotizza che, data la massa molto alta di tali fermioni rispetto alle particelle native, si verifichi un fenomeno di "disaccoppiamento" dalla teoria che lasci intatto il modello a basse energie.

In questo lavoro di tesi, ci proponiamo di indagare l'impatto dell'introduzione di quark pesanti di tipo vector-like sulle interazioni Yukawa dei quark del Modello Standard con l'Higgs field. In particolare, siamo interessati a verificare che il disaccoppiamento avvenga in modo significativo, come previsto da misure effettuate all'LHC [1, 2], già per vector-like quark di massa 1-3 TeV.

Nel capitolo 1, si introducono brevemente i vector-like quark e il loro possibile contributo nell'amplificazione (e quindi nella determinazione di vincoli più stringenti) per gli accoppiamenti Yukawa dei quark leggeri. Nel capitolo 2 si trattano le basi teoriche necessarie a comprendere la struttura della Lagrangiana del Modello Standard prima e dopo la rottura spontanea di simmetria dovuta all'Higgs Mechanism; inoltre si introduce il concetto di *mass basis*, che diagonalizza la matrice di massa del modello e nella quale dovremo lavorare per ottenere risultati fisici. Nel capitolo 3 si tratta l'estensione del modello al quale vengono aggiunti dei vector-like quark che modificano i settori della Lagrangiana, in particolare il settore Yukawa. Infine, nel capitolo 4, si affronta analiticamente e numericamente il problema di calcolare masse e interazioni dei quark del MS con i nuovi fermioni pesanti, verificando concretamente gli effetti del disaccoppiamento.

Indice

1	Introduzione	1
2	Matrici di massa	3
2.1	Unbroken Lagrangian	3
2.2	Broken Lagrangian	4
2.2.1	Mass basis	5
2.2.2	Matrice CKM	6
3	Effective Field Theory	7
3.1	SMEFT	7
3.1.1	Introduzione di VLQ nel modello	8
3.1.2	Limiti sperimentali	10
4	Compatibilità dei VLQ con la teoria del Modello Standard	13
4.1	Soluzione analitica	13
4.2	Soluzione numerica	16
5	Conclusioni	21
	Bibliografia	23

Capitolo 1

Introduzione

I vector-like quark sono particelle fermioniche (di spin $1/2$) ipotetiche che trasformano come tripletti sotto il gruppo di gauge di colore, $SU(3)_c$; si tratta di fermioni non chirali, le cui componenti left- e right-handed trasformano allo stesso modo sotto il gruppo di simmetria del settore elettrodebole, $SU(2)_L$ (e cioè hanno gli stessi numeri quantici elettrodeboli e di colore). Le rappresentazioni del gruppo di simmetria di tali quark aggiuntivi che si accoppiano linearmente con le rappresentazioni del Modello Standard e, pertanto, danno adito ad interazioni fisiche con le sue particelle, sono sette: i singoletti $T^{2/3}$ e $B^{-1/3}$, i doppietti $(X^{5/3}T^{2/3})$ e $(T^{2/3}B^{-1/3})$ e i tripletti $(X^{5/3}T^{2/3}B^{-1/3})$ e $(T^{2/3}B^{-1/3}Y^{2/3})$. I vector-like quark esistono in molte delle Teorie Oltre al Modello Standard (BSM) che risolvono questioni ancora irrisolte nel Modello Standard. Un esempio è dato dal gruppo di estensioni dette “Composite Higgs Models” che normalmente presuppongono una massa di circa 1 TeV per i vector-like quark. Queste teorie propongono una spiegazione alternativa riguardo all’origine della massa del bosone di Higgs, ipotizzando che, anziché essere una particella elementare, potrebbe essere composto da altre particelle ancor più fondamentali. In questi modelli, i vector-like quark sono responsabili della formazione del cosiddetto “condensato di Higgs” che conferisce la massa alle particelle nel Modello Standard. In generale, questo approccio costituisce un espediente che permette di risolvere dubbi di tipo sperimentale, fra i quali ad esempio quelli riguardanti la massa del neutrino e la materia oscura[3]; inoltre consente di affrontare questioni teoriche ancora aperte come il problema di gerarchia. Teorizza, infatti, la comparsa di un Higgs leggero come stato legato del settore di interazione forte, realizzato come pseudo bosone di Nambu-Goldstone e, pertanto, più leggero delle normali risonanze del settore forte [4, 5].

Fanno inoltre parte dell’ormai ristretto gruppo di fermioni “coloured” la cui esistenza è ammessa dai dati attuali, dal momento che altre opzioni, come i quark di quarta generazione, sono state escluse a causa di misure sperimentali recenti [6, 2]. I vector-like quark, non ricevendo tutta la loro massa da accoppiamenti Yukawa con doppietti dell’Higgs, rimangono compatibili con i risultati delle misure. Per i vector-like fermions il termine di massa $\bar{\psi}_L\psi_R$ non è vietato da nessuna simmetria, cioè risulta invariante indipendentemente dall’Higgs.

Il Modello Standard unifica la teoria elettrodebole con la QCD (Quantum Chromodynamics) e permette di descrivere le tre interazioni forte, debole ed elettromagnetica in un framework unico. La scoperta dell’Higgs [7, 8] ha completato il modello standard, ma alcuni degli accoppiamenti dell’Higgs field con le particelle del modello sono quasi totalmente “unconstrained”; gli accoppiamenti Yukawa con i quark leggeri, ad esempio, sono particolarmente difficili da gestire a causa della piccola massa dei fermioni, che permette di vincolarne la forza di coupling solo entro alcuni ordini di grandezza dal loro valore nel MS [9, 10].

Sperimentalmente, l’accoppiamento del bosone di Higgs con i bosoni di gauge e i fermioni di terza generazione, più pesanti, è stato misurato con buona accuratezza, ma la misura dell’accoppiamento con i fermioni di prima e seconda generazione rimane problematica. [11]

Per studiare possibili deviazioni dal MS, è stato introdotto il *k-framework*, nel quale il parametro k , detto *forza di accoppiamento universale*, esprime potenziali deviazioni dell’accoppiamento dell’Higgs

rispetto ai valori del MS:

$$k_i = \frac{g_{hi}}{g_{hi}^{SM}}. \quad (1.1)$$

Il rapporto di proporzionalità tra la forza dell'accoppiamento e la massa del fermione

$$y_f \propto \frac{m_f}{v},$$

con $v = 246.2$ GeV indicante il vacuum expectation value, porta ad una soppressione dello scattering coinvolto nell'interazione dei fermioni con l'Higgs, tanto più forte quanto più è leggera la particella. Conseguentemente, i migliori risultati ottenuti fino ad ora per i quark di prima e seconda generazione rimangono molto approssimativi :

$$k_u < 260, \quad k_c < 1.2, \quad (1.2)$$

$$k_d < 156, \quad k_s < 13. \quad (1.3)$$

I risultati per i quark di seconda generazione sono stati ottenuti da un fit globale dei dati rilevati all'High Luminosity-LHC (LH-LHC) a confronto con altri collisori [12], mentre quelli riguardanti i quark di prima generazione vengono da uno studio più recente, nel quale si adoperano discriminanti cinetiche nello studio del decadimento off-shell dell'Higgs in una coppia di bosoni Z [10]. A questo punto, subentra la necessità di costruire un nuovo modello fisico che sia consistente con tutti i limiti sperimentali attualmente noti e tale che gli accoppiamenti Yukawa con i quark leggeri siano fortemente amplificati.

I vector-like quark si prestano alla costruzione di tale ampliamento del MS, in quanto la loro introduzione può portare al cambiamento di alcune quantità osservabili e causare nuovi fenomeni. Hanno infatti la tendenza ad interagire con i quark del MS, soprattutto con quelli di terza generazione, e sono soggetti a fenomeni di decadimento per FCNC (flavour-changing neutral current), che non si verificano nel Modello Standard¹. Di conseguenza, il vector-like quark di tipo up, T , può decadere in un bosone W e un quark b (fenomeno che si verifica anche nel MS, in quanto mediato da correnti cariche), così come in un bosone Z o Higgs e un quark t (decadimento mediato dalle FCNC).

In altre parole, una teoria che aggiunge i vector-like quark al MS si presta ad *estensioni minimali* dello stesso, spesso ottenute dall'aggiunta di un unico multipletto VL.

¹L'assenza di FCNC_S a tree level nel Modello standard è principalmente dovuta alla struttura delle interazioni deboli mediate da scambi di bosoni W e Z . La matrice CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa), che regola queste interazioni a tree level, introduce una forte soppressione a causa delle piccole dimensioni degli elementi fuori diagonale. Questa soppressione, insieme al meccanismo Glashow-Iliopoulos-Maiani (GIM), garantisce che non si verifichino processi che coinvolgono un cambiamento del sapore dei quark [13].

Tali fenomeni possono avvenire solo a livello di loop corrections (o "next-to-leading order") nel MS, coinvolgendo fluttuazioni quantistiche temporanee del sapore dei quark, legate ad emissione o assorbimento di bosoni virtuali.

Capitolo 2

Matrici di massa

Al fine di discutere l'introduzione dei vector-like quark (VLQ) nella teoria, è necessario innanzitutto costruire la Lagrangiana del Modello Standard.

2.1 Unbroken Lagrangian

La Lagrangiana del MS prima della rottura della simmetria elettrodebole si può scrivere in questo modo compatto:

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{kin}^{g.bosons} + \mathcal{L}_{kin}^{fermions} + \mathcal{L}_{kin}^{\phi} + \mathcal{L}_{pot}^{\phi} + \mathcal{L}_Y. \quad (2.1)$$

Discutiamo nel dettaglio i componenti della 2.1:

1. $\mathcal{L}_{kin}^{g.bosons}$ (detto anche termine di Yang-Mills): contiene i contributi cinetici di tutti i bosoni di gauge. Data la **natura non abeliana** della teoria, contiene anche termini di interazione bosone-bosone:

$$\mathcal{L}_{kin}^{g.bosons} = -\frac{1}{4}G^{A\mu\nu}G_{\mu\nu}^A - \frac{1}{4}W^{I\mu\nu}W_{\mu\nu}^I - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

dove $G_{\mu\nu}^A$, $W_{\mu\nu}^I$ e $B_{\mu\nu}$ sono le forze dei campi dei bosoni di gauge.

2. $\mathcal{L}_{kin}^{fermions}$: termine cinetico per i fermioni.

Le componenti left-handed dei fermioni trasformano come doppietti di $SU(2)_L$, mentre le componenti right-handed come singoletti di $SU(2)_L$. Per questo motivo, è opportuno scrivere i campi di quark e leptoni come:

$$Q_L^i = \begin{pmatrix} u_L^i \\ d_L^i \end{pmatrix}, \quad u_R^i, d_R^i, \quad (2.3)$$

$$L_L^i = \begin{pmatrix} \nu_L^i \\ e_L^i \end{pmatrix}, \quad e_R^i, \quad (2.4)$$

dove l'indice corre sulle generazioni (notiamo che tutti i quark hanno anche un indice di colore che va da 1 a 3 e che viene omesso per alleggerire la notazione).

