



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria Industriale DII

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

**Sviluppo di harvesters piezoelettrici a banda larga con validazione
numerica e sperimentale**

Relatore: Prof. Alberto Doria

Mazzoni Ivan

1108163

Anno Accademico 2016/2017

Parole chiave:

energy harvesting, vibrazioni meccaniche, piezoelettricità, assorbitori dinamici, tuning

Indice

Sommario

1	Introduzione	pag. 1
2	Motivazioni e piezoelettricità	pag. 5
2.1	Motivazioni	pag. 5
2.2	Piezoelettricità	pag. 7
2.3	Relazioni costitutive	pag. 11
2.4	Harvesters piezoelettrici e tecniche di conversione	pag. 16
2.5	Stato dell'arte attuale	pag. 21
3	Schema elettro-meccanico e assorbitori dinamici	pag. 23
3.1	Cantilever piezoelettrici: schemi meccanici	pag. 23
3.1.1	Modello a parametri concentrati	pag. 24
3.1.2	Modello a parametri distribuiti	pag. 29
3.1.3	Modello a parametri distribuiti senza smorzamento	pag. 29
3.1.4	Modello a parametri distribuiti con smorzamento	pag. 33
3.1.5	Fattore correttivo per il modello lumped	pag. 36
3.1.6	Modello a parametri distribuiti smorzato e con tipmass	pag. 37
3.2	Cantilever piezoelettrici: schemi elettromeccanici	pag. 39
3.2.1	Configurazione bimorfa e connessione in serie	pag. 42
3.2.2	Configurazione unimorfa	pag. 46
3.3	Funzioni di trasferimento Single mode	pag. 47
3.4	Progettazione degli assorbitori utilizzati per le prove sperimentali	pag. 48
3.5	Modello analitico di previsione	pag. 54
4	Apparato sperimentale ed esecuzione delle prove	pag. 63
4.1	L'analisi modale sperimentale	pag. 63
4.2	Apparecchiatura utilizzata per eseguire le prove	pag. 68

4.3	Le piastre piezoelettriche testate	pag. 75
4.4	L'effetto di carico delle lamine testate	pag. 79
4.5	I risultati delle prove sperimentali	pag. 82
4.5.1	Misure lamina V22B	pag. 85
4.5.2	Misure lamina V22BL	pag. 100
4.5.3	Misure lamina PPA1001	pag. 104
5	Modelli al FEM e risultati numerici	pag. 117
5.1	Il modello agli elementi finiti	pag. 117
5.2	Modelli creati per la piastra bimorfa V22B	pag. 118
5.2.1	V22B	pag. 118
5.2.2	V22B assieme alle tipmass	pag. 124
5.2.3	V22B assieme ai 3 assorbitori	pag. 125
5.3	Risultati delle simulazioni eseguite per la piastra V22B	pag. 127
5.4	Risultati delle simulazioni eseguite per la piastra V22BL	pag. 134
5.5	Modelli creati per la piastra unimorfa PPA1001	pag. 136
5.6	Risultati delle simulazioni eseguite per la piastra PPA1001	pag. 139
6	Confronti tra misure, FEM e modello analitico	pag. 147
	Conclusioni	pag. 155
	Ringraziamenti	pag. 159
	Appendici	pag. 161
	A1: Riduzione delle equazioni costitutive piezoelettriche lineari	pag. 161
	A2: Script Matlab modello analitico V22B	pag. 163
	A3: Script Matlab modello analitico V22BL	pag. 165
	A4: Script Matlab modello analitico PPA1001	pag. 167
	Bibliografia	pag. 169

Sommario

Lo scopo di tale lavoro di tesi riguarda la possibilità di allargare il campo di utilizzo di harvesters piezoelettrici, attraverso l'utilizzo di assorbitori dinamici operanti su tali componenti, per avere un recupero di energia su di un range di frequenze più esteso. Verranno presentati e descritti gli harvesters, il loro funzionamento, i materiali più recenti impiegati per costruirli e le possibili applicazioni future effettuabili con tali oggetti; dopodiché si tratteranno gli assorbitori dinamici di vibrazioni, il fenomeno del *tuning* a essi associato relativamente alla loro applicazione con gli harvesters piezoelettrici. In seguito si descriverà più in dettaglio lo studio oggetto del presente lavoro che consisterà in una prima validazione sperimentale delle piastre, una raccolta dei dati sperimentali più significativi ed un successivo confronto tra queste misure sperimentali e le corrispondenti grandezze fisiche ricavate da simulazioni di un corrispondente modello agli elementi finiti; il tutto impostato secondo una previsione dei risultati basata su di un modello analitico ricavato dalla teoria, ed impostato con un codice di calcolo numerico (Matlab). Ciò che si vorrebbe ottenere è un miglior sfruttamento nella capacità di acquisizione di energia (meccanica) da parte dell'harvester rispetto a quando viene utilizzato da solo, agendo principalmente sulla parte dinamica-meccanica del dispositivo, sfruttando apposite tipmass e assorbitori dinamici di vibrazioni che permettono, come si vedrà in seguito, di estendere il campo di utilizzo del componente per poterlo sfruttare in condizioni di lavoro diverse tra loro, senza dover agire sulla geometria, sull'elettronica dello stesso o durante l'utilizzo proprio dell'oggetto.

1 Introduzione

L'argomento più ampio in cui rientra questo lavoro riguarda i micro sistemi elettro-meccanici, detti MEMS (dall'inglese *micro electro-mechanical systems*) che oggi sono presenti in moltissimi oggetti di uso comune, come ad esempio gli smartphone, nei quali vi sono accelerometri e giroscopi. Questi sistemi sono oggi impiegati in numerose applicazioni, ma sono stati studiati e sviluppati solo negli ultimi 10-20 anni, contemporaneamente ai grandi progressi che la microelettronica ha fatto in tali anni; essi sono ad oggi in continua evoluzione e spaziano in ambiti tecnologici diversi tra loro, ad esempio bio-medico, chimico, elettronico, meccanico. In quest'ultimo ambito, quello meccanico, la ricerca riguarda principalmente l'energy harvesting ovvero il recupero di energia da fenomeni di natura meccanica. La ricerca legata a questi dispositivi richiede inoltre un'elevata multidisciplinarietà poiché spesso vi è la necessità di dover comprendere fenomeni connessi a fisiche diverse tra loro; è proprio l'interazione tra esse che rende complesso lo sviluppo e il dettaglio di tali dispositivi.

I MEMS consistono in sistemi elettro-meccanici con una dimensione media degli oggetti dell'ordine dei micrometri (e millimetri); non sono altro che un insieme di dispositivi di varia natura (meccanici, elettrici ed elettronici) integrati tra loro in forma miniaturizzata. Si tratta di sistemi in un certo senso "intelligenti" che abbinano funzioni elettroniche di gestione di processi fisici diversi tra loro e meccaniche in uno spazio ridottissimo nel quale si integra la tecnologia dei sensori e degli attuatori e le più diverse funzioni di gestione dei processi. In questo lavoro, si farà riferimento a piastre piezoelettriche le cui dimensioni sono dell'ordine delle decine di millimetri mentre gli spessori sono di qualche decimo di millimetro, progettate per permettere di acquisire un'elevata energia quando fatte funzionare alla loro frequenza fondamentale; il comportamento 'intelligente' lo si introduce in un secondo tempo, operando un'aggiunta meccanica al dispositivo, ovvero di assorbitori dinamici che permettono, come verrà spiegato in seguito, di sfruttare più frequenze (limitate in un più o meno esteso range di lavoro, che dipende dalle caratteristiche dell'assorbitore) alle quali si ha la massimizzazione della generazione di energia. I vantaggi dei MEMS consistono nel fatto che sono in grado di eseguire le stesse funzioni di rilevazione, elaborazione e attuazione di oggetti molto più ingombranti e magari costosi, perché ormai la miniaturizzazione dell'elettronica presenta costi molto contenuti.

Per collegarsi con l'energy harvesting, basti pensare che in molte applicazioni emergenti ed in dispositivi di uso comune è spesso necessario (o sarebbe conveniente) impiegare dei microsistemi

che permettano a essi di potersi autoalimentare; la potenza elettrica richiesta da questi dispositivi può essere infatti generata in due modi:

- con l'utilizzo di batterie elettrochimiche o celle;
- raccogliendo energia dall'ambiente (energy harvesting).

L'energy harvesting è il processo per il quale l'energia (perlopiù meccanica) proveniente da sorgenti alternative, ovvero tutte quelle sorgenti comunemente disponibili nell'ambiente, viene per mezzo di appositi dispositivi catturata e convertita in energia elettrica direttamente utilizzabile.

I dispositivi in grado di raccogliere l'energia ambientale e di convertirla in energia elettrica sono detti *harvesters* e le loro applicazioni future potrebbero interessare il campo dell'elettronica al fine della ricarica di cellulari, pc, apparati di comunicazione radio, ma anche altri campi, dove si utilizzano dispositivi nei quali viene sfruttata l'energia elettrica proveniente da batterie e pile.

Un harvester può essere utilizzato anche come una fonte di energia da affiancare ad una fonte di energia primaria, ad esempio per migliorare l'efficienza del sistema nel suo complesso o per prevenire le interruzioni di potenza.

Ad esempio, qualche anno fa sono state ideate delle scarpe aventi delle soles in cui si erano inserite piastrine piezoelettriche (su cui si basano la maggior parte degli harvester costruiti finora), le quali erano in grado di generare piccole quantità di energia elettrica durante il cammino della persona; tale energia serviva a tenere in carica un cardiofrequenzimetro usato dalla stessa persona, senza quindi la necessità di doverlo ricaricare tramite batterie o pile. Oggi sono in studio applicazioni simili, che non sfruttino come sorgente di movimento l'uomo, ma le macchine e le apparecchiature da esso utilizzate per lo svolgimento di comuni attività fisiche, come ad esempio la guida di un veicolo, etc.

Le principali fonti di energia utilizzabili con il processo del recupero di energia dall'ambiente sono queste:

- energia meccanica da fonti quali vibrazioni, sforzi e deformazioni;
- energia termica;
- energia naturale dall'ambiente (vento, flusso d'acqua e correnti oceaniche, radiazioni solari);
- corpo umano (combinazione di energia meccanica e termica generata da bio-organismi attraverso azioni semplici, come ad esempio camminare).

Bisogna però dire che si parla di fonti di energia elettrica molto limitate, dell'ordine dei milli Watt (mW), anche se oggi la tecnologia è orientata sempre più all'utilizzo di dispositivi a bassa potenza ed è proprio per quest'esigenza che sono nati componenti elettronici in grado di autoalimentarsi. Queste piccole quantità di energia vengono sfruttate e gestite nel modo più energeticamente favorevole,

cercando di ridurre al minimo l'energia persa, e accumulandole ad esempio tramite dei condensatori e/o convertendole in forme di tensioni direttamente sfruttabili; ciò è sufficiente ad alimentare dispositivi portatili, come ad esempio dei sensori wireless. Inoltre le sempre più avanzate conoscenze sulla teoria dei microprocessori hanno permesso di migliorare in modo significativo l'efficienza di tali sistemi nel processo di cattura di queste forme di energia ed in quello di conversione in energia elettrica.

Quello che la collettività tecnologica e scientifica sta cercando di fare ora è di sviluppare sistemi che sfruttino l'energy harvesting con la tecnologia MEMS, in particolare apparecchi di piccole dimensioni a bassa potenza, che siano multifunzionali e dai costi contenuti.

In questo lavoro si farà riferimento al recupero di energia derivante dalle vibrazioni meccaniche, per mezzo di harvesters piezoelettrici, cioè di micro-generatori che sfruttano materiali piezoelettrici; si descriveranno in seguito le loro principali caratteristiche, i materiali principalmente impiegati, le tipologie funzionali attualmente adottate, ed i sistemi che permettono un più efficace utilizzo di tali componenti, tra i quali, quello studiato in questo elaborato, cioè l'affiancamento di assorbitori dinamici nel loro funzionamento.

Per quanto riguarda gli harvesters, è solo recentemente (ultimi 10 anni) che c'è stato un grande sviluppo nelle tecniche di energy harvesting basate su dispositivi piezoelettrici, denominati appunto harvesters piezoelettrici, che trasformano l'energia derivante da vibrazioni presenti nell'ambiente in energia elettrica, utilizzabile per alimentare apparecchi biomedicali e piccoli dispositivi elettronici. È essenziale avere l'accordatura (tuning) dell'harvester con la fonte vibratoria per avere la miglior conversione di energia da vibratoria a elettrica, e, se la vibrazione è armonica, ciò si ottiene settando la frequenza naturale dell'harvester con la frequenza della fonte. Poiché le forme degli harvesters sono quelle di travi, il tuning viene effettuato aggiungendo tipmass a queste travi, e sono presenti molti modelli matematici in grado di descrivere anche accuratamente l'effetto delle tipmass, le quali aumentano l'effetto vibratorio degli harvesters; ciò da una parte fa sì di generare un'uscita elettrica [V] più alta, dall'altra genera stress meccanici più elevati all'interno della trave, che possono danneggiarla o romperla.

Il problema dell'accordatura degli harvesters diviene inoltre molto complicato quando l'ambiente fonte di vibrazioni è caratterizzato da frequenze variabili o da ampi spettri di variabilità; sono state sviluppate molte tecniche per fronteggiare queste condizioni di lavoro, ad esempio alcuni ricercatori hanno proposto harvesters auto-accordanti. Altri hanno sfruttato gli effetti non lineari per sviluppare harvesters efficaci su range di frequenze più ampi. In questo lavoro si vedrà un esempio di utilizzo di

sistemi ausiliari massa-molla-smorzatore (assorbitori dinamici) connessi con l'harvester per far fronte a tale problema.

Lo sviluppo dell'elaborato seguirà questa sequenza: nel capitolo 2 si presenteranno le motivazioni di tale lavoro, si descriveranno i materiali piezoelettrici e si descriverà lo stato dell'arte attuale per quanto riguarda le tecnologie ed i materiali con cui essi sono stati sviluppati fino ad oggi, ed i metodi principali per il recupero dell'energia con tali materiali; nel capitolo 3 si descriverà analiticamente il problema elettro-meccanico accoppiato, lo schema meccanico utilizzato, si daranno alcuni cenni sugli assorbitori dinamici ed i metodi legati all'utilizzo degli harvesters sull'allargamento della banda in frequenza per far sì di avere più condizioni di risonanza per recuperare energia, proponendo un modello analitico di previsione dei risultati; nel capitolo 4, che è la parte principale di tutto il lavoro, si descriverà l'approccio sperimentale adottato per le prove e l'acquisizione dei dati dalle misure eseguite con tutti i casi di studio previsti per le piastre testate, riportandone i risultati ottenuti e commentandone le caratteristiche di comportamento che è possibile evidenziare, ed in grado da poter essere confrontate con quanto atteso dalla teoria; nel capitolo 5 si presenterà la modellazione degli harvesters per mezzo degli elementi finiti, con programmi di calcolo appositi (Comsol Multiphysics) descrivendone i risultati ottenuti da simulazioni realizzate con modelli aventi la miglior fedeltà di comportamento rispetto alle prove sperimentali; nel capitolo 6 si confronteranno i risultati sperimentali e numerici (FEM) con quelli di un modello analitico elettromeccanico di harvester, in grado anche di tener conto dell'aggiunta di tipmass e di assorbitori dinamici al dispositivo ed implementabile in Matlab; infine nel capitolo 7 si commenteranno in senso critico i risultati di tali confronti, descrivendo da una parte le mancanze presenti nei modelli FEM e analitici, e dall'altra le possibili migliorie perseguibili per la struttura sperimentale per l'ottenimento di dati più ripetibili e soggetti a meno incertezze; si accennerà infine alle diverse possibilità di applicazione di queste tecnologie per quanto concerne le prove ed i modelli qui sviluppati.

Capitolo 2: Motivazioni e piezoelettricità

2.1 Motivazioni

Come accennato nell'introduzione, l'abbattimento dei costi dell'elettronica ha reso negli ultimi anni economicamente fattibili i dispositivi MEMS, di dimensione sempre più ridotta e con capacità di raccolta e conversione di energia sempre più elevata. Ogni dispositivo elettrico/elettronico necessita per il suo funzionamento di una fonte di energia che lo alimenti, e, fin dalla comparsa dei primi apparecchi, questo compito è stato per lungo tempo svolto dalla rete elettrica (per le grandi potenze elettriche) e parallelamente con l'alimentazione a batteria (piccoli apparecchi); quest'ultima ha permesso di slegarsi materialmente, anche se temporaneamente, da una rete energetica fissa, cosa che ormai è comune in tutti i cellulari, tablet ed in alcuni pc.

Nei casi in cui l'alloggio di una batteria non sia possibile o non vi siano reti elettriche a cui potersi collegare, risulta indispensabile trovare delle fonti energetiche alternative, in grado di produrre o recuperare energia anche durante lo stesso utilizzo dell'apparecchio.

Si potrebbe pensare di aggirare il problema tramite accumulatori, cioè batterie ad elevatissima durata, ma si andrebbe incontro a costi esagerati nei confronti dei costi di produzione dello stesso dispositivo; infatti al fronte di un largo miglioramento nei materiali e nelle tecnologie, che hanno permesso una miniaturizzazione ed una crescita di prestazioni, sotto il punto di vista della densità di energia immagazzinabile non si hanno avuti buoni risultati, e tali dispositivi sono oggi in continua analisi. Questo fatto ha perciò spinto verso la ricerca di nuove potenziali fonti energetiche da impiegare nei dispositivi wireless e negli apparecchi elettronici appena descritti.

Da recenti studi condotti in questo ambito, risulta che le più comuni e fattibili fonti energetiche alternative, in termini di potenza prodotta (in microWatt) e durata (in anni), sono le seguenti:

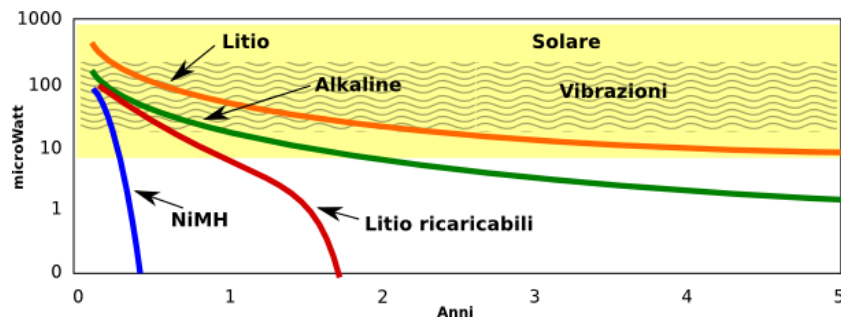


Figura 2.1: densità di potenza in funzione dell'autonomia richiesta, prodotta da batterie chimiche e fonti alternative (vibrazioni e energia solare) [4]

Si nota subito che, nonostante nel breve periodo le batterie risultino vincenti, all'aumentare dell'autonomia richiesta, altre fonti come quella solare e vibrazionale acquistano vantaggi sostanziali ai quali si aggiunge il fatto che la potenza generata da queste fonti (dette rinnovabili) risulta quasi a costo zero ed è praticamente illimitata; questi sono i motivi che spingono verso un cambio nell'alimentazione dei dispositivi elettronici, nella direzione dei dispositivi autosufficienti. L'energia necessaria quindi non è più fornita tramite batterie ma si preferisce attrezzare i dispositivi di tutti gli strumenti necessari a poterla ricavare dall'ambiente in cui si trovano ad operare, tramite raccolta energetica (energy harvesting).

Con energy harvesting, o più correttamente *energy scavenging*, si indicano tutte le tecnologie adatte a recuperare energia su piccola scala da utilizzare direttamente nel luogo in cui questa viene recuperata e convertita; la principale differenza tra energia rinnovabile e recuperata (*scavenged*) è il fattore di scala: nel primo caso infatti si producono potenze dell'ordine dei 10-100kW mentre nel secondo caso si utilizzano dispositivi con un volume di pochi cm³ e che permettono di produrre potenze limitate a poche decine di milli-microWatt.

Così facendo l'aspetto energetico è limitato solo dalla sopravvivenza fisica del dispositivo e non più dal quantitativo di energia in esso immagazzinato. Sviluppi futuri potrebbero vedere la nascita di sensori aventi tempo di vita di ordini di grandezza maggiori rispetto a quelli attuali e potrebbero inoltre essere disposti in modo permanente in posti considerati ora irraggiungibili (o non agevoli) senza doversi preoccupare di sostituzioni di alimentazioni esaurite e problemi simili.

Tra tutte le fonti di energy harvesting le più promettenti sono senza dubbio quella solare e quella vibrazionale; la seconda però costituisce oggi la via più seguita, poiché presenta potenzialità di utilizzo maggiori, ed oggi lo sfruttamento dell'energia meccanica delle vibrazioni ha già una matura tecnologia di impiego; inoltre la quasi universale presenza di vibrazioni, anche se a volte molto tenue, sia di origine antropica (movimenti umani) che naturale (correnti d'aria, moto ondoso, etc..) ha fatto sì di prediligere tale campo nelle ricerche per l'energy harvesting.

È noto che ogni sistema meccanico più o meno complesso ha determinate caratteristiche meccaniche, di massa e rigidità, che gli conferiscono determinati modi di vibrazione, ognuno con una propria forma e frequenza. Per questi dispositivi si osserva che il primo modo è quello a cui corrisponde il maggior scambio di energia, perché è il più facile da eccitare in quanto avviene alla frequenza più bassa. Per questo è importante che questo primo modo sia sintonizzato con l'eccitazione, che può essere armonica oppure impulsiva. L'idea alla base di questo lavoro è di ottenere il cosiddetto *tuning* dell'harvester utilizzando degli assorbitori dinamici, i quali:

- modificano le caratteristiche del sistema sdoppiando il primo modo di vibrare del sistema senza assorbitore dinamico
- rendono i primi due modi di vibrazione sfruttabili per il recupero di energia, poiché la loro forma di vibrare è simile a quella dell'harvester senza assorbitore

Così facendo si creano due zone a frequenze diverse in cui si ha il massimo della generazione di energia elettrica da parte dell'harvester, zone che a seconda delle caratteristiche dell'assorbitore sono più o meno lontane dalla frequenza fondamentale del dispositivo; infatti senza l'assorbitore, come già detto, i modi successivi di vibrazione della piastra piezoelettrica costituente l'harvester sono molto meno intensi, a causa delle cancellazioni delle cariche elettriche all'interno dei materiali piezoelettrici causate da una infelice distribuzione delle deformazioni dovute a questi modi successivi; ciò risulterà più chiaro quando si analizzeranno le forme modali nel capitolo delle simulazioni con il FEM.

2.2 Piezoelettricità

Come anticipato, il recupero di energia vibrazionale avviene per mezzo di harvesters realizzati con materiali piezoelettrici. Come mai vengono utilizzati tali materiali? Ciò è legato alla natura stessa di questi materiali e soprattutto al cosiddetto *effetto piezoelettrico*, che fu scoperto dai fratelli Pierre e Jacques Curie nel 1880, i quali dimostrarono che alcuni tipi di cristalli quando sottoposti a una sollecitazione meccanica sprigionano una carica elettrica di intensità proporzionale alla sollecitazione subita (effetto piezo diretto). Notarono inoltre che valeva anche l'effetto inverso: sottoponendo questi materiali ad un campo elettrico o ad un processo di polarizzazione, essi ne venivano deformati (effetto piezo indiretto). L'effetto piezo diretto è causato dalla deformazione della struttura cristallina che si ha se al materiale piezoelettrico viene imposta una certa deformazione: il reticolo cristallino si comporta in sostanza come un dipolo elettrico, infatti, come si può vedere nella figura sottostante, lo spostamento delle cariche definisce un momento di dipolo elettrico che globalmente creano la polarizzazione del materiale.

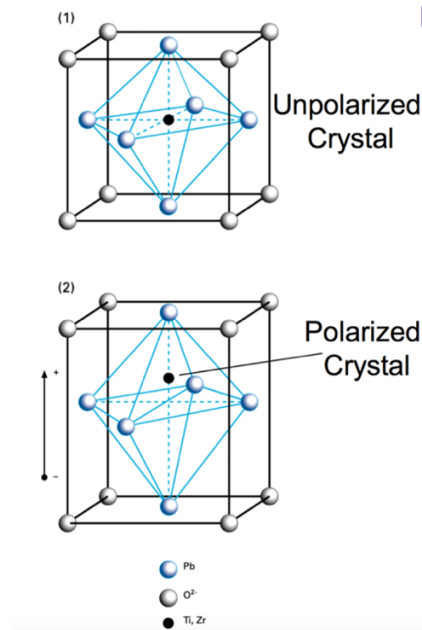


Figura 2.2: cristallo prima (sopra) e dopo (sotto) polarizzazione [10]

Questi due effetti (piezo diretto e inverso) coesistono in un materiale piezoelettrico. Il funzionamento di un cristallo piezoelettrico è quindi abbastanza semplice: quando viene compresso o teso, si posizionano sulle facce opposte delle cariche elettriche di segno opposto; il cristallo piezoelettrico si comporta quindi come un condensatore al quale è applicata una differenza di potenziale (ddp). Collegando le due facce (opposte) ad un circuito esterno, si può quindi generare una corrente detta ‘piezoelettrica’, nel caso il materiale venga sottoposto ad una certa deformazione e questo definisce il comportamento da sensore del materiale; viceversa quando viene applicata una tensione elettrica al cristallo esso si deforma, a seconda del segno e del verso di polarizzazione e questo definisce il comportamento del materiale da attuatore. In questo lavoro si sfrutterà solo il comportamento da sensore del dispositivo piezoelettrico, poiché oggetto dell’analisi.

I materiali piezoelettrici esistono in diverse forme e quelle principali sono le seguenti:

- monocristalli (ad esempio il quarzo, la tormalina, il topazio);
- materiali ceramici ferroelettrici (quelli che presentano i rendimenti ‘energetici’ più elevati sono il piombo zirconato di titanio o PZT e il titanato di bario $BaTiO_3$);
- polimerici (a matrice plastica come ad esempio il PVDF e il FVDF); essi sviluppano le proprietà piezoelettriche dopo che sono stati sottoposti a elevate polarizzazioni od a forti campi elettrici.

Tuttavia, per far si di poterli utilizzare e sfruttare in applicazioni di ingegneria, l’accoppiamento elettromeccanico che esiste tra comportamento meccanico e elettrico di questi materiali deve essere sufficientemente elevato e si ha che solo i ceramici piezoelettrici vengono di fatto utilizzati (ad esempio alcune versioni del PZT, come il PZT-5A ed il PZT-5H, sviluppati nella seconda metà dello

scorso secolo) i quali esibiscono un accoppiamento molto più alto rispetto a quello mostrato dai cristalli naturali. Tutti questi materiali hanno tipicamente proprietà anisotrope, poiché esse dipendono dalla direzione di applicazione della forza, dalla direzione di polarizzazione del materiale e dall'orientazione degli elettrodi sulle facce del cristallo (rispetto all'asse relativo alla direzione di sollecitazione). Le proprietà piezoelettriche variano anche in base all'età del materiale, allo sforzo applicato e alla temperatura di esercizio: quelle in base all'età dipendono dal metodo di produzione e dal tipo di materiale (l'invecchiamento del materiale è accelerato dalla quantità di sforzo applicatogli) e per quanto riguarda la temperatura, un materiale piezoelettrico perde le sue proprietà che lo rendono tale sopra il cosiddetto "punto di Curie".

Il comportamento piezoelettrico può anche essere indotto durante la fase di produzione, sottoponendo il materiale piezoceramico ad un forte campo magnetico o elettrico (1-2 kV/mm) che orienta i dipoli lungo una direzione specifica; vista l'importanza dell'orientazione dei cristalli nel materiale, anche i parametri che lo caratterizzano vengono espressi con l'indicazione del verso di applicazione della forza o del campo elettrico, rispetto al vettore della grandezza a cui si sta facendo riferimento. Nella teoria di tali materiali si utilizza quindi un sistema di riferimento con 3 assi ortogonali nel quale il terzo è preso sempre parallelo alla direzione di polarizzazione (o al campo elettrico), invece il primo e il secondo ne sono perpendicolari; si riescono a esprimere quindi le grandezze fisiche del materiale in funzione dei versi dei campi elettrici e dei versi delle forze agenti sullo stesso, cioè le costanti del materiale che caratterizzano le proprietà di relazione fra campi elettrici e sollecitazioni meccaniche si possono esprimere con due indici, così:

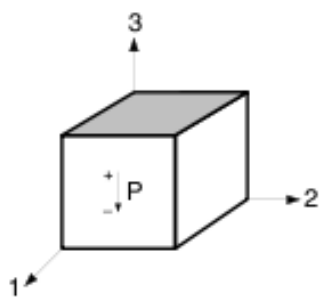


Figura 2.3: sistema di riferimento usato [2]

Nella figura sopra riportata 'P' rappresenta il vettore che indica la polarizzazione presente nel materiale. 1 e 2 indicano le direzioni della forza che agisce ortogonalmente al campo elettrico, 3 è la direzione del campo elettrico (e della forza quando agisce parallelamente ad esso) mentre 4, 5, e 6, non indicate, sono le rotazioni antiorarie attorno alle direzioni 1, 2 e 3. A seconda della direzione di applicazione della forza rispetto alla direzione di **P** si possono avere due modi per indurre l'effetto piezoelettrico in un materiale:

1) compressione/espansione parallela

La forza agente sul cristallo piezoceramico è diretta nella stessa direzione del campo elettrico ed in questo caso l'effetto piezoelettrico che ne risulta è massimo; si denota tale modo con la configurazione 33, il cui schema è il seguente:

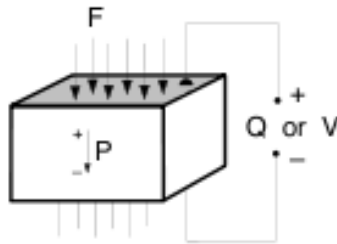


Figura 2.4: modo 33: forza F e vettore di polarizzazione P concordi [2]

La relazione tra sollecitazione meccanica applicata (forza F) e carica prodotta (q) è approssimativamente lineare (verrà studiata più in dettaglio nel prossimo paragrafo quando si parlerà del legame costitutivo dei materiali piezoelettrici) e si ha che le due grandezze sono legate da un fattore moltiplicativo d, espresso in Coulomb su Newton [C/N], proprio del materiale in uso. Nella configurazione 33 questa relazione assume questa forma:

$$q = d_{33} \cdot F \quad (2.1)$$

dove d_{33} descrive la proporzionalità tra uno stress meccanico e un campo elettrico paralleli al vettore di polarizzazione. Introducendo il fattore g in [Vm/N] si può valutare il campo elettrico generato nel cristallo in base alla pressione applicata:

$$\frac{V}{h} = g_{33} \cdot \frac{F}{wl} \quad (2.2)$$

dove h, w e l sono rispettivamente altezza, larghezza e profondità del materiale.

2) compressione/espansione ortogonale

In questo caso la forza agente sul cristallo piezoelettrico è ortogonale rispetto al vettore di polarizzazione P (o al campo elettrico) e questa configurazione è contrassegnata dai pedici 31; lo schema ideale a cui si fa riferimento è questo:

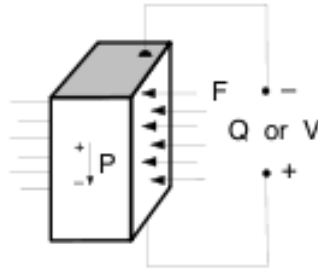


Figura 2.5: modo 31: forza F ortogonale alla polarizzazione P [2]

Le relazioni che governano questa modalità sono:

$$\frac{q}{l} = d_{31} \cdot \frac{F}{h} \quad (2.3)$$

e

$$\frac{V}{h} = g_{31} \cdot \frac{F}{wh} \quad (2.4)$$

Le maggiori problematiche applicative di tali materiali sono:

- relazione non lineare fra deformazione e tensione elettrica applicata;
- isteresi;
- creep (effetto del tempo e della temperatura sulle proprietà);
- depolarizzazione;
- fragilità;
- sensibilità alla fatica.

2.3 Relazioni costitutive

Dal punto di vista analitico, la correlazione tra sforzi/deformazioni e tensione elettrica (ddp) generata in un solido 3D piezoelettrico generico fa uso dei relativi tensori e di una simbologia che è stata appositamente sviluppata per descrivere al meglio e nel modo più semplice possibile tali relazioni. Di conseguenza, la descrizione matematica del problema elettro-meccanico con cui si ha a che fare necessita delle relazioni costitutive, che tengono conto dell'accoppiamento dovuto all'effetto piezoelettrico, che fanno uso della seguente notazione [4]:

$$S_{ij} = A_{ijkl}T_{kl} + d_{mij}E_m \quad (2.5)$$

$$D_i = d_{ijk}T_{jk} + \varepsilon_{ij}^S E_j \quad (2.6)$$

dove S_{ij} e T_{ij} sono rispettivamente i tensori delle deformazioni e degli sforzi, A_{ijkl} è la matrice di cedevolezza elastica (inversa della matrice di rigidezza), d_{mij} è la matrice di carica piezoelettrica,

E_m sono le componenti del campo elettrico, ε_{ij}^S è il tensore dielettrico e D_i è il vettore di spostamento elettrico che è legato al campo elettrico E in questo modo:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.7)$$

con ε matrice di permittività elettrica del materiale che si sta considerando.

La prima delle due espressioni (2.5) descrive la legge costitutiva lineare elastica in cui compare il termine di accoppiamento piezoelettrico, mentre la seconda (2.6) descrive la legge costitutiva elettrica in cui compare il termine di accoppiamento elastico.

Con riferimento a quanto detto nel paragrafo precedente, i generatori piezoelettrici sfruttano il coefficiente d_{33} della matrice di carica piezoelettrica del materiale quando la deformazione applicata è parallela alla direzione di polarizzazione del materiale, altrimenti il coefficiente d_{31} nel caso in cui la deformazione sia perpendicolare alla direzione del campo elettrico; si può dire che la potenza del piezo-generatore aumenta:

- all'aumentare dello spessore dello strato di materiale piezoelettrico (che deve rimanere però molto più piccolo delle altre 2 dimensioni nel piano della lastra)
- utilizzando sistemi multi strato (con i quali sono fatti tutti gli harvesters utilizzati oggi nelle applicazioni di ingegneria).

Altri parametri importanti per descrivere l'entità dell'effetto piezoelettrico che si sviluppa in un materiale di questo tipo sono:

- il coefficiente di accoppiamento elettro-meccanico k , che descrive l'efficienza con la quale il dispositivo converte l'energia meccanica in energia elettrica, pari a:

$$k = \sqrt{\frac{W_{imm}}{W_{appl}}} \quad (2.8)$$

nella quale W_{imm} è l'energia immagazzinata e W_{appl} è l'energia meccanica applicata [23].

- il coefficiente di efficienza η , che dipende dal fattore di qualità Q del generatore e da k nel seguente modo:

$$\eta = \frac{\frac{k^2}{2(1-k^2)}}{\frac{1}{Q} + \frac{k^2}{2(1-k^2)}} \quad Q = \frac{1}{2\xi} \quad \xi = \frac{c}{m} \cdot \frac{1}{2\omega_0}$$

dove ξ è il fattore di smorzamento, il quale dipende dalla frequenza propria ω_0 , dalla massa m e dal coefficiente di smorzamento c del sistema [23].

I materiali piezoelettrici maggiormente impiegati hanno i seguenti coefficienti (medi):

proprietà\materiale	PZT-5H	PZT-5A	BaTiO ₃	PVDF
$d_{33}(10^{-12}C/N)$	593	374	149	-33
$d_{31}(10^{-12}C/N)$	-274	-171	78	23
$g_{33}(10^{-3}Vm/N)$	19,7	24,8	14,1	330
$g_{31}(10^{-3}Vm/N)$	-9,1	-11,4	5	216
K_{33}	0,75	0,71	0,48	0,15
K_{31}	0,39	0,31	0,21	0,12
permettività relativa (ϵ/ϵ_0)	3400	1700	1700	12

Tabella 2.1: coefficienti di comuni materiali piezoelettrici [2]

Questi materiali sono usualmente detti *smart material*, ovvero materiali intelligenti, perché sono in grado di svolgere sia funzioni di ‘sensori’ che di ‘attuatori’ (comportamento inverso) e che quindi possono essere condizionati da un’elettronica di controllo; infatti si è visto che la piezoelettricità consiste di due effetti duali (uno diretto e uno inverso); le relazioni costitutive introdotte all’inizio del paragrafo si possono scrivere anche con altre formulazioni, più proprie e specifiche per le applicazioni di ingegneria e per l’utilizzo di tali materiali; la prima, detta *e-form* o stress-charge, deriva direttamente dall’equilibrio meccanico di un solido piezoelettrico generico (in ipotesi di piccoli spostamenti e deformazioni), unito alla congruenza lineare, nella quale si esprimono gli sforzi in funzione delle deformazioni e delle caratteristiche piezoelettriche, nel seguente modo:

$$T_{ij} = C_{ijkl}S_{kl} - e_{kij}E_k \quad (2.9)$$

$$D_i = e_{ijk}S_{jk} + \epsilon_{ij}^S E_j \quad (2.10)$$

in esse la prima espressione descrive la legge costitutiva lineare elastica per il solido (in cui compare il termine di accoppiamento piezoelettrico) mentre la seconda descrive la legge costitutiva elettrica in cui compare il termine di accoppiamento elastico. Al solito, T, S ed E rappresentano i tensori degli sforzi, delle deformazioni e il vettore del campo elettrico, mentre nella prima espressione C_{ijkl} e e_{kij} sono rispettivamente i tensori elastico (matrice di rigidità) e piezoelettrico del materiale, mentre nella seconda espressione ϵ_{ij}^S è il tensore dielettrico. Usando una notazione vettoriale, la *e-form* si può esprimere così:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & -\mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & \boldsymbol{\epsilon}^S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Si vede che questa formulazione ha lo svantaggio di non essere simmetrica (come si può notare dai termini antisimmetrici presenti sulla diagonale secondaria della matrice di accoppiamento) e per questa ragione si considera il problema nella seconda formulazione, quella delle deformazioni, detta *d-form* o strain-charge:

$$S_{ij} = A_{ijkl}T_{kl} + d_{mij}E_m \quad (2.12)$$

$$D_i = d_{ijk}T_{jk} + \varepsilon_{ij}^T E_j \quad (2.13)$$

che raggruppata in forma matriciale diviene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{d}^T \\ \mathbf{d} & \boldsymbol{\varepsilon}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

La matrice \mathbf{d} definisce l'accoppiamento piezo-meccanico ed è detta matrice di carica piezoelettrica. Queste relazioni si possono ricavare anche dalle leggi che legano la polarizzazione \mathbf{P} con lo sforzo meccanico $\boldsymbol{\sigma}$ e dalle relazioni relative al legame tra sforzo $\boldsymbol{\sigma}$ e deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$, senza passare per le equazioni di equilibrio e congruenza dei materiali stessi:

Si parte dalla relazione per l'effetto piezoelettrico diretto che lega la polarizzazione \mathbf{P} [C/m²] allo sforzo $\boldsymbol{\sigma}$ [N/m²]:

$$\mathbf{P} = \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.15)$$

ovvero in notazione matriciale,

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Poi si considera l'effetto piezoelettrico inverso in cui si ha proporzionalità tra deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$ e campo elettrico \mathbf{E} [V/m]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \quad (2.17)$$

ovvero;

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} \\ d_{15} & d_{25} & d_{35} \\ d_{16} & d_{26} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{d}]^T \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

I tensori di sforzo e deformazione sono scritti in notazione contratta (di Voigt) in modo da poterli esprimere come vettori (in questa notazione i pedici bi-numeriche diventano mono-numeriche: 11 → 1, 22 → 2, 33 → 3, 23 → 4, 13 → 5, 12 → 6).

Dalla teoria dell'elasticità è noto che si ha proporzionalità tra sforzo $\boldsymbol{\sigma}$ e deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$ (in campo lineare elastico) ed utilizzando la simbologia precedentemente introdotta valgono queste relazioni:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \text{oppure} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

dove A è la matrice di cedevolezza elastica e C quella di rigidezza (l'inversa di A), due matrici 6×6 .

Dalla fisica, lo spostamento elettrico D (un vettore della stessa dimensione di P) è legato al campo elettrico E ed alla polarizzazione P nel seguente modo:

$$D = \varepsilon \cdot E + P = \varepsilon \cdot E + d \cdot \sigma \quad (2.19)$$

dove ε è la permittività del materiale [C^2/Nm^2] pari al prodotto $\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ (e qui ε_0 è la permittività del vuoto mentre ε_r è la permittività relativa del materiale) e ε è una matrice 3×3 .

In definitiva deformazione ε e spostamento elettrico D dipendono entrambi dal campo elettrico E e dallo sforzo σ applicato al materiale, ovvero;

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma, E) \quad D = D(\sigma, E)$$

quindi per piccole variazioni vale:

$$\Delta \varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \Delta \sigma + \frac{\partial \varepsilon}{\partial E} \Delta E \quad (2.20)$$

$$\Delta D = \frac{\partial D}{\partial \sigma} \Delta \sigma + \frac{\partial D}{\partial E} \Delta E \quad (2.21)$$

e da considerazioni termodinamiche si dimostra che:

$$\frac{\partial D}{\partial \sigma} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial E} = d \quad (2.22)$$

e si può scrivere:

$$\Delta \varepsilon = A \cdot \Delta \sigma + d \cdot \Delta E \quad (2.23)$$

$$\Delta D = d \cdot \Delta \sigma + \varepsilon_0 \varepsilon_r^\sigma \cdot \Delta E \quad (2.24)$$

Integrando e nell'ipotesi che se $\sigma = E = 0$ allora anche $\varepsilon = D = 0$ si ottengono le relazioni finali della *d-form* (o formulazione strain-charge):

$$[\varepsilon] = [A][\sigma] + [d^T][E] \quad (2.25)$$

$$[D] = [d][\sigma] + \varepsilon_0[\varepsilon_r^\sigma][E] \quad (2.26)$$

Per non creare confusione di simbologia con la precedente espressione della *d-form*, si può vedere che nell'espressione qui sopra $[\varepsilon] = [S]$ e $[d^T] = \varepsilon_0[\varepsilon_r^\sigma]$.

Per le applicazioni con gli harvesters piezoelettrici generalmente si utilizza tale materiale nella forma di parallelepipedi con spessore molto più piccolo rispetto alle altre due dimensioni (delle specie di lamine piezoelettriche), cioè delle lastre, per cui in questi casi le equazioni precedenti si possono ridurre nel seguente modo: se l'elemento è modellato con la teoria della trave di Eulero-Bernoulli, le componenti di sforzo sono tutte nulle tranne quella nella direzione 1, e disponendo una coppia di elettrodi sulle facce piane (nel piano compreso tra le direzioni 1 e 2) si possono ricavare le seguenti espressioni:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & d_{31} \\ d_{31} & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (\text{d-form}) \quad (2.27)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & -e_{31} \\ e_{31} & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (\text{e-form}) \quad (2.28)$$

Questa è la massima riduzione delle equazioni costitutive piezoelettriche che si può applicare a solidi 3D ‘sottili’, estremamente comoda e abbastanza affidabile dal punto di vista dei risultati che si possono ottenere con essa. A seconda poi di come viene modellato l’elemento (teoria della trave secondo Timoshenko, elementi piastra 2D, etc..) sono possibili altri tipi di semplificazioni, che non verranno presi in considerazione in quanto non rientrano nei casi di studio qui presentati.

Di solito gli elettrodi sono posti sulle due facce piane della piastra piezoelettrica, e in tutta generalità sono possibili 3 tipi di conversione di energia:

- effetto 33 => sforzo che induce una deformazione parallela alla polarizzazione P;
- effetto 31 => sforzo che induce una deformazione ortogonale alla polarizzazione del materiale, cioè lungo la direzione 1 (la tensione elettrica viene generata in direzione 3);
- effetto 15 => sforzo lungo la direzione di taglio (indotto da una coppia) e tensione elettrica generata lungo la direzione 1 (modello di trave secondo Timoshenko);

ovvero:

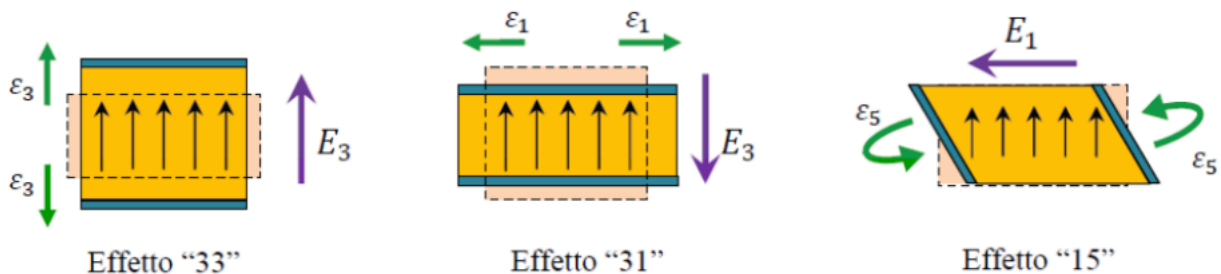


Figura 2.6: relazioni sforzo-campo elettrico e tensione elettrica generata [4]

Si ha comunque che la direzione dove viene raccolta la tensione elettrica dipende da come viene polarizzato il materiale (che a sua volta dipende dall’orientazione dei cristalli nel materiale o dei dipoli se il materiale è ceramico-ferroelettrico).

2.4 Harvesters piezoelettrici e tecniche di conversione

Si è detto nell’introduzione che questi sistemi possono garantire una vita potenzialmente infinita del dispositivo sul quale sono montati, non necessitano di collegamenti tramite cavi elettrici, non richiedono manutenzione o ricarica e possono essere posizionati in ambienti pericolosi e inaccessibili. Ciò che si sta valutando è la raccolta di energia dalle sole vibrazioni meccaniche presenti

nell'ambiente ed esistono tre principali categorie di sistemi di conversione di questo tipo di energia in elettrica: trasduttori piezoelettrici, elettromagnetici ed elettrostatici.

Ognuna di queste tre tecniche presenta vantaggi e svantaggi e la migliore dipende dal tipo di applicazione. Quella che fa uso di materiali piezoelettrici è stata presentata nei paragrafi precedenti ed è quella che ha ricevuto le maggiori attenzioni da parte dei ricercatori negli ultimi anni; molti di questi sistemi di trasduzione sono in grado di fornire voltaggi notevoli (da 1 a 4-5 V), se considerati rispetto alle dimensioni estremamente piccole di questi dispositivi. Infatti la tensione elettrica generata in questi sistemi deriva direttamente dal comportamento costitutivo del materiale con cui essi sono costruiti e si eliminano le presenze di fonti di energia elettriche esterne (non garantito con gli altri sistemi di conversione). Un'ulteriore vantaggio dei trasduttori piezoelettrici è il fatto che possono essere costruiti in micro e macro scale grazie alle ormai affermate tecniche di fabbricazione dei componenti in queste dimensioni.

Gli harvesters elettromagnetici funzionano sulla base della legge di Faraday in cui si accoppia un campo magnetico statico (generato da un magnete permanente) con un solenoide in moto relativo rispetto al primo; sono dispositivi utilizzati per basse frequenze (2-20 Hz) e presentano una difficile integrazione nei MEMS.

Infine gli harvesters elettrostatici consistono principalmente in una capacità variabile in cui uno dei due elettrodi è attaccato ad una massa oscillante sospesa da molle mentre l'altro elettrodo è fissato al telaio della struttura/dispositivo. Quando la massa si sposta la capacità cambia e cariche aggiuntive si accumulano sugli elettrodi, perciò durante il movimento della massa si crea una corrente che fluisce attraverso gli elettrodi; uno dei loro principali svantaggi è la necessità di un'alimentazione esterna per precargarli. Ciò potrebbe sembrare andare in contrasto con il funzionamento dell'harvester, ma ha senso se l'alimentazione proviene dall'energia estratta dal dispositivo stesso; infatti il generatore richiede solo di essere avviato all'inizio del processo di conversione. Questa tecnologia di conversione è molto impiegata nei MEMS tuttavia la potenza generata è inferiore rispetto a quella generata dai dispositivi piezoelettrici e elettromagnetici.

In questo lavoro si farà riferimento esclusivamente alla tecnica con trasduttore piezoelettrico e questi dispositivi sono chiamati energy harvesters cinetici; si farà uno studio lineare di tali meccanismi, e a tal proposito, bisogna tener conto che le principali limitazioni di un sistema lineare sono le seguenti:

- banda di frequenza in cui il dispositivo è sensibile molto stretta, intorno alla frequenza di risonanza: ciò limita le applicazioni alle sole frequenze prossime a quelle di risonanza;
- bassa versatilità;

- inutilizzabilità nei dispositivi MEMS: spostamenti in gioco molto limitati e dunque potenza estratta non sufficiente per elettroniche dell'ordine dei milliWatts.

Visto che un harvester viene progettato come un oscillatore in cui si cerca di accordare (tuning) la sua frequenza di risonanza con quella di eccitazione presente nell'ambiente in modo da massimizzare la potenza estratta e l'energia elettrica generata; questa condizione si ottiene facilmente solo quando la frequenza di eccitazione è nota e stabile nel tempo. Tuttavia quando la frequenza di eccitazione ambientale è sconosciuta o varia nel tempo, un harvester con una sola frequenza di risonanza non è in grado di garantire prestazioni ottimali (e come detto precedentemente ne ha solo una, quella del primo modo di vibrazione, visto che è un unico componente). È ben noto infatti che le vibrazioni che si possono avere a disposizione nell'ambiente presentano un range di frequenze molto ampio, soprattutto alle basse frequenze, cioè tra i 10÷150 Hz; vi sono varie strategie per superare questo pratico inconveniente e le più importanti sono queste: frequency tuning, oscillatori multimodali e frequency up conversion. In dettaglio esse sono:

a) Frequency tuning:

Da recenti studi sui sistemi vibranti è stato dimostrato che in alcuni casi è possibile accordare la frequenza di risonanza di un oscillatore armonico con la frequenza di eccitazione principale alla quale è soggetto l'oscillatore, in due modi: passivo e attivo. Il modo passivo richiede una potenza in ingresso intermittente (manuale o automatica) che vada ad accordare il sistema finché il frequency match è completo dopodiché la potenza richiesta diventa nulla finché la frequenza di eccitazione varia nuovamente. La modalità attiva invece richiede maggior potenza in quanto il tuning è continuo nel tempo ma porta ad un incremento delle prestazioni del dispositivo. Il tuning può essere realizzato meccanicamente con delle molle o delle viti, con dei magneti oppure sfruttando materiali piezoelettrici, al fine di aggiustare i parametri inerziali per modificare la rigidità dell'harvester (mediante precarico o predeflessione) o la sua configurazione geometrica. Il metodo più diretto e rudimentale che si ha a disposizione per eseguire un tuning specifico è l'aggiunta di tipmass all'harvester, che spostano la frequenza principale del dispositivo a valori inferiori e voluti.

b) Harvesters multimodali:

Si tratta di harvesters multivibranti, progettati appositamente quando la frequenza di eccitazione si avvicina molto (fino a coincidere) a una delle frequenze naturali dell'harvester; così la potenza utile può essere estratta su un più ampio spettro di frequenza, incrementando la banda di sensibilità dell'harvester complessivo. Vi sono varie possibilità di progetto di tale tipologia di harvesters e le più utilizzate sono le seguenti,

- Ibrido: combina più meccanismi di trasduzione insieme ovvero un trasduttore elettromagnetico che genera elevata potenza alle basse frequenze (decine di Hz) ed un trasduttore piezoelettrico che genera elevata potenza a frequenze più elevate (3-5 centinaia di Hz). La combinazione di questi due schemi in un unico sistema migliora in maniera significativa la risposta dell'harvester anche se presenta lo svantaggio dovuto al fatto di dover combinare la potenza in uscita dai due differenti sistemi di conversione, cioè richiede due circuiti elettrici separati.
- Array: è un 'vettore' di harvesters ognuno con lunghezza e caratteristiche inerziali differenti (ad esempio le tip mass concentrate nelle estremità libere dei vari harvesters sono diverse) connessi ad una base comune alla quale arriva la vibrazione ambientale. Ogni harvester ha un'unica risonanza ed in base a come sono definite le rispettive caratteristiche inerziali, il dispositivo può essere progettato in modo da fornire una buona risposta su un ampio range di frequenze.

