Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria
dell'informazione

Tesi di Laurea

Introduzione ai sistemi dissipativi

Candidato: Marco Gazzola

Relatore: Dott. Francesco Ticozzi

A.A. 2011/2012

Abstract

Nel seguente elaborato sono trattati i sistemi dissipativi e la loro importanza nello stabilizzare sistemi instabili sia lineari che non lineari. Per prima cosa vengono enunciate le definizioni di sistema dissipativo e passivo e delle funzioni di alimentazione ed energia a loro associate. Successivamente vengono richiamati i concetti fondamentali sulla stabilità di Lyapunov e applicati alla passività dei sistemi. Sono analizzate le interconnessioni base (serie, parallelo, retroazione) tra sistemi passivi, la loro relazione con la stabilità e la capacità di rendere passivo un sistema non passivo tramite un'interconnessione. Sono analizzati poi in dettaglio i sistemi dissipativi lineari e alcuni metodi per verificare la dissipatività nel dominio del tempo e della frequenza.

Indice

1 Introduzione

La moderna teoria del controllo dei sistemi in retroazione è stata formata circa 50-60 anni fa da due teorie di analisi distinte. Da una parte c'era l'analisi di Nyquist-Bode dei sistemi in frequenza sviluppata durante la seconda guerra mondiale per il controllo a distanza di sistemi meccanici. Dall'altra parte c'era la teoria sviluppata da Poincaré e Lyapunov, successivamente rinominata analisi in forma di stato.
Mentre l'approccio in forma di stato prevedeva lo studio sia di sistemi lineari che non lineari, quello nel dominio della frequenza di Nyquist-Bode permetteva solo lo studio di sistemi lineari tempo-invarianti.
Il problema che si ponevano con questi due approcci era quello di raggiungere la stabilità di sistemi retroazionati con componenti non lineari; un problema che diede importanti sviluppi in questa direzione fu il problema di Lurie che cercava il modo di ottenere la stabilità asintotica di un sistema retroazionato in cui il blocco del sistema principale era lineare mentre il blocco in retroazione non lo era.
Per parecchi anni lo studio dei sistemi secondo le due teorie e lo studio per raggiungere l'asintotica stabilità coesistero finché tra la fine degli anni '50 e l'inizio degli anni '60 fu preso in considerazione il concetto di passività (e dissipatività più in generale) come fondamentale per i sistemi in retroazione e si giunse ad importanti collegamenti tra dissipatività e stabilità sia per sistemi lineari che non lineari.

1.1 Introduzione ai sistemi dinamici

I sistemi dinamici in generale sono nati dalla necessità di descrivere l'evoluzione di fenomeni fisici, andamenti economici o altri eventi naturali o artificiali attraverso un modello matematico il quale ne riassuma tutte le caratteristiche fondamentali. Tali sistemi, attraverso variabili descrittive, chiamate per semplicità ingressi e uscite, creano una struttura in grado di analizzare l'evoluzione del fenomeno modellizzato attraverso la sola analisi del sistema stesso.
Un sistema può essere rappresentato e descritto in modi diversi (come prima anticipato), e nel corso della presente trattazione verrà utilizzata la rappresentazione in forma di stato:

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad ;$$

in cui:
$x(t) \in \mathcal{X}$ è lo stato del sistema,
$u(t) \in \mathcal{U}$ è l'ingresso del sistema,
$y(t) \in \mathcal{Y}$ è l'uscita del sistema.

Suporremo in seguito che tutti i sistemi che prenderemo in considerazione siano causali, ovvero che in seguito ad un ingresso a cui viene sottoposto il sistema a partire dall'istante t, non ci siano effetti sull'uscita prima dell'istante t. Considereremo inoltre solo i sistemi tempo-invarianti, ovvero sistemi per cui una traslazione temporale degli ingressi causa un'analoga traslazione temporale delle uscite.

Fatte queste considerazioni possiamo passare alla discussione dei sistemi dissipativi e delle loro applicazioni per raggiungere la stabilità.

2 Sistemi dissipativi

Prima di dare la definizione formale di sistema dissipativo, introduciamo due funzioni utili al loro studio.
Assumiamo innanzitutto che la funzione $f : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ sia sufficientemente regolare per garantire un'unica soluzione al sistema Σ in modo che ci sia un solo $x(t)$ che soddisfa:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \forall t \geq t_0.$$

In questo modo il valore che assumerà lo stato all'istante t dipenderà esclusivamente da t, t_0, x_0 e u. Possiamo perciò definire la funzione ϕ per indicare in modo più conciso il valore assunto dallo stato all'istante t:

$$x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u).$$

La prima funzione di fondamentale importanza nel caso dei sistemi dissipativi che andremo ad introdurre è la **funzione di alimentazione**: data una funzione $\omega : \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ si dice che ω è funzione di alimentazione di Σ se per ogni intervallo $[0, T]$, per ogni ingresso $u(t)$ definito in $[0, T]$ e per ogni stato iniziale $x_0 \in \mathcal{X}$ vale che:

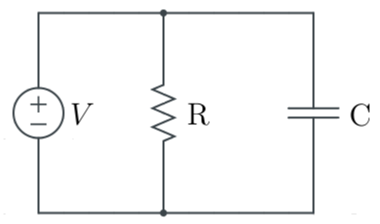
$$\int_0^T |\omega(u(t), y(t))| \, dt < \infty,$$

dove $y(t)$ è l'uscita ottenuta partendo dalla condizione iniziale $x(t) = x_0$ applicando al sistema l'ingresso $u(t)$.
Si noti che nella definizione di funzione di alimentazione viene considerato un generico intervallo con estremo iniziale 0. Questa assunzione non è restrittiva e viene fatta sulla base della tempo-invarianza del sistema per cui non è importante l'istante iniziale e quello finale ma solo la differenza tra i due istanti.
È inoltre evidente che ogni sistema può ammettere più funzioni di alimentazione.

Possiamo ora dare la definizione di **sistema dissipativo**: dato un sistema Σ e una funzione di alimentazione ω si dice che Σ è dissipativo se esiste una funzione $S : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{0+}$ per cui vale:

$$S(x(0)) + \int_0^T \omega(u(t), y(t)) \, dt \geq S(x(T)); \tag{2.1}$$

e nel caso nella relazione valga l'uguaglianza il sistema viene detto senza perdite. Inoltre la funzione S a valori sempre positivi prende il nome di **funzione energia immagazzinata** per il sistema (Σ, ω).
Per capire in maniera intuitiva la definizione possiamo immaginare la quantità $\omega(u(t), y(t))$ come un indicatore di come l'alimentazione fluisce nel sistema mentre applichiamo l'ingresso $u(t)$ e viene generata l'uscita $y(t)$. Allo stesso tempo la quantità $\int_0^T \omega(u(t), y(t))\, dt$ indica se nell'intervallo $[0, T]$ il lavoro è stato compiuto sul sistema (positiva e quindi aumento di energia nel sistema) oppure dal sistema (negativa e quindi diminuzione di energia nel sistema). Nei sistemi dissipativi deve essere sempre verificato che la variazione di energia interna al sistema $S(x(T)) - S(x(0))$ non deve mai superare l'alimentazione fornita al sistema: una parte viene immagazzinata mentre la restante dissipata.
Esempio: Se consideriamo il circuito elettrico RC in figura in cui la tensione



elettrica ai capi di C è l'ingresso mentre la corrente che percorre C è l'uscita, possiamo identificare come funzione S l'energia immagazzinata in C, come funzione ω la potenza erogata dall'alimetatore a cui è sottoposto C, mentre la quantità $\int_0^T \omega(u(t), y(t))\, dt$ indica l'energia che può essere fornita al circuito da un alimentatore esterno. Perché il circuito sia considerato un sistema dissipativo deve essere vero che l'incremento di energia portato dall'alimentatore al circuito sia inferiore all'effettiva quantità di energia fornita dall'alimentatore. Va notato che in questo esempio il concetto di dissipatività è strettamente legato ai concetti fisici di potenza assorbita e potenza dissipata dal circuito.

