

Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

***Relazione per la prova finale  
«Metodo di Gauss per la  
determinazione orbitale»***

Tutor universitario: Prof. Gabriella Pinzari

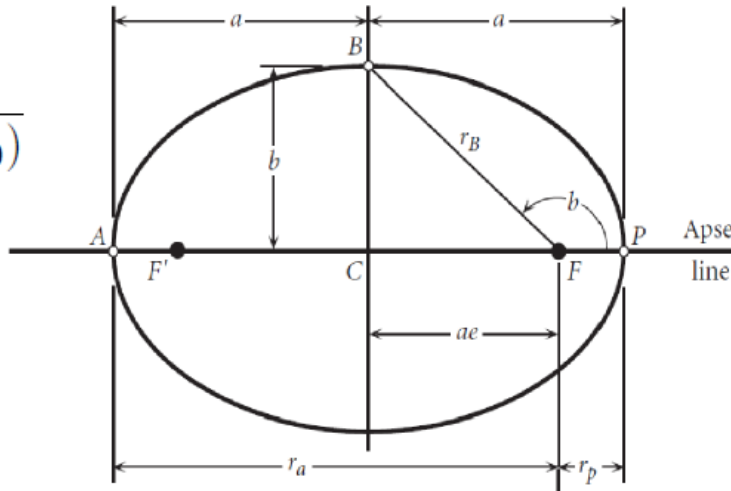
Laureando: *Luca Saccani*

*Matricola: 2002572*

Padova, 18/03/2024

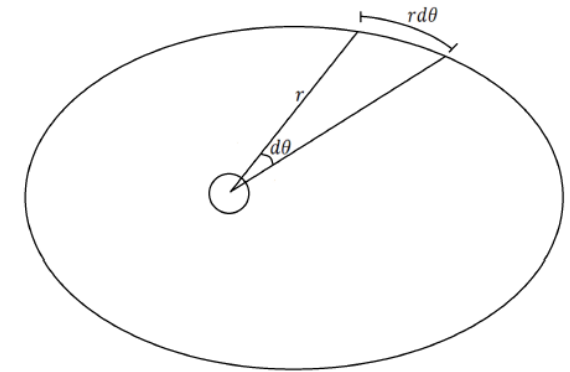
**Prima Legge:** i pianeti descrivono orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

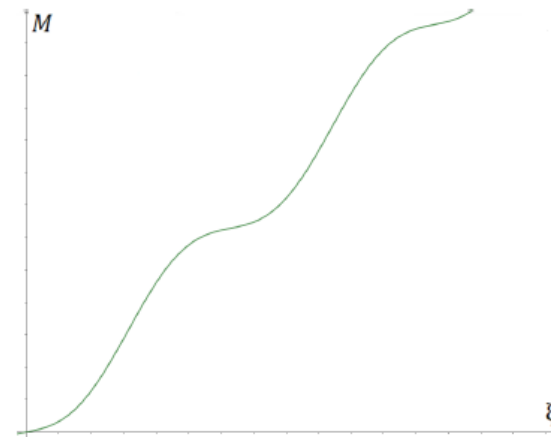


**Seconda Legge:** il vettore posizione relativa dei pianeti rispetto al Sole descrive aree uguali in tempi uguali.

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$



**Equazione di Keplero:** mette in relazione il tempo e la posizione del corpo lungo l'orbita.



$$n(t - t_0) = M = \xi - e \sin \xi$$

$$T = \frac{2\pi}{n}$$

**Terza Legge:** il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore della sua orbita.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_0} a^3$$

La **legge di Titius-Bode** (1772) suggerisce l'esistenza di un pianeta tra Marte e Giove. Si tratta di una legge empirica, oggi priva di un'effettiva dimostrazione fisica.

$$a_i = 0.4 + 0.3 \times 2^i$$

$$i = -\infty, 0, 1, 2, 3, \dots$$

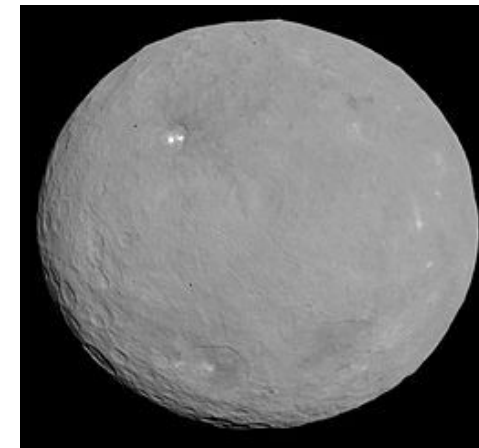
**William Herschel** scopre Urano nel 1781. Ciò avvalorava ulteriormente l'ipotesi che esista veramente un pianeta che completi la serie di Titius-Bode.