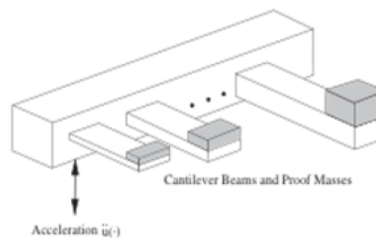


Figura 2.7: vettore di harvesters piezoelettrici con lunghezze e tip mass differenti [2]

Con l'approccio multimodale si incrementa di fatto il range di sensibilità dell'harvester ed il campo di frequenze dove il sistema lavora in condizioni di risonanza, tuttavia solo uno o alcuni cantilever sono in risonanza durante il funzionamento del dispositivo, e richiede spazi di lavoro che magari non sono agevoli in alcune applicazioni.

c) Frequency up conversion:

Poiché le vibrazioni che è possibile raccogliere dall'ambiente presentano una distribuzione energetica su un ampio range di frequenze, ma con una certa predominanza alle basse frequenze, questa tecnica consente di trasferire la frequenza di vibrazione della fonte a quella di risonanza dell'harvester. Un sistema di questo tipo, semplificato, è il seguente:

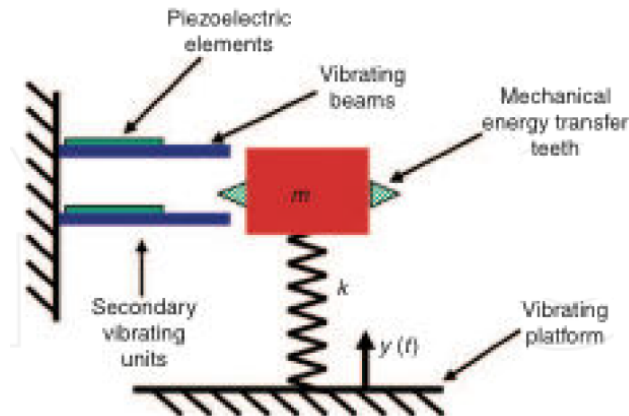


Figura 2.8: schema meccanico di un sistema frequency up [4]

L'oscillatore m - k ha una risonanza molto più bassa di quella della coppia di travette piezoelettriche e quando il dente colpisce la punta di una delle due travette, esse iniziano a oscillare alla loro frequenza naturale e inducono quindi anche la massa a oscillare a frequenze vicine alla loro; così inoltre si disaccoppia la frequenza di eccitazione da quella di vibrazione dell'harvester. Tale tecnica ha lo svantaggio di dover tarare la risonanza della massa oscillante alla frequenza media di vibrazione della fonte.

Tutte queste strategie di raccolta dell'energia dall'ambiente appartengono alla categoria degli oscillatori lineari ed in generale per un sistema generico di questo tipo, la funzione di trasferimento presenta, come si vedrà, uno o più picchi in corrispondenza delle risonanze, perciò sono sistemi che funzionano bene principalmente quando l'energia in ingresso si trova in questo range di frequenze. Questa costituisce una seria limitazione per gli harvesters di piccola dimensione, per almeno due motivi:

- lo spettro delle vibrazioni disponibili nell'ambiente è molto ampio;
- il range di frequenze più energetico è quello delle basse frequenze (o dove si sviluppa il primo picco relativamente alla prima forma modale del sistema) ed è abbastanza difficile costruire sistemi risonanti a basse frequenze.

Questi sono gli svantaggi che limitano il campo di applicazione degli harvesters a configurazioni a cantilever (travi a mensola); tuttavia se vengono utilizzati sistemi non lineari nell'energy harvesting, si riesce a recuperare energia su spettri di frequenza più ampi, anche quando non sono risonanti; questi sistemi però non verranno trattati né approfonditi poiché non rientrano nello scopo di questo lavoro.

2.5 Stato dell'arte attuale

Nell'ambito della ricerca attuale, alcuni ricercatori si sono focalizzati sulla possibilità di sfruttare i modi di vibrazione superiori dell'harvester, ma tale approccio presenta qualche difficoltà poiché la carica raccolta dagli elettrodi (e quindi la tensione elettrica generata dalla lamina) dipende dall'alternanza nei segni delle deformazioni lungo la trave; infatti i modi superiori sono caratterizzati da forme modali complesse con linee nodali che generano cambiamenti nei segni delle deformazioni che causano delle cancellazioni nelle cariche elettriche prodotte comportando un ridotto effetto di generazione elettrica da parte dell'harvester. Ciò risulterà più chiaro in seguito, nell'analisi delle forme modali degli harvesters.

Come brevemente anticipato nell'introduzione, il problema dell'allargamento di banda e dell'accordatura degli harvesters piezoelettrici può essere parzialmente risolto accoppiando all'harvester un sistema ausiliario massa-molla-smorzatore; questa tecnica viene utilizzata da qualche decennio in altri campi applicativi, come il controllo delle vibrazioni e in applicazioni di acustica (ad esempio il risonatore di Helmholtz). Di solito il sistema ausiliario è costituito da un assorbitore dinamico di vibrazioni (DVA), e, nel campo dell'energy harvesting sono stati fatti finora pochi studi di applicazione dei DVA ad harvesters piezoelettrici.

Per citarne qualcuno, il professor Cornwell nel 2005 propose di attaccare sugli strati piezoelettrici di un harvester, una struttura ausiliaria in grado di agire come un DVA per la struttura principale (l'harvester). Altre ricerche prevedevano lo studio di dispositivi magneto-dinamici, ovvero sistemi massa-molla collocati tra l'harvester e la base in movimento; su tale tecnica, nel 2011 Aldraihem eseguì uno studio sperimentale in cui applicò tale dispositivo ad un vettore di lamine piezoelettriche, settando la frequenza principale del dispositivo uguale ad una di quelle dei diversi harvesters, e i risultati mostrarono la comparsa di almeno due picchi di risonanza, un alto incremento nell'energia elettrica generata ed un significativo allargamento della banda di lavoro del dispositivo completo.

Nel 2013, Faruque Ali propose di utilizzare uno stesso harvester come DVA, il quale funzionava come harvester e poco come assorbitore (il DVA era in parallelo con un altro harvester), eccitato da un sistema capace di generare vibrazioni con variabilità random della frequenza; i risultati ottenuti mostrarono comunque che tale sistema era in grado di offrire sia un buon controllo delle vibrazioni sia un buon recupero di energia elettrica.

Infine, nel 2014 Staaf sviluppò un sistema costituito da due harvesters, a 2 gdl, accoppiati nel seguente modo: il primo viene fissato ad un'estremità, e sull'altra estremità (libera) viene posto un blocchetto di interposizione in cui viene incastrato l'altro harvester, come mostra la figura seguente:

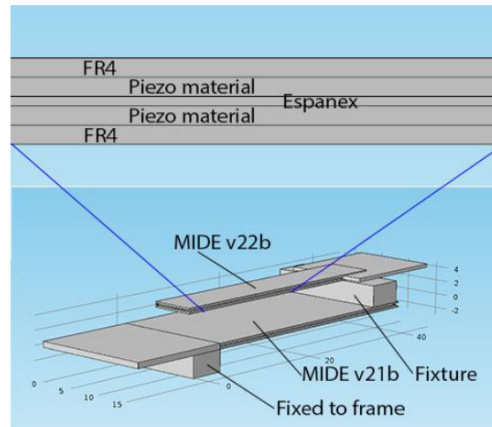


Figura 2.9: modello FEM per la simulazione del sistema a 2 harvesters proposto da Staaf [15]

I due harvester sono entrambi vincolati come mensole, ed il secondo agisce da assorbitore rispetto al primo. I risultati sperimentali di tale sistema mostrano comunque un incremento nella potenza elettrica generata.

Pochi altri modelli a più di un gdl con harvesters piezoelettrici sono stati proposti, ed in questo lavoro si considererà un diverso utilizzo degli harvesters rispetto ai sistemi visti finora; l'harvester non viene fatto lavorare come un DVA, ma si introduce un assorbitore per tunare l'harvester e rendere possibile lo sfruttamento di almeno due modi di vibrazione, vicini tra loro. I dettagli dell'assorbitore e sul sistema di attacco alla lamina verranno spiegati nei prossimi capitoli. Lo scopo è quello di operare un tuning meccanico dell'harvester piezoelettrico attraverso l'aggiunta al dispositivo di altri sistemi vibranti con caratteristiche tali da permettere di ottenere dall'harvester un recupero di energia in un range di frequenze che contenga più picchi di risonanza, invece di avere un solo picco risonante (tunabile secondo i metodi appena visti, che prevedevano l'utilizzo di un unico harvester sul quale venivano variate caratteristiche inerziali o geometriche).

Quindi l'obiettivo dell'assorbitore non è il controllo e la riduzione delle vibrazioni agenti sull'harvester ma la realizzazione di almeno due zone (relative ai primi due modi vibratorii in cui le forme di tali modi sono abbastanza semplici da non comportare cancellazioni di cariche elettriche) più o meno distanti tra loro in cui si possa avere il massimo recupero di energia.

Capitolo 3: Schema elettro-meccanico e assorbitori dinamici

3.1 Cantilever piezoelettrici: schemi meccanici

Come accennato nel capitolo 2, gli harvesters oggi sono costruiti come travi a sbalzo, perché in grado di lavorare nel modo 31 attraverso il quale si possono sfruttare meglio le vibrazioni presenti nell'ambiente.

Come è possibile osservare dalla figura sottostante, che rappresenta un'harvester piezoelettrico a cantilever con una tip mass all'estremità libera, in seguito alla flessione della trave le fibre superiori vengono tese mentre quelle inferiori risultano compresse:

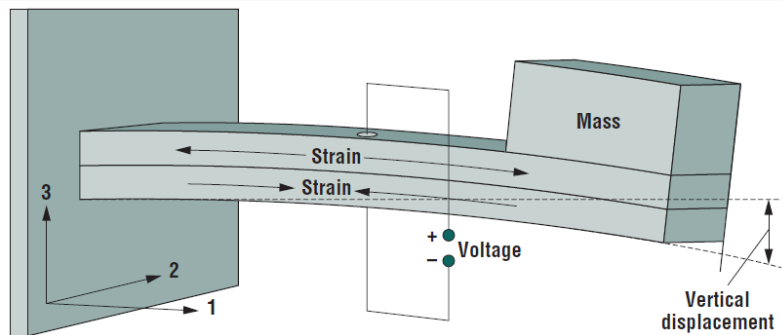


Figura 3.1: cantilever piezoelettrico semplice [4]

Si osserva che la deformazione (strain) avviene lungo la direzione 1, e, essendo la polarizzazione del materiale orientata lungo la direzione 3, si ha di fatto il modo 31; per le proprietà del materiale piezoelettrico, sui due strati (layer) si crea una tensione elettrica (voltage) che dipende dalla resistenza del circuito elettrico collegato alla trave stessa. Infatti a seconda che gli strati siano collegati in serie o in parallelo si ha rispettivamente un incremento della tensione o della corrente e la potenza massima si ottiene per frequenze medie di eccitazione nel primo caso e per alte frequenze di eccitazione nel secondo.

Tuttavia un collegamento in serie è più prestante di uno in parallelo. Di solito tra i due strati di materiale piezoelettrico è presente un terzo strato elastico, neutro elettricamente, di materiale metallico, che conferisce robustezza alla struttura e che permette anche di migliorare l'accoppiamento elettromeccanico.

Quando il dispositivo vibra, ad esempio grazie all'imposizione di un moto armonico controllato alla base di attacco dell'harvester, si crea una differenza di potenziale alternata tra gli elettrodi posti sulle facce del materiale piezoelettrico della mensola, e, se si connette una resistenza tra essi, si ottiene di fatto un circuito RC (dove C è la capacità equivalente degli strati piezoelettrici sulla mensola); combinando le equazioni della teoria delle travi con le equazioni costitutive dei materiali

piezoelettrici e le equazioni dei circuiti elettrici, la potenza prodotta dal dispositivo risulta, come si vedrà in seguito, funzione dell'ampiezza della vibrazione eccitatrice e della frequenza sia di tale vibrazione sia di quella propria del dispositivo stesso. La potenza massima prodotta dal dispositivo si ha quando questo vibra in risonanza, ossia quando la frequenza eccitatrice coincide con la frequenza propria del dispositivo.

La potenza generata dipende inoltre dalla massa di prova presente all'estremità della mensola, detta tipmass, ed aumenta all'aumentare di quest'ultima (in modo circa lineare), ma diminuisce criticamente all'allontanarsi dalla frequenza naturale di oscillazione della mensola.

Poiché la tensione elettrica prodotta è alternata, essa deve essere convertita in un segnale stabile e continuo; questo è possibile grazie al circuito esterno che utilizza un convertitore AC-DC (formato da un raddrizzatore a ponte di diodi e da una capacità 'livellante' detta $C_{storage}$) ed un secondo stadio DC-DC per regolare l'uscita elettrica al fine di massimizzare la potenza immagazzinata, come rappresentato qui sotto:

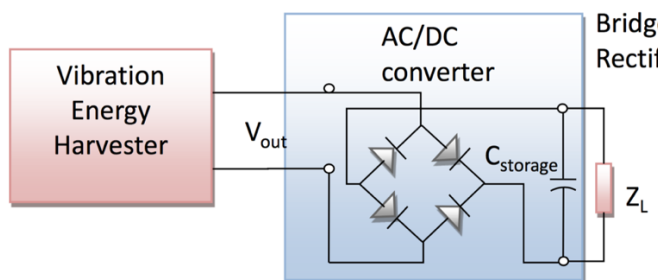


Figura 3.2: circuito esterno per raddrizzare il segnale elettrico prodotto dall'harvester [2]

3.1.1 Modello a parametri concentrati

Qualsiasi harvester si consideri (ovvero mensole con geometrie e/o caratteristiche inerziali diverse), si ha che essi presentano un comune comportamento caratteristico dal punto di vista vibratorio, descritto semplicemente da due parametri: smorzamento del sistema e frequenza naturale. Trascurando per ora la parte elettrica del sistema (il circuito esterno e l'equivalenza elettrotecnica delle componenti piezoelettriche della mensola) che verrà presa in considerazione più avanti (una volta raggiunto un modello meccanico sufficientemente preciso), gli schemi meccanici più semplici da studiare sono quelli a parametri concentrati, ovvero:

- modello a parametri concentrati senza smorzamento;
- modello a parametri concentrati con smorzamento.

È noto che il sistema è di per sé continuo (una piastra a mensola incastrata) e che presenta, come si vedrà in seguito, infiniti modi di vibrare a frequenze caratteristiche di vibrazione via via più alte all'aumentare del numero del modo considerato; quello che per la maggior parte dei casi interessa è tuttavia il primo modo (quello alla frequenza naturale più bassa) o i primi a seconda del range di frequenze considerato, i quali hanno le massime ampiezze di vibrazione. Infatti visto che il sistema fornisce le prestazioni più elevate nelle condizioni di risonanza, ed essendo la maggior parte delle eccitazioni collocate in un range di frequenze vicine alle frequenze dei primi modi di vibrare del sistema, quello che conviene fare nello studiare i modelli a parametri concentrati è di considerare un sistema equivalente che avrà una massa concentrata, una rigidezza ed uno smorzamento equivalenti, ovvero un sistema con un'unica risonanza, tali da garantire risultati in termini di frequenze e ampiezze di spostamento i più vicini possibili a quelli che si hanno con il primo modo del sistema continuo. Tale schematizzazione prende il nome di *lumped*; il modello appena definito se studiato in assenza di smorzamento non può essere preso in considerazione, in quanto non fornisce risultati attendibili e soprattutto presenta un'ampiezza della risposta 'infinita' quando si è in risonanza. Il modello con smorzamento è il seguente:

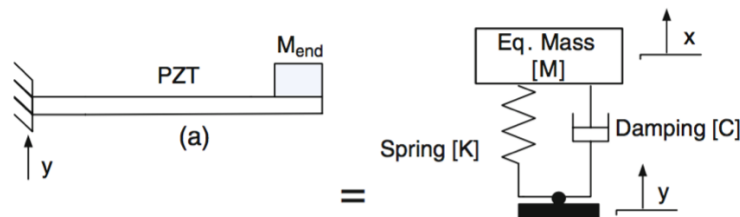


Figura 3.3: modello equivalente a parametri concentrati (destra) del cantilever con tip mass (sinistra) [2]

in cui y è lo spostamento imposto alla base del sistema, x è lo spostamento della massa equivalente rispetto a quello imposto alla base. L'equazione del moto del sistema si può ottenere applicando il principio di D'Alembert o la seconda legge della dinamica ed in questo caso assume questa forma:

$$M\ddot{z} + C\dot{z} + Kz = -M\ddot{y} \quad (3.1)$$

dove $z = x - y$ è lo spostamento netto della massa, M è la massa equivalente del sistema (che si ricaverà in seguito), C è lo smorzamento meccanico del sistema e K è la rigidezza della mensola.

Dalla teoria della meccanica delle vibrazioni è inoltre noto che:

$$\text{rapporto di smorzamento } \zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{mK}}$$

$$\text{frequenza naturale del sistema } \omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

La rigidezza K dipende dalle condizioni di vincolo e per una trave a mensola incastrata è pari a $\frac{3EI}{L^3}$ dove E è il modulo elastico della trave, I è il momento d'inerzia flessionale rispetto all'asse z (uscente

dal foglio, da non confondere con lo spostamento precedentemente definito) e L la sua lunghezza; se la sezione della trave è rettangolare $I = \left(\frac{1}{12}\right)bh^3$ dove b e h sono rispettivamente profondità e spessore della trave. Applicando la trasformata di Laplace all'equazione del moto si può ricavare il rapporto tra lo spostamento della massa equivalente z e lo spostamento imposto alla base della mensola y ; assumendo poi una certa legge temporale per quest'ultimo, ad esempio una funzione armonica (sinusoidale) del tipo $y = Y\sin(\omega t)$ si può calcolare la risposta nel tempo $z(t)$ invertendo rispetto a z la trasformata, ottenendo:

$$z(t) = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}} Y\sin(\omega t - \phi) \quad (3.2)$$

dove la fase ϕ indica il ritardo della risposta rispetto al moto imposto ed è pari a $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{C\omega}{K-\omega^2M}\right)$. La potenza meccanica generata si può ottenere dal prodotto tra la velocità $\dot{z}(t)$ e la forza inerziale della massa m della mensola $-m\ddot{y}$, il cui modulo è pari a:

$$P(t) = \frac{m\zeta Y^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^3 \omega^3}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (3.3)$$

La potenza meccanica massima si ottiene lavorando alla frequenza naturale $\omega = \omega_n$ e risulta:

$$P_{\max} = \frac{mY^2\omega_n^3}{4\zeta} \quad (3.4)$$

una relazione approssimata che però mostra le principali dipendenze della potenza generabile da un harvester a mensola: essa aumenta al diminuire dello smorzamento del sistema ed all'aumentare della frequenza naturale, della massa e dello spostamento impresso alla base della mensola.

Nei casi in cui vi è la presenza di una tipmass all'estremità, utilizzata per tunare la risonanza dell'harvester, il precedente modello lumped può essere rivisto per tener conto della presenza di quest'ultima; ciò viene fatto attraverso considerazioni energetiche sfruttando un procedimento energetico sviluppato da Lord Rayleigh che garantisce dei risultati approssimati abbastanza buoni per la valutazione della risonanza del sistema (corrispondente alla frequenza del primo modo del corrispondente sistema continuo).

Infatti nella massa equivalente M rientrano sia la massa della trave sia la tip mass (quando presente), e, per poterla valutare, si tiene conto di un fattore numerico legato alla massa della trave (m_b), per fare in modo di assumerla concentrata all'estremità della stessa, assieme alla tip mass (M_t) e dare così alla mensola solo caratteristiche elastiche. Questo fattore numerico si può calcolare con il metodo di Rayleigh, calcolando il valore massimo dell'energia cinetica della mensola, schematizzata con il modello di trave di Eulero-Bernoulli, nel modo seguente:

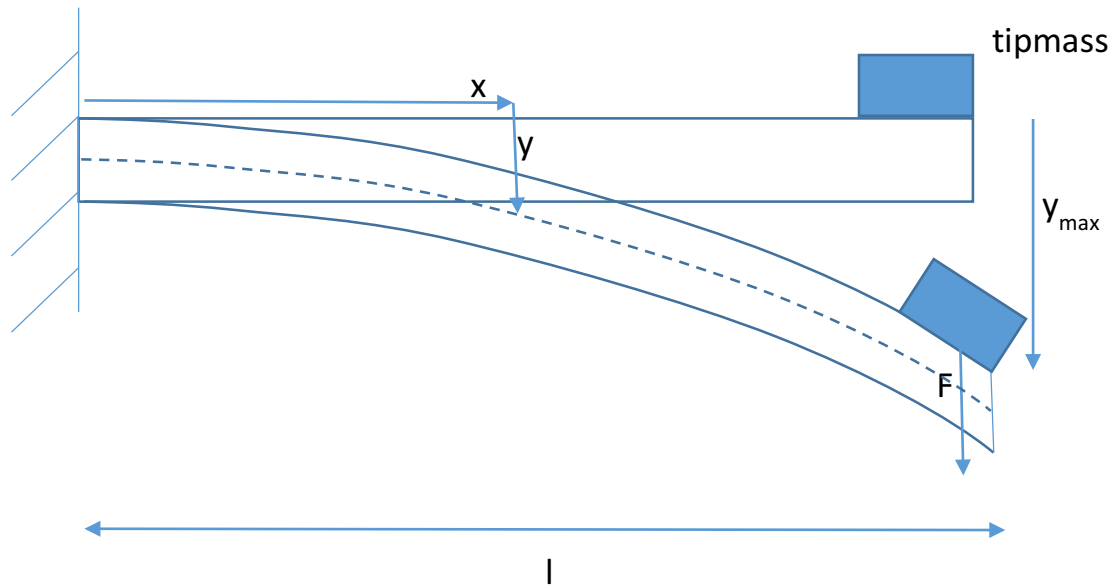


Figura 3.4: modello di trave assunto per il calcolo delle masse equivalenti del sistema

Si ricava la curvatura $y''(x)$ della trave dalla linea elastica, considerando il momento flettente M_{fl} positivo quando tende le fibre superiori e si impongono le condizioni ai vincoli ($y'(0) = y(0) = 0$ cioè rotazione nulla e spostamento nullo all'incastro):

$$y''(x) = -\frac{M_{fl}(x)}{YI} = -\frac{F(x-l)}{YI} = \frac{F(l-x)}{YI}$$

$$y'(x) = \frac{Fl}{YI}x - \frac{F}{2YI}x^2 + C \quad \text{ed essendo } y'(x) = 0 \rightarrow C = 0$$

$$y(x) = \frac{Fl}{2YI}x^2 - \frac{Fl}{6YI}x^3 + D \quad \text{ed essendo } y(x) = 0 \rightarrow D = 0$$

Lo spostamento massimo si ha in $x = l$ e vale $y(l) = \frac{Fl}{2YI}l^2 - \frac{F}{6YI}l^3 = \frac{Fl^3}{3YI} = y_{max}$ e si può scrivere la curvatura $y(x)$ in funzione di esso:

$$y(x) = \frac{y_{max}}{2} \left[3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right] \quad (3.5)$$

Noto che la vibrazione della trave si può scrivere come $y(x) = y(x, t) = y(x) * t(t)$, e che l'energia cinetica massima vale:

$$T = \frac{1}{2} M_t \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{x=l}^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dm \quad (3.6)$$

ed essendo $dm = \frac{m_t}{l} dx$ (m_t è la massa della sola trave) si ottiene per l'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} M_t y_{max}^2 t(\dot{t})^2 + \frac{1}{2} \frac{m_t}{l} t(\dot{t})^2 \int_0^l \frac{y_{max}^2}{4} \left[3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]^2 dx \quad (3.7)$$

$$T = \frac{1}{2} M_t y_{max}^2 t(\dot{t})^2 + \frac{1}{2} \frac{33}{140} m_t y_{max}^2 t(\dot{t})^2 \quad (3.8)$$

$$T = \frac{1}{2} \left(M_t + \frac{33}{140} m_t \right) y_{max}^2 t(\dot{t})^2 \quad (3.9)$$

nella quale si riconosce in modo chiaro la massa equivalente del sistema pari a $M_t + \frac{33}{140} m_t$ concentrata nell'estremità libera della trave, ma soprattutto si nota la comparsa di un fattore numerico di valore $\frac{33}{140}$, che rappresenta la quota di massa della trave (mensola costituente l'harvester) che permette di descrivere in maniera più precisa il sistema a parametri concentrati:

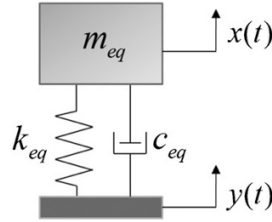


Figura 3.5: schema meccanico migliorato dell'harvester (lumped) [24]

qui $x(t)$ è lo spostamento assoluto della massa del sistema, $m_{eq} = \frac{33}{140} ml + M_t$ è la massa equivalente del sistema, $y(t) = Y_0 e^{j\omega t}$ è lo spostamento armonico della base di attacco della mensola, $k_{eq} = \frac{3YI}{l^3}$ è la rigidezza equivalente della mensola (Y è l'elasticità trasversale della trave ed I l'inerzia corrispondente) e $c_{eq} = 2\zeta\omega_n m_{eq}$ è il coefficiente di smorzamento equivalente.

Ora si può stimare la frequenza naturale non smorzata delle vibrazioni trasversali della trave con tip mass con la discretizzazione appena ottenuta:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{3YI/l^3}{\left(\frac{33}{140}\right)ml + M_t}} \quad (3.10)$$

Questo modello costituirà la base della progettazione degli assorbitori dinamici applicati alle lamine piezoelettriche, e tuttavia non sarà considerato per il calcolo delle frequenze naturali delle lamine, che verranno trattate con un modello a parametri distribuiti, più consono e affidabile.

La risposta $z(t)$ che indica lo spostamento netto della massa m_{eq} vale invece:

$$z(t) = \frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega} Y_0 e^{j\omega t} \quad (3.11)$$

Tuttavia anche con questo modello la stima della risonanza (che dovrebbe essere l'equivalente della prima risonanza del corrispondente modello a parametri distribuiti), ma soprattutto dell'ampiezza della risposta in corrispondenza di essa, non va così bene come potrebbe sembrare, e si valuteranno, dopo aver presentato i modelli a parametri distribuiti maggiormente impiegati, gli opportuni fattori correttivi da applicare alle risposte fornite dai modelli a parametri concentrati per ottenere risposte vicino a quelle fornite dai modelli descritti con la teoria dei continui, ormai nota.

3.1.2 Modello a parametri distribuiti

Come già anticipato nel paragrafo precedente, anche per essi si hanno 4 casi, che verranno analizzati più in dettaglio in quanto sono i modelli a cui si farà riferimento per la realizzazione del modello analitico di previsione dei risultati; essi sono:

- modello a parametri distribuiti senza smorzamento (senza e con tipmass);
- modello a parametri distribuiti con smorzamento (senza e con tipmass).

3.1.3 Modello a parametri distribuiti senza smorzamento

Se si considera la mensola priva di smorzamento e priva di tipmass, l'equazione del moto della trave si può ottenere dall'imposizione delle condizioni ai vincoli nell'equazione che ne descrive lo spostamento trasversale (Eulero-Bernoulli o linea elastica), un'equazione differenziale alle derivate parziali di questa forma [1]:

$$YI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = -m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.12)$$

dove $m = \rho A$ è la densità lineare della trave (A è l'area della sezione trasversale e ρ è la densità del materiale) e YI è la rigidezza flessionale della mensola. In questo modo quello che si sta compiendo è un'analisi modale, ovvero un'analisi dei modi di vibrare della trave, che si trovano dall'equazione delle vibrazioni libere, che si ha qualora tutti i termini forzanti siano nulli, come quella sopra riportata; sono comunque possibili due casi, visti gli utilizzi degli harvesters: senza tipmass e con tipmass, e quando presente viene indicata con M_t (con inerzia I_t). Il caso più generale comprende la tipmass e ciò che cambia rispetto al semplice caso in cui essa non fa parte del sistema consiste solo in una diversa espressione delle condizioni ai vincoli [24], infatti:

- in assenza di tip mass:

$$w(0, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0 \quad YI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) = 0 \quad YI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(L, t) = 0$$

- con tip mass:

$$w(0, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0 \quad YI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) + I_t \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x}(L, t) = 0 \quad YI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(L, t) - M_t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(L, t) = 0$$

Lo schema meccanico di riferimento è il seguente:

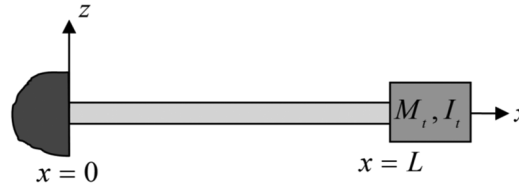


Figura 3.6: trave a mensola (harvester) con tip mass [24]

In ogni caso, sia con tipmass che senza, la soluzione $w(x, t)$ si ottiene per separazione delle variabili individuando due funzioni, una spaziale ed una temporale, ed ha questa forma:

$$w(x, t) = \phi(x)\eta(t) \quad (3.13)$$

Se tale soluzione viene sostituita nell'equazione del moto si ottiene quest'espressione:

$$\frac{YI}{m} \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^4\phi(x)}{dx^4} = - \frac{1}{\eta(t)} \frac{d^2\eta(t)}{dt^2} \quad (3.14)$$

Si vede che la parte a sinistra dell'uguale dipende solo dalla variabile spaziale x mentre quella a destra dipende solo dalla variabile temporale t ; essendo variabili indipendenti tra loro, entrambe le espressioni devono essere uguali per ogni tempo t e per ogni coordinata x , ad una costante γ per cui si ottengono due equazioni ognuna in una sola variabile:

$$\text{variabile } x: \quad \frac{d^4\phi(x)}{dx^4} - \gamma \frac{m}{YI} \phi(x) = 0 \quad (3.15)$$

$$\text{variabile } t: \quad \frac{d^2\eta(t)}{dt^2} + \gamma\eta(t) = 0 \quad (3.16)$$

la costante γ è positiva e rappresenta il quadrato di una pulsazione naturale ω , ovvero $\gamma = \omega^2$; la soluzione delle equazioni appena dedotte si esprime così:

$$\phi(x) = A\cos\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + B\cosh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + C\sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + D\sinh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) \quad (3.17)$$

$$\eta(t) = E\cos(\omega t) + F\sin(\omega t) \quad (3.18)$$

dove A, B, C, D, E e F sono costanti incognite mentre $\lambda^4 = \omega^2 \frac{mL^4}{YI}$.

Per trovare le costanti relative alla funzione spaziale (A, B, C e D) bisogna risolvere il problema agli autovalori che si ottiene sostituendo $w(x, t) = \phi(x)\eta(t)$ nelle condizioni ai vincoli, per ottenere tali condizioni nella sola funzione $\phi(x)$:

$$\phi(0) = \frac{d\phi(0)}{dx} = 0 \quad YI \frac{d^2\phi}{dx^2}(L) - \omega^2 I_t \frac{d\phi}{dx}(L) = 0 \quad YI \frac{d^3\phi}{dx^3}(L) + \omega^2 M_t \phi(L) = 0$$

Le prime due condizioni sostituite in $\phi(x)$ forniscono:

$$A + B = 0$$

$$C + D = 0$$

perciò,

$$\phi(x) = A \left[\cos\left(\frac{\lambda}{L}x\right) - B\cosh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) \right] + C \left[\sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) - D\sinh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) \right] \quad (3.19)$$

e le costanti incognite risultano essere solo A e C; con le altre due condizioni si ottiene il seguente problema agli autovalori [24]:

$$\begin{bmatrix} \cos\lambda + \cosh\lambda - \frac{\lambda^3 I_t}{mL^3} (\sin\lambda + \sinh\lambda) & \sin\lambda + \sinh\lambda + \frac{\lambda^3 I_t}{mL^3} (\cos\lambda - \cosh\lambda) \\ \sin\lambda - \sinh\lambda + \frac{\lambda M_t}{mL} (\cos\lambda - \cosh\lambda) & -\cos\lambda - \cosh\lambda + \frac{\lambda M_t}{mL} (\sin\lambda - \sinh\lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Senza tener conto della soluzione banale $A = C = 0$ (che corrisponde ad avere $\phi(x) = 0$), valori non nulli di A e C si ottengono azzerando il determinante della matrice dei coefficienti, che fornisce l'equazione caratteristica seguente:

$$1 + \cos\lambda \cosh\lambda + \lambda \frac{M_t}{mL} (\cos\lambda \sinh\lambda - \sin\lambda \cosh\lambda) - \frac{\lambda^3 I_t}{mL^3} (\cosh\lambda \sin\lambda + \sinh\lambda \cos\lambda) + \frac{\lambda^4 M_t I_t}{m^2 L^4} (1 - \cos\lambda \cosh\lambda) = 0 \quad (3.21)$$

Da quest'equazione si ottengono gli autovalori λ degli infiniti modi di vibrare della trave; l'r-esimo autovalore associato all'r-esimo modo di vibrare si denota con λ_r ; ogni modo di vibrare è collegato alle autofunzioni $\phi(x)$ e $\eta(t)$ ed in questo caso si sta risolvendo per $\phi_r(x)$ che risulta:

$$\phi_r(x) = A_r \left[\cos\left(\frac{\lambda_r}{L} x\right) - \cosh\left(\frac{\lambda_r}{L} x\right) + \zeta_r \left(\sin\left(\frac{\lambda_r}{L} x\right) - \sinh\left(\frac{\lambda_r}{L} x\right) \right) \right] \quad (3.22)$$

$$\text{con } \zeta_r = \frac{\sin\lambda_r - \sinh\lambda_r + \lambda_r \frac{M_t}{mL} (\cos\lambda_r - \cosh\lambda_r)}{\cos\lambda_r + \cosh\lambda_r - \lambda_r \frac{M_t}{mL} (\sin\lambda_r - \sinh\lambda_r)} \quad (3.23)$$

Nel caso più semplice di assenza della tipmass ($M_t = I_t = 0$) l'equazione caratteristica si ridurrebbe alla seguente espressione:

$$1 + \cos\lambda \cosh\lambda = 0 \quad (3.24)$$

In entrambi i casi, dall'r-esimo autovalore λ_r si ricava la frequenza naturale non smorzata delle vibrazioni libere relativa all'r-esimo modo di vibrare;

$$\omega_r = \lambda_r^2 \sqrt{\frac{YI}{mL^4}} \quad (3.25)$$

In definitiva l'r-esimo modo naturale di vibrazione della trave è dato da:

$$w_r(x, t) = \phi_r(x) \eta_r(t) \quad (3.26)$$

e $\eta_r(t)$ prende il nome di coordinata modale (o risposta modale). La risposta generale è nota essere una combinazione lineare di tutti i modi di vibrare e risulta:

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r(t) \quad (3.27)$$

ovvero,

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\cos \frac{\lambda_r}{L} x - \cosh \frac{\lambda_r}{L} x + \zeta_r \left(\sin \frac{\lambda_r}{L} x - \sinh \frac{\lambda_r}{L} x \right) \right] (A_r \cos \omega_r t + B_r \sin \omega_r t) \quad (3.28)$$

dove A_r e B_r sono costanti incognite ricavabili dalle condizioni iniziali $w(x,0)$ e $\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0)$.

Le autofunzioni appena trovate, che descrivono la risposta generale del sistema in base alle condizioni iniziali ed ai vincoli a cui è soggetto, godono di una proprietà particolare: sono ortogonali. Infatti, ad esempio per quelle che descrivono le funzioni spaziali dei modi $\phi_r(x)$, considerando il problema agli autovalori per due diversi modi s e r , vale che:

$$YI \frac{d^4 \phi_r(x)}{dx^4} = \omega_r^2 m \phi_r(x) \quad (3.29)$$

$$YI \frac{d^4 \phi_s(x)}{dx^4} = \omega_s^2 m \phi_s(x) \quad (3.30)$$

Moltiplicando la prima per $\phi_s(x)$ e la seconda per $\phi_r(x)$, ed integrando sulla lunghezza della mensola si ottiene:

per la prima [24]:

$$\int_0^L \phi_s(x) YI \frac{d^4 \phi_r(x)}{dx^4} dx = \omega_r^2 \int_0^L \phi_s(x) m \phi_r(x) dx \quad (3.31)$$

sfruttando le condizioni ai vincoli per la parte a sinistra e integrando per parti la parte a destra,

$$\int_0^L \frac{d^2 \phi_s(x)}{dx^2} YI \frac{d^2 \phi_r(x)}{dx^2} dx = \omega_r^2 \left\{ \int_0^L \phi_s(x) m \phi_r(x) dx + \phi_s(L) M_t \phi_r(L) + \left[\frac{d\phi_s(x)}{dx} I_t \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right]_{x=L} \right\} \quad (3.32)$$

per la seconda [24]:

$$\int_0^L \phi_r(x) YI \frac{d^4 \phi_s(x)}{dx^4} dx = \omega_s^2 \int_0^L \phi_r(x) m \phi_s(x) dx \quad (3.33)$$

$$\int_0^L \frac{d^2 \phi_s(x)}{dx^2} YI \frac{d^2 \phi_r(x)}{dx^2} dx = \omega_s^2 \left\{ \int_0^L \phi_s(x) m \phi_r(x) dx + \phi_s(L) M_t \phi_r(L) + \left[\frac{d\phi_s(x)}{dx} I_t \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right]_{x=L} \right\} \quad (3.34)$$

notando che i termini a sinistra della prima e della seconda sono identici e che $\omega_s^2 \neq \omega_r^2$ (r e s sono due modi distinti) si ottengono le condizioni di ortogonalità delle autofunzioni (nel caso spaziale, ma vale anche per quelle temporali), sottraendo la seconda dalla prima:

$$\int_0^L \phi_s(x) m \phi_r(x) dx + \phi_s(L) M_t \phi_r(L) + \left[\frac{d\phi_s(x)}{dx} I_t \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right]_{x=L} = 0, \quad \text{se } \omega_r^2 \neq \omega_s^2 \quad (3.35)$$

La forma della condizione di ortogonalità appena definita si esprime meglio in questo modo:

$$\int_0^L \phi_s(x) m \phi_r(x) dx + \phi_s(L) M_t \phi_r(L) + \left[\frac{d\phi_s(x)}{dx} I_t \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right]_{x=L} = \delta_{rs} \quad (3.36)$$

dove δ_{rs} è il delta di Kronecker e nel caso in cui $s = r$, si può usare tale condizione per trovare l'ampiezza modale A_r dell'autofunzione r -esima. Le autofunzioni scritte in questo modo permettono una normalizzazione rispetto alla massa e applicando le condizioni di vincolo presenti sull'estremità libera si ottiene una formulazione equivalente per la normalizzazione:

$$\int_0^L \frac{d^2 \phi_s(x)}{dx^2} YI \frac{d^2 \phi_r(x)}{dx^2} dx = \omega_r^2 \delta_{rs} \quad (3.37)$$

Manca a questo punto lo studio della risposta forzata, poiché, come si denoterà nella parte relativa alle prove sperimentali, il sistema viene sottoposto ad una forzante armonica che lo fa vibrare per generare una certa quantità di energia elettrica; conviene però passare al modello che tiene conto della presenza dello smorzamento, che è quello che più si avvicina alla realtà dei fenomeni studiati.

3.1.4 Modello a parametri distribuiti con smorzamento

Si tiene conto di due meccanismi di attrito: uno dovuto all'aria, indicato con un coefficiente di attrito viscoso equivalente c_a e l'altro dovuto allo smorzamento interno del materiale, indicato con il fattore di Kelvin-Voigt c_s (che appare come termine $c_s I$ per tener conto della struttura meccanica e dell'energia dissipata nella trave durante il movimento vibratorio). Così l'equazione del moto delle vibrazioni libere smorzate, in assenza di tip mass risulta essere:

$$YI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + c_s I \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.38)$$

anche in questa equazione YI è la rigidità flessionale della trave, m è la densità per unità di lunghezza della stessa e $w(x, t)$ è lo spostamento assoluto rispetto all'incastro alla base della trave alla coordinata x (tra 0 e L) al tempo t .

Tale equazione differenziale alle derivate parziali è stata ricavata assumendo (come fatto anche precedentemente nel modello senza smorzamento) il modello di trave di Eulero-Bernoulli; nel caso in cui il sistema sia sottoposto a forzante, la quale impone una certa legge di spostamento alla base in cui si ha l'incastro della trave $w_b(x,t)$, si può già scrivere l'equazione delle vibrazioni forzate (sempre senza tipmass) in funzione dello spostamento relativo della trave rispetto alla base $w_{rel}(x,t)$, considerando che:

$$w(x, t) = w_b(x, t) + w_{rel}(x, t) \quad (3.39)$$

Calcolando le derivate, tenendo conto che solo i termini relativi a m e c_a contengono lo spostamento della base $w_b(x, t)$, ovvero quelli con le sole derivate rispetto al tempo, sostituendo si ottiene:

$$YI \frac{\partial^4 w_{rel}(x, t)}{\partial x^4} + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}(x, t)}{\partial^4 x \partial t} + c_a \frac{\partial w_{rel}(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial t^2} = -m \frac{\partial^2 w_b(t)}{\partial t^2} - c_a \frac{\partial w_b(t)}{\partial t} \quad (3.40)$$

un'equazione delle vibrazioni forzate nello spostamento relativo della trave. In questo caso le condizioni ai vincoli per il moto trasversale vibratorio relativo $w_{rel}(x, t)$ sempre con incastro in $x = 0$ e libero in $x = L$ si scrivono così:

$$w_{rel}(0, t) = \frac{\partial w_{rel}}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (3.41)$$

$$YI \frac{\partial^2 w_{rel}}{\partial x^2}(L, t) + c_s I \frac{\partial^3 w_{rel}}{\partial t \partial x^2}(L, t) = 0 \quad YI \frac{\partial^3 w_{rel}}{\partial x^3}(L, t) + c_s I \frac{\partial^4 w}{\partial t \partial x^3}(L, t) = 0 \quad (3.42)$$

Anche in questo caso la risposta $w_{rel}(x, t)$ si può scrivere con una serie convergente di infinite autofunzioni armoniche, come visto precedentemente:

$$w_{rel}(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r(t) \quad (3.43)$$

dove $\phi_r(x)$ è l'autofunzione relativa allo spostamento normalizzata rispetto alla massa del sistema relativa all' r -esimo modo di vibrare:

$$\phi_r(x) = \sqrt{\frac{1}{mL}} \left[\cosh \frac{\lambda_r}{L} x - \cos \frac{\lambda_r}{L} x - \sigma_r \left(\sinh \frac{\lambda_r}{L} x - \sin \frac{\lambda_r}{L} x \right) \right] \quad (3.44)$$

con λ_r autovalore dell' r -esimo modo (una frequenza dimensionale) dato dall'equazione caratteristica seguente:

$$1 + \cos \lambda_r \cosh \lambda_r = 0 \quad (3.45)$$

e con $\sigma_r = \frac{\sinh \lambda_r - \sin \lambda_r}{\cosh \lambda_r + \cos \lambda_r}$. In essa infatti non compare l'effetto della tipmass né dello smorzamento.

Le autofunzioni soddisfano anche qui le condizioni di ortogonalità, uguali a quelle ricavate precedentemente. Sfruttando le condizioni ai vincoli e le condizioni di ortogonalità si può ricavare dall'equazione alle derivate parziali la risposta modale r -esima, cioè si ottiene un set di infinite equazioni differenziali ordinarie del II ordine di questo tipo [24]:

$$\frac{d^2 \eta_r(t)}{dt^2} + 2\zeta_r \omega_r \frac{d\eta_r(t)}{dt} + \omega_r^2 \eta_r(t) = f_r(t) \quad (3.46)$$

dove $f_r(t)$ è la forzante modale dovuta alla parte forzata dell'equazione di partenza mentre ζ_r è il rapporto di smorzamento che include i due effetti smorzanti del sistema, ossia aria e interno del materiale:

$$\zeta_r = \zeta_r^s + \zeta_r^a = \frac{c_s I \omega_r}{2YI} + \frac{c_a}{2m\omega_r} \quad (3.47)$$

Essendo la forzante nell'equazione alle derivate parziali costituita da due termini, anche la forzante modale lo sarà, e la si esprime nella seguente maniera:

$$f_r(t) = f_r^m(t) + f_r^c(t) = -m \left(\gamma_r^m \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \gamma_r^\theta \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \right) - c_a \left(\gamma_r^w \frac{dg(t)}{dt} + \gamma_r^\theta \frac{dh(t)}{dt} \right) \quad (3.48)$$

con $f_r^m(t)$ e $f_r^c(t)$ forzanti dovute all'inerzia della trave ed allo smorzamento, dove

$$\gamma_r^m = \int_0^L \phi_r(x) dx \quad (3.49)$$

$$\gamma_r^\theta = \int_0^L x \phi_r(x) dx \quad (3.50)$$

sono coefficienti di accoppiamento modale.

La risposta modale si può ottenere facilmente con l'integrale di Duhamel (assumendo condizioni iniziali nulle) nel seguente modo:

$$\eta_r(t) = \frac{1}{\omega_{rd}} \int_0^t f_r(\tau) e^{-\zeta_r \omega_r (t-\tau)} \sin \omega_{rd} (t-\tau) d\tau \quad (3.51)$$

dove $\omega_{rd} = \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2}$ è la frequenza naturale smorzata dell'r-esimo modo di vibrare. In questo modo è possibile calcolare la risposta a forzanti generiche e non per forza solo armoniche.

Tuttavia nella maggior parte dei casi pratici alla base viene imposto un moto traslatorio armonico per semplificare al massimo il problema e stimare nella maniera migliore possibile la potenza massima ottenibile alla prima risonanza. Se infatti la base si muovesse di tale moto, del tipo $w_b(t) = W_0 e^{j\omega t}$ (con W_0 ampiezza massima dello spostamento, j unità immaginaria e ω frequenza di eccitazione) la risposta modale r-esima assumerebbe questa espressione:

$$\eta_r(t) = \frac{m\omega^2 - j\omega c_a}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega} \gamma_r^w W_0 e^{j\omega t} \quad (3.52)$$

con $\gamma_r^w = \int_0^L \phi_r(x) dx = \frac{2\sigma_r}{\lambda_r} \sqrt{\frac{L}{m}}$, un termine di accoppiamento modale.

In definitiva la risposta del sistema assume questa forma:

$$w_{rel}(x, t) = 2W_0 e^{j\omega t} \sum_{r=1}^{\infty} \left[\cos \frac{\lambda_r}{L} x - \cosh \frac{\lambda_r}{L} x + \sigma_r \left(\sin \frac{\lambda_r}{L} x - \sinh \frac{\lambda_r}{L} x \right) \right] \frac{\sigma_r (\omega^2 - j\omega c_a)}{\lambda_r (\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega)} \quad (3.53)$$

Questa espressione è poi possibile valutarla all'estremità libera $x = L$ dove risulta pari a:

$$w_{rel}(L, t) = 2W_0 e^{j\omega t} \sum_{r=1}^{\infty} [\cos \lambda_r - \cosh \lambda_r + \sigma_r (\sin \lambda_r - \sinh \lambda_r)] \frac{\sigma_r (\omega^2 - j\omega c_a)}{\lambda_r (\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega)} \quad (3.54)$$

Finora è stata assunta l'assenza della tipmass; prima di studiarne l'influenza sulla risposta del sistema appena visto conviene confrontare l'ultimo modello (distribuito con smorzamento) con quello a parametri concentrati (lumped) per derivare dei coefficienti correttivi da poter applicare al modello

lumped al fine di stimare in modo veloce la frequenza di risonanza e l'ampiezza della risposta relativa, senza compiere errori troppo grandi.

3.1.5 Fattore correttivo per il modello lumped

Considerando le espressioni delle risposte valutate all'estremità libera ($x = L$) del modello a parametri distribuiti (con smorzamento) e del modello a parametri concentrati, rispettivamente:

$$w_{rel}(L, t) = 2W_0 e^{j\omega t} \sum_{r=1}^{\infty} [\cos\lambda_r - \cosh\lambda_r + \sigma_r(\sin\lambda_r - \sinh\lambda_r)] \frac{\sigma_r(\omega^2 - j\omega c_a)}{\lambda_r(\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega)} \quad (3.55)$$

$$z(t) = \frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega} Y_0 e^{j\omega t} \quad (3.56)$$

Poiché lo smorzamento dovuto all'aria è solitamente trascurabile (ζ_r^a e $c_a \ll 1$) la prima si riduce alla seguente espressione:

$$w_{rel}(L, t) = 2\omega^2 W_0 e^{j\omega t} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sigma_r[\cos\lambda_r - \cosh\lambda_r + \sigma_r(\sin\lambda_r - \sinh\lambda_r)]}{\lambda_r(\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega)} \quad (3.57)$$

Il rapporto tra lo spostamento all'estremità della trave e lo spostamento della base fornisce un buon mezzo di comparazione dei due modelli; questi rapporti sono delle funzioni di trasferimento chiamate comunemente trasmissibilità degli spostamenti $T(\omega) = \frac{w_{rel}(x,t)}{W_0 e^{j\omega t}}$ o $\frac{w_{rel}(x,t)}{Y e^{j\omega t}}$.

Sono curve che per entrambi i modelli mostrano un picco in corrispondenza della prima risonanza ($r = 1$) e che variano al variare dello smorzamento del sistema; si vede infatti che, chiamata $\Omega = \omega/\omega_1$ il rapporto tra la frequenza di eccitazione e la frequenza fondamentale (la prima del modello a parametri distribuiti, assunta come quella più corretta) i picchi sussistono allo stesso rapporto anche se le ampiezze degli stessi sono diverse,

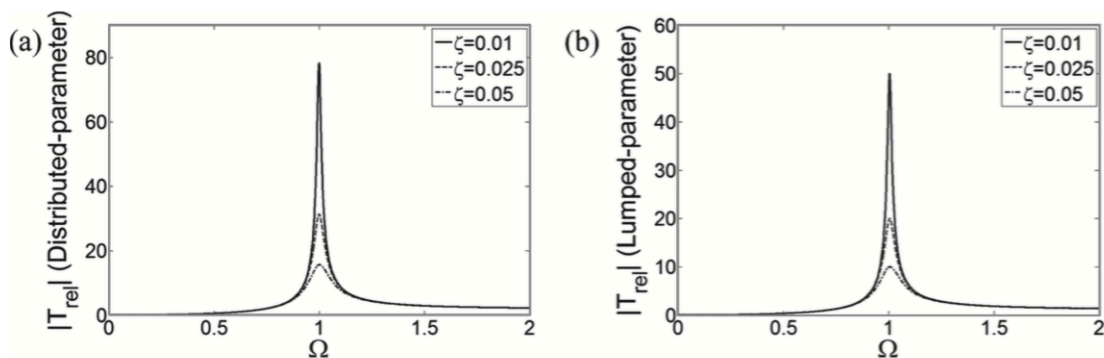


Figura 3.7: funzioni di trasferimento tra spostamento dell'estremità della trave e spostamento della base al variare dello smorzamento del sistema [1]

Si vede subito che l'errore sull'ampiezza della risposta alla prima risonanza fornita dal modello lumped è molto elevato, diminuisce di poco al diminuire dello smorzamento, ma aumenta in modo

drastico alle frequenze più alte, perché le vibrazioni alle frequenze dopo la prima risonanza non possono essere valutate con il modello lumped.