Anche la funzione energia immagazzinata non è univocamente determinata: semplicemente considerando una funzione S come $\tilde{S}(\cdot) = S(\cdot) + k$ (alla condizione che k mantenga ancora la funzione a valori positivi) è una funzione valida ed è semplice da vedere dalla disuguaglianza

$$\int_0^T \omega(u(t), y(t))\, dt \geq S(x(T)) + k - S(x(0)) - k.$$

Essendo numerose le funzioni energia e di difficile identificazione, si introduce una funzione particolare tra tutte, detta **funzione energia disponibile** $S_d : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^e$ definita per ogni $x_0 \in \mathcal{X}$ come:

$$S_d(x_0) := \sup_{u, T \geq 0} \left(- \int_0^T \omega(u(t), y(t))\, dt \right);$$

che può essere vista come la maggior quantità di energia che può essere estratta da un sistema allo stato x_0 con un opportuno ingresso u.
Questa particolare funzione ci dà il primo metodo per verificare se un sistema è dissipativo:

Teorema: Un sistema (Σ, ω) è dissipativo se e solo se la funzione $S_d(x)$ è finita per ogni $x \in \mathcal{X}$ ed esiste $x^* \in \mathcal{X}$ tale che $S_d(x^*) = 0$. Inoltre la funzione $S_d(x)$ rappresenta una funzione energia immagazzinata per cui vale:

$$0 \leq S_d(x) \leq S(x) \tag{2.2}$$

La dimostrazione del teorema precedente segue dalle seguenti osservazioni: supponiamo che (Σ, ω) sia dissipativo e che $S(x)$ sia una funzione energia immagazzinata, allora dalla (2.1) possiamo scrivere per ogni stato iniziale x_0 che:

$$S(x_0) \geq - \int_0^T \omega(u(t), y(t))\, dt$$

ed essendo valida per ogni $T \geq 0$ e per ogni ingresso u allora necessariamente:

$$S_d(x_0) = \sup_{u, T \geq 0} \left(- \int_0^T \omega(u(t), y(t))\, dt \right) \leq S(x_0)$$

e che quindi $S_d(x_0)$ è finito. Inoltre dato che per ipotesi esiste $x^* \in \mathcal{X}$ per cui $S(x^*) = 0$, la relazione precedente implica che anche $S_d(x^*) = 0$.

Diamo due definizioni valide per i sistemi dinamici:

- diciamo che un sistema dinamico Σ è **raggiungibile** da un suo stato x^* se per ogni $x \in \mathcal{X}$ esiste un ingresso u e $T \geq 0$ tale che:

  $$x = \phi(T, 0, x^*, u)$$

  ovvero riusciamo sempre a trovare un ingresso che ci permetta di raggiungere qualsiasi stato $x \in \mathcal{X}$ partendo da x^*.

- Al contrario un sistema Σ è **controllabile** a x^* se vale che:

$$x^* = \phi(T, 0, x, u)$$

ovvero riusciamo sempre a trovare un ingresso u e un $T \geq 0$ per cui arriviamo allo stato $x^* \in \mathcal{X}$ partendo da un generico stato di Σ.

Nel caso di sistemi dinamici raggiungibili la verifica di dissipatività del sistema diventa più semplice, infatti se un sistema dinamico Σ è raggiungibile da uno stato x^* ad energia disponibile nulla, ovvero tale che $S_d(x^*) = 0$, allora tale premessa è sufficiente per affermanre che il sistema (Σ, ω) è dissipativo.

Oltre a questo per i sistemi raggiungibili si può definire un'altra funzione, la **funzione energia richiesta** (a partire da x^*) $S_{r,x^*} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^e$, nel seguente modo:

$$S_{r,x^*}(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \text{ non è raggiungibile da } x^* \\ \inf\limits_{T \geq 0} \displaystyle\int_0^T \omega(u(t), y(t))\, dt & \text{se } x \text{ è raggiungibile da } x^* \end{cases}$$

Intuitivamente questa funzione energia può essere vista come la minima energia necessaria per portare il sistema dallo stato x^* allo stato x. Per convenzione viene assegnato il valore $+\infty$ se il punto x non è raggiungibile.
Inoltre anche la funzione energia richiesta può essere una funzione energia immagazzinata valida per Σ, sotto le ipotesi restrittive che Σ sia raggiungibile da x e che x^* sia uno stato a energia disponibile nulla.
Nel caso il sistema sia dissipativo, possiamo porre in evidenza la relazione tra le varie funzioni energia definite nel seguente modo:

$$0 \leq S_d(x) \leq S(x) \leq S_{r,x^*} \qquad \forall x \in \mathcal{X}, S(x^*) = 0 \tag{2.3}$$

Ai fini dello studio delle loro proprietà dinamiche, può essere utile considerare anche le seguenti classi di sistemi dissipativi:

- i sistemi **ciclo-dissipativi** ovvero sistemi tali per cui per ogni stato $x_0 \in \mathcal{X}$ e ogni ingresso che porta il sistema da uno stato iniziale $x(0) = x_0$ a uno stato finale $x(T) = x_0$ vale:

$$\int_0^T \omega(u(t), y(t)) \geq 0.$$

- i sistemi **dissipativi generalizzati** per cui vale la (2.1) con la particolarità che S può essere negativa.

In un sistema ciclo-dissipativo un ciclo che porta dopo un periodo T nello stesso stato iniziale non comporta mai un rilascio netto di energia. Per i sistemi dissipativi generalizzati, invece, introducendo la possibilità che S sia negativa non possiamo escludere a priori che per un certo stato x si possa estrarre energia infinita dal sistema.
Inoltre risulta che un sistema dissipativo è anche dissipativo generalizzato e che un sistema dissipativo generalizzato è anche ciclo-dissipativo. Quest'ultima affermazione risulta chiara se pensiamo alla definizione di dissipatività in cui lo stato iniziale coincide con lo stato finale:

$$\int_0^T \omega(u(t), y(t))\, dt \geq S(x(T)) - S(x(0)) = 0 \qquad \text{se } x(0) = x(T).$$

Si può riassumere questa classificazione come:

$$\text{dissipatività} \Rightarrow \text{dissipatività generalizzata} \Rightarrow \text{ciclo-dissipatività}$$

in cui la $\Rightarrow$ sta per 'è anche'.
Per i sistemi dissipativi generalizzati si definisce una funzione energia disponibile $S_{d,x^*} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^e$ con stato terminale x^* nel seguente modo:

$$S_{d,x^*} = \begin{cases} -\infty, & \text{se } x^* \text{ non è raggiungibile da } x \\ \sup\limits_{u,T \geq 0} \{-\displaystyle\int_0^T \omega(u(t), y(t))\, dt\}, & \text{se } x^* \text{ è raggiungibile da } x \end{cases}$$

Come accennato nella definizione di sistema dissipativo, nel caso in cui nelle relazioni che definiscono i sistemi dissipativi valga l'uguaglianza, tali sistemi vengono definiti **senza perdite** e per tali sistemi vale una particolare proprietà:

Proprietà: se (Σ, ω) è un sistema dissipativo senza perdite e supponiamo che Σ sia raggiungibile, allora la funzione energia immagazzinata per (Σ, ω) è unicamente determinata.
Risulta semplice da vedere dalla seguente catena di uguaglianze:

$$S_d(x) = \sup_{u,T \geq 0} \left(-\int_0^T \omega(u(t), y(t))\, dt \right) = S(x) - \inf_{x(T) \in \mathcal{X}} (S(x(T))) = S(x)$$

e quindi $S_d(x)$ e $S(x)$ coincidono a meno di una costante additiva.
Va però considerato il fatto che non vale il contrario: non è vero infatti che se è univocamente determinata la funzione energia immagazzinata il sistema sia senza perdite.