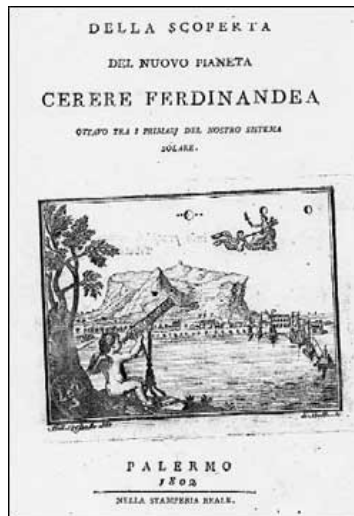
**Carl Friedrich Gauss** lo stesso anno sviluppa l'omonimo metodo per il calcolo orbitale, riuscendo perciò a determinare l'orbita di Cerere.

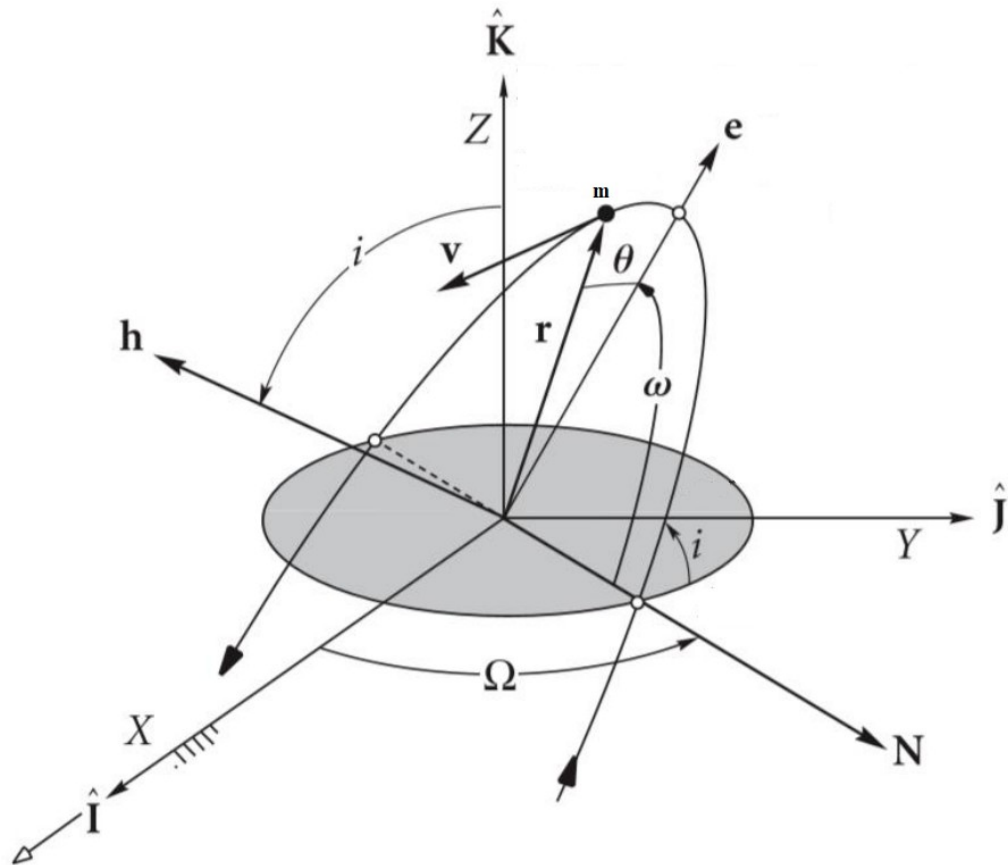


In seguito viene scoperta l'esistenza della Fascia di Asteroidi, di cui Cerere fa parte. Nel 2006 viene riclassificato come pianeta nano, l'unico del sistema solare interno.



