

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia Galileo Galilei

Corso di Laurea in Fisica

TERMODINAMICA DI BOSONI CONFINATI E INTERAGENTI

Relatore
Ch.mo Professor
Luca Salasnich

Laureando
Matteo Ferraretto
1070089

Anno accademico 2015/2016

Indice

Introduzione	5
1 Equazione di Gross-Pitaevskii	7
2 Spettro di eccitazione del condensato	13
3 Temperatura critica	19
3.1 Bosoni liberi non interagenti	20
3.2 Bosoni liberi interagenti	21
3.3 Bosoni intrappolati non interagenti	22
3.4 Bosoni intrappolati interagenti	26
Conclusioni	29
Bibliografia	31

Introduzione

La condensazione di Bose-Einstein, teorizzata già nella prima metà del Novecento, ha conosciuto un notevole sviluppo negli ultimi vent'anni a seguito della prima conferma sperimentale del fenomeno, realizzata nel 1995 da Eric Cornell e Carl Wieman presso il laboratorio JILA di Boulder, Colorado. Cornell e Wieman riuscirono a raffreddare atomi di Rubidio a $170nK$ tramite tecniche di *laser cooling*, confinandoli con trappole magneto-ottiche e studiarono l'assorbimento di luce da parte del condensato, evidenziandone il profilo di densità predetto teoricamente [1]. L'esperimento, per il quale i fisici furono insigniti del premio Nobel per la Fisica nel 2001 (assieme a Wolfgang Ketterle), aprì la strada allo studio di molti fenomeni correlati, quali superconduttività, superfluidità, vortici quantizzati, laser atomici ecc.

L'Italia si è posizionata in un ruolo di particolare rilievo in questo settore, grazie al lavoro di un gruppo di ricerca del LENS di Firenze, che nel 2007 ha realizzato la condensazione di Potassio-39 riuscendo ad annullare quasi completamente le interazioni tra gli atomi, ottenendo così un gas di Bose ideale [2].

Lo studio teorico di gas di bosoni interagenti ultrafreddi e intrappolati in potenziali esterni ha pertanto grande rilievo nella corretta interpretazione dei risultati sperimentali. Lo scopo di questo lavoro è quello di dedurre dal contesto della Meccanica Quantistica classica le principali equazioni che descrivono questi sistemi, per poi descriverne le principali proprietà termodinamiche di interesse pratico, quali la temperatura critica e la frazione di condensato. Il primo capitolo presenta una derivazione dell'equazione di Gross-Pitaevskii *time dependent* e stazionaria ottenuta tramite il principio di azione stazionaria sull'azione di Dirac per sistemi a molti corpi. Il secondo capitolo presenta una derivazione delle equazioni di Bogoliubov-DeGennes tramite un formalismo hamiltoniano applicato alla Meccanica Quantistica *tradizionale*; tramite l'approssimazione semiclassica di queste equazioni e la

statistica di Bose-Einstein si costruisce infine un'espressione per la densità della nube termica. Il terzo capitolo presenta la derivazione di alcune proprietà termodinamiche fondamentali dei sistemi di bosoni, quali la temperatura critica e la frazione di condensato; l'analisi viene svolta in alcuni casi specifici (particelle libere o confinate, interagenti o non interagenti).

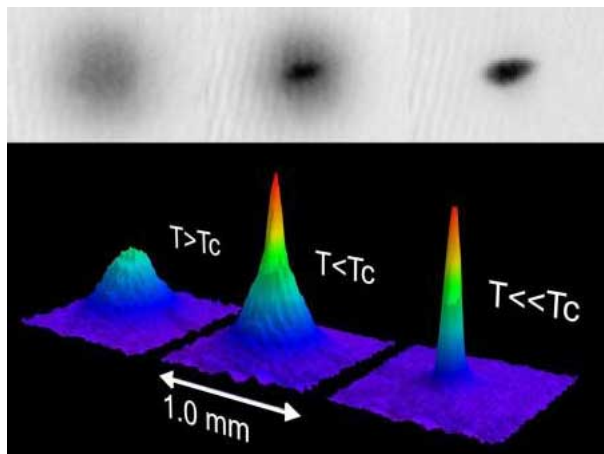


Figura 1: La figura rappresenta i profili di densità del gas di Bose a varie temperature. A sinistra la temperatura è superiore a quella critica: non vi è condensazione; al centro la temperatura è appena sotto a quella critica: ha inizio la condensazione, evidenziata dal picco centrale, ma permane una *nube termica*; a destra la temperatura è molto inferiore a quella critica e il gas è quasi tutto condensato. I colori rappresentano l'energia delle particelle (rosso corrisponde a bassa energia, violetto ad alta energia).

Capitolo 1

Equazione di Gross-Pitaevskii

In questa sezione ci proponiamo di derivare l'equazione di Gross-Pitaevskii per l'evoluzione temporale dei condensati di Bose-Einstein interagenti a temperatura nulla, utilizzando il formalismo della prima quantizzazione. Descriveremo inoltre le principali caratteristiche fisiche e matematiche di tale equazione.

Un generico sistema a molti corpi identici interagenti a due a due e soggetti a un potenziale esterno è descritto dal seguente operatore hamiltoniano:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} W(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right] \quad (1.1)$$

$W(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ è il potenziale di interazione, che in totale generalità dipende dalla distanza tra le particelle; postulando un'interazione di contatto tra queste, esso assume la forma:

$$W(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = g \delta^3(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (1.2)$$

La costante g ha le dimensioni di energia per volume e misura la forza dell'interazione tra le particelle; inoltre se $g > 0$ tale interazione è repulsiva, altrimenti è attrattiva. Spesso in letteratura viene anche scritta come $g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$, dove a è la lunghezza di scattering delle particelle. Questa ipotesi sul potenziale d'interazione è ragionevole se il gas è diluito, ovvero se la distanza tra i bosoni è molto maggiore della loro lunghezza di scattering.

Il sistema quantistico è descritto da una funzione d'onda a molti corpi $\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$ che nel caso di bosoni identici deve essere totalmente simmetrica per scambio di due particelle: se ipotizziamo che queste ultime siano

nello stesso stato quantistico, ovvero se tutto il sistema è condensato (ciò è vero in ottima approssimazione per gas diluiti a temperatura $T = 0K$), si può scrivere:

$$\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = \prod_{i=1}^N \psi(\vec{r}_i, t) \quad (1.3)$$

dove $\psi(\vec{r}_i, t)$ indica lo stato di particella singola normalizzato all'unità, ovvero: $\int d^3r_i |\psi(\vec{r}_i, t)|^2 = 1$.