I fermioni portano ipercarica $Y_f = Q_f - I_f^3$, per cui abbiamo:

$$Y_{Q_L^i} = \frac{1}{6} \quad Y_{u_R^i} = \frac{2}{3} \quad Y_{d_R^i} = -\frac{1}{3}$$

$$Y_{L_L^i} = -\frac{1}{2} \quad Y_{e_R^i} = -1.$$

Si giunge quindi ad una versione compatta del termine lagrangiano:

$$\mathcal{L}_{kin}^{fermions} = \sum_f \bar{\psi}_f i \not{D} \psi_f, \quad (2.5)$$

dove

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_3 \frac{\lambda^A}{2} W_\mu^A - ig_2 \frac{\sigma^I}{2} W_\mu^I - ig_1 Y_f B_\mu \quad (2.6)$$

è la derivata covariante¹ e \not{D} è notazione per $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$.

3. \mathcal{L}_{kin}^ϕ : termine cinetico dell'Higgs, che trasforma come un doppietto ϕ sotto $SU(2)_L$:

$$\mathcal{L}_{kin}^\phi = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi), \quad (2.7)$$

che contiene le interazioni tra l'Higgs field e i bosoni di gauge. Dà la massa ai bosoni di gauge fisici tramite la rottura spontanea della simmetria.

4. \mathcal{L}_{pot}^ϕ : termine potenziale per l'Higgs field. Attribuisce massa all'Higgs e ne comporta l'autointerazione:

$$\mathcal{L}_{pot}^\phi = -V(\phi^\dagger \phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2. \quad (2.8)$$

5. \mathcal{L}_Y : **termine di Yukawa**. Genera le masse di tutti i fermioni e contiene le interazioni dell'Higgs con i fermioni:

$$\mathcal{L}_Y = \sum_f \bar{\psi}_f y_f \psi_f \phi, \quad (2.9)$$

dove y_f è l'accoppiamento Yukawa del fermione f .

Quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SM} = & -\frac{1}{4} G^{A\mu\nu} G_{\mu\nu}^A - \frac{1}{4} W^{I\mu\nu} W_{\mu\nu}^I - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ & + \sum_f \bar{\psi}_f i \not{D} \psi_f \\ & + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 \\ & + \sum_f \bar{\psi}_f y_f \psi_f \phi, \end{aligned} \quad (2.10)$$

cioè, esplicitando per i campi fermionici 2.3 e 2.4:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SM} = & -\frac{1}{4} G^{A\mu\nu} G_{\mu\nu}^A - \frac{1}{4} W^{I\mu\nu} W_{\mu\nu}^I - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ & + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 \\ & + \sum_i [\bar{L}_L^i \not{D} L_L^i + \bar{Q}_L^i \not{D} Q_L^i + \bar{e}_R^i \not{D} e_R^i + \bar{u}_R^i \not{D} u_R^i + \bar{d}_R^i \not{D} d_R^i] \\ & + \sum_{ij} [\bar{L}_L^i y_e^{ij} \phi e_R^j + \bar{Q}_L^i y_d^{ij} \phi d_R^j + \bar{Q}_L^i y_u^{ij} (\tilde{\phi}) u_R^j + h.c.], \end{aligned} \quad (2.11)$$

dove $\tilde{\phi} = i\sigma_2 \phi^*$, con σ_2 la seconda delle matrici di Pauli.

2.2 Broken Lagrangian

La simmetria di gauge elettrodebole è rotta quando l'Higgs field acquisisce un vacuum expectation value con valore $v \simeq 246.2$ GeV. Per il potenziale considerato (2.8), il minimo si trova a

$$\langle \phi \rangle_0 = \langle 0 | \phi | 0 \rangle = \left(-\frac{\mu^2}{2\lambda} \right)^{1/2} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}},$$

¹Le matrici λ^A con $A = 1, \dots, 8$ sono le matrici di Gell-Mann, generatori del gruppo $SU(3)_c$, le σ^I con $I = 1, 2, 3$ sono le matrici di Pauli, che generano il gruppo $SU(2)_L$, Y_f è l'ipercarica e g_1, g_2 e g_3 sono rispettivamente le costanti di accoppiamento dei gruppi $U(1)_Y$, $SU(2)_L$ e $SU(3)_c$.

per cui, espandendo il campo, che al primo ordine si scrive in termini dei quattro campi $\theta_{1,2,3}(x)$ e $h(x)$, attorno al vacuum expectation value, si ottiene:

$$\phi = \begin{pmatrix} \theta_2 + i\theta_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x) - i\theta_3) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta_a(x)\sigma^a(x)/v} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}.$$

Ora, adottando la gauge unitaria, tale per cui:

$$\phi_{g.u.} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

si possono scrivere i nuovi termini della Lagrangiana.

In seguito a rottura spontanea della simmetria elettrodebole (Spontaneous symmetry breaking, SSB), si definiscono quattro campi scalari reali. Per il teorema di Goldstone² un solo campo, identificabile con il fotone e associato al gruppo di simmetria intatto $U(1)_{em}$, rimane massless; i tre gradi di libertà rimanenti danno vita a tre bosoni di Goldstone, che acquisiscono una massa grazie al meccanismo di Higgs. Tuttavia, la nuova Lagrangiana (in seguito a SSB) contiene anche un termine che suggerirebbe la presenza di altri tre possibili bosoni di Goldstone noti come “would-be Goldstone bosons”; essi non si manifestano fisicamente come polarizzazioni longitudinali dei bosoni W e Z [14].

Ogni settore viene modificato dalla rottura della simmetria, ma, in particolare, siamo interessati al termine Yukawa:

$$\mathcal{L}_Y|_{g.u.} = -\frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}_L^i y_u^{ij} u_R^j + \bar{d}_L^i y_d^{ij} d_R^j + \bar{e}_L^i y_e^{ij} e_R^j + h.c. \right]. \quad (2.13)$$

2.2.1 Mass basis

Analizziamo meglio il settore Yukawa. I campi di materia possono essere divisi in tripletti di sapore:

$$u_{L,R} = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_{L,R} \quad d_{L,R} = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_{L,R} \quad e_{L,R} = \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}_{L,R}.$$

Le matrici di Yukawa y_f^{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) sono matrici 3×3 (flavour mixing) nella base dell'interazione. Il termine lagrangiano (2.13) dà massa ai fermioni, quindi, per definire in modo consistente le masse e i propagatori dei fermioni, vogliamo lavorare nella base in cui queste matrici sono diagonali. Ora, per gestire il carattere chirale della teoria, non possiamo procedere con una tradizionale diagonalizzazione, in quanto la matrice M mappa lo spazio dei fermioni right-handed in quello dei fermioni left-handed, per cui il cambio di base dalla base delle interazioni alla mass basis deve essere effettuato da due matrici U e V diverse, tali che

$$V^\dagger M U = \Sigma, \quad (2.14)$$

con Σ matrice diagonale e U e V unitarie ($AA^\dagger = A^\dagger A = \mathbb{I}$, con $A=U,V$). Si tratta, quindi, di eseguire una decomposizione ai valori singolari (SVD), che ci permetta di generalizzare il processo di diagonalizzazione.

Si parte ruotando i campi:

$$\begin{cases} u'_L = L_u u_L \\ d'_L = L_d d_L \\ e'_L = L_e e_L \end{cases} \quad \begin{cases} u'_R = R_u u_R \\ d'_R = R_d d_R \\ e'_R = R_e e_R \end{cases},$$

dove le matrici di rotazione R e L sono unitarie e dove abbiamo denotato con un apostrofo i campi espressi nella base nella quale la matrice di massa è diagonale.

²Il teorema di Goldstone dice che, per ogni rottura spontanea di una simmetria continua, la teoria contiene una particella scalare (di spin 0) priva di massa detta bosone di Goldstone. Il numero di bosoni di Goldstone è equivalente al numero di generatori rotti [14].

A seguito delle rotazioni, il settore Yukawa diventa:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y|_{g.u.} &= -\frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}_L(L_u^\dagger L_u) y_u (R_u^\dagger R_u) u_R + \bar{d}_L(L_d^\dagger L_d) y_d (R_d^\dagger R_d) d_R + \bar{e}_L(L_e^\dagger L_e) y_e (R_e^\dagger R_e) e_R + h.c. \right] \\ &= -\frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}'_L(L_u y_u R_u^\dagger) u'_R + \bar{d}'_L(L_d y_d R_d^\dagger) d'_R + \bar{e}'_L(L_e y_e R_e^\dagger) e'_R + h.c. \right].\end{aligned}\tag{2.15}$$

Quindi è possibile ottenere la versione diagonale della matrice di interazione y tramite trasformazione unitaria, scegliendo R e L in modo tale che:

$$\hat{y}_f = L_f y_f R_f^\dagger = \begin{pmatrix} y_{f1} & & \\ & y_{f2} & \\ & & y_{f3} \end{pmatrix}.\tag{2.16}$$

Possiamo allora definire la massa che i fermioni acquisiscono grazie al meccanismo di Higgs come:

$$m_f^{ij} = \frac{v}{\sqrt{2}} \hat{y}_f^{ij},\tag{2.17}$$

in particolare:

$$m_u^{ij} = \begin{pmatrix} m_u & & \\ & m_c & \\ & & m_t \end{pmatrix}, \quad m_d^{ij} = \begin{pmatrix} m_d & & \\ & m_s & \\ & & m_b \end{pmatrix}, \quad m_e^{ij} = \begin{pmatrix} m_e & & \\ & m_\mu & \\ & & m_\tau \end{pmatrix}.\tag{2.18}$$

2.2.2 Matrice CKM

Il cambio di base, che ci ha permesso di ottenere la forma diagonale delle matrici di massa, influenza altre interazioni. Le interazioni tra fermioni dello stesso tipo (cioè i settori cinetici, elettromagnetico e debole-neutro) rimangono invariate grazie all'unitarietà di L_f e R_f e sono quindi diagonali in questa nuova base.

Le interazioni deboli-cariche, invece, coinvolgono sia fermioni di tipo up che di tipo down contemporaneamente, per cui non è possibile sfruttare l'unitarietà delle matrici L_f e si ottiene l'elemento lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -\frac{g_2}{\sqrt{2}} \{ \bar{u}'_L(L_u L_d^\dagger) \mathcal{W}^+ d'_L + \bar{\nu}'_L(L_\nu L_e^\dagger) \mathcal{W}^+ e'_L \}.\tag{2.19}$$

La matrice $L_u L_d^\dagger$ è detta matrice Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (V_{CKM}), mentre l'analogo leptonic $L_\nu L_e^\dagger$ si dice matrice Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (U_{PMNS}); si tratta di matrici unitarie con proprietà di flavour mixing.

Notiamo che, assumendo i neutrini massless, possiamo scegliere $L_\nu \equiv L_e$, per cui $U_{PMNS} = \mathbb{I}$.

Capitolo 3

Effective Field Theory

Al fine di parametrizzare gli effetti della nuova teoria fisica, è utile adottare una descrizione di effective field theory (teoria di campo efficace)¹ che fornisca un framework indipendente dal modello e teoreticamente consistente.

In particolare, il MS può costituire una teoria di campo efficace entro una scala $\Lambda \gg v$ (con Λ minore della scala di Planck), nella quale sono trascurabili le interazioni gravitazionali. Λ rappresenta una “barriera di ignoranza” oltre la quale la fisica non inclusa nel modello diventa significativa.