**Giuseppe Piazzi** osserva per la prima volta Cerere l'1 gennaio 1801, ma con le poche osservazioni disponibili non è in grado di rintracciarlo.





L'insieme di questi parametri definisce univocamente un'orbita nello spazio tridimensionale.

**Momento angolare specifico:**  $\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

**Linea dei nodi:**  $\vec{N} = \hat{k} \times \vec{h}$

**Parametro dell'orbita:**  $p = \frac{l^2}{Gm^2m_0^2} = a(1 - e^2)$

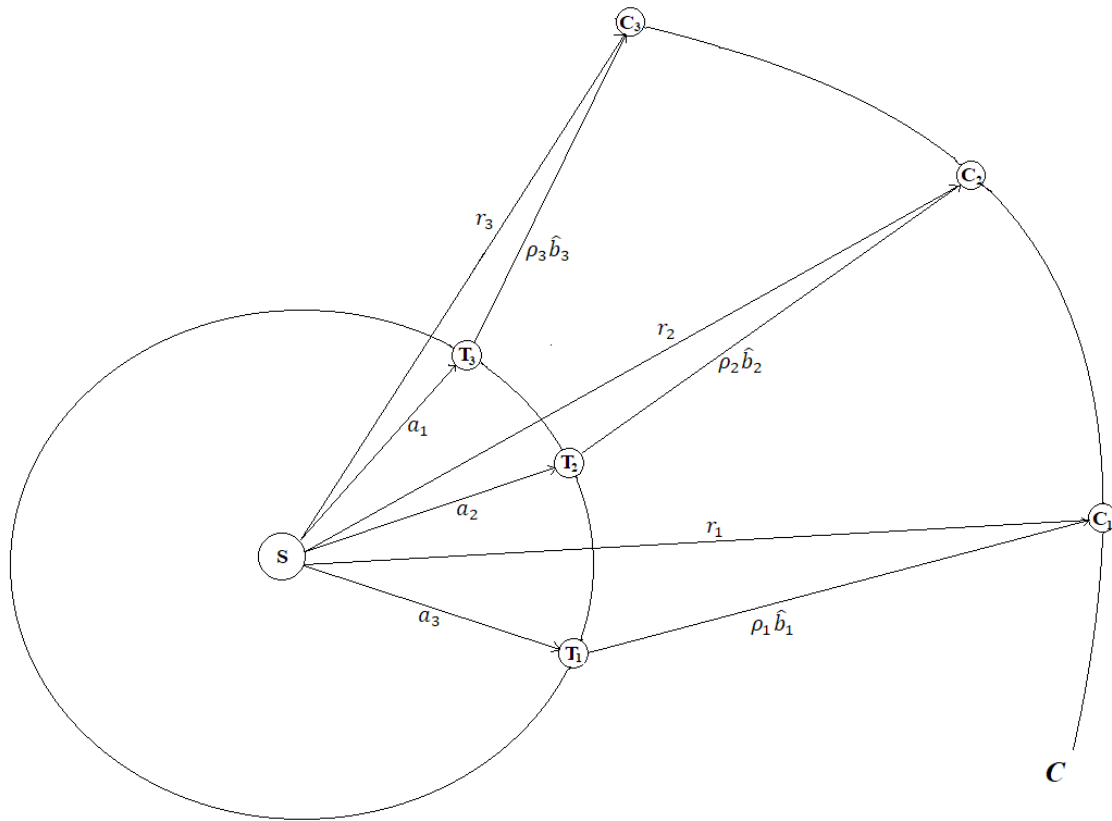
**Eccentricità:**  $e = \sqrt{1 - \frac{E}{V_{min}}}$

**Argomento di perielio:**  $\omega = \arccos\left(\frac{\vec{N} \cdot \vec{e}}{Ne}\right)$

**Longitudine del nodo ascendente:**  $\Omega = \arccos\left(\frac{\vec{N} \cdot \hat{i}}{|\vec{N}|}\right)$

**Inclinazione:**  $i = \arccos\left(\frac{\vec{h} \cdot \hat{k}}{|\vec{h}|}\right)$

**Anomalia media:**  $M = \frac{2\pi}{T}t = \xi - e \sin \xi$



$\vec{r}_i = \vec{a}_i + \rho_i \hat{b}_i$  : vettori posizione eliocentrica del corpo osservato.