L'equazione della dinamica di un sistema quantistico si ottiene cercando le funzioni che rendono stazionario il funzionale di azione di Dirac, descritto in tutta generalità dalla seguente espressione (si omette per brevità la dipendenza esplicita dalle variabili):

$$S[\Psi, \Psi^*] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^3r_1 \dots d^3r_N \Psi^* \left[\hat{H} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right] \Psi \quad (1.4)$$

Sostituendo quanto scritto finora in questa espressione, con un po' di lavoro si ottiene il seguente funzionale per la funzione di particella singola:

$$S[\psi, \psi^*] = N \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \psi^*(\vec{r}, t) \left[\hat{H}_0 + \frac{1}{2} g N |\psi(\vec{r}, t)|^2 - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (1.5)$$

dove $\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r})$. Nei calcoli occorre fare l'approssimazione $N-1 \approx N$, che è ottima dal momento che i valori tipici negli esperimenti sono dell'ordine di 10^7 particelle. Detta $\delta\psi(\vec{r}, t)$ una generica funzione di prova, cioè tale da annullarsi con tutte le sue derivate all'infinito spaziale e temporale, è possibile definire la variazione dell'azione come:

$$\delta S = \left. \frac{d}{d\varepsilon} S[\psi + \varepsilon \delta\psi, \psi^* + \varepsilon \delta\psi^*] \right|_{\varepsilon=0} \quad (1.6)$$

Il principio di azione stazionaria consiste nel richiedere che $\delta S = 0 \forall \delta\psi, \delta\psi^*$ con le caratteristiche richieste. Svolgendo i calcoli si trovano due equazioni dinamiche, che sono l'una il complesso coniugato dell'altra: una di esse perciò è ridondante. L'equazione risultante prende il nome di *equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo* ed è data da:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) + gN |\psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (1.7)$$

Dal punto di vista matematico si tratta di un'equazione differenziale alle derivate parziali, del secondo ordine e non lineare per via del termine di interazione di campo medio tra le particelle $gN|\psi(\vec{r}, t)|^2$. Dal punto di vista fisico si osserva che se i bosoni non interagiscono, allora $g = 0$ e l'equazione si riduce all'equazione di Schrödinger per la singola particella, come si poteva preannunciare. Se inoltre il sistema non evolve nel tempo, ma il suo stato è stazionario, la funzione d'onda si può scrivere in totale generalità come $\psi(\vec{r}, t) = e^{-i\frac{\mu}{\hbar}t}\varphi(\vec{r})$: in questo modo il suo modulo quadro, che contiene l'informazione fisica, non dipende dal tempo ($|\psi(\vec{r}, t)|^2 = |\varphi(\vec{r})|^2$). Sotto questa ipotesi, l'equazione 1.7 si semplifica come segue:

$$\mu\varphi(\vec{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) + gN|\varphi(\vec{r})|^2 \right] \varphi(\vec{r}) \quad (1.8)$$

L'energia del sistema può essere calcolata come il valore medio dell'operatore hamiltoniano 1.1: $E = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle$. Sostituendo a Ψ l'espressione 1.3, nell'ipotesi di stazionarietà del sistema, si ottiene:

$$E[\varphi^*, \varphi] = N \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \varphi^*(\vec{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) + \frac{1}{2}gN|\varphi(\vec{r})|^2 \right] \varphi(\vec{r}) \quad (1.9)$$

Con questa definizione, il parametro μ (che è fissato dalla condizione di normalizzazione della funzione d'onda), assume il significato fisico di potenziale chimico del sistema, infatti moltiplicando la 1.8 per $\varphi^*(\vec{r})$ e integrando su tutto lo spazio, si vede che:

$$\mu = \frac{\partial E[\varphi^*, \varphi]}{\partial N} \quad (1.10)$$

E' importante osservare che μ ha il significato di energia di una singola particella solo nel caso particolare di particelle non interagenti.

Discutiamo ora alcune approssimazioni analitiche della vera soluzione dell'equazione 1.8.

La prima consiste nel considerare un *ansatz variazionale*, ossia nell'ipotizzare un'espressione analitica dipendente da uno o più parametri che approssimi la soluzione e nel calcolare la miglior stima di tali parametri minimizzando il funzionale energia 1.9. Un esempio di grande interesse teorico e sperimentale è il caso di trappola armonica anisotropa: $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 +$

$\omega_3^2 z^2$). Se $g = 0$, il potenziale chimico è l'energia di particella singola e l'equazione 1.8 si riduce all'equazione di Schrödinger per l'oscillatore armonico tridimensionale, la cui soluzione per lo stato fondamentale è ben nota:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\pi^{3/4}(a_1 a_2 a_3)^{1/2}} \exp \left[- \left(\frac{x^2}{2a_1^2} + \frac{y^2}{2a_2^2} + \frac{z^2}{2a_3^2} \right) \right] \quad (1.11)$$

dove $a_i = \sqrt{\hbar/m\omega_i}$. Questa osservazione porta a pensare che, almeno per sistemi debolmente interagenti, una funzione nella forma 1.12 sia una buona stima della soluzione reale (qui $\sigma_{1,2,3}$ sono i tre parametri da ottimizzare).

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\pi^{3/4}(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{1/2}} \exp \left[- \left(\frac{x^2}{2\sigma_1^2} + \frac{y^2}{2\sigma_2^2} + \frac{z^2}{2\sigma_3^2} \right) \right] \quad (1.12)$$

Definendo i parametri adimensionali $k_i = \sigma_i/a_i$ e le grandezze $\bar{\omega} = (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{1/3}$, $\bar{a} = \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$, si calcola esplicitamente il funzionale energia 1.9 con questo ansatz, ottenendo:

$$E(k_1, k_2, k_3) = \frac{N}{4} \sum_{i=1}^3 \hbar\omega_i \left(k_i^2 + \frac{1}{k_i^2} \right) + \frac{gN^2}{2(2\pi\bar{a}^2)^{3/2} k_1 k_2 k_3} \quad (1.13)$$

La condizione di stazionarietà per questa funzione, ovvero $\frac{\partial E}{\partial k_i} = 0$ con $i = 1, 2, 3$ conduce a un sistema algebrico di tre equazioni aventi la stessa forma:

$$\hbar\omega_i \left(k_i^2 - \frac{1}{k_i^2} \right) - \frac{gN}{(2\pi\bar{a}^2)^{3/2} k_1 k_2 k_3} = 0 \quad (1.14)$$

La risoluzione di questo sistema algebrico e la verifica che la soluzione sia un minimo dell'energia sono analiticamente molto laboriose; pertanto, al fine di cogliere le informazioni fondamentali, ci limiteremo a considerare un sistema isotropo: assumeremo cioè $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \bar{\omega}$ e $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Sotto questa ipotesi, l'equazione 1.13 si riduce a:

$$E(k) = \frac{3N}{4} \hbar\bar{\omega} \left(k^2 + \frac{1}{k^2} \right) + \frac{gN^2}{2(2\pi\bar{a}^2 k^2)^{3/2}} \quad (1.15)$$

Definendo un parametro adimensionale γ che misuri l'intensità dell'interazione rispetto all'unità naturale $\hbar\bar{\omega}$ come $\gamma = \frac{gN}{(2\pi\bar{a})^{3/2} \hbar\bar{\omega}}$, il set di equazioni 1.14 si riduce a una sola equazione:

$$k^5 - k = \gamma \quad (1.16)$$

L'analisi di questa curva, vista in funzione di k mostra che, considerando solo $k > 0$, vi è un minimo nel punto $(k_c, \gamma_c) = (0.67, -0.53)$. Sia $\bar{k}(\gamma)$ la soluzione della 1.16: essa è un minimo dell'energia se $\left. \frac{d^2 E}{dk^2} \right|_{k=\bar{k}(\gamma)} > 0$. Svolgendo i calcoli si possono distinguere tre situazioni al variare del parametro γ :

- $\gamma > 0$: l'interazione tra le particelle è repulsiva, $\bar{k}(\gamma) > 1$ è unico ed è sempre un minimo dell'energia.
- $\gamma < \gamma_c$: l'interazione è attrattiva, l'equazione 1.16 non ha soluzione e l'energia cresce in modo monotono con k , dunque la stabilità si ha per $k \rightarrow 0$: questo fenomeno è detto *collasso del condensato* dal momento che $|\varphi(\vec{r})|^2$ diventa molto piccato nell'origine.
- $\gamma_c < \gamma < 0$: l'interazione è ancora attrattiva, ma la 1.16 ha due soluzioni: una con $k_c < \bar{k}(\gamma) < 1$ (che è sempre un minimo) e una con $\bar{k}(\gamma) < k_c$ (che è sempre un massimo). Vi sono due configurazioni stabili: una in corrispondenza del minimo e una per $k \rightarrow 0$.