3 Applicazioni alla stabilità dei sistemi dissipativi

Richiami di teoria della stabilità

Nelle proprietà seguenti si farà riferimento alla stabilità secondo Lyapunov la quale è una proprietà non dell'intero sistema, ma di una singola soluzione del sistema. Questa tipo di stabilità prevede infatti che un punto $x(t, x_0)$ (soluzione del sistema) sia:

- stabile se, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta(\epsilon) > 0$ tale che

$$||\tilde{x}_0 - x_0|| < \delta \Rightarrow ||x(t, \tilde{x}_0) - x(t, x_0)|| < \epsilon, \qquad \forall t > 0;$$

  in pratica se lo stato iniziale x_0 viene portato tramite un evoluzione allo stato $\tilde{x}_0$ allora la soluzione con il nuovo stato $x(t, \tilde{x}_0)$ deve mantenersi vicina alla soluzione iniziale $x(t, x_0)$

- asintoticamente stabile se, è stabile e in più esiste $r(x_0) > 0$ per cui

$$||\tilde{x}_0 - x_0|| < r(x_0) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} ||x(t, \tilde{x}_0) - x(t, x_0)|| = 0;$$

  ovvero esiste un raggio in cui tutte le soluzioni $\tilde{x}_0$ che non si allontano per più di questo raggio da x_0 convergono a x_0 stesso per $t \to \infty$

Inoltre una soluzione stabile x_e del sistema, chiamata *punto di equilibrio*, può essere ulteriormente definita come:

- globalmente stabile se è stabile e tutte le soluzioni del sistema sono limitate;

- globalmente asintoticamente stabile se è asintoticamente stabile con un raggio di stabilità che equivale a $\mathbb{R}^n$

È inoltre facile vedere che, a meno di un cambio di coordinate nello spazio di stato, ogni punto in considerazione può essere traslato nell'origine senza cambiare la stabilità del punto in considerazione.
Ricordiamo inoltre il metodo di Lyapunov che permette di verificare la stabilità di un punto di equilibrio confrontando la funzione f del sistema con una funzione V illimitata definita positiva:

Metodo di Lyapunov: Sia $x = 0$ un punto di equilibrio per il sistema e sia f localmente continua. Sia inoltre $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ derivabile, illimitata e definita positiva tale che:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x) \leq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

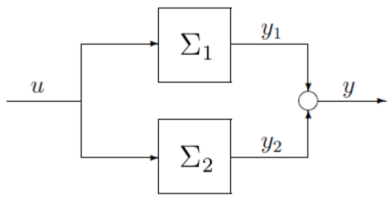
allora $x = 0$ è globalmente stabile e tutte le soluzioni del sistema convergono all'insieme $\left\{ x | \dot{V}(x) = 0 \right\}$. Se $\dot{V}(x)$ è definita negativa allora $x = 0$ è globalmente asintoticamente stabile.

Stabilità delle interconnessioni di sistemi dissipativi

La più importante motivazione che ha portato all'approccio dissipativo per lo studio dei sistemi dinamici è la stabilità del sistema che si può ottenere interconnettendo più sistemi dissipativi tra di loro. Prima di studiare le proprietà delle interconnessioni di sistemi dissipativi, è utile introdurre il concetto, strettamente legato alla dissipatività, di *passività di un sistema*:

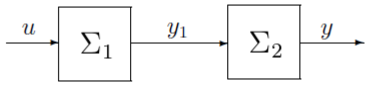
un sistema è definito **passivo** se è dissipativo con funzione di alimentazione $\omega(u, y) = u^T y$

Può sembrare limitante il fatto che la passività sia definita solo nel caso in cui ingresso e uscita abbiano la stessa dimensione. Questo però non crea problemi essendo la passività utilizzata in interconnessioni di più sistemi in cui ingressi e uscite devono necessariamente avere la stessa dimensione.
Fatta questa premessa possiamo discutere le interconnessioni tra più sistemi
Le tipologie base di interconnessione tra due sistemi sono la connessione in parallelo, la connessione in serie (o cascata) e la connessione in retroazione.
Connettendo due sistemi fra loro avremo una nuova rappresentazione del sistema di cui dovremo trovare una rappresentazione nella forma di stato.
Per quanto riguarda la connessione in parallelo non ci sono particolari difficoltà nello studio del sistema risultante, che sara' semplicemente:



$$\Sigma_{par} = \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, u) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_2, u) \\ y = g_1(x_1, u) + g_2(x_2, u). \end{cases}$$

Molto semplice è anche la connesione in serie di due sistemi, e viene rappresentata come:

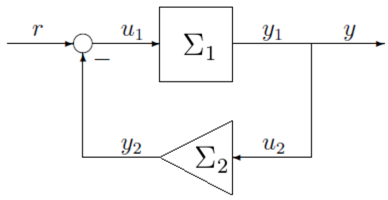


$$\Sigma_{ser} = \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, u) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_2, g_1(x_1, u)) \\ y = g_2(x_2, g_1(x_1, u)). \end{cases} ,$$

La questione è un pó più delicata per quanto riguarda lo schema in retroazione, per il quale non è sempre garantita la schematizzazione con un sistema che abbia una soluzione e quindi un uscita ben definita. Collegando in retroazione due sistemi si introducono infatti nuovi vincoli all'evoluzione del sistema che possono essere in contrasto con quelli fissati dai singoli sistemi. Tuttavia per evitare questo basta porre che $\frac{d}{du_1}g_1 = 0$ (oppure equivalentemente $\frac{d}{du_2}g_2 = 0$) il che garantisce una soluzione al sistema in retroazione che garantisce l'evoluzione dinamica dello schema.
Esempio: consideriamo i due sistemi:

$$\Sigma_1 = \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + d_1 u_1 \\ y_1 = x_1 + d_1 u_1 \end{cases} \quad \Sigma_2 = \begin{cases} y_2 = d_2 u_2 \end{cases}$$

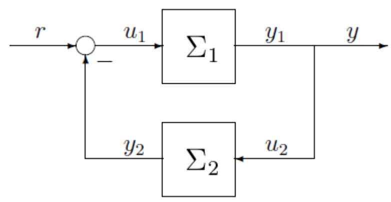
in cui $d_1 = -1$ e $d_2 = 1$, collegati come in figura:



Considerando il collegamento in retroazione possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + y_1 - r \\ y_1 = x_1 + y_1 - r \end{cases}$$

che porta alla condizione $\dot{x}_1 = \dot{r}$ che non lascia spazio all'evoluzione dinamica di Σ_1. Se invece imponiamo che $\frac{d}{du_1}g_1 = 0$, che significa $d_1 = 0$, i vincoli introdotti dalla retroazione sono ben posti in accordo con Σ_1.
Possiamo allora rappresentare la retroazione di due sistemi come segue:



$$\Sigma_{ret} = \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, -g_2(x_2, g_1(x_1)) + r) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_2, g(x_1)) \\ y = g_1(x_1) \end{cases}$$

Introduciamo ora una importante proprietà dei sistemi dissipativi passivi:

Dati due sistemi passivi Σ_1 e Σ_2, i due sistemi ottenuti collegando Σ_1 e Σ_2 in parallelo oppure in retroazione sono ancora passivi.

