



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Precessione dello spin nel campo di un'onda gravitazionale

Relatore

Prof. Jean-Pierre Zendri

Correlatore

Dr. Antonello Ortolan

Laureando

Francesco Venuti

Anno Accademico 2018/2019

Indice

1	Introduzione	1
2	Le coordinate normali di Fermi	5
2.1	Le coordinate normali di Riemann	5
2.2	Le coordinate normali di Fermi	8
3	Il gravito-elettromagnetismo	13
3.1	Introduzione della teoria GEM dalla linearizzazione delle equazioni di campo	13
3.2	Introduzione della teoria GEM per mezzo delle coordinate di Fermi .	17
4	L'onda gravitazionale piana	23
5	La precessione relativa dello spin	25
6	Il moto delle particelle dotate di spin	39
7	Conclusioni	49

Capitolo 1

Introduzione

L'esistenza delle onde gravitazionali, teorizzata da Albert Einstein nel 1916, è stata sperimentalmente confermata in maniera diretta in seguito all'osservazione dei segnali GW150914 e GW151226, effettuata dal progetto LIGO nel 2015. Tuttavia, gli esperimenti condotti sinora con tecniche interferometriche hanno permesso di rivelare solamente un effetto dell'interazione tra onde gravitazionali e materia. All'interno dell'ambito della teoria di campo debole, infatti, è possibile instaurare entro certi opportuni limiti un'analogia formale tra quest'ultima e l'elettromagnetismo di Maxwell. La somiglianza tra le due teorie permette di definire in particolare l'analogo gravitazionale del campo elettrico e del campo magnetico e di poter scomporre di conseguenza anche il segnale di un'onda gravitazionale debole in una componente elettrica ed in una magnetica. Gli apparati sperimentali utilizzati sinora hanno permesso la rivelazione solamente della prima di tali due componenti e al giorno d'oggi non è ancora stata realizzata una misurazione degli effetti associati alla seconda. All'interno di questo elaborato, si presenta e si descrive un fenomeno fisico che potrebbe essere sfruttato per la misurazione della parte magnetica delle onde gravitazionali, ovvero la precessione del momento angolare posseduto da una massa di prova in caduta libera nel campo di un'onda debole piana monocromatica. Tale effetto è infatti riconducibile alla presenza della suddetta componente dell'interazione gravitazionale, in analogia con quanto previsto dalla teoria dell'elettromagnetismo, la quale afferma che anche il momento angolare di una particella carica immersa in un campo magnetico è interessato da un moto di precessione; pertanto una rivelazione sperimentale del suddetto fenomeno costituirebbe una prova dell'esistenza stessa della parte magnetica dell'onda gravitazionale. Nella corrente trattazione, la massa presa in considerazione verrà approssimata ad un punto materiale, mantenendo tuttavia costante il suo momento angolare. Sebbene tale grandezza abbia un'origine classica, in quest'ottica ci si riferirà ad essa con il termine *spin*, in analogia con la meccanica quantistica. In realtà, il fenomeno fisico che è interessante studiare non è il moto del momento angolare posseduto da un singolo punto materiale, ma la precessione relativa tra gli spin di due particelle distinte, entrambe in caduta libera, poste ad una distanza sufficientemente grande l'una dall'altra. Infatti il principio di equivalenza, fondamento della teoria della relatività generale, permette di asserire che sarebbe impossibile rivelare la precessione del vettore di spin di una particella in un sistema di riferimento in caduta libera definito in un intorno di quest'ultima; al contrario, è possibile misurare la variazione relativa del

momento angolare di un corpuscolo rispetto a quello di un secondo, a patto che quest'ultimo sia posto sufficientemente lontano dal primo, in modo tale che gli effetti della gravità possano essere rivelati. La trattazione presentata in questa tesi sarà quindi incentrata principalmente sullo studio del fenomeno della precessione relativa degli spin di due particelle distinte, investite da un'onda gravitazionale debole piana e monocromatica. Un'analisi di questo tipo può essere convenientemente condotta costruendo un riferimento in caduta libera adattato ad uno dei due punti materiali ed adoperando il sistema di coordinate ad esso associato per la descrizione dei fenomeni fisici. Un siffatto insieme di coordinate è detto essere un sistema di *coordinate normali di Fermi* ed è definito localmente in un intorno sufficientemente piccolo della linea di universo della particella considerata, corrispondente nel caso in esame ad una curva geodetica; è inoltre possibile verificare che, lungo quest'ultima, il tensore metrico coincide con il tensore di Minkowski mentre le derivate prime di tale grandezza, o equivalentemente i simboli di Christoffel, si annullano: detto altrimenti, è possibile rimuovere, lungo tutta la geodetica considerata, gli effetti della gravità, i quali potranno essere percepiti solamente allontanandosi di una distanza abbastanza grande da tale traiettoria. In regioni dello spaziotempo vicine a questa, anche se non eccessivamente (ovvero rimanendo all'interno del dominio di definizione delle coordinate di Fermi) è tuttavia possibile comunque considerare un debole campo gravitazionale, che si configura come una piccola correzione al tensore metrico di Minkowski. Nel presente elaborato, si considereranno due particelle dotate di spin, si costruirà il riferimento adattato ad una delle due e si studierà poi rispetto a quest'ultimo la precessione del momento angolare della seconda, nel campo dell'onda gravitazionale incidente; quest'ultimo, in coordinate di Fermi assumerà la forma di una piccola perturbazione attorno alla metrica dello spaziotempo piatto, poiché la seconda particella verrà posta ad una distanza piccola al corpuscolo di riferimento. Uno dei vantaggi derivanti dall'adozione di un sistema di coordinate normali di Fermi risiede nel fatto che esso rappresenta la scelta naturale di un riferimento per un laboratorio in caduta libera, in quanto è possibile costruire un tale sistema di coordinate anche all'intorno della curva geodetica associata ad un osservatore il quale non subisca l'effetto di altre interazioni al di fuori di quella gravitazionale. Un ulteriore importante vantaggio fornito dall'utilizzo delle coordinate normali di Fermi consiste nel fatto che esse permettono di interpretare gli effetti della gravità come il risultato dell'azione di una forza applicata ai corpo in gioco, piuttosto che come una conseguenza della curvatura dello spaziotempo, come avviene in fisica classica. Questa proprietà rende particolarmente conveniente lo studio dei fenomeni fisici all'interno dei riferimenti localmente inerziali, poiché i risultati, sia di una stima teorica, sia di una misurazione sperimentale, sono più facilmente interpretabili. Inoltre, l'impiego delle coordinate di Fermi fornisce una modalità per introdurre l'analogia tra la teoria della gravitazione e l'elettromagnetismo e pertanto esso consentirà di studiare il moto di precessione relativa degli spin sfruttando delle leggi analoghe a quelle che regolano i fenomeni elettromagnetici. In sintesi, quindi, lo scopo della presente tesi è quello di analizzare il fenomeno della precessione relativa degli spin di due particelle investite da un'onda gravitazionale debole e piana, utilizzando il sistema di coordinate di Fermi adattato alla linea di universo (in questo caso una curva geodetica) di una delle due. Si supporrà per semplicità che i due corpuscoli siano, antecedentemente al passaggio dell'onda, fermi nello spaziotempo piatto e che

i loro momenti angolari siano allineati. Nel prosieguo verrà anche studiato il moto di una particella dotata di spin nel riferimento di Fermi, evidenziando le differenze con il caso di un punto materiale invece privo di quest'ultima proprietà. L'elaborato è organizzato come segue: in primis, nel cap. 2 si presenta una breve trattazione delle coordinate normali di Fermi, nel cap. 3 si illustra invece l'analogia formale tra la teoria della gravitazione e l'elettromagnetismo di Maxwell, altrimenti indicata con il termine "gravito-elettromagnetismo", mentre nel cap. 4 si riassumono brevemente una derivazione ed alcune proprietà delle onde gravitazionali deboli e piane. Infine, nei capitoli 5 e 6 si studia il fenomeno di precessione relativa degli spin e il moto della particella munita di momento angolare. Si ricorda inoltre che nelle formule gli indici latini assumono valori 1, 2, 3 mentre quelli greci 0, 1, 2, 3.

Capitolo 2

Le coordinate normali di Fermi

In questo primo capitolo si introduce una particolare tipologia di coordinate, chiamate coordinate normali di Fermi, alle quali e alle cui proprietà si è precedentemente accennato nell'introduzione. Come ivi riportato, tale sistema di riferimento verrà utilizzato nel seguito per la realizzazione dello studio dell'effetto della precessione relativa degli spin di due particelle, le quali vengono investite dal passaggio di un'onda gravitazionale debole e piana. Prima di incominciare con l'illustrazione delle coordinate si Fermi si affronterà lo studio di un altro sistema di coordinate, di cui esse costituiscono una generalizzazione, ovvero le coordinate normali di Riemann. Si farà riferimento nel seguito a quanto contenuto in [5] ed in [8].

2.1 Le coordinate normali di Riemann

Come detto, un sistema di coordinate normali di Fermi può essere considerato come un'estensione di un altro sistema di coordinate, dette di Riemann, la cui esposizione verrà ora presentata. È utile, a tal fine, incominciare ad illustrare tale argomento incominciando con la seguente considerazione. In base al principio di equivalenza, fondamento della teoria della relatività generale, è sempre possibile, all'intorno di un punto qualunque dello spaziotempo P , definire un opportuno sistema di coordinate locali (cT, X, Y, Z) utilizzando le quali gli effetti della gravità vengono cancellati nel suddetto evento. Da un punto di vista matematico, quest'ultima affermazione corrisponde ad asserire che nel punto P il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ coincide con il tensore di Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ e che le sue derivate prime, o equivalentemente i simboli di Christoffel ad esso associati, $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$, si annullano:

$$g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}, \quad \partial_{\mu}g_{\nu\rho}(P) = 0 \iff \Gamma_{\nu\rho}^{\mu}(P) = 0. \quad (2.1)$$

Si consideri in seguito una particella di prova in caduta libera che si muova in vicinanza del punto P , ovvero all'interno del dominio di definizione delle coordinate locali (cT, X, Y, Z) ; l'equazione del moto di tale corpuscolo, scritto rispetto a queste ultime, corrisponde all'equazione della geodetica

$$\frac{d^2 X^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu}(X) \frac{dX^{\nu}}{d\tau} \frac{dX^{\rho}}{d\tau} = 0, \quad (2.2)$$

ove τ è il tempo proprio della particella. Se si suppone che essa passi proprio per P , allora, in corrispondenza di tale punto, la precedente scrittura si riduce, tenendo

presente la 2.1, a

$$\left. \frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} \right|_P = 0. \quad (2.3)$$

Questo risultato indica che nel punto P la particella di prova, sulla quale non agiscono forze esterne, si muove seguendo una linea retta; conseguentemente, il sistema di riferimento associato alle coordinate utilizzate è *localmente inerziale* nel punto P .

Una esplicita costruzione del sistema di coordinate (cT, X, Y, Z) può essere realizzata nella seguente maniera. In primis, si sceglie nel punto P una base di quattro 4-vettori ortonormali, i quali vengono indicati con \hat{e}_α , ove $\alpha = 0, 1, 2, 3$ indicizza ciascuno di essi; precisamente, tali vettori di base vengono scelti ortonormali rispetto alla metrica di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, in modo tale che risulti

$$\hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta}, \quad (2.4)$$

ove \cdot rappresenta, in questo caso, il prodotto scalare di Minkowski. In componenti, la stessa relazione si può riscrivere anche come

$$\eta_{\mu\nu} \hat{e}_\alpha^\mu \hat{e}_\beta^\nu = \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.5)$$

Nel prosieguo, si considerino poi un ulteriore 4-vettore unitario n , le cui componenti rispetto alla base $\{\hat{e}_\alpha\}$ siano $n^\mu = (n^0, n^1, n^2, n^3)$, e la curva geodetica avente origine nel punto P e ivi n per vettore tangente. Se si suppone che quest'ultimo sia di tipo spazio, ovvero che si abbia $g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = 1$, è allora possibile utilizzare la distanza propria $s = g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu$ per parametrizzare la suddetta geodetica. È a questo punto possibile assegnare delle coordinate ad un punto Q , il quale viene raggiunto partendo da P e muovendosi lungo tale curva dopo aver percorso una distanza propria s , come la quaterna

$$(cT, X, Y, Z) = (sn^0, sn^1, sn^2, sn^3). \quad (2.6)$$

Similmente, se il vettore n fosse stato scelto di tipo tempo, ossia $g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -1$, si sarebbe potuta parametrizzare la geodetica tramite il corrispondente tempo proprio τ ed allora si sarebbero potute assegnare al punto Q l'insieme di coordinate

$$(cT, X, Y, Z) = (\tau n^0, \tau n^1, \tau n^2, \tau n^3). \quad (2.7)$$

Conseguentemente a quanto appena illustrato, se si considerano tutte le possibili geodetiche, sia di tipo tempo che di tipo spazio, uscenti dal punto P , qualunque altro evento sarà raggiunto da almeno da una di esse; se poi ci si restringe ad un intorno sufficientemente piccolo di P , ove tali curve non si intersecano (mentre ciò può avvenire in generale in grandi regioni dello spaziotempo), allora per ogni punto di tale insieme passerà una ed una sola geodetica e sarà possibile associare a ciascun evento in maniera univoca una quaterna di coordinate (cT, X, Y, Z) definite come sopra. Si puntualizza inoltre che anche ai punti appartenenti alle geodetiche di tipo luce (il cui vettore tangente n è tale che $g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = 0$) può essere assegnata una simile collezione di valori, a patto di utilizzare una variabile generica λ per parametrizzare le suddette curve in luogo del tempo proprio τ o della distanza propria s . Il sistema di coordinate locali così definito è noto come *sistema di coordinate normali di Riemann* ed il suo dominio di definizione corrisponde al suddetto intorno di P all'interno del

quale le geodetiche aventi origine in tale punto non si intersecano; il raggio di tale insieme è identificabile in generale con il raggio di curvatura dello spaziotempo \mathcal{R} ; il sistema di riferimento associato alle coordinate normali di Riemann è invece identificabile con l'insieme dei quattro assi le cui direzioni sono identificate dalla base di versori $\{\hat{e}_\alpha\}$. È ora possibile verificare come quest'ultimo costituisca la realizzazione di un riferimento localmente inerziale in P . In primo luogo, si nota che risulta immediatamente, per costruzione, che il tensore metrico valutato in tale punto coincide con il tensore metrico di Minkowski, ovvero $g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}$; tale fatto è diretta conseguenza della condizione $\hat{e}_\alpha(P) \cdot \hat{e}_\beta(P) = \eta_{\alpha\beta}$ che è stata posta inizialmente. In seguito, è necessario verificare che, utilizzando le coordinate normali di Fermi, si abbia $\Gamma_{\nu\rho}^\mu(P) = 0$. Questa affermazione può essere dimostrata considerando ancora l'equazione della geodetica di tipo tempo 2.2. Poiché, in base alla definizione 2.7, le coordinate (cT, X, Y, Z) sono lineari nel tempo proprio τ , risulta

$$\frac{dX^\mu}{d\tau} = n^\mu, \quad \frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (2.8)$$

ed essa si riduce a

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu(X) n^\nu n^\rho = 0, \quad (2.9)$$

la quale può essere ricavata anche a partire da una geodetica spaziale o di tipo luce. Se si valuta quest'ultima uguaglianza in P , allora essa deve essere valida per ogni scelta del versore tangente n e pertanto si ottiene

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu(P) = 0, \quad (2.10)$$

come si intendeva dimostrare. Una rappresentazione schematica riguardante il metodo utilizzato la costruzione delle coordinate normali di Riemann è fornita dalla seguente figura.

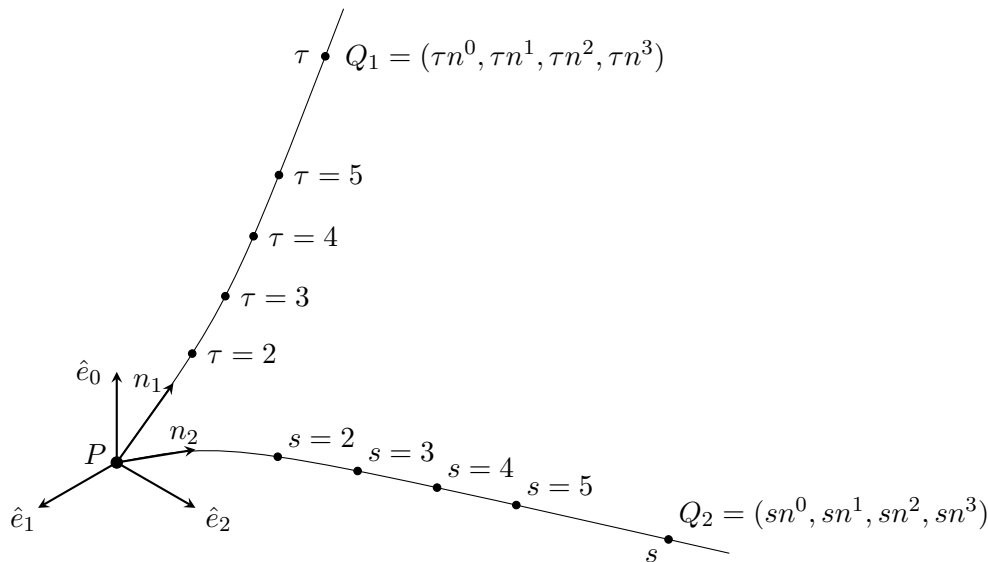


Figura 2.1: Schema della costruzione delle coordinate normali di Riemann.

In essa sono state rappresentate due geodetiche aventi origine nel punto P , una di tipo tempo ed una di tipo spazio, aventi rispettivamente n_1 ed n_2 come versori tangenti. La prima di tale curve, come si può osservare, è stata parametrizzata utilizzando il tempo proprio τ , mentre la seconda mediante la distanza propria s . Sono inoltre stati disegnati due punti generici Q_1 e Q_2 , uno su ciascuna geodetica, e si sono indicate inoltre le rispettive coordinate.