Un'altra possibile approssimazione per risolvere l'equazione 1.8 è quella di *Thomas-Fermi*, che consiste nel trascurare il termine cinetico $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$. In questo modo, definendo l'insieme $\Omega = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : V(\vec{r}) < \mu\}$ l'equazione si riduce banalmente a:

$$n_0(\vec{r}) = N|\varphi(\vec{r})|^2 = \begin{cases} \frac{\mu - V(\vec{r})}{g} & \vec{r} \in \Omega \\ 0 & \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \end{cases} \quad (1.17)$$

Nel caso particolarmente interessante di trappola armonica anisotropa, la regione Ω è un ellissoide di semiassi $R_i = \sqrt{2\mu/m\omega_i^2}$. La condizione di normalizzazione della funzione d'onda permette di fissare il potenziale chimico:

$$\mu = \left(\frac{15}{16\pi} gN \right)^{2/5} (m\bar{\omega})^{3/5} \quad (1.18)$$

Da cui è immediato ricavare esplicitamente le misure dei semiassi e l'energia del sistema $E = \int \mu(N) dN = \frac{5}{7}\mu N$ (come già anticipato, nel caso di bosoni interagenti il potenziale chimico non è l'energia per particella).

L'approssimazione di Thomas-Fermi è valida nella misura in cui l'interazione

tra le particelle contribuisce all'espansione del gas più dell'energia cinetica: è dunque valida soltanto nel caso in cui g sia positiva e molto grande. Più concretamente, nel caso di trappola armonica anisotropa, si può definire un'unità naturale per le grandezze caratteristiche del sistema:

- lunghezza tipica: $\bar{R} = (R_1 R_2 R_3)^{1/3} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\bar{\omega}^2}}$
- energia cinetica: $E_k \sim \frac{\hbar^2}{2m\bar{R}^2}$
- energia di interazione: $E_{int} \sim \frac{1}{2} \frac{gN}{\bar{R}^3}$

Il regime di validità dell'approssimazione di Thomas-Fermi è dunque quello in cui $E_{int} \gg E_k$, ovvero $g \gg \frac{\hbar\bar{R}}{mN}$. Per una sintesi di questa analisi e ulteriori dettagli si consulti [3].

Capitolo 2

Spettro di eccitazione del condensato

In questa sezione ci proponiamo di calcolare lo spettro di Bogoliubov-DeGennes, ovvero l'energia delle piccole perturbazioni elementari di un condensato rispetto a una configurazione stazionaria di equilibrio.

Consideriamo una funzione d'onda di particella singola, che sia soluzione della 1.7 nella forma $\psi(\vec{r}, t) = (\varphi(\vec{r}) + \eta(\vec{r}, t))e^{-i\frac{\mu}{\hbar}t}$, dove $\varphi(\vec{r})$ è una soluzione dell'equazione stazionaria 1.8 e $\eta(\vec{r}, t)$ è una piccola perturbazione tale che $\forall \vec{r}, t$ sia $|\eta(\vec{r}, t)| \ll |\varphi(\vec{r})|$. Introducendo la $\psi(\vec{r}, t)$ così definita nell'equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo 1.7, svolgendo i calcoli tenendo conto del vincolo 1.8 e trascurando tutti i termini non lineari in $\eta(\vec{r}, t)$, si ottiene:

$$i\hbar \frac{\partial \eta(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[\hat{H}_0 + 2gN|\varphi(\vec{r})|^2 - \mu \right] \eta(\vec{r}, t) + gN\varphi^2(\vec{r})\eta^*(\vec{r}, t) \quad (2.1)$$

Questa equazione, che va risolta in accoppiamento alla sua complessa coniugata, permette in linea di principio di ricavare $\eta(\vec{r}, t)$, che dal punto di vista fisico può essere interpretata come la funzione d'onda di una particella fittizia, detta *quasiparticella*. Dal punto di vista matematico, invece, l'equazione 2.1 e la sua complessa coniugata possono essere interpretate come le equazioni dinamiche di un sistema hamiltoniano avente come variabili coniugate i campi $\eta(\vec{r}, t)$, $\eta^*(\vec{r}, t)$ e hamiltoniana data dal funzionale:

$$\tilde{E}[\eta, \eta^*] = \int d^3r \left[\eta^* \left(\hat{H}_0 + 2gn_0(\vec{r}) - \mu \right) \eta + \frac{1}{2}gn_0(\vec{r}) (\eta^{*2} + \eta^2) \right] \quad (2.2)$$

Per semplicità abbiamo ipotizzato che $\varphi(\vec{r})$ fosse una funzione reale e posto $n_0(\vec{r}) = N\varphi^2(\vec{r})$; inoltre la dipendenza esplicita dalle variabili è stata omessa per brevità. Si può facilmente mostrare che la variazione di questo funzionale è esprimibile nella forma

$$\delta\tilde{E} = \int d^3r \left(\frac{\delta\tilde{E}}{\delta\eta} \delta\eta + \frac{\delta\tilde{E}}{\delta\eta^*} \delta\eta^* \right) \quad (2.3)$$

Le equazioni di Hamilton del sistema sono:

$$i\hbar \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta\tilde{E}[\eta,\eta^*]}{\delta\eta^*} \quad -i\hbar \frac{\partial\eta^*}{\partial t} = \frac{\delta\tilde{E}[\eta,\eta^*]}{\delta\eta} \quad (2.4)$$

che coincidono proprio con la 2.1 e la sua complessa coniugata.

La scelta di trascurare i termini non lineari nell'equazione dinamica (ossia i termini non quadratici nel funzionale 2.2) implica anzitutto che si trascura l'interazione tra le quasiparticelle e in secondo luogo che il funzionale può essere diagonalizzato attraverso un'opportuna trasformazione canonica. Si può dimostrare che la giusta trasformazione ha la forma:

$$\eta(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\vec{r}) B_{\vec{k}}(t) - v_{\vec{k}}^*(\vec{r}) B_{\vec{k}}^*(t) \quad (2.5)$$

dove $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ e $v_{\vec{k}}(\vec{r})$ sono generiche funzioni complesse della posizione. Si dimostra che la condizione di canonicità della trasformazione è:

$$\begin{aligned} u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) u_{\vec{k}'}(\vec{r}) - v_{\vec{k}}^*(\vec{r}) v_{\vec{k}'}(\vec{r}) &= \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \\ u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) v_{\vec{k}'}(\vec{r}) - u_{\vec{k}'}^*(\vec{r}) v_{\vec{k}}(\vec{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