Per superare tale inconveniente si introduce un fattore correttivo μ [1] che permette, almeno per la prima risonanza del sistema (che è l'unica vista dal modello lumped) di garantire un'ampiezza della risposta molto vicina a quella effettiva (data dal sistema a parametri distribuiti):

$$w_{rel}(L, t) = \frac{\mu_1 \omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2 + j2\zeta_1 \omega_1 \omega} Y_0 e^{j\omega t} \quad (3.58)$$

e

$$\mu_1 = \frac{2\sigma_1[\cos\lambda_1 - \cosh\lambda_1 + \sigma_1(\sin\lambda_1 - \sinh\lambda_1)]}{\lambda_1} \quad (3.59)$$

nell'ipotesi di valutare la risposta della trave modellata con il modello lumped, in $x = L$, in assenza di tipmass ed alla prima risonanza (cioè $\lambda_1 = 1.875$ e $\sigma_1 = 0.734095$).

Confrontando ora le trasmissibilità del modello continuo e del modello lumped corretto, per uno smorzamento del 5% ($\zeta = 0.05$) si ottiene un buon riscontro per un ampio range di frequenze attorno alla frequenza fondamentale, come si può vedere nel grafico qui sotto:

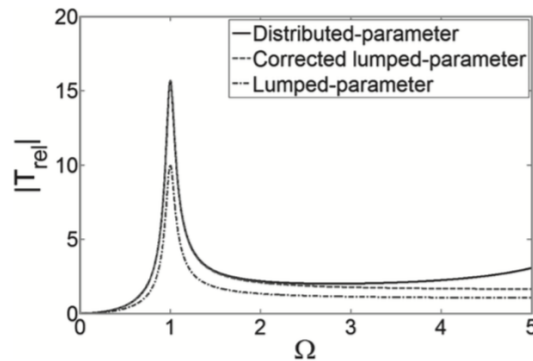


Figura 3.8: trasmissibilità tra il modello continuo e il modello lumped corretto in assenza di tip mass, in $x = L$ [1]

Tuttavia, se la trave non venisse però eccitata al primo modo di vibrare ma ad un modo corrispondente ad una frequenza più elevata (uno dei modi successivi al primo), il fattore di correzione del modo di interesse da applicare avrebbe questa espressione:

$$\mu_r = \frac{2\sigma_r[\cosh\lambda_r - \cos\lambda_r - \sigma_r(\sinh\lambda_r - \sin\lambda_r)]}{\lambda_r} \quad (3.59)$$

3.1.6 Modello a parametri distribuiti smorzato e con tipmass

Nei casi in cui vi è la presenza della tipmass i fattori di correzione cambiano, infatti la presenza della tipmass all'estremità libera della trave cambia non solo le autofunzioni, le espressioni delle risposte modali e l'equazione caratteristica per il calcolo degli autovalori, ma anche il termine forzante

nell'equazione del moto delle vibrazioni forzate, causa la presenza della stessa tipmass come contributo aggiuntivo.

In particolare l'equazione delle vibrazioni forzate nel caso del modello continuo con smorzamento, assume, in presenza della tipmass questa espressione [24]:

$$\begin{aligned}
 YI \frac{\partial^4 w_{rel}(x, t)}{\partial x^4} + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}(x, t)}{\partial^4 x \partial t} + c_a \frac{\partial w_{rel}(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial t^2} \\
 = -[m + M_t \delta(x - L)] \frac{\partial^2 w_b(t)}{\partial t^2}
 \end{aligned}
 \tag{3.60}$$

dove $\delta(x)$ è la funzione delta di Dirac (che indica che la tipmass si trova e agisce alla distanza $L-x$ dal punto considerato, il quale si trova alla coordinata x dall'inizio della piastra) ed il termine forzante dovuto all'attrito con l'aria è stato trascurato. Tale formulazione risulterà conveniente anche per trattare l'influenza di assorbitori dinamici, come verrà illustrato alla fine di questo capitolo, per mostrare la deduzione di un modello analitico completo.

In questo caso la forzante modale relativa all'autofunzione temporale $\eta_r(t)$, che corrisponde al membro di destra dell'equazione qui sopra, assumerebbe questa forma:

$$f_r(t) = -m \left(\frac{d^2 g(t)}{dt^2} \int_0^L \phi_r(x) dx + \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \int_0^L x \phi_r(x) dx \right) - M_t \phi_r(L) \left(\frac{d^2 g(t)}{dt^2} + L \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \right)
 \tag{3.61}$$

Si dimostra inoltre che il fattore di correzione μ_1 relativo alla prima risonanza del sistema continuo, assume questa espressione:

$$\mu_1 = \phi_1(L) \left(M_t \phi_1(L) + m \int_0^L \phi_1(x) dx \right)
 \tag{3.62}$$

Quindi il fattore di correzione varia al variare della tip mass e si ha che in assenza di tipmass ($M_t/mL = 0$) $\mu_1 \cong 1.566$, mentre con tipmass molto elevate ($M_t/mL \rightarrow \infty$) $\mu_1 \cong 1$; si deduce quindi che si può utilizzare il modello lumped non corretto solo quando la tip mass è molto più elevata della massa della trave (proprio perché $\mu_1 \cong 1$), e da un punto di vista fisico si ha che l'inerzia della tip mass domina nel termine forzante sull'inerzia della trave. L'andamento di μ_1 in funzione di M_t/mL è questo,

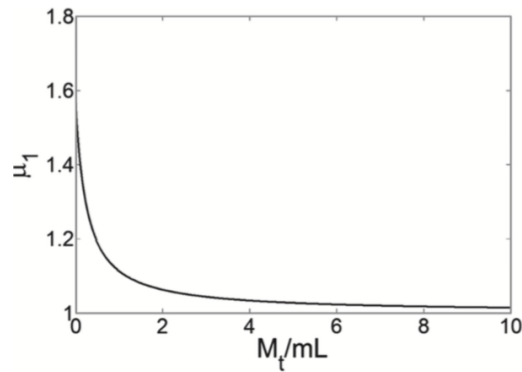


Figura 3.9: variazione del fattore di correzione del modello lumped (alla frequenza fondamentale) con il rapporto tra tip mass e massa della trave [1]

Un'espressione approssimata di questo fattore, che garantisce un errore inferiore all'1% per tutti i valori di M_t/mL si può ricavare con un fitting della curva sopra rappresentata, e si ottiene:

$$\mu_1 = \frac{\left(\frac{M_t}{mL}\right)^2 + 0.603\left(\frac{M_t}{mL}\right) + 0.08955}{\left(\frac{M_t}{mL}\right)^2 + 0.4637\left(\frac{M_t}{mL}\right) + 0.05718} \quad (3.63)$$

3.2 Cantilever piezoelettrici: schemi elettromeccanici

Finora sono stati analizzati i principali modelli meccanici sia a parametri concentrati sia distribuiti che descrivono gli harvesters dal solo punto di vista meccanico-vibrotorio, in presenza e in assenza di una tipmass; in questo paragrafo verrà presa in considerazione anche la parte elettrica, indispensabile per garantire il funzionamento del dispositivo.

È da tener presente che la frequenza naturale dell'intero sistema (mensola composita costituente l'harvester assieme alle parti elettriche del circuito esterno) è diversa da quella relativa alla sola parte meccanica del dispositivo, ed è leggermente più alta (poche unità di Hertz).

Rimane valido anche in questo caso l'assumere un fattore correttivo nel passaggio dal modello a parametri concentrati a quello a parametri distribuiti, quando si vuole stimare in maniera veloce la prima frequenza propria di quest'ultimo; se tale fattore non venisse utilizzato, le variabili di interesse (ampiezza della risposta $w_{rel}(t)$, tensione elettrica generata $v(t)$ e potenza in uscita dall'harvester $P(t)$) risulterebbero sottostimate.

In generale la parte elettrica dell'harvester dipende da quanti strati piezoelettrici sono presenti nella mensola, da come essi sono disposti su quest'ultima e da come sono collegati tra loro, oltre che dalle caratteristiche del circuito esterno a essi collegato che consente la conversione del segnale in ingresso (spostamento o deformazione) in un segnale elettrico ed il successivo raddrizzamento dello stesso (poiché vibrotorio e alternato).

Esistono tre configurazioni base per gli harvester, quando si considera anche l'accoppiamento con la parte elettrica:

- unimorph: vi è un solo strato piezoelettrico sulla mensola (unimorfa);
- bimorph: due strati piezoelettrici sulla mensola che possono essere connessi in due modi con il resto del circuito elettrico: $\begin{cases} \text{in serie} \\ \text{in parallelo} \end{cases}$ (bimorfa);

i cui rispettivi schemi sono i seguenti:

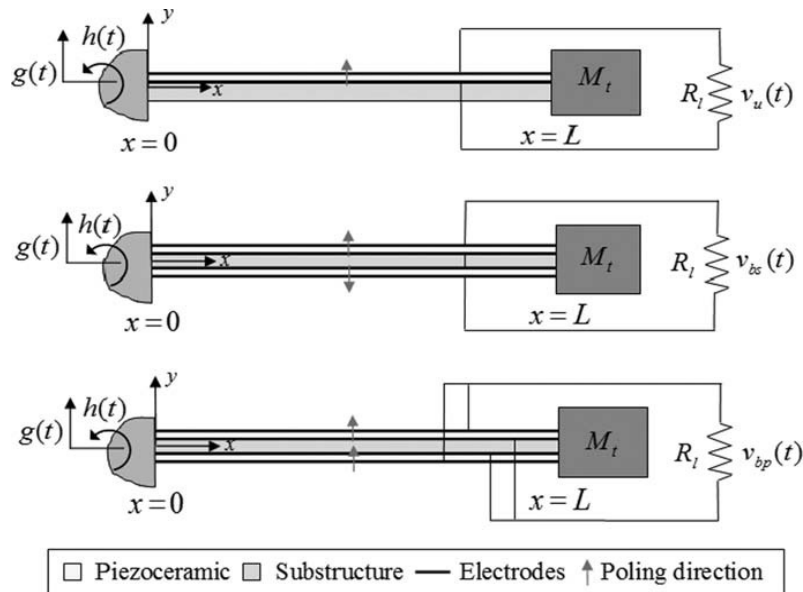


Figura 3.10: configurazioni base degli harvester a mensola sottoposti ad eccitamento alla base (la prima in alto è la unimorph, le altre due a seguire sono la bimorph serie e la bimorph parallelo) [24]

Ogni configurazione è modellata come una trave composta uniforme in ipotesi di deformazioni che seguono la lineare elasticità; anche qui si è assunto per la trave il modello di Eulero Bernoulli per lo studio analitico delle deformate possibili quando la base è soggetta a spostamento armonico, con ampiezze di piccole dimensioni.

Si assume che gli elettrodi collegati sulle facce degli strati piezoelettrici sono così sottili, da poter rendere trascurabile il loro contributo sullo spessore della trave; inoltre sono assunti perfettamente conduttivi e con resistenza nulla in modo che si instauri un'unica ddp tra essi.

Gli strati piezoelettrici sono considerati perfettamente sovrapposti alla trave composta e non creano zone di materiale non aderente alla mensola.

Come si vede negli schemi sopra, il circuito esterno si rappresenta in modo molto semplice con una resistenza di carico R_l (i cui terminali, non rappresentati, costituiscono l'uscita elettrica del dispositivo, opportunamente connessa con una seconda parte di circuito, omessa, per il raddrizzamento del segnale) mentre gli strati piezoelettrici si rappresentano con una capacità interna,

la quale è in serie o in parallelo con la resistenza di carico a seconda di come sono collegati agli elettrodi.

Viene inoltre sempre assunto che il movimento imposto alla base della mensola sia persistente e continuo in modo che il segnale elettrico possa essere estratto in modo continuo dal dispositivo, senza che vi siano interruzioni di segnale magari dovute al segnale stesso.

In questo lavoro, poiché gli harvesters che verranno utilizzati nelle prove sperimentali sono tre, di cui due bimorfi con connessione in serie ed uno unimorfo, si farà riferimento esclusivamente a queste due configurazioni nel calcolo delle relazioni analitiche che descrivono l'accoppiamento elettromeccanico del sistema; esse si deriveranno dalle leggi costitutive dei materiali piezoelettrici assieme all'andamento delle componenti di sforzo e di deformazione interne nella trave.

Indipendentemente dal tipo di configurazione con la quale si ha a che fare, si parte dall'equazione delle vibrazioni libere della trave, scritta in funzione del momento flettente $M_{fl}(x, t)$ interno alla trave (relativo agli spostamenti trasversali della stessa), il quale è presente solo nel primo termine dell'equazione a parametri distribuiti smorzata definita precedentemente; infatti è noto dalla meccanica dei solidi che $M_{fl}(x, t) = YI \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2}$ quindi $YI \frac{\partial^4 w_{rel}(x, t)}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 M_{fl}(x, t)}{\partial x^2}$, e perciò si ha:

$$\frac{\partial^2 M_{fl}(x, t)}{\partial x^2} + c_s I \frac{\partial^5 w(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.64)$$

In questo modo è possibile valutare l'andamento del momento flettente nella trave e calcolare lo sforzo che, a causa del momento stesso, la sollecita; si può inoltre valutare l'uscita elettrica fornita dalle lamine piezoelettriche, in una qualsiasi posizione delle stesse lungo la trave, dalle relazioni costitutive viste nel capitolo precedente. Se 1 è la direzione longitudinale e 3 è quella lungo lo spessore della trave, si può usare la prima relazione della d-form per correlare le variabili meccaniche con quelle piezoelettriche, per derivare successivamente la ddp che è in grado di generarsi a causa delle prime:

$$\sigma_{11} = C_{11}^E \varepsilon_1 - e_{31} E_3 \quad (3.65)$$

dove σ_{11} è la componente di sforzo assiale, E_3 è la componente del campo elettrico lungo lo spessore, e_{31} è la costante piezoelettrica, ε_1 è la componente di deformazione assiale e C_{11}^E è la rigidità assiale della trave. Ora si descrivono i due casi di studio elettromeccanico di interesse.

3.2.1 Configurazione bimorfa e connessione in serie

Il modello di harvester bimorfo più semplice da studiare (diverso da quello degli harvester su cui si eseguiranno le prove sperimentali e che si simulerà con il FEM) è costituito da uno strato interno di spessore h_s di materiale rigido, che fa da supporto, con incollati sopra e sotto due strati piezoelettrici di spessore h_p ognuno; tutti e 3 questi strati hanno la stessa larghezza b e lunghezza L , pari a quella della mensola. La sezione trasversale è quindi di questo tipo:

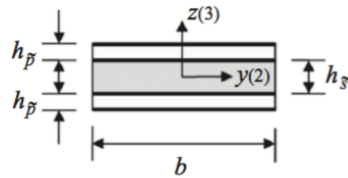


Figura 3.11: sezione trasversale di un harvester bimorfo [24]

Le assunzioni geometriche e sul modello di trave adottato sono le stesse viste nel paragrafo precedente; per gli harvester bimorfi, la connessione tra gli strati piezoelettrici si può attuare, come già accennato, in due modi: serie e parallelo:

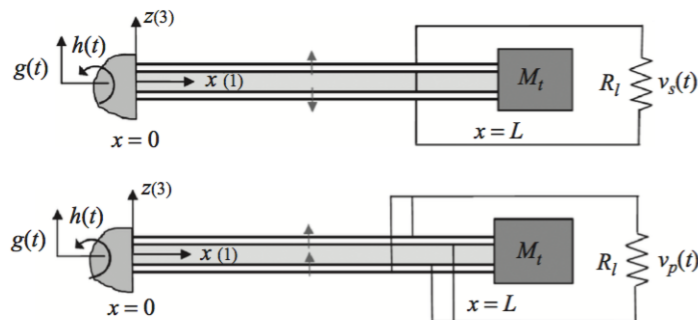


Figura 3.12: connessione strati piezoelettrici harvester bimorfo in serie (sopra) e in parallelo (sotto) [24]

Si assume per comodità che le direzioni degli assi x , y e z siano le stesse della terna di riferimento usata per i materiali piezoelettrici, ovvero $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$. Ciò permette di non creare ambiguità di notazione tra le variabili meccaniche e quelle elettriche-piezoelettriche presenti nel legame costitutivo. Nel circuito si considera una resistenza di carico R_l e una capacità equivalente degli strati piezoelettrici, mentre la resistenza elettrica degli strati viene trascurata (viene inclusa nella R_l).

Dalla figura sopra appare chiaro che se i due strati piezoelettrici della mensola sono polarizzati in modo opposto lungo la direzione dello spessore, si realizza la configurazione che realizza la connessione in serie degli stessi, viceversa se essi sono polarizzati nello stesso verso realizzano la configurazione che realizza la connessione in parallelo; in condizioni ottimali, la connessione in serie fornisce la maggior ddp prodotta, mentre quella in parallelo produce la maggior corrente elettrica in uscita dalle piastre piezo.

Le due configurazioni bimorfe hanno stessa geometria e materiali, quindi si comportano allo stesso modo dal punto di vista meccanico; tuttavia il dover considerare anche la parte elettrica comporta delle differenze che vanno a incidere sui termini puramente meccanici e questo incide anche sulla risposta vibratoria della mensola e soprattutto sull'uscita elettrica prodotta. Tuttavia qui si presenteranno le relazioni per la connessione in serie, relativamente alle piastre bimorfe considerando fin da subito la presenza della tipmass; facendo riferimento alla figura qui sopra, il moto della base w_b è dato dalla combinazione di un moto trasversale $g(t)$ con un moto rotativo $h(t)$ in modo che:

$$w_b(x, t) = g(t) + xh(t) \quad (3.66)$$

e così l'equazione delle vibrazioni forzate risulta, in funzione del momento flettente interno, la seguente espressione [24]:

$$\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}(x, t)}{\partial^4 x \partial t} + c_a \frac{\partial w_{rel}(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial t^2} = -[m + M_t \delta(x - L)] \frac{\partial^2 w_b(t)}{\partial t^2} \quad (3.26)$$

ed il momento flettente interno si calcola direttamente dalle componenti assiali di sforzo (lungo la direzione 1) σ_{11} nel seguente modo:

$$M(x, t) = b \left(\int_{-h_p - \frac{h_s}{2}}^{-\frac{h_s}{2}} \sigma_{11}^p z dz + \int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} \sigma_{11}^s z dz + \int_{\frac{h_s}{2}}^{h_p + \frac{h_s}{2}} \sigma_{11}^p z dz \right) \quad (3.68)$$

dove b è la larghezza, h_p è lo spessore di ogni strato piezo e h_s è lo spessore dello strato strutturale che separa i 2 piezo.

Nella connessione in serie dei 2 strati piezo, il momento interno, per il caso accoppiato è dato da:

$$M(x, t) = -YI \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2} + \theta v(t) [H(x) - H(x - L)] \quad (3.69)$$

dove $H(x)$ è la funzione gradino di Heaviside che pre-moltiplica il termine elettrico. Il coefficiente di accoppiamento θ si esprime così:

$$\theta = \frac{\bar{e}_{31} b}{2h_p} \left[\left(h_p + \frac{h_s}{2} \right)^2 - \frac{h_s^2}{4} \right] \quad (3.70)$$

dove \bar{e}_{31} è la costante di accoppiamento tra sforzo e campo elettrico presenti nel piezo.

La rigidezza flessionale YI può invece essere espressa come segue, se il campo elettrico E è costante:

$$YI = \frac{2b}{3} \left\{ \frac{Y_s h_s^3}{8} + \bar{c}_{11}^E \left[\left(h_p + \frac{h_s}{2} \right)^3 - \frac{h_s^3}{8} \right] \right\} \quad (3.71)$$

e si può quindi ottenere l'equazione delle vibrazioni forzate accoppiata:

$$\begin{aligned}
YI \frac{\partial^4 w_{rel}(x, t)}{\partial x^4} + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}(x, t)}{\partial^4 x \partial t} + c_a \frac{\partial w_{rel}(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial t^2} \\
- \theta v(t) \left[\frac{d\delta(x)}{dx} - \frac{d\delta(x-L)}{dx} \right] = -[m + M_t \delta(x-L)] \frac{\partial^2 w_b(t)}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.72}$$

nella quale $\delta(x)$ è la funzione delta di Dirac che indica che la tipmass M_t agisce solo alla coordinata $x = L$, mentre m è la massa per unità di lunghezza della trave, pari a:

$$m = b(\rho_s h_s + 2\rho_p h_p) \tag{3.73}$$

Come al solito lo spostamento relativo alla base $w_{rel}(x, t)$ lo si può esprimere come una serie convergente di autofunzioni del tipo:

$$w_{rel}(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r(t) \tag{3.74}$$

che sostituita nell'equazione delle vibrazioni forzate accoppiata appena ricavata sopra e applicando le condizioni di ortogonalità delle autofunzioni, permette di ottenere l'equazione del moto elettromeccanica in coordinate modali:

$$\frac{d^2 \eta_r(t)}{dt^2} + 2\zeta_r \omega_r \frac{d\eta_r(t)}{dt} + \omega_r^2 \eta_r(t) - \chi_r v(t) = f_r(t) \tag{3.75}$$

nella quale il termine di accoppiamento elettrico è pari a:

$$\chi_r = \vartheta \left. \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right|_{x=L} \tag{3.76}$$

mentre la forzante ha quest'espressione:

$$f_r(t) = -m \left(\frac{d^2 g(t)}{dt^2} \int_0^L \phi_r(x) dx + \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \int_0^L x \phi_r(x) dx \right) - M_t \phi_r(L) \left(\frac{d^2 g(t)}{dt^2} + L \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \right) \tag{3.77}$$

Dal punto di vista elettrico, ogni strato piezoelettrico può essere rappresentato come un generatore di corrente in parallelo con la capacità interna indicativa del piezo; in una configurazione bimorfa con connessione in serie dei 2 strati piezo, si ha quindi uno schema di questo tipo:

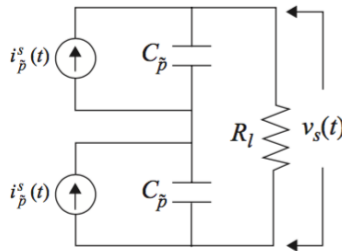


Figura 3.13: schema elettrico della connessione in serie dei 2 strati piezo [24]

Applicando la legge di Kirchhoff a questo circuito elettrico si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{C_p}{2} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_l} - i_p(t) = 0 \quad (3.78)$$

nella quale la capacità di ogni strato piezo è data da:

$$C_p = \frac{\bar{\epsilon}_{33}^S b L}{h_p} \quad (3.79)$$

mentre la sorgente di corrente è data da:

$$i_p(t) = - \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r \frac{d\eta_r(t)}{dt} \quad (3.80)$$

In questa relazione κ_r è il termine di accoppiamento elettromeccanico modale pari a:

$$\kappa_r = \bar{\epsilon}_{31} h_{pc} b \int_0^L \frac{d^2 \phi_r(x)}{dx^2} dx = \frac{\bar{\epsilon}_{31} (h_p + h_s) b}{2} \left. \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right|_{x=L} \quad (3.81)$$

Le risposte elettrica $v(t)$ sulla resistenza di carico e armonica dell'estremità libera $w_{rel}(x, t)$ si possono esprimere in forma chiusa e stazionarie come segue; assumendo le componenti traslazionale $g(t)$ e rotazionale $h(t)$ del moto alla base armoniche e della forma $g(t) = W_0 e^{j\omega t}$ e $h(t) = \theta_0 e^{j\omega t}$. La forzante modale $f_r(t)$ invece si può esprimere anch'essa come funzione armonica $f_r(t) = F_r e^{j\omega t}$ la cui ampiezza F_r ha questa espressione:

$$F_r = \omega^2 \left[m \left(W_0 \int_0^L \phi_r(x) dx + \theta_0 \int_0^L x \phi_r(x) dx \right) + M_t \phi_r(L) (W_0 + L \theta_0) \right] \quad (3.82)$$

Così la risposta elettrica sulla resistenza di carico e la risposta modale meccanica della trave possono essere assunte armoniche e di questa forma:

$$v(t) = V e^{j\omega t} \quad \eta_r(t) = H_r e^{j\omega t}$$

le cui ampiezze V e H_r sono complesse.

Con queste espressioni l'equazione elettrica e l'equazione del moto elettromeccanica in coordinate modali diventano così:

$$\left(j\omega \frac{C_p}{2} + \frac{1}{R_l} \right) V + j\omega \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r H_r = 0 \quad (3.83)$$

$$(\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega) H_r - \chi_r V = F_r \quad (3.84)$$

Ricavando la risposta meccanica modale H_r dalla seconda equazione e sostituendola nella prima si ottiene la risposta elettrica nella forma complessa, utilizzabile nella relazione $v(t) = V e^{j\omega t}$ che esprime la risposta elettrica stazionaria:

$$v(t) = \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{-j\omega \kappa_r F_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega}}{\frac{1}{R_l} + j\omega \frac{C_p}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega \kappa_r \chi_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega}} e^{j\omega t} \quad (3.85)$$

e sostituendo poi il termine complesso elettrico V ancora nella seconda si ottiene la risposta modale meccanica stazionaria:

$$\eta_r(t) = \left(F_r - \chi_r \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega\kappa_r F_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega}}{\frac{1}{R_l} + j\omega\frac{C_p}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega\kappa_r\chi_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega}} \right) \frac{e^{j\omega t}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega} \quad (3.86)$$

Infine lo spostamento trasversale relativo alla base della trave w_{rel} si può ottenere nelle coordinate fisiche del sistema sostituendo quest'ultima espressione nell'equazione del moto elettromeccanica in coordinate modali:

$$w_{rel}(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\left(F_r - \chi_r \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega\kappa_r F_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega}}{\frac{1}{R_l} + j\omega\frac{C_p}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega\kappa_r\chi_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega}} \right) \frac{\phi_r(x)e^{j\omega t}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega} \right] \quad (3.87)$$

3.2.2 Configurazione unimorfa

Rispetto alla configurazione bimorfa, si ha un solo strato piezoelettrico e ciò che cambia nelle equazioni è solo il termine di accoppiamento elettromeccanico che nell'equazione meccanica accoppiata in coordinate modali [24]:

$$\frac{d^2\eta_r(t)}{dt^2} + 2\zeta_r\omega_r \frac{d\eta_r(t)}{dt} + \omega_r^2\eta_r(t) - \chi_r v(t) = f_r(t) \quad (3.88)$$

assume questa espressione:

$$\chi_r = \vartheta \left. \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right|_{x=L} \quad (3.89)$$

e qui infine la costante di accoppiamento elettromeccanico vale:

$$\theta = \frac{\bar{\epsilon}_{31}b}{2h_{pu}} [h_b^2 - h_c^2] \quad (3.90)$$

nella quale h_{pu} è lo spessore dello strato piezoelettrico, h_b e h_c sono le distanze dall'asse neutro della sezione trasversale della trave dalle superfici superiore e inferiore dello strato piezo.

Per le altre relazioni non cambia nulla rispetto alla bimorfa se non di considerare tale espressione della costante di accoppiamento elettromeccanico quando esplicitata.

3.3 Funzioni di trasferimento Single mode

Dalla meccanica delle vibrazioni è noto che per i sistemi continui costituiti da un solo corpo, quando sottoposti a eccitazione armonica, essi vibrano e incontrano le risonanze all'aumentare della frequenza di eccitazione, man mano che assumono forme modali superiori, via via più complicate; il picco di energia più alta tuttavia lo si ha alla prima risonanza, che avviene alla frequenza più bassa (perché si ha la forma modale con i massimi spostamenti), e, essendo di fatto l'harvester, sia bimorfo che unimorfo, sia in presenza che in assenza della tipmass sull'estremità libera, un corpo continuo, avrà anch'esso tale caratteristica. Infatti nella maggior parte delle applicazioni interessa valutare il comportamento dell'harvester alla prima risonanza, che avviene in un range di frequenze in cui è più facile sfruttare le vibrazioni presenti nell'ambiente e dove si ha la maggior potenza generata. Matematicamente vuol dire imporre alla forzante una pulsazione pari a quella che si ha nel primo modo di vibrare dell'harvester, cioè $r = 1$ e $\omega = \omega_1$.

Ciò prende il nome di eccitazione mono modale ed è dimostrato che in questa condizione il maggior contributo nei termini delle soluzioni della risposta elettrica stazionaria (e nelle altre risposte trovate sopra, come quella dello spostamento trasversale relativo) è dato dal modo considerato, cioè il primo che ha $r = 1$, per cui tali risposte si semplificano e assumono questa forma [24]:

$$v(t) = \frac{-j\omega R_l \theta_1 F_1 e^{j\omega t}}{(1+j\omega R_l C_p)(\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega) + j\omega R_l \theta_1^2} \quad (3.91)$$

$$w_{rel}(x, t) = \frac{(1+j\omega R_l C_p) F_1 \phi_1(x) e^{j\omega t}}{(1+j\omega R_l C_p)(\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega) + j\omega R_l \theta_1^2} \quad (3.92)$$

Per ora nel modello elettromeccanico bimorfo (e unimorfo) presentato si è sempre fatto riferimento a due input di eccitazione della base dell'harvester, ovvero la traslazione $g(t) = W_0 e^{j\omega t}$ e la rotazione $h(t) = \theta_0 e^{j\omega t}$ mentre le uscite erano una risposta elettrica $v(t)$ e una vibratoria $w_{rel}(x, t)$.

Con queste 4 funzioni, si possono definire perciò 4 FRF elettromeccaniche come rapporti tra ognuna delle due uscite con ognuno dei due input; se si considera ora solo la traslazione come input, si otterranno quindi due FRF ovvero quella tra la tensione elettrica e l'accelerazione traslazionale della base e quella tra l'accelerazione trasversale rispetto alla base e l'accelerazione trasversale imposta alla base. L'accelerazione trasversale applicata alla base è pari a:

$$\ddot{g}(t) = -\omega^2 W_0 e^{j\omega t} \quad (3.93)$$

Prima di identificare le due FRF d'interesse occorre riarrangiare l'ampiezza della forzante modale complessa F_1 valutata alla prima risonanza (1), essendo la forzante definita come $f_r(t) = F_r e^{j\omega t}$ con $r = 1$. Si trova che:

$$F_1 = -\sigma_1 \omega^2 W_0 \quad (3.94)$$

con

$$\sigma_1 = -m \int_0^L \phi_1(x) dx - M_t \phi_1(L) \quad (3.95)$$

Sostituendo l'espressione di F_1 in quelle di $v(t)$ e $w_{rel}(x, t)$ mono modali trovate qui sopra si ottengono queste relazioni:

$$v(t) = \frac{-j\omega R_l \theta_1 \sigma_1}{(1+j\omega R_l C_p)(\omega_1^2 - \omega^2 + j2\zeta_1 \omega_1 \omega) + j\omega R_l \theta_1^2} (-\omega^2 W_0) e^{j\omega t} \quad (3.96)$$

$$w_{rel}(x, t) = \frac{(1+j\omega R_l C_p) \sigma_1 \phi_1(x)}{(1+j\omega R_l C_p)(\omega_1^2 - \omega^2 + j2\zeta_1 \omega_1 \omega) + j\omega R_l \theta_1^2} (-\omega^2 W_0) e^{j\omega t} \quad (3.97)$$

e dividendo ognuna per l'accelerazione trasversale alla base $\ddot{g}(t) = -\omega^2 W_0 e^{j\omega t}$ si ottengono le due FRF single mode cercate:

FRF₁:

$$\frac{v(t)}{\ddot{g}(t)} = \frac{-j\omega R_l \theta_1 \sigma_1}{(1+j\omega R_l C_p)(\omega_1^2 - \omega^2 + j2\zeta_1 \omega_1 \omega) + j\omega R_l \theta_1^2} \quad (3.98)$$

FRF₂:

$$\frac{w_{rel}(x, t)}{\ddot{g}(t)} = \frac{(1+j\omega R_l C_p) \sigma_1 \phi_1(x)}{(1+j\omega R_l C_p)(\omega_1^2 - \omega^2 + j2\zeta_1 \omega_1 \omega) + j\omega R_l \theta_1^2} \quad (3.99)$$

La trattazione è la più generica possibile in quanto comprende sia il caso di piastra da sola che con tipmass (M_t) applicata all'estremità libera della stessa. Implementando questi modelli in Matlab, con i dati geometrici e dinamici-inerziali delle piastre testate, si possono ottenere delle frf analitiche molto vicine a quelle sperimentali.

3.4 Progettazione degli assorbitori utilizzati per le prove sperimentali

Prima di passare alla descrizione del modello analitico di previsione dei risultati, servono i dati tecnici degli assorbitori, ovvero le loro masse e le loro lunghezze; si specificherà inoltre il criterio con cui sono stati pensati e costruiti gli assorbitori dinamici applicati sulle piastre, i motivi di tali scelte, ed anche la funzione delle tipmass utilizzate.

Occorre dire che, per prime si sono eseguite le misure con le piastre da sole (cioè senza alcun assorbitore o tipmass applicato), per valutarne la frequenza naturale propria, ovvero quella relativa al primo modo flessionale di ogni piastra; era inoltre possibile fissare al sistema di afferraggio la base di ognuna delle 3 lamine piezoelettriche testate a due lunghezze di incastro differenti, cioè una lunghezza massima e una un po' più corta designata sulla lamina dalla casa produttrice e denominata *clamp line*; per rendere le prove meno onerose e le misure più coerenti ed attendibili, se ne è scelta una, ovvero la lunghezza massima. Su questa lunghezza, per ogni piastra, si hanno infatti meno problemi nei riguardi del fissaggio della base delle stesse sul sistema di afferraggio, e quindi meno possibilità di commettere errori durante l'esecuzione delle prove. Tale lunghezza per le piastre bimorfe viene indicata come *lunghezza totale* della piastra (L_{tot} nei modelli al FEM), mentre per la piastra unimorfa viene indicata col nome di 'clamp0'. Sia la lunghezza L_{tot} sia la clamp0 sono delle linee disegnate sulle piastre alle quali la casa produttrice ha valutato frequenze naturali, tensioni elettriche generate, e altri parametri, utili quindi per un confronto diretto sui valori ottenuti dalle prove sperimentali.

La casa produttrice fornisce inoltre valori delle frequenze principali delle piastre quando testate con delle massette di prova (dette 'proof mass' di valore variabile e inferiore di uno-due ordini di grandezza rispetto alla massa delle piastre) poste sull'estremità libera delle stesse, che hanno la funzione, come precedentemente, di abbassare la frequenza naturale delle lamine su cui sono incollate. Esse quindi spostano a valori inferiori il range di frequenze in cui si ha la risonanza ed aumentano il picco di energia elettrica generata dall'harvester; in linea generale, all'aumentare della tipmass tale picco si sposta verso frequenze via via più basse ma aumenta via via la sua intensità, la quale dipende comunque dallo smorzamento presente sul sistema; tutto ciò sarà successivamente verificato con alcune misure sperimentali.

Per quanto riguarda invece gli assorbitori dinamici, essi sono motivati dalle seguenti ragioni:

- l'aggiunta di una tipmass sposta il primo modo a frequenze più basse e alza l'intensità del picco della FRF rispetto alla configurazione con la sola piastra. L'innalzamento del picco della FRF è dovuto alla presenza della tipmass la quale fa aumentare le forze d'inerzia che eccitano il sistema e quindi l'ampiezza degli spostamenti vibratorii della lamina. Come svantaggio si ha che le tensioni meccaniche aumentano e possono portare a cedimento per fenomeni di fatica meccanica. Ecco quindi che, se al posto di una tipmass (con la quale il sistema rimane a 1 gdl) si accoppia la piastra con un assorbitore dinamico, tarato sulla frequenza di risonanza della piastra, si riducono le ampiezze degli spostamenti della lamina per effetto dell'assorbitore, e di conseguenza anche gli stress interni sugli strati piezoelettrici indotti da tali spostamenti. È

da sottolineare anche che con l'assorbitore si ha un altro vantaggio: lo sdoppiamento del picco. Questo comporta che il sistema si divenga a 2 gdl e quindi con due picchi di risonanza a due frequenze vicine ('attorno' a quella della piastra iniziale) legate ai primi 2 modi flessionali e entrambe utili per la raccolta energetica. In questo modo è possibile raccogliere l'energia elettrica generata dal movimento vibratorio della piastra in almeno due range di frequenza, uno più basso e uno più alto della frequenza principale della piastra. Questo è un risultato notevole vista la variabilità delle frequenze dei fenomeni vibratorii presenti in natura. L'intensità dei picchi invece segue questa caratteristica: il primo elevato ad una frequenza inferiore a quella della piastra ed il secondo più basso, ma ad una frequenza superiore; ciò dipende soprattutto dai parametri dell'assorbitore quali massa, rigidità e smorzamento. Tale fenomeno verrà evidenziato più avanti nella presentazione dei risultati delle prove sperimentali, e sarà relazionato con le altezze dei picchi ottenuti dai sistemi harvester e harvester + tipmass.

- le prove con gli assorbitori verranno eseguite subito dopo quelle con la piastra da sola, andando poi a valutare delle tipmass in grado di portare la frequenza principale della lamina a quella del primo dei due picchi ottenuti dalle prove con l'assorbitore che permette di ottenere la maggior produzione di energia elettrica (che risulterà essere quello più massivo); in questo modo si può confrontare la differenza nel livello di intensità di energia elettrica generata dall'harvester nelle due diverse configurazioni (con tipmass e con assorbitore), da confrontare anche rispetto alla lamina da sola.

Ora si descriveranno gli assorbitori dinamici utilizzati. Essi sono stati costruiti, in modo tale da cercare di creare un sistema il più vicino possibile ad un sistema massa-molla. L'assorbitore viene costruito incollando con dell'attacco una piccola massa ad una delle estremità di un filo di acciaio armonico, opportunamente tagliato ad una determinata lunghezza ai fini di accordarlo alla risonanza della piastra.

Le massette di estremità sono ricavate da ingranaggi di un orologio da polso mentre la parte con il filo proviene da una corda di violino.

L'assorbitore viene modellato analiticamente come un sistema ad 1 gdl a parametri concentrati con le seguenti ipotesi:

- la massa totale del sistema è data dal contributo della piccola massa incollata nella punta e dal contributo dalla massa del filo in movimento
- la rigidità è data dalla rigidità flessionale del filo di acciaio armonico.

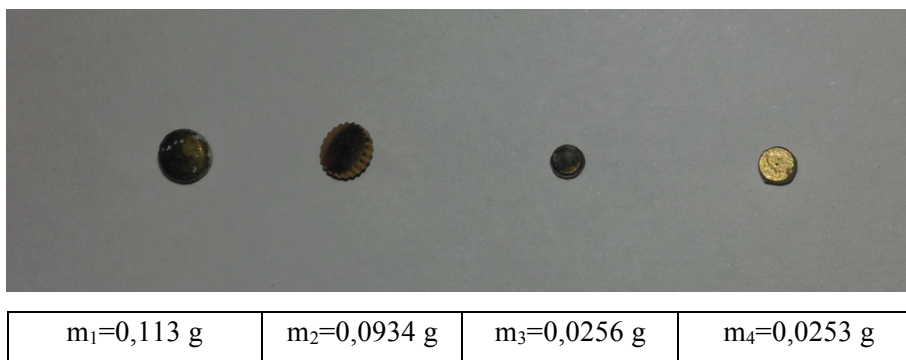


Figura 3.14: massettine utilizzate per la parte massiva degli assorbitori

Le massettine sono state misurate con una bilancia di precisione, e verranno indicate con m_a .

Per poter disporre delle lunghezze di filo giuste a cui attaccare le massettine al fine di avere degli assorbitori accordati con la piastra su cui devono lavorare si sono valutate le caratteristiche del filo, ovvero se ne è calcolata la densità tagliandone tre pezzi di lunghezza diversa, misurandone diametro e lunghezza per il calcolo del volume e la massa con una bilancia di precisione; si sono mediati i tre valori, molto vicini, ottenendo una densità di circa 9400 kg/m^3 . Il modulo elastico del filo è stato stimato 210 GPa , come quello dell'acciaio. Il diametro del filo invece risulta essere $3/10$ di millimetro. In seguito si sono lette le risonanze delle tre piastre sui rispettivi datasheet, i cui valori sono i seguenti:

piastra	frequenza naturale
V22B	270 Hz
V22BL	121 Hz
PPA 1001	125 Hz

Tabella 3.1: frequenze proprie degli harvesters testati

Ora è possibile calcolare la lunghezza di filo necessaria da attaccare ad ognuna delle 4 massettine, per uno specifico harvester, al fine di accordarlo con la frequenza naturale dello stesso; il sistema è di per sé continuo, ma con l'approssimazione del metodo di Rayleigh, si calcola (senza commettere errori consistenti) la massa che dal punto di vista energetico è equivalente a quella in movimento come se fosse all'estremità del filo, cioè si calcola la quota parte di massa di filo che partecipa al moto vibratorio, che si è visto essere $33/140 * m_{\text{filo}}$:

$$m_{eq} = m_a + \frac{33}{140} m_{filo} = m_a + \frac{33}{140} * \rho * \pi * r^2 * L_a \quad (3.115)$$

Per il calcolo della frequenza naturale dell'assorbitore, che dev'essere uguale a quella degli harvesters per avere l'accordatura, serve la sua rigidità. La si indica con k_a , e viene assegnata unicamente al filo ed è pari a quella di una trave a mensola a sezione circolare:

$$k_a = \frac{3 * E * I}{L_a^3} \quad (3.116)$$

nella quale E è il modulo di Young del filo, I il momento d'inerzia flessionale pari a $\pi * \frac{r^4}{4}$ (r è il raggio del filo) e L_a è la lunghezza dell'assorbitore sotto accordatura, incognita. L'accordatura è soddisfatta quando:

$$\omega_{piastra} = \omega_{assorbitore} = \sqrt{\frac{K_a}{m_{eq}}} \quad (3.117)$$

ovvero, indicando con f la generica risonanza di uno dei tre harvester:

$$2 * \pi * f = \sqrt{\frac{\frac{3 * E * I}{L_a^3}}{m_a + \frac{33}{140} * \rho * \pi * r^2 * L_a}} \quad (3.118)$$

un'equazione di terzo grado in L_a risolvibile facilmente con un programma di calcolo, ad esempio Matlab, che permette di trovare per ognuna delle 4 massettine la corrispondente lunghezza di filo che accorda l'assorbitore con ognuna delle tre piastre; poiché sono stati costruiti e testati solo 3 assorbitori per ogni piastra, ovvero uno con massa m_4 (il più leggero), uno con massa m_{34} (intermedio, e per realizzarlo si sono incollate tra loro le massettine m_3 e m_4) ed uno con massa m_2 (il più pesante), si riportano a seguire i valori teorici di L_a relativi a questi tre.

Si è scelto di utilizzare queste 3 massette per fare i 3 assorbitori per verificare l'obiettivo di questa tesi, che si ricorda essere la valutazione della capacità di allargamento dei 2 picchi, effettuabile con assorbitori con massa crescente; si anticipa già che le piastre che saranno testate nelle prove sperimentali sono 3, due bimorfe (v22b e v22bl) ed una unimorfa (ppa1001) che hanno frequenze principali diverse:

piastra	frequenza accordatura (= principale) [Hz]	n° m_a	L_a [mm]
V22B	270	m_2	9,71
		m_{34}	11,82
		m_4	14,63
V22BL	121	m_2	16,53
		m_{34}	20,0
		m_4	24,54
PPA 1001	125	m_2	16,17
		m_{34}	19,59
		m_4	24,04

Tabella 3.2: lunghezze teoriche degli assorbitori utilizzati con i 3 harvesters

Ogni assorbitore viene attaccato all'estremità libera dell'harvester immergendo l'estremità senza massa del filo in cera sintetica per accelerometri. Nel taglio del filo si sono quindi sovradimensionate le lunghezze rispetto a quelle teoriche di accordatura di 5 mm, in modo da poter fissare l'assorbitore alla piastra, come se fosse incastrato, nel modo illustrato in figura [3.20]:

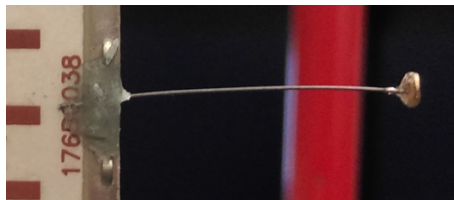


Figura 3.15: particolare del fissaggio dell'assorbitore dinamico su una delle piastre

In questo modo è inoltre possibile variare la lunghezza della parte di filo incastrato nella cera, variando di conseguenza anche la lunghezza libera L_a dell'assorbitore. Si può così accordare il sistema nel miglior modo possibile, qualora non si fossero raggiunte subito le condizioni di accordatura necessarie per l'esecuzione delle prove. Ciò viene fatto eseguendo preliminarmente una o due prove a 'vuoto' in cui si valuta se la FRF ottenuta sperimentalmente abbia l'antirisonanza (il minimo della curva) alla frequenza voluta. Questo risulterà chiaro nel prossimo paragrafo in cui saranno spiegate le prove eseguite. Ad esempio qualora risultasse un'antirisonanza più alta di quella corretta, per abbassarla si aumenta la lunghezza libera, e viceversa se si avesse un'antirisonanza più bassa.

Le tipmass invece sono state utilizzate principalmente per due scopi:

- verifica del modello analitico proposto da Inman e Erturk [] a parametri distribuiti con massa nella punta, e validazione di un ulteriore modello FEM;
- verifica del vantaggio energetico derivante dall'utilizzo dell'assorbitore rispetto all'uso della tipmass. Si è accordato l'harvester con una tipmass alla frequenza di risonanza del primo modo di vibrare della configurazione harvester con assorbitore. In questo modo è stato possibile valutare in termini energetici la configurazione più vantaggiosa.

Come tipmass si sono utilizzate; la massa n° 4, un mezzo piombino da pesca ed un piombino da pesca. Quest'ultimo è inoltre 10 volte più massivo della m_4 .

La verifica degli stress interni alle lamine nei punti risonanti citati verrà effettuata nei modelli FEM, sugli strati piezoelettrici, poiché i più critici essendo di materiale ceramico.

3.5 Modello analitico di previsione

Appare chiaro dal paragrafo 3.4 che, all'aumentare della massa dell'assorbitore dinamico, aumenta l'allargamento dei picchi attorno alla risonanza del corpo principale; nel nostro caso, il corpo principale sarà proprio l'harvester, e si è appena visto che gli assorbitori sono stati costruiti in modo da risultare accordati con la risonanza della lamina (relativa al primo modo flessionale).

Ci si chiede, prima di eseguire misure di alcun tipo, quanto potrebbero allargare degli assorbitori con caratteristiche di massa e rigidità note, al fine di avere un primo inquadramento sull'efficacia, teorica, del sistema.

Sfruttando le equazioni del modello elettromeccanico di Inman-Erturk visto nei paragrafi precedenti, si può dedurre un modello che includa l'effetto di assorbitori dinamici, sfruttando l'approccio modale e un artificio matematico, per avere di fatto un modello di prima stima di allargamento dei picchi, da utilizzare in fase di progettazione per un primo inquadramento sulla direzione di tendenza dei risultati.

Il modello analitico proposto è il seguente:



Figura 3.16: modello fisico per lo studio analitico della configurazione harvester + assorbitore

nel quale si immagina l'assorbitore incastrato all'estremità libera della lamina, la quale è ancorata alla base; le coordinate che descrivono il sistema sono lo spostamento della base w_b , lo spostamento trasversale della lamina $w_2(x)$ e lo spostamento trasversale dell'assorbitore rispetto all'estremità della piastra u_2 .

L'assorbitore nel suo moto mette in gioco la sua forza d'inerzia F_{ma} , valutabile come il prodotto tra la massa dello stesso, m_a e l'accelerazione assoluta rispetto alla base:

$$F_{ma} = F(t) = -m_a(\ddot{w}_b + \ddot{w}_2(x_a) + \ddot{u}) \quad (3.119)$$

Se poi si considera la coppia d'inerzia dello stesso rispetto all'estremità della lamina, data da:

$$M(t) = -F(t)L_a \quad (3.120)$$

dove L_a è la lunghezza dell'assorbitore, si può semplificare il problema operando la seguente equivalenza meccanica (un artificio), nella quale l'assorbitore viene ridotto ad un sistema equivalente formato da una coppia e dalla sua forza d'inerzia, agenti sull'estremità della piastra, nel seguente modo:

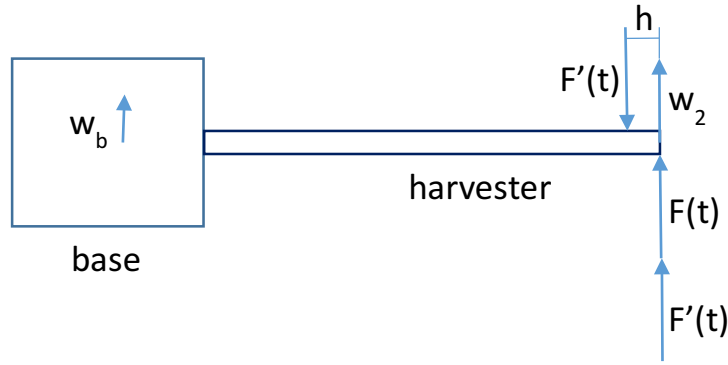


Figura 3.17: modello dell'equivalenza dinamica che tiene conto dell'azione dell'assorbitore sull'harvester in cui è stata introdotta la forza fittizia $F'(t)$ tale che generi una coppia equivalente a $M(t)$ ad una distanza h dal bordo della lamina, come evidenziato nell'immagine sopra, ovvero:

$$F'(t) = \frac{M(t)}{h} \quad (3.121)$$

Le equazioni del moto sono in definitiva due, una per la lamina (modello di Inman-Erturk) e una per l'assorbitore:

$$\begin{cases} EI \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + c_s I \frac{\partial^5 w_2}{\partial x^4 \partial t} + m \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = -m \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + [F'(t) + F(t)]\delta(x - x_a) - F'(t)\delta(x - (x_a - h)) \\ m_a(\ddot{w}_b + \ddot{w}_2(x_a) + \ddot{u}) = -k_a u_2 - c_a \dot{u}_2 \end{cases} \quad (3.122)$$

dove quella sopra è l'equazione delle vibrazioni trasversali dell'harvester, quella sotto è l'equazione del moto dell'assorbitore rispetto alla base.

Se si ipotizzano soluzioni armoniche di questo tipo:

$$\ddot{w}_b = a_{b0} e^{i\omega t} \quad u_2 = u_{20} e^{i\omega t} \quad w_2 = \eta_1(t) \phi(x)$$

dove nell'ultima,

$$\eta_1(t) = \eta_{10} e^{i\omega t} \quad (3.123)$$

sostituendo nell'equazione dell'assorbitore e ricavando lo spostamento u_{20} si ottiene:

$$u_{20} = \frac{-m_a a_{b0} + m_a \eta_{10} \omega^2 \phi(x_a)}{k_a + i\omega c_a - m_a \omega^2} \quad (3.124)$$

Anche con la prima equazione conviene sfruttare un altro tipo di approccio per arrivare a una soluzione in forma chiusa; si applica l'approccio modale, nella coordinata temporale della piastra $\eta(t)$, sfruttando la forma con cui si è scritta la coordinata della piastra w_2 :

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_1(t) + 2\zeta_1 \omega_1 \dot{\eta}_1(t) + \omega_1^2 \eta_1(t) = - \int_0^L m \ddot{w}_b \phi_1(x) dx - \left[m_a(\ddot{w}_b + \ddot{w}_2(x_a) + \ddot{u}) \left(1 + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{L_a}{h} \right) \right] \phi_1(x_a) + \left[m_a(\ddot{w}_b + \ddot{w}_2(x_a) + \ddot{u}) \left(\frac{L_a}{h} \right) \right] \phi_1(x_a - h) \end{aligned} \quad (3.125)$$

sostituendo infine in quest'equazione l'espressione di u_{20} e le soluzioni armoniche introdotte, si ottiene l'espressione di $\eta_1(t)$, che non verrà riportata, poiché facilmente calcolabile attraverso pochi e banali passaggi algebrici.