È semplice da dimostrare infatti che se definiamo $S(x) = S_1(x) + S_2(x)$, per la connessione in parallelo per il quale vale $y = y_1 + y_2$ abbiamo che

$$S(x(T)) - S(x(0)) \leq \int_0^T (u^T y_1 + u^T y_2)\, dt = \int_0^T u^T y\, dt;$$

mentre per la connessione in retroazione

$$S(x(T) - S(x(0)) \leq \int_0^T (u_1^T y_1 + u_2^T y_2)\, dt,$$

in cui se sostituiamo $u_2 = y_1$ e $u_1 = r - y_2$ otteniamo

$$S(x(T) - S(x(0)) \leq \int_0^T r^T y_1\, dt.$$

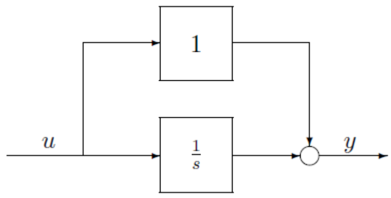
Una caratterizzazione dei sistemi che viene fatta sulla base del loro comportamento quando connessi ad un sistema è quella riguardante l'eccesso o la carenza di passività. È possibile infatti che connettendo due sistemi (di cui uno dei due non è passivo) il sistema della connessione risulti comunque passivo perché è presente un eccesso di passività nell'altro sistema che va a compensare l'altro. Vengono così definite delle proprietà per formalizzare quanto appena esposto:

- Un sistema è OFP (output feedback passivity) se è dissipativo con funzione di alimentazione $\omega(u, y) = u^T y - \rho y^T y$ per un qualche $\rho \in \mathbb{R}$

- Un sistema è IFP (input feedforward passivity) se è dissipativo con funzione di alimentazione $\omega(u, y) = u^T y - \nu u^T u$ per un qualche $\nu \in \mathbb{R}$

per cui un valore positivo di ρ o di ν indica un eccesso di stabilità mentre un valore negativo ne indica una carenza.

Esempio (Sistema IFP) : Consideriamo un integratore collegato in parallelo ad un dispositivo con guadagno costante unitario come in figura con funzione energia immagazzinata $S(x) = \frac{1}{2}x^2$, dove x rappresenta lo stato dell'integratore.
Il sistema può essere rappresentato come:



$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ y = x + u \end{cases}$$

e quindi abbiamo che $\dot{S} = xu = uy - u^2$ che è la condizione per cui un sistema sia IFP con $\nu = 1$

Dopo tutto questo ci si può chiedere a cosa servono i sistemi dissipativi e passivi. La loro utilità risiede nell'essere utilizzati per stabilizzare altri sistemi attraverso il collegamento in retroazione e quindi il loro maggiore impiego è l'implementazione di controllori per sistemi instabili.
Questo perché se un sistema è passivo implica necessariamente che il sistema sia stabile. Questa osservazione è una diretta conseguenza del metodo di Lyapunov: se consideriamo infatti un sistema Σ passivo con ingresso $u = 0$, la sua funzione energia S è definita positiva e soddisfa

$$\dot{S} \leq \omega(u, y) = u^T y = 0$$

e quindi è una funzione di Lyapunov per il sistema.

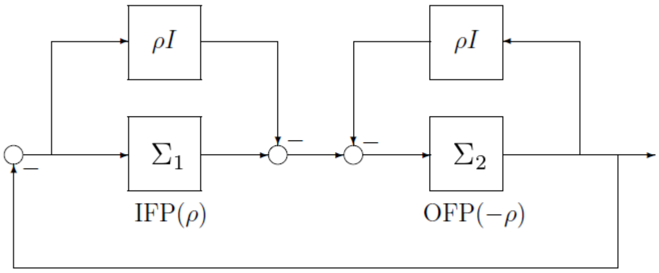
Per cui, se attraverso un collegamento in retroazione riusciamo a rendere passivo tutto il sistema complessivo sfruttando le proprietà dei sistemi IFP e OFP, avremo raggiunto la stabilità.

Al fine di studiare il ruolo dei sistemi dissipativi nella stabilizzazione, è utile introdurre la proprietà di rivelabilità dello stato zero:
un sistema Σ a cui applichiamo l'ingresso nullo si dice ZSD (Zero-State Detectable) se $x = 0$ è asintoticamente stabile condizionato a Z, dove $Z = (x \in \mathbb{R}^n | y = g(x, 0) = 0)$.
In particolare, essa permette di avere dei metodi semplici per stabilizzare sistemi instabili, ad esempio:

- quando in un sistema l'uscita non dipende dall'ingresso del sistema ma solo dallo stato $y = g(x)$, allora la semplice retroazione $y = -u$ permette di raggiungere l'asintotica stabilità di $x = 0$ se per il sistema vale la proprietà ZSD
- se due sistemi Σ_1 e Σ_2 sono dissipativi allora il punto d'equilibrio della loro connessione in retroazione $(x_1, x_2) = (0, 0)$ è
  - globalmente stabile se Σ_1 e Σ_2 sono passivi
  - globalmente asintoticamente stabile se Σ_1 e Σ_2 sono OFP con $\rho_1, \rho_2 > 0$
  - globalmente asintoticamente stabile se Σ_1 e Σ_2 sono IFP con $\nu_1, \nu_2 > 0$
- se consideriamo la connessione in retroazione di due sistemi in cui Σ_1 è globalmente asintoticamente stabile IFP(ν) e Σ_2 verifica la proprietà ZSD ed è OFP(ρ) allora il punto $(x_1, x_2) = (0, 0)$ è asintoticamente stabile se $\nu + \rho > 0$. Questa proprietà è quella che giustifica il fenomeno dell'eccesso o della carenza di passivtà che permette di raggiungere la passività partendo anche da un sistema che non lo è.

e varie altre proprietà che rendono appunto i sistemi dissipativi ottimi strumenti per raggiungere la stabilità di un sistema.

Esempio: controllo attraverso sistema dissipativo Abbiamo visto in precedenza come i sistemi OFP e IFP permettano di raggiungere la stabilità. Supponiamo ora di avere una situazione in cui abbiamo un impianto (schematizzato con il sistema Σ_2) collegato ad un controllore (il sistema Σ_1). Supponiamo che il sistema Σ_2 sia instabile, quindi non passivo, di cui però possiamo quantificare la carenza di passività come OFP($-\rho$) con $\rho > 0$. Sfruttando le proprietà dei sistemi IFP e OFP si riesce a raggiungere la stabilità creando l'interconnessione in figura
La carenza di passività di Σ_2 viene compensata attraverso la retroazione



negativa svolta dal blocco ρI, portando il sottosistema formato da Σ_2 e il blocco in retroazione alla stabilità. Inoltre per preservare le caratteristiche della connessione in retroazione globale del blocco controllore e impianto, si introduce anche un precontrollo $-\rho I$ su Σ_1. In questo modo se Σ_1 è IFP(ρ) la connessione in parallelo con $-\rho I$ è ancora passiva e quindi stabile. Quindi la carenza di passività dell'impianto iniziale viene compensate dall'eccesso di passività del controllore garantendo così la stabilità dell'intero schema.

4 Sistemi dissipativi lineari

Finora abbiamo discusso i sistemi dissipativi nel modo più generale non facendo assunzioni sulla loro linearità. Vediamo ora di analizzare in modo particolare i sistemi dissipativi lineari. Per fare ciò cominciamo analizzando la dissipatività generalizzata e poi passiamo a quella standard.