$\vec{a}_i$  : vettori posizione della Terra rispetto al Sole. Essendo complanari, se si adotta come sistema di riferimento il piano dell'eclittica, essi sono noti dalle tavole delle effemeridi tramite due soli dati, ovvero la distanza Terra-Sole e la longitudine eclittica  $l$ .

$\hat{b}_i$  : versori che indicano la direzione Terra-corpo al momento dell'osservazione al tempo  $t_i$ . Sono determinati da due misure angolari, la longitudine  $\lambda$  e la latitudine  $\beta$  eclittiche geocentriche.

$\rho_i$  : moduli delle distanze Terra-corpo incognite.

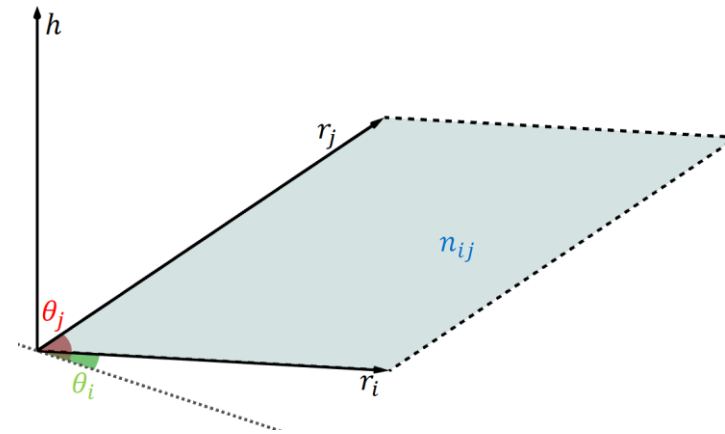
Si vogliono trovare le grandezze  $\rho_i$  tali che i vettori  $r_i$  siano complanari e definiscano una conica  $C$  su cui l'evoluzione del moto del corpo  $m$  secondo le leggi di Keplero porga  $\vec{r}(t_i) = \vec{r}_i$ . Per questo metodo sono necessarie **tre sole osservazioni**, le quali per ipotesi d'ora in poi si considerano ordinate in senso antiorario.

Si impone la complanarità degli  $r_i$  scrivendoli come combinazione lineare l'uno degli altri due  $\vec{r}_2 = \alpha \vec{r}_1 + \beta \vec{r}_3$

Dalla definizione del prodotto vettoriale si ottengono  $n_{ij} = |\vec{r}_i \times \vec{r}_j| = r_i r_j \sin(\theta_j - \theta_i) = r_i r_j \sin \theta_{ij}$

Si ricava che i coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$  si scrivono come  $\alpha = \frac{n_{23}}{n_{13}}$   $\beta = \frac{n_{12}}{n_{13}}$

Ricordando che dal punto di vista geometrico il prodotto vettoriale dà come risultato l'area del parallelogramma compreso tra due vettori, i due coefficienti sono rapporti tra aree di triangoli interni all'orbita.



La condizione di complanarità si riscrive come  $\alpha(\vec{a}_1 + \rho_1 \hat{b}_1) - (\vec{a}_2 + \rho_2 \hat{b}_2) + \beta(\vec{a}_3 + \rho_3 \hat{b}_3) = 0$

Introducendo i vettori

$$\vec{c}_1 = \frac{\hat{b}_2 \times \hat{b}_3}{\hat{b}_1 \times \hat{b}_2 \cdot \hat{b}_3}; \quad \vec{c}_2 = \frac{\hat{b}_3 \times \hat{b}_1}{\hat{b}_1 \times \hat{b}_2 \cdot \hat{b}_3}; \quad \vec{c}_3 = \frac{\hat{b}_1 \times \hat{b}_2}{\hat{b}_1 \times \hat{b}_2 \cdot \hat{b}_3}$$

si può scrivere un sistema lineare di equazioni per i  $\rho_i$

$$\begin{cases} \rho_1 = -\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_1 + \frac{1}{\alpha} \vec{c}_1 \cdot \vec{a}_2 - \frac{\beta}{\alpha} \vec{c}_1 \cdot \vec{a}_3 \\ \rho_2 = \alpha \vec{c}_2 \cdot \vec{a}_1 - \vec{c}_2 \cdot \vec{a}_2 + \beta \vec{c}_2 \cdot \vec{a}_3 \\ \rho_3 = -\frac{\alpha}{\beta} \vec{c}_3 \cdot \vec{a}_1 + \frac{1}{\beta} \vec{c}_3 \cdot \vec{a}_2 - \vec{c}_3 \cdot \vec{a}_3 \end{cases}$$