È possibile ora impostare un modello in grado di generare le FRF meccaniche (spostamento η_1 in funzione della frequenza) e anche quelle elettriche (tensione V generata dalla lamina in funzione della frequenza) sfruttando i risultati del semplice modello descritto qui sopra, che si osserva essere a 1gdl, e le costanti di accoppiamento elettromeccanico viste nel paragrafo 3.2 (i coefficienti χ_r e θ).

Visto che le lamine testate sono 3, si scriveranno 3 modelli con il codice di calcolo Matlab; a seguire si riportano le caratteristiche e le costanti fisiche usate per il primo, utilizzato per descrivere il comportamento della lamina bimorfa v22b. Tutti quanti sono completamente riportati nelle appendici.

Si vuole che si generino le frf elettromeccaniche relative a tutte le prove eseguite con tale lamina, che sono 6 casi: da sola, con le due tipmass (una leggera e una pesante) e con i tre assorbitori. Di conseguenza tutte le caratteristiche meccaniche (masse, smorzamenti, etc.) saranno inserite in Matlab attraverso vettori di 6 componenti, secondo l'ordine con cui si vogliono graficare le FRF.

Conviene suddividerlo in parti; esse sono:

1) dati iniziali

grandezza	simbolo	valore	unità di misura
frequenza minima	f_min	50	Hz
frequenza massima	f_max	500	Hz
densità lineare piastra	m	0,0148	kg/m
accelerazione base	abo	1	m/s ²
frequenza primo modo	om_n	266*2* π	rad/s
coefficiente vibrazioni libere n° 1	b_n	1,875/L	m
coefficiente vibrazioni libere n° 2	s_n	0,7341	--

Tabella 3.3: costanti iniziali del modello analitico per la piastra bimorfa V22B

2) caratteristiche meccaniche harvester + assorbitori

sistema	simbolo grandezza	valore	unità di misura
v22b	zeta_n	0,012	--
	La_p	0	m
	zeta_a	1	--
	ma_p	0	kg
v22b+tipmass	zeta_n	0,0195	--

	La_p	0	m
	zeta_a	1	--
	ma_p	$2,05 \cdot 10^{-4}$	kg
v22b+m4	zeta_n	0,014	--
	La_p	0	m
	zeta_a	1	--
v22b+A2	ma_p	$2,8 \cdot 10^{-5}$	kg
	zeta_n	0,0165	--
	La_p	0,00971	m
v22b+A34	zeta_a	0,0299	--
	ma_p	$9,49 \cdot 10^{-5}$	kg
	zeta_n	0,012	--
v22b+A4	La_p	0,01181	m
	zeta_a	0,026	--
	ma_p	$5,275 \cdot 10^{-5}$	kg
v22b+A4	zeta_n	0,010	--
	La_p	0,01463	m
	zeta_a	0,024	--
	ma_p	$2,779 \cdot 10^{-5}$	kg

Tabella 3.4: parametri per i diversi sistemi simulati con il modello analitico per la piastra V22B

grandezza	simbolo	valore	unità di misura
raggio filo assorbitori	r	$0,15 \cdot 10^{-3}$	m
modulo di Young filo	E	210	GPa
momento d'inerzia flessionale filo	I	$\pi \cdot r^4 / 4$	m ⁴
distanza assorbitore equivalente	h	0,001	m
rigidezza elastica filo	ka_p	$3 \cdot E \cdot I / (La_p)^3$	N/m
smorzamento critico assorbitore	ccra_p	$2 \cdot (ka_p \cdot ma_p)^{0,5}$	Ns/m
smorzamento assorbitore	ca_p	ccra_p * zeta_a	Ns/m

Tabella 3.5: caratteristiche fisiche assorbitori

3) modello e costanti materiale piezoelettrico

grandezza	simbolo	valore	unità di misura
costante di carica piezoelettrica	d31	$-190 \cdot 10^{-12}$	m/V
cedevolezza elastica PZT	sE11	$16,4 \cdot 10^{-12}$	m ² /N
costante accoppiamento piezoelettrica	e31	d31/sE11	C/m ²
permittività	e33	$1651 \cdot 8,854 \cdot 10$	F/m
larghezza piastra	b	0,00381	m
spessore piastra	h_w	0,00081	m
lunghezza strato piezoelettrico	Lpzt	0,0254	m
spessore strato piezoelettrico	h_pb	0,00018	m
distanza tra gli strati piezo	h_sb	0,00009	m

Tabella 3.6: caratteristiche fisiche delle costanti piezoelettriche e degli strati di PZT

4) plot delle FRF elettromeccaniche [V/g]

```
v=2*phir_b*eta*9.81/Cpb;
for i_p=1:size(La_p,2)
    figure(3)
    hold on
    plot(f,sqrt(real(v(i_p,:)).^2+imag(v(i_p,:)).^2),'color',[i_p/size(La_p,2)
    0.5 0])
    grid on
    xlabel('f (Hz)')
    ylabel('Modulus (V/g)')
    title('v')
    legend('v22b','v22b+tipmass','v22b+mass4','v22b+A2','v22b+A34','v22b+A4')
end
```

dove nell'espressione di v viene letta la relazione di η_1 qui non riportata ma inserita prima del calcolo di v . Il coefficiente 2 davanti alla tensione v indica la presenza di due strati piezoelettrici, in quanto la lamina è bimorfa.

Come parametri degli assorbitori vengono inserite le lunghezze teoriche di accordatura e le massette equivalenti $m_{eq} = m_a + \frac{33}{140} * m_{filo}$ viste prima nel calcolo delle lunghezze; gli smorzamenti della lamina (ζ_n) invece sono stati inseriti dopo aver acquisito le misure sperimentali, poiché dipendenti dall'altezza e dall'estensione della campana dei picchi delle FRF, mentre quelli degli assorbitori (ζ_a) sono stati valutati pari a quelli dell'acciaio armonico del quale si ritiene essere costituito il filo che li compone, con valori tra il 2 e il 3 %.

Come si vedrà successivamente nelle misure sperimentali, ai fini della verifica dell'obiettivo di questo lavoro, ovvero l'allargamento dei picchi attorno alla risonanza sfruttando assorbitori dinamici a massa crescente, si sono effettuate una serie di misure per le 3 lamine, qui riportate in forma schematica:

- V22B:
 - Da sola
 - Con 2 tipmass (una leggera e una pesante)
 - Con 3 assorbitori (a massa crescente)
- V22BL:
 - Da sola
 - Con l'assorbitore più massivo

○ PPA1001:

- Da sola
- Con una tipmass pesante
- Con 3 assorbitori

Ovvero 6 set di misure e confronti per la prima lamina bimorfa, 2 per la seconda e 5 per l'ultima, unimorfa.

Implementando le caratteristiche dei diversi assorbitori e le tipmass nei modelli Matlab previsti per ogni lamina si sono ottenuti i seguenti grafici di previsione, dove si riportano tutte le FRF in un unico grafico per ogni lamina, per avere una descrizione immediata in forma grafica del comportamento della lamina in analisi:

V22B:

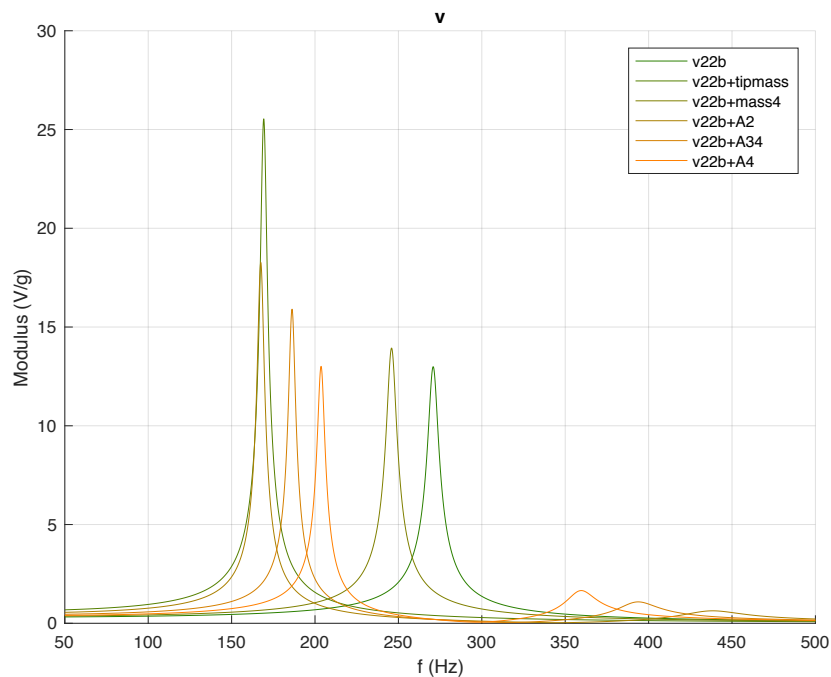


Figura 3.18: previsione comportamento piastra bimorfa v22b per i 6 casi sperimentati

V22BL:

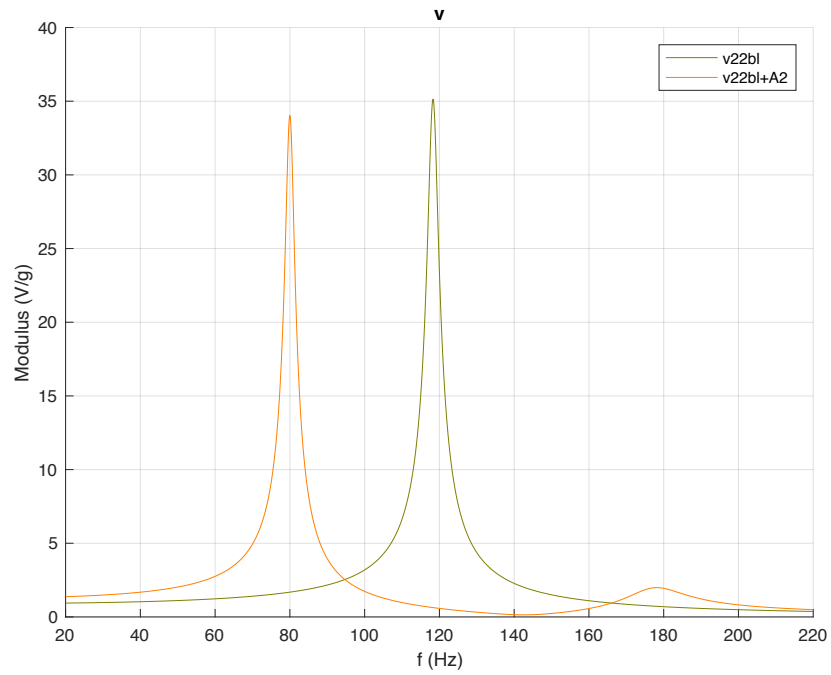


Figura 3.19: previsione comportamento piastra bimorfa v22bl per i 2 casi sperimentati

PPA1001:

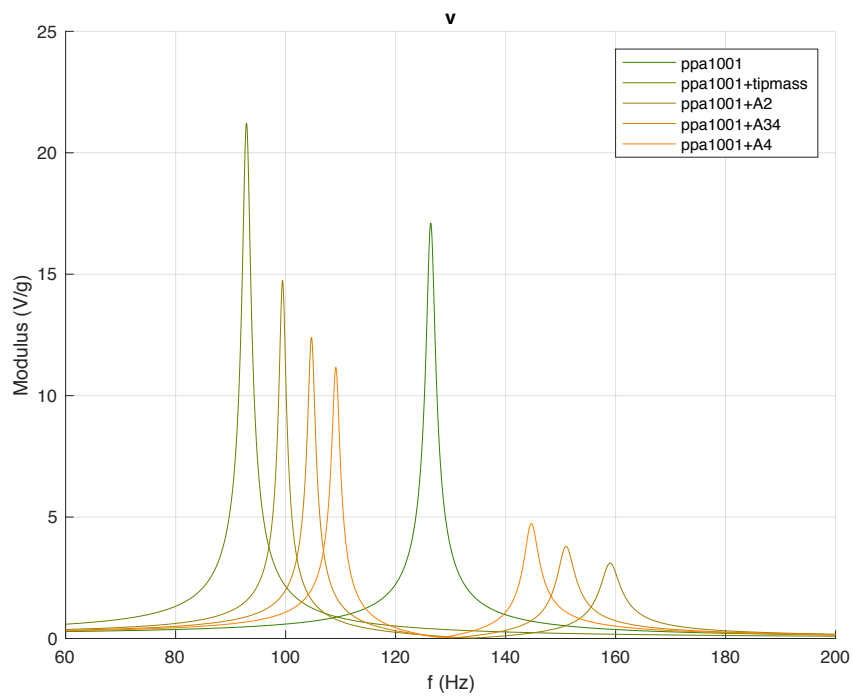


Figura 3.20: previsione comportamento piastra unimorfa ppa1001 per i 5 casi sperimentati

Quello che si osserva è che il modello prevede un allargamento dei picchi di quest'ordine di grandezza:

- da 150 a 300 HZ passando dall'assorbitore più piccolo (A4) a quello più grande (A2) per la lamina bimorfa v22b;
- da 30 a 60 Hz per la piastra unimorfa ppa1001 passando da A4 ad A2.

In seguito si confronteranno questi risultati di prima analisi con quelli ottenuti dalle misure sperimentali e con quelli dei modelli FEM, molto più raffinati, che servono proprio per avere un modello più sofisticato con cui analizzare criticamente i risultati.

Capitolo 4: Apparato sperimentale ed esecuzione delle prove

4.1 L'analisi modale sperimentale

In questo capitolo verrà presentato il dettaglio e la teoria del metodo sperimentale utilizzato per valutare il comportamento dinamico-elettrico degli harvesters testati, verranno presentate e descritte le piastre utilizzate, come sono stati applicati a esse gli assorbitori dinamici autocostruiti; verrà inoltre descritto l'apparato sperimentale utilizzato per l'acquisizione e la raccolta dei dati sperimentali necessari al confronto di massima con il modello analitico predittivo e soprattutto con i modelli FEM più precisi, descritti nel prossimo capitolo. Assieme alla raccolta dei dati acquisiti verrà inoltre riportato il riassunto complessivo dei dati tenuti in considerazione al fine di questo confronto.

In generale vi sono tre possibili approcci per compiere un'analisi del comportamento dinamico e, in questo caso, elettrico, o più propriamente elettromeccanico, di un sistema di questo tipo quale un harvester sottoposto a moto vibratorio, ovvero:

- l'approccio analitico: già descritto ampiamente capitolo 3, e utilizzato come modello predittivo di progettazione per avere un primo inquadramento sui risultati che ci si aspetta di trovare dalle misure e dalla validazione FEM successiva; con esso, si parte in generale dalla conoscenza della geometria del sistema, delle condizioni al contorno, delle caratteristiche dei materiali, la distribuzione di massa, rigidità, smorzamento, si scrivono le equazioni del fenomeno in analisi (vibrazioni trasversali) espresse per mezzo di equazioni differenziali alle derivate parziali, dalle quali è poi possibile risolvere un problema agli autovalori (autofunzioni in questo caso, perché equazioni definite su distribuzioni continue di materia, masse e rigidità) e pervenire alla determinazione dei parametri modali del sistema quali frequenze naturali, smorzamenti e forme modali.
- l'approccio agli elementi finiti o FEM: verrà descritto nel capitolo 5 e consiste di una rappresentazione simulata con un programma di modellazione geometrica e analisi dinamica di quanto fatto nelle prove sperimentali, vale a dire si costruiscono i modelli degli harvesters testati, cercando di essere il più fedeli possibile per quanto riguarda i dati geometrici, le caratteristiche dei materiali costituenti le piastre, le condizioni di vincolo, l'applicazione delle forzanti, etc., sottoponendo virtualmente le piastre così modellate nel programma alle prove eseguite sulle piastre vere, per valutare la risposta elettrica così ottenuta, per poterla confrontare con quella vera ricavata dai test sperimentali.

- l'approccio sperimentale: è ciò che verrà descritto in questo capitolo, nel quale si parte dalla misura di uno o più input dinamici sul componente sotto test (l'harvester), si calcolano le funzioni di risposta in frequenza FRF di interesse e si stimano a partire da esse i parametri dinamici e meccanici del sistema, da poter confrontare subito con quelli forniti nel datasheet del componente.

L'approccio sperimentale viene eseguito tramite la cosiddetta analisi modale sperimentale, una delle principali tecniche per lo studio delle vibrazioni, che con lo sviluppo dei computer, delle tecniche numeriche per l'analisi dei segnali e dei sensori è diventata ora la via più seguita quando si vogliono condurre analisi di sistemi vibratori. È stata scelta tale tecnica per il fatto che il comportamento dinamico-elettromeccanico dei componenti utilizzati (harvesters) dipende solo dalle loro caratteristiche intrinseche (massa, rigidità, smorzamento, vincoli, etc..) e non dall'entità e/o dal tipo di carico applicato; quindi se non vi sono modifiche interne al dispositivo sotto test, il suo comportamento rimane inalterato e permette prove ripetibili con dati che descrivono il sistema in maniera precisa dal punto di vista meccanico-dinamico; inoltre essa è una tecnica non distruttiva, applicabile senza incorrere nel rischio di danneggiare i sistemi sotto test o gli strumenti di misura. Uno dei principali limiti di questo metodo è il fatto che esso è lineare; se si applicano infatti prove di test eccessive che portino il sistema fuori dalla linearità di comportamento, il metodo risulta inefficace. Un'altra caratteristica è che esso è stazionario (invariante nel tempo), il quale assieme alla linearità, permette di identificare agevolmente frequenze naturali, smorzamenti e modi di vibrare di un sistema meccanico, e indispensabili per l'ottenimento di dati che richiedono un triplice confronto, visto inoltre che essi vengono ottenuti da prove eseguite da un operatore umano, che difficilmente sarà in grado di eseguire prove identiche tra loro nel corso della sperimentazione.

Quest'analisi sperimentale permette di fatto di ottenere un modello matematico del sistema sotto forma di grafici e caratteristiche meccaniche fondamentali, e può essere usata anche per altri scopi, come ad esempio la simulazione della risposta forzata ad una forzante generica, confronto con i risultati ottenuti con modelli FEM ed aggiornamento dei modelli FEM, etc...

Con quest'analisi si stabilisce quindi la funzione di trasferimento (FRF), anzi il legame che essa ha con i parametri modali da identificare; per ottenere le FRF il sistema meccanico deve essere eccitato in punti precisi in cui devono essere misurate le accelerazioni, con opportuni accelerometri; i tipi più comuni di eccitazione sono due, cioè quella impulsiva e quella sinusoidale a frequenza variabile (continuativa) detta *sweep*.

Il metodo sweep sfrutta l'ingresso di un'eccitazione sinusoidale di frequenza variabile che possiede uno spettro di ampiezza circa costante in una banda di frequenza Δf , ma non è quello che verrà utilizzato in questa trattazione sperimentale.

Il metodo utilizzato è infatti quello impulsivo, il quale sfrutta la proprietà che un impulso ideale eccita tutte le frequenze del sistema in esame; è un metodo molto semplice e molto efficace che permette di valutare/costruire la FRF dalla misura della risposta temporale d'interesse effettuando una trasformata numerica di Fourier del segnale campionato. È un metodo che ha tuttavia due limiti:

- 1) non è possibile nella realtà eccitare un sistema meccanico o una struttura con un impulso unitario teorico, rappresentato dalla funzione delta di Dirac;
- 2) essendo ogni sistema smorzato, è noto dalla teoria che le vibrazioni di un sistema cosiffatto svaniscono dopo un più o meno breve intervallo di tempo, ed a seconda della frequenza di campionamento ciò può portare a problemi di acquisizione dei dati.

Poiché le misure che verranno descritte in questo capitolo hanno come obiettivo la determinazione della FRF tra l'output rappresentato dall'uscita elettrica generata dall'harvester e l'input rappresentato dall'accelerazione applicata alla base dello stesso tramite l'impulso (come visto nella prima FRF single mode descritta nel capitolo 3), dal punto di vista sperimentale essa viene misurata e calcolata con la tecnica impulsiva. Come già detto questa tecnica sfrutta un ingresso impulsivo teoricamente rappresentato dalla funzione delta di Dirac, che ha durata infinitesima e intensità infinita, di espressione analitica:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 0 \\ \infty & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

La caratteristica fondamentale di questa funzione è il fatto di avere uno spettro in frequenza costante e unitario su tutte le frequenze, cioè:

$$\Delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{j\omega t} dt = 1$$

Infatti applicando un ingresso di questo tipo si eccita una banda infinita di frequenze, come illustrato qui sotto:

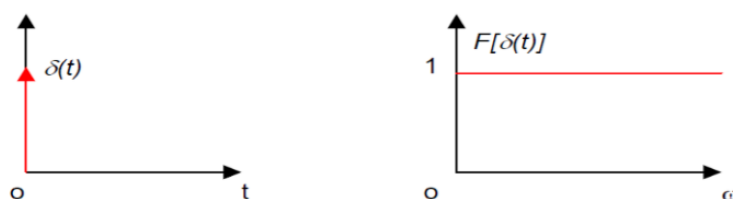


Figura 4.1: delta di Dirac a sinistra e la sua trasformata di Fourier a destra [wiki]

Nella realtà e nella pratica sperimentale non è possibile applicare un impulso secondo le caratteristiche della funzione di Dirac visto che esso viene applicato tramite opportuni martelletti strumentati che, nel migliore dei casi, creano impulsi della durata di pochi ms con un'ampiezza elevata e di valore finito; più l'impulso è corto più il corrispondente spettro in frequenza è ampio e costante, fino a una certa frequenza di taglio che dipende dalla durata dell'impulso. Infatti più alta è la rigidità di contatto tra punta del martelletto e oggetto da colpire, più breve è la durata dell'impulso e maggiore sarà quindi l'eccitazione in frequenza del sistema; al variare della punta si può quindi variare la durata dell'impulso e dello spettro in frequenza, secondo questo schema, che fa riferimento alle punte utilizzabili con comuni martelletti strumentati:

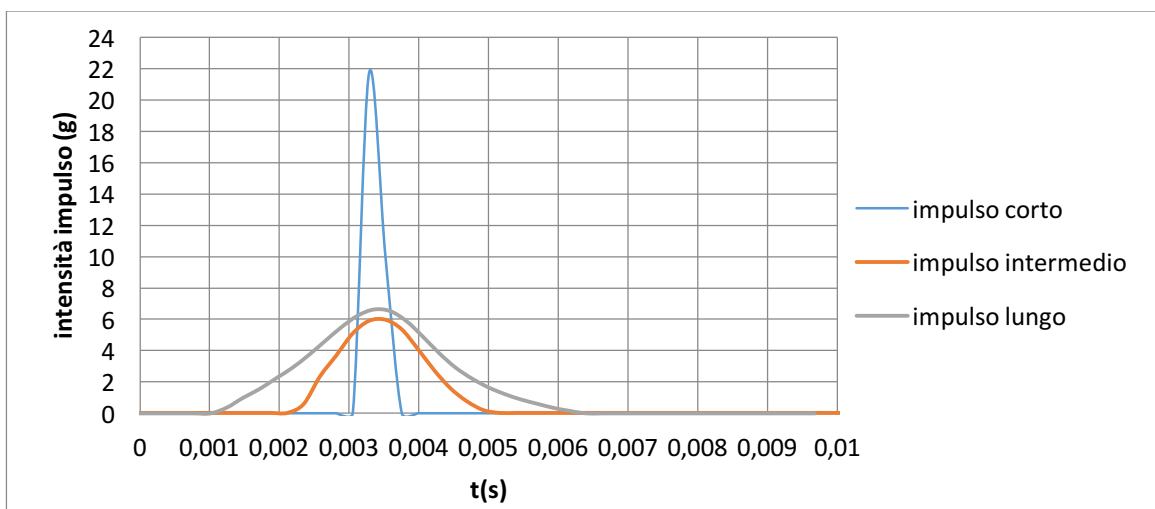


Figura 4.2a: andamenti nel tempo dei picchi di accelerazione di 3 diversi tipi di impulso

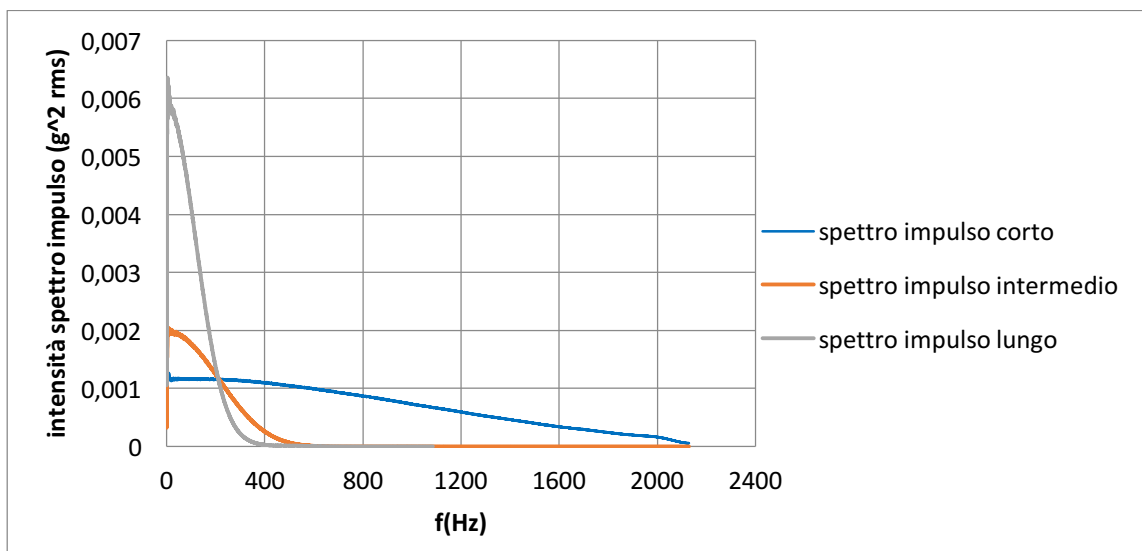


Figura 4.2b: corrispondenti andamenti nel dominio della frequenza (trasformate di Fourier) dei 3 impulsi nel grafico sopra

Si nota che al diminuire della durata dell'impulso, il corrispondente spettro in frequenza risulta via via più ampio e inoltre diminuisce in intensità; tuttavia gli spettri degli impulsi più corti, anche se

d'intensità minore garantiscono in un certo senso un livello di energia fornita al sistema su una banda di frequenze molto più ampia rispetto a quella fornita da impulsi di durata temporale più lunga (che come si vede nella Figura 4.12b discendono molto più rapidamente, essendo 'energetici' in una banda di frequenza più piccola).

Nelle prove realizzate con gli harvesters sono state impiegate due tipi di punta: una morbida o 'soft' il cui impulso è della durata di 6 ms e una dura o 'hard' il cui impulso è della durata di 3 ms; le prove sono state eseguite con tutte e due le punte, ma essendo quelle con gli impulsi più corti soggette a minor rumore, sono state considerati i dati derivanti da quelle prove come dati utili per il confronto con i risultati ottenuti col FEM e con i modelli analitici. Ad esempio un impulso eseguito con punta hard fornisce un segnale di accelerazione di questo tipo:

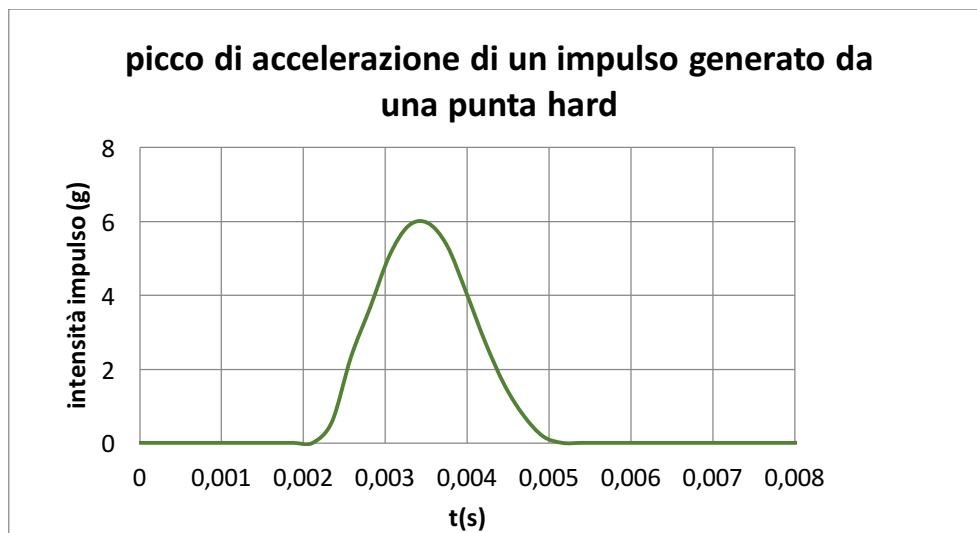


Figura 4.3: segnale di accelerazione fornito con la punta hard

in cui si osserva la durata di circa 3 ms e un picco di intensità 6g; durante le prove si è cercato di fornire impulsi con picco d'intensità attorno a questo valore (anche se di fatto variavano tra i 4g e gli 8g), per cercare di avere dati non troppo differenti l'uno dall'altro, fatto che è reso casuale dalla sensibilità umana con cui l'operatore riesce a dare gli impulsi/colpi con il martelletto. Il corrispondente spettro in frequenza dell'impulso preso come esempio avrà una certa intensità in cui si riesce a eccitare bene il sistema fino ad una certa frequenza di taglio f_c oltre la quale non vengono eccitate frequenze ulteriori, la quale è proporzionale alla durata dell'impulso. In sostanza, a seconda della punta utilizzata, si riesce a eccitare l'harvester in una banda di frequenza compresa tra 0 e f_c .

4.2 Apparecchiatura utilizzata per eseguire le prove

Gli strumenti utilizzati per effettuare le misure sperimentali dalle quali è stata ricavata la FRF della piastra sotto test sono i seguenti:

- martelletto strumentato con due punte, una soft e una hard
- un accelerometro mono-assiale
- sistema di acquisizione dei segnali di interesse (NI 9234)
- barra di alluminio e sistema di fissaggio degli harvesters
- computer per l'acquisizione e l'elaborazione dei dati tramite il software Labview Signal Express

Con questi strumenti si è costruita una vera e propria catena di misura, nel senso che: la barra di alluminio viene sospesa con due corde ed ha in una delle due estremità il sistema di afferraggio costituito da 2 lamine in acciaio dentro le quali viene posta e stretta con due bulloni la lamina piezoelettrica da testare (ciò simula la condizione di incastro della base della piastra), mentre col martelletto strumentato si forniscono gli impulsi all'estremità della barra opposta rispetto a dov'è collocata la lamina, in modo che ogni impulso generi delle vibrazioni longitudinali lungo la barra, le quali si trasferiscono alla base della lamina che risulta così sottoposta a eccitamento armonico nella zona di incastro. L'accelerometro è situato il più vicino possibile alla base della piastra, sopra la lamina superiore di fissaggio della piastra. Con il sistema di acquisizione NI 9243 vengono acquisiti 3 segnali: l'impulso fornito dal martelletto strumentato sulla barra d'alluminio, l'accelerazione misurata dall'accelerometro che si ha alla base della lamina e la tensione generata dall'harvester proveniente da due elettrodi connessi alla lamina; il sistema di acquisizione è infine collegato al computer nel quale, attraverso il programma di elaborazione dei segnali Signal Express è possibile valutare e raccogliere questi segnali, calcolarne lo spettro in frequenza, lo spettro di potenza, le FRF di interesse e tutto ciò che serve ai fini della validazione e del confronto. Nell'immagine che segue è possibile osservare questa catena di misura sperimentale, con la quale si è operato nel corso della raccolta dei dati sulle piastre testate:

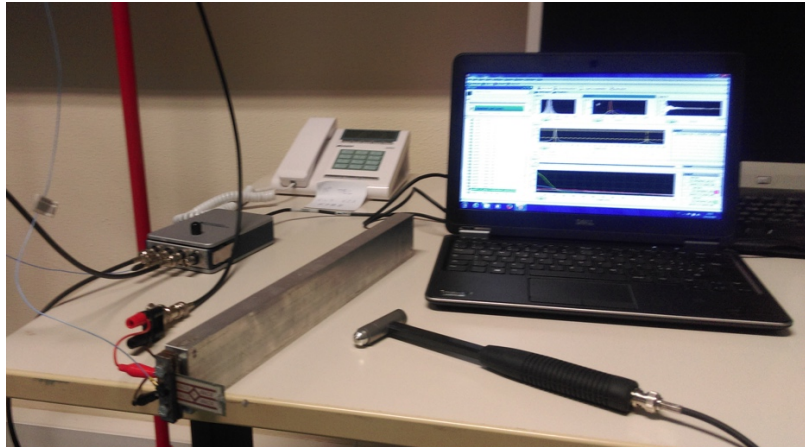


Figura 4.4: catena di misura adottata durante l'esecuzione delle prove sperimentali

In dettaglio, gli strumenti utilizzati sono stati questi:

1) Il martelletto strumentato

Sta alla base di tutta l'attività sperimentale di test delle piastre piezoelettriche, in quanto, come già accennato, il metodo usato per la costruzione delle FRF sperimentali è quello dell'eccitazione impulsiva, attuabile mediante martelletti strumentati con punte più o meno dure; in questo lavoro si è usato un martelletto PCB e due punte, una dura (nera) capace di generare impulsi di circa 3 ms e una più morbida (rosa) i cui impulsi durano circa il doppio (e la cui corrispondente banda di eccitazione in frequenza è circa dimezzata), come mostrato nella foto seguente:



Figura 4.5: martelletto strumentato adottato durante l'esecuzione delle prove sperimentali e le relative punte utilizzate

Il martelletto strumentato è dotato di un sensore di forza integrato nella superficie su cui viene avvitata la punta, per far sì che le caratteristiche strutturali dello stesso non incidano sugli impulsi generati e quindi sulle misure; inoltre il martelletto non presenta risonanze nel range di frequenze di interesse e ciò aiuta nell'evitare possibili disturbi sui dati sperimentali acquisiti. Per quanto riguarda le punte, è già stato detto che tanto più alta è la rigidità di

contatto tra essa e l'oggetto colpito, tanto più corta sarà la durata dell'impulso e del contatto durante il colpo e quindi tanto più l'eccitazione in frequenza si avvicinerà a quella ideale di Dirac; questo fatto si può percepire anche al semplice tatto delle punte in cui si nota subito la maggiore rigidità della punta nera rispetto a quella rosa.

Come già detto i dati che saranno presi per il confronto saranno quelli ottenuti con la punta dura, e, anche se sono disponibili punte più rigide con cui eccitare il sistema, si è riscontrato che un'eccessiva rigidità della punta o brevità del contatto concorre al verificarsi di un fenomeno spiacevole noto come 'doppio colpo' che invalida le misure. Questo fatto indesiderato è dovuto al fatto che il corpo oscilla così rapidamente e ampiamente che colpisce la punta del martelletto una seconda volta prima che l'operatore allontani lo strumento dalla zona del colpo, alterando in maniera negativa e irrimediabile la misura.

Dal punto di vista pratico è importante cercare di fornire dei colpi con il martelletto di intensità abbastanza simile, infatti anche se in linea teorica la FRF dovrebbe essere, come già detto, indipendente dalla forza esterna, la linearità del sistema è stata assunta come un'ipotesi; perciò un colpo eccessivamente forte potrebbe esaltare la non linearità del sistema in esame e dare origine a delle FRF non in linea con quelle ottenute colpendo il sistema con meno energia.

2) L'accelerometro mono-assiale

Per misurare l'accelerazione alla base dell'harvester si è usato un accelerometro mono-assiale PCB 352 C 22 le cui caratteristiche sono le seguenti:

dimensioni	3,6 x mm 11,4 mm x 6,4 mm
peso	0,5 g
sensibilità	10,48 mV/g
risonanza	50000 Hz
range di frequenza	1÷10000 Hz

Tabella 4.1: caratteristiche accelerometro PCB 352 C 22 [3]

Qui sotto un'immagine del componente utilizzato:

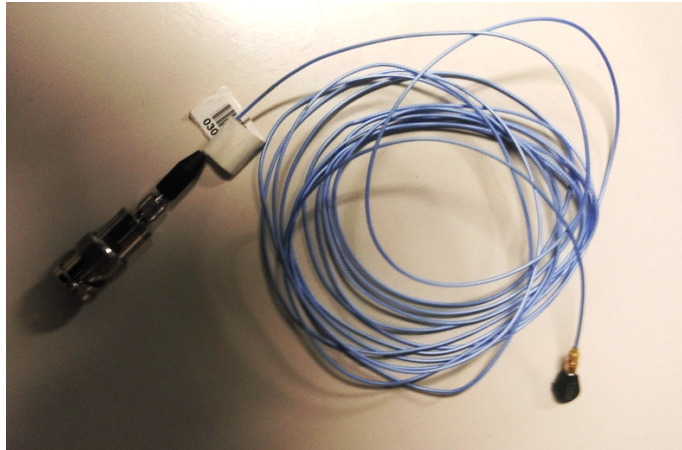


Figura 4.6: accelerometro PCB e cavo di collegamento per collegarlo con il sistema di acquisizione. Viene applicato sulla lamina superiore del sistema di afferraggio che tiene vincolata la piastra piezoelettrica in esame per mezzo di cera d'api; dev'essere applicato in modo solidale e fisso sulla lamina in modo che non possa muoversi e alterare/danneggiare le misure di accelerazione.

3) Il sistema di acquisizione dei segnali

È un modulo di acquisizione di segnali a 4 canali, della National Instruments identificato dal numero di serie NI 9234, per misurare segnali di frequenza per mezzo di sensori IEPE ad elevata accuratezza. Ai canali sono collegati gli ingressi del sistema di misura, che sono tre:

- canale 0: vi è collegato il martelletto e misura l'accelerazione della martellata;
- canale 1: vi è collegato l'accelerometro e misura l'accelerazione alla base dell'harvester;
- canale 2: vi è collegata l'uscita elettrica dell'harvester e misura la tensione generata dalla piastra ai capi degli elettrodi a contatto con gli strati piezoelettrici interni all'harvester.

Ogni canale esegue la digitalizzazione (contemporanea) dei segnali in arrivo fino a frequenze di 51,2 kHz e sono provvisti di filtri anti-aliasing interni in grado di regolare automaticamente la frequenza di campionamento.

Le caratteristiche di questo modulo sono le seguenti:

n° di canali	4
range segnale	$\pm 5 V$
impedenza d'ingresso	305000 Ω (resistiva)
range di frequenza	0÷51,2 kHz

Tabella 4.2: caratteristiche tecniche del sistema di acquisizione NI 9234 [5]

Qui sotto una foto del sistema di acquisizione utilizzato:



Figura 4.7: sistema di acquisizione NI 9234

4) La barra di alluminio e il sistema di afferraggio

La barra di alluminio ha due funzioni: sostenere il sistema durante le prove e fornire l'input di accelerazione alla base dell'harvester fornito dalla martellata all'estremità opposta rispetto a dov'è montata la piastra nel sistema di afferraggio, come si può vedere nella foto seguente:

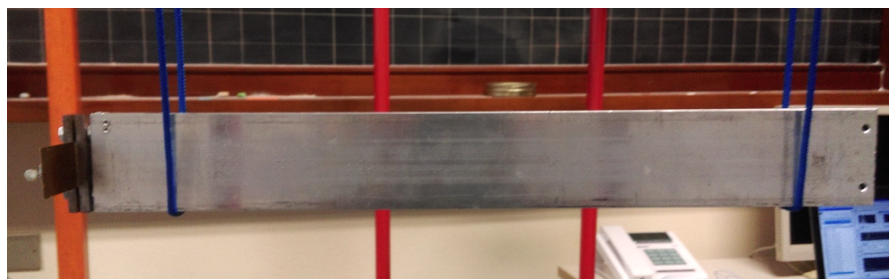


Figura 4.8: barra di alluminio sospesa in aria con sistema di afferraggio assieme ad una delle piastre testate (a sinistra)

La barra, di dimensioni 400 mm x 50 mm x 20 mm, è progettata per far in modo che le sue risonanze più basse (longitudinali) non vadano a distorcere le misure e le risonanze dell'harvester; infatti il range di frequenze in cui si incontrano le risonanze di interesse per le prove con gli harvesters (da soli, con tipmass e con i diversi assorbitori) cade nell'intervallo 50÷450 Hz, lontano dalla prima risonanza della barra che è attorno ai 630 Hz. Gli eventuali picchi nelle misurazioni a questa frequenza verranno considerati come disturbi e non caratteristici delle piastre sotto test.

Qui sotto il dettaglio del sistema di afferraggio in cui si può vedere come viene fissata la base di una delle piastre testate; si vede inoltre come viene fissato l'accelerometro (nero). L'afferraggio è scelto nello stesso materiale della barra, cioè alluminio ed è costituito da due pezzi: una lastrina inferiore appoggiata sulla barra sulla quale è appoggiata la base dell'harvester (che risulta posto come una trave a sbalzo analogamente ai modelli analitici elettromeccanici analizzati nel capitolo 3) sopra il quale è appoggiata la seconda lastrina, il tutto serrato da due viti M5. L'accelerometro è incollato sopra la lastrina superiore di serraggio che a meno dello spessore della lastrina misura l'accelerazione vibratoria proveniente dalla barra sulla base/zona di serraggio della piastra.

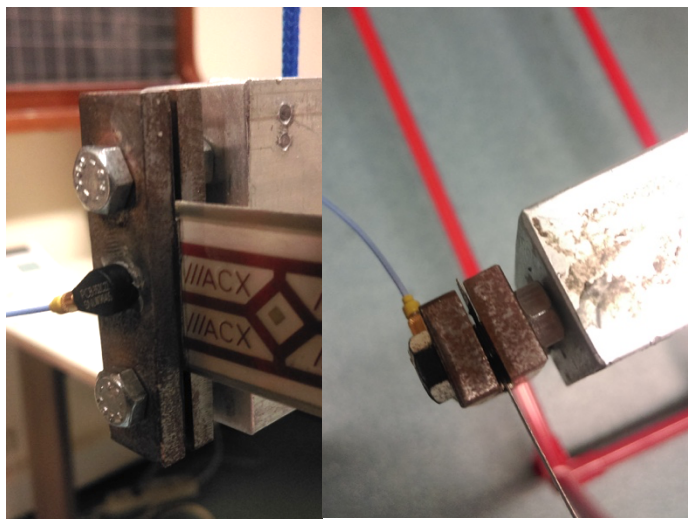


Figura 4.9: dettaglio del sistema di afferraggio degli harvester e collegamento dell'accelerometro

L'incastro è quindi realizzato serrando la base di ogni harvester tra le due lastrine per mezzo delle due viti, e, per ottenere condizioni di serraggio ripetibili e per fare in modo che le basi di appoggio delle lastrine siano parallele e non comprimano troppo la base delle piastre piezoelettriche si è usato di volta in volta uno spessimetro per fissare in modo definitivo e costante tale distanza.

5) Il software Labview Signal Express

Per acquisire, analizzare e elaborare i dati misurati e registrati dagli ingressi collegati al modulo di acquisizione dei segnali attraverso i canali a cui sono collegati i sensori di misura (accelerometro, uscita elettrica harvester e martelletto) si è usato un software della National Instruments, Labview Signal Express; è un ambiente interattivo e virtuale grazie al quale è possibile acquisire i dati di interesse in modo veloce e efficace. Si può inoltre scegliere il modo in cui essi vengono presentati dal punto di vista grafico, cosa che è stata fatta in questo

modo; nella figura seguente, alla fine di ogni misura sperimentale vengono visualizzati nei grafici della schermata le seguenti quantità: in ordine:

- in alto, da sinistra verso destra, vi sono: accelerazione alla base dell'harvester, accelerazione impulso martellata e tensione elettrica generata dall'harvester nel tempo
- al centro: modulo della FRF sperimentale tra tensione elettrica generata dalla piastra e accelerazione alla base della stessa (in V/g) e sotto il rispettivo diagramma della fase, entrambi al variare della frequenza
- in basso: spettro di potenza dei segnali impulsivi (martellate)

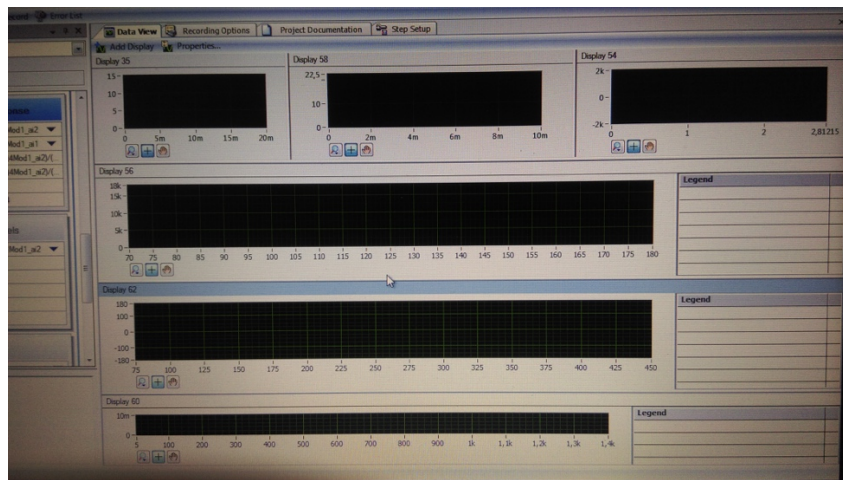


Figura 4.10: schermata di acquisizione/presentazione dei dati delle misure sperimentali

Con un iniziale settaggio della modalità di acquisizione, si stabilisce come vengono raccolti i dati: si setta un trigger al segnale del martelletto, che fa iniziare l'acquisizione dei dati quando parte la registrazione (run) ad una frequenza di campionamento $f_c = 4 \text{ kHz}$ con un numero di campioni $n_c = 12000$ per ogni misura, per tutti i segnali acquisiti, che corrisponde a un tempo di acquisizione di circa 3 s.

In questo modo la risoluzione che si ha nel dominio delle frequenze (nelle analisi degli spettri dei segnali, delle FRF, etc..) risulta pari a $\Delta f = \frac{1}{3 \text{ s}} = 0,33 \text{ Hz}$.

Le sensibilità dei sensori di canali di interesse sono state settate in Labview secondo questi valori:

canale	sensore	sensibilità
0	martelletto	2,5 mV/g
1	accelerometro	10,48 mV/g
2	uscita elettrica	1 V/V

Tabella 4.3: sensibilità dei sensori impostate per l'acquisizione dei dati

4.3 Le piastre piezoelettriche testate

In questo paragrafo verranno descritte le piastre piezoelettriche utilizzate come harvesters e caratterizzate dal punto di vista elettromeccanico per la validazione e il confronto dei risultati ottenuti da questa prima attività di studio sperimentale. Sono prodotte dall'azienda Midè's Volture™, leader in questo settore, e sono 3, identificate dai seguenti nomi tecnici;

- V22B
- V22BL
- PPA 1001

Le prime due piastre sono degli harvesters bimorfi, costituiti cioè da due strati di materiale piezoelettrico, il PZT 5A, isolati da materiale isolante e strutturale (FR4 e espanex), i cui dettagli sono forniti qui a seguire; la terza piastra è invece unimorfa, cioè al suo interno vi è un solo strato piezoelettrico, il PZT 5H, circondata da quattro strati di quattro diversi materiali che fanno da sostegno all'intera lamina. Ora i dettagli delle singole lamine;

* Harvesters bimorfi

Le piastre V22B e V22BL hanno al loro interno due strati piezoelettrici, opportunamente separati da un polimero detto espanex. Dal punto di vista geometrico sono formate da un tratto iniziale di un materiale composito nominato FR4, un tratto centrale contenente gli strati piezoelettrici ed un tratto finale ancora in FR4; la differenza tra le due è la lunghezza del tratto finale di FR4 che, per la V22B è di 2,3 mm mentre per la V22BL è di 30,3 mm (L sta per 'longer'). Altezza (spessore totale) e larghezza (profondità) sono le stesse per entrambe le piastre, pari rispettivamente a 0,81 mm e 6,1 mm. Qui sotto immagine delle due piastre con dettagli geometrici tecnici ricavati dal datasheet della Midè:

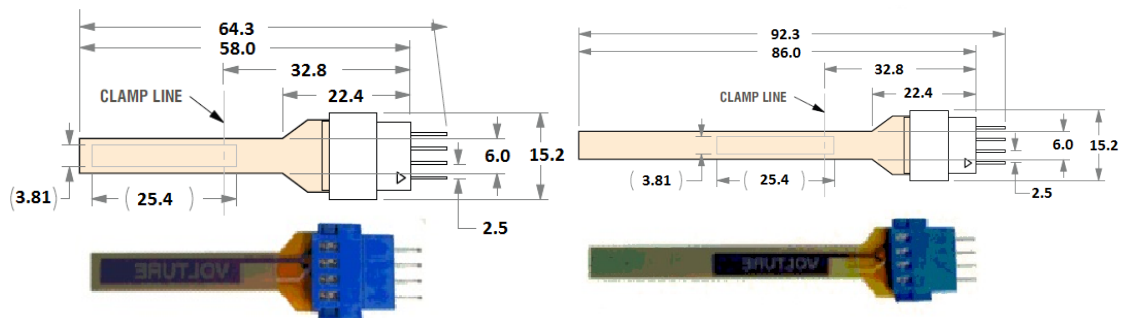


Figura 4.11: dettagli geometrici delle piastre bimorfe V22B (sinistra) e V22BL (destra) [7]

Per entrambe le piastre, gli strati iniziale e finale sono composti da solo FR4 (detto anche vetronite, un composito fibroso formato da un tessuto di fibre di vetro immerse in una matrice di resina epossidica, che ha buone proprietà di resistenza, di rigidità meccanica e isolanti), e la parte iniziale è lunga 7,8 mm per entrambe le piastre; la parte centrale invece è lunga 25,4 mm e contiene i due strati piezo che sono larghi 3,81 mm. La sequenza degli strati centrali è la seguente,

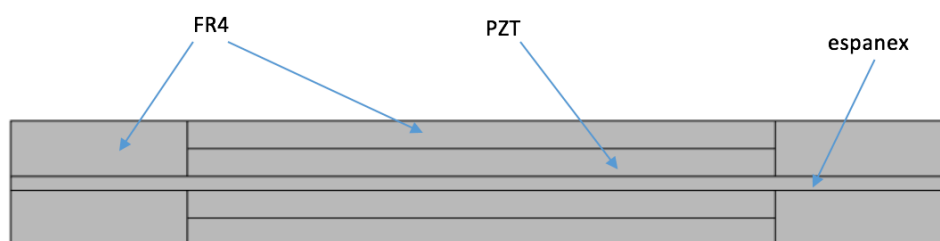


Figura 4.12: composizione strati tratto centrale lamine bimorfe

Le misure degli strati sono le seguenti:

materiale	spessore [mm]	larghezza [mm]
FR4	0,18	6,1
PZT 5 A	0,18	3,81
espanex	0,09	6,1

Tabella 4.4: spessori e larghezze strati nel tratto centrale delle lamine bimorfe [8]

Gli strati sono incollati tra loro per mezzo di un velo di colla epossidica, la quale non va a influire sul comportamento meccanico del sistema durante le prove; infatti di essa non se ne terrà conto nei modelli al FEM.