4.1 Sistemi dissipativi lineari generalizzati

Per prima cosa indichiamo un generico sistema lineare nel seguente modo:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases},$$

e una sua funzione di alimentazione quadratica:

$$\omega(u, y) = \begin{bmatrix} y^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Q} & \tilde{S} \\ \tilde{S}^T & \tilde{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix};$$

dove $\tilde{Q}, \tilde{S}, \tilde{R}$ sono matrici di opportune dimensioni e $\tilde{Q}, \tilde{R}$ sono simmetriche. Inoltre, poiché $y = Cx + Du$ la funzione di alimentazione può essere vista equivalentemente come funzione quadratica dello stato e dell'ingresso, nel seguente modo:

$$\omega(u, y) = \omega(u, x) \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix},$$

dove

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ D^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Q} & \tilde{S} \\ \tilde{S}^T & \tilde{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix},$$

in cui al posto dei puntini ci sono matrici che sono funzione delle matrici $C, D, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{S}$.
Nel seguito cercheremo di trovare delle condizioni sulle matrici A, B, S, Q, R (sufficienti a descrivere (Σ, ω) per le considerazioni precedenti) che ci permettano di stabilire se un sistema (Σ, ω) è dissipativo. Per semplicità ci limiteremo ai sistemi raggiungibili.
Introduciamo un teorema che mostra la struttura delle funzioni S_{d,x^*} e S_{r,x^*}:

Teorema: Sia Σ, ω un sistema lineare raggiungibile con funzione di alimentazione quadratica e supponiamo che sia dissipativo generalizzato. Allora $S_{d,0}$ e $S_{r,0}$ sono funzioni quadratiche e quindi esistono $\Pi_{d,0}$ e $\Pi_{r,0}$ simmetriche tali che

$$S_{d,0} = x^T \Pi_{d,0} x, \qquad S_{r,0} = x^T \Pi_{r,0} x$$

Dimostrazione: per provare che $S_{d,0}$ e $S_{r,0}$ sono quadratiche dobbiamo mostrare che sono continue nell'origine e che soddisfano l'identità del parallelogramma.
Continuità:
Per la continuità nell'origine di $S_{d,0}$ basta dimostrare che esistono matrici per cui:

$$-z^T N z \leq S_{d,0} \leq z^T M z \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Consideriamo la base canonica $e_1, \ldots, e_n$ di $\mathbb{R}^n$. Per la raggiungibilità di Σ esisteranno ingressi $u_1, \ldots, u_n$ che causeranno l'evoluzione del sistema da $x_i(0) = 0$ a $x_i(T) = e_i$. Se consideriamo ora il vettore $z = \sum_{i=1}^n z_i e_i$ per la linearità del sistema l'ingresso definito come $u := \sum_{i=1}^n z_i u_i$ genera un evoluzione del sistema dallo stato $x(0) = 0$ allo stato $x(T) = z$.
Quindi per la transizione di stato $0 \to z$:

$$\int_0^T \omega(u(t), x(t))\, dt = \int_0^T \omega\left(\sum_{i=1}^n z_i u_i(t), \sum_{i=1}^n z_i x_i(t)\right) dt =$$

$$= \int_0^T \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i z_j \begin{bmatrix} x_i(t)^T & u_i(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Q} & \tilde{S} \\ \tilde{S}^T & \tilde{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j(t) \\ u_j(t) \end{bmatrix} dt = z^T M z,$$

dove la matrice M ha come elementi:

$$M_{i,j} = \int_0^T \begin{bmatrix} x_i(t)^T & u_i(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Q} & \tilde{S} \\ \tilde{S}^T & \tilde{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j(t) \\ u_j(t) \end{bmatrix} dt.$$

Possiamo dire quindi che nel passaggio di stato $0 \to z$:

$$z^T M z = \int_0^T \omega(u(t), x(t))\, dt \geq S_{d,0}(z) - S_{d,0}(0) = S_{d,0}(z).$$

Con lo stesso ragionamento appena fatto esiste anche un ingresso che causa la transizione di stato $z \to 0$ per cui vale:

$$z^T N z = \int_0^T \omega(u(t), x(t))\, dt \geq S_{d,0}(0) - S_{d,0}(z) = -S_{d,0}(0).$$

Ora è facile vedere dalle ultime due relazioni che $-z^T N z \leq S_{d,0} \leq z^T M z$.
Identità del parallelogramma:
L'identità del parallelogramma è soddisfatta se vale la seguente relazione:

$$S_{d,0}(x + y) + S_{d,0}(x - y) = 2S_{d,0}(x) + S_{d,0}(y).$$

Notiamo preliminarmente che

$$\underset{0\to 2x}{\int_0^T \omega(2u(t),2y(t))\,dt} = \underset{0\to x}{\int_0^T \omega(u(t),y(t))\,dt},$$

e che quindi

$$S_{d,0}(2x) = 4S_{d,0}(x).$$

Consideriamo ora $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Per ogni $\epsilon > 0$ esistono $T_1, T_2 \geq 0$ e ingressi u_1, u_2 tali che:

$$\begin{aligned} S_{d,0}(x_1) + \epsilon &> \underset{0\to x_1}{\int_0^{T_1} \omega(u_1(t),x_1(t))\,dt}, \\ S_{d,0}(x_2) + \epsilon &> \underset{0\to x_2}{\int_0^{T_2} \omega(u_2(t),x_2(t))\,dt}. \end{aligned}$$

Scegliamo ora $T = max\{T_1, T_2\}$ e definiamo gli ingressi $\tilde{u_1}(t), \tilde{u_2}(t)$:

$$\tilde{u}_{1,2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t \leq T - T_{1,2} \\ u_{1,2}(t - T + T_{1,2}) & \text{se } T - T_{1,2} \leq t \leq T \end{cases};$$

in cui per l'ingresso u_1 consideriamo sempre il pedice 1 nella definizione precedente e per u_2 sempre il pedice 2.
È semplice notare ora che per come sono abbiamo definito $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2(t)$ vale che:

$$\begin{aligned} \underset{0\to x_1}{\int_0^{T_1} \omega(u_1(t),x_1(t))\,dt} &= \underset{0\to x_1}{\int_0^{T} \omega(\tilde{u}_1(t),\tilde{x}_1(t))\,dt}, \\ \underset{0\to x_2}{\int_0^{T_2} \omega(u_2(t),x_2(t))\,dt} &= \underset{0\to x_2}{\int_0^{T} \omega(\tilde{u}_2(t),\tilde{x}_2(t))\,dt}, \end{aligned}$$

dove agli ingressi $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ corrispondano le evoluzioni di stato $\tilde{x}_1(T) = x_1$ $\tilde{x}_2(T) = x_2$. Se ora invece consideriamo come ingressi $\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2$ e $\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2$ è evidente che per linearità lo stato finale del sistema sarà rispettivamente $x_1 + x_2$ e $x_1 - x_2$ e quindi:

$S_{d,0}(x_1 + x_2) + S_{d,0}(x_1 - x_2) \leq$

$$
\begin{aligned}
&\leq \underset{0 \to x_1 + x_2}{\int_0^T \omega(\tilde{u}_1(t) + \tilde{u}_2(t), \tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_2(t))\, dt} \quad + \quad \underset{0 \to x_1 - x_2}{\int_0^T \omega(\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t), \tilde{x}_1(t) - \tilde{x}_2(t))\, dt} \quad = \\
&= \int_0^T \omega(\tilde{u}_1(t) + \tilde{u}_2(t), \tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_2(t)) + \omega(\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t), \tilde{x}_1(t) - \tilde{x}_2(t))\, dt = \\
&= 2 \underset{0 \to x_1}{\int_0^T \omega(\tilde{u}_1(t), \tilde{x}_1(t))\, dt} \quad + \quad 2 \underset{0 \to x_2}{\int_0^T \omega(\tilde{u}_2(t), \tilde{x}_2(t))\, dt} \quad < \quad 2(S_{d,0}(x_1) + S_{d,0}(x_2) + 2\epsilon).
\end{aligned}
$$