3.1 SMEFT

SMEFT (Standard Model effective field theory) fornisce un buon framework, valido per energie sotto il limite di produzione di nuovi gradi di libertà, per studiare estensioni al MS oltre che una parametrizzazione della nuova fisica che preserva il gruppo di gauge del modello. La nuova Lagrangiana è:

$$\mathcal{L}_{SMEFT} = \mathcal{L}_{SM} + \mathcal{L}^{(5)} + \mathcal{L}^{(6)} + \mathcal{L}^{(7)} + \dots$$

Il primo elemento significativo per la fisica oltre la scala elettrodebole è $\mathcal{L}^{(6)}$, dal momento che $\mathcal{L}^{(5)}$ è rilevante solo per processi riguardanti oscillazioni di neutrini. Avviamo il ragionamento considerando operatori 6-dimensionali, la cui base non ridondante è la cosiddetta “Warsaw basis” [15].

Allo scopo di costruire un modello nel quale gli accoppiamenti Yukawa siano effettivamente amplificati, dobbiamo introdurre nuovi gradi di libertà e cioè **nuove particelle** che nascono ad alte energie e le cui interazioni con le particelle del modello standard influenzino gli accoppiamenti Yukawa². I VLQ ben si prestano a questo compito: la loro massa si ipotizza essere dell'ordine dei TeV; sono in grado di modificare alcune osservabili del modello; sono fortemente giustificati da aspetti teorici, quali la spiegazione della rottura di simmetria elettrodebole nel caso l'Higgs sia un pseudo-bosone di

¹Si tratta di un tipo di approssimazione o teoria efficace di una teoria fisica sottostante. Include i gradi di libertà utili a descrivere i fenomeni che si verificano a determinate scale di lunghezza o energia, ignorando la sottostruttura della teoria originale ed escludendo i gradi di libertà a distanze inferiori (energie più elevate). In poche parole, permette di ottenere un modello semplificato, valido per le scale di lunghezza ed energia di interesse.

²Linee guida per la costruzione del modello (che fanno in modo che, a basse energie, la teoria è ben descritta da SMEFT:

1. su scale di energia inferiori al cut-off Λ , la fisica è ben descritta da una \mathcal{L}_{BSM} 4-d effettiva, localmente inv. sotto Poincarè;
2. \mathcal{L}_{BSM} include i campi che appaiono nel MS (hanno le stesse regole di trasformazione sotto il gruppo di gauge del MS);
3. \mathcal{L}_{BSM} contiene solo campi di particelle con spin ≤ 1
4. gli unici fermioni chirali sotto trasf. del gruppo G_{MS} sono quelle del MS (i fermioni nuovi sono vector-like rispetto a G_{MS}).

Goldstone.

Nonostante spesso si tenda a trattare modelli nei quali viene introdotto un solo vector-like quark alla volta, è molto probabile che, in realtà, più VLQ, presumibilmente di masse simili tra loro, coesistano.

3.1.1 Introduzione di VLQ nel modello

La Lagrangiana sarà:

$$\mathcal{L}_{BSM} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_{mix} + \dots \quad (3.1)$$

con \mathcal{L}_0 contenente termini di dimensione $d \leq 6$ relativi unicamente a campi appartenenti al MS; $\mathcal{L}_{S,F,V}$ che include termini di dimensione $d \leq 5$, rispettivamente relativi a nuovi campi scalari, campi fermionici e campi vettoriali (escludendo invece i prodotti di nuovi campi con spin diversi); \mathcal{L}_{mix} che contiene termini di dimensione $d \leq 4$, con prodotti di nuovi campi con spin diversi. Sono stati esclusi per troncamento tutti i termini che non contribuiscono all'approssimazione di interesse.

La Lagrangiana \mathcal{L}_F è data da:

$$\mathcal{L}_F = \mathcal{L}_F^{quad} + \mathcal{L}_F^{int}, \quad (3.2)$$

con

$$\mathcal{L}_F^{quad} = \sum_{\psi} [\bar{\psi} i \not{D} \psi - M_{\psi} \bar{\psi} \psi], \quad (3.3)$$

$$\mathcal{L}_F^{int} = \mathcal{L}_{leptons}^{(4)} + \mathcal{L}_{quarks}^{(4)} + \mathcal{L}_{leptons}^{(5)} + \mathcal{L}_{quarks}^{(5)}. \quad (3.4)$$

Nello specifico, siamo interessati al termine $\mathcal{L}_{quarks}^{(4)}$ (di dimensione 4).

Applicando la SMEFT, emergono come particolarmente rilevanti i contributi sui vertici Higgs-quark dovuti ad alcuni operatori 6-dimensionali: $Q_{\phi\Box}$, $Q_{\phi D}$, $Q_{u\phi}$ e $Q_{d\phi}$. Le modifiche a questi vertici possono influenzare direttamente l'efficacia con cui il campo di Higgs trasferisce energia ai quark e quindi influenzare le masse dei quark stessi, portando a conseguenze significative per la fisica delle particelle.

I primi due operatori, $Q_{\phi\Box}$ e $Q_{\phi D}$, richiedono una ridefinizione dell'Higgs field perché i loro termini cinetici siano normalizzati in modo canonico³. Questo significa che influenzano non solo i vertici Higgs-quark, ma anche altri accoppiamenti dell'Higgs field. Di conseguenza, i loro contributi possono avere un impatto più ampio sul modello, rendendo più complessa l'analisi dei risultati.

Viceversa, gli operatori $Q_{u\phi}$ e $Q_{d\phi}$ non richiedono una ridefinizione dell'Higgs field e quindi non hanno effetto su altri accoppiamenti. Questi operatori influenzano direttamente solo i vertici Higgs-quark, semplificando l'analisi dei loro contributi e la loro interpretazione in termini di risultati sperimentali. Concentrarsi sugli operatori $Q_{u\phi}$ e $Q_{d\phi}$ può quindi consentire una migliore comprensione degli effetti delle correzioni ai vertici Higgs-quark nel contesto della teoria effettiva.

Scriviamoli esplicitamente:

$$Q_{u\phi} = (\phi^\dagger \phi) (\bar{Q}_p u_r \tilde{\phi}),$$

$$Q_{d\phi} = (\phi^\dagger \phi) (\bar{Q}_p d_r \phi).$$

Questi operatori effettivi, possono essere generati da fermioni vector-like pesanti come quelli da noi considerati.

Per garantire l'invarianza di gauge sotto $SU(3)_c$, è necessario includere fermioni dotati di carica di colore, ossia i quark. Per rispettare l'invarianza sotto $SU(2)_L$, invece, si adottano due tipi di multipletti di VLQ: $(F_1, F_2) = (\text{doppietto}, \text{singoletto})$ oppure $F_1, F_2 = (\text{doppietto}, \text{tripletto})$. Resta infine una certa libertà nella scelta dell'ipercarica, che determina le possibilità finali per le combinazioni tra VLQ.

Le scelte più semplici per ogni settore della teoria sono:

- doppietto $SU(2)$: $Q_{1i} = (Q_{1u}, Q_{1d})_i$;

³Si parla di "normalizzazione canonica" in riferimento ad un processo, spesso adoperato in quantum field theory, attraverso il quale i campi di una teoria vengono riscaldati o ridefiniti, in modo che i termini della Lagrangiana abbiano una certa forma e certe proprietà. Ad esempio, in molte teorie (MS compreso) è auspicabile che i termini cinetici si trovino in forma canonica e cioè che siano quadratici nelle derivate di campo e che abbiano fattori di rinormalizzazione appropriati, in modo da semplificare i calcoli e assicurare consistenza con i principi della meccanica quantistica [16].

- singoletto $SU(2)$ di tipo *up*: U_i ;
- singoletto $SU(2)$ di tipo *down*: D_i .

Questi elementi corrispondono a tre VLQ, con i rispettivi numeri quantici riportati in Tabella 3.1, dove assumiamo che U_i , D_i , Q_{1i} si presentino in tre generazioni:

Fermioni vector-like			
Nome	U_i	D_i	Q_{1i}
n.q.	$(3, 1)_{2/3}$	$(3, 1)_{1/3}$	$(3, 2)_{1/6}$

Tabella 3.1: Caratteristiche dei vector-like quark.

Stiamo aggiungendo al modello tre particelle con gli stessi numeri quantici dei quark del Modello Standard, ma caratterizzate da natura vettoriale invece che chirale e da una massa molto maggiore (presumibilmente dell'ordine dei TeV). La massa dei VLQ definisce la scala di energia di funzionamento del modello; la chiamiamo Λ e la useremo come restrizione per la teoria, come accennato all'inizio del capitolo (costituirà la “barriera di ignoranza” per l'estensione al MS trattata).

Per includere questi ulteriori campi dobbiamo introdurre nuovi termini nella Lagrangiana:

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_{quarks}^{(4)} = & (\lambda_U)_{ri} \bar{U}_{Rr} \tilde{\phi}^\dagger Q_{Li} + (\lambda_D)_{ri} \bar{D}_{Rr} \phi^\dagger Q_{Li} + (\lambda_{Q_1}^u)_{ri} \bar{Q}_{1,Lr} \tilde{\phi}^u R_i \\
& + (\lambda_{Q_1}^d)_{ri} \bar{Q}_{1,Lr} \phi^d R_i + (\lambda_{UQ_1})_{ri} \bar{U}_{Lr} \tilde{\phi}^\dagger Q_{1,Ri} + (\lambda_{DQ_1})_{ri} \bar{D}_{Lr} \phi^\dagger Q_{1,Ri} + h.c.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

nella quale sono comparsi come nuovi parametri le masse dei VLQ (M_{U_i} , M_{D_i} e $M_{Q_{1i}}$), gli accoppiamenti dei VLQ con le particelle del Modello Standard (λ_U , λ_D , $\lambda_{Q_1}^u$ e $\lambda_{Q_1}^d$) e gli accoppiamenti tra i VLQ (λ_{UQ_1} e λ_{DQ_1}). Gli accoppiamenti λ sono matrici 3×3 con proprietà di flavour mixing.

Per verificare in che modo l'aggiunta dei nuovi termini si ripercuota sulle interazioni tra le particelle del Modello Standard, sarà necessario passare nella *mass basis*.