Risulta necessario imporre due condizioni:

- 1) I versori  $\hat{b}_i$  devono essere linearmente indipendenti  $\hat{b}_1 \times \hat{b}_2 \cdot \hat{b}_3 \neq 0$
- 2) I vettori  $r_i$  devono essere complanari non paralleli  $\alpha\beta \neq 0$

Sostituendo le definizioni di  $\alpha$  e  $\beta$  si ottiene in particolare

$$\rho_2 = -\vec{c}_2 \cdot \vec{a}_2 + \frac{\vec{c}_2 \cdot \vec{a}_1 n_{23} + \vec{c}_2 \cdot \vec{a}_3 n_{12}}{n_{12} + n_{23}} \frac{n_{12} n_{23}}{n_{13}}$$



Si definiscono ora i parametri di Gauss  $P = \frac{n_{12}}{n_{23}} = \frac{\beta}{\alpha}$   $Q = 2r_2^3 \left( \frac{n_{12} + n_{23}}{n_{13}} - 1 \right) = 2r_2^3(\alpha + \beta - 1)$

dove si indica  $r_2 = |\vec{r}_2| = \sqrt{a_2^2 + 2\vec{a}_2 \cdot \hat{b}_2 \rho_2 + \rho_2^2}$

Si può quindi riscrivere in funzione dei parametri di Gauss  $\alpha = \frac{1}{1+P} \left( 1 + \frac{Q}{2r_2^3} \right)$   $\beta = \frac{P}{1+P} \left( 1 + \frac{Q}{2r_2^3} \right)$

e soprattutto si ottiene un'equazione implicita per  $\rho_2 = -\vec{c}_2 \cdot \vec{a}_2 + \frac{\vec{c}_2 \cdot \vec{a}_1 + \vec{c}_2 \cdot \vec{a}_3 P}{P+1} \left( 1 + \frac{Q}{2r_2^3} \right)$  detta proprio *equazione di Gauss*.

Allo stesso modo per le altre equazioni del sistema si scrive  $\rho_1 = -\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_1 + \frac{P+1}{1 + \frac{Q}{2r_2^3}} \vec{c}_1 \cdot \vec{a}_2 - P \vec{c}_1 \cdot \vec{a}_3$

$$\rho_3 = -\frac{1}{P} \vec{c}_3 \cdot \vec{a}_1 + \frac{P+1}{P \left( 1 + \frac{Q}{2r_2^3} \right)} \vec{c}_3 \cdot \vec{a}_2 - \vec{c}_3 \cdot \vec{a}_3$$



Si introducono i rapporti  $\eta_{ij} = \frac{A_{ij}}{n_{ij}}$  dove con  $A_{ij}$  si indica l'area del settore ellittico compreso tra i vettori  $r_i$  e  $r_j$ .

Si può riscrivere grazie alla seconda legge di Keplero  $P = \frac{t_{12} \eta_{23}}{t_{23} \eta_{12}}$  che può essere quindi approssimato come  $P = \frac{t_{12}}{t_{23}} + o(\epsilon^2)$

avendo definito  $t_{ij} = t_j - t_i$  Di conseguenza si ottiene anche  $\alpha = \frac{t_{23}}{t_{13}} + o(\epsilon^2)$   $\beta = \frac{t_{12}}{t_{13}} + o(\epsilon^2)$   
 $o(\epsilon) = o(t_i - t_j)$

Dalla prima legge di Keplero si può scrivere il parametro  $p$  in funzione degli  $n_{ij}$   $p = \frac{1}{r_1 r_2 r_3} \frac{n_{13}}{n_{12} + n_{23} - n_{13}} \frac{n_{12} n_{23}}{2 \cos f_{12} \cos f_{23} \cos f_{13}}$   $f_{ij} = \frac{\theta_{ij}}{2}$

Ciò permette di scrivere  $\alpha + \beta - 1 = \frac{Q}{2r_2^3} = \frac{t_{12} t_{23}}{r_1 r_2 r_3 4 \eta_{12} \eta_{23} 2 \cos f_{12} \cos f_{23} \cos f_{13}}$  Da cui si può ottenere la seguente approssimazione per  $Q = t_{12} t_{23} + o(\epsilon^3)$

Queste approssimazioni dei parametri di Gauss verranno utilizzate come punto di partenza per le iterazioni del metodo al fine di ottenere un risultato per  $\rho_2$  approssimato fino all'ordine  $o(\epsilon)$ .