2.2 Le coordinate normali di Fermi

Come appena visto, quindi, le coordinate normali di Riemann rappresentano un sistema di coordinate locali utilizzando le quali è possibile cancellare gli effetti della gravità in un dato punto dello spaziotempo, di modo che in corrispondenza di esso una massa di prova sulla quale non agiscono forze esterne appaia muoversi lungo una linea retta e il riferimento associato alle coordinate sia pertanto localmente inerziale. Tutto ciò è però verificato, come detto, solamente in un dato punto dello spazio ed in un dato istante. È possibile realizzare un'estensione della trattazione precedente in modo tale da costruire un sistema di riferimento che sia localmente inerziale nell'intorno non già di un singolo evento, ma di tutta una geodetica dello spaziotempo. Se si suppone che quest'ultima sia di tipo tempo, allora essa può essere utilizzata per rappresentare il moto di un osservatore in caduta libera ed il sistema di riferimento localmente inerziale definito lungo la suddetta geodetica può essere utilizzato da tale sperimentatore come una sorta di laboratorio all'interno del quale misurare i fenomeni fisici. Un osservatore in caduta libera, infatti, vede una massa di prova, la quale si muove nelle sue vicinanze anch'essa solamente sotto dell'influenza del campo gravitazionale, percorrere una traiettoria rettilinea, come conseguenza del principio di equivalenza; in altre parole, tale osservatore si comporta proprio come se fosse inerziale ed è quindi sensato assegnarli un sistema di riferimento che possieda tale proprietà lungo tutta la sua geodetica. È inoltre importante notare che, conseguentemente a quanto detto, le quantità fisiche definite all'interno del sistema di riferimento associato alle coordinate di Fermi si presentano nella forma in cui sono viste e possono essere misurate da uno sperimentatore in caduta libera. Nel seguito, si affronterà il problema della costruzione di un riferimento avente le caratteristiche appena illustrate e delle coordinate ad esso associate, nell'ottica in cui questi oggetti possano essere utilizzati per la realizzazione di un laboratorio rispetto al quale studiare i fenomeni fisici. A tal proposito, si considera il fatto che un osservatore normalmente misura le lunghezze in relazione ad una griglia di coordinate spaziali ferma rispetto ad esso e pertanto egli si trova naturalmente a riposo nel proprio riferimento. Conseguentemente, la sua 4-velocità u avrà componenti spaziali nulle e la sua direzione coinciderà con quella dell'asse temporale. È possibile quindi definire il versore \hat{e}_0 corrispondente a quest'ultimo tramite la relazione

$$u = c \hat{e}_0, \quad (2.11)$$

ove c indica la velocità della luce nel vuoto. I versori $\{\hat{e}_i\}$, $i = 1, 2, 3$ che identificano gli assi spaziali possono invece essere definiti come quelli ortogonali tra di loro e ad \hat{e}_0 , rispetto al prodotto scalare di Minkowski, ovvero risulta, come in precedenza

$$\hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.12)$$

I 4 vettori ortonormali $\{\hat{e}_\alpha\}$ così definiti, il cui insieme viene definito anche *tetrate*, vengono "trascinati" assieme allo sperimentatore lungo la sua linea di universo, ovvero, essi vengono parallelamente trasportati lungo tale curva. La relazione precedente è valida allora in ogni punto di quest'ultima, dato che il trasporto parallelo non modifica il prodotto scalare di due vettori. Una volta definiti gli assi del riferimento in caduta libera, è possibile assegnare il sistema di coordinate ad esso associate. Innanzitutto, si nota che l'osservatore misurerà gli intervalli temporali mediante un orologio anch'esso fermo rispetto a lui e pertanto la coordinata temporale coinciderà con il suo tempo proprio τ . Le coordinate spaziali possono essere invece definite nella seguente maniera. Si consideri un punto P appartenente alla geodetica dello sperimentatore, a cui corrisponde un valore generico del tempo proprio, che verrà indicato sempre con τ . Si consideri poi anche una geodetica spaziale avente origine in tale punto ed identificata dal suo vettore unitario tangente, chiamato ancora n per fare uso della notazione adottata nella presentazione delle coordinate normali di Riemann; esso avrà componenti spaziali $n^i = n_i = n \cdot \hat{e}_i(\tau)$ e componente temporale nulla, $n^0 = 0$, rispetto agli assi scelti. Se s è il parametro d'arco corrispondente alla suddetta geodetica spaziale, allora ad un punto Q qualunque su tale curva possono essere assegnate, riutilizzando ancora la simbologia precedente, le coordinate

$$(cT, X, Y, Z) = (c\tau, sn^1, sn^2, sn^3). \quad (2.13)$$

Se si tracciano a questo punto tutte le possibili geodetiche spaziali aventi origine dalla linea di universo dell'osservatore, risulta che ogni punto dello spaziotempo è raggiunto da almeno una di esse; restringendosi poi ad un intorno "tubolare" della geodetica dello sperimentatore, sufficientemente piccolo affinché queste non si intersechino, è possibile assegnare in maniera univoca a ciascun punto di tale insieme una collezione di coordinate come la 2.13. Queste ultime prendono il nome di *coordinate normali di Fermi* e sono definite nell'intorno tubolare della geodetica dell'osservatore, il cui raggio è pari al raggio di curvatura dello spaziotempo \mathcal{R} .

Dopo aver definito gli assi del riferimento in caduta libera e aver introdotto le coordinate normali di Fermi, rimane da dimostrare che il primo di tali oggetti costituisca effettivamente una realizzazione di un riferimento inerziale, lungo la geodetica dell'osservatore. Per verificare questa affermazione, è necessario mostrare che le 2.1 valgono lungo tutta questa curva. La prima di tali relazioni è immediatamente verificata in virtù della 2.12, mentre il fatto che i simboli di Christoffel si annullino si può dimostrare mediante le seguenti considerazioni. Innanzitutto, è possibile scrivere l'equazione del trasporto parallelo dei versori degli assi $\{\hat{e}_\alpha\}$. Essa assume la forma, in coordinate di Fermi,

$$\frac{d\hat{e}_\alpha^\mu}{dT} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu \hat{e}_\alpha^\rho = 0, \quad (2.14)$$

ove $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ è valutato lungo la linea di universo dell'osservatore e u^ν sono le componenti della 4-velocità dell'osservatore, le quali risultano pari a $(c, 0, 0, 0)$, poiché egli è fermo rispetto al riferimento a lui adattato; in particolare, infatti, lo sperimentatore vede immobili gli assi del sistema, fatto che si traduce matematicamente con l'annullarsi della derivata prima dei versori nella precedente espressione. Alla luce di quanto appena detto, quest'ultima può essere riscritta come

$$\Gamma_{0\rho}^\mu \hat{e}_\alpha^\rho = 0, \quad (2.15)$$

la quale implica, dato che gli $\{\hat{e}_\alpha\}$ sono linearmente indipendenti,

$$\Gamma_{0\rho}^\mu = 0. \quad (2.16)$$

Per quanto concerne gli altri simboli di Christoffel, è possibile mostrare che anch'essi si annullano considerando una curva geodetica spaziale avente origine in un punto della linea di universo dell'osservatore; essa ha equazione, in coordinate di Fermi,

$$\frac{d^2 X^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dX^\nu}{ds} \frac{dX^\rho}{ds} = 0 \Rightarrow \Gamma_{ij}^\mu n^i n^j = 0, \quad (2.17)$$

ove si è adoperata la definizione 2.13. Se si valuta l'ultima espressione nel punto della traiettoria dello sperimentatore da cui la geodetica spaziale ha origine, allora essa deve essere valida per ogni vettore n e quindi risulta

$$\Gamma_{ij}^\mu = 0 \quad (2.18)$$

su tutta la lunghezza della linea di universo del riferimento. Nella seguente figura è rappresentato schematicamente il metodo con cui sono state costruite le coordinate normali di Fermi. Al centro del disegno è stata rappresentata la curva geodetica dell'osservatore in caduta libera, dal cui punto P si diramano alcune geodetiche spaziali. Lungo una di esse si è rappresentato un generico punto, Q , del quale sono state indicate le corrispondenti coordinate.

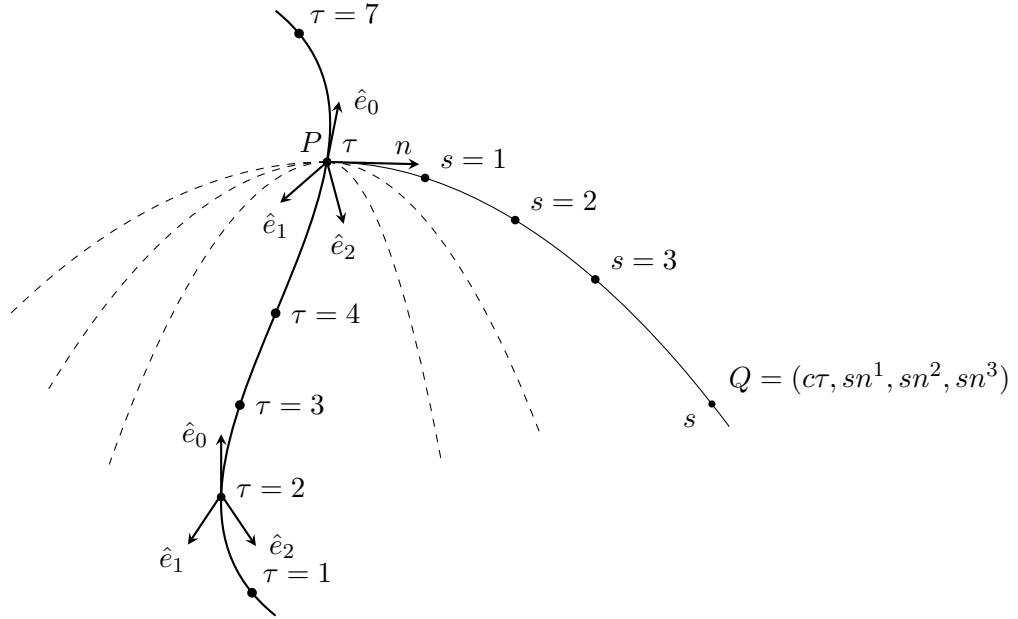


Figura 2.2: Schema della costruzione delle coordinate normali di Fermi.

In conclusione, quindi, nella presente sezione è stato possibile definire un sistema di riferimento localmente inerziale e le relative coordinate, dette coordinate normali di Fermi, nell'intorno di una curva geodetica dello spaziotempo; essa è stata scelta coincidente con la linea di universo di un osservatore in caduta libera e pertanto il

suddetto riferimento inerziale è stato associato a quest'ultimo, di modo che potesse costituire una sorta di laboratorio entro il quale lo sperimentatore potesse misurare i fenomeni fisici; un osservatore in caduta libera, infatti, vede una massa di prova, la quale si muove nelle sue vicinanze anch'essa solamente sotto l'influenza del campo gravitazionale, percorrere una traiettoria rettilinea, come conseguenza del principio di equivalenza; in altre parole, tale osservatore si comporta proprio come se fosse inerziale ed è quindi naturale assegnarli un sistema di riferimento che possieda tale proprietà lungo tutta la sua geodetica. La caratteristica del sistema di riferimento in caduta libera di essere localmente inerziale discende dal fatto che lungo tutta la linea di universo dell'osservatore i simboli di Christoffel si annullano e quindi lungo tale curva gli effetti della gravità vengono rimossi; essi possono essere percepiti solamente allontanandosi di una distanza abbastanza grande da tale traiettoria. In regioni dello spaziotempo vicine a questa (ovvero rimanendo all'interno del dominio di definizione delle coordinate di Fermi) è tuttavia possibile comunque considerare un debole campo gravitazionale, che si configura come una piccola correzione al tensore di Minkowski. In particolare, infatti, è possibile scrivere il tensore metrico in coordinate di Fermi come uno sviluppo in serie di potenze della parte spaziale di queste ultime, all'intorno della linea di universo dell'osservatore. Poiché le derivate prime della metrica sono nulle in coordinate di Fermi, è necessario calcolare tale sviluppo almeno fino al secondo ordine per tenere in considerazione gli effetti della curvatura. Come si può leggere ad esempio in [8] o in [5], se si conservano i termini quadratici in X^i , l'elemento di linea può essere scritto come

$$\begin{aligned}
 ds^2 \approx & - (1 + R_{0i0j} X^i X^j) c^2 dT^2 - \left(\frac{4}{3} R_{0jik} X^j X^k \right) cdT dX^i \\
 & + \left(\delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ikjl} X^k X^l \right) dX^i dX^j.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

ove $R_{\mu\nu\rho\sigma}(T)$ rappresenta la proiezione del tensore di Riemann sugli assi del riferimento dell'osservatore, la quale è pertanto valutata lungo la traiettoria di quest'ultimo e quindi dipende unicamente dal tempo proprio T .

Le coordinate di Fermi verranno utilizzate nei seguenti capitoli all'interno dello studio del fenomeno della precessione relativa degli spin di due particelle, in quanto, come menzionato nell'introduzione, si costruirà il sistema di riferimento adattato ad una delle due, per poi analizzare il moto del momento angolare dell'altra rispetto a quest'ultimo. Le coordinate di Fermi offrono inoltre una modalità per introdurre l'analogia tra la teoria linearizzata della gravitazione e l'elettromagnetismo di Maxwell, ovvero il gravito-elettromagnetismo. Quest'ultimo verrà presentato nel prossimo capitolo.

Capitolo 3

Il gravito-elettromagnetismo

In questo capitolo si descrive l'analogia che intercorre, sotto opportune ipotesi, tra la teoria della gravitazione relativistica e l'elettromagnetismo e alla quale si accennava nell'introduzione; tale somiglianza permette di formulare la cosiddetta *teoria gravito-elettromagnetica* o *gravito-elettromagnetismo* (GEM). Vi possono essere diverse modalità per introdurre tale argomento; nel seguito se ne presenteranno due, una delle quali sfrutta la linearizzazione delle equazioni di campo di Einstein, mentre l'altra fa uso delle coordinate di Fermi. In particolare, l'approccio al gravito-elettromagnetismo tramite le coordinate di Fermi si rivelerà utile nel seguito dell'elaborato per lo studio del fenomeno della precessione relativa dello spin. Si farà riferimento nel seguito alle trattazioni contenute negli articoli [2], [3] e [4].

3.1 Introduzione della teoria GEM dalla linearizzazione delle equazioni di campo

Come già preannunciato, una delle modalità attraverso cui si può introdurre il gravito-elettromagnetismo fa ricorso alla linearizzazione delle equazioni di campo di Einstein. Ci si accingerà ora ad illustrare questo approccio alla suddetta teoria.

In assenza di gravità, lo spaziotempo diviene piatto e ad esso rimane associato il tensore metrico di Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. Se invece si introduce una sorgente gravitazionale il cui campo sia debole, la metrica assume la forma:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \quad \text{con } |h_{\mu\nu}(x)| \ll 1, \quad (3.1)$$

ove $h_{\mu\nu}(x)$ rappresenta una piccola perturbazione dello spaziotempo piatto, mentre x è una notazione breve per indicare un sistema di coordinate $(ct = x^0, x^1, x^2, x^3)$. Si considerino ora le equazioni di campo di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

ove si sono indicati con $R_{\mu\nu}$ e con R rispettivamente il tensore di Ricci e la curvatura scalare, mentre $T_{\mu\nu}$ rappresenta il tensore energia-impulso associato alla distribuzione di massa/energia che genera il campo gravitazionale. Le costanti G e c sono invece la costante di gravitazione universale e la velocità della luce nel vuoto. Nella situazione sopra considerata, proprio per il fatto che si è in presenza di un campo

debole, è lecito scegliere di approssimare le equazioni di Einstein conservandone solamente i termini lineari nella perturbazione $h_{\mu\nu}$; se si introduce allora il tensore traccia inversa $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$, dove $h = h^\mu{}_\mu = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ indica la traccia di $h_{\mu\nu}$, e si utilizza la gauge di Lorentz $\partial_\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$, tali equazioni possono essere riscritte nella forma linearizzata come

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

ove $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ è l'operatore d'Alembertiano. È ora possibile considerare una particolare soluzione delle 3.3, ovvero la soluzione ritardata

$$\bar{h}_{\mu\nu}(ct, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \int_V \frac{T_{\mu\nu}(ct - |x - x'|, x')}{|x - x'|} d^3x'. \quad (3.4)$$

In quest'ultima espressione, il volume V sul quale si sta valutando l'integrale si riferisce a quello occupato dalla distribuzione di massa/energia che genera il campo gravitazionale e a cui è associato il tensore di energia-impulso $T_{\mu\nu}$; le coordinate x' sono riferite ai punti dello spazio occupati da tale distribuzione. Al fine di introdurre il gravito-elettromagnetismo, è ora utile valutare le componenti del tensore $T_{\mu\nu}$. Per farlo, è necessario possedere delle informazioni riguardanti la natura della sorgente del campo; per semplicità, si supponrà nella corrente trattazione che questa sia costituita da un insieme discreto di particelle, in moto tutte con la stessa 4-velocità $u^\mu = dx^\mu/d\tau = \gamma_v(c, \vec{v})$, ove τ è il tempo proprio ad esse associato, $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ e $\gamma_v = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ è il fattore lorentziano. Considerando quest'ipotesi quindi, risulta:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu, \quad (3.5)$$

ove ρ è la densità volumetrica di massa del sistema nel riferimento in cui esso si trova a riposo. Si supponga ora inoltre che la sorgente del campo si muova con velocità $v \ll c$; tale ulteriore ipotesi permette di scrivere le seguenti approssimazioni

$$\gamma_v = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \approx 1, \quad u^\mu = \gamma_v(c, \vec{v}) \approx (c, \vec{v}), \quad (3.6)$$

ove nell'espressione di γ_v si sono trascurati i termini di ordine 2 in v/c o superiori; si precisa che quest'ultima approssimazione verrà utilizzata anche nel seguito, mentre i contributi lineari verranno conservati. Se le 3.6 vengono utilizzate per la valutazione del tensore di energia-impulso $T_{\mu\nu}$, esse conducono a scrivere

$$T_{00} \approx \rho c^2, \quad T_{0i} \approx -\rho c v_i = -c j_i, \quad T_{ij} \approx \rho v_i v_j. \quad (3.7)$$