Possiamo concludere che per qualsiasi valore di ϵ vale:

$$S_{d,0}(x_1 + x_2) + S_{d,0}(x_1 - x_2) \leq 2(S_{d,0}(x_1) + S_{d,0}(x_2)).$$

Considerando ora $z_1 = x_1 + x_2$ e $z_2 = x_1 - x_2$ dalla formula precedente ricaviamo:

$$
\begin{aligned}
S_{d,0}(2x_1) + S_{d,0}(2x_2) &= S_{d,0}(z_1 + z_2) + S_{d,0}(z_1 - z_2) \leq \\
&\leq 2(S_{d,0}(z_1) + S_{d,0}(z_2)) = \\
&= 2(S_{d,0}(x_1 + x_2) + S_{d,0}(x_1 - x_2)).
\end{aligned}
$$

Quindi per la considerazione fatta all'inizio:

$$2(S_{d,0}(x_1) + S_{d,0}(x_2)) \leq S_{d,0}(x_1 + x_2) + S_{d,0}(x_1 - x_2),$$

che assieme alla disuguaglianza ricavata prima implica:

$$2(S_{d,0}(x_1) + S_{d,0}(x_2)) = S_{d,0}(x_1 + x_2) + S_{d,0}(x_1 - x_2),$$

verificando il teorema.

Possiamo ora introdurre un metodo che ci permette di stabilire se un sistema è dissipativo generalizzato:

Teorema: Sia (Σ, ω) un sistema lineare raggiungibile con funzione di alimentazione quadratica. Allora (Σ, ω) è dissipativo generalizzato se e solo se la disequazione matriciale

$$\begin{bmatrix} Q - A^T P - PA & S - PB \\ S^T - B^T P & R \end{bmatrix} \geq 0 \tag{4.1}$$

ammette una soluzione P simmetrica. Ad ogni soluzione $P = P^T$ della disequazione corrisponde una funzione energia con segno quadratica $S(x) = x^T P x$ per il sistema e viceversa.

Dimostrazione: Supponiamo (Σ, ω) dissipativo generalizzato. Esiste allora una funzione energia per il sistema $S(x) = x^T Px$ per il quale vale che per ogni stato iniziale e ogni $h \geq 0$:

$$\int_0^h \underset{x(0) \to x(h)}{\omega(u(t), x(t))\, dt} \quad \geq \quad x^T(h)Px(h) - x^T(0)Px(0).$$

Dividendo entrambi i membri per h e facendo il limite per $h \to 0$:

$$\omega(u(0), x(0)) \geq \left(\frac{d}{dt} x^T(t)Px(t)\right)_{t=0}.$$

Quindi riscrivendo tutto in forma matriciale otteniamo

$$\begin{bmatrix} x^T(0) & u^T(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ u(0) \end{bmatrix} \geq \dot{x}^T(0)Px(0) + x^T(0)P\dot{x}(0) =$$

$$= x(0)^T A^T + u(0)^T B^T)Px(0) + x(0)^T P(Ax(0) + Bu(0)) =$$
$$= \begin{bmatrix} x^T(0) & u^T(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ u(0) \end{bmatrix}.$$

Per cui portando tutto al primo membro otteniamo la (4.1).
Viceversa supponiamo ora che $P = P^T$ sia una soluzione della (4.1) e verifichiamo che per un qualsiasi ingresso $u(t)$ nell'intervallo $[0, T]$ che porta allo stato $x(t)$, P è legata ad una funzione energia.

$$\begin{bmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \geq$$

$$\geq x(t)^T A^T Px(t) + u(t)^T B^T Px(t) + x(t)^T PAx(t) + x(t)^T PBu(t).$$

Considerando la definizione di funzione di alimentazione data all'inizio del capitolo e le equazioni del sistema possiamo riscrivere l'ultima disuguaglianza come:

$$\omega(u(t), x(t)) \geq \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x} = \frac{d}{dt} x^T(t)Px(t).$$

Integrando da 0 a T otteniamo:

$$\int_0^T \omega(u(t), y(t))\, dt \geq x(T)^T Px(T) - x(0)^T Px(0),$$

e quindi $S(x) = x^T Px$ è una funzione energia.

4.2 Equazioni di Riccati

Nel caso in cui la matrice R sia invertibile possiamo fare ulteriori considerazioni in merito alle condizioni di dissipatività del sistema. Se moltiplichiamo a destra e sinistra il primo membro della (4.1) per una matrice e la sua inversa otteniamo:

$$\begin{bmatrix} I & -(S-PB)R^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q-A^TP-PA & S-PB \\ S^T-B^TP & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -R^{-1}(S-PB)^T & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Q-A^TP-PA-(S-PB)R^{-1}(S-PB)^T & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

Quindi se definiamo:

$$M(P) = \begin{bmatrix} Q-A^TP-PA & S-PB \\ S^T-B^TP & R \end{bmatrix};$$
$$\Lambda(P) = Q-A^TP-PA-(S-PB)R^{-1}(S-PB)^T;$$
$$K(P) = -R^{-1}(S-PB^T);$$

possiamo scrivere:

$$M(P) = \begin{bmatrix} I & -K(P)^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda(P) & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -K(P) \end{bmatrix}.$$

Possiamo concludere che, se $R > 0$, allora la disequazione $M(P) \geq 0$ ammette soluzione P solo se anche $\Lambda(P) \geq 0$. La disequazione $\Lambda(P) \geq 0$ viene detta **disequazione algebrica di Riccati**. In seguito a queste considerazioni possiamo quindi affermare che un sistema lineare (Σ, ω) con ω funzione di alimentazione quadratica, è dissipativo generalizzato se la disequazione di Riccati:

$$\Lambda(P) := Q-A^TP-PA-(S-PB)R^{-1}(S-PB)^T \geq 0,$$

ammette una soluzione P simmetrica.
Questa affermazione discende direttamente dal teorema precedente, anche se in realtà può essere resa più stringente imponendo l'uguaglianza nella disequazione. Dopo aver fatto queste considerazioni enunciamo un teorema che trova una soluzione all'equazione di Riccati:

Teorema: Sia (Σ, ω) un sistema lineare raggiungibile con funzione di alimentazione quadratica e supponiamo che sia dissipativo generalizzato. Allora le matrici $\Pi_{d,0}$ e $\Pi_{r,0}$ associate alle forme quadratiche $S_{d,0}$ e $S_{r,0}$ risolvono l'equazione algebrica di Riccati

$$Q-A^TP-PA-(S-PB)R^{-1}(S-PB)^T = 0 \tag{4.2}$$

Dimostrazione: Prima di iniziare la dimostrazione dobbiamo enunciare una proprietà della funzione $S_{d,0}$ ovvero per i sistemi dissipativi generalizzati vale:

$$-S_{d,0}(x) = \inf_u \left(\int_0^T \omega(u(t), x(t))\, dt - S_{d,0}(x(T)) \right).$$