Il metodo consiste ora nel risolvere il seguente algoritmo:

1. Usare come valori iniziali quelli ricavati dalle approssimazioni spiegate precedentemente
 
$$\begin{cases} P_0 = \frac{t_{12}}{t_{23}} \\ Q_0 = t_{12}t_{23} \end{cases}$$
2. Risolvere l'equazione di Gauss  $\rho_2^{(0)} = \rho_2(P_0, Q_0, \Theta) = -\vec{c}_2 \cdot \vec{a}_2 + \frac{\vec{c}_2 \cdot \vec{a}_1 + \vec{c}_2 \cdot \vec{a}_3 P_0}{P_0 + 1} \left(1 + \frac{Q_0}{2r_2^3}\right)$   $\Theta = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3)$
3. Calcolare  $\vec{r}_2^{(0)} = \vec{a}_2 + \rho_2^{(0)} \hat{b}_2$   $r_2^{(0)} = |\vec{r}_2^{(0)}|$
4. Risolvere il resto del sistema  $\rho_1^{(0)} = -\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_1 + \frac{P_0 + 1}{1 + \frac{Q_0}{2r_2^3}} \vec{c}_1 \cdot \vec{a}_2 - P_0 \vec{c}_1 \cdot \vec{a}_3$   $\rho_3^{(0)} = -\frac{1}{P_0} \vec{c}_3 \cdot \vec{a}_1 + \frac{P_0 + 1}{P_0 \left(1 + \frac{Q_0}{2r_2^3}\right)} \vec{c}_3 \cdot \vec{a}_2 - \vec{c}_3 \cdot \vec{a}_3$
5. Analogamente calcolare  $\vec{r}_1^{(0)}, \vec{r}_3^{(0)}$  in modo da ottenere i tre vettori complanari dell'orbita
6. Calcolare i parametri orbitali (Quarto passo)  $\sigma^{(0)} = (p^{(0)}, e^{(0)}, \omega^{(0)}, \bar{\Omega}^{(0)}, i^{(0)}, M^{(0)}(t_2))$

7. In generale, data la k-esima iterazione, agli stessi istanti di tempo  $t_i$  si calcolano  $\vec{r}_i^{(k)} = \vec{r}^{(k)}(t_i)$  da utilizzare per l'iterazione successiva

8. Calcolare  $n_{ij}^{(k)} = |\vec{r}_i^{(k)} \times \vec{r}_j^{(k)}|$

9. Calcolare i parametri di Gauss tramite le definizioni e ripetere i passaggi precedenti

$$P^{(k+1)} = \frac{n_{12}^{(k)}}{n_{23}^{(k)}} = \frac{t_{12} \eta_{23}}{t_{23} \eta_{12}} \quad Q^{(k+1)} = 2r_2^3 \left( \frac{n_{12}^{(k)} + n_{23}^{(k)}}{n_{13}^{(k)}} - 1 \right) = \frac{2r_2^2 t_{12} t_{23}}{r_1 r_3 4 \eta_{12} \eta_{23} 2 \cos f_{12} \cos f_{23} \cos f_{13}}$$

In questo modo si è costruita la **mappa di Gauss**  $F : (P^{(k)}, Q^{(k)}) \rightarrow (P^{(k+1)}, Q^{(k+1)})$ , una successione per  $(P, Q)$  che auguratamente converge verso un punto fisso  $(P^*, Q^*)$ , a cui sarà associata la conica  $C$ , ovvero l'orbita del corpo osservato, o almeno una sua approssimazione fino all'ordine  $o(\varepsilon)$ .