Nella seconda delle precedenti espressioni si è definita la grandezza densità di corrente di massa $j^i = \rho v^i$; essa è analoga alla densità di corrente elettrica considerata nell'ambito della teoria elettromagnetica. Utilizzando le 3.7, è in seguito possibile riscrivere le componenti della 3.4 nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{00} &= \frac{4G}{c^2} \int_V \frac{\rho(ct - |x - x'|, x')}{|x - x'|} d^3x' := \frac{4}{c^2} \Phi \\ \bar{h}_{0i} &= -\frac{4G}{c^3} \int_V \frac{j_i(ct - |x - x'|, x')}{|x - x'|} d^3x' := -\frac{2}{c^2} A_i \\ \bar{h}_{ij} &= \frac{4G}{c^4} \int_V \frac{(\rho v_i v_j)(ct - |x - x'|, x')}{|x - x'|} d^3x' \approx 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Le prime due uguaglianze contengono la definizione di due nuove quantità, chiamate potenziale gravitoelettrico Φ e potenziale gravitomagnetico \vec{A} ; esse interpretano, all'interno della teoria della gravitazione, esattamente lo stesso ruolo dei due potenziali del campo elettromagnetico. Le componenti spaziali di $\bar{h}_{\mu\nu}$ sono invece proporzionali a v^2/c^2 e pertanto sono state trascurate. Dopo aver definito i potenziali Φ ed \vec{A} , è possibile introdurre altre quantità analoghe a grandezze elettromagnetiche, come i campi gravitoelettrico e gravitomagnetico, i quali sono forniti dalle espressioni:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{A} \right), \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3.9)$$

Per verificare l'effettiva esistenza di una analogia tra il campo gravitazionale e quello elettromagnetico, è necessario dimostrare che i campi \vec{E} e \vec{B} soddisfano le equazioni di Maxwell e che l'espressione dell'interazione gravitazionale rassomigli a quella della forza di Lorentz. Per quanto concerne la prima problematica, sfruttando unicamente le definizioni 3.9, è possibile trovare la seguente coppia di equazioni:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{B} \right), \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{B} \right) = 0, \quad (3.10)$$

mentre le rimanenti due possono essere ricavate utilizzando l'equazione di Einstein linearizzata 3.3 riscritta in funzione dei potenziali Φ e \vec{A} e tenendo presente che la condizione della gauge di Lorentz diviene

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0; \quad (3.11)$$

le equazioni di Maxwell contenenti i termini delle sorgenti sono pertanto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi G\rho, \quad \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{2} \vec{B} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi G}{c} \vec{j}. \quad (3.12)$$

L'analogo gravitazionale della forza di Lorentz può invece essere ottenuto a partire dall'equazione del moto di una particella in campo gravitazionale, ovvero l'equazione della geodetica, seguendo il procedimento illustrato in [7]. Si consideri allora un corpuscolo massivo di prova che si muova in presenza di campo gravitazionale debole. Sia la sua 4-velocità $u_P^\mu = dx_P^\mu/d\tau_P = \gamma_{v_P}(c, \vec{v}_P)$, ove τ_P è il tempo proprio ad esso associato e $\vec{v}_P = d\vec{x}_P/dt$; allora, le componenti spaziali dell'equazione della geodetica sono

$$\frac{d^2 x_P^i}{d\tau_P^2} + \Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dx_P^\mu}{d\tau_P} \frac{dx_P^\nu}{d\tau_P} = 0, \quad (3.13)$$

ove $\Gamma_{\mu\nu}^i$ rappresentano i simboli di Christoffel. Se tuttavia si suppone che la particella considerata si muova a velocità non relativistica, ossia $v_P \ll c$ e se si sceglie di conservare solamente i termini del prim'ordine in v_P/c , trascurando tutti gli altri, la nota relazione $dt = \gamma_{v_P} d\tau_P$ si approssima semplicemente a $dt \approx d\tau_P$ e pertanto la 3.13 diviene

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_P^i}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dx_P^\mu}{dt} \frac{dx_P^\nu}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2 x_P^i}{dt^2} &= -c^2 \Gamma_{00}^i - 2c \Gamma_{0j}^i v_P^j - \Gamma_{jk}^i v_P^j v_P^k \approx -c^2 \Gamma_{00}^i - 2c \Gamma_{0j}^i v_P^j, \end{aligned} \quad (3.14)$$

dove le espressioni di Γ_{00}^i e Γ_{0j}^i diventano, conservandone solamente i termini lineari in $h_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2}\eta^{i\varepsilon}(\partial_0 h_{0\varepsilon} + \partial_0 h_{\varepsilon 0} - \partial_\varepsilon h_{00}) = \frac{1}{2}(2\partial_0 h_{0i} - \partial_i h_{00}), \\ \Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2}\eta^{i\varepsilon}(\partial_0 h_{j\varepsilon} + \partial_j h_{\varepsilon 0} - \partial_\varepsilon h_{0j}) = \frac{1}{2}(\partial_0 h_{ij} + \partial_j h_{i0} - \partial_i h_{j0}).\end{aligned}\quad (3.15)$$

Alla luce delle definizioni introdotte in questo paragrafo, le componenti della perturbazione $h_{\mu\nu}$ possono essere riscritte come

$$h_{00} = \frac{2}{c^2}\Phi, \quad h_{0i} = -\frac{2}{c^2}A_i, \quad h_{ij} = \frac{2}{c^2}\Phi\delta_{ij}, \quad (3.16)$$

mentre l'elemento di linea relativo alla metrica 3.1 è

$$ds^2 = \left(-1 + \frac{2}{c^2}\Phi\right)c^2 dt^2 - \frac{4}{c}A_i dt dx^i + \left(1 + \frac{2}{c^2}\Phi\right)\delta_{ij} dx^i dx^j; \quad (3.17)$$

inserendo a questo punto le 3.16 all'interno delle 3.15, si giunge infine a scrivere

$$\frac{d^2 x_{P,i}}{dt^2} = \frac{2}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \partial_i \Phi - \frac{2}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{v_{P,i}}{c} - 2(\partial_i A_j - \partial_j A_i) \frac{v_P^j}{c}. \quad (3.18)$$

Si è già supposto, all'inizio del presente paragrafo, che il moto delle sorgenti del campo gravitazionale sia non relativistico. Se ora si suppone in aggiunta che il moto sia così lento da poter considerare stazionari i potenziali gravito-elettromagnetici Φ e \vec{A} , la precedente equazione si semplifica a

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x_{P,i}}{dt^2} &= \partial_i \Phi - 2(\partial_i A_j - \partial_j A_i) \frac{v_P^j}{c} \Rightarrow \frac{d^2 x_{P,i}}{dt^2} = -E_i - 2\varepsilon_{ijk} \frac{v_P^j}{c} B^k \\ \Rightarrow m \frac{d^2 x_{P,i}}{dt^2} &= -mE_i - 2m\varepsilon_{ijk} \frac{v_P^j}{c} B^k \\ \Rightarrow m \frac{d^2 \vec{x}_P}{dt^2} &= \vec{F}_g = -m\vec{E} - 2m \frac{\vec{v}_P}{c} \times \vec{B},\end{aligned}\quad (3.19)$$

ove si sono utilizzate le definizioni di \vec{E} e \vec{B} ; si sono poi moltiplicati ambo i membri per la massa m della particella di prova. L'ultimo risultato, riscritto in notazione vettoriale, rappresenta l'espressione della forza gravitazionale agente su di essa. Il primo termine, dipendente dal campo gravitoelettrico, corrisponde all'attrazione gravitazionale prevista dalla teoria di Newton; il secondo, invece, è interpretabile come un nuovo contributo assente in fisica classica, dovuto al fatto che si è deciso precedentemente di conservare i termini lineari in v_P/c . Si può notare che la 3.19 è formalmente identica alla forza di Lorentz, a patto di sostituire la carica elettrica q ai fattori $-m$ e $-2m$; questa forte somiglianza tra i due tipi di interazione suggerisce di assegnare a queste ultime due grandezze il significato rispettivamente di carica del campo gravitoelettrico e carica del campo gravitomagnetico:

$$q_E = -m, \quad q_B = -2m, \quad (3.20)$$

dove la presenza del segno meno è giustificata dal fatto che la forza gravitazionale è sempre attrattiva. La verifica dell'esistenza della forza di Lorentz gravitazionale conclude la dimostrazione dell'analogia tra la teoria della gravitazione e l'elettromagnetismo; in base a tale importante fatto, ci si aspetta di ritrovare, se si utilizzano le suddette approssimazioni, lo stesso tipo di fenomenologia per le due teorie.

3.2 Introduzione della teoria GEM per mezzo delle coordinate di Fermi

Un approccio alternativo al gravito-elettromagnetismo è realizzabile tramite l'ausilio di un sistema di coordinate di Fermi. Questa modalità di introdurre la suddetta teoria verrà utilizzata nel seguito per studiare l'effetto della precessione relativa dello spin indotto dal passaggio di un'onda gravitazionale e riveste pertanto un ruolo importante all'interno della trattazione del presente elaborato. In primis, si consideri un osservatore in caduta libera all'interno di un assegnato campo gravitazionale e si costruisca un sistema di coordinate di Fermi $X^\mu = (cT, X, Y, Z)$ ad esso adattato. Come visto nel capitolo 2, utilizzando tali coordinate, l'espressione dell'elemento di linea, fino al secondo ordine in X^i , assume la forma seguente:

$$ds^2 \approx - (1 + R_{0i0j} X^i X^j) c^2 dT^2 - \left(\frac{4}{3} R_{0jik} X^j X^k \right) cdT dX^i + \left(\delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ikjl} X^k X^l \right) dX^i dX^j, \quad (3.21)$$

ove $R_{\mu\nu\rho\sigma}(T)$ rappresenta la proiezione del tensore di Riemann sugli assi del riferimento dell'osservatore. L'espressione precedente, così come la 3.17 presentata poco più sopra, possiede la forma di una perturbazione attorno allo spaziotempo di Minkowski. Un metodo per introdurre l'analogia tra campo gravitazionale e campo elettromagnetico per mezzo delle coordinate di Fermi consiste, inizialmente, nel definire i potenziali gravito-elettromagnetici Φ e \vec{A} proprio confrontando i tensori metrici associati a tali due elementi, componente per componente. Da questo processo risulta, se si trascura la curvatura spaziale,

$$\Phi = -\frac{c^2}{2} R_{0i0j} X^i X^j, \quad A_i = \frac{c^2}{3} R_{0jik} X^j X^k. \quad (3.22)$$

Tali espressioni possono essere utilizzate per definire i campi gravitoelettrico e gravitomagnetico, facendo uso della 3.9, come

$$E_i = c^2 R_{0i0j} X^j - \frac{c}{6} \left(\frac{\partial}{\partial T} R_{0jik} \right) X^j X^k, \quad B_i = \frac{c^2}{3} \varepsilon_{ijk} \left(R_0^{jk}{}^l{}_l + R_{0l}{}^{jk} \right) X^l. \quad (3.23)$$

Nel seguito, si sceglierà di conservare solamente i termini lineari in X^i all'interno di queste uguaglianze. Inoltre, antisimmetrizzando l'espressione di B_i rispetto agli indici j e k e sfruttando le proprietà di simmetria del tensore di Riemann, è possibile scrivere tale campo in una forma più semplice. Si farà pertanto riferimento da qui in avanti alle

$$E_i = c^2 R_{0i0j} X^j, \quad B_i = -\frac{c^2}{2} \varepsilon_{ijk} R_{0l}{}^{jk} X^l. \quad (3.24)$$

Per costruire un'analogia tra gravitazione ed elettromagnetismo, è necessario innanzitutto che le espressioni appena fornite soddisfino le equazioni di Maxwell. Come ricordato nella sezione 3.1, la coppia di leggi che non contengono i termini delle sorgenti si deducono direttamente dalle definizioni ivi date di campo gravitoelettrico e gravitomagnetico e sono quindi automaticamente soddisfatte. Tuttavia, poiché il

termine quadratico in X^i di E_i è stato trascurato, l'equazione contenente la divergenza di quest'ultimo subirà anch'essa una modifica, ovvero non conterrà il contributo fornito da tale termine medesimo. Esso è dato da

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \partial^j \left[-\frac{c}{6} \left(\frac{\partial}{\partial T} R_{0l}{}^k{}_m \right) X^l X^m \right] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial T} \left(-\frac{c^2}{4} \varepsilon_{ijk} R^{jk}{}_{0l} X^l \right) \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{2} B_i \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

ove $\partial_j = \partial/\partial X^j$. Pertanto risulta, adoperando per comodità la notazione vettoriale,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (3.26)$$

In conclusione, al prim'ordine in X^i , le equazioni di Maxwell indipendenti dalle sorgenti sono:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{B} \right) = 0. \quad (3.27)$$

Per quanto concerne invece la seconda coppia di leggi, esse possono essere ricavate inizialmente valutando la divergenza del campo gravitoelettrico e il rotore del campo gravito-elettromagnetico 3.24, ottenendo come risultato

$$\partial_i E^i = -c^2 R_0^0, \quad \varepsilon^{ijk} \partial_j B_k = -c^2 R_0^i, \quad (3.28)$$

ove $R_0^\mu(T)$ è il tensore di Ricci in coordinate di Fermi. Affinché la seconda delle precedenti equazioni assomigli in forma alla sua corrispondente elettromagnetica, ovvero alla legge di Ampère-Maxwell, è necessario introdurre a secondo membro un termine che contenga la derivata temporale del campo E_i :

$$\varepsilon^{ijk} \partial_j B_k = -c^2 R_0^i \Rightarrow \varepsilon^{ijk} \partial_j B_k = \frac{2}{c} \frac{\partial E^i}{\partial T} - \frac{2}{c} \frac{\partial E^i}{\partial T} - c^2 R_0^i. \quad (3.29)$$

Se a questo punto si definisce una 4-corrente J^μ le cui componenti sono date da

$$J^0 = -\frac{c^3}{4\pi} R_0^0, \quad J^i = -\frac{c}{4\pi} \left(\frac{2}{c} \frac{\partial E^i}{\partial T} + c^2 R_0^i \right), \quad (3.30)$$

la prima delle 3.28 e la 3.29 possono essere riscritte, in notazione vettoriale, nella forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{c} J^0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{2}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (3.31)$$

con $J^\mu = (J^0, \vec{J})$. È importante notare come quest'ultima quantità corrisponda ad una 4-corrente differente da quella considerata nella spiegazione del precedente approccio alla teoria gravito-elettromagnetica; in particolare si nota che le sue componenti spaziali dipendono linearmente dalla posizione X^i attraverso la derivata temporale del campo gravitoelettrico. L'espressione di J^μ si riduce, lungo la linea di universo dell'osservatore, al termine

$$J^\mu(T, 0) = -\frac{c^3}{4\pi} R_0^\mu = -\frac{2G}{c} \left(T_0^\mu - \frac{1}{2} \delta_0^\mu T_\nu{}^\nu \right). \quad (3.32)$$

È importante notare che le 3.31 appena ricavate possiedono, come si può osservare, la stessa struttura delle equazioni di Maxwell dipendenti dalle sorgenti.

Riassumendo, quindi, è stato finora possibile dimostrare che i campi gravitoelettromagnetici \vec{E} e \vec{B} introdotti mediante l'ausilio delle coordinate di Fermi soddisfano delle leggi analoghe alle equazioni di Maxwell; due di tali equazioni, ovvero quelle indipendenti dalle sorgenti, risultano essere immediatamente verificate, in quanto esse sono state dedotte direttamente dalle definizioni dei campi. Anche la seconda coppia di equazioni è altrettanto valida, ma le componenti della 4-corrente presenti all'interno di esse sono differenti da quelle che compaiono nelle leggi di Maxwell e nelle loro corrispettive equazioni gravitazionali introdotte sfruttando la linearizzazione delle equazioni di campo: in particolare, la nuova corrente J^i dipende linearmente da X^i . L'analogia formale tra la teoria della gravitazione e l'elettromagnetismo necessita ancora di un elemento fondamentale per essere verificata, ovvero il moto di una particella massiva di prova immersa all'interno di un campo gravitoelettromagnetico deve essere interpretabile come conseguenza dell'azione di una forza sul medesimo corpuscolo, la quale sia simile in forma alla forza di Lorentz. Per ricavare tale risultato, si può considerare inizialmente l'equazione della geodetica espressa in funzione delle coordinate di Fermi. Si supponga di voler calcolare la traiettoria di una particella di massa m che si muova con velocità non relativistica. Come fatto nel paragrafo 3.1, sotto quest'ipotesi è lecito confondere il tempo coordinato T con il tempo proprio della particella; pertanto, utilizzando le medesime convenzioni per i simboli ivi adoperate, si ha l'equazione

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X_P^i}{dT^2} + \Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dX_P^\mu}{dT} \frac{dX_P^\nu}{dT} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2 X_P^i}{dT^2} &= -c^2 \Gamma_{00}^i - 2c \Gamma_{0j}^i V_P^j - \Gamma_{jk}^i V_P^j V_P^k \approx -c^2 \Gamma_{00}^i - 2c \Gamma_{0j}^i V_P^j, \end{aligned} \quad (3.33)$$

ove $\Gamma_{\mu\nu}^i$ sono i simboli di Christoffel riferiti questa volta alla metrica espressa in funzione delle coordinate di Fermi (3.21) e si è posto $V_P^i = dX_P^i/dT$. Nel seguito, si sceglie di conservare solamente i contributi più importanti a secondo membro della precedente uguaglianza, ovvero quelli del prim'ordine in X^i . Questa approssimazione permette di semplificare le espressioni di Γ_{00}^i e Γ_{0j}^i con le modalità che verranno ora illustrate. Innanzitutto, dall'osservazione della 3.21, si può evincere che il tensore metrico in coordinate di Fermi può essere scritto nella forma

$${}^F g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + {}^F h_{\mu\nu}(X^i X^j), \quad (3.34)$$

ove ${}^F h_{\mu\nu}$ raccoglie i termini dipendenti dalle coordinate spaziali X^i , i quali sono tutti quadratici rispetto ad esse; quest'ultima osservazione permette di scrivere