dove $\delta_{\vec{k},\vec{k}'}$ è il simbolo di Kronecker. Per maggiori dettagli in merito si veda [4]. Il fatto che le nuove variabili diagonalizzino l'hamiltoniana implica che esse possano essere scritte come sovrapposizione di modi di oscillazione elementari $B_{\vec{k}}(0)e^{-i\omega_{\vec{k}}t}$. Inserendo la 2.5 nella 2.1 e considerando un modo normale, si ottengono due equazioni differenziali accoppiate nelle incognite $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ e $v_{\vec{k}}(\vec{r})$, dette equazioni di *Bogoliubov-DeGennes*:

$$\begin{bmatrix} \hbar\omega_{\vec{k}} - \hat{L} & gn_0(\vec{r}) \\ -gn_0(\vec{r}) & \hbar\omega_{\vec{k}} + \hat{L} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{\vec{k}}(\vec{r}) \\ v_{\vec{k}}(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

dove abbiamo introdotto l'operatore $\hat{L} = \hat{H}_0 + 2gn_0(\vec{r}) - \mu$. Risolvere analiticamente queste equazioni è ancora molto difficile e pertanto si introduce

un'ulteriore semplificazione, detta *approssimazione semiclassica*, che consiste nell'assunzione che $\eta(\vec{r}, t)$ sia approssimativamente un'onda piana; in altre parole:

$$\begin{aligned} u_{\vec{k}}(\vec{r}) &= a_{\vec{k}}(\vec{r})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ v_{\vec{k}}(\vec{r}) &= b_{\vec{k}}(\vec{r})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

con $a_{\vec{k}}(\vec{r})$ e $b_{\vec{k}}(\vec{r})$ funzioni debolmente dipendenti da \vec{r} , in modo che le loro derivate rispetto a tutte le coordinate spaziali si possano trascurare. L'idea di questa approssimazione nasce analizzando il caso semplice in cui $g = 0$ e $V(\vec{r}) \equiv 0$: in questo caso le 2.7 risultano disaccoppiate ed è immediato mostrare che la loro soluzione non banale è $u_{\vec{k}}(\vec{r}) = a_{\vec{k}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, $v_{\vec{k}}(\vec{r}) = b_{\vec{k}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, con a e b costanti e autovalori tali che $\hbar^2\omega_{\vec{k}}^2 = (\frac{\hbar^2k^2}{2m} - \mu)^2$. Sembra allora lecito supporre che l'approssimazione semiclassica sia buona per i modi con \vec{k} grande, ovvero per quelle eccitazioni aventi lunghezza d'onda piccola rispetto alle dimensioni caratteristiche del sistema. Possiamo dunque concludere che l'approssimazione sia buona a patto di trascurare le *oscillazioni collettive* del condensato. Per maggiori dettagli sul tema delle oscillazioni collettive, si consultino [5] e [6]. In questa approssimazione, le equazioni di Bogoliubov-DeGennes 2.7 si approssimano a semplici equazioni algebriche nelle incognite $a_{\vec{k}}(\vec{r})$ e $b_{\vec{k}}(\vec{r})$ e mantengono la stessa forma, a patto di sostituire formalmente $\hat{L} \rightarrow L(\vec{r}) = \frac{\hbar^2k^2}{2m} + V(\vec{r}) + 2gn_0(\vec{r}) - \mu$. Per escludere la soluzione banale del sistema si deve imporre la condizione:

$$\det \begin{bmatrix} \hbar\omega_{\vec{k}} - L(\vec{r}) & gn_0(\vec{r}) \\ -gn_0(\vec{r}) & \hbar\omega_{\vec{k}} + L(\vec{r}) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.9)$$

La soluzione di questa equazione porge immediatamente la *relazione di dispersione di Bogoliubov*:

$$\hbar^2\omega_{\vec{k}}^2 = \left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} + V(\vec{r}) + 2gn_0(\vec{r}) - \mu \right)^2 - g^2n_0^2(\vec{r}) \quad (2.10)$$

Questo risultato è molto importante perché costituisce il punto di partenza dell'analisi degli stati eccitati del condensato. Dal punto di vista fisico, la 2.10 mette in relazione l'energia $\varepsilon_{\vec{k}}(\vec{r}) \equiv \hbar\omega_{\vec{k}}$ di una quasiparticella con il suo impulso $\vec{p} \equiv \hbar\vec{k}$ e con la posizione in cui viene prodotta \vec{r} . La condizione 2.9 implica che il sistema ha infinite soluzioni, in quanto una delle due equazioni risulta essere un'identità; per risolverlo univocamente occorre fare appello

alle condizioni di canonicità 2.6. In particolare, quando $\vec{k} = \vec{k}'$, la seconda è un'identità, mentre la prima si traduce in:

$$|a_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 - |b_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 = 1 \quad (2.11)$$

La risoluzione delle equazioni di Bogoliubov-DeGennes in approssimazione semiclassica con questa condizione di normalizzazione fornisce:

$$|a_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 = \frac{L(\vec{r}) + \varepsilon_{\vec{k}}(\vec{r})}{2\varepsilon_{\vec{k}}(\vec{r})} \quad |b_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 = \frac{L(\vec{r}) - \varepsilon_{\vec{k}}(\vec{r})}{2\varepsilon_{\vec{k}}(\vec{r})} \quad (2.12)$$

Consideriamo ora alcune approssimazioni interessanti della 2.10:

- bosoni non interagenti ($g = 0$): lo spettro delle quasiparticelle si riduce a $\varepsilon_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) - \mu$, che è lo spettro di particelle classiche scalato della costante μ .
- limite di Thomas-Fermi (interazione forte e repulsiva): come mostrato nella sezione precedente, vale $gn_0(\vec{r}) = \mu - V(\vec{r})$ e dunque lo spettro si riduce a $\varepsilon_{\vec{p}}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{p^2}{2m} \left(\frac{p^2}{2m} + 2gn_0(\vec{r}) \right)}$. È interessante notare due casi limite di questa equazione: se $2gn_0(\vec{r}) \ll \frac{p^2}{2m}$, lo spettro si riduce a quello di particelle libere $\varepsilon_{\vec{p}} \approx \frac{p^2}{2m}$; mentre nel limite opposto lo spettro prende la forma $\varepsilon_{\vec{p}}(\vec{r}) \approx c(\vec{r})\vec{p}$, dove $c(\vec{r}) = \sqrt{\frac{gn_0(\vec{r})}{m}}$. In quest'ultimo caso, lo spettro ricorda quello dei fononi in un reticolo cristallino e $c(\vec{r})$ può essere interpretata come la velocità locale di propagazione delle vibrazioni.
- bosoni debolmente interagenti: un limite particolarmente interessante è quello in cui $gn_0(\vec{r}) \ll \varepsilon_{\vec{p}}(\vec{r})$ o, in modo del tutto equivalente, usando la 2.10, $\mu \ll \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) + gn_0(\vec{r})$. In questo limite è possibile trascurare l'ultimo termine della 2.10, ottenendo lo *spettro di Hartree-Fock*:

$$\varepsilon_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) - \mu + 2gn_0(\vec{r}) \quad (2.13)$$

In questa approssimazione, inoltre, i coefficienti 2.12 risultano, come avevamo assunto, circa costanti:

$$|a_{\vec{k}}|^2 \approx 1 \quad |b_{\vec{k}}|^2 \approx 0 \quad (2.14)$$

Nell'ottica della seconda quantizzazione, questo risultato dà modo di trascurare la *quantum depletion*, ovvero la presenza di particelle non condensate a temperatura $T = 0$, rendendo consistente la richiesta 1.3 sulla funzione d'onda a molti corpi.