Per quanto riguarda le proprietà dei materiali, la Midè fornisce i seguenti valori, che verranno usati nelle caratteristiche dei materiali nei modelli FEM:

materiale	modulo di Young E	coefficiente di Poisson ν	densità ρ
espanex	3,2 GPa	0,34	1300 kg/m ³
FR4	22 GPa	0,28	1900 kg/m ³
PZT 5 A	matrice di elasticità	0,3	7800 kg/m ³

Tabella 4.5: proprietà di base dei materiali presenti nelle piastre bimorfe V22B e V22BL [8]

Tuttavia il materiale piezoelettrico PZT 5 A contiene inoltre tutte le proprietà relative al comportamento elettromeccanico, come la matrice di elasticità (o l'inversa, di cedevolezza), la matrice di accoppiamento elettromeccanico, le matrici di permittività elettrica, e questo perché è un materiale che ha comportamento ortotropo e trasversalmente isotropo. Inoltre i due strati piezoelettrici sono polarizzati lungo lo spessore e con verso di polarizzazione

opposto, ma di ciò se ne terrà conto nel modello al FEM. Le matrici caratteristiche più importante che caratterizzano il PZT 5 A sono le seguenti;

- Matrice di elasticità C_E in [Pa]:

$$\begin{bmatrix} 1,203 \times 10^{11} & 7,518 \times 10^{11} & 7,509 \times 10^{10} & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 7,518 \times 10^{11} & 1,203 \times 10^{11} & 7,509 \times 10^{10} & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 7,509 \times 10^{11} & 7,509 \times 10^{11} & 1,1087 \times 10^{11} & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 2,105 \times 10^{10} & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 2,105 \times 10^{10} & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 2,257 \times 10^{10} \end{bmatrix}$$

- Permettività relativa:

$$[\varepsilon_r^T] = [1730, 1730, 1700]$$

in cui si nota il coefficiente più importante $\varepsilon_{33} = 1700$

- Matrice di accoppiamento d in [C/N]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 584 \times 10^{-12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 584 \times 10^{-12} & 0 & 0 \\ -190 \times 10^{-12} & -190 \times 10^{-12} & 390 \times 10^{-12} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nella quale si notano i coefficienti più importanti, $d_{31} = -190 * 10^{-12}$ e $d_{33} = 390 * 10^{-12}$

Queste sopra riportate sono le matrici nella configurazione deformazione-carica (la d-form), la più pratica e operativa tra le due viste nel capitolo 2.

* Harvester unimorfo

La piastra PPA 1001 ha al suo interno un unico strato piezoelettrico, di materiale diverso da quello delle lamine bimorfe, cioè PZT 5H; tale strato risulta ovunque circondato da materiale strutturale, e si può anche in questo caso pensare ad una suddivisione della lamina in tre parti lungo l'asse della stessa: un primo strato in poliestere, lungo 0,5 mm, uno strato centrale contenente il materiale piezoelettrico, lungo 40,7 mm ed uno strato finale in poliestere lungo 1,8 mm. Lo spessore della piastra è di 0,46 mm mentre la larghezza è di 23,3 mm. Altre misure

utili alla modellazione al FEM sono fornite dal datasheet del componente, qui sotto riportato assieme alla piastra quotata:

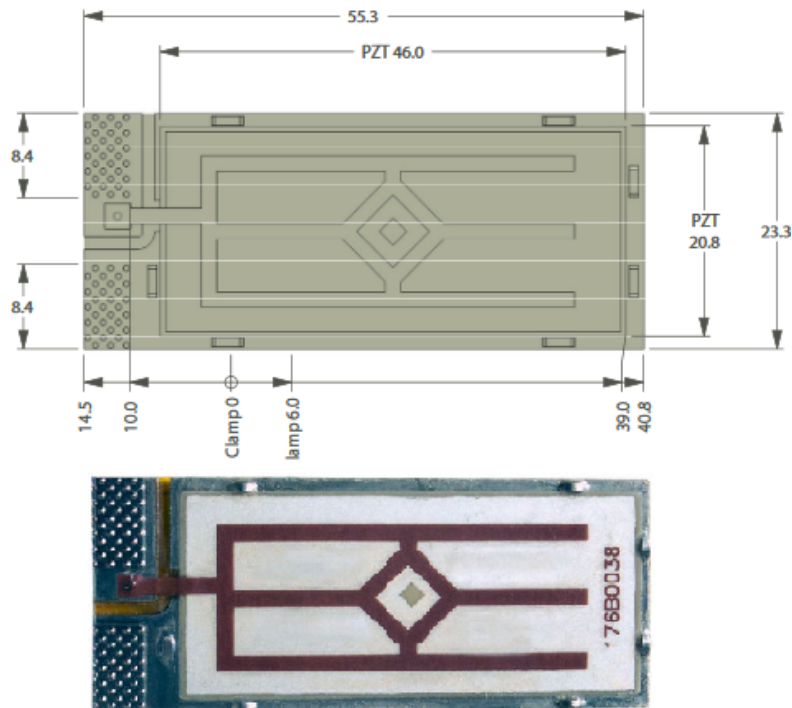


Figura 4.13: dettagli geometrici della piastra unimorfa PPA 1001 [7]

La zona centrale contenente lo strato piezoelettrico è formata da 5 successioni di strati di materiale diverso, tutti più stretti rispetto alla larghezza totale della piastra (solo le parti iniziale e finale di poliestere sono larghe come la larghezza complessiva della piastra) ed il materiale mancante che copre questi strati ai lati destro e sinistro della piastra è ancora poliestere. Partendo dal basso della piastra, l'ordine dei materiali ed il relativo spessore è quello riportato nella seguente tabella:

strato	spessore [mm]	larghezza [mm]
polymide	0,03	20,8
acciaio AISI 304	0,15	20,8
PZT 5H	0,15	20,8
rame	0,03	20,8
poliestere	0,05	23,3

Tabella 4.6: dimensioni strati PPA 1001 [7]

Anche in questa piastra gli strati sono incollati tra loro per mezzo di un velo di colla epossidica.

I materiali presenti in questa lamina hanno le seguenti proprietà, fornite ancora dalla Midè:

materiale	modulo di Young E	coefficiente di Poisson ν	densità ρ
poliestere	3,6 GPa	0,48	1389 kg/m ³
rame	110 GPa	0,35	8700 kg/m ³
acciaio AISI 304	193 GPa	0,29	8000 kg/m ³
polymide	3,1 GPa	0,34	1400 kg/m ³

Tabella 4.7: proprietà di base dei materiali presenti nella piastra unimorfa PPA 1001 [7]

Il materiale piezoelettrico presente in questa piastra, il PZT 5H è leggermente diverso dal PZT 5 A ed ha le seguenti caratteristiche;

- Matrice di elasticità C_E in [Pa]:

$$\begin{bmatrix} 1,272 \times 10^{11} & 8,021 \times 10^{10} & 8,467 \times 10^{10} & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 8,021 \times 10^{10} & 1,272 \times 10^{11} & 8,467 \times 10^{10} & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 8,467 \times 10^{10} & 8,467 \times 10^{10} & 1,174 \times 10^{11} & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 2,298 \times 10^{10} & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 2,298 \times 10^{10} & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 2,347 \times 10^{10} \end{bmatrix}$$

- Permettività relativa:

$$[\epsilon_r^T] = [3130, 3130, 3800]$$

- Matrice di accoppiamento \mathbf{d} in [C/N]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 740 \times 10^{-12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 740 \times 10^{-12} & 0 & 0 \\ -320 \times 10^{-12} & -320 \times 10^{-12} & -650 \times 10^{-12} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Densità e coefficiente di Poisson:

$$\rho = 7600 \text{ kg/m}^3 \quad \nu = 0,3$$

4.4 L'effetto di carico delle lamine testate

Prima di passare alla presentazione e discussione delle misure sperimentali è necessario dire che tali misure ed i rispettivi risultati ottenuti in termini di FRF, sono affette da un certo errore variabile con la frequenza di vibrazione, dovuto alla presenza della capacità equivalente che si ha per gli stessi

strati piezoelettrici presenti all'interno delle lamine; l'harvester quindi presenta caratteristiche di impedenza capacitiva, con valore della capacità per ogni strato pari a $C_p = \epsilon_{33}^S bL/h_p$.

Si ricorda dall'elettrotecnica che un'impedenza capacitiva è puramente 'immaginaria' ed è pari a:

$$Z_c = -\frac{i}{\omega C_p}$$

tale impedenza sarà quella di uscita rispetto agli strumenti applicati sulla lamina (sistema di acquisizione), indicata con Z_{out} ; gli stessi strumenti tuttavia hanno un'impedenza puramente resistiva al loro interno che verrà indicata con Z_{in} (impedenza d'ingresso).

Per via di queste due impedenze, non trascurabili, il valore della tensione generata dall'harvester V_g si ricava da quello della tensione misurata V_m nel seguente modo:

$$V_s = \frac{\sqrt{Z_{in}^2 + Z_{out}^2}}{Z_{in}} V_m = k(\omega) V_m$$

dove Z_{in} per il sistema di acquisizione NI 9234 vale 305000 Ohm, mentre il coefficiente $k(\omega)$ quantifica l'effetto di carico che si ha sul segnale di tensione misurato è pari a:

$$k(\omega) = \frac{\sqrt{305000^2 + \left(\frac{n_p}{\omega C_p}\right)^2}}{305000}$$

dove n_p indica il numero di strati piezoelettrici, che sono 2 per le piastre bimorfe e 1 per la piastra unimorfa.

Piastre bimorfe:

Per le piastre V22B e V22BL, si ha che la capacità equivalente di ogni strato piezoelettrico (che si ricorda sono 2) risulta essere di 7,2 nF, la quale comporta un valore del $k(\omega)$ che ha quest'andamento con la frequenza:

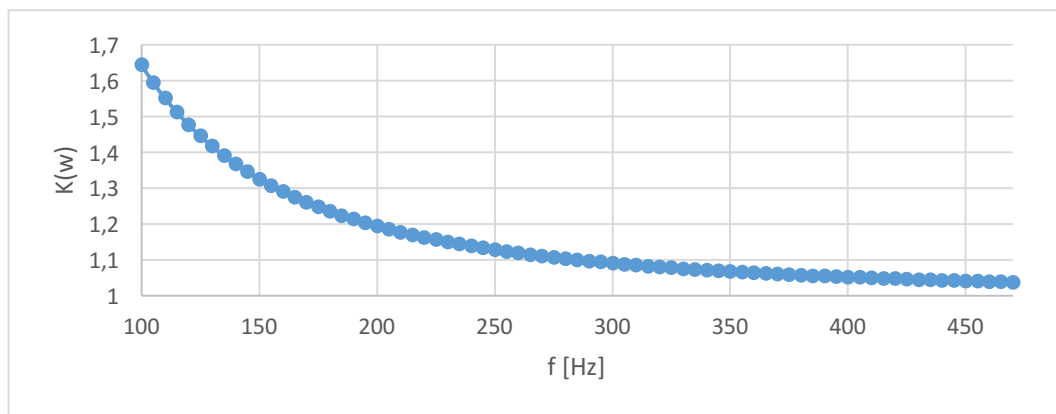


Figura 4.14: andamento dell'effetto di carico in funzione della frequenza per le piastre bimorfe

Le curve delle FRF sperimentali che verranno analizzate successivamente verranno pertanto corrette di tale fattore. Si può poi anche definire un errore di misura in termini percentuali pari a;

$$errore \% = \frac{V_s - V_m}{V_s} 100 = \frac{K(\omega)V_m - V_m}{K(\omega)V_m} 100 = \frac{K(\omega) - 1}{K(\omega)} 100$$

il cui andamento è il seguente:

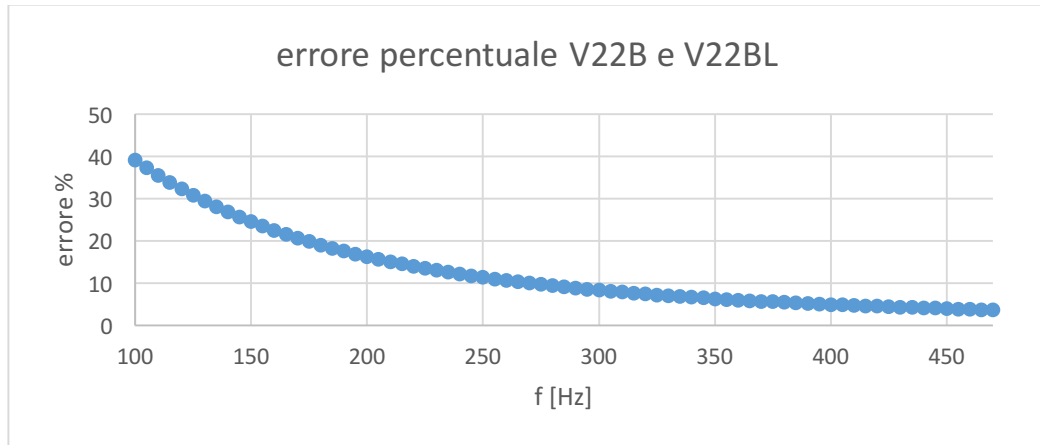


Figura 4.15: errore percentuale sulla tensione misurata

Si capisce che, ad esempio sulla misura della tensione generata dalle due piastre bimorfe alla rispettiva risonanza, si ha un errore del 30% per la V22BL e del 10% per la V22B, assai elevati! Per entrambe le piastre l'alterazione della tensione misurata è elevata in un range di frequenze comprese tra i 50 Hz e i 300 Hz, dove l'errore supera il 10%.

Piastra unimorfa:

Per la piastra PPA 1001 invece, avendo un solo strato piezoelettrico di dimensioni molto più grandi di quello delle piastre bimorfe, fa sì che la sua capacità equivalente sia di circa 100 nF e con un andamento del coefficiente $K(\omega)$ di questo tipo:

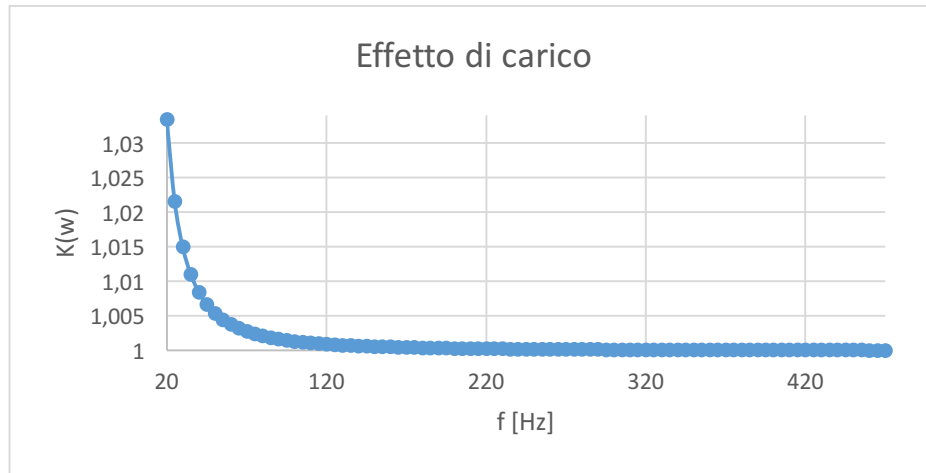


Figura 4.16: effetto di carico per la piastra unimorfa PPA 1001

Si vede che l'alterazione della tensione prodotta da questo harvester è minima (3%) già a frequenze bassissime; se si guarda l'errore percentuale:

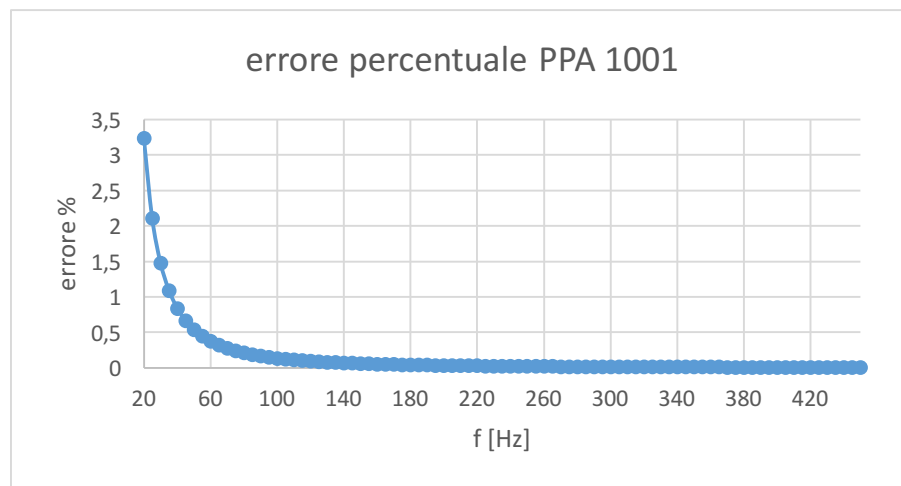


Figura 4.17: errore percentuale sulla tensione elettrica misurata per la piastra unimorfa

si osserva subito che oltre frequenze di 60 Hz l'errore che si commette sulla misura della tensione generata da questa piastra è inferiore allo 0,5%; visto che le frequenze sperimentali più basse che verranno ottenute durante le prove non scendono al di sotto dei 70 Hz, tale effetto di carico per questa piastra non verrà preso in considerazione.

4.5 I risultati delle prove sperimentali

In questo paragrafo vengono presentati e brevemente commentati i risultati sperimentali ottenuti dalle tre diverse piastre testate, ognuna delle quali è stata vincolata nel sistema di afferraggio alla lunghezza massima (clamp0) che permette di ottenere le frequenze trasversali relative al primo modo di vibrare nel range di vibrazioni presenti nell'ambiente di lavoro di un normale harvester (cioè 50÷400 Hz).

Infatti a tale lunghezza, non si corre il rischio di comprimere/serrare (e quindi rompere) nessun strato piezoelettrico in quanto ciò che compone la piastra nel tratto iniziale dove viene fissata è FR4 per le lamine bimorfe e poliestere per la lamina unimorfa.

Ogni piastra è stata testata prima da sola, poi con le tipmass e infine con i 3 assorbitori.

È stato seguito quest'ordine perché compiendo le misure prima sulla piastra da sola si definisce subito il punto di vincolo esatto per la stessa, dal quale poter eseguire le altre misure; l'incastro viene infatti posto nella zona in cui la larghezza delle piastre bimorfe diviene costante e pari a 6,1 mm, mentre per la piastra unimorfa viene posto in modo da ottenere una lunghezza libera il più vicino possibile a quella usata dalla casa produttrice; tali lunghezze massime sono: 35,5 mm per la V22B, 63,5 mm per la V22BL e 41,5 mm per la PPA 1001.

Per ogni sistema testato si è proceduto nel modo seguente:

- fissaggio della base della piastra nel sistema di afferraggio;
- nel caso di utilizzo di tipmass o assorbitori, fissaggio di quest'ultimi all'estremità libera dell'harvester per mezzo di cera;
- esecuzione di 20 misure, 10 fornendo impulsi corti (punta dura del martelletto) e 10 fornendo impulsi più lunghi (punta morbida del martelletto);
- ogni misura consiste di 3 colpi di martelletto sull'estremità opposta a dove si trova la piastra sulla barra di alluminio;
- ogni colpo è fornito con una variabilità nel picco di accelerazione dell'impulso compresa tra 4 e 8 g, variabile in maniera casuale a seconda della manualità dell'operatore;

Le grandezze fisiche misurate direttamente per mezzo dei sensori e del modulo di acquisizione sono tre:

- o canale0: accelerazione del martelletto strumentato
- o canale1: accelerazione alla base dell'harvester (dall'accelerometro)
- o canale2: tensione elettrica generata dall'harvester

Queste tre grandezze sono, per ogni misura, registrate ed elaborate istantaneamente nel software Labview Signal Express nel quale è possibile valutare subito le FRF (funzione di trasferimento) di interesse; tali operazioni sono fatte per mezzo di algoritmi FFT e DFT, in modo estremamente veloce e efficace. In questo caso solo una FRF era ricercata, ovvero quella tra la tensione generata dalla piastra (output) e l'accelerazione alla base della stessa (input).

Oltre alle FRF è possibile valutare altre grandezze fondamentali ai fini di questo lavoro, ovvero:

- antirisonanza (nelle misure con gli assorbitori) valutabile dal minimo assoluto assunto dalla FRF, collocato tra i due picchi principali; tale parametro viene usato durante la fase iniziale di settaggio della piastra per dare il via all'inizio delle misurazioni;
- le frequenze di risonanza ed i loro picchi, leggibili direttamente dai grafici delle FRF;
- i picchi di accelerazione forniti con le martellate;
- le tensioni picco-picco V_{pp} pari alla distanza tra la cresta massima e la minima assunte dall'andamento temporale della tensione generata dalla piastra;
- rapporto di smorzamento ζ : lo si può ricavare con due diversi metodi, cioè:
 - o decremento logaritmico: dall'andamento temporale della tensione elettrica generata dall'harvester, ovvero una sinusoidale con decrescita esponenziale di questo tipo:

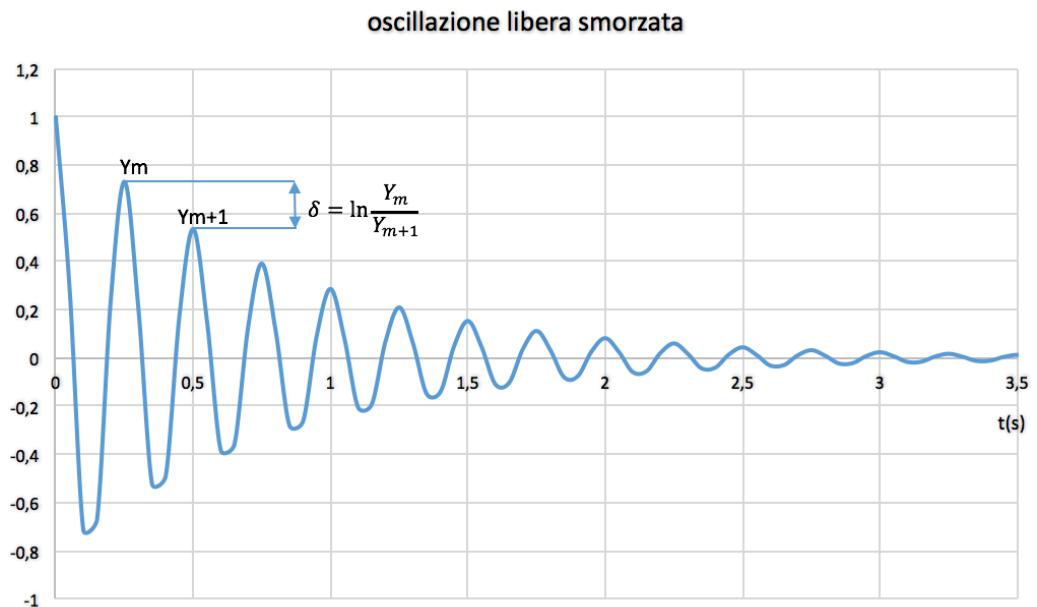


Figura 4.18: oscillazione libera smorzata e definizione del decremento logaritmico

La definizione del decremento logaritmico dice che il rapporto tra le ampiezze di due cicli di oscillazione contigui qualsiasi è costante e pari a quanto riportato sul grafico. Essendo gli smorzamenti molto bassi nei problemi reali, si può valutare ζ in modo approssimato così,

$$\zeta \cong \frac{\delta}{2\pi}$$

inoltre nei casi dove ζ è molto basso, si può ottenere una stima più precisa misurando le ampiezze che si hanno alla distanza di un certo numero di cicli, ad esempio per due ampiezze distanti n cicli si avrà,

$$\zeta = \frac{1}{2\pi n} \ln \frac{x_1}{x_{n+1}}$$

Quest'ultimo metodo è molto efficace per sistemi a 1 gdl e sarà pertanto utilizzato nella valutazione del rapporto di smorzamento delle singole piastre, e delle piastre con tipmass.

- o larghezza di banda: questo metodo può essere applicato ai diversi modi di vibrare di un sistema a più gdl, e verrà usato per valutare lo smorzamento dei sistemi testati con gli assorbitori, i quali sono in prima approssimazione a 2 gdl. Si basa sul fatto che nelle oscillazioni forzate la larghezza del picco di risonanza è correlata allo smorzamento; si prende la larghezza del picco $\Delta\omega$ individuata dalle frequenze esterne ω_1 e ω_2 in corrispondenza delle quali l'ampiezza del picco è attenuata di 3 dB cioè il modulo della FRF vale $\frac{|FRF|_{max}}{\sqrt{2}}$.

Si prendono quindi i valori di ω_1 e ω_2 in corrispondenza dei quali si ha questo fatto, si calcola la larghezza di banda $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ed il rapporto di smorzamento è infine dato semplicemente da,

$$\zeta = \frac{\Delta\omega}{\omega_n}$$

4.5.1 Misure lamina V22B

Si riportano ora i risultati delle misure sperimentali relative alla piastra V22B, tutte corrette con il rispettivo effetto di carico presente negli strumenti di misura e nella piastra. Saranno riportati in quest'ordine:

sistema testato	lunghezza di vincolo (piastra)	tipmass o m_a
V22B	35,5 mm	---
V22B+tipmass piccola	35,5 mm	m_4 (come tipmass)
V22B+tipmass	35,5 mm	mezzo piombino
V22B+A2	35,5 mm	m_2
V22B+A34	35,5 mm	m_{34}
V22B+A4	35,5 mm	m_4

Tabella 4.8: configurazioni della lamina V22B nell'ordine in cui sono state testate

1) V22B

Le 20 misure relative a questa piastra, delle quali 10 con punta hard e 10 con punta soft, hanno fornito i seguenti risultati;

punta hard:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	picco FRF [V/g]	risonanza [Hz]	ζ
1	6,5	2,876	0,4425	12,89	270,6	0,00582
2	6,1	2,54	0,4164	12,96	270,6	0,00581
3	6,4	2,698	0,4216	12,76	270,6	0,00578
4	6,6	2,829	0,4286	12,84	270,6	0,00579
5	6,2	2,59	0,4177	12,91	270,6	0,00575
6	5,7	2,41	0,4228	12,84	270,6	0,00577
7	5,7	2,396	0,4204	12,76	270,6	0,00564
8	6,7	2,84	0,4239	12,56	270,6	0,00568
9	5,6	2,34	0,4178	12,62	270,6	0,00572
10	5,5	2,275	0,4136	12,74	270,6	0,00570

punta soft:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	picco FRF [V/g]	risonanza [Hz]	ζ
1	6	1,55	0,2583	13,3	270,9	0,00578
2	5,8	1,42	0,2448	13,05	270,9	0,00575
3	6,1	1,648	0,2702	13,04	270,9	0,00579
4	5	1,138	0,2276	13,08	270,9	0,00568
5	7,05	2,1	0,2979	13,21	270,9	0,00565
6	6,95	1,99	0,2863	13,2	270,9	0,00582
7	5,4	1,3	0,2407	13,03	270,9	0,00580
8	7	2,00	0,2857	13,3	270,9	0,00569
9	6,45	1,7	0,2636	13,25	270,9	0,00576
10	5,4	1,31	0,2426	13,23	270,9	0,00584

Si nota subito una discreta variabilità nell'intensità dei picchi di accelerazione forniti col martelletto, dovuti alla componente umana della misura stessa, ma anche una variabilità nei picchi delle FRF, dovuta al punto in cui viene impresso l'impulso sulla barra di alluminio, che non è sempre lo stesso e centrato nella stessa; inoltre i picchi delle FRF eseguiti con la punta morbida risultano leggermente più alti di quelli eseguiti con la punta dura, a parità di accelerazione impulsiva impressa. Viceversa, le Vpp relative alle misure eseguite con la punta hard risultano più alte di quelle eseguite con la punta soft. Ciò è in parte attribuibile al fatto che impulsi corti forniscono, nel range dove essi sono in grado di eccitare bene in frequenza l'harvester, più energia di quelli più lunghi, a causa del loro spettro in frequenza più ampio, come visto all'inizio di questo capitolo. Invece si osserva che la frequenza di risonanza è stabile a 271 Hz, come anche il rapporto di smorzamento al valore di 0,0058. Qui sotto le FRF sperimentali ottenute, opportunamente corrette con l'effetto di carico:

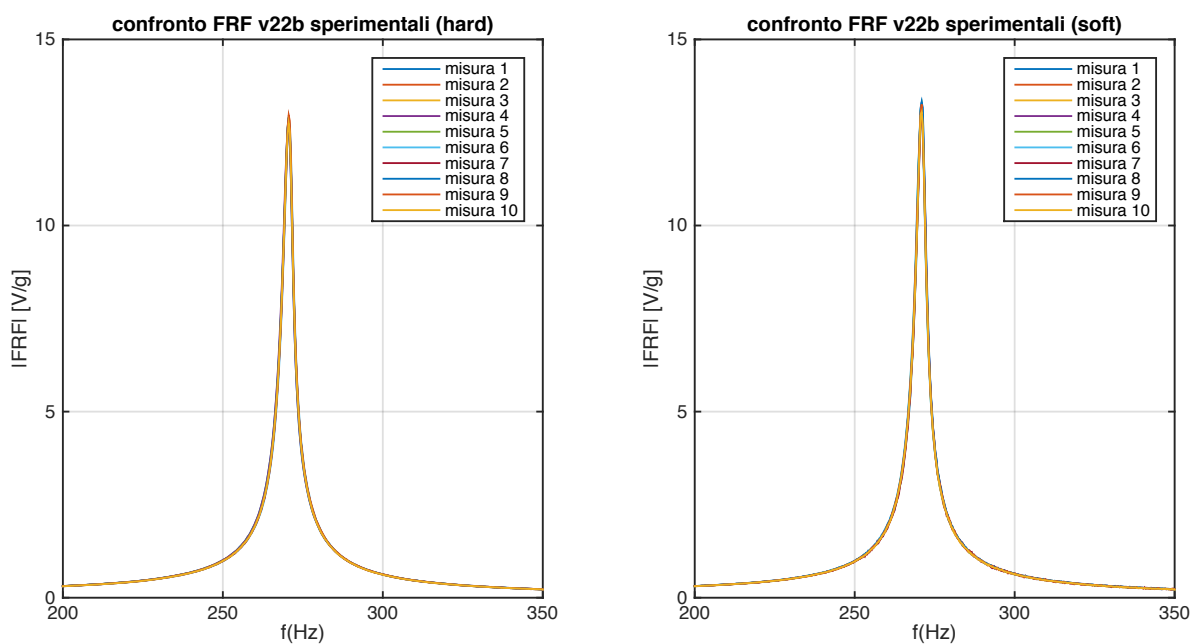


Figura 4.19: frf sperimentali acquisite per la piastra v22b

A livello grafico, per valutare il livello di produzione energetica in termini di tensione elettrica, si riporta qui sotto a sinistra il confronto della V_{pp}/g per i due tipi di punte utilizzate; a destra invece è riportato lo stesso confronto in termini di rms, calcolato dalle acquisizioni degli andamenti temporali della tensione elettrica ai capi della piastra in un intervallo di 0,3 s. Questi valori non sono stati corretti con l'effetto di carico in quanto di difficile valutazione.

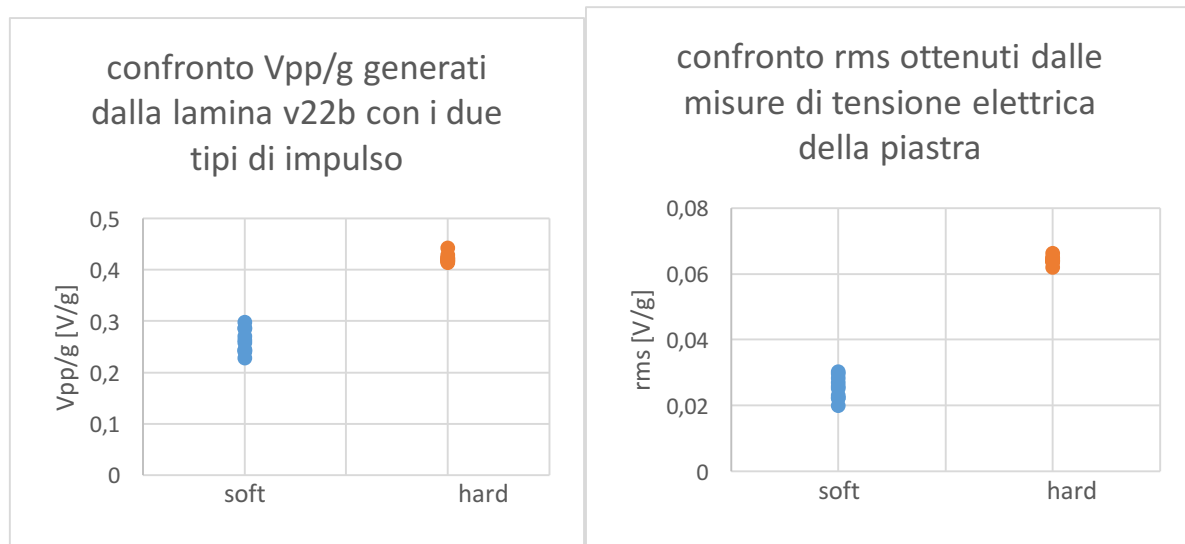


Figura 4.20: V_{pp} e rms relativi alle misure della lamina V22B normalizzati rispetto all'accelerazione fornita con il martelletto

La valutazione degli rms fornisce una valutazione energetica più completa rispetto a quella della V_{pp} , essendo quest'ultima affetta dall'effetto di carico che comunque non è stato considerato.

Quello che si osserva dai due grafici è che per entrambi le misure eseguite con l'impulso corto (hard) sono di valore più elevato rispetto a quelle eseguite con l'impulso lungo. Questo perché se si riprendono gli andamenti degli spettri degli impulsi, si aveva che a circa 270 Hz la campana dell'impulso corto sta sopra quella dell'impulso lungo, ovvero da più energia, come si vede nel grafico qui sotto:

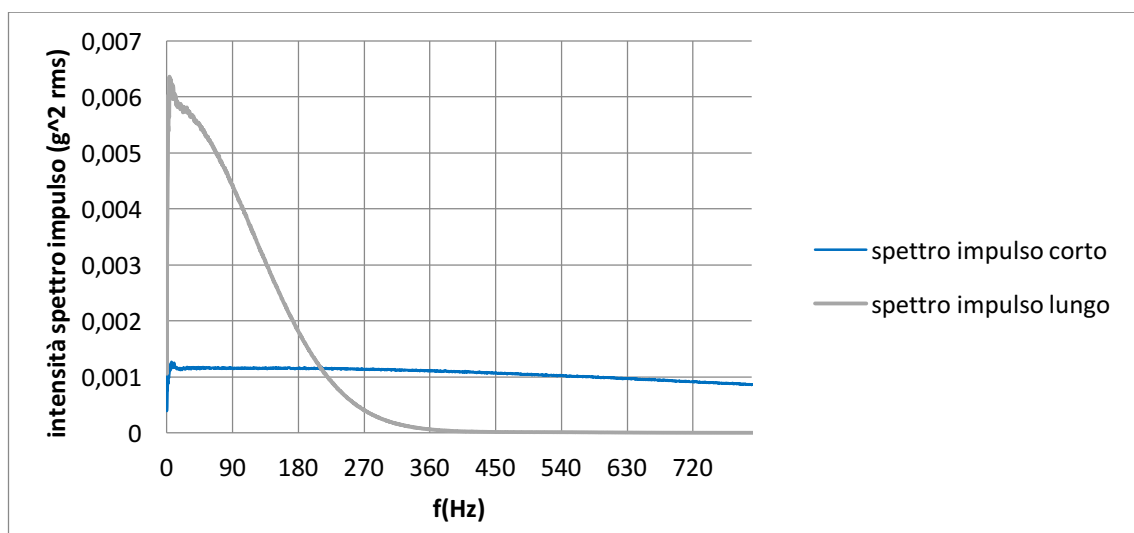


Figura 4.21: dettaglio sull'energia fornita dai due tipi di impulso per f pari a 270 Hz relativi ai loro spettri in frequenza

Nelle prossime misure si riporteranno solamente i dati principali ottenuti e le FRF, e solo alla fine si confronteranno rispetto ai valori ottenuti con la piastra singola, le Vpp e gli rms, distinguendo tra impulsi corto e lunghi, per i diversi sistemi testati con questa lamina.

2) V22B+mass4

Il primo set di misure diverso dalla piastra singola è stato effettuato applicando all'estremità libera della lamina la tipmass più piccola tra le due che sono state testate, ovvero la massa dell'assorbitore numero 4, m4, che è anche la più piccola tra le masse dei tre assorbitori. Essa è utile al fine di studiare l'effetto sulla risonanza (e sul picco della FRF) di una piccola massetta (1/40 di grammo), molto più piccola della massa della piastra (che è circa 0,53 g). i risultati misurati sono i seguenti;

punta hard:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	picco FRF [V/g]	risonanza [Hz]	ζ
1	5,73	2,872	0,5012	13,52	255,6	0,00667
2	5,4	2,865	0,5306	13,27	255,6	0,00656
3	6,3	3,26	0,5174	13,05	256,0	0,00640
4	7,25	3,7	0,5103	13,18	256,0	0,00642
5	4,9	2,59	0,5286	13,26	256,0	0,00624
6	4,75	2,525	0,5316	13,53	256,0	0,00625
7	5,65	2,966	0,525	13,79	256,4	0,00626
8	6,65	3,44	0,5173	12,61	256,4	0,00629
9	6,1	3,20	0,5246	12,77	255,6	0,00622
10	6	3,125	0,5208	13,69	256,4	0,00619

punta soft:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	picco FRF [V/g]	risonanza [Hz]	ζ
1	4,9	1,532	0,3127	12,87	258,5	0,00655
2	5,5	1,837	0,334	13,01	258,5	0,00651
3	5,3	1,74	0,3283	12,51	258,5	0,00660
4	5,45	1,823	0,3345	12,51	258,5	0,00658
5	5,28	1,698	0,3216	12,97	258,2	0,00663
6	4,92	1,535	0,312	12,19	258,1	0,00668
7	5,52	1,848	0,3347	12,21	257,0	0,00655
8	5,1	1,578	0,3094	12,46	258,5	0,00653
9	5,25	1,749	0,3331	12,53	258,0	0,00659
10	6,5	2,365	0,3638	12,84	258,1	0,00656

Le FRF sperimentali misurate sono le seguenti;

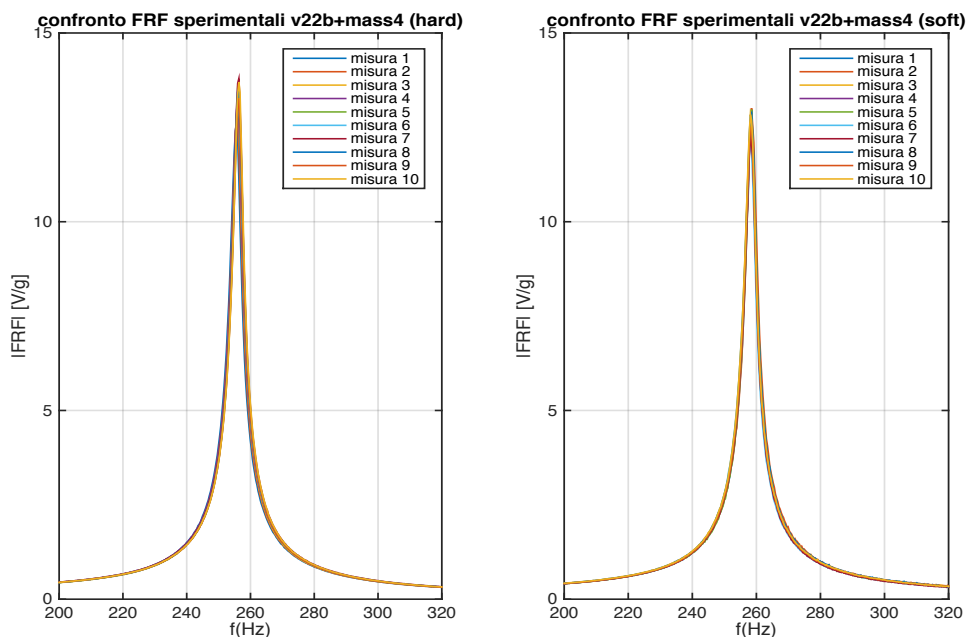


Figura 4.22: frf sperimentali acquisite per la piastra v22b+mass4

Si osserva quindi che una tipmass piccola di circa 0,025 g, 20 volte più piccola della massa della piastra, riduce la risonanza di 20 Hz e alza leggermente l'intensità media dei picchi. Ciò verrà verificato successivamente con il modello al FEM.

3) V22B+tipmass

Qui sono riportate le misurazioni effettuate con la tipmass pesante, di massa 0,25 g (ricavata da un mezzo piombino da pesca). Essendo circa metà della massa della piastra, essa ha un grande effetto riducente sulla risonanza relativa al primo modo di vibrazione della lamina, come si può vedere dai dati raccolti;

punta hard:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	picco FRF [V/g]	risonanza [Hz]	ζ
1	5,55	4,195	0,7558	25,02	184,5	0,00637
2	6,4	4,813	0,752	25,53	184,5	0,00628
3	6,65	5,042	0,7582	24,62	184,5	0,00626
4	5,6	4,303	0,7684	25,49	184,5	0,00628
5	6,35	4,75	0,748	24,74	184,5	0,00634
6	6,25	4,666	0,7466	24,80	184,5	0,00631
7	5,7	4,427	0,7767	25,64	184,5	0,00635
8	6,18	4,564	0,7385	24,63	184,5	0,00632
9	5,73	4,48	0,7818	25,36	184,5	0,0061
10	6,05	4,506	0,7448	24,95	184,5	0,0063

punta soft:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	picco FRF [V/g]	risonanza [Hz]	ζ
1	5,11	3,625	0,7094	25,80	184,2	0,00660
2	6,8	5,067	0,7451	24,97	184,2	0,00621
3	5,25	3,674	0,6998	25,10	184,2	0,00631
4	5,85	4,293	0,7338	25,44	184,2	0,00628
5	6,18	4,387	0,7099	25,54	184,2	0,00633
6	6,05	4,343	0,7178	24,38	184,5	0,00639
7	5,55	4,065	0,7324	25,33	184,5	0,00632
8	6,82	5,164	0,7572	25,23	184,2	0,00635
9	5,1	3,616	0,7090	25,24	184,5	0,00637
10	--	--	--	--	--	--

Le FRF misurate sono queste;

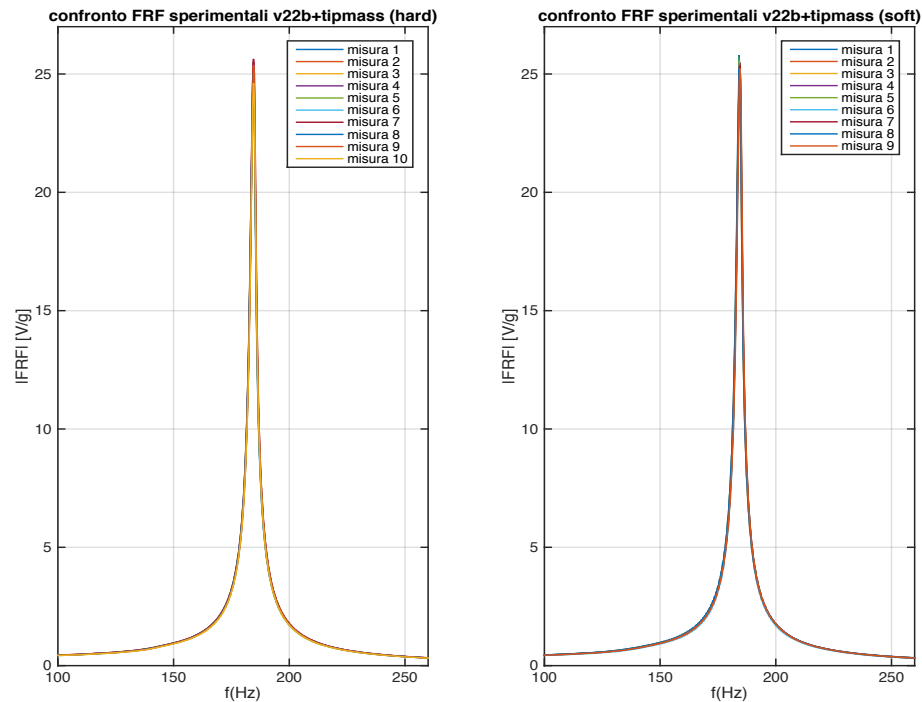


Figura 4.23: frf sperimentali acquisite per la piastra v22b+tipmass

in cui si osserva, come atteso, un elevato innalzamento dei picchi delle FRF dovuto al fatto che una tipmass elevata comporta spostamenti vibratori della lamina molto più grandi rispetto agli altri due casi, proporzionali secondo le relazioni piezoelettriche alla quantità di energia elettrica prodotta dagli strati piezoelettrici; inoltre si vede un netto calo della frequenza principale della lamina, che sarà verificato successivamente con i modelli analitici e FEM. Ora si riportano le misure effettuate con i tre assorbitori dinamici.

4) V22B+A2

L'assorbitore A2 è quello caratterizzato dalla massetta m2, la più pesante e pari a 0,0934 g. La lunghezza libera di accordatura è leggermente più bassa di quella analitica, ed è pari a circa 9 mm. La parte di filo che vincola l'assorbitore sull'estremità libera della piastra, fissato per mezzo di cera, è lunga 6 mm.

Le misure ottenute sono le seguenti;

punta hard:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	1° picco FRF [V/g]	f1 [Hz]	f2 [Hz]	ζ
1	6	3,05	0,508	12,75	119,1	346,7	0,01153
2	5,8	2,89	0,498	14,35	119,8	348,8	0,01016
3	7,4	3,66	0,4946	14,41	119,8	348,0	0,01018
4	7,38	3,62	0,490	14,21	119,8	348,8	0,01016
5	7,1	3,44	0,485	13,82	119,8	348,1	0,01015
6	5,9	2,88	0,488	14,2	119,8	348,8	0,01014
7	6,95	3,39	0,4877	14,10	119,8	348,8	0,01017
8	5,4	2,736	0,507	14,21	119,8	348,8	0,01021
9	6,1	2,98	0,4885	14,21	119,8	348,8	0,01018
10	5,95	2,94	0,494	13,62	119,8	348,6	0,01014

punta soft:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	1° picco FRF [V/g]	f1 [Hz]	f2 [Hz]	ζ
1	4,95	2,87	0,579	13,79	119,8	349,2	0,01038
2	6,2	3,49	0,563	13,87	119,8	348,4	0,0103
3	5,15	3,01	0,584	13,68	119,8	348,4	0,0103
4	6,4	3,56	0,556	13,73	119,8	348,4	0,01046
5	6,1	3,45	0,566	13,8	119,8	349,2	0,0106
6	5,16	3,02	0,585	13,94	119,8	348,1	0,0104
7	5,9	3,3	0,559	13,54	119,8	349,2	0,0102
8	5,05	2,89	0,572	13,62	119,8	349,2	0,0105
9	--	--	--	--	--	--	--
10	--	--	--	--	--	--	--

Le corrispondenti FRF ottenute sono le seguenti;

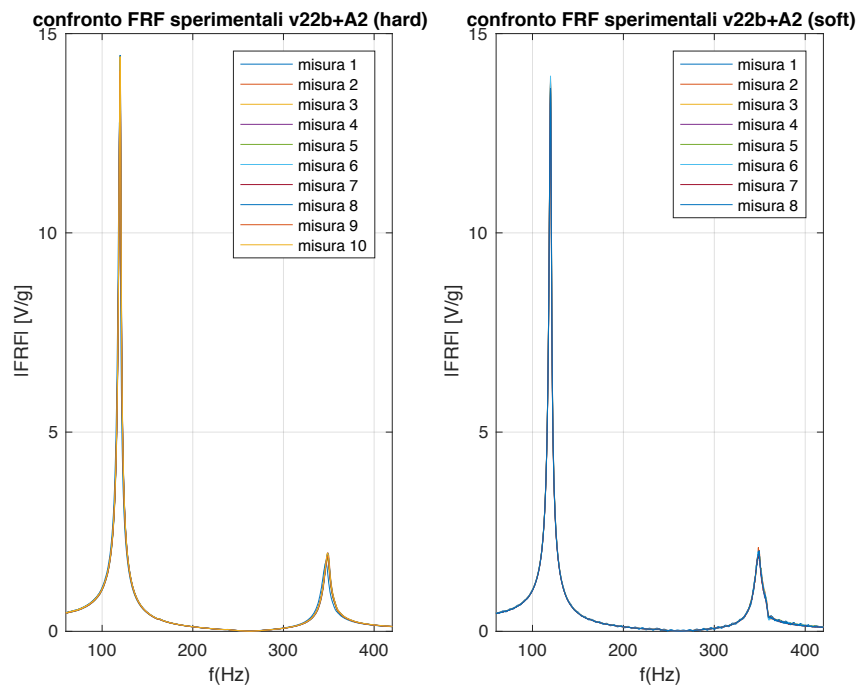


Figura 4.24: frf sperimentali acquisite per la piastra v22b+A2

l'intensità dei secondi picchi varia tra 1,8 e 2 V/g ed è dovuta principalmente al secondo modo di vibrazione del sistema harvester + assorbitore. Si nota inoltre che i due picchi principali si trovano attorno alla risonanza della piastra (in queste prove l'antirisonanza è stata ottenuta a 263 Hz) e che quelli ottenuti con la punta soft mostrano un andamento più 'bizzarro' rispetto a quelli ottenuti con la punta hard; nel confronto dei vari casi sperimentati si prenderanno come riferimento solo le curve ottenute con la punta hard, in quanto più ripetibili e vicine alle condizioni di impulso ideale, che eccita meglio il sistema.

5) V22B+A34

Qui si riportano le misure ottenute con l'assorbitore intermedio A34, ottenuto incollando tra loro con dell'attack le massettine m3 e m4 che insieme hanno una massa di 0,0509 g. Questo assorbitore pesa circa la metà di quello precedente (A2), ha una lunghezza libera di 12,5 mm e la parte di filo incastrata nella cera è lunga circa 7 mm.