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^i &= \frac{1}{2} {}^F g^{i\rho} (\partial_\mu {}^F g_{\nu\rho} + \partial_\nu {}^F g_{\rho\mu} - \partial_\rho {}^F g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (\eta^{i\rho} + {}^F h^{i\rho}) (\partial_\mu {}^F h_{\nu\rho} + \partial_\nu {}^F h_{\rho\mu} - \partial_\rho {}^F h_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{i\rho} (\partial_\mu {}^F h_{\nu\rho} + \partial_\nu {}^F h_{\rho\mu} - \partial_\rho {}^F h_{\mu\nu}) + O(3), \end{aligned} \quad (3.35)$$

ma come è stato detto, tutti i contributi di ordini superiori al primo verranno trascurati e pertanto l'espressione dei simboli di Christoffel sarà quella rappresentata

dal primo termine all'interno dell'ultimo passaggio. È ora possibile procedere con la valutazione di Γ_{00}^i e Γ_{0j}^i nello specifico:

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2}\eta^{i\rho}(\partial_0^F h_{0\rho} + \partial_0^F h_{\rho 0} - \partial_\rho^F h_{00}) = \frac{1}{2}(2\partial_0^F h_{0i} - \partial_i^F h_{00}) = -\frac{1}{2}\partial_i^F h_{00}, \\ \Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2}\eta^{i\rho}(\partial_0^F h_{j\rho} + \partial_j^F h_{\rho 0} - \partial_\rho^F h_{0j}) = \frac{1}{2}(\partial_j^F h_{0i} - \partial_i^F h_{0j}),\end{aligned}\quad (3.36)$$

dove le derivate temporali di ${}^F h_{\mu\nu}$ sono state trascurate, poiché consistono in termini quadratici in X^i , come si può evincere osservando la 3.21. Proseguendo con i calcoli risulta poi

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^i &= -\frac{1}{2}\partial_i^F h_{00} = -\frac{1}{2}\partial_i(-R_{0j0k}X^jX^k) = R_{0i0j}X^j, \\ \Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2}\left(\partial_j\left(-\frac{2}{3}R_{0kil}X^kX^l\right) - \partial_i\left(-\frac{2}{3}R_{0kjl}X^kX^l\right)\right) \\ &= -\frac{1}{3}(R_{0jil}X^l + R_{0kij}X^k - R_{0i jl}X^l - R_{0kji}X^k) \\ &= -\frac{1}{3}(R_{0jik} + R_{0kij} - R_{0ijk} - R_{0kji})X^k \\ &= -\frac{1}{3}(-3R_{0kji})X^k = -R_{ij0k}X^k.\end{aligned}\quad (3.37)$$

Alla luce dei risultati appena ottenuti, l'equazione della geodetica si riduce a:

$$\frac{d^2X^i}{dt^2} + c^2 R_{0i0j}X^j - 2c R_{ij0k}V^jX^k = 0, \quad (3.38)$$

la quale può essere riscritta in funzione dei campi gravitoelettrico E_i e gravitomagnetico B_i ottenendo

$$\frac{d^2X_i}{dT^2} + E_i + 2\varepsilon_{ijk}\frac{V^j}{c}B^k = 0. \quad (3.39)$$

Moltiplicando per m , portando gli ultimi due termini della precedente equazione a secondo membro e utilizzando la notazione vettoriale si giunge infine a scrivere:

$$\vec{F}_g = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -m\vec{E} - 2m\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}. \quad (3.40)$$

Il risultato appena trovato rappresenta l'espressione della forza gravitazionale agente su di una particella di massa m nel sistema di coordinate di Fermi ed è formalmente simile alla forza di Lorentz nella teoria dell'elettromagnetismo; tale fatto permette di completare la dimostrazione dell'esistenza dell'analogia tra quest'ultima e la teoria linearizzata della gravitazione.

Al fatto che sia stato possibile, come appena illustrato, introdurre il gravitoelettromagnetismo mediante l'utilizzo delle coordinate normali di Fermi consegue una considerazione degna di nota: un osservatore in caduta libera interpreta gli effetti gravitazionali (attorno a sé stesso) come analoghi a quelli elettromagnetici e governati da leggi fisiche simili a quelle proprie della teoria elettromagnetica.

Inoltre, un'ulteriore importante proprietà delle coordinate di Fermi si può evincere dalla dimostrazione presentata poco più sopra: si è infatti visto che è stato

possibile scrivere l'equazione del moto di una particella di massa m tramite l'utilizzo dell'espressione di una forza, analoga a quella di Lorentz, e tale fatto indica quindi che, mediante l'utilizzo delle coordinate di Fermi, è possibile interpretare l'azione della gravità non già come un effetto dovuto alla presenza della curvatura dello spaziotempo, ma come il risultato dell'applicazione, appunto, di una forza ai corpi in gioco, come avviene in fisica classica; l'interazione gravitazionale assume quindi un'interpretazione più immediata e familiare, se si utilizzano le coordinate di Fermi e ciò costituisce un aggiuntivo grande vantaggio che l'impiego di queste ultime può fornire.

Capitolo 4

L'onda gravitazionale piana

Come riportato nell'introduzione, l'obiettivo della presente tesi è lo studio della precessione relativa degli spin di due particelle, indotta dal passaggio di un'onda gravitazionale debole e piana. All'interno del presente paragrafo si discutono brevemente le caratteristiche principali del modello che verrà utilizzato per rappresentare quest'ultima e che sarà sfruttato all'interno del capitolo successivo per l'analisi del moto di precessione. Come detto, l'onda gravitazionale che determina tale effetto consiste in un'onda debole piana e monocromatica, il cui campo può essere ricavato a partire dall'equazione di Einstein linearizzata

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (4.1)$$

Infatti, l'equazione omogenea ad essa associata (la quale si ottiene considerando il campo lontano dalle sorgenti, $T_{\mu\nu} = 0$), ovvero

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (4.2)$$

ammette delle soluzioni di onda piana. Ad esempio, se ci si pone in un sistema di coordinate TT $(ct^{TT}, x^{TT}, y^{TT}, z^{TT})$ e si suppone che l'onda gravitazionale si propaghi lungo la direzione coordinata x^{TT} , una soluzione di tale equazione si può scrivere nel seguente modo:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h^+ e_{\mu\nu}^+ + h^\times e_{\mu\nu}^\times, \quad (4.3)$$

ove

$$h^+ = A^+ \sin(\omega t^{TT} - kx^{TT}), \quad h^\times = A^\times \cos(\omega t^{TT} - kx^{TT}), \quad (4.4)$$

mentre

$$e_{\mu\nu}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e_{\mu\nu}^\times = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

rappresentano i due tensori di polarizzazione dell'onda. Nelle formule precedenti, A^+ e A^\times sono le ampiezze delle componenti dell'onda nei due stati di polarizzazione $+$ e \times ; ω e k rappresentano invece rispettivamente pulsazione e numero d'onda, in modo tale che il 4-vettore d'onda (che è di tipo luce) sia $k^\mu = (\omega/c, k, 0, 0)$.

In base a quanto appena esposto, l'elemento di linea nel campo dell'onda gravitazionale (4.3) è:

$$ds^2 = - (dt^{TT})^2 + (dx^{TT})^2 + (1 - h^+)(dy^{TT})^2 + (1 + h^+)(dz^{TT})^2 - 2h^\times dy^{TT} dz^{TT}, \quad (4.6)$$

come si trova scritto in [1].

Capitolo 5

La precessione relativa dello spin

Nel presente capitolo si analizza il fenomeno della precessione relativa tra gli spin di due particelle massive puntiformi, le quali, inizialmente a riposo nello spaziotempo di Minkowski e con momento angolare allineato lungo una data direzione, vengono investite dal passaggio di un'onda gravitazionale debole e piana. Come è stato menzionato nell'introduzione, l'importanza di tale effetto risiede nel fatto che esso potrebbe essere utilizzato per la realizzazione di una nuova tipologia di apparati sperimentali finalizzati alla rilevazione delle onde gravitazionali; tali strumentazioni, infatti, essendo in grado di osservare la precessione dello spin, permetterebbero di analizzare anche le componenti del campo gravitazionale, le quali, costituiscono "la parte magnetica" dell'interazione, dato che il suddetto fenomeno è un effetto riconducibile alla presenza di quest'ultima. La rilevazione della componente magnetica delle onde gravitazionali non è infatti ancora stata realizzata, in quanto gli esperimenti condotti sinora con tecniche interferometriche, i quali hanno portato alla prima osservazione diretta delle onde gravitazionali (eventi GW150914 e GW151226 osservati da LIGO), hanno rivelato degli effetti legati unicamente alla "parte elettrica" del segnale. Il fenomeno della precessione relativa di due spin indotta dal passaggio di un'onda gravitazionale, potrebbe costituire, invece, un primo esempio di fenomeno gravitomagnetico osservabile in grado di fornire una misura diretta di quantità fisiche caratterizzanti l'onda medesima, come ad esempio ampiezza e pulsazione. Ad ogni modo, si evidenzia che l'effettiva realizzazione di esperimenti atti ad osservare l'effetto di precessione è un argomento ancora oggetto di studio e discussione; tuttavia, il modello teorico che sarà sviluppato nel seguito di questo capitolo verrà realizzato in modo da costruire un riferimento, all'interno del quale studiare l'effetto della precessione dello spin, che sia tale da poter essere utilizzabile da un osservatore. In questo modo esso costituirà pertanto una sorta di laboratorio in cui poter effettuare delle osservazioni sperimentali. Un siffatto riferimento può essere fornito da un sistema di coordinate normali di Fermi adattate ad un particolare osservatore; nel caso corrente, quest'ultimo è individuabile come quello solidale ad una delle due particelle i cui spin precedono uno attorno all'altro al passaggio dell'onda gravitazionale. L'adozione di un tale sistema di coordinate si giustifica sulla base del fatto che i due corpuscoli non sperimentano alti tipi di interazione oltre a quella gravitazionale e quindi essi sono entrambi in caduta libera nel campo dell'onda incidente. Nel seguito, pertanto, il punto materiale lungo la cui curva geodetica si costruiscono le coordinate di Fermi verrà denotato come quello di riferimento, men-

tre verrà indagato il moto del momento angolare dell'altra particella. L'utilizzo delle coordinate di Fermi è inoltre vantaggioso poiché permette di introdurre l'analogia tra campo gravitazionale e campo elettromagnetico di cui si è parlato nel paragrafo 3.2; la seguente trattazione, ed anche quella presente nel capitolo successivo, riguardante il moto delle particelle dotate di spin, verrà di fatto condotta utilizzando ricorrendo a concetti e leggi proprie della teoria elettromagnetico, fornendone un analogo gravitazionale entro gli opportuni limiti di validità.

Si procede quindi ora ad illustrare un modello che giustifichi il verificarsi del fenomeno della precessione relativa dello spin. In primis, si consideri un sistema di coordinate di Fermi adattate ad un osservatore solidale con la particella di riferimento, definito in un intorno sufficientemente piccolo della linea di universo di quest'ultima; precisamente, tale intorno è costituito da una regione cilindrica, attorno alla suddetta curva, avente raggio \mathcal{R} , pari al raggio di curvatura dello spaziotempo. Restringendosi al corrispondente dominio di definizione, è possibile scrivere uno sviluppo della metrica in serie di potenze delle coordinate spaziali di Fermi; essa assume, tramite questa operazione, la forma di una perturbazione attorno allo spaziotempo di Minkowski (si sta utilizzando, quindi, un'approssimazione di campo gravitazionale debole). Limitandosi ai termini del secondo ordine, in accordo con quanto detto nel capitolo 2, l'elemento di linea nel sistema solidale con la particella di riferimento può essere pertanto espresso come:

$$ds^2 \simeq -c^2 dt^2 [1 + R_{0i0j} X^i X^j] - 2cdt dX^i \left[\frac{2}{3} R_{0jik} X^j X^k \right] + dX^i dX^j \left[\delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ikjl} X^k X^l \right], \quad (5.1)$$

ove (cT, \vec{X}) sono le coordinate di Fermi, mentre $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ rappresenta invece il tensore di Riemann associato alla curvatura dello spaziotempo, ovvero a quello dell'onda gravitazionale debole e piana incidente sul sistema formato dalle due particelle; esso è valutato lungo la linea di universo di riferimento e conseguentemente dipende solamente dal tempo proprio a quest'ultima correlato (la coordinata T). Come visto nella sezione 3.2, la precedente metrica può essere confrontata con l'espressione

$$ds^2 = -c^2 \left[1 - 2 \frac{\Phi}{c^2} \right] dt^2 - \frac{4}{c} [\vec{A} \cdot d\vec{x}] dt + \left[1 + 2 \frac{\Phi}{c^2} \right] \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (5.2)$$

per introdurre l'analogia tra campo gravitazionale e campo elettromagnetico. In particolare, i potenziali gravitoelettromagnetici sono dati rispettivamente, in coordinate di Fermi, da

$$\Phi = -\frac{c^2}{2} R_{0i0j} X^i X^j, \quad A_i = \frac{c^2}{3} R_{0jik} X^j X^k, \quad (5.3)$$

ove le A_i , con $i = 1, 2, 3$, sono le componenti del potenziale vettore \vec{A} . È poi possibile definire, a partire dalle 5.3, il campo gravitoelettrico e il campo gravitomagnetico, al primo ordine in \vec{X} , come

$$E_i = c^2 R_{0i0j} X^j, \quad B_i = -\frac{c^2}{2} \varepsilon_{ijk} R^j{}_{0l} X^l. \quad (5.4)$$

ove E_i sono le componenti del campo gravitoelettrico e B_i quelle del campo gravitomagnetico, Da ultimo, si ricorda che l'espressione della forza gravitazionale agente

su di una particella di massa m è formalmente simile alla forza di Lorentz, ovvero è uguale a

$$\vec{F}_g = -m\vec{E} - 2m \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}. \quad (5.5)$$

Con l'utilizzo dell'espressione di B_i è possibile mostrare come lo spin di una particella, posta ad una certa distanza sufficientemente piccola dalla linea di universo di riferimento, sia interessato da un moto di precessione attorno alla direzione da esso inizialmente posseduta, ovvero antecedentemente al passaggio dell'onda gravitazionale. Tale direzione coincide peraltro con quella dello spin della particella di riferimento; si viene pertanto a determinare, utilizzando il sistema di coordinate di Fermi, un moto di precessione relativa tra i momenti angolari delle due particelle. Poiché, come più sopra riportato, è possibile considerare il campo di onda gravitazionale debole come una quantità formalmente analoga al campo elettromagnetico, è lecito pensare che il campo gravitomagnetico \vec{B} si accoppi con lo spin di una particella in modo da determinare un momento di torsione non nullo, il quale costituisce la causa del moto di precessione. Tale accoppiamento viene a determinarsi in maniera del tutto identica a quanto avviene nel caso in cui un dipolo magnetico di momento $\vec{\mu}$ sia immerso all'interno di un campo magnetico \vec{B} ; se esso è uniforme e costante, infatti, in quest'ultima situazione sul dipolo magnetico è applicato un momento di torsione, pari al prodotto vettore del momento di dipolo $\vec{\mu}$ per il campo magnetico, il quale è responsabile della rotazione del dipolo perpendicolarmente al proprio asse:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad (5.6)$$

ove \vec{L} rappresenta il momento angolare del dipolo rispetto ad un polo fisso. Per quanto appena detto, è quindi possibile scrivere, nel sistema di riferimento di Fermi, un'equazione analoga alla precedente per descrivere matematicamente il moto di precessione del vettore di spin di una particella massiva che si trovi immersa all'interno di un campo gravitazionale debole costante e uniforme. Nel seguito, verrà mostrato tuttavia che è possibile estendere tale trattazione anche al caso di interesse del presente scritto, ovvero a quello in cui i campi gravitoelettrico e gravitomagnetico siano quelli associati ad un'onda piana (ovvero dipendano sia dalla posizione \vec{X} che dal tempo T). Per dimostrare che è effettivamente possibile scrivere un'equazione analoga alla 5.6 per lo spin \vec{S} di una particella, in particolare immersa in un campo variabile appunto, si sceglie di calcolare il momento di torsione agente su di una piccola spira piana rettangolare, determinata da un flusso di particelle massive, la quale sia investita dal passaggio di un'onda gravitazionale debole piana. Chiariamo meglio che cosa si intende per spira in questo contesto. Si consideri innanzitutto un insieme di corpuscoli puntiformi, dotati tutti della medesima massa m , i quali, antecedentemente al passaggio dell'onda, si muovono rispetto al riferimento di Fermi descrivendo una traiettoria piana, che, per semplicità, viene scelta rettangolare. Si postula che la velocità \vec{v}_0 sia anch'essa la medesima per tutte le particelle, in modulo $v_0 \ll c$. Il sistema così descritto costituisce un circuito che è l'analogo di una spira rettangolare percorsa da una corrente elettrica, la quale viene trattata all'interno della teoria dell'elettromagnetismo; constatata la somiglianza tra quest'ultima e la teoria della gravitazione, è lecito pensare di poter calcolare il momento torcente,

ove l'indice i è utilizzato per riferirsi alle quantità relative all' i -esimo corpuscolo, mentre $NSdl$ è il numero di particelle contenute all'interno del tratto infinitesimo di circuito considerato e $\langle \vec{v} \rangle$, definita come

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{n} \sum_V \vec{v}_i, \quad (5.8)$$

ha il significato di velocità media delle particelle nel piccolo tratto di spira; il simbolo n appena utilizzato corrisponde al numero di queste ultime, mentre $V = Sdl$ è il volume dell'elemento di circuito. Si evidenzia inoltre che i campi \vec{E} e \vec{B} sono da considerarsi uniformi su quest'ultimo ed in particolare essi assumono ad ogni istante il medesimo valore in corrispondenza delle posizioni di tutte le particelle in esso contenute, sicché non è stato necessario apporre alcun indice ai simboli dei campi stessi nella 5.7. È ora necessario esporre il seguente ragionamento: come detto poco sopra, antecedentemente al passaggio dell'onda gravitazionale, le particelle aventi massa m si muovono lungo i lati della spira con velocità costante in modulo e pari a v_0 ; si può altresì supporre che la densità di corpuscoli N_0 sia costante in ogni sezione del circuito. Il passaggio dell'onda gravitazionale debole produce piccole variazioni di tali valori inizialmente costanti, la cui parte più importante, di fatto l'unica che verrà presa in considerazione, costituisce un contributo del prim'ordine nell'ampiezza dell'onda medesima A . In base a quanto appena detto, si ha pertanto:

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \vec{v}_0 + \delta\vec{v}_i, & \delta\vec{v}_i &= O(A), \\ N &= N_0 + \delta N, & \delta N &= O(A). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Poiché si è interessati a livello generale solamente ad effetti del prim'ordine in A , si sceglie di trascurare anche nell'espressione della forza F_g i termini quadratici o di ordine superiore. Per quanto concerne i campi gravitoelettrico e gravitomagnetico, per essi vale $\vec{E} = O(A)$ e $\vec{B} = O(A)$; tale affermazione deriva dal fatto che le componenti del tensore di Riemann contenute all'interno di \vec{E} e \vec{B} sono lineari nell'ampiezza dell'onda gravitazionale (ciò verrà dimostrato in seguito). In base a quanto detto, è quindi lecito non conservare nella 5.9 unicamente i contributi \vec{v}_0 e N_0 a \vec{v} e N rispettivamente. Alla luce di quest'ultima approssimazione, la velocità media 5.8 diviene semplicemente:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{n} \sum_V \vec{v}_i = \frac{1}{n} \sum_V (\vec{v}_0 + \delta\vec{v}_i) \simeq \frac{1}{n} \sum_V \vec{v}_0 = \frac{1}{n} n \vec{v}_0 = \vec{v}_0 \quad (5.10)$$

e l'espressione della forza si riscrive:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_g &\simeq -mN_0Sdl \vec{E} - 2mN_0Sdl \frac{\vec{v}_0}{c} \times \vec{B} = -\lambda_g dl \vec{E} - \frac{2}{c} Sdl \vec{j}_g \times \vec{B} \\ &= -\lambda_g dl \vec{E} - \frac{2}{c} j_g S d\vec{l} \times \vec{B} = -\lambda_g dl \vec{E} - \frac{2}{c} I_g d\vec{l} \times \vec{B}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Nel primo dei precedenti passaggi sono state definite le quantità densità lineare di massa e densità di corrente di massa, aventi rispettivamente espressioni:

$$\lambda_g = mN_0S, \quad \vec{j}_g = mN_0\vec{v}_0, \quad (5.12)$$

mentre la seconda uguaglianza è verificata in virtù della collinearità di \vec{j}_g e $d\vec{l}$. Il risultato finale si ottiene invece supponendo che la densità di corrente sia uniforme sulla sezione normale S dei lati della spira; sotto tale ipotesi infatti risulta:

$$I_g = j_g S, \quad (5.13)$$

ove I_g identifica l'intensità di corrente di massa lungo la spira. Si evidenzia inoltre come il secondo termine nell'espressione della forza infinitesima 5.11 sia formalmente simile alla seconda legge fondamentale di Laplace. Per ricavare la forza agente su ciascuno dei quattro lati della spira, è ora sufficiente integrare lungo di questi la 5.11, ottenendo

$$\begin{aligned} \vec{F}_{g,a} &= -\lambda_g \int_{\gamma_a} dl \vec{E} - \frac{2}{c} I_g \int_{\gamma_a} d\vec{l} \times \vec{B} \\ &= -\lambda_g \vec{E} \int_{\gamma_a} dl - \frac{2}{c} I_g \left(\int_{\gamma_a} d\vec{l} \right) \times \vec{B}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Nelle formule precedenti, γ_a con $a = 1, 2, 3, 4$ indica il lato della spira lungo cui si sta calcolando l'integrale, mentre $\vec{F}_{g,a}$ è la forza agente sull' a -esimo lato. Si fa presente che è stato possibile portare al di fuori degli integrali i campi \vec{E} e \vec{B} poiché essi sono assunti approssimativamente uniformi sulle dimensioni della spira. In figura Fig.1 sono stati rappresentati, per ciascun lato del circuito, in arancione i contributi alla forza gravitazionale dovuti al campo gravitoelettrico, mentre in blu quelli dovuti al campo gravitomagnetico. È ora possibile calcolare il momento torcente agente sulla spira dovuto alla forza gravitazionale. Prima di procedere con il computo esplicito, si osserva che i contributi dati dal campo gravitoelettrico \vec{E} alle forze agenti sui lati della spira possiedono tutti gli stessi verso e direzione e pertanto la loro somma, ovvero la forza totale agente sulla spira, determina semplicemente un moto traslatorio di tutta la spira, non producendo pertanto alcuna rotazione di quest'ultima rispetto agli assi coordinati del riferimento di Fermi. Il campo \vec{E} non fornisce alcun contributo al momento di torsione. Al contrario, è possibile notare che i termini magnetici della forza gravitazionale costituiscono a due a due delle coppie di forze: in particolare, una coppia è formata dai contributi a $\vec{F}_{g,1}$ ed $\vec{F}_{g,3}$ e l'altra da quelli a $\vec{F}_{g,2}$ e $\vec{F}_{g,4}$. Quest'ultime sono allineate lungo uno degli assi di simmetria della spira e sono antiparallele, pertanto esse formano una coppia di braccio nullo e non determinano un momento torcente. Il braccio della coppia $\vec{F}_{g,1}$ $\vec{F}_{g,3}$ è invece pari alla lunghezza b dei lati più lunghi della spira moltiplicata per il seno dell'angolo formato dal versore normale ad essa \hat{n} e dall'asse Z (o dalla direzione di \vec{B}). Se tale angolo viene indicato con ϑ , ed essendo le espressioni di $\vec{F}_{g,1}$ e $\vec{F}_{g,3}$ rispettivamente pari a

$$\vec{F}_{g,1} = -\frac{2}{c} I_g B a \hat{e}_y, \quad \vec{F}_{g,3} = \frac{2}{c} I_g B a \hat{e}_y, \quad (5.15)$$

come si ricava subito dalla 5.14 considerando che in questo caso $d\vec{l} \perp \vec{B}$, è possibile scrivere il momento torcente τ agente sulla spira come:

$$\vec{\tau} = -\frac{2}{c} I_g a B b \sin \vartheta \hat{e}_x = -\frac{2}{c} I_g a b B \sin \vartheta \hat{e}_x. \quad (5.16)$$

Definendo poi il momento di dipolo gravitomagnetico associato alla spira,

$$\vec{\mu}_g = -\frac{2}{c} I_g a b \hat{n}, \quad (5.17)$$

si ha:

$$\vec{\tau} = -\frac{2}{c} I_g ab B \sin \vartheta \hat{e}_x = \mu_g B \sin \vartheta \hat{e}_x = \vec{\mu}_g \times \vec{B}. \quad (5.18)$$

L'espressione appena ottenuta è identica alla 5.6, ovvero a quella del momento torcente che sperimenta una spira immersa in un campo magnetico uniforme e rimane valida anche supponendo che questa abbia un'orientazione qualsiasi rispetto agli assi del riferimento e che il campo \vec{B} possieda una qualsivoglia direzione all'interno del piano YZ . A questo punto, è necessario ricondurre la trattazione che si è sviluppata al caso del moto della particella massiva dotata di spin. Per prima cosa è necessario presentare ancora un commento riguardante il sistema rappresentato dalla spira corrente di massa. I corpuscoli che si sono supposti muoversi lungo i lati di essa possiedono un momento angolare, che sarà indicato con \vec{S} , avente per polo il centro del circuito, diretto normalmente ad esso e orientato nel verso in cui punta il vettore \hat{n} . Il momento torcente τ appena calcolato produce una rotazione della spira attorno ad una direzione parallela all'asse X del riferimento di Fermi e pertanto causa un moto di oscillazione del vettore \vec{S} attorno a questo stesso asse. Poiché la causa della variazione di \vec{S} è unicamente imputabile al momento torcente τ (giacché il momento della forza gravitoelettrica non modifica l'orientazione del primo dei due vettori citati) è vero che:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{S}}{dt}. \quad (5.19)$$

Tutti i ragionamenti esposti rimangono validi nel limite in cui le dimensioni della spira rettangolare vengano fatte tendere a 0, a patto di mantenere costanti i vettori \vec{S} e $\vec{\mu}_g$; imporre una tale condizione significa considerare le dimensioni della spira trascurabili rispetto ad altre lunghezze in gioco: nell'analisi che si intende effettuare nel presente scritto, infatti, il campo gravitazionale che investe la spira attraversata da una corrente di massa è quello dell'onda gravitazionale debole e piana 4.4 la quale ha una lunghezza d'onda λ molto maggior delle lunghezze dei lati a, b . Si è quindi giustificati ad approssimare la spira come un punto materiale, la cui massa è pari alla somma di quelle di tutte le particella che si muovono lungo di essa, che conserva tuttavia un momento angolare e un momento di dipolo gravitomagnetico legati alla sua reale struttura interna. Poiché per l'appunto il vettore \vec{S} è una proprietà legata alla struttura del sistema e non ad un suo moto rispetto agli assi del riferimento di Fermi, esso costituisce una quantità intrinseca all'oggetto spira-punto materiale. Pertanto, si è scelto chiamare il momento angolare \vec{S} col nome di *spin*, in analogia con la meccanica quantistica. Si è quindi giunti, tramite le precedenti considerazioni, a formulare con maggior chiarezza ciò che si intende nel presente scritto con l'espressione "particella puntiforme dotata di spin" accennata nell'Introduzione, nel caso in cui la piccola massa ivi menzionata sia proprio una spira di corrente come quella considerata. Si è riusciti inoltre a ricavare l'equazione del moto dello spin nel campo di un'onda gravitazionale debole e piana. In virtù delle 5.18 e 5.19, la variazione del vettore di spin \vec{S} di una particella investita dall'onda gravitazionale considerata, nel sistema di coordinate di Fermi della particella di riferimento, è:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\mu}_g \times \vec{B}, \quad (5.20)$$

ove $\vec{\mu}_g$ è il momento di dipolo gravitomagnetico della particella e il campo \vec{B} è valutato nella posizione in cui questa è situata. Si fa notare che questa espressione è stata ricavata al prim'ordine nell'ampiezza A dell'onda gravitazionale incidente; in particolare, la definizione di $\vec{\mu}_g$ è stata data senza considerare le variazioni della densità di corrente \vec{j}_g indotte dal campo gravitazionale, ovvero essa indica il momento di dipolo gravitomagnetico all'istante iniziale, prima del passaggio dell'onda. Si è quindi ora intenzionati a trovare le soluzioni della 5.20, associate alle condizioni iniziali presentate nell'Introduzione, diverse e di carattere più generale rispetto a quelle adoperate nei precedenti calcoli che coinvolgevano la spira. In particolare, lo spin \vec{S} sarà allineato inizialmente (prima del passaggio dell'onda) lungo la direzione di propagazione di questa, ovvero quella dell'asse X . La particella si troverà poi, sempre all'istante iniziale, nella posizione (X^0, Y^0, Z^0) del riferimento associato alle coordinate di Fermi. Per poter valutare la 5.20, è necessario conoscere le espressioni di $\vec{\mu}_g$ e di \vec{B} . Il campo gravitomagnetico è fornito dalla seconda delle 5.4, la quale però deve essere valutata nel punto iniziale del moto, per la seguente ragione. Il passaggio dell'onda gravitazionale debole produce, come verrà approfondito nel capitolo 6, una variazione del valore della posizione della particella dotata di spin che si sta considerando rispetto al valore iniziale. Tale deviazione è dell'ordine di grandezza dell'ampiezza A dell'onda medesima e pertanto è possibile scrivere

$$\vec{X}(T) = \vec{X}^0 + \delta\vec{X}(T) \quad \text{con} \quad \delta\vec{X} = O(A), \quad (5.21)$$

ove $\delta\vec{X}(T)$ indica invece la variazione indotta dall'onda. In base a quanto appena detto, se ci si vuole attenere alla richiesta precedentemente formulata secondo la quale il membro di destra della legge 5.20 sia lineare in A , è necessario che il campo \vec{B} sia valutato in (X^0, Y_0, Z_0) , poiché il contributo ad esso contenente il termine di deviazione sarebbe proporzionale ad A^2 . Questa affermazione deriva dal fatto che le componenti del tensore di Riemann da cui il campo gravitomagnetico dipende sono lineari nell'ampiezza dell'onda gravitazionale, come sarà in seguito dimostrato. L'espressione del momento di dipolo, invece, può essere valutata nel modo seguente. Si nota in primis che, nel caso della spira, la 5.17 differisce dal momento magnetico di un circuito rettangolare percorso da una corrente elettrica semplicemente per la sostituzione delle cariche del campo elettrico e campo gravitomagnetico:

$$q \rightarrow -2m, \quad (5.22)$$

come si evince ad esempio confronto della stessa 5.17 e dell'espressione del momento di dipolo di una spira trattata in [9]. È possibile ottenere il momento gravitomagnetico di una particella puntiforme a partire dal suo momento di dipolo magnetico, operando la medesima sostituzione. Come si può leggere ancora in [9] o in [2], essendo quest'ultimo pari a

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2mc} \vec{S}, \quad (5.23)$$

scambiando q con $-2m$ si ottiene:

$$\vec{\mu}_g = -\frac{1}{c} \vec{S}. \quad (5.24)$$

Quest'ultimo risultato consente ora di valutare l'equazione 5.20. Per raggiungere tale obiettivo, si riscrive, in primis, tale relazione per componenti, ottenendo:

$$\frac{dS_i}{dt} = \varepsilon_{ijk} (\mu_g)_j B_k. \quad (5.25)$$

Si fa presente che per comodità di notazione nel seguito gli indici spaziali verranno sempre scritti bassi, come in quest'ultima espressione. In seguito, si sostituiscono nella scrittura precedente la seconda delle espressioni 5.4 e la 5.24, scritta anch'essa per componenti. Si ha pertanto:

$$\begin{aligned}
\frac{dS_i}{dt} &= \varepsilon_{ijk}(\mu_g)_j B_k \\
&= \varepsilon_{ijk} \left[-\frac{1}{c} S_j^0 \right] \left[-\frac{c^2}{2} \varepsilon_{kab} R_{ab0l} X_l^0 \right] \\
&= \frac{c}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kab} S_j^0 R_{ab0l} X_l^0 \\
&= \frac{c}{2} S_j^0 (\delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ja} \delta_{ib}) R_{ab0l} X_l^0 \\
&= \frac{c}{2} S_j^0 (R_{ij0l} - R_{ji0l}) X_l^0 \\
&= c S_j^0 R_{ij0l} X_l,
\end{aligned} \tag{5.26}$$

dove nel passaggio dalla terza alla quarta riga si è sfruttata l'antisimmetria del simbolo di Levi-Civita in tre dimensioni unitamente alla proposizione:

$$\varepsilon_{kij} \varepsilon_{kab} = \delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ja} \delta_{ib}. \tag{5.27}$$

Si fa inoltre presente che, essendo il momento di dipolo gravitomagnetico all'interno della 5.26 riferito all'istante iniziale, come precedentemente spiegato, anche il vettore di spin in esso contenuto è stato valutato nell'istante iniziale del moto; l'espressione di \vec{B} è poi anch'essa stata calcolata nel punto iniziale moto, per le motivazioni addotte poco più sopra. Infine, riordinando i termini, si ottiene:

$$\frac{dS_i}{dt} = c R_{ij0l} S_j^0 X_l^0. \tag{5.28}$$

Tale legge costituisce l'equazione del moto delle componenti dello spin di una particella, nel riferimento di coordinate di Fermi; essa dipende linearmente dal tensore di curvatura, dallo spin medesimo e dalle coordinate spaziali di Fermi. Al fine di trovare delle possibili soluzioni di tale equazione, è necessario valutare il tensore di Riemann utilizzando la metrica relativa all'onda gravitazionale debole e piana. Poiché si è scelto di adoperare l'approssimazione di campo debole, scrivendo, in coordinate di Fermi, il tensore metrico come somma del tensore di Minkowski e di una piccola perturbazione, è possibile scrivere un'espressione di R_{ij0l} trascurando i termini non lineari nella perturbazione stessa. Se si indica quest'ultima come $h_{\mu\nu}$, in tal modo si ottiene:

$$R_{ij0l} = \eta_{i\varepsilon} R^{\varepsilon}_{j0l} = \eta_{i\varepsilon} (\partial_0 \Gamma^{\varepsilon}_{jl} - \partial_l \Gamma^{\varepsilon}_{j0}). \tag{5.29}$$

Inserendo poi le espressioni dei simboli di Christoffel, opportunamente approssimate

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\varepsilon}_{jl} &= \frac{1}{2} \eta^{\varepsilon\vartheta} (\partial_j h_{l\vartheta} + \partial_l h_{\vartheta j} - \partial_{\vartheta} h_{jl}), \\
\Gamma^{\varepsilon}_{j0} &= \frac{1}{2} \eta^{\varepsilon\vartheta} (\partial_j h_{0\vartheta} + \partial_0 h_{\vartheta j} - \partial_{\vartheta} h_{j0}),
\end{aligned} \tag{5.30}$$

si giunge alla seguente espressione per il tensore di Riemann completamente covariante:

$$R_{ij0l} = \frac{1}{2}(\partial_0\partial_j h_{il} - \partial_0\partial_i h_{jl} + \partial_l\partial_i h_{j0} - \partial_l\partial_j h_{i0}). \quad (5.31)$$

A rigore, tale espressione andrebbe calcolata nel sistema di coordinate di Fermi; tuttavia, poiché sia in quest'ultimo sia in coordinate TT vale l'approssimazione di campo gravitazionale debole, il tensore di Riemann è invariante sotto la trasformazione tra tali sistemi di coordinate, come mostrato in [5] e verrà ora spiegato. Innanzitutto, è importante notare che due sistemi di coordinate utilizzando i quali il tensore metrico possa essere scritto adoperando l'approssimazione di campo debole, ovvero nella forma