La termodinamica del sistema può essere costruita ipotizzando ragionevolmente che le quasiparticelle seguano la distribuzione di Bose-Einstein $\tilde{f}(\vec{p}, \vec{r})$ con un potenziale chimico $\tilde{\mu}$ nullo, dal momento che non vi sono vincoli sul loro numero:

$$\tilde{f}(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon(\vec{p}, \vec{r})} - 1} \quad (2.15)$$

Il numero totale di quasiparticelle presenti a temperatura fissata T si ottiene sommando su tutti i possibili impulsi e integrando su tutto lo spazio, e può essere identificato con il numero di particelle non condensate N_T . In questa analisi stiamo assumendo che la densità degli stati possibili sia così grande da considerarli distribuiti in modo continuo anziché discreto; ciò permette di utilizzare la consueta trasformazione formale della termodinamica $\int d^3r \sum_{\vec{p}} \rightarrow \int \frac{d^3r d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$.

$$N_T = \int d^3r n_T(\vec{r}) = \int d^3r \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \tilde{f}(\vec{p}, \vec{r}) \quad (2.16)$$

Da questa espressione si legge immediatamente quella per la densità della componente termica del gas $n_T(\vec{r})$.

Un calcolo più preciso, svolto nel contesto della seconda quantizzazione (si veda [5]), produce il seguente risultato:

$$n_T(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} |v_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 + \sum_{\vec{k}} \frac{|u_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 + |v_{\vec{k}}(\vec{r})|^2}{e^{\beta\varepsilon_{\vec{k}}(\vec{r})} - 1} \quad (2.17)$$

dove il primo termine descrive la *quantum depletion*. Questo risultato è più generale, ma se si considera l'approssimazione di Hartree-Fock, coincide col precedente (a patto di estendere nuovamente lo spettro al continuo):

$$n_T(\vec{r}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon(\vec{p}, \vec{r})} - 1} \quad (2.18)$$

Una puntualizzazione doverosa è che, in presenza di una frazione significativa di atomi non condensati, la derivazione dell'equazione di Gross-

Pitaevskii mostrata nella sezione precedente non è più corretta, dal momento che l'ansatz 1.3 non è più valido. Il formalismo della seconda quantizzazione permette di derivare l'*equazione di Gross-Pitaevskii a temperatura finita* [7]:

$$\mu\varphi(\vec{r}) = \left[\hat{H}_0 + g(n_0(\vec{r}) + 2n_T(\vec{r})) \right] \varphi(\vec{r}) \quad (2.19)$$

che deve soddisfare il vincolo sul numero totale di particelle:

$$N = \int d^3r (n_0(\vec{r}) + n_T(\vec{r})) \quad (2.20)$$

Ciò impone inoltre di riscrivere le equazioni di Bogoliubov-DeGennes 2.7; seguendo la stessa procedura già mostrata si trova:

$$\begin{bmatrix} \hbar\omega_{\vec{k}} - \hat{L}_T & gn_0(\vec{r}) \\ -gn_0(\vec{r}) & \hbar\omega_{\vec{k}} + \hat{L}_T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{\vec{k}}(\vec{r}) \\ v_{\vec{k}}(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

con $\hat{L}_T \equiv \hat{H}_0 + 2g[n_0(\vec{r}) + n_T(\vec{r})] - \mu$. Il set di equazioni 2.17, 2.19, 2.20, 2.21 costituisce un sistema di equazioni accoppiate trattabile solo con metodi numerici autoconsistenti. Le soluzioni numeriche mostrano un buon accordo della teoria con i dati sperimentali.

Capitolo 3

Temperatura critica

In questa sezione ci occuperemo di utilizzare i risultati precedentemente ricavati per studiare alcune proprietà termodinamiche dei sistemi bosonici interagenti in trappole armoniche.

Il punto di partenza di questa analisi è l'espressione per la densità della parte non condensata del sistema, detta anche *parte termica*:

$$n_T(\vec{r}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon(\vec{p},\vec{r})} - 1} \quad (3.1)$$

dove $\varepsilon(\vec{p},\vec{r})$ è lo spettro di Bogoliubov a temperatura finita, ottenuto in approssimazione semiclassica (trascurando oscillazioni collettive del sistema) e può pertanto essere assunto come una funzione continua:

$$\varepsilon(\vec{p},\vec{r}) = \left[\left(\frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) + 2gn(\vec{r}) - \mu \right)^2 - g^2 n_0^2(\vec{r}) \right]^{1/2} \quad (3.2)$$

In questa relazione $n(\vec{r}) = n_0(\vec{r}) + n_T(\vec{r})$ è la densità complessiva e soddisfa al vincolo $\int d^3r n(\vec{r}) = N$, dal momento che il numero di particelle N è un parametro fissato dalle condizioni sperimentali. Lavorando nell'approssimazione di Hartree-Fock di gas debolmente interagente discussa nel capitolo precedente, è possibile trovare un'espressione analitica semplice per $n_T(\vec{r})$. Lo spettro di eccitazione infatti assume la forma:

$$\varepsilon(\vec{p},\vec{r}) = \frac{p^2}{2m} + U(\vec{r}) \quad (3.3)$$

dove si è introdotto il potenziale efficace $U(\vec{r}) = V(\vec{r}) + 2gn(\vec{r}) - \mu$. Per svolgere il calcolo conviene anzitutto ricordare la definizione e le proprietà della funzione di Bose:

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k^n} \quad (3.4)$$

L'analisi complessa mostra che questa funzione può essere prolungata analiticamente all'esterno del raggio di convergenza come segue [8]:

$$g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} dy \frac{zy^{n-1}}{e^y - z} \quad (3.5)$$

dove $\Gamma(n)$ è la funzione Gamma di Eulero. Vale inoltre la relazione $g_n(1) = \zeta(n)$, dove $\zeta(n)$ è la funzione Zeta di Riemann. Utilizzando la 3.3 nella 3.1 è possibile risolvere analiticamente l'integrale sugli impulsi. Poiché nell'integrando compare soltanto il modulo dell'impulso, è conveniente utilizzare coordinate polari sferiche. Inoltre, identificando z con la fugacità ($z = e^{-\beta U(\vec{r})}$), svolgendo il cambio di variabile $y = \frac{p}{\sqrt{2m}}$ e tenendo presente la 3.5, è immediato trovare il seguente risultato:

$$n_T(\vec{r}) = \lambda^{-3} g_{3/2}(e^{-\beta U(\vec{r})}) \quad (3.6)$$

In questa espressione compare la *lunghezza d'onda termica* $\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2\beta}{m}}$.

È importante notare che la funzione $g_{3/2}(z)$ è ben definita solo in $0 \leq z \leq 1$, ovvero soltanto se $\forall \vec{r}$ vale:

$$\mu \leq V(\vec{r}) + 2gn(\vec{r}) \quad (3.7)$$

Questo risultato ha validità molto generale e perciò permette di analizzare anche situazioni più semplici.