I risultati delle misure sono i seguenti;

punta hard:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	1° picco FRF [V/g]	f1 [Hz]	f2 [Hz]	ζ
1	4,7	2,057	0,437	12,41	151,1	342,4	0,0086
2	6,7	2,955	0,441	12,22	151,1	342,4	0,00855
3	5,4	2,437	0,451	12,09	151,1	342,4	0,0084
4	5,8	2,52	0,434	12,08	151,1	342,4	0,0087
5	5,1	2,28	0,447	12,34	151,1	343,1	0,0084
6	8	3,38	0,422	12,2	151,1	342,4	0,00866
7	7,35	3,25	0,442	12,31	151,1	342,4	0,0087
8	5,05	2,25	0,446	12,12	151,1	342,8	0,0086
9	7	3,06	0,437	12,17	151,1	343,1	0,0083
10	5	2,19	0,438	12,28	151,5	343,1	0,0085

punta soft:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	1° picco FRF [V/g]	f1 [Hz]	f2 [Hz]	ζ
1	6,4	3,0	0,468	12,43	151,5	343,5	0,0084
2	5,2	2,44	0,469	12,35	151,5	343,5	0,0084
3	4,7	2,22	0,472	12,41	151,5	342,8	0,0083
4	4,2	2,034	0,484	12,48	151,5	343,5	0,0085
5	5,8	2,707	0,467	12,56	151,5	342,8	0,0087
6	4,8	2,31	0,481	12,28	151,5	342,5	0,0084
7	5,0	2,40	0,48	12,54	151,5	343,5	0,0086
8	4,6	2,14	0,465	12,42	151,5	342,8	0,0085
9	5,8	2,7	0,466	12,34	151,5	343,1	0,0088
10	5,4	2,51	0,465	12,49	151,5	342,8	0,0085

Le FRF sperimentali misurate sono le seguenti;

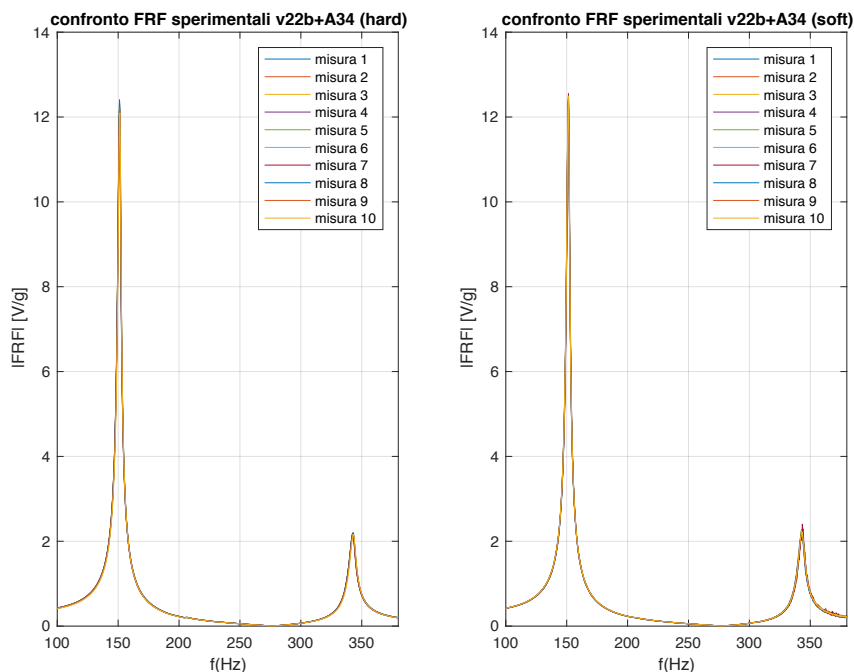


Figura 4.25: frf sperimentali acquisite per la piastra v22b+A34

ed in questo caso i due picchi sono a frequenze più vicine alla risonanza della lamina, in quanto l'assorbitore è meno massivo del precedente; inoltre il primo picco è più basso di intensità mentre il secondo è maggiore, e tutto ciò verrà calcolato e paragonato con gli analoghi modelli FEM e analitico. I secondi picchi hanno una variabilità compresa tra 1,5 e 1,8 V/g (soft) e 1,5 e 1,6 V/g (hard).

6) V22B+A4

Si riportano infine le ultime misure eseguite con la lamina v22b, ossia quelle insieme all'assorbitore A4, il più piccolo, caratterizzato da una massetta concentrata di 0,0253 g ed una lunghezza libera di 14,8 mm (mentre l'incastro con la cera è di 4 mm).

I risultati delle misure sono i seguenti;

punta hard:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	1° picco FRF [V/g]	f1 [Hz]	f2 [Hz]	ζ
1	4,35	1,76	0,404	11,5	169,9	331,4	0,00726
2	4,4	1,81	0,411	11,86	169,9	331,4	0,0071
3	5,0	2,03	0,406	11,75	170,0	331,7	0,0072
4	4,35	1,76	0,405	11,84	169,9	331,4	0,00709
5	7,55	2,88	0,381	11,98	169,9	331,7	0,0074
6	6,0	2,41	0,402	11,4	169,9	331,0	0,0075
7	4,6	1,87	0,406	11,73	169,9	331,4	0,0076
8	5,8	2,28	0,393	11,39	169,9	331,0	0,00755
9	5,2	2,115	0,407	11,28	169,6	331,0	0,0074
10	6,1	2,37	0,388	11,43	169,6	331,0	0,00739

punta soft:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	1° picco FRF [V/g]	f1 [Hz]	f2 [Hz]	ζ
1	6,2	2,63	0,424	11,94	169,9	331,7	0,0071
2	5,0	2,025	0,405	12,19	169,9	331,4	0,00709
3	4,2	1,71	0,407	11,92	169,9	331,7	0,00711
4	4,5	1,837	0,408	11,8	169,9	331,4	0,0070
5	6,6	2,74	0,415	11,9	169,9	331,4	0,00712
6	4,3	1,737	0,404	11,66	169,9	331,4	0,00709
7	5,25	2,13	0,406	11,9	169,9	331,7	0,0073
8	5,4	2,24	0,415	11,81	169,9	331,8	0,0071
9	4,95	1,977	0,4	11,88	169,9	331,4	0,0072
10	6,2	2,5	0,403	11,85	169,9	331,4	0,0071

Le relative FRF misurate sono queste;

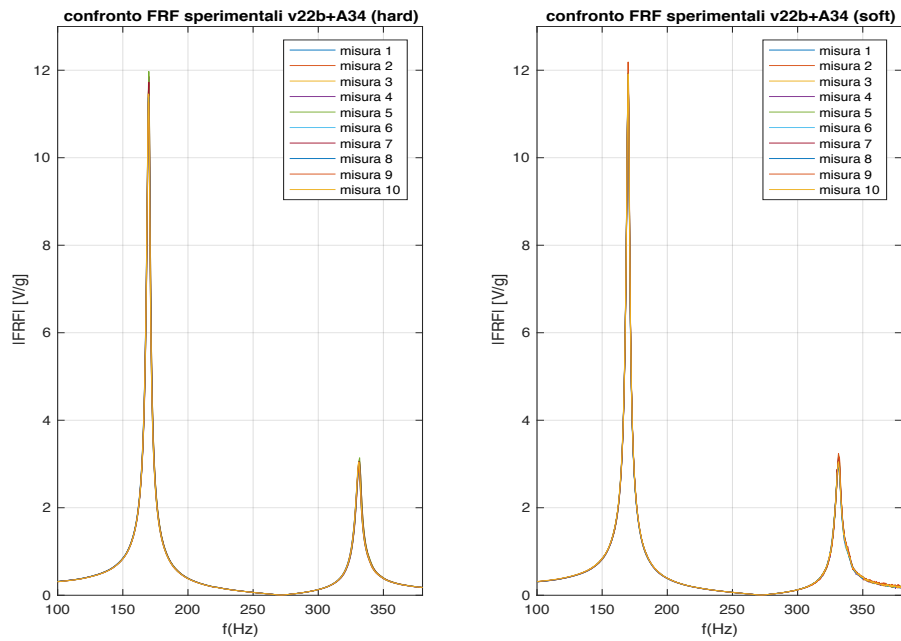


Figura 4.26: frf sperimentali acquisite per la piastra v22b+A4

Si osservano delle basse dispersioni nei valori dei picchi per entrambe le punte (soft e hard) ed in questo caso l'antirisonanza cade a 269 Hz.

Se ora si confrontano le misure più significative tra quelle ottenute, ovvero le curve medie tra i vari set di 10 misure appena riportati, considerando solo quelle relative alle misure eseguite con la punta hard, si ottiene questo grafico di confronto:

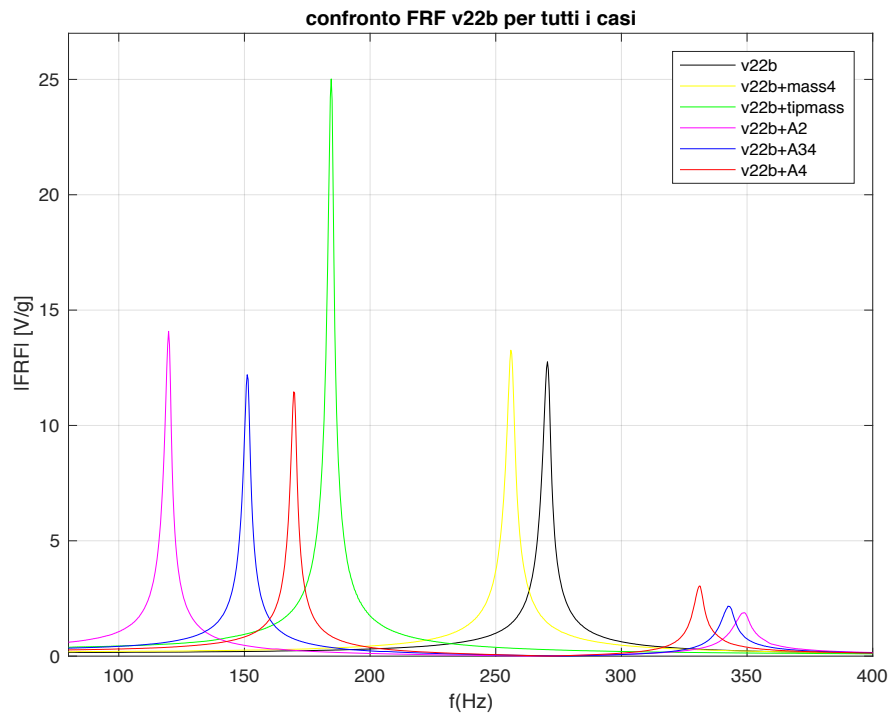


Figura 4.27: confronto FRF sperimentali per tutte le configurazioni testate della lamina v22b

Quello che si osserva, con riferimento alla piastra da sola (curva nera), è che:

- sia la tipmass piccola (m_4) che quella grande alzano l'intensità del picco e abbassano la risonanza complessiva della piastra;
- gli assorbitori mostrano il comportamento atteso e ricercato, ovvero all'aumentare della massa m_a i picchi si distanziano tra loro, attorno alla risonanza principale della piastra (individuata oltre che dal picco della curva rappresentante la FRF della lamina da sola, anche dal minimo delle tre curve relative agli assorbitori, essendo questi tarati su tale frequenza) con i primi picchi che aumentano in intensità ed i secondi che invece diminuiscono. Questo fatto è legato ai modi di vibrare del sistema, che verranno analizzati nel prossimo capitolo nei modelli FEM.

Passando ai numeri, si osserva che l'allargamento passa dall'entità minima di 160 Hz per l'assorbitore A4 all'entità massima di circa 230 Hz per A2, non molto differente da quanto previsto dal modello analitico discusso alla fine del capitolo precedente.

Si può affermare quindi che, anche se con il modello analitico non sono state identificate in modo esatto le frequenze dei picchi, gli allargamenti tra i due picchi dovuti ai diversi assorbitori sono stati complessivamente rispettati, ed il modello, anche se molto semplice (si ricorda che esso è a 1 gdl) è in grado di far capire quanto vale l'entità dell'allargamento se alla lamina si applica un assorbitore con certe caratteristiche meccaniche; comunque esso fornisce anche informazioni sui valori a cui le frequenze dei picchi tendono, con errori non troppo grandi se si considera l'estrema semplicità del modello (non è il suo scopo identificare le frequenze a cui si sdoppia il picco della piastra, in quanto modelli più raffinati sono sempre perseguibili), ma da anche buone previsioni sull'entità dell'ampiezza dei picchi, qualora siano inseriti smorzamenti (che controllano l'altezza dei picchi delle frf) consoni in riferimento al sistema studiato.

Si ricorda che, dai risultati del modello analitico, i primi picchi vengono sovrastimati dal modello di circa 30 Hz, mentre i secondi hanno un errore decisamente più basso; ciò è già un ottimo risultato.

Se si riportano i confronti tra le V_{pp} e gli rms generati da tutte le configurazioni testate, viene reso in maniera molto più esplicita ciò che accade a livello di produzione energetica, ovvero:

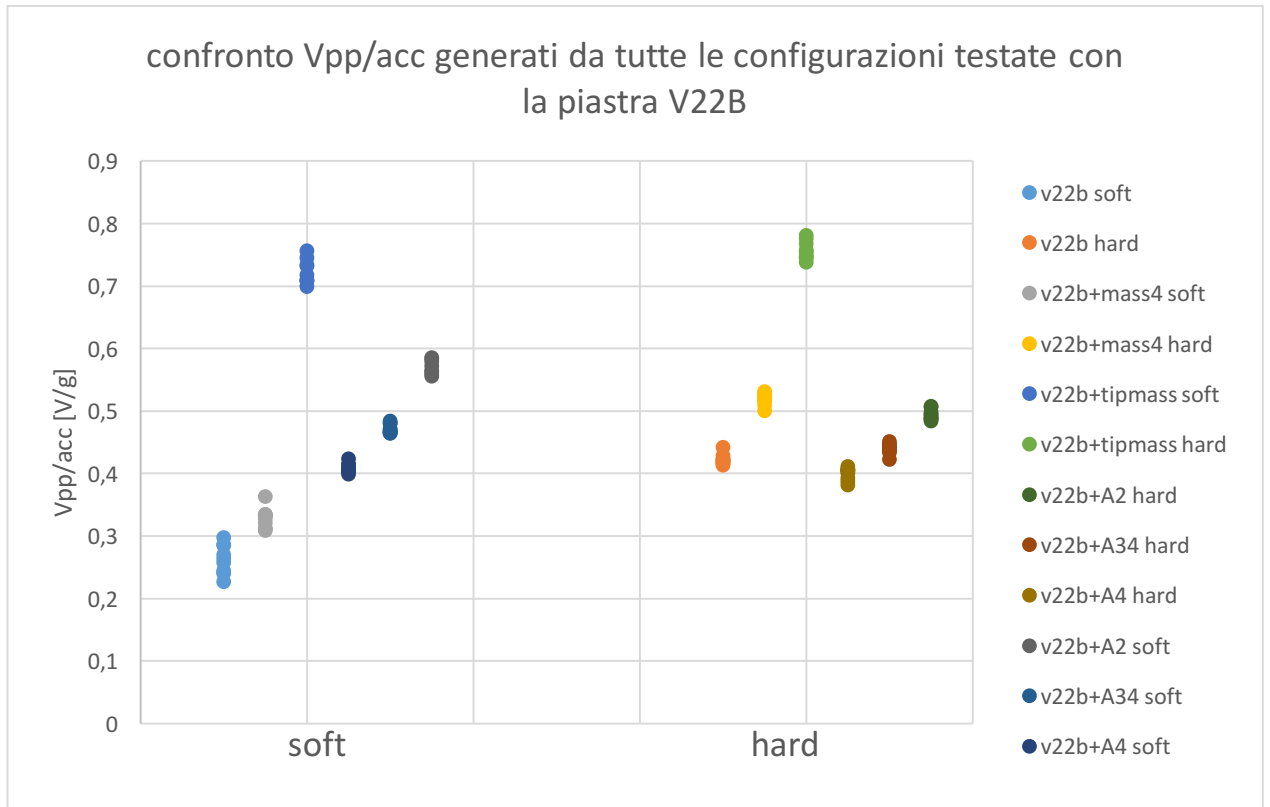


Figura 4.28: confronto Vpp/acc per le configurazioni sperimentate con la lamina V22B

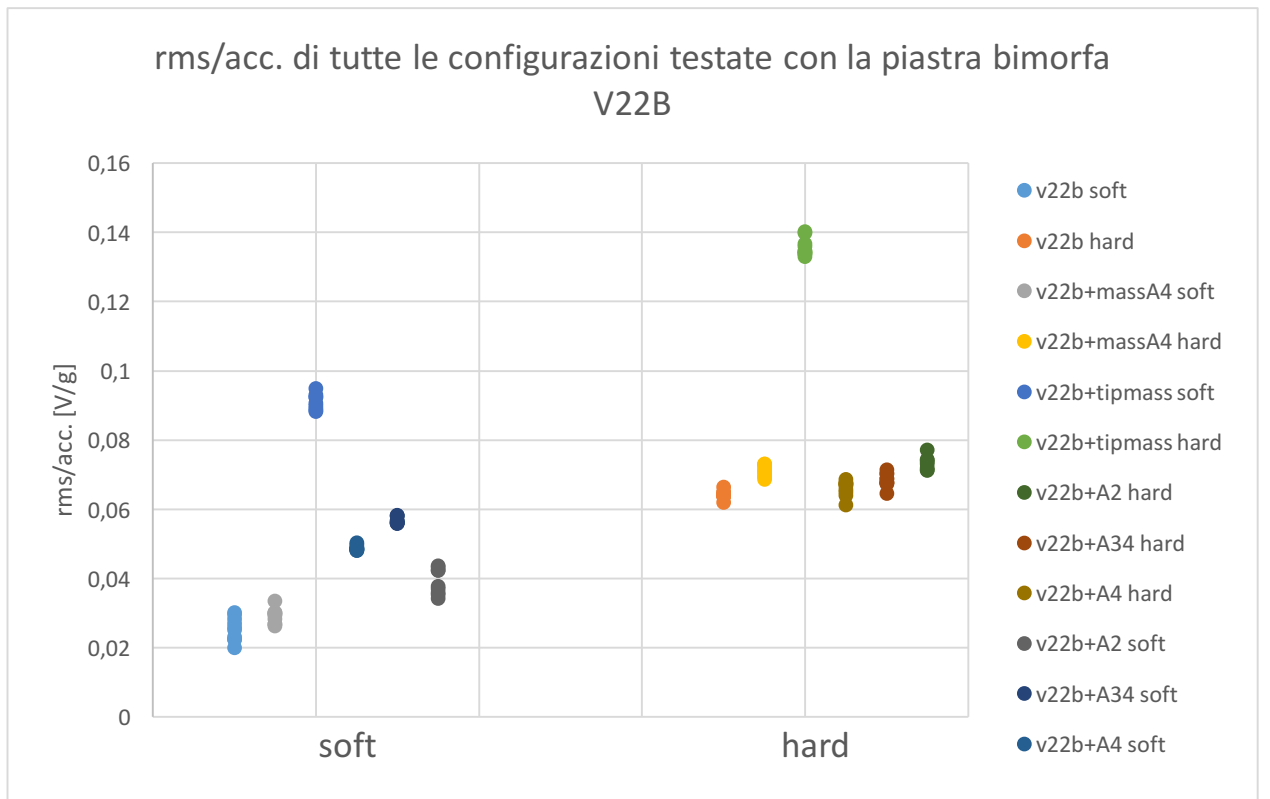
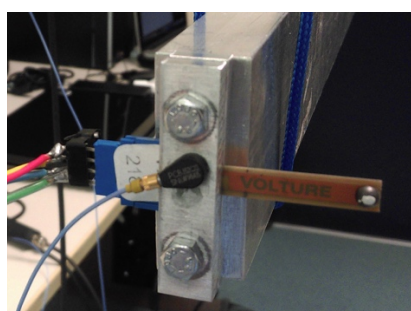


Figura 4.29: confronto degli rms per le configurazioni sperimentate con la lamina V22B

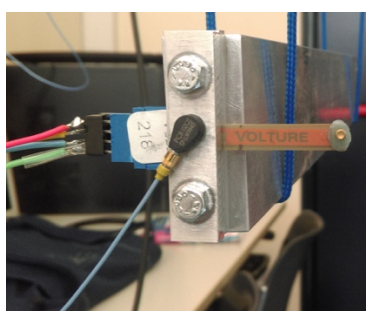
in cui si vede che, ad esempio nel primo grafico, la V_{pp}/g è massima per il sistema piastra + tipmass, e che in generale aumenta passando da piastra (sola) a piastra assieme a tipmass via via più elevate, ma anche passando ai sistemi piastra+ assorbitori via via più massivi, e ciò per entrambe le punte di eccitazione del martelletto strumentato; lo stesso accade per gli rms, almeno per la punta hard, mentre per la punta soft, il sistema v22b+A2 non segue quest'andamento.

Come fatto osservare nei V_{pp} e negli rms ottenuti per le prove con la lamina da sola, anche in questo caso si vede che i valori ottenuti dalle prove eseguite con la punta hard sono superiori a quelli ottenuti con l'altra punta. Tuttavia nei 3 casi con gli assorbitori, per i V_{pp} si ha il contrario e questo perché il V_{pp} che si ricava dalle varie misure è per la maggior parte dovuto al primo modo vibratorio del sistema, il cui picco si colloca come frequenze a valori in cui lo spettro dell'impulso lungo (punta soft) sta sopra l'altro spettro (punta hard).

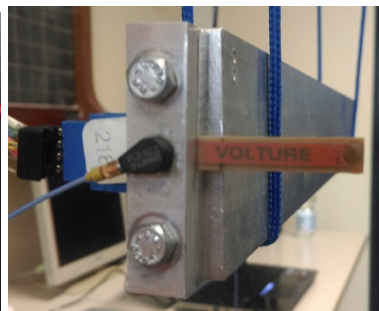
Qui sotto 6 immagini relative alle 6 diverse configurazioni sperimentate:



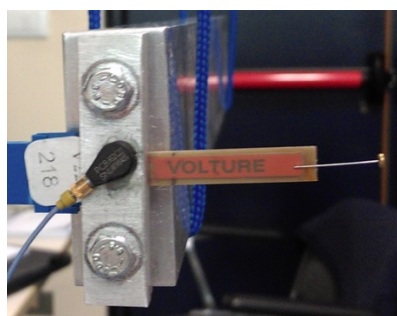
v22b+tipmass



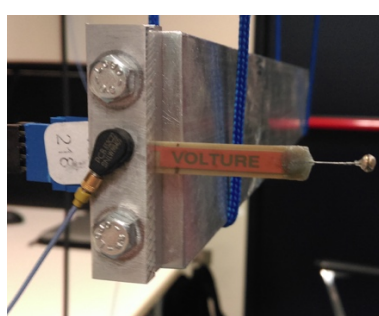
v22b+mass4



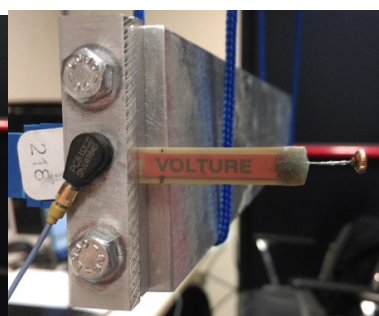
v22b



v22b+A4



v22b+A34



v22b+A2

4.5.2 Misure lamina V22BL

Si riportano ora le misure eseguite con la piastra bimorfa V22BL, anch'esse con già considerato l'effetto di carico. Sono state eseguite solo due set di misure, ovvero uno con la piastra singola ed uno con la piastra assieme all'assorbitore più massivo (A2), poiché per

manca di tempo si è preferito eseguire dei set di misure completi con la piastra unimorfa, la quale non ha effetto di carico, che offre quindi meno possibilità di errore nelle misure.

1) V22BL

Di seguito si riportano le misure raccolte sulla lamina bimorfa più lunga, che si ricorda avere una lunghezza massima libera di 63,5 mm. I risultati ottenuti con le due punte del martelletto strumentato sono questi;

punta hard:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	picco FRF [V/g]	risonanza [Hz]	ζ
1	7,1	4,69	0,6606	31,82	116,9	0,00719
2	6,25	4,306	0,689	33,87	116,6	0,00718
3	6,2	4,278	0,69	33,44	116,6	0,00723
4	7,25	4,90	0,676	32,82	116,6	0,00727
5	6,15	4,013	0,653	32,19	116,6	0,00721
6	5,6	3,753	0,670	32,88	116,6	0,00724
7	6,95	4,50	0,647	32,66	116,6	0,00722
8	5,65	4,007	0,709	33,05	117,0	0,0073
9	6,23	4,254	0,683	32,44	117,0	0,00732
10	6,85	4,33	0,632	31,86	117,0	0,00736

punta soft:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	picco FRF [V/g]	risonanza [Hz]	ζ
1	6,4	5,58	0,872	33,79	116,6	0,00726
2	6,2	5,47	0,882	33,40	116,6	0,0072
3	5,2	4,53	0,871	33,77	116,6	0,00724
4	5,9	5,277	0,894	33,18	116,6	0,00721
5	6,15	5,308	0,863	33,32	116,6	0,00719
6	5,8	5,08	0,876	33,59	116,6	0,00714
7	6,8	5,97	0,878	33,77	116,6	0,00718
8	6,65	5,68	0,854	33,51	116,6	0,00715
9	6,2	5,48	0,884	33,46	116,6	0,00719
10	5,35	4,855	0,907	32,99	116,6	0,00717

e le FRF corrispondenti ottenute sono le seguenti;

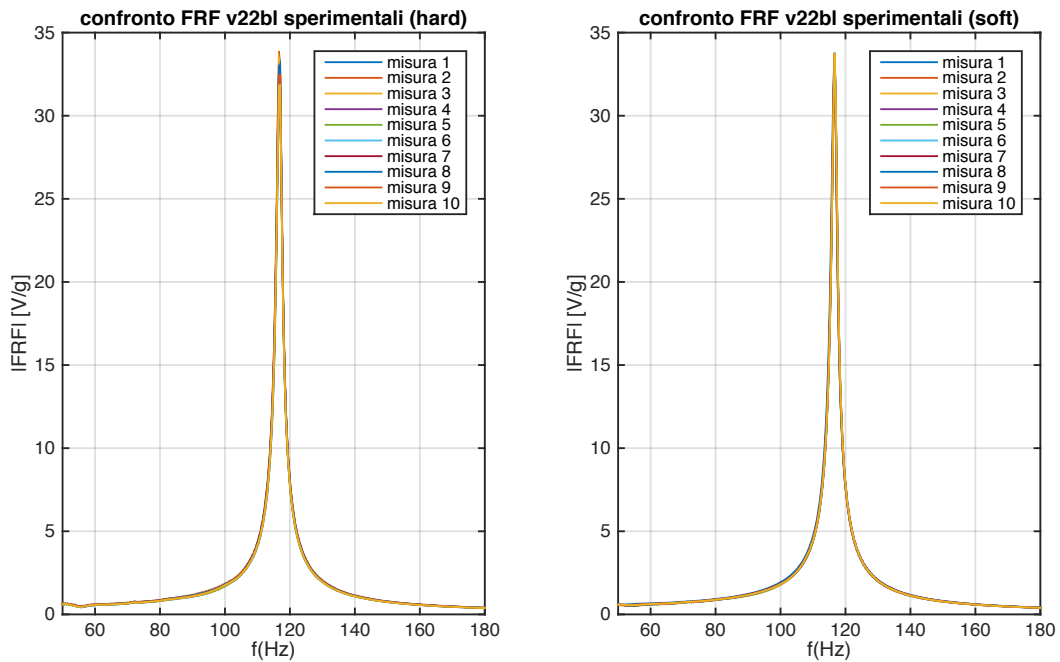


Figura 4.30: frf sperimentali acquisite per la piastra v22bl

2) V22BL+A2

In questo caso si è accordato l'assorbitore più massivo (A2) alla frequenza di risonanza di questa piastra, pari a 122 Hz, in buon accordo con i risultati sperimentali precedenti che hanno fornito 117 Hz; in tali condizioni si è usata una lunghezza libera per l'assorbitore pari a 16 mm e una lunghezza incastrata con la cera sull'estremità libera della lamina di 3,5 mm.

I risultati ottenuti con le due punte (hard e soft) sono i seguenti;

punta hard:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	1° picco FRF [V/g]	f1 [Hz]	f2 [Hz]	ζ
1	6,7	3,709	0,5536	28,22	61,5	177,1	0,00789
2	6	3,356	0,559	31,08	61,5	177,0	0,00728
3	6,2	3,549	0,572	30,87	61,5	177,1	0,00722
4	5,2	3,034	0,583	31,08	61,5	177,1	0,00718
5	6,15	3,465	0,5634	29,51	61,5	177,1	0,00719
6	5,4	3,043	0,5635	30,59	61,5	177,1	0,00714
7	5,4	3,113	0,5764	31,96	61,5	177,1	0,00729
8	6,85	4,026	0,5877	33,05	61,5	177,1	0,00734
9	6,4	3,50	0,547	31,39	61,5	177,4	0,00725
10	6,6	3,694	0,5597	29,95	61,5	177,1	0,00717

punta soft:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	1° picco FRF [V/g]	f1 [Hz]	f2 [Hz]	ζ
1	5,5	4,17	0,758	30,87	61,5	177,1	0,00775
2	5,8	4,51	0,777	30,60	61,5	177,0	0,0072
3	6,5	4,817	0,741	29,2	61,5	176,7	0,00735
4	6	4,517	0,752	30,49	61,5	176,8	0,00745
5	6,2	4,593	0,7408	30,31	61,5	177,1	0,00742
6	5,35	4,105	0,767	30,90	61,5	177,0	0,0074
7	6,25	4,517	0,722	30,77	61,5	176,9	0,0075
8	5,65	4,207	0,7446	29,6	61,5	177,0	0,0073
9	5,7	4,223	0,7409	29,35	61,5	177,0	0,0072
10	5,4	4,08	0,756	30,95	61,5	177,0	0,00715

Le corrispondenti FRF sperimentali misurate sono queste;

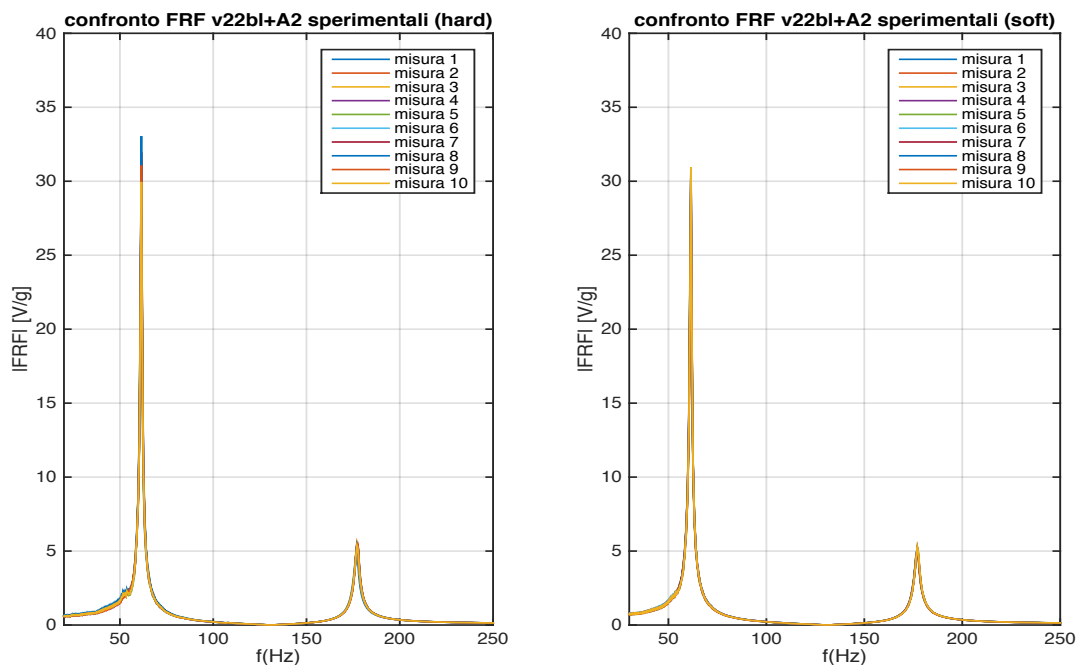


Figura 4.31: frf sperimentali acquisite per la piastra v22bl+A2

si vede che il primo picco rimane abbastanza alto, leggermente inferiore a quello della piastra singola, mentre l'antirisonanza è collocata a circa 125 Hz.

Scegliendo tra le curve delle misure eseguite con la punta dura, quelle con valori di picco medi e rappresentative dell'andamento generale di queste misure si ottiene questo confronto:

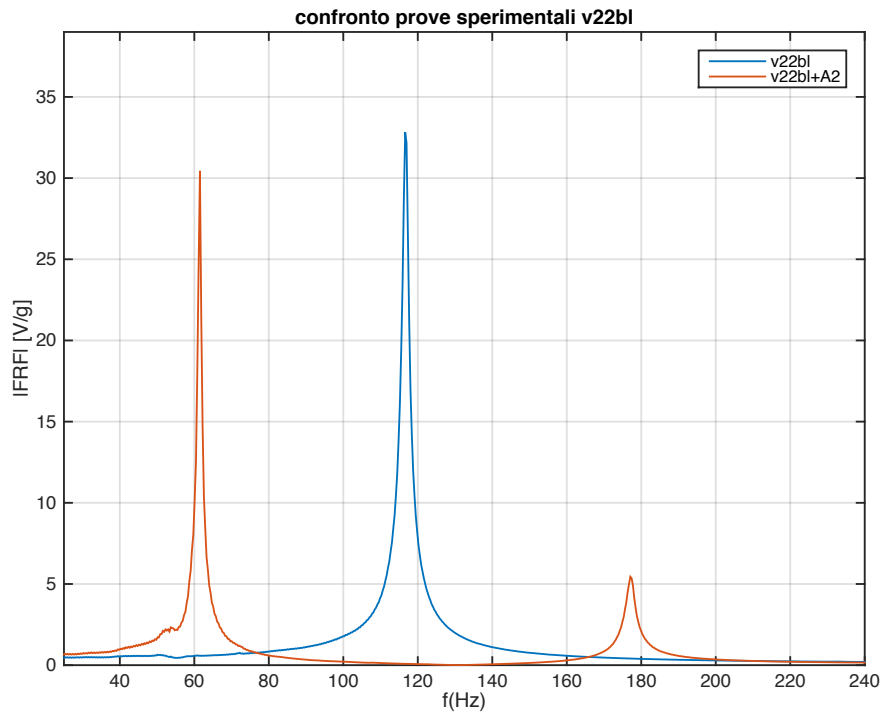


Figura 4.32: confronto FRF più significative per le configurazioni testate con la V22BL

Anche qui appare chiaro il lavoro che l'assorbitore compie sulla lamina, come visto per la lamina bimorfa più corta, ed anche in questo caso la previsione ottenuta con il modello Matlab appare decisamente in accordo con quanto trovato sperimentalmente. L'allargamento ottenuto infatti è di circa 120 Hz, mentre quello previsto era di 100 Hz.

Qui sotto un'immagine della piastra v22bl nella configurazione singola:



piastra V22BL sulla quale si sono eseguite le misure

4.5.3 Misure lamina PPA1001

Si riportano a seguire le misure sperimentali eseguite con la piastra unimorfa PPA1001, la quale, come visto precedentemente, non presenta effetto di carico nel range di frequenze relativo alle misurazioni (è molto molto basso, dell'ordine del 0,1%).

L'ordine con cui sono state effettuate le misure è il seguente:

sistema testato	lunghezza di vincolo	tipmass o m_a
PPA1001	41,5 mm	---
PPA1001+A2	41,5 mm	m_2
PPA1001+tipmass	41,5 mm	piombino + cera
PPA1001+A34	41,5 mm	m_{34}
PPA1001+A4	41,5 mm	m_4

Tabella 4.9: configurazioni della lamina PPA1001 nell'ordine in cui sono state testate

Dopo i test sulla lamina singola si sono eseguiti subito quelli con l'assorbitore più grande (A2) per vedere in che range di frequenze andava a posizionarsi il primo picco di questa configurazione; dopodiché si è cercata una tipmass in grado di portare la risonanza della piastra vicino a quella frequenza, per studiare successivamente attraverso il FEM l'effetto dell'assorbitore sullo stress interno nello strato piezoelettrico, da confrontare con quello che si sviluppa nel caso piastra con tipmass. Poi si sono completate le misure con gli altri due assorbitori per mostrare l'apertura dei picchi, da validare con i modelli FEM e analitici.

1) PPA1001

Punta hard:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	picco FRF [V/g]	risonanza [Hz]	ζ
1	7,4	4,179	0,5647	16,39	125,9	0,00740
2	6,95	3,817	0,549	17,73	125,9	0,00716
3	7,35	4,169	0,567	17,39	125,9	0,00726
4	7,2	4,06	0,564	17,87	125,9	0,00735
5	7	3,91	0,558	17,6	125,9	0,00728
6	5,8	3,225	0,556	18,14	125,9	0,00718
7	5,7	3,18	0,5579	17,05	125,9	0,00720
8	7,8	4,41	0,565	17,88	125,9	0,00710
9	5,95	3,41	0,573	18,56	125,9	0,00715
10	5,85	3,35	0,573	18,35	125,9	0,00712

punta soft:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	picco FRF [V/g]	risonanza [Hz]	ζ
1	6	4,509	0,7515	15,95	125,1	0,00794
2	5,4	4,22	0,7815	16,15	125,5	0,0076
3	7	5,15	0,7357	15,53	125,1	0,0075
4	6,1	4,639	0,759	15,91	125,1	0,0074
5	6,1	4,61	0,757	16,61	125,5	0,0077
6	8,15	5,62	0,689	16,15	125,5	0,0079
7	6,5	4,902	0,754	15,77	125,5	0,0077
8	4,9	3,96	0,808	16,32	125,5	0,0076
9	7	5,16	0,737	16,04	125,2	0,0075
10	5,9	4,507	0,764	16,42	125,5	0,0078

Le corrispondenti FRF misurate sono le seguenti;

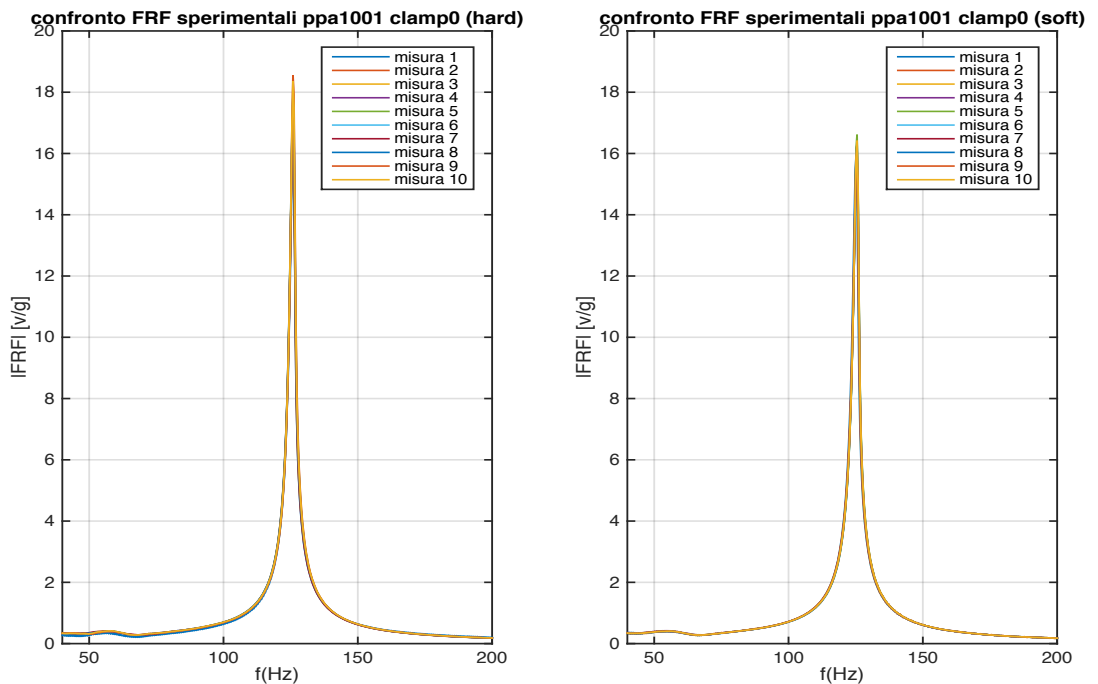


Figura 4.33: frf sperimentali acquisite per la piastra ppa1001

Il picco cade a 126 Hz, frequenza molto vicina a quella fornita dal datasheet del componente, pari a 125 Hz.

2) PPA1001+A2

Per queste prove la lunghezza libera dell'assorbitore che lo rende accordato con la piastra vale 14,5 mm; la parte incastrata nella cera invece è di 5,5 mm. I risultati ottenuti sono i seguenti:

punta hard:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	1° picco FRF [V/g]	f1 [Hz]	f2 [Hz]	ζ
1	6,15	3,19	0,519	14,55	83,9	164,6	0,00834
2	4,8	2,51	0,523	15,33	84,3	164,9	0,00822
3	7,5	3,72	0,496	14,88	84,3	165,0	0,00808
4	4,75	2,416	0,509	15,1	84,3	164,9	0,00798
5	6,75	3,39	0,502	14,86	84,3	164,6	0,00793
6	4,25	2,34	0,550	15,24	84,3	165,0	0,00782
7	5,1	2,696	0,529	15,66	84,3	165,0	0,00768
8	5,6	2,87	0,512	15,11	84,3	165,0	0,00754
9	6,1	3,15	0,516	14,94	84,3	164,9	0,00761
10	6	3,08	0,513	15,3	84,3	165,0	0,00759

punta soft

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	1° picco FRF [V/g]	f1 [Hz]	f2 [Hz]	ζ
1	5	3,48	0,696	15,07	84,3	164,9	0,00746
2	5,2	3,78	0,727	15,33	84,3	165,0	0,00755
3	4,95	3,44	0,695	14,55	84,3	165,0	0,00783
4	7	4,575	0,653	14,42	84,3	164,6	0,00796
5	5,35	3,84	0,718	14,97	84,3	165,0	0,00766
6	6,6	4,44	0,672	14,32	84,3	164,6	0,00748
7	5,75	3,98	0,692	14,72	84,3	164,6	0,00761
8	4,75	3,41	0,718	14,79	84,3	164,9	0,00753
9	6,9	4,66	0,675	13,97	84,2	164,3	0,00786
10	6,58	4,43	0,673	14,49	84,3	164,6	0,0079

Le FRF sperimentali ottenute sono le seguenti;

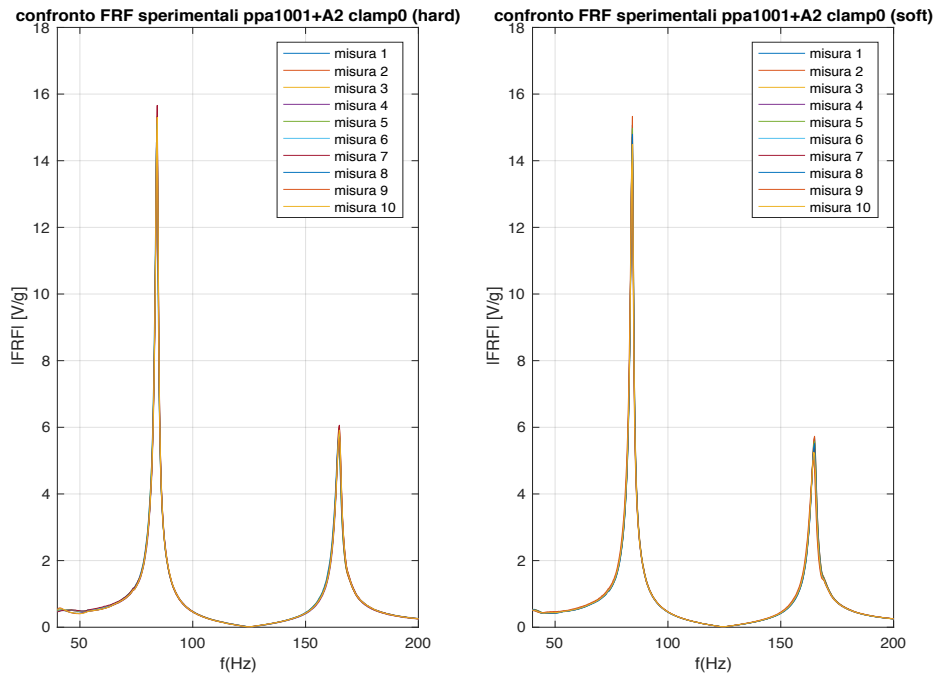


Figura 4.34: frf sperimentali acquisite per la piastra ppa1001+A2

3) PPA1001+tipmass

Per fare in modo di spostare la frequenza principale della piastra vicino a quella del primo picco della configurazione precedente, cioè da 126 Hz a 84 Hz si è usata una tipmass composta da un piombino da pesca da 0,5 g incollato sulla parte finale della piastra attraverso un po' di cera; i risultati ottenuti sono i seguenti:

punta hard:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	1° picco FRF [V/g]	risonanza [Hz]	ζ
1	6,3	4,39	0,6965	24,0	85,3	0,00887
2	7,7	5,37	0,6974	24,69	85,3	0,00859
3	5,9	4,287	0,7266	26,1	85,3	0,00873
4	5,25	3,84	0,7314	25,76	85,3	0,00848
5	7,05	4,93	0,6993	25,84	85,3	0,00831
6	6,2	4,61	0,7435	25,14	85,3	0,00854
7	7	5,02	0,717	25,42	85,3	0,00869
8	6,2	4,42	0,7246	25,34	85,3	0,00843
9	4,7	3,557	0,7568	25,55	85,3	0,00839
10	7,9	5,466	0,692	25,56	85,3	0,00863

punta soft:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	1° picco FRF [V/g]	risonanza [Hz]	ζ
1	5,45	5,885	1,079	24,16	85,3	0,00934
2	7,9	7,49	0,948	24,08	85,3	0,00926
3	6,5	6,675	1,027	23,65	85,3	0,00918
4	6,9	6,945	1,007	23,98	85,3	0,00915
5	5,5	5,91	1,075	24,66	85,3	0,00906
6	6,7	6,788	1,012	23,82	85,3	0,00911
7	6,75	6,84	1,013	24,33	85,3	0,00906
8	5,8	6,267	1,08	23,95	85,3	0,00905
9	7,2	7,19	0,998	23,75	85,3	0,00909
10	6,1	6,47	1,06	24,96	85,3	0,00907

Le FRF sperimentali ottenute sono queste;

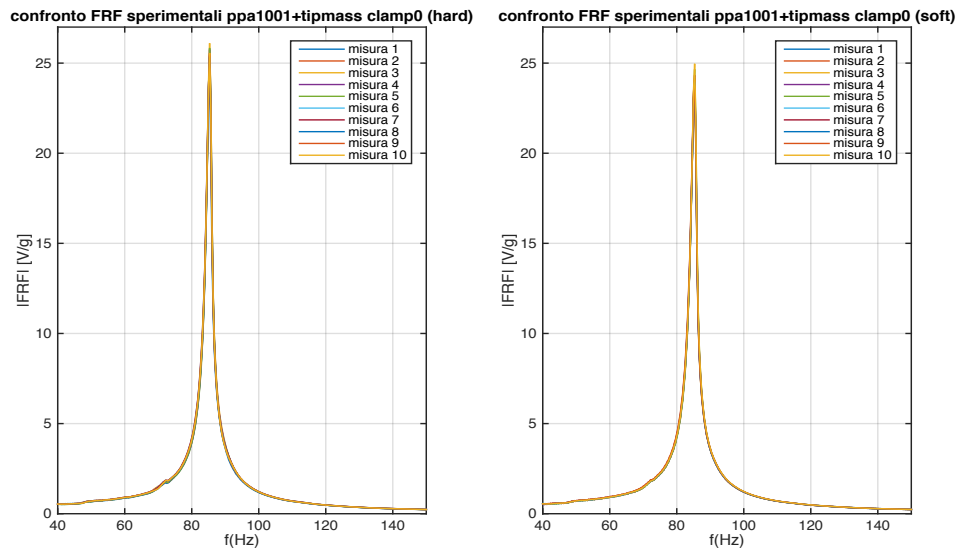


Figura 4.35: frf sperimentali acquisite per la piastra ppa1001+tipmass

4) PPA1001+A34

Con questo assorbitore ($m_{34} = 0,051$ g) la lunghezza libera di filo che garantisce l'accordatura con la piastra unimorfa è di circa 17,5 mm, mentre la parte incastrata con la cera all'estremità libera della lamina è di 6,5 mm.