Consideriamo adesso una generica matrice P simmetrica, definiamo $S(x) := x^T Px$ e osserviamo che:

$$\begin{aligned} H := x^T(T)Px(T) - x^T(0)Px(0) &= \int_0^T \frac{d}{dt} S(x)\, dt \\ &= \int_0^T \dot{x}^T(t)Px(t) - x^T(t)P\dot{x}(t)\, dt \\ &= \int_0^T \begin{bmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^TP + PA & PB \\ B^TP & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt. \end{aligned}$$

Quindi possiamo scrivere che:

$$\begin{aligned} &\underset{x(0)\to x(T)}{\int_0^T \omega(u(t), x(t))\, dt} = \\ &= \underset{x(0)\to x(T)}{\int_0^T \omega(u(t), x(t))\, dt} - \int_0^T \begin{bmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^TP + PA & PB \\ B^TP & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt + H = \\ &= \int_0^T \begin{bmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix} M(P) \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt + H = \\ &= \int_0^T \begin{bmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -K(P)^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda(P) & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -K(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt + H = \\ &= \int_0^T x(t)^T \Lambda(P) x(t) + [u(t) - K(P)x(t)]^T R [u(t) - K(P)x(t)] dt + H. \end{aligned}$$

Conviene introdurre ora il sistema $\tilde{\Sigma}$:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = (A + BK(P))\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = L\tilde{x}(t) \end{cases},$$

dove L è una matrice per cui $\Lambda(P) = L^T L$, e una funzione di alimentazione:

$$\tilde{\omega}(\tilde{y}, \tilde{u}) = \tilde{y}^T\tilde{y} + \tilde{u}^T R\tilde{u} = ||\tilde{y}||^2 + ||N\tilde{u}||^2.$$

dove $R = N^T N$. Notiamo che se il sistema Σ partendo dalla condizioni iniziale da $x(0)$ e alimentato dall'ingresso $u(t)$ genera l'evoluzione di stato $x(t)$, allora il sistema $\tilde{\Sigma}$ a partire da $\tilde{x}(0) = x(0)$ e $\tilde{u}(t) := u(t) + K(P)x(t)$

genera l'evoluzione di stato $\tilde{x}(t) = x(t)$
Possiamo ora scegliere $S(x) = S_{d,0}(x)$ e per la proprietà enunciata all'inizio:

$$\begin{aligned}
-x(0)^T \Pi_{d,0} x(0) &= \inf_u \left(\int_0^T \omega(u(t), x(t))\, dt - x(T)^T \Pi_{d,0} x(T) \right) \\
&= \inf_u \left(\int_0^T \tilde{\omega}(\tilde{y}(t), \tilde{u}(t))\, dt - x(0)^T \Pi_{d,0} x(0) \right) \\
&= \inf_u \left(\int_0^T \tilde{\omega}(\tilde{y}(t), \tilde{u}(t))\, dt \right) - x(0)^T \Pi_{d,0} x(0);
\end{aligned}$$

e quindi arriviamo alla conclusione che:

$$\inf_u \left(\int_0^T ||\tilde{y}(t)||^2 + ||N\tilde{u}(t)||^2\, dt \right) = 0.$$

Sappiamo inoltre che:

$$0 \leq \int_0^T ||\tilde{y}(t)||^2 + ||N\tilde{u}(t)||^2\, dt \leq \epsilon \quad \forall \epsilon > 0.$$

Suddividendo ora $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_f(t) + \tilde{y}_l(t)$ scriviamo che per una costante a del sistema vale:

$$\int_0^T ||\tilde{y}_f(t)||^2\, dt \leq a \int_0^T ||\tilde{u}(t)||^2\, dt;$$

e infine:

$$\begin{aligned}
\int_0^T ||\tilde{y}_l(t)||^2\, dt \leq \int_0^T ||\tilde{y}(t)||^2 + ||\tilde{y}_f(t)||^2\, dt \leq \epsilon + a \int_0^T ||\tilde{u}(t)||^2\, dt \leq \\
\leq \epsilon + a||N||^{-1} \int_0^T ||N\tilde{u}(t)||^2\, dt \leq (1 + a||N||^{-1})\epsilon.
\end{aligned}$$

Per cui per l'arbitrarietà di ϵ, $y_l(t)$ deve essere nullo e questo è possibile solo se L è nullo il che implica che anche $\Lambda(P) = 0$.

Abbiamo visto, quindi che per i sistemi dissipativi generalizzati la condizione necessaria e sufficiente per garantire la dissipatività del sistema è che esista una soluzione P simmetrica all'equazione di Riccati.

4.3 Dissipatività non generalizzata nei sistemi lineari

Vediamo ora di introdurre qualche condizione affinché si possa stabilire la dissipatività standard di un sistema lineare.

Per prima cosa notiamo che se un sistema è dissipativo sarà necessariamente vero che l'origine è un punto ad energia disponibile nulla. È semplice da vedere considerando che se definiamo:

$$H := -\int_0^T \omega(u(t), x(t))\, dt,$$
$$0 \to$$

e applichiamo l'ingresso au avremo che:

$$-\int_0^T \omega(au(t), ax(t))\, dt \quad = \quad -\int_0^T a^2\omega(u(t), x(t))\, dt \quad = \quad a^2 H.$$
$$0 \to \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \to$$

Perciò essendo $S_d(0)$ l'estremo superiore degli integrali:

$$a^2 H \leq S_d(0), \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Quindi se $H \leq 0$ necessariamente per la definizione di energia disponibile deve essere $S_d(0)$.
Possiamo quindi dire che un sistema sistema lineare con funzione di alimentazione quadratica che abbia funzione energia disponibile sempre fnita è sicuramente dissipativo perché automaticamente l'origine é uno stato a energia nulla. E ancora che in un sistema dissipativo lineare é sempre vero che

$$\int_0^T \omega(u(t), x(t))\, dt \geq 0.$$
$$0 \to$$

Come per il caso dei sistemi dissipativi generalizzati abbiamo che $S_{r,0}(x)$ è una funzione quadratica e quindi possiamo associarla alla matrice $\Pi_{r,0}$. Tuttavia questo non vale per la funzione energia disponbile $S_{d,0}(x)$, che infatti nel caso della dissipatività standard nei sistemi lineari può non essere una funzione quadratica (si può dimostrare che la funzione energia disponibile non soddisfa l'identità del parallelogramma).

Possiamo quindi stabilire una condizione analoga alla dissipatività generalizzata sulle matrici A, B del sistema e sulle matrici Q, S, R che descrivono la funzione di alimentazione, per stabilire se il sistema è dissipativo:

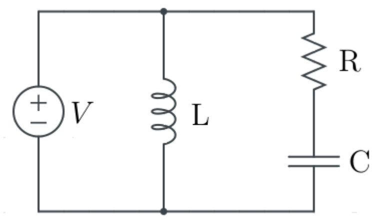
Teorema: Dato (Σ, ω) un sistema lineare raggiungibile con funzione di alimentazione quadratica, allora (Σ, ω) è dissipativo se e solo se la disequazione lineare matriciale

$$\begin{bmatrix} Q - A^T P - PA & S - PB \\ S^T - B^T P & R \end{bmatrix} \geq 0$$

ammette una soluzione P simmetrica e **semidefinita positiva** ($P = P^T \geq 0$). Ad ogni soluzione $P = P^T \geq 0$ di corrisponde una funzione energia quadratica $S(x) = x^T P x$ per il sistema e viceversa.

È facile capire la condizione che la matrice P sia semidefinita positiva è dovuta al fatto che per la dissipatività standard la funzione energia deve essere maggiore o uguale a zero, il che può essere collegato in termini matriciali ad una matrice semidefinita positiva.
Una nota aggiuntiva va fatta per i sistemi senza perdite per i quali vale ancora il teorema appena enunciato con il solito accorgimento che la disequazione matriciale diventa un equazione matriciale.