La Lagrangiana completa per le generazioni di tipo *up* è:

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_{up} = & (\lambda_U)_{ri} \bar{U}_{Rr} \tilde{\phi}^\dagger Q_{Li} + (\lambda_{Q_1}^u)_{ri} \bar{Q}_{1,Lr} \tilde{\phi}^u R_i + (\lambda_{UQ_1})_{ri} \bar{U}_{Lr} \tilde{\phi}^\dagger Q_{1,Ri} \\
& + y_u \bar{u}_R \tilde{\phi}^\dagger Q_L + M_U \bar{U}_L U_R + M_{Q_1} \bar{Q}_{1,L} Q_{1,R} + h.c.,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

che, passando alla rappresentazione nella gauge unitaria, diventa:

$$-\mathcal{L}_{up}|g.u. = \frac{v+h}{\sqrt{2}} [\lambda_U \bar{U}_R u_L + \lambda_{Q_1}^u \bar{Q}_{1,uL} u_R + \lambda_{UQ_1} \bar{U}_L Q_{1,dR} + y_u \bar{u}_R d_L] + M_U \bar{U}_L U_R + M_{Q_1} \bar{Q}_{1,L} Q_{1,R} + h.c. \tag{3.7}$$

Raccogliendo opportunamente, si ottiene:

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_{up}|g.u. = & \overline{\begin{pmatrix} u \\ U \\ Q_{1u} \end{pmatrix}}_R \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{y_u v}{\sqrt{2}} & \frac{\lambda_U v}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & M_U & \frac{\lambda_{UQ_1}^* v}{\sqrt{2}} \\ \frac{\lambda_{Q_1}^u v}{\sqrt{2}} & 0 & M_{Q_1} \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} u \\ U \\ Q_{1u} \end{pmatrix}_L \\
& + \overline{\begin{pmatrix} u \\ U \\ Q_{1u} \end{pmatrix}}_R \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{y_u}{\sqrt{2}} & \frac{\lambda_U}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_{UQ_1}^*}{\sqrt{2}} \\ \frac{\lambda_{Q_1}^u}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_H \begin{pmatrix} u \\ U \\ Q_{1u} \end{pmatrix}_L + h + h.c.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

con \mathcal{M} e H matrici 9×9 nel *flavour space* (si tratta infatti di matrici che descrivono interazioni tra particelle di sapore).

La forma diagonale di \mathcal{M} , Σ , si ottiene passando nella base delle masse (2.2.1):

$$V_u^\dagger \mathcal{M} U_u = \Sigma. \tag{3.9}$$

Le matrici di rotazione V_u e U_u sono le matrici unitarie che diagonalizzano le matrici Hermitiane $\mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger$ e $\mathcal{M}^\dagger\mathcal{M}$ rispettivamente.

La soluzione numerica è stata ottenuta tramite uno script Python che utilizza la funzione SVD.

3.1.2 Limiti sperimentali

Si rende necessario verificare che tutte le osservabili che subiscono modifiche dopo l'aggiunta delle nuove particelle rispettino i limiti sperimentali della teoria. Per il caso trattato, sono particolarmente restrittivi i limiti sperimentali dati dalla flavour physics⁴, ottenuti da test di precisione elettrodebole⁵ e fisica dell'Higgs⁶.

Il modo più efficiente per regolare i parametri è fissare il valore degli accoppiamenti e ricavare il limite su Λ . Si osserva che $\Lambda \sim 5$ TeV è sufficiente per ottenere un'amplificazione di due ordini di grandezza degli accoppiamenti Yukawa leggeri [9].

All'LHC, vector-like quark di massa ~ 1 TeV sono generalmente prodotti in coppia per interazione forte; la produzione singola, mediata dall'interazione elettrodebole, tende a prevalere per masse maggiori, anche a seconda della forza dell'interazione tra i nuovi vector-like quark e i quark del MS. Il meccanismo di produzione singola permette di sondare l'andamento della *forza di accoppiamento universale*, una quantità rappresentata dal parametro k , che è stata discussa in precedenza (1.1). Da tale quantità dipende la sezione d'urto di produzione (e quindi l'ampiezza di risonanza) dei vector-like quark: ad esempio, per un VLQ di massa m_T , si osserva

$$\Gamma_T \propto k^2 m_T^3.$$

L'ampiezza relativa della risonanza dei VLQ (Γ/m_T) scala quadraticamente sia rispetto ad m_T che a k ed è indipendente dalla rappresentazione del multipletto.

VLQ accoppiati unicamente a quark della terza generazione

Per dare un'idea dell'efficacia del modello, è ragionevole analizzare il caso in cui i VLQ interagiscono soltanto con i quark della terza generazione. Questo accoppiamento è a tutti gli effetti predominante grazie alla proporzionalità con la massa dei quark del MS, ma, per ottenere un modello completo, non è possibile ignorare gli effetti che compaiono soltanto con la reintroduzione delle altre interazioni.

Il canale dominante per la produzione di un singolo T quark è una produzione in *canale- t* , mediata da un bosone di gauge. In presenza di soli accoppiamenti T -quark del MS, questo processo richiede che un gluone si divida in una coppia $b\bar{b}$ oppure $t\bar{t}$. La prima (associata al bosone W) è favorita, per motivi cinematici, rispetto alla seconda (associata a Z)⁷.

Concentrandosi sul fenomeno di produzione singola, si studia la produzione del vector-like quark T e il suo decadimento in ht (con $h \rightarrow b\bar{b}$) e Zt (con $Z \rightarrow t\bar{t}$), considerando sia le modalità di produzione

⁴Concretamente, si tratta di vincoli sulla violazione CP, misure di parametri di mescolamento dei quark (come gli angoli di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa), che impongono vincoli sulle possibili deviazioni dal Modello Standard nelle matrici di mescolamento dei quark, ricerche di violazione di simmetria leptonica e vincoli ottenuti dall'analisi di fenomeni rari.

⁵Si tratta di una serie di esperimenti e misure atti a verificare se le predizioni teoriche della teoria elettrodebole sono in accordo con i risultati sperimentali ottenuti attraverso misurazioni di precisione. Questi test possono coinvolgere misurazioni di sezioni d'urto, asimmetrie di decadimento, proprietà dei bosoni vettori, e altre quantità fisiche rilevanti per la teoria elettrodebole.

Tra i test di precisione elettrodebole ci sono quelli effettuati presso collider di particelle, come il Large Hadron Collider (LHC) presso il CERN [17, 18].

⁶Produce test finalizzati a verificare se il bosone di Higgs osservato in esperimenti di acceleratori di particelle corrisponde alle previsioni teoriche del Modello Standard e a indagare eventuali deviazioni o nuove proprietà che potrebbero suggerire la presenza di fisica oltre il Modello Standard.

Possono includere misure delle proprietà del bosone di Higgs (massa, decadimenti, interazioni ecc.) [19], ricerca di nuove particelle ad esso associate, misura di sezioni d'urto e asimmetrie, analisi e ricerca di processi rari che lo coinvolgono.

⁷In rappresentazioni di gauge particolari, come il doppietto (TB) accoppiato con singoletti del MS di tipo up o un doppietto (XT), l'accoppiamento mediato da W svanisce, lasciando solo il canale t .

associate a b -quark che quelle associate a t -quark.

In uno studio pubblicato dall'ATLAS Collaboration [1], si sfrutta la presenza di oggetti adronici pesanti provenienti dai jet come segnale: se non si riscontrano particolari eccessi rispetto alle aspettative del MS, i risultati possono essere utilizzati per imporre dei vincoli sulla produzione di un singolo T , sul valore di k e sui relativi accoppiamenti con i bosoni W , Z e Higgs.

Lo studio si basa sulla ricostruzione dei vertici di interazione di collisioni protone-protone (con $\sqrt{s} = 13$ TeV), determinando ed eliminando sequenzialmente i candidati alle varie particelle (leptoni e jet) che costituiscono lo stato finale del sistema. Si individua un candidato leptonic al bosone- W e lo si combina al candidato b -jet, scelto tra gli small- R jets che si trovano in prossimità del jet b -tagged più vicino al candidato leptonic. Nello specifico, sono stati generati campioni separati per i seguenti processi:

1. $T(\rightarrow ht)qb$: b -associated T production con decadimento $T \rightarrow ht$,
2. $T(\rightarrow Zt)qb$: b -associated T production con decadimento $T \rightarrow Zt$,
3. $T(\rightarrow ht)qt$: t -associated T production con decadimento $T \rightarrow ht$,
4. $T(\rightarrow Zt)qt$: t -associated T production con decadimento $T \rightarrow Zt$,

nel range di masse 1.0-2.3 TeV, a valori fissati di massa e forza di accoppiamento universale k . Le diverse modalità di produzione del T -quark possono essere distinte dal numero di b -jets nello stato finale; eventi con decadimenti $T \rightarrow Zt$ sono tipicamente caratterizzati da un minor numero di b -jets rispetto ad eventi con decadimenti $T \rightarrow ht$. Per individuare i processi osservando le regioni che li contengono, si richiede quindi che queste ultime contengano 1 o 2 b -tagged jets nel primo caso e esattamente 3 o ≥ 4 nel secondo.

Si noti che, nonostante la produzione QCD sia un processo fondamentale considerato model-independent (perché descritto dalle sole leggi della QCD, che sono indipendenti dai dettagli specifici del modello di fisica BSM a cui facciamo riferimento), l'alta massa delle particelle in gioco può interferire con tale proprietà. Infatti, dal momento che la produzione di coppie di vector-like quark è molto più energeticamente dispendiosa rispetto alla produzione singola, subisce una riduzione dello spazio delle fasi molto più significativa, all'aumentare delle masse. Di conseguenza, per VLQ di massa considerevole, il processo dominante è la produzione singola che, dipendendo dall'interazione del VLQ prodotto con altre particelle esistenti, dipende da dettagli (riguardo particelle e interazioni) caratteristici del modello.

Esistono diverse ricerche sperimentali che cercano segnali di nuove particelle, inclusi VLQ, in diversi stati finali. Solitamente, all'interno di questi esperimenti, si individua una massa massima oltre la quale le particelle possono essere escluse dalla ricerca con un certo livello di confidenza statistica. I limiti di massa tipicamente vanno da 1.0 a 2.3 TeV, ponendo la sensibilità dell'esperimento a particelle con masse fino a quei valori. In Figura 3.1, sono mostrati i limiti imposti sul parametro k rispetto alla massa del quark T , in un esperimento con limiti di massa simili a quelli sopracitati.

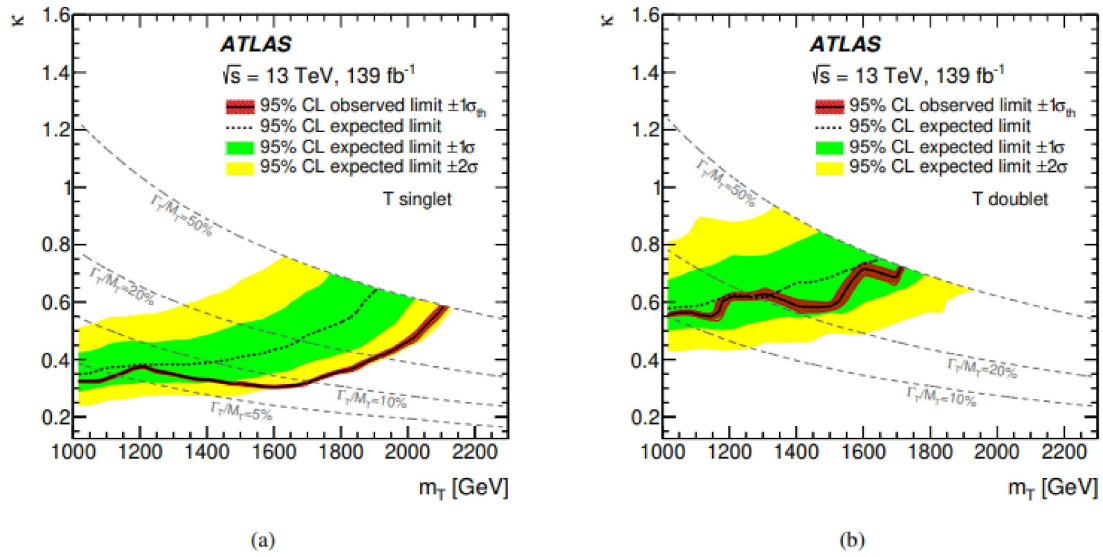


Figura 3.1: La linea nera continua e quella tratteggiata rappresentano rispettivamente i limiti sulla forza di interazione universale k in funzione di m_T osservati e attesi con un confidence level del 95%, nei casi di (a) singoletto di SU(2), (b) doppietto di SU(2). Le bande colorate corrispondono alle sezioni che non distano dal limite atteso di oltre ± 1 (banda verde) e ± 2 (banda gialla) volte la deviazione standard. La banda rossa attorno al limite osservato rappresenta l'incertezza teorica della predizione NLO sulla sezione d'urto. Le linee grigie tratteggiate sono curve di livello che contengono le configurazioni (m_T, k) che danno lo stesso valore di Γ_T/m_T .