**Osservazione:** anche l'orbita terrestre è una soluzione del metodo di Gauss associata al punto fisso banale  $(P_E, Q_E)$ , tale per cui vale  $\rho_i = 0$  e quindi  $r_i = a_i$ .

Le seguenti operazioni vanno svolte per ogni iterazione fino alla convergenza del metodo.

Si può dimostrare che una volta trovati i vettori  $r_i$ , la conica passante per essi con fuoco nel loro origine esiste ed è unica se e solo se  $n_{12} + n_{23} - n_{13} \neq 0$ , ovvero se gli  $r_i$  non rappresentano tre punti allineati.

Tramite la prima legge di Keplero si può scrivere il seguente sistema

$$\begin{cases} r_1 = p - er_1 \cos(\theta_1 - \omega) \\ r_2 = p - er_2 \cos(\theta_2 - \omega) \\ r_3 = p - er_3 \cos(\theta_3 - \omega) \end{cases}$$

Dalla prima e dalla terza equazione si ottengono

$$e = -\frac{r_3 - r_1}{r_3 \cos(\theta_3 - \omega) - r_1 \cos(\theta_1 - \omega)} \quad p = r_1 r_3 \frac{\cos(\theta_3 - \omega) - \cos(\theta_1 - \omega)}{r_3 \cos(\theta_3 - \omega) - r_1 \cos(\theta_1 - \omega)}$$

e inserendole nella seconda si ottiene un'equazione per l'argomento di perielio  $\omega$

$$\begin{cases} \tan(\theta_2 - \omega) = -\frac{A}{B} = -\frac{r_1(r_2 - r_3) \cos \theta_{12} + r_2(r_3 - r_1) + r_3(r_1 - r_2) \cos \theta_{23}}{r_1(r_2 - r_3) \sin \theta_{12} - r_3(r_1 - r_2) \sin \theta_{23}} & \text{se } B \neq 0 \\ \cos(\theta_2 - \omega) = 0 & \text{se } B = 0 \end{cases}$$

Si può quindi ricavare anche le equazioni per l'eccentricità  $e$

$$\begin{cases} e = -\frac{r_1(r_2-r_3) \sin \theta_{12} - r_3(r_1-r_2) \sin \theta_{23}}{\cos(\theta_2 - \omega)(n_{12} + n_{23} - n_{13})} & \text{se } B \neq 0 \\ e = \frac{r_2(r_3-r_1) + r_1(r_2-r_3) \cos \theta_{12} + r_3(r_1-r_2) \cos \theta_{23}}{\sin(\theta_2 - \omega)(n_{12} + n_{23} - n_{13})} & \text{se } B = 0 \end{cases}$$

e per il parametro dell'orbita  $p$

$$p = r_1 r_2 r_3 \frac{\sin \theta_{12} + \sin \theta_{23} - \sin \theta_{13}}{n_{12} + n_{23} - n_{13}}$$

Dal momento che per definizione vale  $e \geq 0$   
l'ambiguità sul segno di  $\omega$  è risolta nel seguente modo

$$\begin{cases} \operatorname{sgn}(\cos(\theta_2 - \omega)) = \operatorname{sgn}\left(\frac{-r_1(r_2-r_3) \sin \theta_{12} - r_3(r_1-r_2) \sin \theta_{23}}{n_{12} + n_{23} - n_{13}}\right) & \text{se } B \neq 0 \\ \operatorname{sgn}(\sin(\theta_2 - \omega)) = \operatorname{sgn}\left(\frac{r_2(r_3-r_1) + r_1(r_2-r_3) \cos \theta_{12} + r_3(r_1-r_2) \cos \theta_{23}}{n_{12} + n_{23} - n_{13}}\right) & \text{se } B = 0 \end{cases}$$

Non potendo conoscere la velocità del corpo al momento dell'osservazione, si ricorre alla complanarità degli  $r_i$  per definire il vettore parallelo al momento angolare dell'orbita.

$$\hat{m} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|} = \frac{\vec{r}_2 \times \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 \times \vec{r}_3|} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_3|}$$