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \quad \text{con } |h_{\mu\nu}(x)| \ll 1, \quad (5.32)$$

sono collegati da una trasformazione della stessa tipologia di quella seguente:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x), \quad (5.33)$$

ove ξ è una funzione delle coordinate tale che $|\partial_{\nu}\xi^{\mu}(x)|$ sia dello stesso ordine di grandezza di $h_{\mu\nu}$. Questa affermazione può essere dimostrata calcolando esplicitamente il tensore metrico nelle nuove coordinate x' . Eseguendo tale operazione, si ottiene

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} = g_{\alpha\beta} \left(\delta_{\mu}^{\alpha} - \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \right) \left(\delta_{\nu}^{\beta} - \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \right) \\ &= g_{\alpha\beta} \left(\delta_{\mu}^{\alpha} - \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}} \right) \left(\delta_{\nu}^{\beta} - \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\varepsilon}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\nu}} \right) \\ &= g_{\alpha\beta} \left(\delta_{\mu}^{\alpha} - \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \left(\delta_{\mu}^{\gamma} + \frac{\partial \xi^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}} \right) \right) \left(\delta_{\nu}^{\beta} - \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\varepsilon}} \left(\delta_{\nu}^{\varepsilon} + \frac{\partial \xi^{\varepsilon}}{\partial x'^{\nu}} \right) \right) \\ &\approx g_{\alpha\beta} \left(\delta_{\mu}^{\alpha} - \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \delta_{\mu}^{\gamma} \right) \left(\delta_{\nu}^{\beta} - \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\varepsilon}} \delta_{\nu}^{\varepsilon} \right) = g_{\alpha\beta} \left(\delta_{\mu}^{\alpha} - \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \right) \left(\delta_{\nu}^{\beta} - \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \right) \\ &\approx (\eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}) \left(\delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} - \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \delta_{\nu}^{\beta} - \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \delta_{\mu}^{\alpha} \right) \\ &= \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha}\xi_{\beta} - \partial_{\beta}\xi_{\alpha}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Si fa presente che nei precedenti passaggi sono stati trascurati tutti i termini di ordine superiore al primo in $h_{\mu\nu}$. Poiché, come detto, $|\partial_{\nu}\xi^{\mu}(x)|$ è anch'esso piccolo come tale perturbazione, allora nel nuovo sistema di coordinate x' il tensore metrico si può ancora scrivere nella forma $\eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}$, con

$$h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - \partial_{\mu}\xi_{\nu} - \partial_{\nu}\xi_{\mu}. \quad (5.35)$$

È ora possibile utilizzare quest'ultima relazione per valutare anche l'espressione del tensore di Riemann nelle nuove coordinate, inserendola all'interno della 5.31 e tenendo presente che le derivate trasformano nel seguente modo:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}, \quad (5.36)$$

come per altro utilizzato precedentemente. Se si sviluppano i calcoli, ci si accorge che si ottiene, infine, una espressione identica a quella di partenza, con l'unica differenza di aver rimpiazzato le coordinate x con le x' ; questo fatto indica che il tensore di Riemann è invariante sotto le trasformazioni 5.33, ovvero esso assume la stessa forma in tutti i sistemi di coordinate ove valga l'approssimazione di campo debole 5.32. Alla luce di quanto detto, quindi, l'espressione 5.31 può essere valutata, in maniera più immediata, adoperando le coordinate TT. Ricordando pertanto che, in tale sistema, il tensore traccia inversa $\bar{h}_{\mu\nu}$ coincide con la metrica $h_{\mu\nu}$, è possibile scegliere come espressione per l'onda gravitazionale piana la 4.3 ed inserirla quindi all'interno della 5.31, per proseguire con il computo di R_{ij0l} . Conseguentemente, si nota subito che gli ultimi due termini di quest'ultima espressione si annullano, in quanto, ogniqualvolta uno degli indici di $h_{\mu\nu}$ è pari 0, tale tensore si annulla a sua volta. Alla luce di quest'ultima considerazione e sfruttando ancora la 5.31, è possibile scrivere l'equazione 5.28 come:

$$\frac{dS_i}{dt} = \frac{c}{2}(\partial_0\partial_j h_{il} - \partial_0\partial_i h_{jl})S_j^0 X_l^0. \quad (5.37)$$

Nel seguito, si presenta una forma esplicita per ciascuna componente della 5.37, calcolata sfruttando la 4.3. Considerando che $h_{\mu\nu}$ dipende solamente dalle coordinate t e x e che le uniche componenti non nulle di tale tensore corrispondono a quelle aventi indici $\mu = 2, 3$ e $\nu = 2, 3$, si giunge a scrivere il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dT} &= \frac{\omega^2}{2c} [A^+ \sin(\omega T)(Y^0 S_2^0 - Z^0 S_3^0) + A^\times \cos(\omega T)(Y^0 S_3^0 + Z^0 S_2^0)] \\ \frac{dS_2}{dT} &= -\frac{\omega^2}{2c} [A^+ \sin(\omega T)Y^0 + A^\times \cos(\omega T)Z^0]S_1^0 \\ \frac{dS_3}{dT} &= -\frac{\omega^2}{2c} [A^\times \cos(\omega T)Y^0 - A^+ \sin(\omega T)Z^0]S_1^0, \end{aligned} \quad (5.38)$$

per il cui computo si è utilizzato il fatto che $k = \omega/c$ (diretta conseguenza della proprietà $k^\mu k_\mu = 0$); si ricorda inoltre che le derivate seconde del tensore metrico sono state valutate lungo la linea di universo della particella di riferimento, ovvero si è posto $(cT, \vec{X}) = (cT, 0)$. Le equazioni 5.38 possono essere risolte per integrazione immediata; tenendo in considerazione le condizioni iniziali scelte, ovvero che all'istante iniziale lo spin sia allineato lungo la direzione di propagazione dell'onda, ossia che si abbia $\vec{S} = (S_1^0, 0, 0)$, è possibile presentare le seguenti soluzioni:

$$\begin{aligned} S_1(T) &= S_1^0 \\ S_2(T) &= -\frac{\omega}{2c} [-A^+ \cos(\omega T)Y^0 + A^\times \sin(\omega T)Z^0]S_1^0 \\ S_3(T) &= -\frac{\omega}{2c} [A^\times \sin(\omega T)Y^0 + A^+ \cos(\omega T)Z^0]S_1^0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Queste leggi descrivono il moto del vettore di spin \vec{S} , il quale si configura, in base ad esse, proprio come una precessione attorno alla direzione iniziale di tale momento angolare. Questa affermazione è più semplice da comprendere se si suppone che l'onda gravitazionale incidente sulla particella dotata di spin possieda polarizzazione

+. In questa particolare situazione, le 5.39 divengono

$$\begin{aligned} S_1(T) &= S_1^0 \\ S_2(T) &= \frac{\omega}{2c} A^+ \cos(\omega T) Y^0 S_1^0 \\ S_3(T) &= -\frac{\omega}{2c} A^+ \cos(\omega T) Z^0 S_1^0. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Tali funzioni permettono di descrivere il moto dello spin \vec{S} come un'oscillazione, di pulsazione ω , delle sue componenti S_2 ed S_3 nel piano YZ , ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda, mentre la componente a quest'ultima allineata rimane costante. Il moto di precessione può essere visualizzato qualitativamente con l'ausilio dei grafici in figura 5.2. Essi sono stati realizzati considerando un insieme di 16 particelle disposte, equidistantemente una dall'altra, su di una circonferenza centrata sull'origine del sistema di riferimento associato alle coordinate di Fermi e appartenente al piano YZ . A ciascuno dei corpuscoli è stato associato il medesimo vettore di spin S_1^0 all'istante iniziale del moto. Nei grafici della figura 5.2 è stata rappresentata la componente dello spin delle particelle ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda, negli istanti $T = 0$, $T = \pi/(2\omega)$, $T = \pi/\omega$, $T = 3\pi/(2\omega)$ e $T = 2\pi/\omega$. Come si può notare, ognuna di tali componenti oscilla lungo una data direzione attorno al vettore nullo.

Una seconda modalità attraverso la quale è possibile visualizzare meglio il moto di precessione consiste nel considerare l'onda gravitazionale incidente polarizzata circolarmente, ponendo $A^+ = A^\times = A$, e considerando il moto del vettore di spin associato ad una particella che si trovi all'istante iniziale nel punto di coordinate $(0, 0, L)$. Se si impongono queste condizioni, le 5.39 divengono

$$\begin{aligned} S_1(T) &= S_1^0 \\ S_2(T) &= -\frac{\omega AL}{2c} \sin(\omega t) S_1^0 \\ S_3(T) &= -\frac{\omega AL}{2c} \cos(\omega t) S_1^0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

A queste ultime espressioni è possibile associare la seguente interpretazione fisica: il moto di precessione del vettore di spin \vec{S} si configura come una rotazione attorno alla direzione iniziale \vec{S}^0 da esso assunta, in quanto la prima componente di detto vettore \vec{S} risulta una costante del moto, mentre la proiezione del momento angolare sul piano YZ , la quale verrà denotata nel seguito con \vec{S}_\perp , ruota con velocità angolare uniforme ω , pari alla pulsazione dell'onda gravitazionale incidente. Si evidenzia inoltre che il modulo di \vec{S} è costante e pari a

$$S = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega AL}{2c}\right)^2} S_1^0 \approx \left(1 + \frac{\omega AL}{4c}\right) S_1^0; \quad (5.42)$$

analogamente risulta, per la norma della proiezione sul piano YZ ,

$$S_\perp = \frac{\omega AL}{2c} S_1^0 \quad (5.43)$$

ed è pertanto anch'essa invariante.

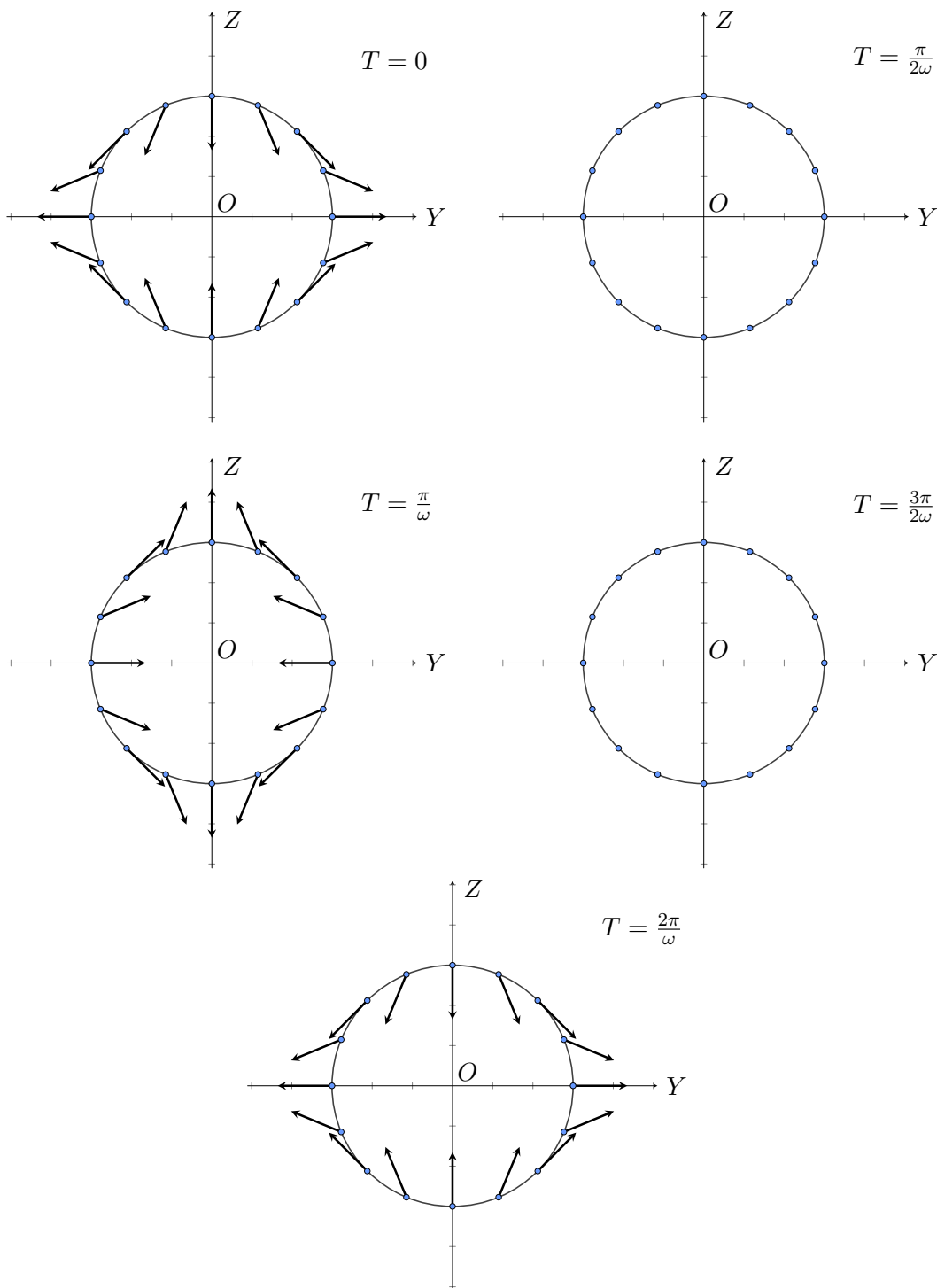


Figura 5.2: Rappresentazione grafica del moto di precessione delle componenti dello spin ortogonali alla direzione di propagazione dell'onda gravitazionale. Sono stati rappresentati i momenti angolari di 16 particelle, disposte ad uguale distanza le une dalle altre, su di una circonferenza giacente nel piano YZ e centrata nell'origine degli assi. Non sono stati invece raffigurati gli effetti di deviazione che interessano le traiettorie dei suddetti corpuscoli; il fenomeno della precessione può infatti essere da questi separato, come previsto all'interno dell'ambito della teoria linearizzata della gravitazione.

Capitolo 6

Il moto delle particelle dotate di spin

L'accoppiamento tra lo spin della particella \vec{S} e il campo gravitomagnetico \vec{B} , di cui si è discusso nel capitolo precedente, oltre ad essere la causa del moto di precessione, è responsabile anche del verificarsi di un effetto di deviazione della traiettoria del suddetto corpuscolo dal tragitto che esso percorrerebbe, nel campo gravitazionale di un'onda debole, se fosse invece privo di momento angolare. Ci si occuperà ora dell'analisi di questo ulteriore aspetto; in particolare, si vogliono calcolare gli effetti di deviazione eseguendo il confronto tra le leggi orarie di una particella priva di spin, che si muove nel campo di un'onda gravitazionale debole e piana e quelle di una particella munita invece di tale proprietà. Lo studio del moto dei due corpuscoli verrà condotto utilizzando un sistema di coordinate normali di Fermi (cT, X, Y, Z) , adattate ad una terza particella, in maniera da poter instaurare l'analogia tra campo gravitazionale e campo elettromagnetico, studiata nel paragrafo 3.2; in particolare, sarà possibile definire i campi gravitoelettrico \vec{E} e gravitomagnetico \vec{B} ed interpretare gli effetti della gravità come azione di una forza applicata ai corpi in gioco, come avviene in fisica classica, piuttosto che come il risultato della presenza di una curvatura dello spaziotempo. Conseguentemente, come si è già dimostrato, l'interazione gravitazionale agente su un corpo puntiforme di massa m e spin nullo possiederà una forma analoga alla forza di Lorentz, ovvero:

$$\vec{F}_g = -m\vec{E} - 2m \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B}, \quad (6.1)$$

oppure, utilizzando la notazione con gli indici:

$$F_{g,i} = -mE_i - 2m \varepsilon_{ijk} \frac{V_j}{c} B_k, \quad (6.2)$$

ove $\vec{V} = d\vec{X}/dT$. Nel seguito, si ricava per primo il moto della particella priva di spin, in coordinate di Fermi, mediante la valutazione dell'espressione 6.1. Al suo interno, i campi \vec{E} e \vec{B} sono forniti dalle 3.24 e sono proporzionali al tensore di curvatura di Riemann, il quale viene riferito al campo dell'onda 4.3.