Esempio: Circuito RLC, verifica dissipatività



Analizziamo il circuito RLC in figura e verifichiamo che può essere modellato come un sistema dissipativo.
Consideriamo la tensione fornita dall'alimentatore v l'ingresso del sistema mentre la corrente totale erogata i sarà l'uscita del sistema. Le nostre variabili di stato che decrivono il sistema sciegliamo siano la corrente sull'induttore i_L e la tensione ai capi del condensatore v_C. Il sistema scritto nella forma di stato diventerà quindi

$$\begin{cases} \dot{i}_L = \frac{1}{L} \\ \dot{v}_C = \frac{1}{RC}(v - v_C) \\ i = i_L + \frac{1}{R}(v - v_C) \end{cases}$$

Una funzione di alimentazione fisicamente significativa è $\omega = vi$ ovvero la potenza fornita dal generatore al circuito.
L'energia immagazzinata $S(\cdot)$ nel sistema è uguale all'energia conservata nell'induttore più quella conservata nel condensatore, ovvero

$$S(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) + \frac{1}{2} C v_C^2(t)$$

Ora affinché il sistema sia dissipativo deve valere la relazione

$$\int_0^T \omega(v(t), i(t))\, dt \geq S(x(T)) - S(x(0))$$

di cui se differenziamo entrambi i membri rispetto al tempo otteniamo

$$\dot{S}(v_C(t), i_L(t)) \leq \omega(v(t), i(t))$$

Quindi nel nostro esempio abbiamo che

$$\dot{S} = \dot{E} = \frac{1}{2} 2 L i_L \dot{i}_L + \frac{1}{2} 2 C v_C \dot{v}_C = vi - \frac{1}{R}(v - v_C)^2 < vi = \omega$$

Si nota chiaramente che è garantita la condizione di dissipatività del sistema e questo non è sorprendente. Fisicamente, infatti, l'energia viene immagazzinata nei due dispositivi, ma anche dissipata sottoforma di calore dai componenti circuitali.

5 Cenni sull'analisi in frequenza dei sistemi dissipativi

Nel capitolo precedente abbiamo cercato di dare una caratterizzazione alle matrici A, B del sistema e Q, S, R della funzione di alimentazione per capire se un sistema è dissipativo. In questo capitolo cercheremo di dare delle condizioni basate invece sulla matrice di trasferimento del sistema e sulla forma quadratica che definisce la funzione di alimentazione, limitandoci al caso della dissipatività generalizzata.

5.1 Analisi in frequenza dei sistemi dissipativi generalizzati

Introduciamo la matrice razionale propria $\Phi(s)$, data la matrice razionale propria $V(s)$

$$\Phi(s) := V^T(-s)V(s) \tag{5.1}$$

Questa matrice ha due proprietà:

- $\Phi(s) = \Phi^T(-s)$
- Se $j\omega$, con $\omega \in \mathbb{R}$, non è un polo di $\Phi(s)$, allora $\Phi(j\omega)$ è hermitiana semidefinita positiva.

Nota: una matrice è detta hermitiana se coincide con la sua matrice trasposta coniugata.

Vogliamo ora collegare la matrice $\Phi(s)$ ai sistemi dissipativi cercando di legarla ell'equazione di Riccati e alla matrice P Introduciamo la matrice razionale a due parametri $\Psi(p, s)$ definita nel modo seguente:

$$\Psi(p, s) := \begin{bmatrix} B^T(pI - A^T)^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}$$

Attraverso passaggi algebrici si può notare che per ogni matrice simmetrica P vale che

$$\begin{bmatrix} B^T(pI - A^T)^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^TP + PA & PB \\ B^TP & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} =$$

$$= (p + s)B^T(pI - A^T)^{-1}P(sI - A)^{-1}B$$

e quindi $\Psi(p,s)$ può essere riscritta come:

$$\Psi(p,s) = \begin{bmatrix} B^T(pI - A^T)^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q - A^TP + PA & S - PB \\ S^T - B^TP & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} + \\ + (p+s)B^T(pI - A^T)^{-1}P(sI - A)^{-1}B$$

Dalla matrice $\Psi(p,s)$ arriviamo alla matrice razionale $\Phi(s) := \Psi(-s,s)$ che è verificata per ogni matrice P simmetrica:

$$\Phi(s) := \begin{bmatrix} B^T(-sI - A^T)^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q - A^TP + PA & S - PB \\ S^T - B^TP & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

Grazie a questa espressione di $\Phi(s)$ possiamo enunciare e dimostrare il teorema che da una caratterizzazione dei sistemi dissipativi generalizzati:

Teorema: Sia (Σ, ω) un sistema lineare raggiungibile con funzione di alimentazione quadratica. Sia inoltre $\Phi(s)$ la funzione razionale sopra definita prima, allora è equivalente dire che:

1. (Σ, ω) è dissipativo generalizzato,
2. $\Phi(s) = V^T(-s)V(s)$, dove $V(s) = N + L(sI - A)^{-1}B$ con N, L opportune matrici,
3. $\Phi(j\omega) \geq 0$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ tale che $j\omega$ non è polo di $\Phi(s)$

Dimostrazione: $(1 \Rightarrow 2)$ Se (Σ, ω) è dissipativo generalizzato, allora deve valere la (4.1) e quindi esistono matrici N, L per cui:

$$\begin{bmatrix} Q - A^TP + PA & S - PB \\ S^T - B^TP & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^T \\ N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & N \end{bmatrix}$$

e quindi dalla (5.2) vale

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} B^T(-sI - A^T)^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T \\ N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} = V^T(-s)V(s)$$

$(2 \Rightarrow 3)$ Per ogni matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ si ha che M^*M (M^* significa la matrice trasposta coniugata di M) è hermitiana e semidefinita positiva, allora per tutti gli $\omega \in \mathbb{R}$ tali che $j\omega$ non è polo di $\Phi(s)$ si ha che

$$\Phi(j\omega) = V^T(-j\omega)V(j\omega) = V(-j\omega)^*V(j\omega) \geq 0$$

(3 $\Rightarrow$ 1) Essendo un sistema dissipativo generalizzato anche ciclo-dissipativo, è sufficiente dimostrare che

$$\int_0^T \omega(u(t), y(t))\, dt$$
$$0 \to 0$$

per un qualsiasi ingresso u definito in $[0, T]$ che porti lo stato dallo stato nullo allo stato nullo.
Prolunghiamo $u(t)$ e $x(t)$ a tutta la retta reale ponendoli entrambi a zero per ogni $t \notin [0, T]$. È chiaro che le soluzioni globali del sistema restano immutate, ma in questo modo possiamo introdurre le trasformate di Fourier $U(j\omega)$ e $X(j\omega)$ che soddisfano, secondo le proprietà della trasformata

$$j\omega X(j\omega) = AX(j\omega) + BU(j\omega)$$

e ricorrendo al teorema di Parseval:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \omega(u(t), y(t))\, dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} X^*(j\omega) & U^*(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(j\omega) \\ U(j\omega) \end{bmatrix} d\omega = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} U(j\omega)^* \begin{bmatrix} B^T(-j\omega I - A^T)^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix} U(j\omega)\, d\omega = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} U(j\omega)^* \Phi(j\omega) U(j\omega) d\omega \geq 0
\end{aligned}$$

Bibliografia

[1] R. Sepulchre, M. Jankovic, P. Kokotovic, *Constructive Nonlinear Control*, Springer 1996

[2] Sandro Zampieri, *Sistemi dissipativi*, università di Padova 2007