I vincoli individuati sono presentati solo nel regime $\Gamma_T/m_T < 50\%$, entro il quale i risultati teorici sono validi, come indicato dalla linea grigia tratteggiata che ne demarca la fine.

(Grafici provenienti dallo studio prodotto dalla collaborazione ATLAS [1].)

Capitolo 4

Compatibilità dei VLQ con la teoria del Modello Standard

4.1 Soluzione analitica

Mantenendo le condizioni tali per cui $\bar{M}_U = \bar{M}_{Q_1} = M$ e $\lambda_U = \lambda_{Q_1}^u = \lambda_{uQ_1}^* = \lambda$, si introduce un parametro ausiliario $\epsilon = \frac{v\lambda}{M}$. L'idea è di sfruttare tale parametro per sviluppare in serie i risultati ai quali siamo interessati, imponendo poi $\epsilon = 1$ in modo da ottenere un'espressione analitica.

Questo nuovo parametro pesa gli elementi di matrice che subiscono una soppressione a causa delle piccole dimensioni rispetto alle masse esplicite M_Q e M_U , le quali sono maggiori anche di diversi ordini di grandezza rispetto a v (e, in generale, maggiori di tutte le grandezze in gioco). Aggiungendo ϵ agli elementi opportuni della matrice \mathcal{M} , si ottiene:

$$\mathcal{M}_\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{y_q v}{\sqrt{2}} \epsilon & \frac{v\lambda}{\sqrt{2}} \epsilon & 0 \\ 0 & M & \frac{v\lambda}{\sqrt{2}} \epsilon \\ \frac{v\lambda}{\sqrt{2}} \epsilon & 0 & M \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

con $q = t, c, u$.

Ricordando quanto detto nelle ultime righe della sezione 3.1.1, è possibile determinare analiticamente i valori singolari della matrice \mathcal{M} . Secondo la definizione di decomposizione ai valori singolari, le matrici di trasformazione dalla base delle interazioni alla base delle masse (V_u e U_u) diagonalizzano rispettivamente le matrici $\mathcal{M}^T \mathcal{M}$ e $\mathcal{M} \mathcal{M}^T$, i cui autovalori sono il quadrato dei valori singolari di \mathcal{M} . A tale scopo, procediamo al calcolo di $\mathcal{M}^T \mathcal{M}$ in funzione del nuovo parametro:

$$\mathcal{M}_\epsilon^T \mathcal{M}_\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{y_q^2 v^2}{2} \epsilon^2 + \frac{v^2 \lambda^2}{2} \epsilon^2 & \frac{y_q v^2 \lambda}{2} \epsilon^2 & \frac{M v \lambda}{\sqrt{2}} \epsilon \\ \frac{y_q v^2 \lambda}{2} \epsilon^2 & M^2 + \frac{v^2 \lambda^2}{2} \epsilon^2 & \frac{M v \lambda}{\sqrt{2}} \epsilon \\ \frac{M v \lambda}{\sqrt{2}} \epsilon & \frac{M v \lambda}{\sqrt{2}} \epsilon & M^2 + \frac{v^2 \lambda^2}{2} \epsilon^2 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Dalla radice degli autovalori di $\mathcal{M}_\epsilon^T \mathcal{M}_\epsilon$, si ottengono i valori singolari della matrice di massa.

Espandendo i risultati in serie di Taylor¹ fino al terzo ordine di ϵ , in corrispondenza del quale tutti i valori singolari hanno almeno un elemento non nullo di ordine superiore al primo, si ottiene un'espressione per la massa del quark preso in esame:

$$m_{q,\epsilon} = \frac{y_q v}{\sqrt{2}} \epsilon - \frac{y_q v^3 \sqrt{(y_q - \lambda)^2 \lambda^2}}{2\sqrt{2} M^2 y_q} \epsilon^3 + O[\epsilon]^4, \quad (4.3)$$

che sostituendo $\epsilon=1$ risulta:

$$m_q = \frac{y_q v}{\sqrt{2}} - \frac{y_q v^3 \sqrt{(y_q - \lambda)^2 \lambda^2}}{2\sqrt{2} M^2 y_q} \quad (4.4)$$

¹In questo caso, si è utilizzato l'ambiente di calcolo Mathematica per ricavare lo sviluppo in serie.

e per le masse dei vector-like quark²:

$$M_1 = M - \frac{v\lambda}{2\sqrt{2}}\epsilon + \frac{5v^2\lambda^2}{16M}\epsilon^2 - \frac{\sqrt{2}v^3\lambda^2(y_q - \lambda)}{8M^2}\epsilon^3 + O[\epsilon]^4 \quad (4.5)$$

$$M_2 = M + \frac{v\lambda}{2\sqrt{2}}\epsilon + \frac{5v^2\lambda^2}{16M}\epsilon^2 + \frac{\sqrt{2}v^3\lambda^2(y_q - \lambda)}{8M^2}\epsilon^3 + O[\epsilon]^4. \quad (4.6)$$

che, sempre imponendo $\epsilon=1$, assumono la forma:

$$M_1 = M - \frac{v\lambda}{2\sqrt{2}} + \frac{5v^2\lambda^2}{16M} - \frac{\sqrt{2}v^3\lambda^2(y_q - \lambda)}{8M^2} \quad (4.7)$$

$$M_2 = M + \frac{v\lambda}{2\sqrt{2}} + \frac{5v^2\lambda^2}{16M} + \frac{\sqrt{2}v^3\lambda^2(y_q - \lambda)}{8M^2}. \quad (4.8)$$

I grafici in Figura 4.1, 4.2 e 4.3 raffigurano gli andamenti delle soluzioni analitiche determinate rispetto al parametro M .

La massa del top quark (dall'eq. 4.4) aumenta al crescere di M , avvicinandosi al suo valore caratteristico osservato nel Modello standard. Inoltre, per valori maggiori del parametro λ , si osserva una convergenza sempre più lenta dell'espressione al valore atteso. Questi risultati sono compatibili con quanto ci aspettiamo da una teoria come questa: per alti valori del parametro M , associato alle masse esplicite dei vector-like quark, ci aspettiamo che i contributi della nuova fisica diventino trascurabili, a causa di un fenomeno di “disaccoppiamento”, meglio discusso nella sezione successiva (4.2).

Il parametro λ , che rappresenta gli accoppiamenti tra VLQ e quark del Modello Standard, costituisce una perturbazione a quest'ultimo. Valori significativi di λ comportano contributi di nuova fisica più difficili da ignorare, per cui sono necessari valori di M più alti per compensare l'effetto.

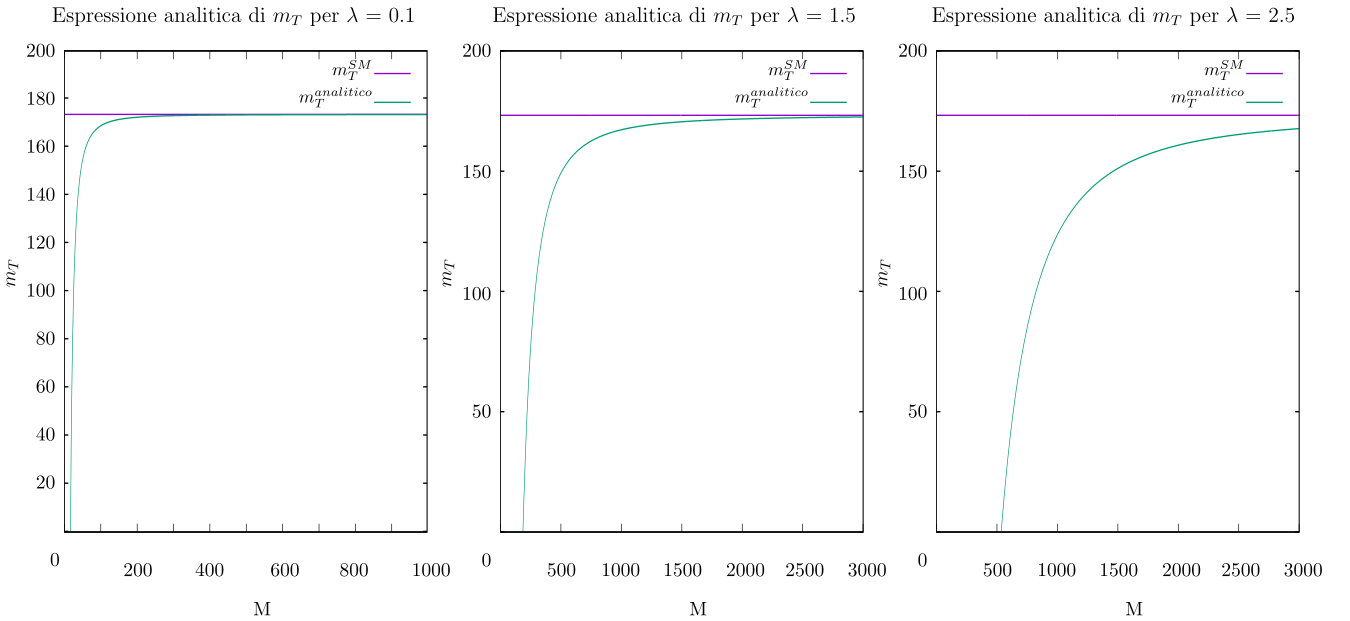


Figura 4.1: I tre grafici mostrano la tendenza prevista dall'espressione analitica della massa del top quark in funzione di M , in corrispondenza di tre diversi valori del parametro λ .

Si nota invece un andamento non monotono delle masse dei vector-like quark, M_1 e M_2 , rispetto a λ . Infatti, a causa della dipendenza delle espressioni 4.7 e 4.8 dal termine $(y_q - \lambda)$, i segni degli

²Dal momento che stiamo assumendo che i quark vector-like siano l'unica aggiunta al modello standard che influenzi la struttura delle masse dei quark. Se si trattano modelli più complessi, nei quali esistono altri settori della teoria che contribuiscono alla struttura delle masse dei quark (potrebbero includere, ad esempio, nuovi bosoni, scalari o fermioni), i valori singolari potrebbero riflettere una combinazione di masse dei quark vector-like e contributi da altri settori della teoria.

elementi del primo e terzo ordine in ϵ si invertono quando il valore di λ supera y_q , scambiando fra loro i comportamenti di M_1 e M_2 . Nonostante ciò, rimane evidente la tendenza di questi valori ad aderire all'andamento al primo ordine per valori di M elevati. Anche in questo caso, si osserva una convergenza più rapida per valori di λ minori.