3.1 Bosoni liberi non interagenti

In questo caso si ha $g = 0$ e $V(\vec{r}) \equiv 0$ e la 3.6 si riduce a:

$$n_T = \lambda^{-3} g_{3/2}(e^{\beta\mu}) \quad (3.8)$$

che è l'espressione per il gas di Bose ideale ampiamente discussa in [9]. Il vincolo 3.7 invece si traduce banalmente in $\mu \leq 0$. Ad alte temperature tutto il gas è fuori condensato, ovvero nella relazione precedente $n_T = n$, dove n è la densità totale, che supporremo fissata.

Tenendo presente che $g_{3/2}(z)$ è una funzione crescente, si vede che al diminuire della temperatura, ovvero al crescere del parametro λ , la funzione di Bose cresce finché non raggiunge il massimo valore possibile $\zeta(3/2)$ in corrispondenza di un valore critico $\lambda = \lambda_c$. La condizione di criticità è dunque: $\lambda_c^3 n = g_{3/2}(1) = \zeta(3/2)$ e viene realizzata se $\mu = 0$; si tratta di un'equazione che fornisce la temperatura critica, ovvero la minima temperatura a cui il gas è interamente non condensato:

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left(\frac{n}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3} \quad (3.9)$$

Per temperature inferiori a quella critica ($\lambda > \lambda_c$), $z = 1$ e alla densità si aggiunge un contributo dovuto alla condensazione: $n = n_0 + \lambda^{-3}\zeta(3/2)$. Dividendo ambo i membri di questa equazione per n e tenendo conto della condizione di criticità si ottiene facilmente un'espressione per la frazione di condensato:

$$\frac{n_0}{n} = \frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \quad (3.10)$$

3.2 Bosoni liberi interagenti

In questo caso si ha $V(\vec{r}) \equiv 0$, ma $g \neq 0$. L'assenza del potenziale esterno si può tradurre in una ipotesi di uniformità del sistema, ovvero $n(\vec{r}) \equiv n$, con n costante. L'equazione 3.6 diviene quindi:

$$n_T = \lambda^{-3} g_{3/2} \left(e^{\beta(\mu - 2gn)} \right) \quad (3.11)$$

Avendo escluso ogni dipendenza dalla posizione, è possibile ripetere l'analisi già svolta al punto precedente, ottenendo la medesima espressione per la temperatura critica e per la frazione di condensato, con la sola differenza che la condizione di criticità è raggiunta a $\mu = 2gn$.

L'analisi svolta porta a un risultato sorprendente: l'interazione tra le particelle sembrerebbe non avere effetti rilevanti sulla fisica di un sistema di bosoni liberi. Questa conclusione ha acceso in tempi recenti l'interesse della comunità scientifica, che ha proposto svariate ipotesi alternative derivanti da modelli diversi da quello illustrato in questo lavoro. Un interessante lavoro di riassunto e approfondimento delle principali idee in merito è quello di J. O. Andersen, datato 2004 e citato in [10].

3.3 Bosoni intrappolati non interagenti

Consideriamo ancora $g = 0$ e per semplicità scegliamo un potenziale armonico anisotropo. La 3.6 diventa:

$$n_T(\vec{r}) = \lambda^{-3} g_{3/2} (e^{\beta(\mu - V(\vec{r}))}) \quad (3.12)$$

mentre la 3.7, dovendo valere per ogni \vec{r} , si traduce banalmente in $\mu \leq 0$. Ai fini della trattazione, è utile lavorare con quantità che non dipendano dalle coordinate spaziali, ad esempio il numero totale di particelle nella nube termica. Questa quantità si ottiene integrando la precedente equazione su tutto lo spazio e risulta:

$$N_T = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r n_T(\vec{r}) = \left(\frac{k_B T}{\hbar \bar{\omega}} \right)^3 g_3 (e^{\beta \mu}) \quad (3.13)$$

L'integrazione è immediata ricordando la definizione della funzione di Bose e gli integrali notevoli di Gauss.

Ragionando come al punto precedente, si può pensare che ad alte temperature tutto il gas sia non condensato, ovvero $N_T = N$, dove N è il numero di particelle nel sistema, che supporremo fissato. In questo caso, l'equazione 3.13 fornisce il valore del potenziale chimico (che sarà strettamente negativo). Abbassando la temperatura, il primo fattore del membro di destra della 3.13 diminuisce, dunque la funzione di Bose cresce fino al suo valore massimo $\zeta(3)$ in corrispondenza ad una temperatura critica:

$$T_c^0 = \frac{\hbar \bar{\omega}}{k_B} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} \quad (3.14)$$

A temperature inferiori a quella critica, $\mu = 0$ e compare il numero di particelle condensate nel bilancio complessivo: $N = N_0 + (k_B T / \hbar \bar{\omega})^3 \zeta(3)$.

Dividendo ambo i membri per N e tenendo presente la condizione di criticità si ricava la frazione di condensato:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c^0} \right)^3 \quad (3.15)$$

Un'analisi più dettagliata mostra che a temperature inferiori a T_c^0 il potenziale chimico assume il valore $\mu = \frac{3}{2}\hbar\omega_m$ (dove ω_m è la media delle frequenze del potenziale). L'ipotesi di lavoro iniziale dunque non è completamente valida e i risultati vanno corretti. Se comunque si ha $\mu \ll k_B T$ (come accade in molti esperimenti), si può evitare l'integrazione della 3.13 e sfruttare quanto già ottenuto. Se si sviluppa $g_3(\xi)$ intorno a $\xi = 1$ nella 3.13 mantenendo solo i termini lineari ed estendendo lo sviluppo anche a $\xi > 1$ (sebbene non siano punti del dominio della funzione) e se si tiene conto che $\xi - 1 \approx \beta\mu$, si ha:

$$N_T = \left(\frac{k_B T}{\hbar\bar{\omega}} \right)^3 \left[\zeta(3) + \zeta(2) \frac{\mu}{k_B T} + \mathcal{O} \left(\frac{\mu}{k_B T} \right)^2 \right] \quad (3.16)$$

Da cui, introducendo la temperatura ridotta $t = T/T_c^0$, si ricava immediatamente la correzione alla frazione di condensato:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - t^3 - \frac{3\zeta(2)}{2\zeta(3)^{2/3}} \frac{\omega_m}{\bar{\omega}} N^{-1/3} t^2 \quad (3.17)$$

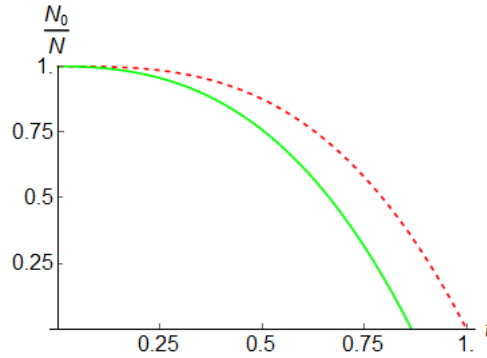


Figura 3.1: Il grafico mostra la frazione di condensato in funzione della temperatura ridotta t nel caso di potenziale armonico isotropo. La curva tratteggiata rappresenta l'equazione 3.15; la curva continua tiene conto della correzione di finite size con $N = 100$ (equazione 3.17).