Si supponga che all'istante iniziale la suddetta particella si trovi ferma nel punto di coordinate (X^0, Y^0, Z^0) . L'interesse della corrente trattazione è quella di considerare solamente i contributi principali alla forza 6.1, ovvero quelli del prim'ordine

nell'ampiezza dell'onda A . Essa è la causa di piccoli discostamenti dal valore iniziale della posizione della particella e della sua velocità \vec{V} , in formule:

$$\begin{aligned} X_i(t) &= X_i^0 + \delta X_i(t), & \delta X_i(t) &= O(A), \\ V_i(t) &= V_i^0 + \delta V_i(t) = \delta V_i(t), & \delta V_i(t) &= O(A), \end{aligned} \quad (6.3)$$

ove tali piccole deviazioni sono state indicate con δX_i e δV_i . Si è altresì tenuto in considerazione, nella seconda delle precedenti espressioni, che la velocità iniziale della particella, indicata con \vec{V}^0 , è nulla. Alla luce di quest'ultimo fatto, se si richiede di conservare solamente i termini lineari in A nell'espressione della forza gravitazionale, è necessario trascurare il contributo fornito ad essa dal campo gravitomagnetico, poiché il prodotto vettoriale tra la velocità ed esso è $O(A^2)$, mentre il campo gravitoelettrico \vec{E} deve essere valutato in \vec{X}^0 , senza considerare il termine dovuto alla variazione $\delta\vec{X}$. La 6.2 si riscrive pertanto come:

$$F_{g,i} = -mE_i(\vec{X}^0) \quad (6.4)$$

e di conseguenza l'equazione del moto della particella priva di spin è

$$m \frac{d^2 X_i}{dT^2} = m \frac{d^2(\delta X_i)}{dT^2} = -mE_i(\vec{X}^0). \quad (6.5)$$

Se a questo punto si inserisce l'espressione di \vec{E} nella 6.5, si ottiene, una volta divisi ambo i membri per m ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\delta X_i)}{dT^2} &= -c^2 R_{0i0j} X_j^0 \\ &= -c^2 \left[\frac{1}{2} (\partial_0 \partial_i h_{0j} - \partial_0 \partial_0 h_{ij} + \partial_j \partial_0 h_{i0} - \partial_j \partial_i h_{00}) \right] X_j^0 \\ &= \frac{c^2}{2} \partial_0 \partial_0 h_{ij} X_j^0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Dato che il tensore di Riemann può essere calcolato nel sistema di coordinate TT, come è stato fatto nel capitolo 5 e per le stesse ragioni lì addotte, nella precedente espressione tutti i termini tranne il secondo risultano uguali a 0, dal momento che in coordinate TT il tensore metrico associato all'onda gravitazionale è fornito dalla 4.4. Si prosegue in seguito la valutazione della 6.6 per mezzo del calcolo delle derivate seconde di quest'ultima espressione. Il sistema differenziale 6.6, una volta eseguito tale computo, assume allora la forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\delta X)}{dT^2} &= 0 \\ \frac{d^2(\delta Y)}{dT^2} &= \frac{\omega^2}{2} (A^+ \sin(\omega T) Y_0 + A^\times \cos(\omega T) Z_0) \\ \frac{d^2(\delta Z)}{dT^2} &= \frac{\omega^2}{2} (A^\times \cos(\omega T) Y_0 + A^+ \sin(\omega T) Z_0). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Tali equazioni possono essere risolte per integrazione immediata. Le leggi del moto della particella priva di spin ed immersa nel campo gravitazionale dell'onda piana

sono pertanto, in base alle condizioni iniziali,

$$\begin{aligned} X(T) &= X_0 \\ Y(T) &= \left(1 - \frac{A^+}{2} \sin(\omega T)\right) Y_0 - \frac{A^\times}{2} \cos(\omega T) Z_0 \\ Z(T) &= \left(1 + \frac{A^+}{2} \sin(\omega T)\right) Z_0 - \frac{A^\times}{2} \cos(\omega T) Y_0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Si affronta a questo punto lo studio del moto della particella dotata di spin. Come è stato già più sopra ricordato, l'utilizzo di un sistema di coordinate di Fermi permette di interpretare gli effetti della gravità come il risultato dell'azione di una forza. Questo fatto è valido in particolare anche per quanto riguarda le particelle munite di spin; tuttavia, proprio a causa dell'accoppiamento tra quest'ultima grandezza e il campo gravitomagnetico \vec{B} , l'espressione dell'interazione gravitazionale agente su di esse presenterà delle differenze rispetto alla 6.1 e necessita quindi di essere ora calcolata. A tal fine, risulta utile considerare il corpuscolo provvisto di spin in questione come una piccola spira piana, di forma qualunque, generata da una corrente costante di massa. L'espressione della forza gravitazionale dovuta al passaggio dell'onda, approssimata al prim'ordine nella sua ampiezza A , che sperimenta tale spira, si può trovare, in coordinate di Fermi, generalizzando l'espressione 5.14 ad un circuito γ di forma qualunque:

$$\vec{F}_g = -\lambda_g \int_{\gamma} \vec{E} dl - \frac{2}{c} I_g \int_{\gamma} d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (6.9)$$

Si precisa che la 6.9 è valida sotto l'ipotesi per cui la densità di massa sia la medesima in ogni punto della spira. È conveniente, contrariamente a quanto fatto nel caso dello studio del moto di precessione, considerare inizialmente non uniformi i campi \vec{E} e \vec{B} sull'estensione della spira (per tale ragione questi ultimi nella precedente espressione sono stati scritti internamente agli integrali) ammettendo tuttavia che essi non varino spostandosi all'interno della porzione di piano da essa racchiusa; conseguentemente a quest'ultimo fatto, è possibile sviluppare le espressioni dei campi in serie di potenze di \vec{X} all'intorno di un punto Q di tale regione, le cui coordinate indicate con \vec{X}_Q . In particolare, arrestandosi al prim'ordine, si ha, in componenti,

$$\begin{aligned} E_i(\vec{X}) &\approx E_i(\vec{X}_Q) + (\vec{X}' - \vec{X}_Q) \cdot \vec{\nabla} E_i(\vec{X}_Q), \\ B_i(\vec{X}) &\approx B_i(\vec{X}_Q) + (\vec{X}' - \vec{X}_Q) \cdot \vec{\nabla} B_i(\vec{X}_Q). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Si sceglie nel seguito di considerare separatamente i contributi forniti alla forza dal campo gravitoelettrico \vec{E} e dal campo gravitomagnetico \vec{B} . Alla luce di quanto appena detto, il primo di essi può essere scritto, utilizzando la più compatta notazione vettoriale, come

$$\begin{aligned} \vec{F}_e &= -\lambda_g \int_{\gamma} \left(\vec{E}(\vec{X}_Q) + \left\{ [(\vec{X}' - \vec{X}_Q) \cdot \vec{\nabla}] \vec{E}(\vec{X}) \right\}_{\vec{x}=\vec{x}_Q} \right) dl \\ &= -\lambda_g \int_{\gamma} \vec{E}(\vec{X}_Q) dl - \lambda_g \int_{\gamma} \left\{ [(\vec{X}' - \vec{X}_Q) \cdot \vec{\nabla}] \vec{E}(\vec{X}) \right\}_{\vec{x}=\vec{x}_Q} dl, \end{aligned} \quad (6.11)$$

ove \vec{X}' indica un punto generico della spira γ , circuito lungo il quale si sta calcolando l'integrale. Il primo termine della precedente espressione può essere poi manipolato come segue:

$$-\lambda_g \int_{\gamma} \vec{E}(\vec{X}_Q) dl = -\lambda_g \vec{E}(\vec{X}_Q) \int_{\gamma} dl = -\lambda_g L(\gamma) \vec{E}(\vec{X}_Q) = -m_T \vec{E}(\vec{X}_Q), \quad (6.12)$$

dove nel primo passaggio si è tenuto conto del fatto che il campo \vec{E} è valutato in questo caso in un punto non appartenente alla spira; si sono poi indicati la lunghezza di quest'ultima e la sua massa totale rispettivamente con $L(\gamma)$ e m_T . In base a quest'ultimo risultato, la 6.11 diviene

$$\vec{F}_e = -m_T \vec{E}(\vec{X}_Q) - \lambda_g \int_{\gamma} \left\{ [(\vec{X}' - \vec{X}_Q) \cdot \vec{\nabla}] \vec{E}(\vec{X}) \right\}_{|\vec{x}=\vec{x}_Q} dl. \quad (6.13)$$

Questa espressione rappresenta la forza gravitoelettrica agente sulla spira; per scrivere invece quella che sperimenta un singolo punto materiale, la cui massa sia uguale a quella del circuito, m_T , si può restringere quest'ultimo in modo tale che esso collassi nel punto Q . Eseguire questa operazione significa far tendere il generico punto della spira \vec{X}' a \vec{X}_Q . Di conseguenza

$$(\vec{X}' - \vec{X}_Q) \rightarrow 0 \quad (6.14)$$

e quindi il secondo membro della 6.13 tende anch'esso a 0. Si conclude pertanto che il contributo fornito dal campo gravitoelettrico alla forza agente sulla particella dotata di spin è semplicemente

$$\vec{F}_e = -m_T \vec{E}(\vec{X}_Q). \quad (6.15)$$

Per quanto concerne invece il contributo dato dal campo gravitomagnetico \vec{B} , esso può essere inizialmente manipolato come segue:

$$\begin{aligned} \vec{F}_m &= -\frac{2}{c} I_g \int_{\gamma} d\vec{l} \times \vec{B} = -\frac{2}{c} \int_{\gamma} j_g S d\vec{l} \times \vec{B} = -\frac{2}{c} \int_{\gamma} \vec{j}_g \times \vec{B} S dl \\ &= -\frac{2}{c} \int_V \vec{j}_g \times \vec{B} dV, \end{aligned} \quad (6.16)$$

dove si sono percorsi a ritroso alcuni passaggi della 5.11 e si è indicato con dV l'elemento di volume della spira, pari al prodotto dell'area della sua sezione normale S , assunta costante lungo tutta la lunghezza del circuito, e del tratto infinitesimo dl . In seguito, sostituendo a \vec{B} la sua espansione attorno al punto Q , si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{F}_m &= -\frac{2}{c} \int_V \vec{j}_g(\vec{X}') \times \left(\vec{B}(\vec{X}_Q) + \left\{ [(\vec{X}' - \vec{X}_Q) \cdot \vec{\nabla}] \vec{B}(\vec{X}) \right\}_{|\vec{x}=\vec{x}_Q} \right) dV \\ &= \frac{2}{c} \vec{B}(\vec{X}_Q) \times \int_V \vec{j}_g(\vec{X}') dV - \frac{2}{c} \int_V \vec{j}_g(\vec{X}') \times \left\{ [(\vec{X}' - \vec{X}_Q) \cdot \vec{\nabla}] \vec{B}(\vec{X}) \right\}_{|\vec{x}=\vec{x}_Q} dV. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Il primo integrale nella precedente formula è nullo, poiché la densità di corrente \vec{j}_g è stazionaria, come riportato in [9]. Giunti a questo punto, prima di far tendere a Q i punti della spira per ottenere l'espressione della forza gravitazionale agente su di una particella dotata di spin, è necessario imporre che quest'ultima grandezza rimanga costante durante tale processo. Per far ciò, è utile riscrivere il secondo termine della 6.17 in funzione del momento di dipolo gravitomagnetico della spira. Si sceglie di procedere nel seguito come illustrato sempre in [9]. Innanzitutto, si consideri il secondo integrando all'interno della 6.17, il quale può essere riarrangiato tramite i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} & \vec{j}_g(\vec{X}') \times \left\{ \left[(\vec{X}' - \vec{X}_Q) \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{B}(\vec{X}) \right\} \Big|_{\vec{X}=\vec{X}_Q} \\ &= \vec{j}_g(\vec{X}') \times \left\{ \vec{\nabla} \left[(\vec{X}' - \vec{X}_Q) \cdot \vec{B}(\vec{X}) \right] \right\} \Big|_{\vec{X}=\vec{X}_Q} \\ &= - \left(\vec{\nabla} \times \left\{ \vec{j}_g(\vec{X}') \left[(\vec{X}' - \vec{X}_Q) \cdot \vec{B}(\vec{X}) \right] \right\} \right) \Big|_{\vec{X}=\vec{X}_Q}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

il primo dei quali è ottenuto sulla base dell'identità

$$\vec{\nabla}(\vec{W} \cdot \vec{B}) = (\vec{W} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{W} + \vec{W} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{W}), \quad (6.19)$$

in cui si è posto per brevità $\vec{W} = \vec{X}' - \vec{X}_Q$ e non si è indicata la dipendenza di \vec{B} da \vec{X} . Poiché l'operatore gradiente agisce solamente sul campo gravitomagnetico, nel secondo membro della precedente uguaglianza il secondo e quarto termine risultano nulli, come pure il rotore del campo, presente nel terzo; quest'ultima affermazione può essere dedotta tramite il seguente ragionamento. In componenti, il rotore di \vec{B} è dato dalla 3.28. Si ha pertanto

$$\varepsilon_{ijk} \partial_j B_k = -c^2 R_{0i} = -\frac{c^2}{2} (\partial_0 \partial_i h_{ll} + \partial_0 \partial_l h_{il} + \partial_l \partial_i h_{i0} + \partial_l \partial_i h_{l0}), \quad (6.20)$$

dove si è utilizzata l'espressione 5.31 per il tensore di Riemann in coordinate di Fermi; essa può essere equivalentemente valutata nel sistema di coordinate TT, in virtù dell'invarianza della curvatura. In particolare, utilizzando il campo dell'onda debole e piana 4.3, è possibile constatare che gli ultimi tre termini sono nulli: il primo lo è perché le uniche derivate spaziali diverse da 0 del tensore metrico dell'onda sono quelle con $i = 1$, ma non vi sono componenti non nulle di tale grandezza per questo valore dell'indice, come avviene anche nel caso in cui si ponga $i = 0$, fatto che giustifica invece l'annullarsi del terzo e del quarto addendo. Rimane infine da considerare il termine $\partial_0 \partial_i h_{ll}$, diverso da 0 solo quando l'indice i vale 1. Ma anche in tal caso risulta

$$\partial_0 \partial_1 h_{ll} = \partial_0 \partial_1 h_{22} + \partial_0 \partial_1 h_{33} = 0, \quad (6.21)$$

giacché $h_{22} = -h_{33}$. Conseguentemente, il rotore di \vec{B} è nullo e si giunge infine a dimostrare che $\vec{\nabla}(\vec{W} \cdot \vec{B}) = (\vec{W} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$, giustificando così la validità del primo passaggio della 6.18. Per quanto riguarda il secondo, invece, esso è stato eseguito sfruttando un'ulteriore identità, ovvero

$$\vec{\nabla} \times \left[\vec{j}_g(\vec{W} \cdot \vec{B}) \right] = \vec{\nabla}(\vec{W} \cdot \vec{B}) \times \vec{j}_g + (\vec{W} \cdot \vec{B}) \vec{\nabla} \times \vec{j}_g, \quad (6.22)$$

dove però l'ultimo contributo a secondo membro diviene nullo, dato che il gradiente agisce unicamente su \vec{B} . Alla luce di quanto discusso, la forza gravitomagnetica può essere espressa nella seguente forma

$$\vec{F}_m = \frac{2}{c} \left\{ \vec{\nabla} \times \int_V \vec{j}_g(\vec{X}') [(\vec{X}' - \vec{X}_Q) \cdot \vec{B}(\vec{X})] dV \right\} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_Q}. \quad (6.23)$$

Si nota che si sono scambiati di posto il rotore e il segno di integrazione, poiché riferiti a variabili diverse. Per scrivere la precedente formula in funzione del momento di dipolo gravitomagnetico, è utile in seguito utilizzare i seguenti calcoli. Si consideri in primis il triplo prodotto vettore $\vec{B} \times (\vec{W} \times \vec{j}_g)$, per il quale vale una terza identità, ossia

$$\begin{aligned} \vec{B} \times (\vec{W} \times \vec{j}_g) &= (\vec{B} \cdot \vec{j}_g) \vec{W} - (\vec{B} \cdot \vec{W}) \vec{j}_g \\ \Rightarrow (\vec{B} \cdot \vec{W}) \vec{j}_g &= (\vec{B} \cdot \vec{j}_g) \vec{W} - \vec{B} \times (\vec{W} \times \vec{j}_g). \end{aligned} \quad (6.24)$$

È possibile dimostrare che l'integrale sul volume occupato dalla spira del primo termine sulla destra dell'ultima uguaglianza è uguale all'opposto dell'integrale del primo membro. Infatti si ha, in componenti,

$$\begin{aligned} \int_V B^k (j_g)_k W_i dV &= \int_V B^k (\hat{e}_k \cdot \vec{j}_g) W_i dV = \int_V B^k (\vec{\nabla}' W_k \cdot \vec{j}_g) W_i dV \\ &= \int_V B^k \vec{\nabla}' \cdot (W_k \vec{j}_g) W_i dV \\ &= \int_V B^k \left[\vec{\nabla}' \cdot (W_i W_k \vec{j}_g) - W_k \vec{j}_g \cdot \vec{\nabla}' W_i \right] dV \\ &= - \int_V B^k \left[W_k \vec{j}_g \cdot \vec{\nabla}' W_i \right] dV = - \int_V B^k (\vec{\nabla}' W_i \cdot \vec{j}_g) W_k dV \\ &= - \int_V B^k (\hat{e}_i \cdot \vec{j}_g) W_k dV \\ &= - \int_V B^k (j_g)_i W_k dV. \end{aligned} \quad (6.25)$$

I precedenti passaggi necessitano di alcuni chiarimenti circa la loro validità. Si fa notare in particolare che si è fatto uso per due volte dell'ulteriore identità

$$\vec{\nabla}' \cdot (f \vec{A}) = \vec{\nabla}' f \cdot \vec{A} + f \vec{\nabla}' \cdot \vec{A}, \quad (6.26)$$

una volta per passare dalla prima alla seconda riga, sostituendo \vec{j}_g ad \vec{A} , W_k a f e tenendo conto del fatto che $\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}_g = 0$ (in quanto la corrente di massa è stazionaria) e un'altra volta, nella successiva uguaglianza, cambiando \vec{A} con $W_k \vec{j}_g$, f con W_i e considerando che anche l'integrale di $\vec{\nabla}' \cdot (W_i W_k \vec{j}_g)$ è nullo, non essendoci flussi di massa che attraversano la superficie che racchiude il volume della spira. Si fa inoltre presente che $\hat{e}_{k,i}$ sono versori che identificano due delle direzioni degli assi del sistema relativo alle coordinate di Fermi. Con l'ausilio della 6.25, è ora possibile riscrivere la 6.24 nella seguente forma integrata

$$\int_V \vec{j}_g(\vec{X}') [(\vec{X}' - \vec{X}_Q) \cdot \vec{B}] dV = -\frac{1}{2} \vec{B} \times \int_V (\vec{X}' - \vec{X}_Q) \times \vec{j}_g(\vec{X}') dV, \quad (6.27)$$

la quale, se inserita nella 6.23, permette di ottenere

$$\begin{aligned}\vec{F}_m &= -\frac{1}{c} \left\{ \vec{\nabla} \times \left[\vec{B} \times \int_V (\vec{X}' - \vec{X}_Q) \times \vec{j}_g(\vec{X}') dV \right] \right\} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_Q} \\ &= \left[\vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{\mu}_g) \right] \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_Q} = \left[(\vec{\mu}_g \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \right] \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_Q},\end{aligned}\quad (6.28)$$

ove si è definito il momento di dipolo gravitomagnetico tramite la formula

$$\vec{\mu}_g = -\frac{1}{c} \int_V (\vec{X}' - \vec{X}_Q) \times \vec{j}_g(\vec{X}') dV, \quad (6.29)$$

la quale si può dimostrare essere equivalente, nel caso di un circuito piano di forma rettangolare, alla 5.17; all'infuori del presente contesto, la 6.29 rappresenta il momento di dipolo di una generica distribuzione di corrente di massa. Si nota inoltre che l'ultimo passaggio nell'espressione di \vec{F}_m è possibile se si sfrutta l'identità