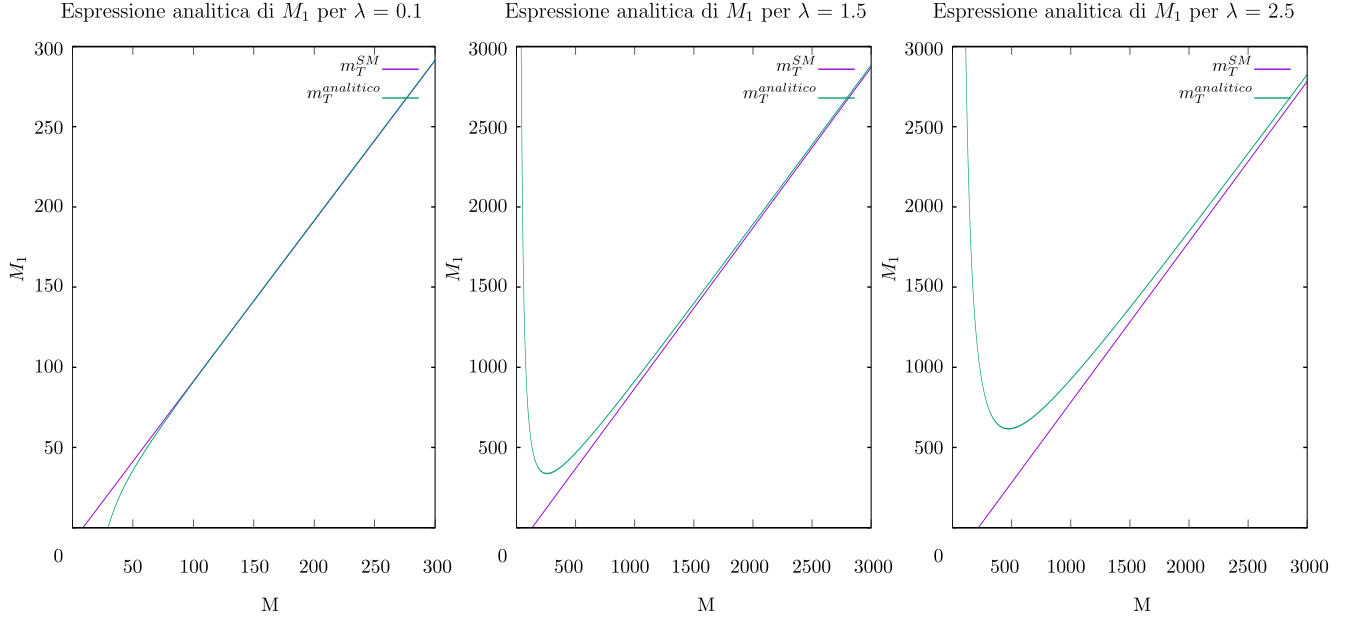


Figura 4.2: I tre grafici mostrano la tendenza prevista dall'espressione analitica della massa di VLQ M_1 in funzione di M , in corrispondenza di tre diversi valori del parametro λ .

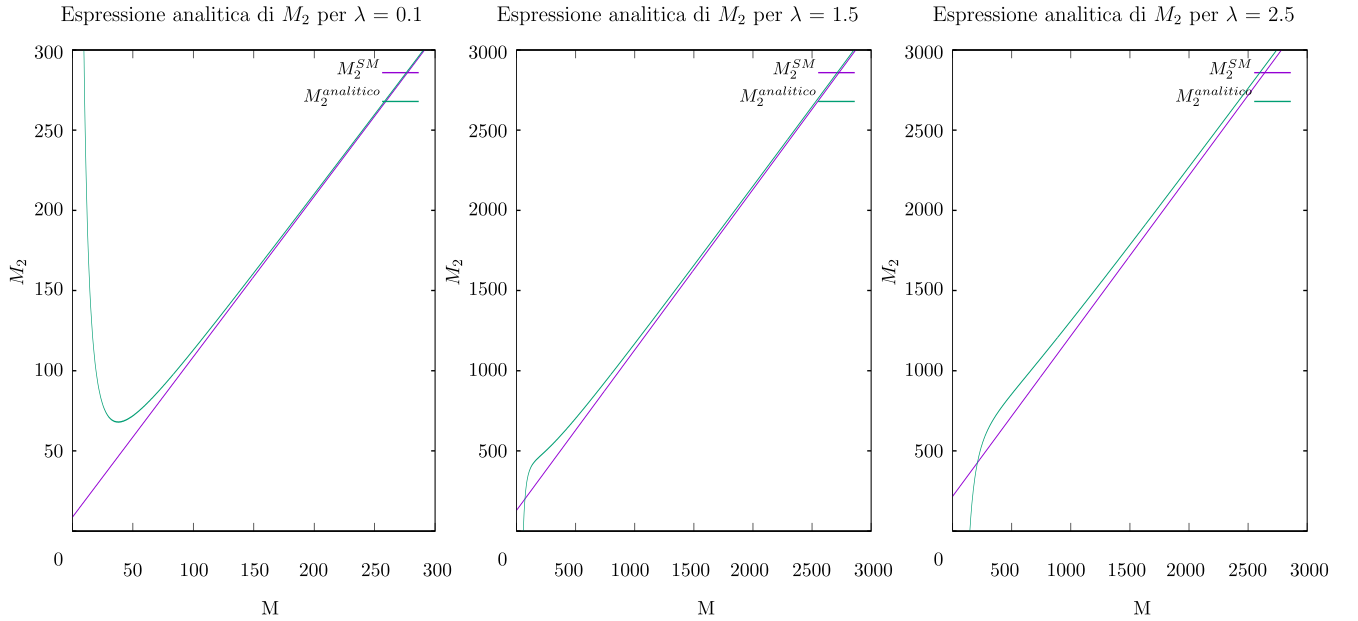


Figura 4.3: I tre grafici mostrano la tendenza prevista dall'espressione analitica della massa di VLQ M_2 in funzione di M , in corrispondenza di tre diversi valori del parametro λ .

4.2 Soluzione numerica

In questo lavoro di tesi si è utilizzato uno script Python per trovare le matrici del cambio di base V_u e U_u , tramite decomposizione ai valori singolari (SVD) della matrice di massa \mathcal{M} (ottenuta dalla Lagrangiana di equazione 3.8). Dopodiché si sono utilizzate tali matrici per portare nella *mass basis* anche la matrice di interazione H (sempre da eq. (3.8)).

In particolare, si è deciso di sostituire i parametri λ_U , $\lambda_{Q_1}^u$ e $\lambda_{UQ_1}^*$, assunti tutti uguali per semplicità, con un unico parametro λ ; similmente, i parametri M_U e M_{Q_1} sono stati supposti uguali e identificati con un parametro M . Si è poi eseguito una sorta di “parameter scan”, scegliendo un cospicuo numero di valori casuali per M e λ e calcolando per ogni coppia la forza dell’interazione del singolo quark con l’Higgs field.

Nello specifico, lo script contiene una funzione che calcola la distanza tra il valore singolare della matrice \mathcal{M} , cioè uno degli elementi della matrice diagonale $\Sigma = V_u^\dagger \mathcal{M} U_u$, e il valore atteso della massa del quark.

```

1 def distance_function(y, random_M, random_lambda):
2     M_matrix = mat(random_M, random_lambda, y)
3     singular_value = svd(M_matrix)[1][2]
4     return np.abs(singular_value - target_singular_value)

```

In seguito si inizializza un `for` loop che, scorrendo gli indici di una matrice contenente valori di M e λ generati in maniera casuale, fissa questi due parametri e, per ciascuna scelta, determina il valore di y che minimizza la funzione distanza. Si trova quindi una y ottimale associata ad una coppia (M, λ) .

```

1     result = minimize(distance_function, x0=np.random.uniform(0, 1.9),
2                       bounds=[(0, None)], args=(random_M, random_lambda))
3     optimal_y = result.x[0]

```

Si specifica inoltre la tolleranza entro la quale l’ottimizzazione deve avvicinarsi al valore atteso. Non sono state rilevate particolari deviazioni nei risultati in risposta a variazioni della tolleranza; i valori di tolleranza sono stati selezionati in modo quasi del tutto arbitrario, considerando unicamente il requisito di rimanere inferiori alla massa del quark per alcuni ordini di grandezza: $t_t = 10^{-4}$, $t_t = 10^{-5}$ e $t_u = 10^{-6}$.

Avendo ottenuto y , siamo in possesso della versione esplicita (numerica) delle matrici V_u e U_u , che possiamo sfruttare per portare la matrice di interazione H nella *mass basis*.

Lo script, dopo aver sostituito y nella matrice \mathcal{M} , esegue una decomposizione ai valori singolari per trovare le matrici di cambiamento di base e le utilizza subito dopo per trasformare H^3 .

```

1     U, Sigma, V = svd(mat(random_M, random_lambda, optimal_y))
2     transformed_g = np.dot(np.transpose(U), np.dot(g(random_M, random_lambda,
3     optimal_y), V))
4     g = np.dot(np.transpose(U), np.dot(H(random_M, random_lambda, optimal_y),
5     np.transpose(V)))

```

Si è provato anche ad ottenere lo stesso risultato dalla manipolazione di matrici estese alle tre generazioni dell’up quark, ma si è trattato di un tentativo infruttuoso. Lo script risultante, infatti, non è in grado di determinare i valori ottimali di y_q a meno di imporre forti limiti su tali valori. Come prevedibile, l’up quark risente maggiormente di tale problema di ottimizzazione, in quanto risulta più piccolo di svariati ordini di grandezza rispetto a tutti gli altri elementi di matrice; l’ottimizzazione del valore y_u risulta subordinata a quelle di y_t (che viene stimata perfettamente) e y_c (che necessita l’imposizione di vincoli non troppo stringenti per convergere).

Il risultato è un grafico relativo all’up quark completamente irriconoscibile, privato di un andamento proprio dalle interferenze dovute alle altre ottimizzazioni.

³Si noti che la sintassi della trasformazione di H è diversa da quanto ci aspetteremmo a causa della notazione di Python.

I valori del terzo elemento diagonale della matrice di interazione trasformata sono rappresentati rispetto al parametro M nelle Figure 4.4, 4.5 e 4.6. L'obiettivo è visualizzare graficamente come la teoria tenda a convergere al Modello Standard quando le masse delle nuove particelle sono significativamente superiori a quelle delle particelle native.

Come si può notare, il parametro λ funge da perturbazione al modello e determina la presenza di molteplici punti per uno stesso valore di M .

All'aumentare di M , i valori di $g_{q\bar{q}h}$ (elemento della matrice interazione H nella *mass basis*), con $q = u, c, t$, riproducono il valore $g_{q\bar{q}h}^{SM}$ atteso dal Modello Standard e il contributo della perturbazione per i diversi valori di λ diventa sempre meno significativo.