I risultati ottenuti dalle prove sono i seguenti;

punta hard:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	1° picco FRF [V/g]	f1 [Hz]	f2 [Hz]	ζ
1	7	3,377	0,482	12,53	88,5	149,7	0,0076
2	9	4,526	0,584	13,01	88,9	150,0	0,0072
3	6	3,08	0,513	13,33	88,9	150,4	0,0067
4	5,75	3,03	0,527	12,94	88,5	150,0	0,0081
5	5,7	2,976	0,522	13,15	88,9	150,0	0,0077
6	6,2	3,24	0,5226	12,932	88,9	150,0	0,0074
7	7,2	3,68	0,511	13,29	88,9	150,0	0,0079
8	4,1	2,18	0,532	13,61	88,9	150,4	0,0076
9	5	2,77	0,555	13,19	88,9	150,0	0,0073
10	4,9	2,765	0,564	13,76	88,9	150,4	0,0071

punta soft:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	1° picco FRF [V/g]	f1 [Hz]	f2 [Hz]	ζ
1	4,5	3,26	0,724	13,21	88,9	150,0	0,00758
2	6	4,17	0,696	12,91	88,9	150,1	0,00764
3	4,75	3,45	0,726	12,90	88,9	150,0	0,00782
4	5,3	3,69	0,696	12,79	88,9	150,0	0,00765
5	5	3,58	0,716	12,71	88,9	150,0	0,00744
6	5,5	3,847	0,699	12,77	88,9	150,0	0,00738
7	3,85	2,84	0,737	12,98	88,9	150,0	0,00725
8	4,25	3,07	0,722	13,54	88,9	150,4	0,0073
9	--	--	--	--	--	--	--
10	--	--	--	--	--	--	--

Le FRF sperimentali acquisite sono queste;

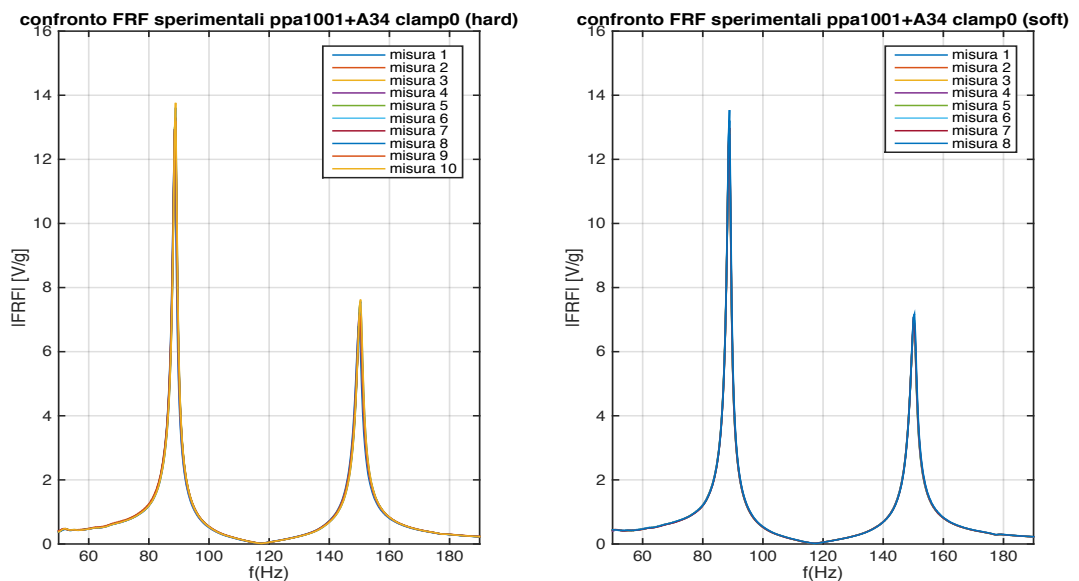


Figura 4.36: frf sperimentali acquisite per la piastra ppa1001+A34

5) PPA1001+A4

Le ultime misure sono state effettuate con l'assorbitore più piccolo, m_4 pari a 0,0255 g; la lunghezza libera utile utilizzata per l'accordatura del componente è di 22,5 mm mentre la parte incastrata è di 5,5 mm. I risultati ottenuti sono questi:

punta hard:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	1° picco FRF [V/g]	f1 [Hz]	f2 [Hz]	ζ
1	6	3,256	0,542	10,59	93,5	144,4	0,0083
2	5,6	3,08	0,55	11,21	93,9	144,7	0,0076
3	5	2,82	0,564	11,34	93,9	144,7	0,0079
4	5,1	2,87	0,563	11,40	93,9	144,7	0,0081
5	6	3,19	0,536	11,16	93,9	145,1	0,0074
6	6,1	3,37	0,548	11,50	93,9	145,1	0,0072
7	5,05	2,59	0,528	11,16	93,9	144,7	0,0078
8	5,9	3,05	0,517	11,32	93,9	145,1	0,0082
9	5,1	2,88	0,565	11,52	93,9	145,1	0,0075
10	--	--	--	--	--	--	--

punta soft:

n° misura	accelerazione [g]	Vpp [V]	Vpp/acc. [V/g]	1° picco FRF [V/g]	f1 [Hz]	f2 [Hz]	ζ
1	5,6	4,22	0,7536	11,58	94,2	145,1	0,0075
2	5,1	4,00	0,784	13,14	94,6	145,4	0,0072
3	4,25	3,387	0,797	12,48	94,6	145,1	0,0071
4	4,1	3,36	0,82	12,87	94,6	145,1	0,0073
5	4,45	3,56	0,8	12,86	94,6	145,1	0,0070
6	4,05	3,32	0,82	12,5	94,6	145,4	0,0071
7	4,35	3,48	0,8	12,32	94,6	145,1	0,0073
8	4,7	3,69	0,785	12,63	94,6	145,1	0,0072
9	4,1	3,347	0,82	12,23	94,6	145,1	0,00708
10	--	--	--	--	--	--	--

Le FRF sperimentali ottenute sono queste;

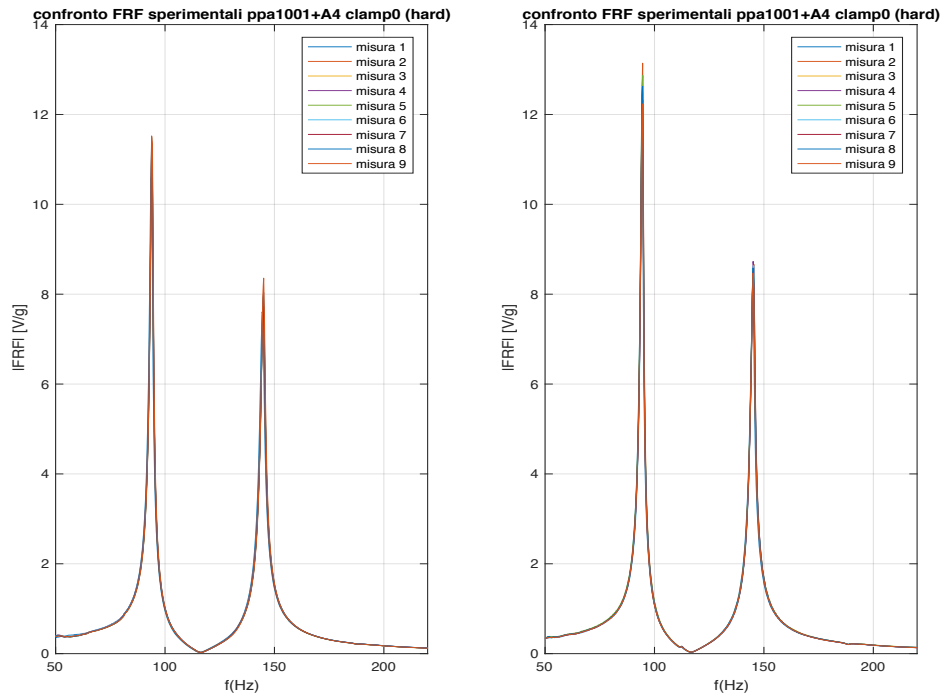


Figura 4.37: frf sperimentali acquisite per la piastra ppa1001+A4

Anche qui, come già fatto per la V22B, si può fare, in un unico grafico, un confronto riassuntivo tra le prove sperimentali di tutte le configurazioni testate, scegliendo tra tutte le FRF relative alle misure eseguite con la punta hard, le curve medie indicative del comportamento della singola configurazione; ciò che si ottiene è quanto segue:

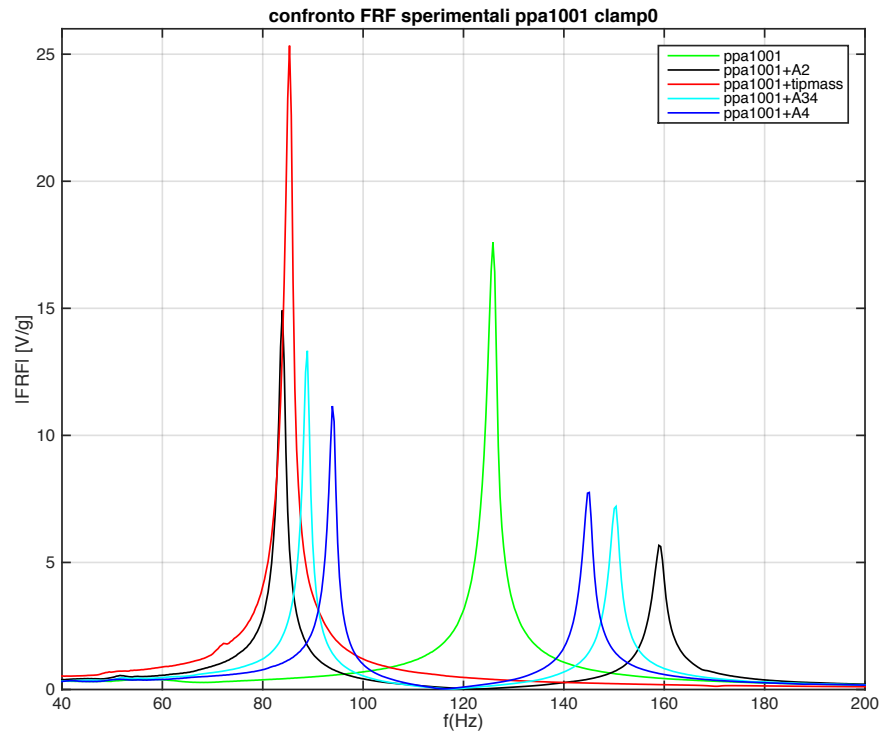
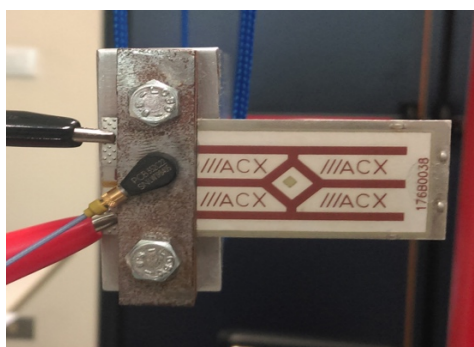


Figura 4.38: confronto tra le FRF più significative per tutte le configurazioni testate con la PPA1001

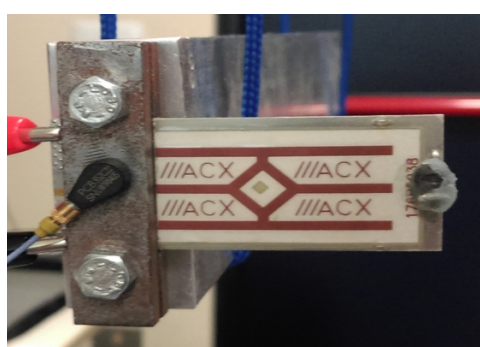
Si nota che, come nella piastra bimorfa v22b, anche qui si ha l'apertura dei picchi all'aumentare della massa dell'assorbitore usato; tuttavia i secondi picchi sono molto più alti e più vicini ai primi come livello di intensità, indice di un miglior recupero di energia alle frequenze relative al secondo modo di vibrazione del sistema.

Ricordando i risultati del modello analitico predittivo, relativamente a questa piastra, si ha che tale modello, nella sua semplicità (1 gdl) è stato in grado di dare una più che sufficiente previsione sull'entità degli allargamenti, che hanno un buon accordo con quelli ottenuti sperimentalmente; infatti si passa da un allargamento minimo di 40 Hz (A4) ad uno massimo di circa 80 Hz (A2), in ottimo accordo con i risultati di primo inquadramento del modello Matlab. Tuttavia, come per le piastre bimorfe, le frequenze dei 2 picchi, in tutti e tre i casi con gli assorbitori, non sono state azzeccate in modo preciso dal modello, anche se l'ordine di grandezza ed il loro collocamento è risultato abbastanza buono in quanto il primo picco ad esempio viene sovrastimato di 20-25 Hz mentre il secondo picco risulta essere lontano a non più di 5 Hz rispetto a quelli sperimentali. Si ha comunque meno errore rispetto ai dati ottenuti con le piastre bimorfe, le quali sono più sfortunate e soggette a effetti di carico e a effetti a bassa frequenza, che sicuramente hanno influenzato sia le misure sia la minor predittività del modello analitico, in quanto non si può tener conto di tali effetti, che non è lo scopo del modello analitico (raffinamenti sono comunque possibili, ma non sono stati eseguiti in questo lavoro, poiché fuori dagli scopi di tale elaborato).

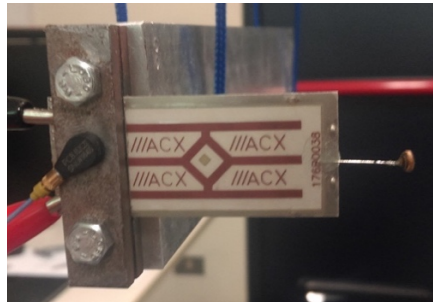
Qui sotto le immagini delle configurazioni testate per la lamina PPA1001:



ppa1001



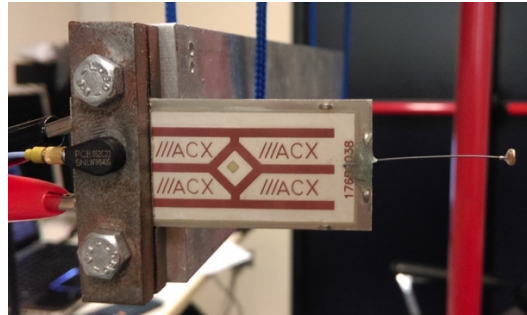
ppa1001+tipmass



ppa1001+A2



ppa1001+A34



ppa1001+A4

Anche per questa piastra sono stati valutati i valori del V_{pp}/g e gli rms, i primi calcolati per entrambe le punte (soft e hard), i secondi calcolati solo per le prove eseguite con la punta dura (perché davano meno dispersione nei valori dei vari set di prove).

I risultati ottenuti sono i seguenti:

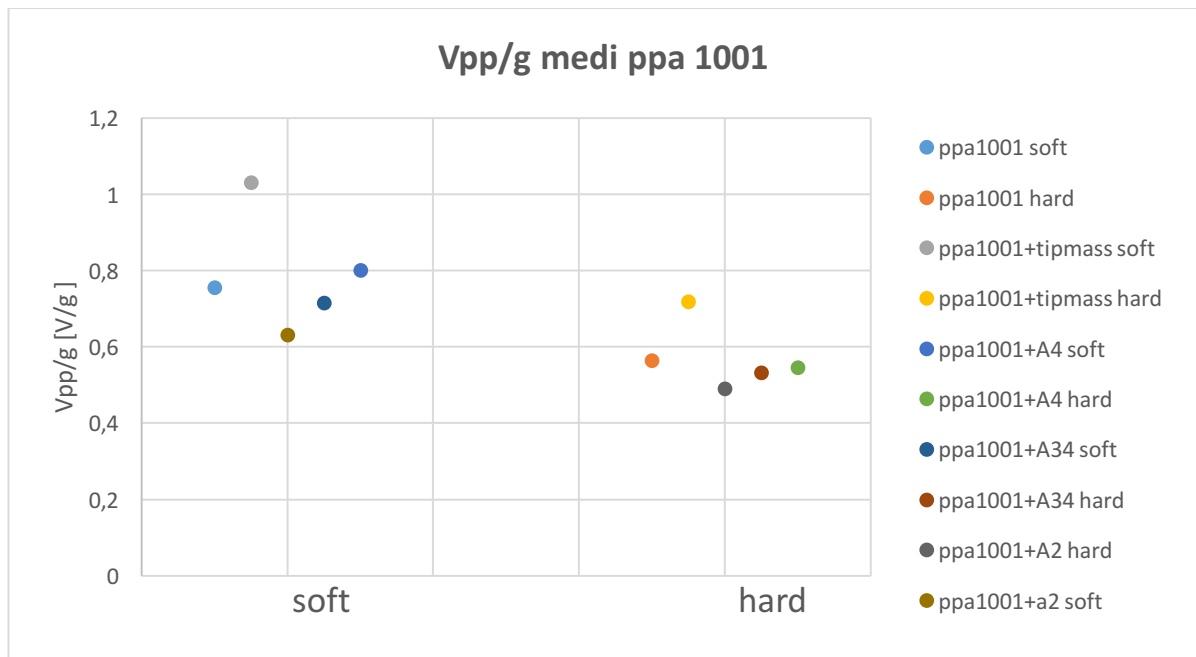


Figura 4.39: confronto tra i V_{pp}/g medi ottenuti per tutte le configurazioni testate con la PPA1001

In questo grafico si nota subito un fatto anomalo: i valori relativi alle prove con gli assorbitori sono invertiti rispetto a quelli ottenuti con la piastra bimorfa V22B e che sarebbero anche fisicamente ragionevoli. Cioè i V_{pp} del sistema ppa1001+A4 sono più elevati di quelli del sistema ppa1001+A2, quando ci si aspetterebbe che fosse il contrario. Ciò è dovuto alla presenza dei battimenti e di un effetto indesiderato a bassa frequenza, individuabile dagli andamenti temporali della tensione generata dal sistema, come mostrato qui sotto:

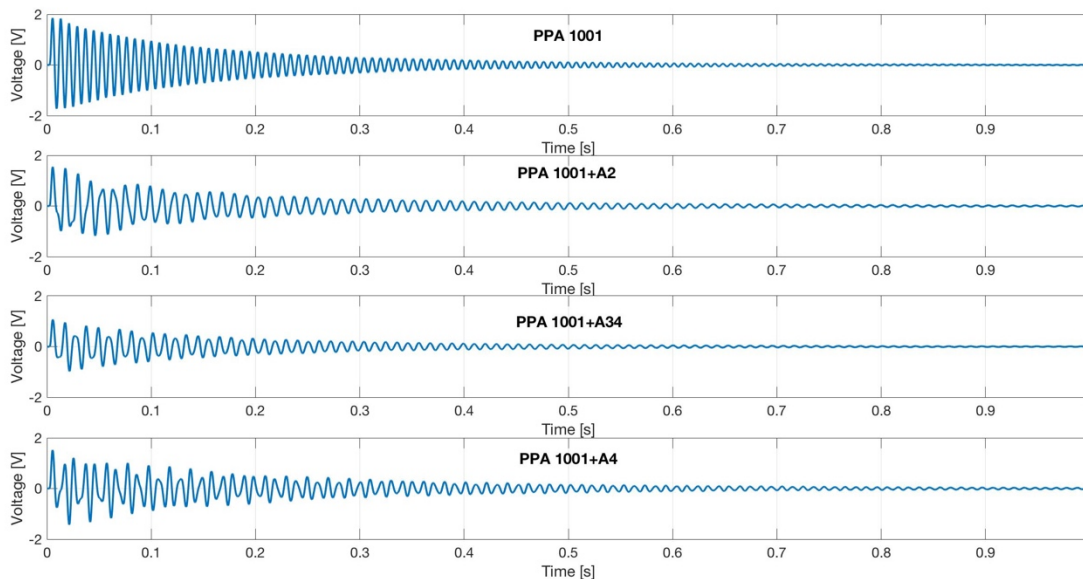


Figura 4.40: andamenti temporali della tensione generata dalla lamina per i casi ppa1001 e ppa1001 con i 3 assorbitori

Si vede subito che i due effetti causano una non così ovvia scelta dei valori esatti per la valutazione del V_{pp} dei vari segnali.

Invece gli rms forniscono risultati migliori, come di seguito illustrato:

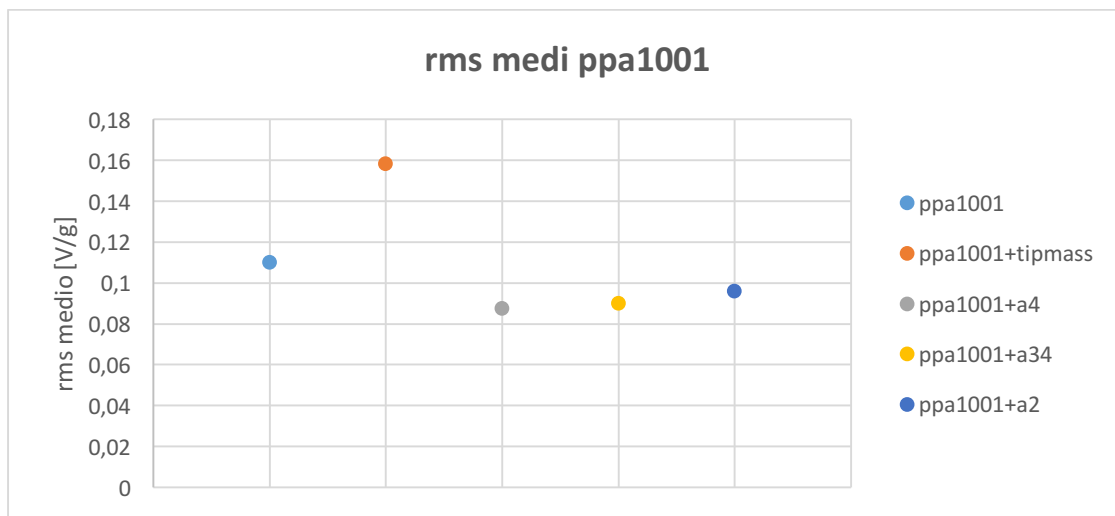


Figura 4.41: confronto degli rms per le configurazioni sperimentate con la lamina PPA1001

Infatti si vede che si ha lo stesso andamento che si era ottenuto per la piastra bimorfa v22b, ovvero gli rms crescono di valore all'aumentare della massa dell'assorbitore (passando da A4 a A34 ed a A2). Il valore più elevato sia per i Vpp che per gli rms rimane comunque nelle misure eseguite con la tipmass, le quali però sottopongono la piastra ad uno stress meccanico molto elevato se confrontato con quello valutato nei casi della piastra da sola e con assorbitore. Qui sotto si riporta l'andamento della tensione equivalente di Von Mises, calcolata tramite i modelli FEM che saranno esposti nel prossimo capitolo:

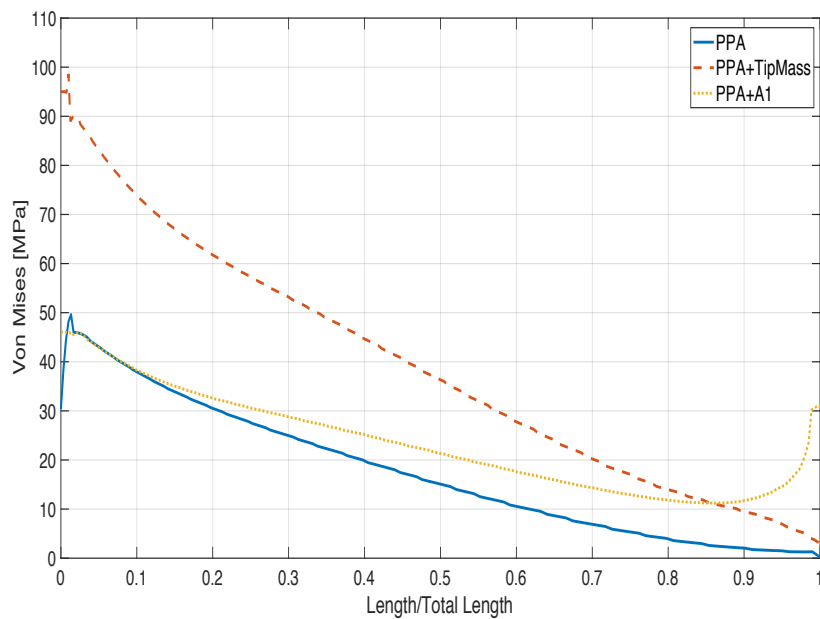


Figura 4.42: andamento della tensione equivalente di von Mises lungo la lunghezza della lamina per tre diverse configurazioni della stessa

Si osservano immediatamente i vantaggi dell'utilizzo dell'assorbitore, il quale oltre a realizzare il tuning della lamina, non genera tensioni meccaniche interne dannose durante l'esercizio.

Capitolo 5: Modelli al FEM e risultati numerici

5.1 Il modello agli elementi finiti

In questo capitolo verranno presentati i modelli agli elementi finiti creati per simulare le piastre testate; l'obiettivo di tale operazione è quello di validare numericamente le prove sperimentali effettuate tramite modelli il più possibile fedeli e rappresentativi delle piastre (e assorbitori) reali, cioè capaci di predire il comportamento elettrico e meccanico anche in situazioni diverse da quelle testate, una volta fornite le caratteristiche geometriche e le proprietà dei materiali costituenti gli harvesters.

In questo caso la validazione è meccanica e elettrica, e consiste nello stimare le frequenze dei primi modi di vibrare delle piastre, la forma delle relative deformate e le funzioni di trasferimento tra l'accelerazione alla base della piastra e la tensione generata negli strati piezoelettrici per via del fenomeno vibratorio, che durante le prove sperimentali venivano raccolte in modo 'automatico' dal software di acquisizione dei dati.

A tale scopo si è utilizzato un software in grado di ottenere modelli a elementi finiti relativamente a simulazioni che operino su fisiche diverse (ovvero meccaniche ed elettriche), e si è utilizzato Comsol Multiphysics 5.1, sviluppato per poter effettuare tali simulazioni multifisiche.

L'analisi multifisica delle tre piastre viene effettuata modellandole come travi a mensola sottoposte a forze di volume tali da sottoporre le singole piastre ad 1 g di accelerazione nel loro volume, consentendo quindi di valutare stato tensionale (stress meccanici e deformazioni) e l'uscita elettrica per unità di accelerazione, ovvero in [V/g], come nelle FRF ottenute nelle simulazioni sperimentali; quest'ultima non è altro che la distribuzione della differenza di potenziale tra gli elettrodi delle piastre bimorfe, e sullo strato piezoelettrico della unimorfa, in funzione della frequenza.

Si effettuano due tipologie di analisi FEM per le piastre, ovvero:

- Analisi delle autofrequenze
- Analisi nel dominio della frequenza (armonica)

La prima consente di determinare le prime frequenze principali (risonanze) delle lamine, e, una volta determinate si può effettuare l'analisi nel dominio delle frequenze facendo variare la frequenza della forzante (carico di volume) in un range di frequenze in cui sono incluse le risonanze trovate con l'analisi precedente; risultato di questa seconda analisi è la risposta in frequenza della piastra, che sarà confrontata con quella ottenuta nelle misure.

La prima analisi calcola frequenze naturali ed i relativi modi di vibrare, ed è perciò puramente meccanica, la seconda invece richiede l'accoppiamento completo tra la fisica meccanica e quella elettrica, servendosi di ulteriori vincoli e proprietà che aumentano i gradi di libertà del problema elettromeccanico. Infatti nonostante la geometria abbastanza semplice delle piastre, i gradi di libertà della seconda analisi sono maggiori in numero e comportano un più elevato tempo di calcolo della soluzione. Ogni piastra è stata costruita come modello FEM tramite Comsol, sviluppata geometricamente in 3D ed applicandole le condizioni al contorno meccaniche ed elettriche; prima di ogni simulazione sono state suddivise in un certo numero di elementi (i cosiddetti elementi finiti) al fine di poter eseguire delle analisi più precise possibili dal punto di vista dell'ottenimento dei risultati. A seguire i dettagli delle diverse modellazioni usate per le tre piastre.

5.2 Modelli creati per la piastra bimorfa V22B

5.2.1 V22B

Questa piastra è stata costruita e simulata per le 6 configurazioni testate nelle prove sperimentali, ovvero: da sola, con la tipmass piccola (mass4), con la tipmass grande e con i tre assorbitori.

Per tutti i modelli, si inizia aprendo il programma, si sceglie *creatore di modelli, 3D* e si impostano le caratteristiche fisiche del problema;

- *Meccanica strutturale* → *componenti piezoelettrici* → aggiungi
- *AC/DC* → *circuito elettrico (cir)* → aggiungi

Dopodiché si definiscono i parametri geometrici e altre costanti caratteristiche delle piastre, che per la v22b sono riportate nella tabella sottostante:

nome	espressione
lunghezza FR4 iniziale	7,8 [mm]
lunghezza 5 strati	25,4 [mm]
lunghezza FR4 finale	2,3 [mm]
larghezza (b)	6,1 [mm]
larghezza bordo	1,145 [mm]
larghezza PZT	3,81 [mm]
altezza strato FR4	0,18 [mm]
altezza strato PZT	0,18 [mm]
altezza strato espanex	0,09 [mm]
resistenza esterna	1,0e15 [Ohm]
smorzamento isteretico	0,0125

Tabella 5.1: parametri utilizzati per modellare la piastra bimorfa v22b

Inserendo nella geometria presente nell'*albero del modello* i blocchi secondo le dimensioni previste per i vari pezzi e strati della piastra, si ottiene il seguente modello 3D:

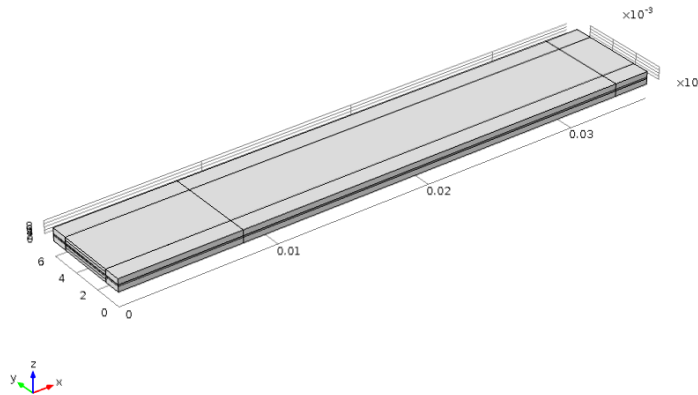


Figura 5.1: geometria della lamina v22b

Nel disegno qui sopra che riporta la geometria della lamina si vede che essa è stata suddivisa in 3 parti e che ognuna è stata poi sezionata come la parte centrale, più lunga, contenente gli strati di PZT; infatti si deve tenere a mente che il primo e l'ultimo tratto della piastra sono in FR4, come anche i bordi destro e sinistro del tratto centrale; solo nella parte centrale del medesimo tratto sono presenti gli strati di materiale diverso, secondo quest'ordine:

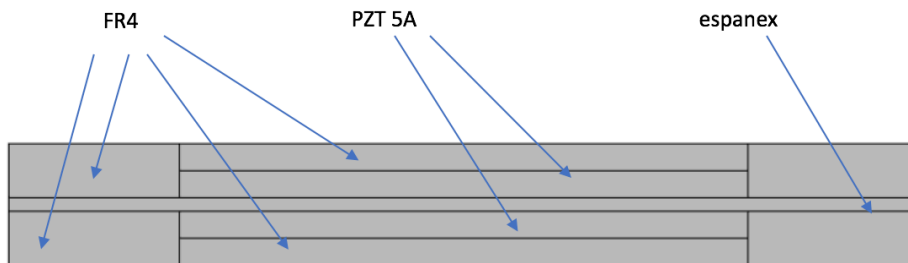


Figura 5.2: strati e materiali del tratto centrale della lamina v22b

- FR4: bordi esterni (destro, sinistro, alto e basso)
- PZT 5°: strati intermedi separati da espanex e coperti dagli FR4
- Espanex: strato di mezzeria che divide la lamina in due parti, posto in corrispondenza dell'asse neutro (per il fatto che la lamina è simmetrica rispetto alla mezzeria)

Scegliendo quindi questi 3 tipi di materiale nella libreria dei materiali presente in Comsol, essi sono stati applicati ai diversi domini costituenti il modello geometrico fin qui ottenuto della lamina, imponendo le seguenti proprietà, fornite dal datasheet del componente (Midè's Volture):

materiale	tipo	modulo di Young E [GPa]	coeff. Poisson ν	densità ρ [kg/m ³]
FR4	lineare elastico	22	0,3	1920
espanex	lineare elastico	3,2	0,34	1300

Tabella 5.2: proprietà materiali usati nel modello della v22b [7]

Mentre il materiale piezoelettrico PZT 5° viene modellato come ortotropo trasversalmente isotropo, ovvero le sue proprietà sono simmetriche rispetto all'asse di polarizzazione (3) ed anche per esso le costanti inserite nelle matrici di accoppiamento elettromeccanico, piezoelettriche e di cedevolezza sono state prese dai valori presenti nel datasheet del componente, ovvero;

- Matrice di cedevolezza S_E [1/Pa]: invariata
- Densità $\rho = 7750 \text{ kg/m}^3$
- Permittività relativa ϵ^T : si cambia l'ultimo valore, cioè $\epsilon_{33}^T = 1651$
- Matrice di accoppiamento piezoelettrico d_E^T [C/N]: si cambiano i valori di d_{31} e d_{32} a 190×10^{-12}

Si aggiungono ora nella sezione *meccanica dei solidi* le condizioni al contorno meccaniche, ovvero le caratteristiche smorzanti dei materiali, i vincoli e le forze applicate sulla lamina; per prima cosa viene definito un altro sistema di riferimento, seguendo il percorso:

definizioni → *sistemi di coordinate* → *sistema di vettori alla base*

ed inserendo nella diagonale principale i valori -1, 1 e -1 che di fatto crea un sistema di assi cartesiani ruotato di 180° rispetto all'asse y del sistema di riferimento della lamina (sys globale). Questo secondo riferimento ruotato serve a assegnare allo strato di PZT superiore della lamina una direzione di polarizzazione opposta a quella dell'altro strato, per consentire il collegamento in serie degli strati di PZT e far valutare la giusta produzione di elettricità durante la simulazione.

Dopodiché si impongono gli smorzamenti sugli strati piezoelettrici;

materiale piezoelettrico → *seleziono lo strato di PZT inferiore* → *smorzamento*
meccanico → *fatt. di perdita isotropo*
fatt. di perdita strutturale (definito dall'utente) = isoD

poi si ripete il procedimento selezionando l'altro strato di PZT imponendo inoltre il secondo sistema di riferimento (sys2).

Poi si vincola la lamina andando alla voce *contorni*, poi *vincolo fisso* e si selezionano le superfici ipotetiche di fissaggio della lamina, quelle verticali alla base del tratto iniziale di FR4, come qui sotto mostrato:

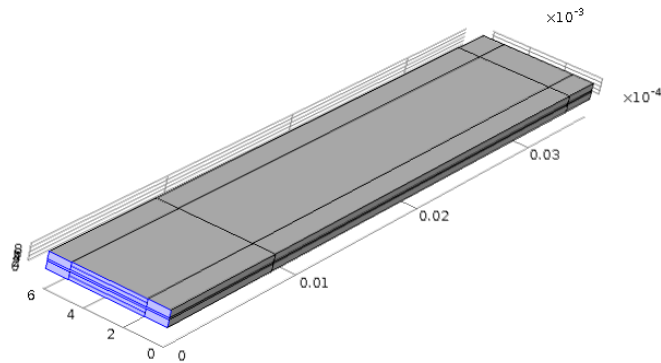


Figura 5.3: vincolamento alla base della lamina v22b

Si prosegue scegliendo l'ipotesi di lineare elasticità per tutta la lamina, ovvero;

materiale lineare elastico → *attributi* → *smorzamento* → *fattore di perdita isotropo, fattore di perdita strutturale (isoD)*

Infine si applica la forzante per poter eseguire l'analisi armonica: si applica una forza distribuita su tutto il volume della piastra, seguendo il percorso,

domini → *forze di volume* → *carico di volume* → *alla coordinata z*
*immetto $solid.rho * g_const$*

e si selezionano tutti i domini del modello.

È una forza pari all'accelerazione alla base (in g) moltiplicata per la densità dei materiali che compongono la piastra e si utilizza questo metodo di eccitamento, perché il programma Comsol non è in grado di supportare l'immissione diretta di un'accelerazione sinusoidale alla base della lamina (che è ora vincolata come in modo fisso) per l'analisi armonica.

In altre parole si è dovuto applicare il vincolo d'incastro alla base e applicare una forza armonica distribuita su tutto il volume e pari alla forza d'inerzia che si avrebbe eccitando sinusoidalmente la base.

Si utilizza un modello di smorzamento isteretico (isoD) con valore del fattore di smorzamento isteretico η costante per tutti i materiali del modello e pari a due volte il rapporto di smorzamento viscoso ζ che si è ricavato dalle misure sperimentali.

Si sottolinea infine che gli strati dei materiali costituenti l'intera lamina vengono modellati dal programma come perfettamente aderenti ed incollati tra loro.

Ora, si definiscono le condizioni al contorno elettriche, visto che la fisica del problema è sia meccanica (appena analizzata) che elettrica; si considera quindi la fisica elettrostatica alla quale sono applicate le condizioni elettriche previste dagli strati piezoelettrici.

Per prima cosa in elettrostatica si deselezionano tutti i domini del modello tranne i due strati di PZT, in modo da eliminare possibili errori durante la simulazione. Dopodiché si possono applicare le condizioni elettrostatiche sui materiali piezoelettrici della lamina;

- Messa a terra: si applica sulla superficie inferiore dello strato di PZT inferiore, attraverso il percorso,

contorni → *terra* → seleziono la superficie di interesse

- Potenziale fluttuante: permette il collegamento in serie dei due strati di PZT, ed è una condizione che viene applicata sulle facce interne dei due strati piezoelettrici, ovvero sulla superficie superiore dello strato inferiore e su quella inferiore dello strato superiore, attraverso il percorso,

fisica → *contorni* → *potenziale fluttuante* → seleziono le due superfici su cui applicare tale condizione

Questa condizione impone che queste due superfici siano equipotenziali, cioè come se fossero collegate da un corto circuito.

- Terminale: viene applicato sulla superficie superiore dello strato di PZT superiore e permette di collegare tale strato con la resistenza esterna che sarà successivamente immessa nella fisica del circuito, attraverso il percorso;

contorni → *terminale* → seleziono la superficie di interesse →
tipo di terminale → *circuito*

Ora si passa a *circuito elettrico* in cui sono definiti;

- Il percorso: *fisica* → *terminale esterno* → *voltaggio sul terminale 1* definisce l'uscita elettrica in tensione, generata dagli strati PZT durante la simulazione
- La resistenza esterna, scegliendo *resistore* (*Rext* tra 0 e 1) di valore molto elevato, pari a 10^{15} Ohm, per rispecchiare la condizione di circuito aperto, ottenibile con resistenze elettriche molto elevate.

Rimane infine la meshatura del modello; è noto che la fase di mesh serve proprio a creare gli elementi di discretizzazione del modello tali da permettere di descrivere al meglio, su tutto il modello, ciò che

succede dal punto di vista fisico relativamente al fenomeno sotto analisi. Tuttavia è importante sottolineare che elementi troppo piccoli, possono comportare tempi di calcolo eccessivamente lunghi, quindi in questo caso si sono eseguite delle suddivisioni tali da garantire la convergenza dei risultati allo stesso modo di quelli ottenibili da una mesh molto più fine.

Si è realizzata una mesh di tipo mappata, con il comando *mapped* suddividendo i contorni delle superfici in modo da ottenere dei parallelepipedi; le dimensioni di suddivisione dei contorni sono controllate dal comando *distribuzione* e si sono imposti 5 elementi sullo spessore degli strati di PZT e 2 elementi sullo strato di espanex, come qui di seguito illustrato:

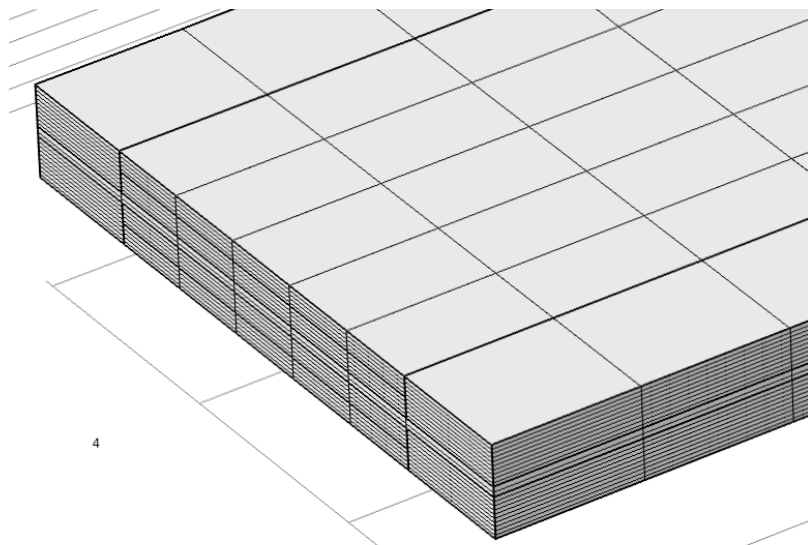


Figura 5.4: discretizzazione degli strati della lamina v22b

Infatti è importante avere un sufficiente numero di elementi lungo lo spessore, perché il gradiente del campo elettrico è rivolto proprio nella direzione ortogonale alla piastra, cioè quella dello spessore; nelle direzioni longitudinale e laterale della lamina invece bastano, come già detto, pochi elementi, quelli sufficienti a identificare le prime 4 risonanze della lamina ed i primi 4 modi di vibrare corrispondenti con una buona accuratezza; si sono suddivisi quindi intorno ai 25-30 elementi nella direzione della lunghezza della lamina e in 7-8 elementi nella direzione della larghezza della stessa. Questo aspetto di convergenza dei risultati è stato verificato attraverso mesh più fini, le quali restituivano risultati con un errore inferiore allo 0,5%.

Occorre precisare un'ulteriore fatto: poiché nelle misure, sia con gli assorbitori sia con le tipmass, si è usata una piccola quantità di cera per tenere tali oggetti attaccati alla piastra, la stessa quantità di cera è stata anche utilizzata per le misure della piastra da sola, che ha fatto sì di portare la risonanza a 271 Hz, contro i 278 Hz della lamina in assenza di cera; pertanto anche nei modelli FEM viene aggiunta una piccola tipmass sull'estremità libera della lamina, valutata con il valore approssimativo di 0,02 g.

Il prossimo step è il lancio delle simulazioni e la conseguente analisi dei risultati, ma prima di ciò occorre definire le differenze che questo modello ha rispetto ai modelli con le tipmass e con gli assorbitori.

5.2.2 V22B assieme alle tipmass

Nei due modelli aventi le tipmass, le uniche differenze rispetto al modello precedente rappresentante la lamina singola consistono nell'aggiunta nella geometria del modello di un parallelepipedo collocato sopra e infondo alla piastra con lunghezza pari a quella del tratto finale di FR4, e con massa pari alla massa della tipmass utilizzata durante le prove sperimentali, quindi 0,0254 g per la mass4 e 0,24 g per la tipmass (il mezzo piombino). Qui sotto un'immagine del modello utilizzato per le due simulazioni:

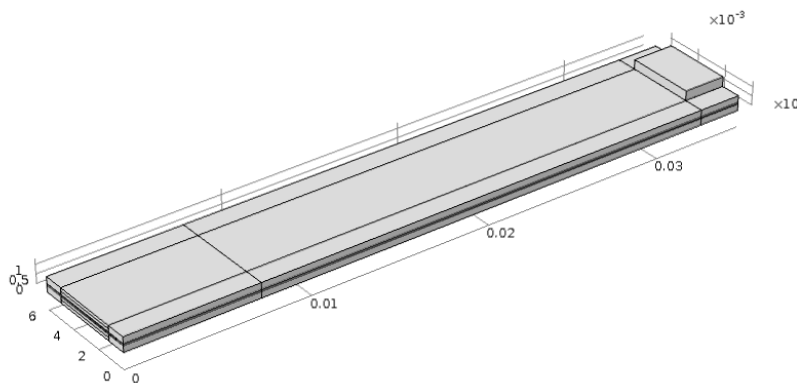


Figura 5.5: modello FEM per simulare la risposta del sistema composto da harvester + tipmass

Tutte le altre condizioni viste nella meccanica dei solidi, condizioni al contorno meccaniche e elettriche rimangono uguali a quelle utilizzate per il modello precedente della singola lamina.

Al fine di conferire al parallelepipedo la massa effettiva prevista per la simulazione si è proceduto in tale maniera: nei parametri si è aggiunto il parametro m_a (massa aggiunta) con valore quello della tipmass corrispondente, dopodiché nella scelta dei materiali si è dato un materiale vuoto al parallelepipedo rappresentante la tipmass con coeff. Poisson 0,3 , modulo Elastico 210 GPa e densità pari a m_a/volume del parallelepipedo; in questo modo si garantisce che la tipmass abbia la massa corretta e pari a m_a .

Ovviamente nella mesh non si deve dimenticare di suddividere anche la tipmass, per la quale bastano pochi elementi in quanto non compete alla variazione della deformate del sistema, ma invece ha il ruolo di 'tunare' la prima risonanza della lamina, come già visto nei risultati delle prove sperimentali.

L'ultimo parametro che risulta diverso da quello del modello della piastra singola è lo smorzamento isteretico, il quale dipende dalla massa aggiunta all'harvester; esso consente anche di controllare l'altezza del picco della FRF ottenibile nei risultati alla fine della simulazione.

Qui sotto è rappresentato il modello 'meshato' e pronto per la simulazione per il caso v22b + tipmass;

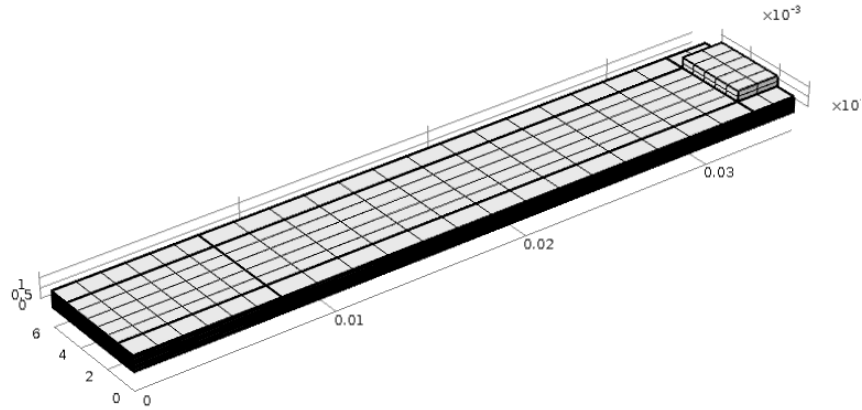


Figura 5.6: mesh del sistema composto da harvester bimorfo v22b assieme ad una delle 2 tipmass

5.2.3 V22B assieme ai 3 assorbitori

In questo caso si modella la piastra identicamente a come è stato fatto per i modelli precedenti, e si aggiunge in più l'assorbitore dinamico, composto dal filo con all'estremità libera la massetta concentrata.

Per fare ciò si è proceduto nel seguente modo:

per prima cosa, causa problemi di meshatura, si è dovuto realizzare un filo a sezione quadrata, che fosse dal punto di vista flessionale equivalente a quello utilizzato durante le prove sperimentali; tale condizione permette di ricavare la dimensione del lato della sezione del filo, dall'uguaglianza dei momenti d'inerzia flessionali tra filo a sezione rotonda e quadrata;

$$I_o = I_{\blacksquare} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi r^4}{4} = \frac{h^4}{12} \quad \rightarrow \quad h = \sqrt[4]{3\pi} r$$

e si ottiene $h = 0,263$ mm.

Si sono quindi inseriti tra i parametri 3 nuove caratteristiche, relative all'assorbitore, ovvero lato sezione h_a , lunghezza assorbitore l_a e la massa dell'assorbitore m_a .

Nella geometria del modello si costruisce l'assorbitore nel seguente modo; sopra il tratto finale di FR4 si appoggia il filo, centrato rispetto alla larghezza della lamina, vicino al quale si pone della cera larga quanto la larghezza della lamina e alta come il filo, come mostrato nella seguente immagine,

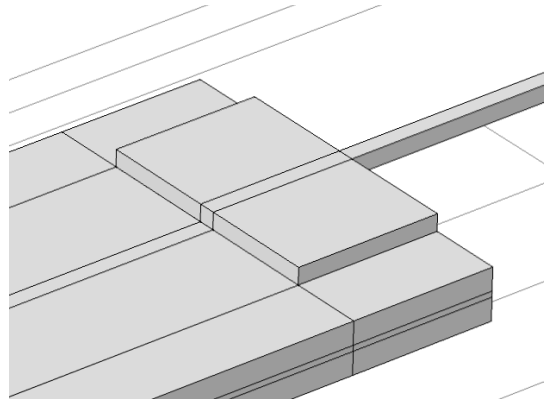


Figura 5.7: dettaglio della parte dell'assorbitore sulla lamina

Le proprietà dei materiali imposte per la cera e il filo sono le seguenti:

materiale	modulo elastico e [GPa]	coeff. Poisson	densità [kg/m ³]
cera	2	0,25	1200
filo	210	0,33	9400

Tabella 5.3: proprietà materiali usati nei modelli harvester + assorbitore

La massetta invece è stata posta alla fine del filo, con dimensioni la sezione del filo e lunghezza 1 mm, e, immaginando che il baricentro di tale massetta sia a metà, si è costruito in modo da avere la lunghezza del filo che inizia dove finisce la lamina e termina a metà della massetta estrema del filo, come illustrato qui sotto:

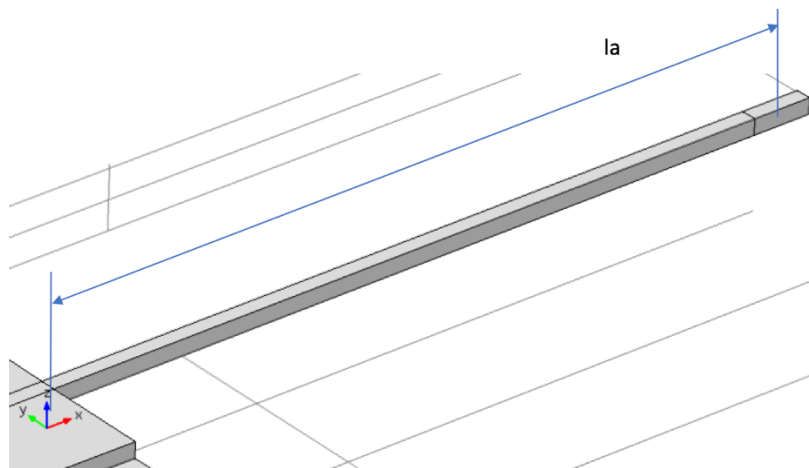


Figura 5.8: dettaglio della lunghezza dell'assorbitore

Per fare in modo che la massetta abbia la massa voluta m_a si procede nello stesso modo con cui è stato fatto per la tipmass, ovvero si definisce un nuovo materiale da applicare solo alla massetta, con modulo elastico E pari a 210 GPa, coeff. Di Poisson $\nu = 0,33$ e densità $\rho = m_a/\text{volume massetta}$ dove il volume è pari a $h_a \cdot h_a \cdot l$ [mm].

Con la mesh si discretizza il filo e la massetta in modo tale da descrivere in maniera sufficientemente accurata le forme dei primi modi di vibrare del sistema, dando perciò una ventina di elementi di suddivisione per il filo.

Si riportano ora i risultati delle simulazioni effettuati per i 6 modelli relativi a questa piastra bimorfa.

5.3 Risultati delle simulazioni eseguite per la piastra V22B

Una volta realizzati i 6 modelli precedentemente descritti, i cui dettagli saranno seguitamente esposti, si procede al settaggio degli studi che permettono le due analisi richieste per ogni modello.

1) Analisi delle autofrequenze

Questo primo studio permette di ricavare le frequenze proprie e le relative forme modali della piastra, le quali non sono individuabili per altra via, se non facendo uso di apparecchi molto costosi quali vibrometri laser, non utilizzati in questa sede; questo studio si può impostare con il seguente percorso;

Studio → *aggiungi uno studio* → *studio1: Autofrequenze* → e si
deselezionano circuito elettrico e elettrostatica

e impostando 4 come numero di autofrequenze si calcolano le prime quattro risonanze dell'harvester.

Come già visto, per queste travi piezoelettriche il primo modo di vibrare è quello fondamentale poiché è quello che avviene alla frequenza caratteristica più bassa del sistema, e genera i maggiori spostamenti della lamina rispetto a quelli generati dai modi superiori, e quindi anche deformazioni e stress meccanici interni maggiori, con conseguente maggior produzione di energia elettrica.

Si osserva dal settaggio dello studio1 che si prendono in considerazione solo i gdl meccanici del sistema, e il non considerare i gdl elettrici equivale ad avere una condizione di corto circuito ($R_{ext} = 0$), che implica una minor rigidità del sistema nel suo complesso e che fa sì di avere delle frequenze proprie leggermente più basse rispetto a quelle calcolate con l'analisi armonica (studio2), che tiene in considerazione anche la parte elettrica del sistema (condizione di circuito aperto con R_{ext} molto elevata tendente a infinito).

Come risulterà chiaro tra poco, il primo modo di vibrare è puramente flessionale con deformata della trave senza nodi, e fa sì che gli strati di PZT si deformino tutti allo stesso modo e nella stessa

direzione lungo la loro lunghezza, generando una tensione con lo stesso segno nel modo 31, che è ottimale per la polarizzazione utilizzata dalla lamina.

I risultati di questo studio per i 6 modelli si possono riassumere nel seguente modo;

- Modelli senza assorbitori:

Modello	Modo vibratorio	Frequenza [Hz]	Forma
v22b	1° flessionale	v22b: 270,4	
		v22b+mass4: 251,1	
		v22b+tipmass: 180,4	
v22b+mass4	2° flessionale	v22b: 1758,6	
		v22b+mass4: 1683,7	
		v22b+tipmass: 1244,4	
v22b+tipmass	flessionale laterale	v22b: 1962,3	
		v22b+mass4: 1819,3	
		v22b+tipmass: 1419,2	
	torsionale	v22b: 3583,4	
		v22b+mass4: 3492,4	
		v22b+tipmass: 2623,5	

Tabella 5.4: analisi delle autofrequenze con risonanze e modi di vibrare per i modelli v22b, v22b+mass4 e v22b+tipmass

- Modelli con i tre assorbitori (le immagini sono relative al modello v22b+A2):

Modello	Modo vibratorio	Frequenza [Hz]	Forma
v22b+A2	1° flessionale	v22b+A2: 127,6	
		v22b+A34: 160,2	
		v22b+A4: 173,5	
	frequenza propria assorbitore (antirisonanza)	v22b+A2: 170,0	
		v22b+A34: 220,0	
		v22b+A4: 223,1	
v22b+A34	2° flessionale	v22b+A2: 342,0	
		v22b+A34: 353,8	
		v22b+A4: 331,7	
v22b+A4	3° flessionale	v22b+A2: 1736,4	
		v22b+A34: 1738,2	
		v22b+A4: 1708,6	

Tabella 5.5: analisi delle autofrequenze con risonanze e modi di vibrare per i modelli v22b+A2, v22b+A34 e v22b+A4

Come visto nei risultati delle prove sperimentali, per i primi tre modelli si effettuerà l'analisi armonica nell'intorno della prima risonanza, osservando anche in questo caso il calo di tale frequenza rispetto a quella della lamina da sola all'aumentare della tipmass; invece per i tre modelli con gli assorbitori si effettuerà l'analisi armonica relativamente ai primi due modi flessionali di vibrazione, i quali includono l'antirisonanza del sistema.