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{\mu}_g) = \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_g) - \vec{j}_g (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) + (\vec{j}_g \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{j}_g \quad (6.30)$$

e si ricorda che $\vec{\nabla}$ agisce solamente su \vec{B} e che $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. La 6.28 rappresenta quindi la forza gravitomagnetica agente sulla spira; se i punti di quest'ultima vengono fatti tendere a Q , mantenendo $\vec{\mu}_g$ costante, si nota che tale espressione non varia e pertanto essa rappresenta anche l'interazione gravitazionale sperimentata da una particella a cui sia assegnato un momento di dipolo gravitomagnetico $\vec{\mu}_g$. Quest'ultima grandezza è legata allo spin \vec{S} del corpuscolo tramite la 5.24:

$$\vec{\mu}_g = -\frac{\vec{S}}{c}; \quad (6.31)$$

tuttavia, poiché la densità di corrente \vec{j}_g nella definizione 6.29 del momento di dipolo corrisponde a quella presente all'istante iniziale, prima del passaggio dell'onda gravitazionale (ciò si evince dal fatto che, nel capitolo 5, nell'espressione di \vec{j}_g vi è solamente il contributo iniziale \vec{v}_0) allora anche $\vec{\mu}_g$ ed \vec{S} nella scrittura precedente sono uguali ai valori iniziali. Tenendo presente questo fatto, risulta

$$\vec{F}_m = -\frac{1}{c} \left[(\vec{S}^0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \right] \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_Q} \quad (6.32)$$

ed infine, la forza gravitazionale agente su di una particella di spin \vec{S} al prim'ordine nell'ampiezza dell'onda A è pari a

$$\vec{F}_g = \vec{F}_e + \vec{F}_m = -m\vec{E} - \frac{1}{c} (\vec{S}^0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}, \quad (6.33)$$

ove m_T e \vec{X}_Q sono stati rinominati per semplicità rispettivamente m e \vec{X} e sono state sottintese le dipendenze da quest'ultima grandezza. È importante notare inoltre che in realtà l'espressione precedente è veramente lineare in A solamente se il campo

gravitoelettrico \vec{E} è valutato nel valore iniziale della posizione iniziale della particella \vec{X}^0 :

$$\vec{F}_g = -m\vec{E}(\vec{X}^0) - \frac{1}{c}(\vec{S}^0 \cdot \vec{\nabla})\vec{B}. \quad (6.34)$$

Quest'ultima espressione può essere confrontata con quella dell'interazione gravitazionale sperimentata da una particella di massa m priva di spin, cioè la 6.4. Si nota subito che, sia in assenza che in presenza di spin, è presente il termine newtoniano $-m\vec{E}$, mentre nel secondo caso il fatto che la particella possieda un momento angolare ha come conseguenza l'aggiunta di un ulteriore contributo alla forza, costituito dal secondo termine della 6.34, le cui componenti possono ora essere sviluppate, al fine di trovare l'equazione del moto del corpuscolo dotato di spin. Utilizzando la notazione con gli indici, risulta

$$\begin{aligned} F_{m,i} &= -\frac{1}{c}S_n^0 \partial_n B_i = -\frac{1}{c}S_n^0 \partial_n \left(-\frac{c^2}{2}\varepsilon_{ijk}R_{jk0l}X_l \right) \\ &= \frac{c}{2}\varepsilon_{ijk}R_{jk0n}S_n^0 \\ &= \frac{c}{4}\varepsilon_{ijk}(\partial_0\partial_k h_{jn} - \partial_0\partial_j h_{kn})S_n^0, \end{aligned} \quad (6.35)$$

ove nell'ultimo passaggio è stata inserita l'espressione 5.31 del tensore di Riemann, la quale è stata parzialmente valutata in coordinate TT (utilizzando ancora il tensore metrico dell'onda gravitazionale 4.3) così da poter omettere i suoi due ultimi termini, che sono entrambi nulli. Proseguendo il calcolo delle $F_{m,i}$, si ottiene poi

$$\begin{aligned} F_{m,1} &= 0 \\ F_{m,2} &= -\frac{\omega^2}{2c}[A^\times \cos(\omega T)S_2^0 - A^+ \sin(\omega T)S_3^0] \\ F_{m,3} &= \frac{\omega^2}{2c}[A^+ \sin(\omega T)S_2^0 + A^\times \cos(\omega T)S_3^0]. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Come fatto in precedenza, si ricorda che il passaggio dell'onda gravitazionale causa delle piccole deviazioni dal valore iniziale delle coordinate della particella, in modo tale che le leggi orarie possano essere scritte nella forma $X_i(T) = X_i^0 + \delta X_i(T)$. In base a questa considerazione e a quanto detto in precedenza, le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\delta X)}{dT^2} &= 0 \\ \frac{d^2(\delta Y)}{dT^2} &= \frac{\omega^2}{2}(A^+ \sin(\omega T)Y^0 + A^\times \cos(\omega T)Z^0) \\ &\quad - \frac{\omega^2}{2mc}[A^\times \cos(\omega T)S_2^0 - A^+ \sin(\omega T)S_3^0] \\ \frac{d^2(\delta Z)}{dT^2} &= \frac{\omega^2}{2}(A^\times \cos(\omega T)Y^0 + A^+ \sin(\omega T)Z^0) \\ &\quad + \frac{\omega^2}{2mc}[A^+ \sin(\omega T)S_2^0 + A^\times \cos(\omega T)S_3^0], \end{aligned} \quad (6.37)$$

le quali possono essere immediatamente integrate. Utilizzando anche l'informazione fornita dalle condizioni iniziali, si possono infine presentare le loro soluzioni, ovvero

$$\begin{aligned}
X(T) &= X^0 \\
Y(T) &= \left(1 - \frac{A^+}{2} \sin(\omega T)\right) Y^0 - \frac{A^\times}{2} \cos(\omega T) Z^0 \\
&\quad + \frac{1}{2mc} [A^\times \cos(\omega T) S_2^0 - A^+ \sin(\omega T) S_3^0] \\
Z(T) &= \left(1 + \frac{A^+}{2} \sin(\omega T)\right) Z^0 - \frac{A^\times}{2} \cos(\omega T) Y^0 \\
&\quad - \frac{1}{2mc} [A^+ \sin(\omega T) S_2^0 + A^\times \cos(\omega T) S_3^0]. \tag{6.38}
\end{aligned}$$

È ora possibile notare come il moto della particella dotata di spin \vec{S} differisca da quello della particella invece sprovvista di tale proprietà per la presenza di un contributo aggiuntivo dipendente dallo spin medesimo, in modo tale che esso si annulla all'annullarsi di quest'ultima grandezza. Tale termine costituisce pertanto una deviazione della traiettoria del primo corpuscolo dal tragitto della seconda, la quale può essere espressa come

$$\begin{aligned}
\delta X_S(T) &= 0 \\
\delta Y_S(T) &= \frac{1}{2mc} [A^\times \cos(\omega T) S_2^0 - A^+ \sin(\omega T) S_3^0] \\
\delta Z_S(T) &= -\frac{1}{2mc} [A^+ \sin(\omega T) S_2^0 + A^\times \cos(\omega T) S_3^0]. \tag{6.39}
\end{aligned}$$

In particolare, la presenza dello spin determina degli effetti di deviazione nel piano ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda gravitazionale debole; ciò è compatibile col fatto che quest'ultima sia trasversale. Gli effetti di deviazione della traiettoria di particelle come quella considerata possono essere schematicamente rappresentati per mezzo della figura 6.1. In essa sono presenti alcuni grafici, il primo dei quali raffigura i cammini percorsi da 8 particelle, prive di spin, disposte all'istante iniziale del moto, in maniera equidistante le une dalle altre, su di una circonferenza centrata nell'origine del riferimento associato alle coordinate di Fermi e giacente nel piano YZ . Si è inoltre supposto che l'onda gravitazionale incidente sul sistema descritto possedesse polarizzazione $+$. A partire dal secondo grafico, si sono rappresentate quattro differenti situazioni, imponendo che di volta in volta che una componente tra S_2^0 o S_3^0 (la medesima per tutte le particelle, ognuna di esse possiede lo stesso spin iniziale) fosse positiva o negativa, mentre l'altra era nulla. Si può notare che gli effetti di deviazione si configurano come un cambiamento della direzione lungo cui i corpuscoli si muovono (in particolare oscillano, essendo i moti periodici) e in aumento o in una diminuzione dell'ampiezza di oscillazione. Quest'ultimo fatto può essere interpretato affermando che l'accoppiamento tra lo spin \vec{S} e il campo gravitomagnetico \vec{B} cede o sottrae energia alle particelle, a seconda dell'orientazione dei due vettori e della posizione di queste ultime.

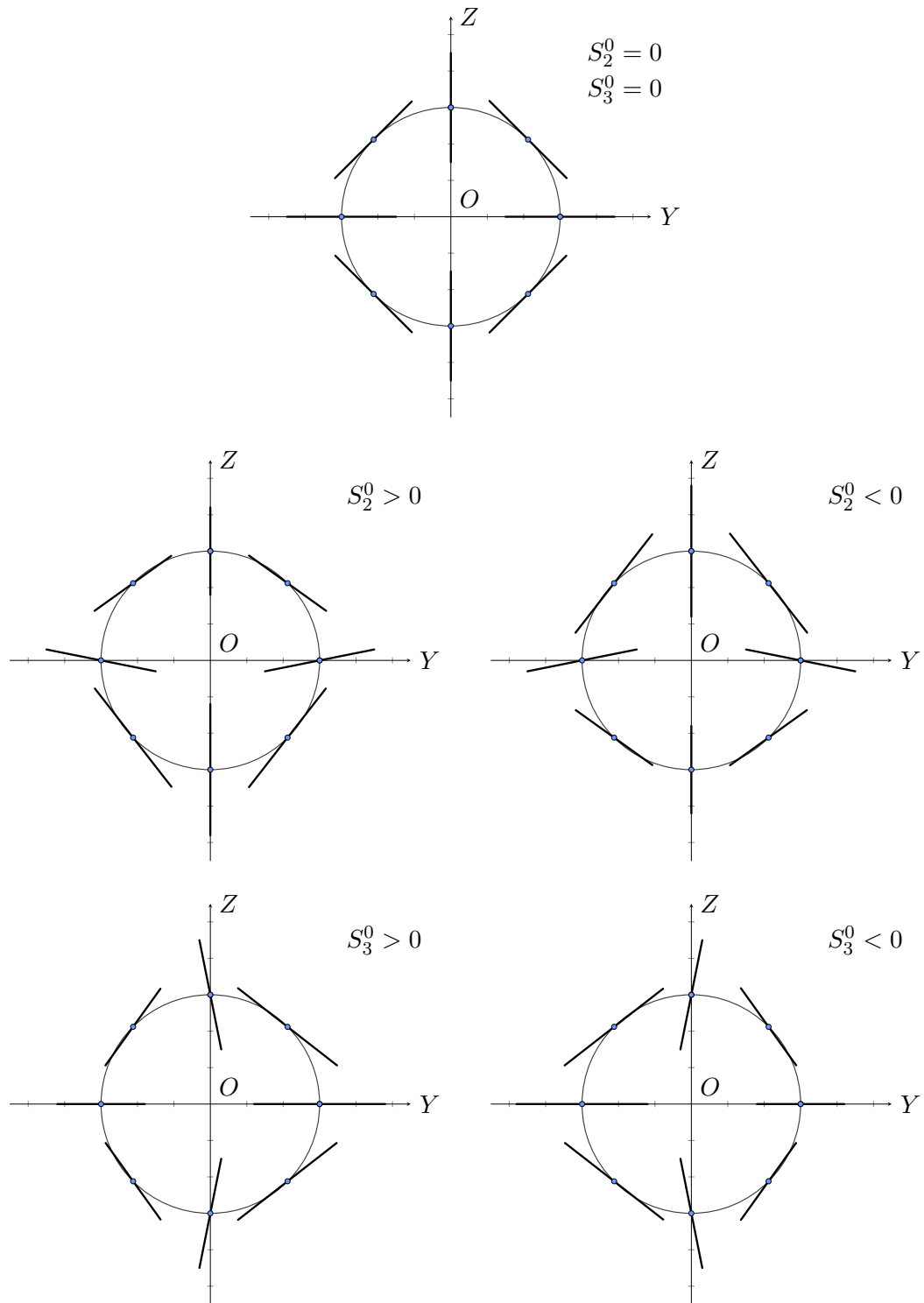


Figura 6.1: *Rappresentazione grafica della deviazione delle traiettorie di 8 particelle poste inizialmente, in maniera equidistante, su di una circonferenza giacente nel piano YZ e centrata nell'origine degli assi. Il fenomeno della precessione degli spin di tali corpuscoli non è invece stato raffigurato, in quanto esso può essere separato dagli effetti di deviazione, come previsto all'interno dell'ambito della teoria linearizzata della gravitazione.*

Capitolo 7

Conclusioni

All'interno del presente elaborato si è analizzato un particolare effetto, di natura gravitomagnetica, dell'interazione tra le onde gravitazionali e la materia, ovvero la precessione dello spin di una particella massiva in caduta libera nel campo di un'onda debole piana monocromatica; si è inoltre studiato come l'accoppiamento tra il campo gravitazionale e il suddetto momento angolare determini una deviazione della curva geodetica, lungo cui si muove il corpuscolo dotato di spin, rispetto a quella che percorrerebbe un secondo, sprovvisto invece di tale struttura. I due effetti sopraccitati sono stati analizzati considerando due particelle in caduta libera munite inizialmente dello stesso vettore di spin e ferme nello spaziotempo piatto antecedentemente al passaggio di un'onda gravitazionale debole e piana; si è in particolare deciso di studiare la precessione relativa dello spin di una delle due particelle rispetto a quello dell'altra costruendo ed utilizzando il sistema di riferimento in caduta libera e il sistema di coordinate normali di Fermi associate a quest'ultima. Tale scelta ha comportato alcuni importanti vantaggi, come la possibilità di poter studiare i fenomeni fisici in un riferimento che può essere associato ad un osservatore in caduta libera, permettendo quindi di interpretare gli effetti studiati così come li vedrebbe un tale sperimentatore e consentendo di definire quantità da questo misurabili nell'ambito di un esperimento. Un secondo vantaggio derivante dall'adozione delle coordinate di Fermi risiede nel fatto che esse hanno permesso di introdurre una formulazione del gravito-elettromagnetismo: un osservatore in caduta libera interpreta gli effetti gravitazionali (attorno a sé stesso) come analoghi a quelli elettromagnetici e tale circostanza ha reso possibile lo studio della precessione relativa dello spin e della deviazione della traiettoria delle particelle investite dal passaggio dell'onda sulla base di leggi formalmente uguali a quelle che governano i fenomeni elettromagnetici.

Il moto di precessione relativa dello spin è stato ricavato nel capitolo 5, supponendo che tale vettore fosse inizialmente allineato lungo la direzione di propagazione dell'onda gravitazionale; ipotizzando inoltre che quest'ultima possedesse polarizzazione $+$, è stato infatti possibile mostrare che le componenti dello spin trasverse rispetto alla direzione di propagazione oscillano nel piano ad essa ortogonale, mentre la componente longitudinale rimane invariata e uguale al valore iniziale. Il moto delle particelle dotate di spin è stato invece affrontato nel capitolo 6, ove si è messo in evidenza come la presenza dello spin modifichi la direzione e l'ampiezza dell'oscillazione di una particella che si muova trasversalmente alla direzione di propagazione dell'onda, sempre nel caso in cui essa sia polarizzata $+$.

Come è stato possibile mettere in luce grazie all'analogia tra la teoria linearizzata della gravitazione ed l'elettromagnetismo di Maxwell, la precessione dello e la deviazione della traiettoria sono effetti gravitomagnetici. Al giorno d'oggi fenomeni di tale natura non sono ancora stati osservati, poiché non si dispone di un apparato sperimentale sufficientemente sensibile. Ad esempio, se si considerasse un'onda gravitazionale di ampiezza massima $A \approx 10^{-21}$ e pulsazione $\omega = 150$ Hz e si realizzassero due esperimenti a ciascuno dei quali fosse associato uno spin iniziale S_1^0 , si avrebbe, in polarizzazione circolare, la deviazione relativa:

$$\frac{\Delta S}{S_1^0} = \frac{S^\perp}{S_1^0} = \frac{\omega AL}{2c} \approx 2.5 \times 10^{-22}, \quad (7.1)$$

ove la distanza L tra i due apparati è stata posta pari a 10^3 Km. In [1] sono indicate alcune possibilità riguardanti una futura realizzazione di esperimenti in grado di rivelare la precessione dello spin, i quali si spera potranno divenire realizzabili grazie all'avanzamento e allo sviluppo della tecniche sperimentali.

Bibliografia

- [1] D. Bini, A. Geralico, A. Ortolan, *Deviation and precession effects in the field of a weak gravitational wave*, Phys. Rev. D 95, 104044 (2017).
- [2] B. Mashhoon, *Gravitoelectromagnetism: A Brief Introduction*, in The Measurement of Gravitomagnetism: A Challenging Enterprise, L. Iorio (Nova Science, New York, 2007), pp. 29-39, [arXiv:gr-qc/0311030].
- [3] B. Mashhoon, *Gravitoelectromagnetism*, in “Reference Frames and Gravitomagnetism”, J.-F. Pascual-Sanchez, L. Floria, A. San Miguel, World Scientific, Singapore (2001), pp. 121-132.
- [4] B. Mashhoon, F. Gronwald, and H.I.M. Lichtenegger (2001) *Gravitoelectromagnetism and the clock effect*, in: Lämmerzahl C., Everitt C.W.F., Hehl F.W. (eds) Gyros, Clocks, Interferometers...: Testing Relativistic Gravity in Space. Lecture Notes in Physics, vol 562. Springer, Berlin, Heidelberg, [arXiv:gr-qc/9912027].
- [5] M. Maggiore, *Gravitational Waves. Volume 1: theory and experiments*, Oxford University Press, 2008.
- [6] S. Carroll, *Spacetime and Geometry An Introduction to General Relativity*, Pearson, 2014.
- [7] M. P. Hobson, G. Efstathiou, A. N. Lasenby, *General Relativity An Introduction for Physicists*, Cambridge University Press, 2006.
- [8] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, 1973.
- [9] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, 1962.
- [10] A. Bettini, *Elettromagnetismo*, Decibel editore, 2015, Bologna.