Ciò è in accordo con quanto atteso: in generale, infatti, se la massa dei vector-like quark è molto alta rispetto alla scala di energia delle altre particelle coinvolte, i VLQ possono comportarsi in modo simile a particelle pesanti virtuali e “disaccoppiare” dal Modello Standard a basse energie. I VLQ avranno, pertanto, un impatto trascurabile sulle proprietà delle particelle del Modello Standard a energie accessibili sperimentalmente⁴. L'effetto è già notevole per vector-like quark di massa compresa tra i 2 e i 3 TeV, compatibilmente con quanto riscontrato negli studi discussi nella sezione 3.1.2 riguardante i limiti sperimentali della teoria.

Si osserva che la forza di accoppiamento $g_{q\bar{q}h}$ del Modello Standard costituisce un limite superiore per il modello che include i vector-like quark. In presenza di contributi significativi da parte di questi ultimi (dovuti ad una massa non abbastanza elevata da provocare un disaccoppiamento dal MS), la forza di accoppiamento dei quark del Modello Standard con l'Higgs field diminuisce.

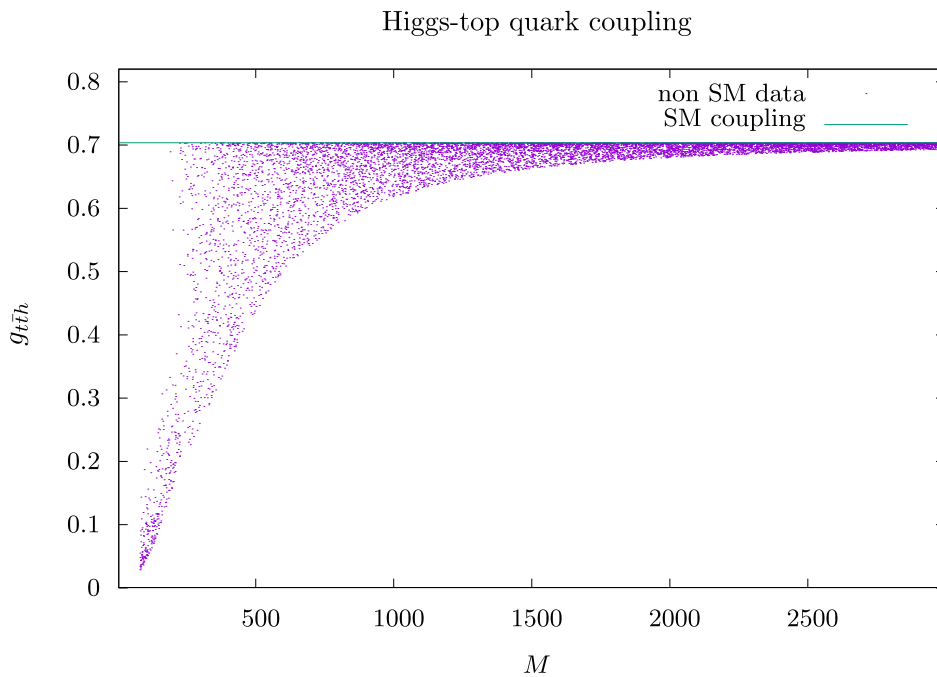


Figura 4.4: Il grafico mostra i valori dell'elemento della matrice di interazione del top quark, ottenuti scegliendo 10000 valori casuali per il parametro M all'interno del un range $[80, 3000]$ e scegliendo 10000 valori casuali per λ all'interno del range $[0.1, 1.5]$.

La retta orizzontale rappresenta le previsioni del Modello standard per la massa del top quark.

⁴E' importante notare che il concetto di “disaccoppiamento” dipende anche dalla natura specifica della nuova fisica e dalle sue interazioni con il Modello Standard. In alcuni scenari, anche se la massa dei VLQ è elevata, potrebbero comunque svolgere un ruolo significativo nelle interazioni a basse energie, ad esempio attraverso effetti di miscelazione o tramite processi di decadimento rari che coinvolgono energie più basse.

Inoltre, se la nuova fisica associata ai VLQ è strutturata in modo tale da interferire significativamente con le interazioni del Modello Standard anche a basse energie, allora potrebbe non verificarsi un completo disaccoppiamento e potrebbero essere osservabili effetti rilevanti anche a basse energie.

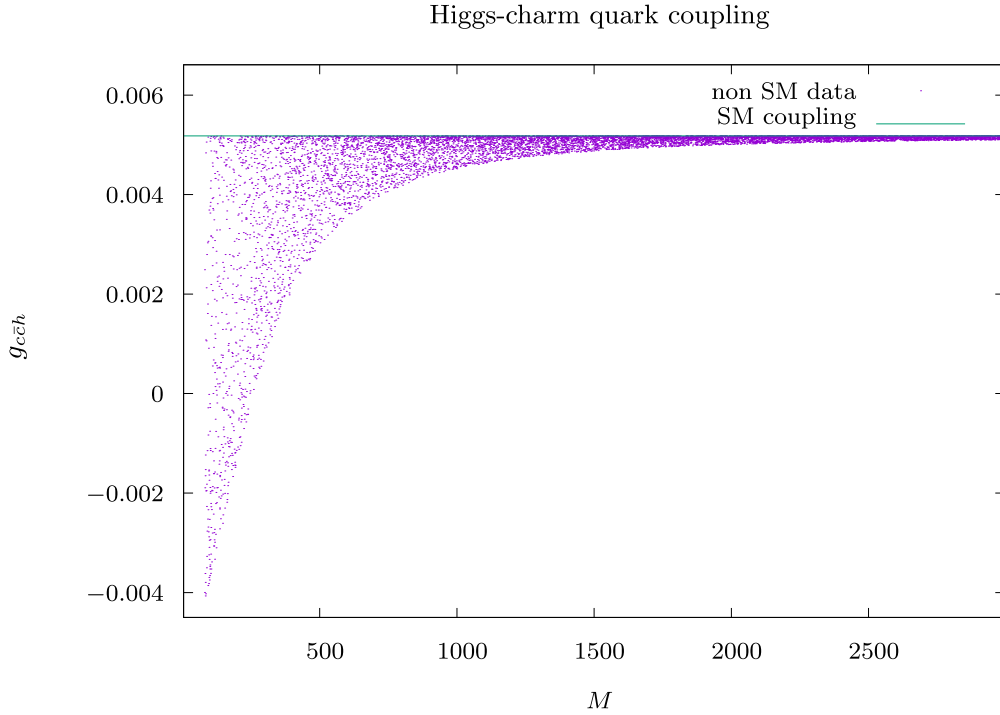


Figura 4.5: Il grafico mostra i valori dell'elemento della matrice di interazione del charm quark, ottenuti scegliendo casualmente 10000 valori casuali per il parametro M all'interno di un range $[80, 3000]$ e scegliendo 1000 valori casuali per λ all'interno del range $[0.1, 1.5]$. La retta orizzontale rappresenta le previsioni del Modello standard per la massa del charm quark.

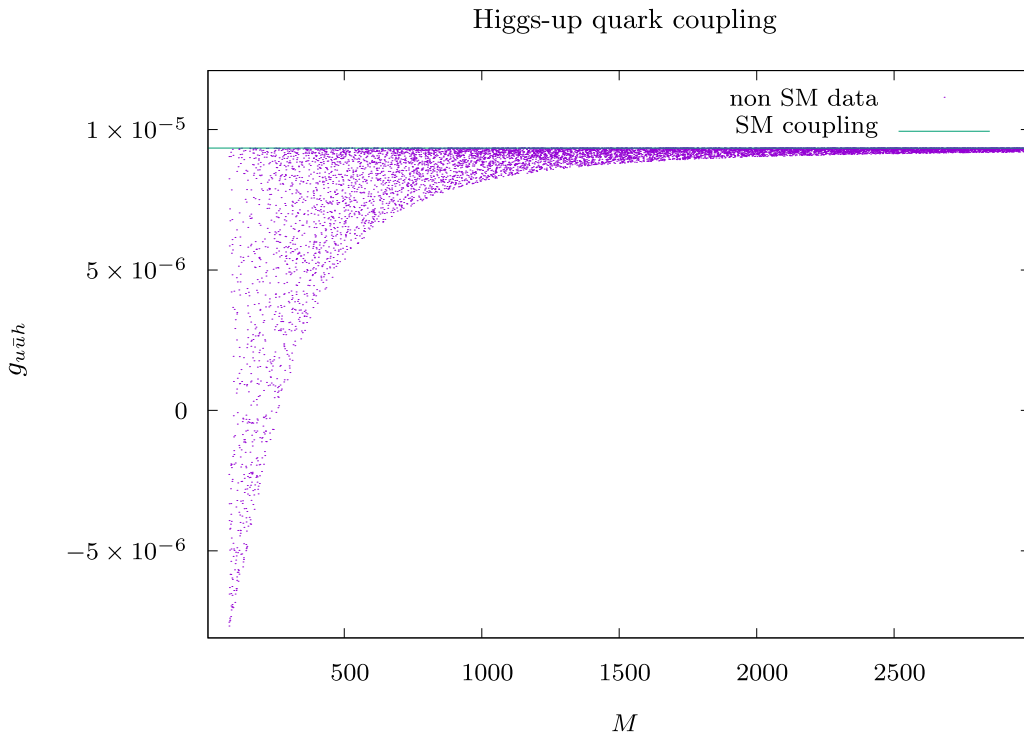


Figura 4.6: Il grafico mostra i valori dell'elemento della matrice di interazione del up quark, ottenuti scegliendo casualmente 10000 valori casuali per il parametro M all'interno di un range $[80, 3000]$ e scegliendo 10000 valori casuali per λ all'interno del range $[0.1, 1.5]$. La retta orizzontale rappresenta le previsioni del Modello standard per la massa del up quark.

Allo scopo di fornire un ulteriore commento riguardo la tendenza al disaccoppiamento dei fermioni pesanti, si discutono ora i valori dei parametri y_q .

Nei grafici in Figura 4.7, 4.8 e 4.9, è raffigurato l'andamento della forza dell'accoppiamento quark-Higgs (data dal parametro $g_{q\bar{q}h}$) all'allontanarsi del parametro y_q dai valori attesi per il Modello Standard. La linea verticale è stata tracciata per ciascun quark in corrispondenza del valore di y_q ottenuto imponendo $M = 3000$ e $\lambda = 0.1$; tali condizioni dovrebbero essere in grado di fornire un risultato che si avvicini con sufficiente accuratezza a ciò che si ottiene nel Modello Standard, in assenza di vector-like quark.