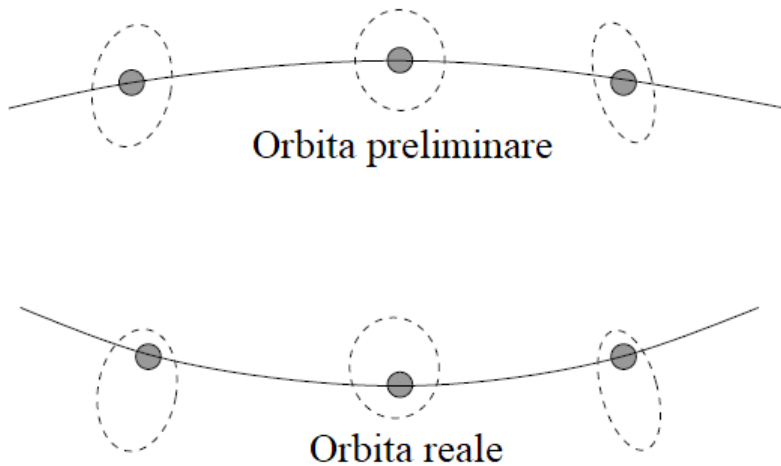
Si definisce quindi anche la linea dei nodi come

$$\hat{n} = \frac{\hat{k} \times \hat{m}}{|\hat{k} \times \hat{m}|}$$

In questo modo sono stati calcolati tutti i parametri dell'orbita, che risulta perciò completamente definita.

Se si verifica  $\hat{b}_1 \times \hat{b}_2 \cdot \hat{b}_3 = 0$  significa che i versori sono complanari e non viene rispettata una delle condizioni di esistenza del sistema dei  $\rho_i$ . Ciò può avvenire nei seguenti casi:

- se l'orbita del corpo osservato è perfettamente complanare a quella terrestre è necessario usare un metodo diverso da quello di Gauss, specifico per orbite in questa condizione
- se le osservazioni compiute porgono casualmente dei versori complanari è sufficiente compiere ulteriori osservazioni in tempi diversi
- se le osservazioni vengono svolte in intervalli di tempo troppo corti i versori risultano quasi complanari e possono rendere instabile la convergenza del metodo fino a portare a soluzioni del tutto errate.



Nel corso del tempo gli astronomi hanno da un lato sviluppato metodi alternativi per trovare valori iniziali che garantiscano la convergenza del metodo di Gauss, e dall'altro individuato degli intervalli di tempo ottimali per svolgere le osservazioni a seconda della geometria e della distanza del corpo.

In generale, se le osservazioni vengono svolte nelle condizioni ideali, anche considerando eventuali errori di misura il metodo converge alla soluzione per un ampio intervallo di valori con una buona approssimazione<sup>1</sup>.

Dopo aver individuato una prima approssimazione dell'orbita tramite il metodo di Gauss, si possono compiere ulteriori osservazioni e affinare l'approssimazione anche tramite il metodo dei minimi quadrati, anch'esso sviluppato da Gauss proprio in occasione della scoperta di Cerere.

<sup>1</sup>Celletti Alessandra e Pinzari Gabriella, *Four Classical Methods for Determining Planetary Elliptic Elements: a Comparison*, 13 Giugno 2005, pp.19-24

- [1] Carpino Mario, *Introduzione ai metodi di calcolo di Effemeridi e determinazione orbitale*, Osservatorio Astronomico di Brera, Milano, 3 Maggio 2010
- [2] Celletti Alessandra e Pinzari Gabriella, *Four Classical Methods for Determining Planetary Elliptic Elements: a Comparison*, *Celestial Mechanics and Dynamic Astronomy* 93, 1–52, 13 Giugno 2005
- [3] Gallavotti Giovanni, *Meccanica Elementare*, seconda edizione, Torino, 1986
- [4] Gauss Carl Friedrich, *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, Traduzione inglese, Dover, New York, 1963
- [5] Gronchi Giovanni, *Classic and modern orbit determination for asteroids*, Cambridge University Press, 23 Maggio 2005
- [6] Guzzo Massimiliano, *Dispense del corso di Meccanica Razionale*, AA 2023/24
- [7] Piazzi Giuseppe, *Della scoperta del nuovo pianeta Cerere Ferdinandea*, Stamperia Reale, Palermo, 1802
- [8] Pinzari Gabriella, *Appunti del corso Master in Scienza e Tecnologia Spaziale*, AA 2022/23
- [9] Pinzari Gabriella, *Appunti del corso di Meccanica Razionale*, AA 2022/2023