Per correggere la temperatura critica è sufficiente porre $N_0/N = 0$ e linearizzare l'equazione che ne risulta ipotizzando che la variazione nella temperatura critica sia piccola, in modo che $t = 1 + \frac{\delta T_c^0}{T_c^0}$ con $\delta T_c^0 \ll T_c^0$. Cercando la correzione di ordine più basso in N si ricava:

$$\frac{\delta T_c^0}{T_c^0} = -\frac{\zeta(2)}{2\zeta(3)^{2/3}} \frac{\omega_m}{\bar{\omega}} N^{-1/3} \quad (3.18)$$

Osservando la figura 3.1 si ha una rappresentazione grafica della correzione alla temperatura critica: si vede infatti che la frazione di condensato si annulla a $t \approx 0.84$, coerentemente con quanto predetto dalla 3.18.

Osserviamo a margine che, a rigore, la scelta $N = 100$ nelle figure presentate non rispetta l'approssimazione a grandi N , ma è funzionale alla leggibilità dei grafici.

Presentiamo di seguito alcuni grafici che mostrano l'andamento della densità di condensato e della nube termica al variare della temperatura. Per semplicità grafica abbiamo considerato il caso particolare di potenziale armonico isotropo e abbiamo trascurato le correzioni di *finite size* sulla temperatura critica e sulla frazione di condensato. In queste condizioni, la densità di condensato assume la forma gaussiana discussa nel capitolo 1 (si veda 1.11) con $a_1 = a_2 = a_3 \equiv \bar{a}$ e normalizzata a N_0 :

$$n_0(\vec{r}) = \frac{N_0}{\pi^{3/2}\bar{a}^3} \exp\left[-\frac{r^2}{\bar{a}^2}\right] \quad (3.19)$$

L'equazione per la densità della nube termica, a temperature inferiori a quella critica, in modo che sia $\mu = 0$, risulta invece:

$$n_T(\vec{r}) = \lambda^{-3} g_{3/2} \left(e^{-\frac{1}{2}\beta m \bar{\omega}^2 r^2} \right) \quad (3.20)$$

Ai fini della presentazione grafica, è utile riscrivere le precedenti equazioni in forma adimensionale, introducendo le grandezze $\tilde{r} = r/\bar{a}$, $t = T/T_c^0$ e $\tilde{n} = \bar{a}^3 n/N$ (qui n rappresenta una generica densità). Tenendo presente le definizioni di \bar{a} e di T_c^0 e l'equazione 3.15, è immediato ottenere le seguenti espressioni adimensionali:

$$\tilde{n}_0(\tilde{r}) = \frac{1-t^3}{\pi^{3/2}} e^{-\tilde{r}^2} \quad (3.21)$$

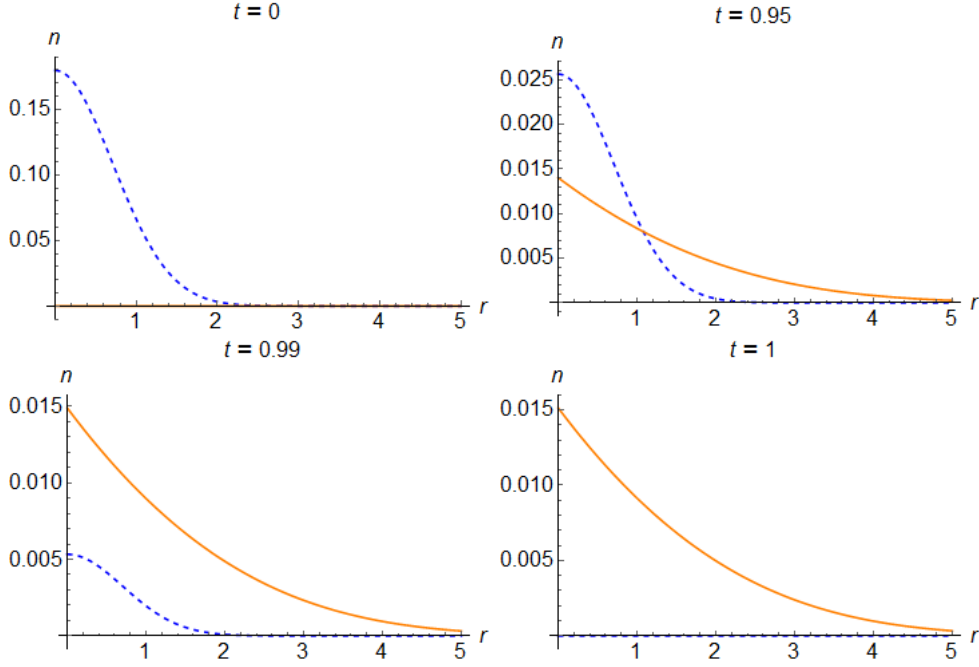


Figura 3.2: La figura mostra le densità della parte condensata (tratteggiata) e della parte termica (continua) a diversi valori della temperatura ridotta $t = T/T_c^0$. Sulle ascisse compare la coordinata r misurata in unità di \bar{a} , mentre in ordinata compare la densità n misurata in unità di N/\bar{a}^3 . Osservando la figura si nota che a $t = 0$ tutto è condensato, mentre a $t = 1$ il gas è tutto fuori condensato; le altre due sono configurazioni intermedie. Per esigenze grafiche la simulazione è stata eseguita con $N = 100$.

$$\tilde{n}_T(\tilde{r}) = \sqrt{\frac{1}{\zeta(3)N} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^3} g_{3/2} \left[\exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta(3)}{N}\right)^{1/3} \frac{1}{t} \tilde{r}^2\right)\right] \quad (3.22)$$

Fissando il numero di particelle che compongono il sistema e la temperatura in unità di T_c^0 è dunque possibile ottenere grafici analoghi a quelli riportati in figura 3.2.

3.4 Bosoni intrappolati interagenti

Analogamente al caso di particelle non interagenti, anche in questo caso risulta più comodo calcolare il numero di particelle non condensate: occorre quindi integrare l'equazione 3.6. L'integrazione analitica tuttavia è impossibile, a meno di formulare qualche ipotesi. Coerentemente con l'approssimazione di Hartree-Fock utilizzata per ricavare la 3.6, è lecito supporre che il gas sia debolmente interagente e allora $g \rightarrow 0$: questo porta a supporre anche che la temperatura critica sia vicina a T_c^0 . In prossimità della temperatura critica, è inoltre possibile ipotizzare che il potenziale chimico sia quasi nullo, analogamente a quanto visto prima. Sotto queste ipotesi è possibile espandere $n_T(\vec{r})$ attorno allo stato $\mathcal{S} = \{\mu = 0, g = 0, T = T_c^0\}$:

$$n_T(\vec{r}) \approx n_T(\vec{r})|_{\mathcal{S}} + \left. \frac{\partial n_T}{\partial \mu} \right|_{\mathcal{S}} \mu + \left. \frac{\partial n_T}{\partial g} \right|_{\mathcal{S}} g + \left. \frac{\partial n_T}{\partial T} \right|_{\mathcal{S}} (T - T_c^0) \quad (3.23)$$

Il numero di particelle che compongono la parte termica può essere calcolato integrando questa espressione rispetto alle coordinate spaziali. Tenendo presente la 3.14, che definisce la temperatura critica nel caso di particelle non interagenti e utilizzando un potenziale armonico anisotropo, si arriva a:

$$N_T = N + \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} \frac{N}{k_B T_c^0} \mu - \frac{2\mathcal{K}}{\zeta(3)} \frac{N}{\lambda_0^3 k_B T_c^0} g + 3 \frac{N}{T_c^0} (T - T_c^0) \quad (3.24)$$