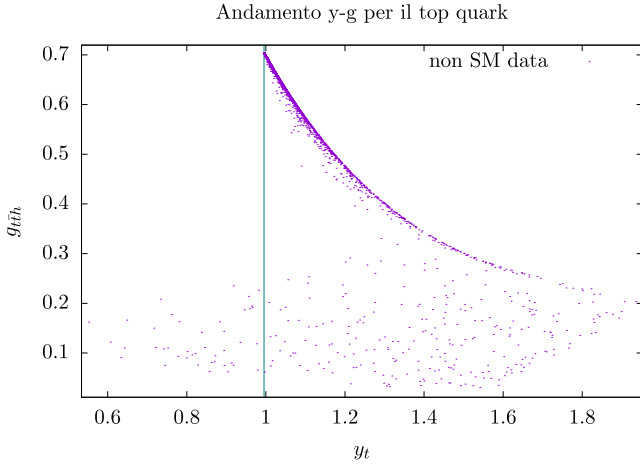


Figura 4.7: Sono mostrati gli stessi valori ottenuti in precedenza per $g_{t\bar{t}h}$, contro i valori di y_t corrispondenti ai medesimi M e λ . La retta verticale è tracciata in corrispondenza del valore di y_t atteso per $M=1000$ e $\lambda=0.1$, e cioè in una situazione che coincide approssimativamente con il Modello Standard.

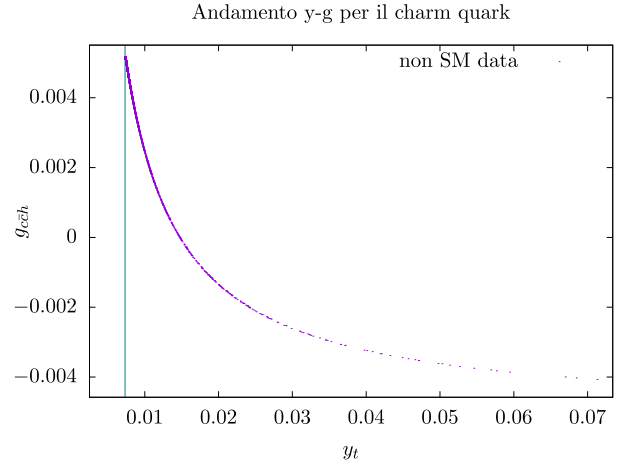


Figura 4.8: Sono mostrati i valori ottenuti in precedenza per $g_{c\bar{c}h}$, contro i valori di y_c corrispondenti ai medesimi M e λ . La retta verticale è tracciata in corrispondenza del valore di y_c atteso per $M=1000$ e $\lambda=0.1$, e cioè in una situazione che coincide approssimativamente con il Modello Standard.

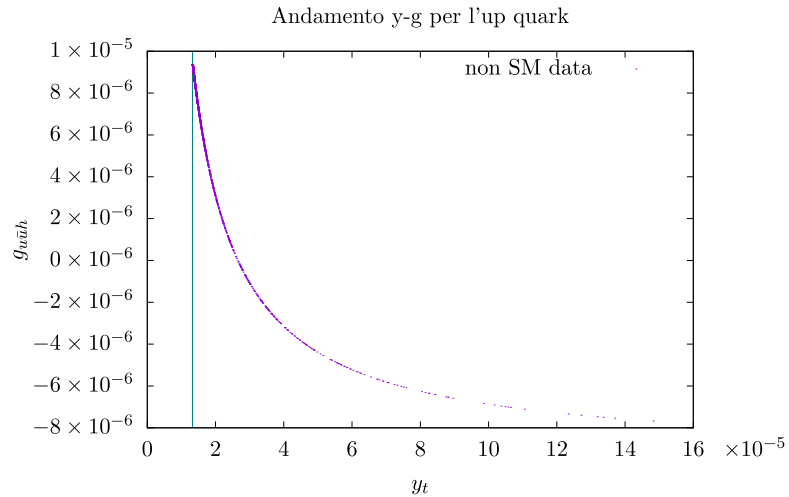


Figura 4.9: Sono mostrati i valori ottenuti in precedenza per $g_{u\bar{u}h}$, contro i valori di y_u corrispondenti ai medesimi M e λ . La retta verticale è tracciata in corrispondenza del valore di y_u atteso per $M=1000$ e $\lambda=0.1$, e cioè in una situazione che coincide approssimativamente con il Modello Standard.

In tutti e tre i casi, si osserva che, quanto più il valore di y_q si discosta da quello atteso per il MS

(Tabella 4.1), tanto più anche $g_{q\bar{q}h}$ si allontana dalla previsione (Tabella 4.1).

Previsioni MS			
quark (q)	t	c	u
y_q^{SM}	0.99498	0.00732	0.0000132
$g_{q\bar{q}h}^{SM}$	0.7035337	0.0051787	0.00000934

Tabella 4.1: Valori caratteristici del MS; ottenuti con Mathematica imponendo $M = 3000$ e $\lambda = 0.1$.

Si riconferma, quindi, quanto suggerito dall'analisi della tendenza di $g_{q\bar{q}h}$ rispetto ad M : quando la teoria non è più riducibile al Modello Standard e richiede l'inclusione dei contributi dei fermioni pesanti, le forze di interazione tra i quark nativi e il campo di Higgs diminuiscono progressivamente.

Capitolo 5

Conclusioni

Nel corso di questo lavoro di tesi, abbiamo esaminato l'ipotesi di introdurre quark pesanti di tipo vector-like nel quadro del Modello Standard. Dopo aver introdotto la teoria necessaria a scrivere la Lagrangiana del modello e stabiliti i limiti sperimentali, abbiamo sviluppato uno script Python che permettesse di condurre un'analisi numerica delle masse e delle interazioni dei quark del Modello Standard con l'Higgs field, in presenza dei nuovi quark vector-like. Successivamente, adottando un approccio semplificato nel quale le matrici di massa e interazione dipendono dai parametri M e λ , abbiamo eseguito una scansione dei suddetti, che ha permesso di valutare l'impatto sulle interazioni dei quark del MS con l'Higgs field per ogni coppia di parametri (casualmente generata).

Dallo studio degli accoppiamenti delle particelle aggiuntive con i fermioni chirali del Modello Standard, è emerso un comportamento significativo: all'aumentare della massa dei quark vector-like, si osserva un progressivo "disaccoppiamento" dalla teoria originaria. In particolare, anche in presenza di parametri perturbativi, si è constatato un evidente avvicinamento dell'evoluzione della teoria all'andamento previsto dal Modello Standard con l'aumentare della massa dei vector-like quark.

Questo risultato suggerisce che le teorie di estensione del Modello Standard che includono fermioni pesanti vector-like risultino coerenti con le osservazioni sperimentali attuali. In particolare, se si ipotizza che le masse dei quark vector-like siano dell'ordine dei TeV, la fisica del Modello Standard, che in confronto opera a "basse energie", rimarrebbe sostanzialmente invariata. Ciò è confermato da diversi studi sperimentali, i cui risultati sono compatibili con l'analisi numerica effettuata, dalla quale è emerso che il disaccoppiamento risulterebbe significativo già per masse dei VLQ intorno ai 2 TeV.

Tuttavia, è importante sottolineare che i modelli che contengono più quark vector-like rappresentano un'area di studio complessa, sia dal punto di vista teorico che sperimentale.

Inoltre, vanno considerate teorie ancora più intricate che integrano ulteriori estensioni al Modello Standard. Queste teorie offrono interessanti spunti di ricerca e portano alla scoperta di fenomeni nuovi e inaspettati, aprendo la strada a ulteriori sviluppi nel campo della fisica delle particelle.

Bibliografia

- [1] **ATLAS** Collaboration, G. Aad *et al.*, “Search for single production of vector-like T quarks decaying into Ht or Zt in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector,” *JHEP* **08** (2023) 153, [arXiv:2305.03401 \[hep-ex\]](#).
- [2] **CMS** Collaboration, S. Chatrchyan *et al.*, “The CMS Experiment at the CERN LHC,” *JINST* **3** (2008) S08004.
- [3] J. L. D. Cruz, *Composite Higgs models, Dark Matter and Λ* . PhD thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2009.
- [4] G. Panico and A. Wulzer, *The Composite Nambu-Goldstone Higgs*, vol. 913. Springer, 2016. [arXiv:1506.01961 \[hep-ph\]](#).
- [5] R. Groeber, *Higgs pair production in the Composite Higgs model*. PhD thesis, Fakultät für Physik Institut für Theoretische Physik, 2011.
- [6] **ATLAS** Collaboration, “Combined coupling measurements of the Higgs-like boson with the ATLAS detector using up to 25 fb^{-1} of proton-proton collision data,”.
- [7] **ATLAS** Collaboration, G. Aad *et al.*, “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC,” *Phys. Lett. B* **716** (2012) 1–29, [arXiv:1207.7214 \[hep-ex\]](#).
- [8] **CMS** Collaboration, S. Chatrchyan *et al.*, “Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC,” *Phys. Lett. B* **716** (2012) 30–61, [arXiv:1207.7235 \[hep-ex\]](#).
- [9] S. Ziviani, “Enhanced light quark yukawa couplings,” 2022/2023.
- [10] E. Balzani, R. Gröber, and M. Vitti, “Light-quark yukawa couplings from off-shell higgs production,” [arXiv:2304.09772 \[hep-ph\]](#).
- [11] **CMS** Collaboration, A. Tumasyan *et al.*, “A portrait of the Higgs boson by the CMS experiment ten years after the discovery,” *Nature* **607** no. 7917, (2022) 60–68, [arXiv:2207.00043 \[hep-ex\]](#).
- [12] J. de Blas *et al.*, “Higgs boson studies at future particle colliders,” *JHEP* **01** (2020) , [arXiv:1905.03764 \[hep-ph\]](#).
- [13] A. J. Buras, “Testing the ckm picture of flavour and cp violation in rare k and b decays and particle-antiparticle mixing,” *Progress of Theoretical Physics* **122** no. 1, (2009) .
- [14] A. Djouadi, “The anatomy of electro-weak symmetry breaking. i: The higgs boson in the standard model,” *Physics Reports* **457** (2008) , [hep-ph/0503172](#).
- [15] B. Grzadkowski, M. Iskrzynski, M. Misiak, and J. Rosiek, “Dimension-Six Terms in the Standard Model Lagrangian,” *JHEP* **10** (2010) 085, [arXiv:1008.4884 \[hep-ph\]](#).
- [16] M. Srednicki, *Quantum Field theory*, ch. 29. Cambridge University Press, 2006.

- [17] A. Freitas, “Precision tests of the standard model,” *Proceedings of Science* (2020) , [arXiv:2012.11642 \[hep-ph\]](#).
- [18] M. S. Jens Erler and, “Electroweak precision tests of the standard model after the discovery of the higgs boson,” [arXiv:1902.05142v2 \[hep-ph\]](#).
- [19] R. V. K. C. K. J.F. Gunion, L. Poggioli and P. Rowson, “Higgs boson discovery and properties,” [arXiv:9703330v2 \[hep-ph\]](#).
- [20] G. K. F. del Aguila, Ll. Ametllr and J. Vidal, “Vector-like fermion and standard higgs production at hadron colliders,” *Nuclear Physics B Volume 334, Issue 1* (1989) .
- [21] S. H. J. A. Aguilar-Saavedra, R. Benbrikc and M. Perez-Victori, “A handbook of vector-like quarks: mixing and single production,” *Phys. Rev. D 88, 094010* (2013) .
- [22] L. Pianizzi, *Vector-like quarks: t' and partners*. PhD thesis, School of Physics and Astronomy, University of Southampton, 2014.
- [23] J. P. H. Daza, “Composite higgs models,” 2019.