In questa relazione, λ_0 rappresenta la lunghezza d'onda termica calcolata a $T = T_c^0$, mentre \mathcal{K} è una costante numerica (si veda [11]):

$$\mathcal{K} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{1/2} (k(k+l))^{3/2}} \approx 1.208 \quad (3.25)$$

Un'accurata analisi delle equazioni di stato del sistema (svolta in [5]) mostra che il potenziale chimico assume il valore $\mu = \frac{3}{2} \hbar \omega_m + 2gn(0)$, che estende l'espressione introdotta nel paragrafo precedente. Ricordando inoltre che g può essere scritto in termini della lunghezza di scattering come $g = \frac{4\pi \hbar^2 a}{m}$ e che la lunghezza tipica dell'oscillatore armonico precedentemente introdotta è $\bar{a} = \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$, si può ricavare lo shift della temperatura critica dovuto agli effetti di interazione e di *finite size* nel limite termodinamico:

$$\frac{T_c - T_c^0}{T_c^0} = -c_1 \frac{\omega_m}{\bar{\omega}} N^{-1/3} - c_2 \frac{a}{\bar{a}} N^{1/6} \quad (3.26)$$

dove c_1 e c_2 sono costanti numeriche date da:

$$c_1 = \frac{\zeta(2)}{2\zeta(3)^{2/3}} \approx 0.728 \quad c_2 = \frac{4(\zeta(2)\zeta(3/2) - \mathcal{K})}{3\sqrt{2\pi}\zeta(3)^{7/6}} \approx 1.325 \quad (3.27)$$

Analizzando la 3.26 si vede che, se $a > 0$ (interazione repulsiva) la temperatura critica si abbassa e viceversa: questa osservazione risponde all'idea intuitiva che, se i bosoni si respingono, tenderanno a espandersi maggiormente e dunque per condensarli è richiesta una temperatura più bassa rispetto al caso di bosoni non interagenti. Si nota inoltre che se $a = 0$ (assenza di interazione) si ritrova, come atteso, il risultato 3.14.

Riassumiamo quanto ottenuto nel seguente grafico:

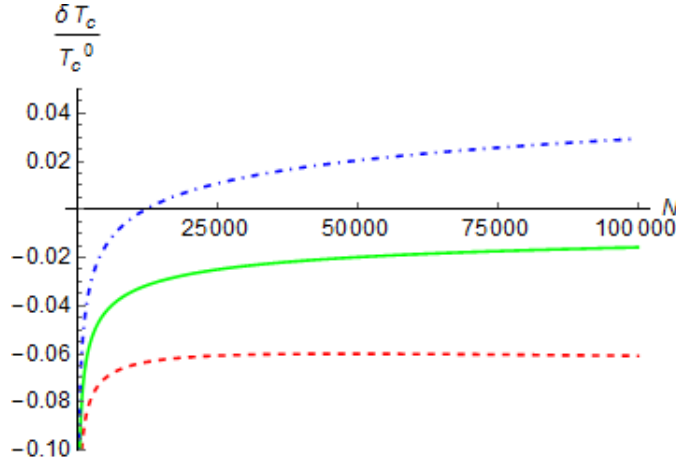


Figura 3.3: Il grafico mostra l'andamento di $\delta T_c/T_c^0$ in funzione del numero di particelle N in tre casi: $a/\bar{a} = +0.005$ (curva tratteggiata), $a = 0$ (curva continua), $a/\bar{a} = -0.005$ (curva con tratto e punto). Le scelte sono arbitrarie, ma coerenti con l'ipotesi di gas diluito e debolmente interagente, ovvero $a/\bar{a} \ll N^{-1/3}$.

Conclusioni

I capitoli 1 e 2 presentano una derivazione delle principali equazioni che regolano il comportamento di sistemi bosonici interagenti nel contesto della meccanica quantistica e della termodinamica. L'aspetto interessante dell'analisi svolta è che la deduzione di tali equazioni prescinde dall'introduzione del formalismo della *seconda quantizzazione*, frequentemente invocato in letteratura. Si può pertanto concludere che, a patto di accettare qualche ragionevole ipotesi di semplificazione, i fenomeni trattati sono ben descrivibili anche all'interno della meccanica quantistica tradizionale, fatta eccezione per due importanti aspetti. Il primo è l'impossibilità di dedurre l'equazione di Gross-Pitaevskii a temperatura non nulla, il secondo è l'impossibilità di descrivere il fenomeno della *quantum depletion*, ovvero della presenza di particelle non condensate anche a temperatura nulla. Mentre il secondo punto è poco rilevante ai fini della trattazione, dal momento che per gas diluiti e debolmente interagenti la quantum depletion risulta trascurabile (come chiarito nel capitolo 2), il primo punto costituisce un limite molto significativo della prima quantizzazione, in quanto l'estensione dell'equazione di Gross-Pitaevskii a temperatura non nulla è fondamentale per lo studio termodinamico dei sistemi considerati.

Il capitolo 3 si configura come un riassunto di importanti lavori del settore, che hanno trovato svariate conferme nei numerosi esperimenti condotti nell'ultimo ventennio. Nello specifico, è stato messo in risalto il ruolo dell'interazione tra le particelle nei gas di Bose diluiti e confinati, mostrando come la temperatura critica aumenti nel caso di interazione attrattiva e diminuisca nel caso di interazione repulsiva rispetto al valore assunto in assenza di interazione. Nel capitolo è stato inoltre dedotto il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein per gas ideali a partire da risultati più generali ed è stato messo in evidenza un problema ampiamente dibattuto in tempi recenti: quello del ruolo dell'interazione nella dinamica dei gas di bosoni ideali.

Bibliografia

- [1] Awe C., 2015, *Magneto Optical Trapping of Rb 87*, Undergraduate Honors Theses, paper 857, University of Colorado, Boulder.
- [2] Roati G., Zaccanti M., D'Errico C., Catani J., Modugno M., Simoni A., Inguscio M., Modugno G., 2007, *^{39}K Bose condensate with tunable interactions*, Phys. Rev. Lett. **99**, 010403.
- [3] Pethick C.J., Smith H., 2008, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, New York.
- [4] Svistunov B., Babaev E., Prokof'ev N., 2015, *Superfluid states of matter*, CRC Press (Taylor & Francis Group), Boca Raton.
- [5] Giorgini S., Pitaevskii L.P., Stringari S., 1997, *Thermodynamics of a Trapped Bose-Condensed Gas*, J. of Low Temp. Phys. **109**, 309-355.
- [6] Giorgini S., Pitaevskii L.P., Stringari S., 1999, *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*, Rev. Mod. Phys. **71**, 463-512.
- [7] Parola A., Pozzi B., Reatto L., Salasnich L., 2000, *Thermodynamics of Bose-condensed atomic Hydrogen*, Eur. Phys. J. D **11**, 367-370.
- [8] Salasnich L., 2000, *Ideal quantum gases in D-dimensional space and power-law potentials*, J. Math. Phys. **41**, 8016-8024.
- [9] Huang K., 1997, *Meccanica statistica*, Zanichelli, Bologna.
- [10] Andersen J. O., 2004, *Theory of the weakly interacting Bose gas*, Rev. Mod. Phys. **76**, 599.
- [11] Campbell R.L.D., 2011, *Thermodynamic properties of a Bose gas with tuneable interactions*, Doctoral dissertation, University of Cambridge.