Bisogna sottolineare che i risultati ottenuti nei modelli con gli assorbitori sono stati tarati variando la lunghezza dell'assorbitore fino a quando non veniva ottenuta un'antirisonanza vicina alla frequenza fondamentale della lamina, anche se le lunghezze ottenute non sono risultate così diverse da quelle teoriche e da quelle sperimentali, confermando quindi l'efficacia di tali modelli e delle suddette simulazioni.

2) Analisi armonica

Una volta individuate le risonanze con lo studio 1 sulle autofrequenze, si imposta lo studio 2 che permette di effettuare una simulazione armonica su una banda di frequenze intorno ai primi modi flessionali dei 6 modelli; in particolare intorno al primo modo vibratorio per i primi tre modelli e intorno ai primi 2 modi flessionali negli altri 3 modelli con gli assorbitori (in modo da poter verificare che si abbia l'antirisonanza compresa tra questi due picchi, al valore della frequenza fondamentale dell'harvester).

Con questo studio si risale alla funzione di risposta in frequenza (frf) tra la tensione generata dalla lamina e l'accelerazione alla base al variare della frequenza, la quale verrà confrontata con le frf ottenute sperimentalmente e quelle previste dal modello analitico (Matlab).

Tale funzione permette di valutare le frequenze dei primi modi di vibrare, legate questa volta al comportamento elettromeccanico completo della lamina, e legate alla frequenza in cui si hanno i picchi della stessa; inoltre si possono valutare gli smorzamenti (legati all'altezza e all'ampiezza della campana in cui si hanno i picchi) e il comportamento elettromeccanico generale del sistema. Per impostare questo studio, uguale per tutti i modelli, si procede nel seguente modo;

Studio → *aggiungi uno studio modale* → *studio2: dominio delle frequenze da analisi*
→ *si diseleziona circuito elettrico*

Poi si configura il solutore dando *perturbazione lineare* e inserendo nel gradino2 i range di valutazione dell'analisi.

Infine prima di lanciare la simulazione si disabilita *circuito elettrico* nell'albero del modello, e in *elettrostatica* si disabilita il *terminale*, e si conferiscono al potenziale fluttuante le superfici relative al terminale per rendere la simulazione più veloce e relativa ai soli gdl elettrici, sfruttando i risultati dell'analisi delle autofrequenze precedente.

Le frf ottenute dalle simulazioni dei 6 modelli relativi alla piastra bimorfa v22b sono le seguenti;

V22B:

modello	f1 [Hz]	picco frf [V/g]	η	tipmass [g]
v22b	271,8	12,95	0,0125	0

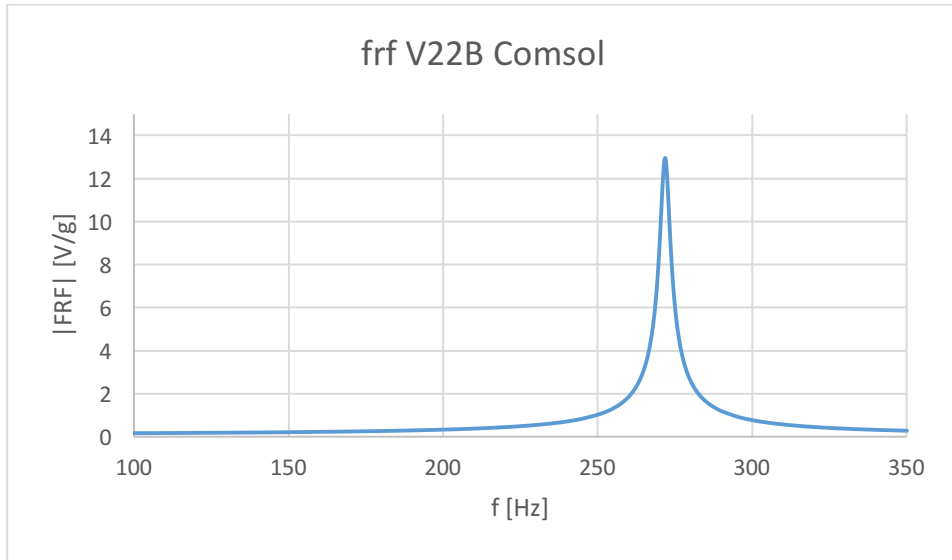


Figura 5.9: frf ottenuta con il FEM per il modello v22b

V22B+mass4:

modello	f1 [Hz]	picco frf [V/g]	η	tipmass [g]
v22b+mass4	261,2	13,45	0,0138	0,0254

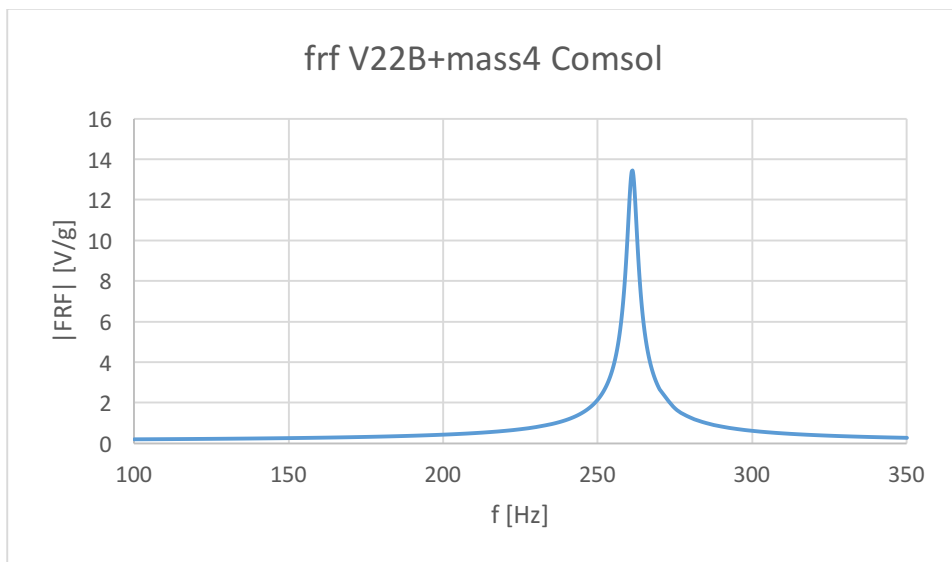


Figura 5.10: frf ottenuta con il FEM per il modello v22b+mass4

V22B+tipmass:

modello	f1 [Hz]	picco frf [V/g]	η	tipmass [g]
v22b+tipmass	179,0	24,9	0,0153	0,24

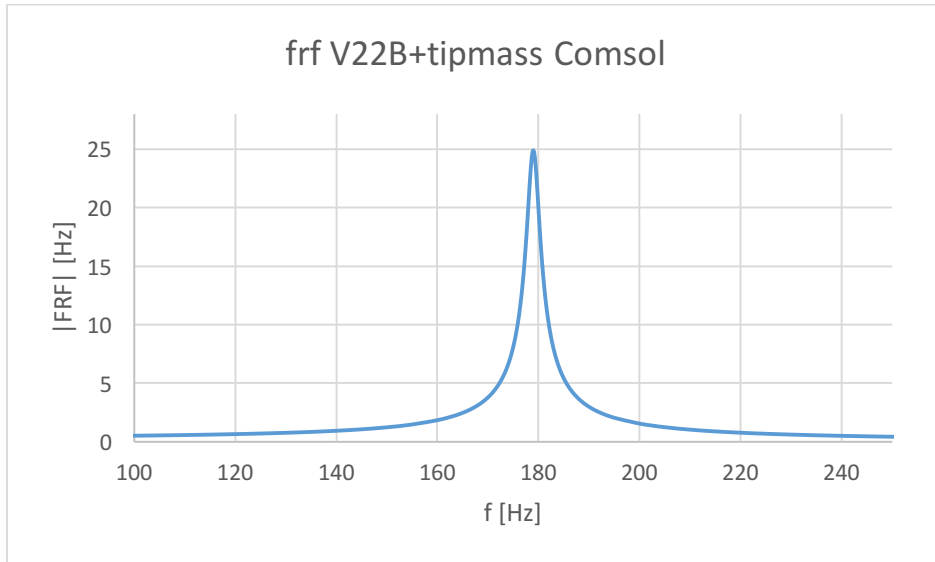


Figura 5.11: frf ottenuta con il FEM per il modello v22b+tipmass

V22B+A2:

modello	f1 [Hz]	f2 [Hz]	$f_{\text{antirisonanza}}$ [Hz]	η	m_2 [g]	l_a [mm]
v22b+A2	128,2	342,4	270	0,019	0,0934	13,0

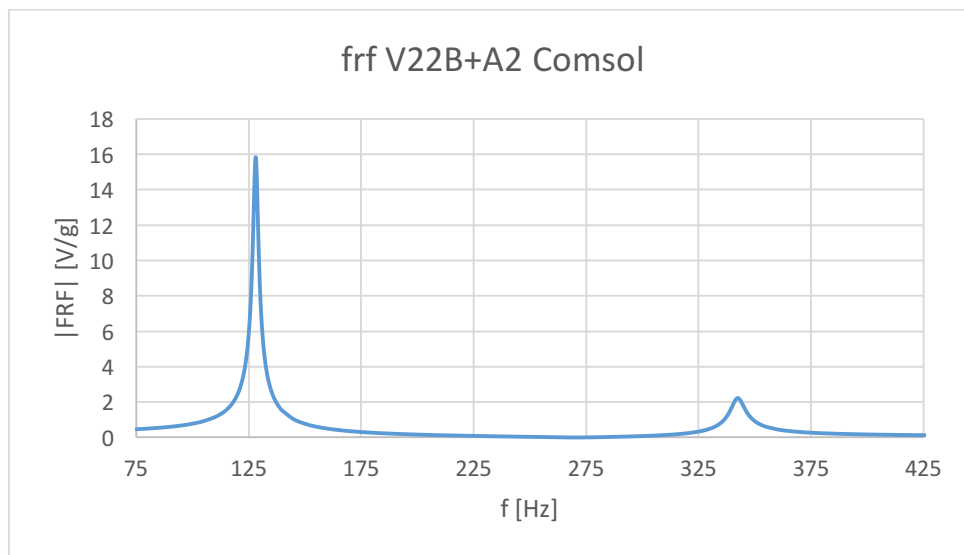


Figura 5.12: frf ottenuta con il FEM per il modello v22b+A2

V22B+A34:

modello	f1 [Hz]	f2 [Hz]	f _{antirisonanza} [Hz]	η	m ₂ [g]	la [mm]
v22b+A34	152,6	339,4	275	0,018	0,0509	14,22

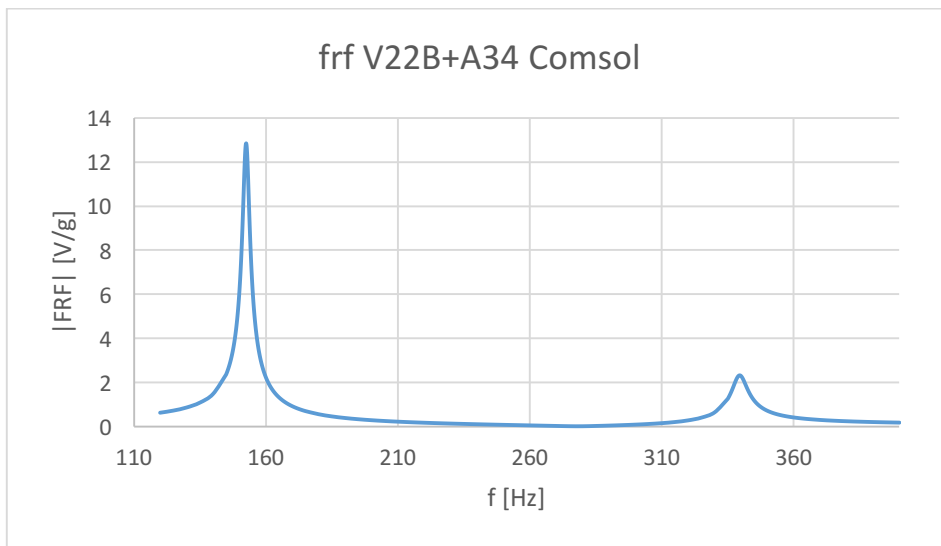


Figura 5.13: frf ottenuta con il FEM per il modello v22b+A34

V22B+A4:

modello	f1 [Hz]	f2 [Hz]	f _{antirisonanza} [Hz]	η	m ₂ [g]	la [mm]
v22b+A4	174,4	332,2	275	0,018	0,0254	16,43

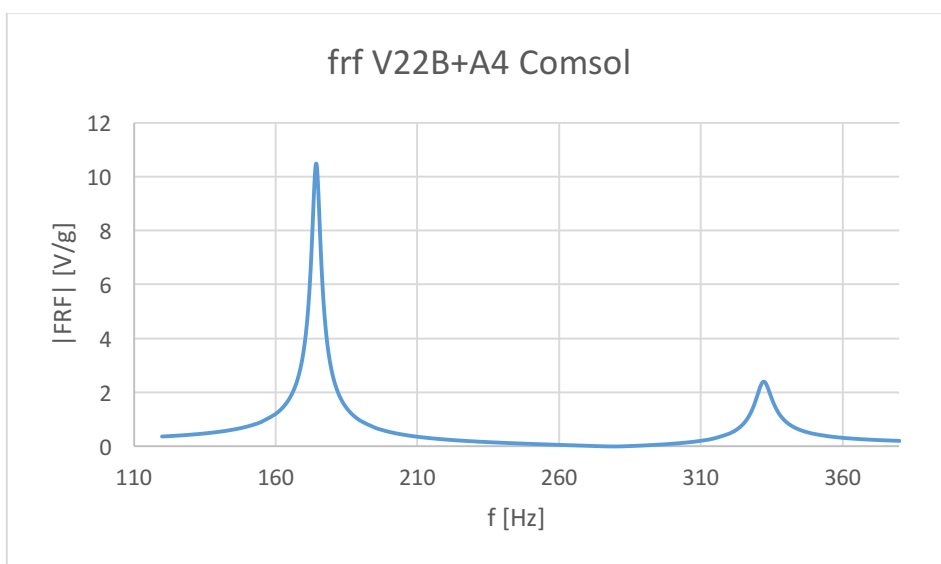


Figura 5.14: frf ottenuta con il FEM per il modello v22b+A4

Se si riportano tutte le curve ottenute in un unico grafico si può valutare il grado di accordo che il FEM ha con le misure sperimentali, relativamente all'entità dell'allargamento dei picchi; si ottiene quanto segue:

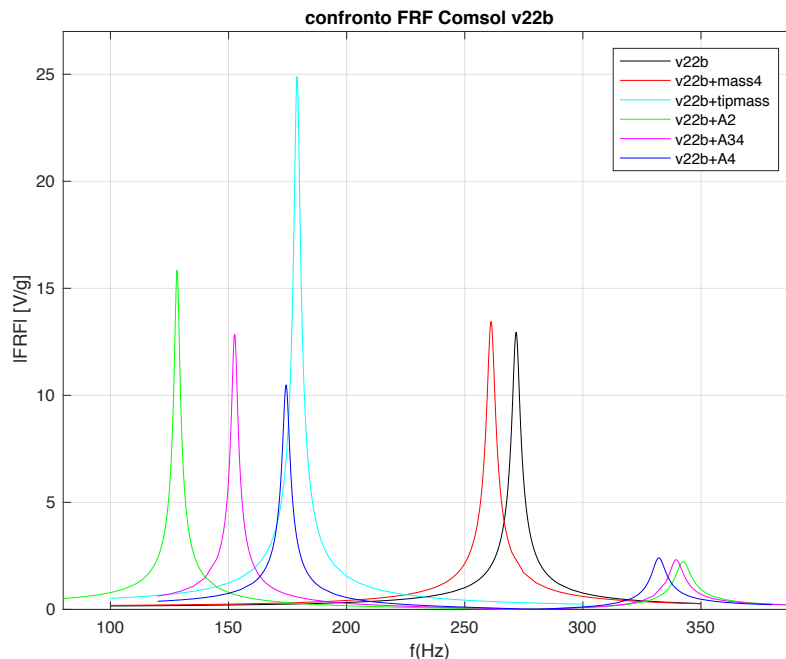


Figura 5.15: complessivo delle frf ottenute con il FEM per la piastra v22b

E poiché si passa da 150 (A4) a 230 Hz (A2) il grado di accordo tra FEM e misure in merito all'allargamento dei picchi risulta pressoché coincidente, a conferma della validità dell'utilizzo della modellazione agli elementi finiti.

5.4 Risultati delle simulazioni eseguite per la piastra V22BL

La modellazione della piastra bimorfa v22bl segue gli stessi passi della piastra precedente e le uniche differenze stanno nella diversa lunghezza del tratto finale di FR4, che per questa piastra è molto più lungo e pari a 30,6 mm. Questo fa sì che la frequenza fondamentale della lamina v22bl sia molto più bassa della v22b, fatto che si è già riscontrato nei risultati delle prove sperimentali; nel datasheet infatti viene definita per questa piastra la prima frequenza caratteristica a 121 Hz.

Le forme dei modi di vibrazione sono le stesse viste per la piastra v22b e pertanto non verranno ripetute.

Si ricorda che essendo stati eseguiti per questa piastra solo 2 set di prove sperimentali, si sono costruiti solo 2 modelli, ovvero V22BL e V22BL+assorbitore.

Cambiano inoltre gli smorzamenti e la lunghezza di accordatura dell'assorbitore dinamico testato, cioè A2. I risultati ottenuti dai 2 studi sono i seguenti:

1) Autofrequenze

Modello	Modo vibratorio	Frequenza [Hz]
v22bl	1° flessionale	114,3
	2° flessionale	615,0
	flessionale laterale	833,4
	torsionale	1745,6
v22bl + A2	1° flessionale	65,1
	2° flessionale	118,1
	flessionale laterale	177,6
	torsionale	594,5

Tabella 5.6: analisi delle autofrequenze con risonanze e modi di vibrare per i modelli v22bl e v22bl+A2

2) Analisi armonica

Le frf ottenute per questi due modelli sono le seguenti;

V22BL:

modello	f1 [Hz]	picco frf [V/g]	η	tipmass [g]
v22bl	115,4	35,3	0,029	0

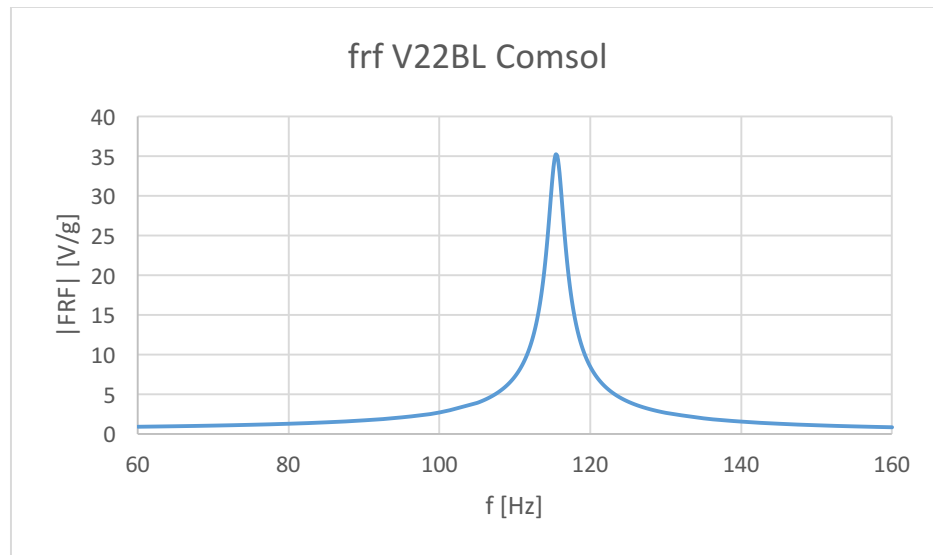


Figura 5.16: frf ottenuta con il FEM per il modello v22bl

V22BL+A2:

modello	f1 [Hz]	f2 [Hz]	f _{antirisonanza} [Hz]	η	m ₂ [g]	la [mm]
v22bl+A2	65,6	178,0	135	0,029	0,0934	16,62

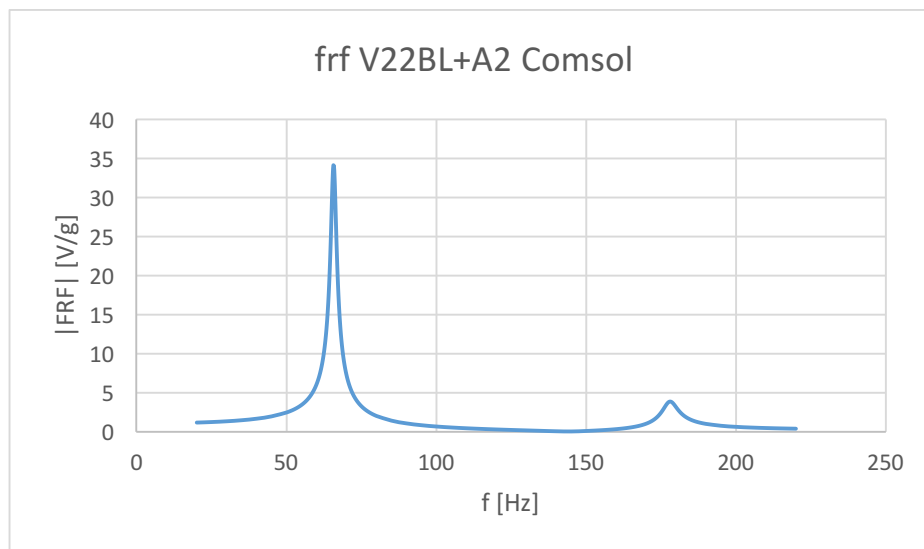


Figura 5.17: frf ottenuta con il FEM per il modello v22bl+A2

Combinando i risultati in un unico grafico si riscontra anche in questo caso un ottimo accordo rispetto alle misure;

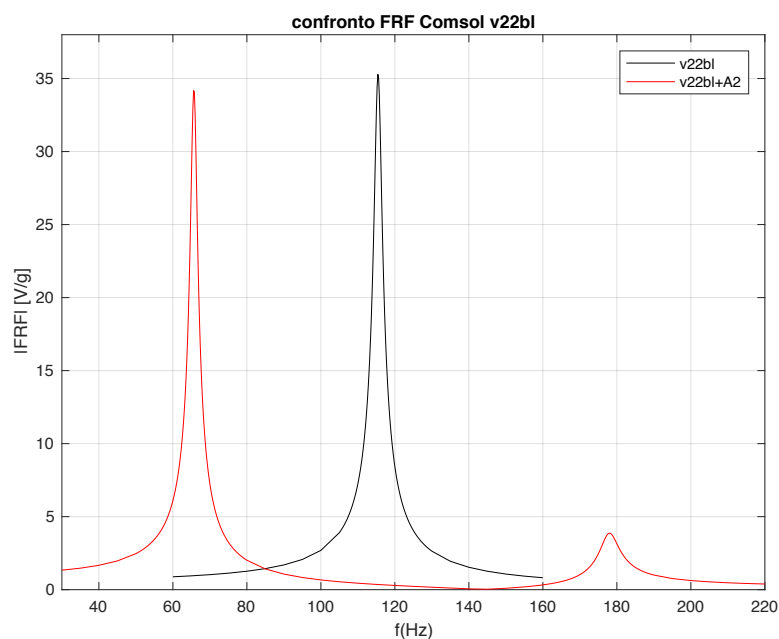


Figura 5.18: complessivo delle frf ottenute con il FEM per la piastra v22bl

5.5 Modelli creati per la piastra unimorfa PPA1001

Per questa sono stati creati 5 modelli, relativamente ai 5 set di prove sperimentali eseguiti con tale piastra; ppa da sola, ppa+ tipmass e ppa con i 3 assorbitori.

Le sue caratteristiche geometriche sono già state viste nella presentazione della piastra al capitolo 4 e si ricorda che essa è molto più larga delle altre due bimorfe, ed ha uno spessore che è circa la metà di quello delle altre due testate. I parametri inseriti per costruire tale piastra sono stati i seguenti:

nome	espressione
lunghezza 5 strati	40,7 [mm]
lunghezza tratto finale	1,8 [mm]
larghezza 5 strati	20,8 [mm]
larghezza bordo destro e sinistro	1,25 [mm]
lunghezza totale	40,7 + 1,8 [mm]
altezza strato poliestere	0,05 [mm]
altezza strato rame	0,03 [mm]
altezza strato PZT	0,15 [mm]
altezza strato acciaio (AISI 304)	0,15 [mm]
altezza strato polymide	0,03 [mm]
altezza totale	0,05+0,15+0,15+0,03+0,03 [mm]
smorzamento isteretico (isoD)	0,014
resistenza esterna	10 ¹⁵ Ohm

Tabella 5.7: parametri per la piastra PPA1001

Finita la modellazione geometrica si ottiene questo risultato:

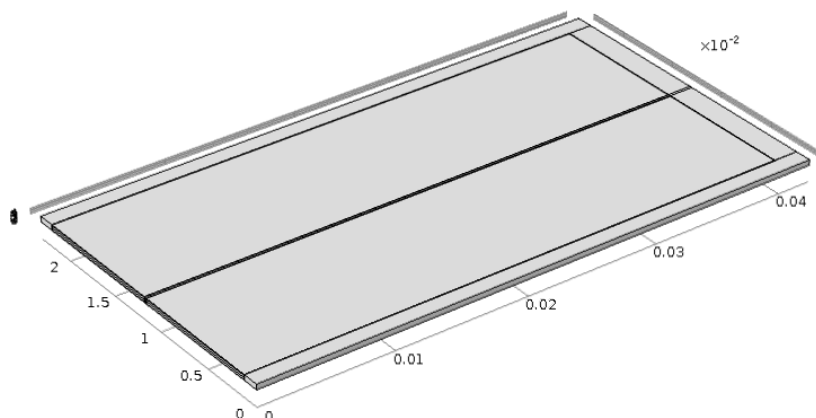


Figura 5.19: modello geometrico della piastra unimorfa PPA1001

Dopodiché si assegnano i materiali ai vari domini creati, facendo attenzione che tale lamina ha solo uno strato piezoelettrico, ovvero quello centrale; per gli strati, l'ordine dei materiali costituenti, partendo dal basso, è il seguente: polymide, acciaio, PZT 5H, rame e poliestere. I bordi destro, sinistro e tratto finale sono tutti in poliestere e hanno altezza pari a quella dei 5 strati.

Le caratteristiche dei materiali inserite per le proprietà dei materiali usati in questo modello sono le seguenti:

materiali	modulo elastico E [GPa]	Coeff. Poisson	densità [kg/m ³]
poliestere	3,6	0,48	1380
rame	110	0,35	8700
acciaio AISI 304	193	0,29	8000
polimide	3,1	0,34	1400

Tabella 5.8: proprietà materiali assegnati ai domini della piastra unimorfa ppa1001

Questi 4 materiali sono stati modellati come lineari e isotropi, mentre il PZT 5H è modellato come ortotropo trasversalmente isotropo. Per il materiale piezoelettrico si sono inserite le costanti di accoppiamento concordi con quelle fornite nel datasheet del componente, ovvero;

- Matrice di cedevolezza S_E [1/Pa]: invariata
- Densità $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$
- Permittività relativa ϵ^T : si cambia l'ultimo valore, cioè $\epsilon_{33}^T = 3800$
- Matrice di accoppiamento piezoelettrico d_E^T [C/N]: si cambiano i valori di d_{31} e d_{32} a -320×10^{-12} ed il valore di d_{33} a 650×10^{-12}

Le condizioni al contorno meccaniche sono le stesse viste per le piastre bimorfe, ovvero vincolamento d'incastro alla base e forza d'inerzia distribuita sul volume della piastra.

Invece le condizioni al contorno elettrostatiche sono molto più semplici in quanto è presente un solo strato piezoelettrico, e non v'è la necessità di dover realizzare un secondo sistema di riferimento.

A questo strato sono applicate le condizioni di:

- Messa a terra sulla superficie inferiore
- Terminale sulla superficie superiore, collegata alla resistenza esterna R_{ext} come nelle piastre bimorfe.

Infine la mesh viene eseguita con gli stessi accorgimenti usati per fare quella delle lamine bimorfe.

Per i modelli aventi tipmass e assorbitori, essi sono posizionati sul tratto finale di poliestere, come di seguito illustrato;

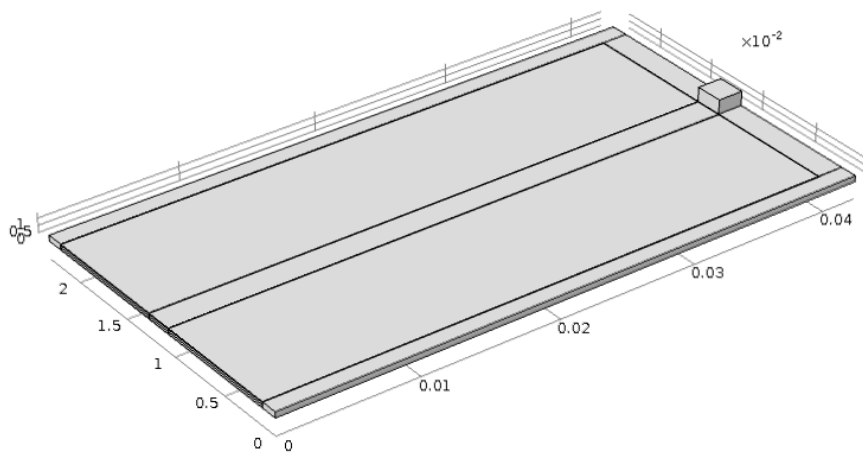


Figura 5.20: modello FEM piastra PPA1001+tipmass

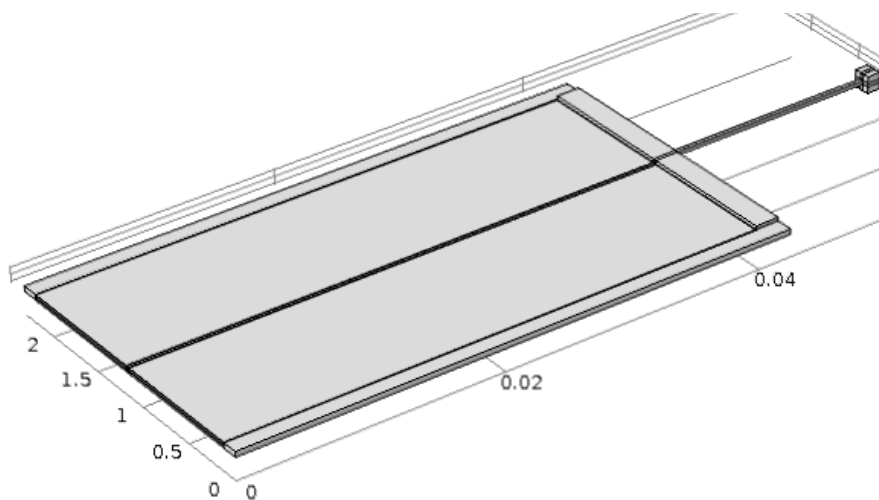


Figura 5.21: modello FEM piastra PPA1001+assorbitore

5.6 Risultati delle simulazioni eseguite per la piastra PPA1001

Impostati i due studi, autofrequenze ed analisi armonica, si procede alla loro valutazione, i cui risultati sono i seguenti;

1) Autofrequenze

La seguente tabella riassuntiva espone i risultati principali in forma schematica:

- Modelli senza assorbitori:

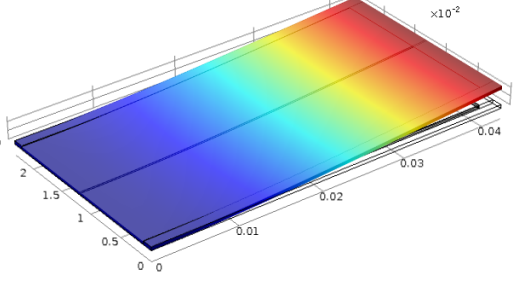
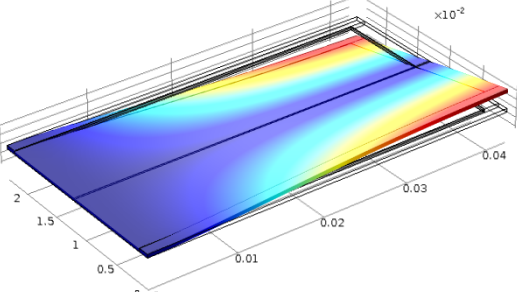
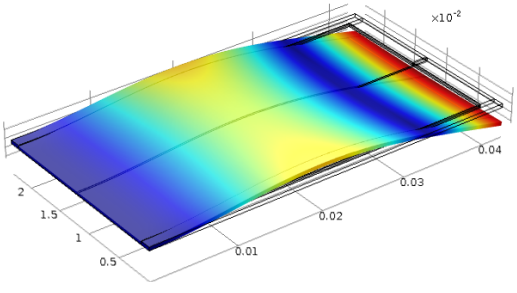
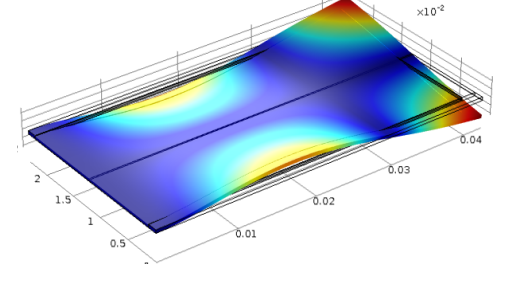
Modello	Modo vibratorio	Frequenza [Hz]	Forma
ppa1001	1° flessionale	PPA1001: 125,7	
		PPA1001+tipmass: 87,3	
ppa1001	1° torsionale	PPA1001: 512,2	
		PPA1001+tipmass: 508,1	
ppa1001+tipmass	2° flessionale	PPA1001: 784,1	
		PPA1001+tipmass: 608,2	
ppa1001+tipmass	modo misto	PPA1001: 1672,3	
		PPA1001+tipmass: 1653	

Tabella 5.9: analisi delle autofrequenze con risonanze e modi di vibrare per i modelli ppa1001 e ppa1001+tipmass

N.B. si osserva la diminuzione della frequenza del modo torsionale rispetto alle lamine bimorfe, la quale va a collocarsi tra la prima e la seconda frequenza flessionale della lamina, dovuto al fatto che la lamina unimorfa PPA1001 è molto più larga, con una larghezza confrontabile con la sua lunghezza.

Modelli con i 3 assorbitori:

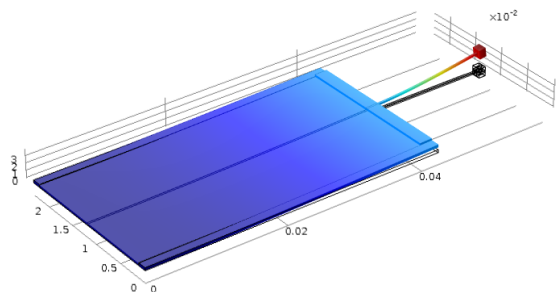
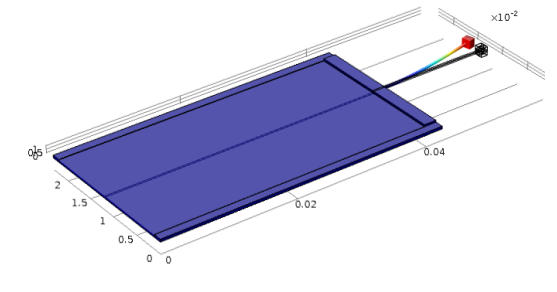
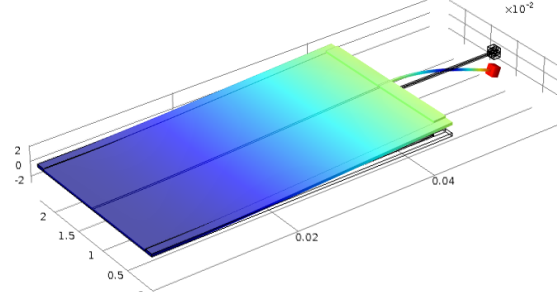
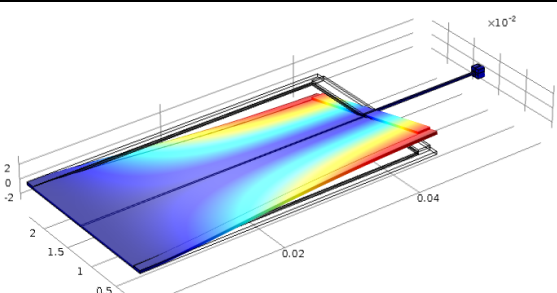
Modello	Modo vibratorio	Frequenza [Hz]	Forma
ppa1001+A2	1° flessionale	PPA1001+A2: 87,2	
		PPA1001+A34: 92,6	
		PPA1001+A4: 97,8	
ppa1001+A34	frequenza assorbitore (antirisonanza)	PPA1001+A2: 120,8	
		PPA1001+A34: 120,8	
		PPA1001+A4: 122,8	
ppa1001+A4	2° flessionale	PPA1001+A2: 161,5	
		PPA1001+A34: 153,8	
		PPA1001+A4: 149,0	
	1° torsionale	PPA1001+A2: 509,2	
		PPA1001+A34: 509,3	
		PPA1001+A4: 509,2	

Tabella 5.10: analisi delle autofrequenze con risonanze e modi di vibrare per i modelli ppa1001+A2, ppa1001+A34 e ppa1001+A4

2) Analisi armonica

Le frf, assieme con le caratteristiche meccaniche utilizzate per i 5 modelli, ottenute con questo studio, sono le seguenti;

PPA1001:

modello	f1 [Hz]	picco frf [V/g]	η	tipmass [g]
ppa1001	128,8	17,5	0,016	0

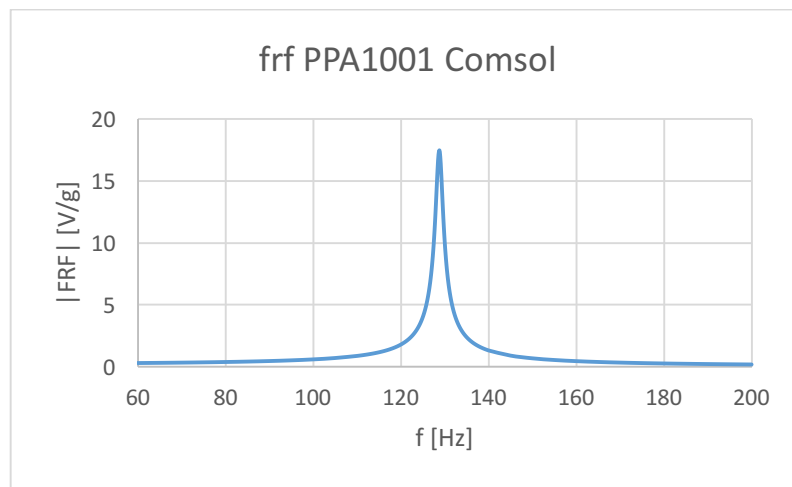


Figura 5.22: frf ottenuta con il FEM per il modello ppa1001

PPA1001+tipmass:

modello	f1 [Hz]	picco frf [V/g]	η	tipmass [g]
ppa1001+tipmass	89,6	25,5	0,0165	0,59

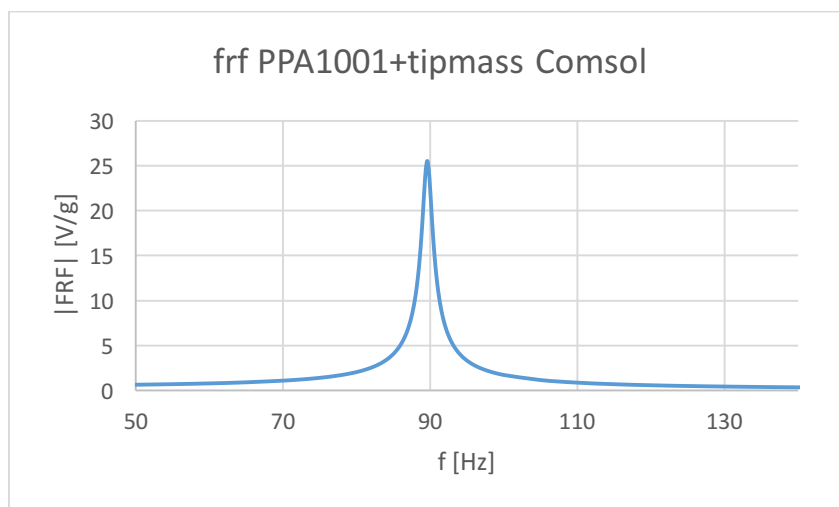


Figura 5.23: frf ottenuta con il FEM per il modello ppa1001+tipmass

PPA1001+A2:

modello	f1 [Hz]	f2 [Hz]	f _{antirisonanza} [Hz]	η	m ₂ [g]	la [mm]
ppa1001+A2	89,2	163,4	130	0,016	0,0934	16,17

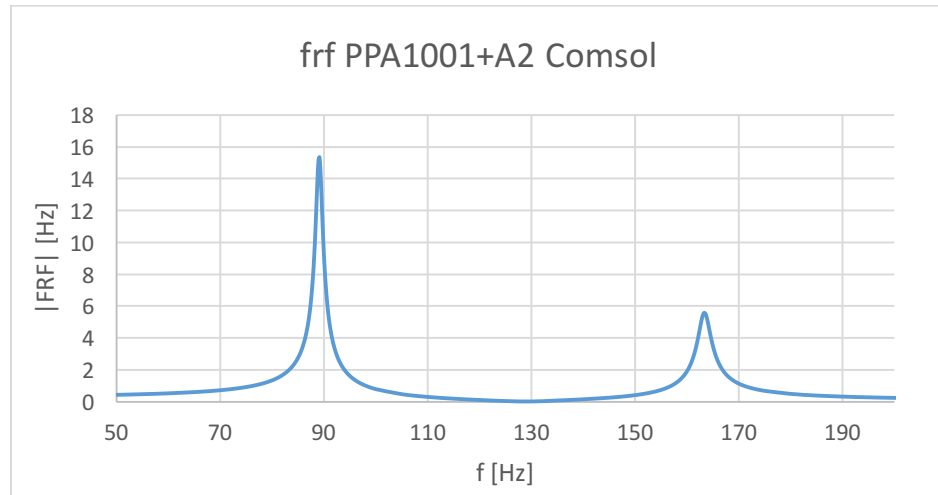


Figura 5.24: frf ottenuta con il FEM per il modello ppa1001+A2

PPA1001+A34:

modello	f1 [Hz]	f2 [Hz]	f _{antirisonanza} [Hz]	η	m ₂ [g]	la [mm]
ppa1001+A34	93,9	155,2	125	0,014	0,0509	19,59

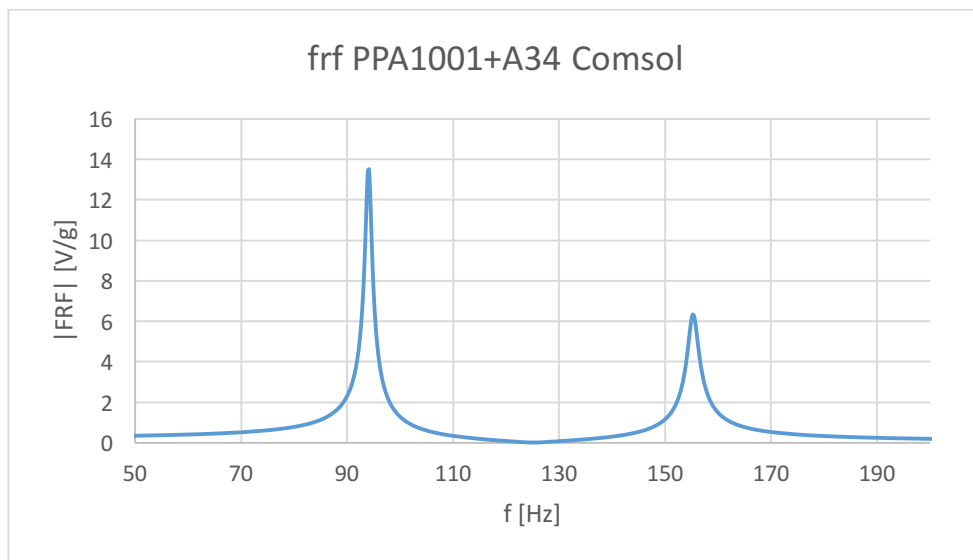


Figura 5.25: frf ottenuta con il FEM per il modello ppa1001+A34

PPA1001+A4:

modello	f1 [Hz]	f2 [Hz]	f _{antirisonanza} [Hz]	η	m ₂ [g]	la [mm]
ppa1001+A4	99,4	150,4	125	0,0155	0,0254	24,04

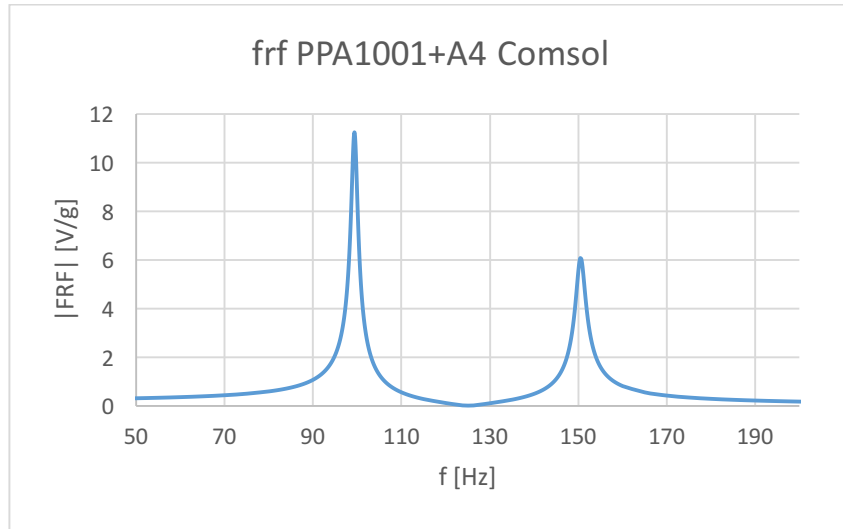


Figura 5.26: frf ottenuta con il FEM per il modello ppa1001+A4

Appare chiaramente che anche con questi modelli FEM si ottiene l'apertura dei picchi all'aumentare della massa dell'assorbitore dinamico, proprio come si era trovato nella teoria e sperimentalmente; in un grafico unico i FEM per la piastra ppa1001 sono i seguenti:

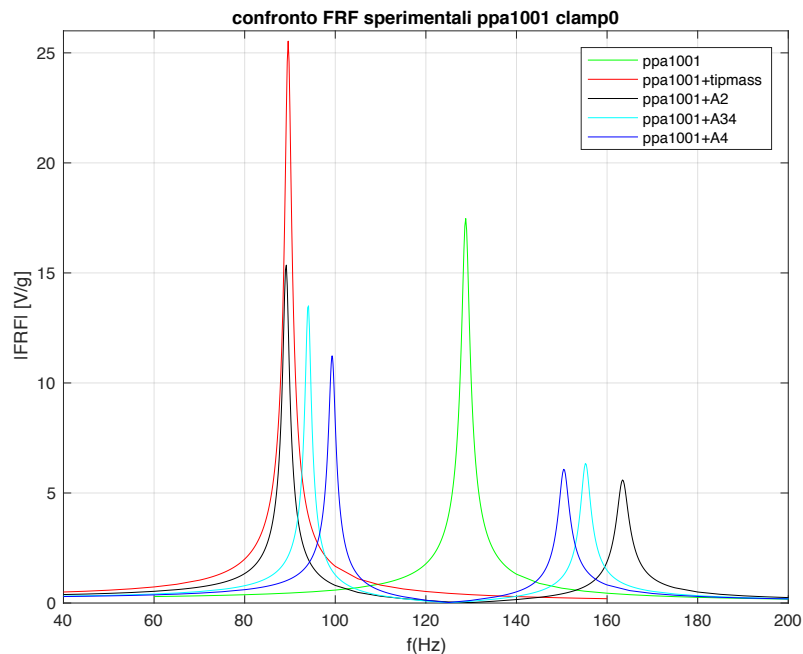


Figura 5.27: complessivo delle frf ottenute con il FEM per la piastra v22bl

Ed anche in questo caso, come per la v22b, l'accordo tra FEM e misure è più che ottimo, infatti si va da una banda minima di circa 45 Hz (A4) a una massima di circa 80 Hz (A2)

confermando ciò che è stato ottenuto con le misure, e in maniera meno buona, ma pur sempre soddisfacente, i risultati della previsione del modello in Matlab.

Capitolo 6: Confronti tra misure, FEM e modello analitico

Si riassumono ora i risultati ottenuti per le tre piastre, a partire dalla previsione del modello analitico ed al successivo confronto tra risultati sperimentali e FEM, indicando le differenze riscontrate tra i vari metodi, sia nelle caratteristiche meccaniche sia nei numeri effettivamente ottenuti.

1) V22B

Caratteristiche globali piastra;

f_n [Hz]	a_{b0} [m/s ²]	$m_{piastra} \left[\frac{kg}{m} \right]$	L_{PZT} [mm]	$L_{piastra}$ [mm]
270	1	0,0148	25,4	35,5

modello analitico:

tipmass [g]	r_{filo} [mm]	$\rho_{filo} \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	E_{filo} [GPa]	$I_{flex, filo}$ [mm ⁴]	A2		A34		A4	
					m_a [g]	l_a [mm]	m_a [g]	l_a [mm]	m_a [g]	l_a [mm]
0,24	0,15	9400	210	$3,976 \times 10^{-4}$	0,0949	9,71	0,0528	11,81	0,0278	14,63

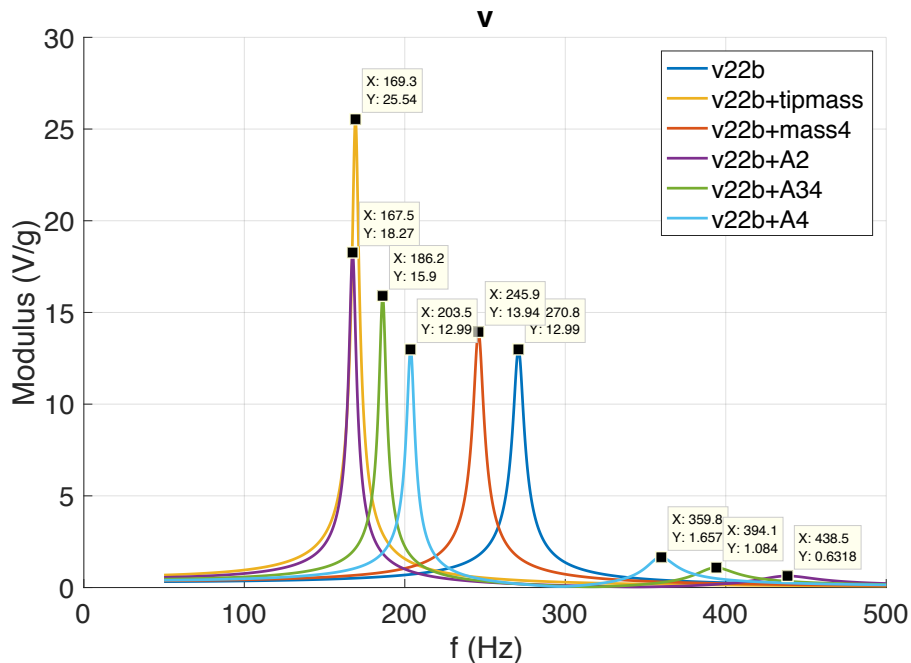


Figura 6.1: previsione modello analitico per la piastra v22b

misure:

tipmass [g]	r_{filo} [mm]	ρ_{filo} $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	E_{filo} [GPa]	$I_{flex, filo}$ [mm ⁴]	A2		A34		A4	
					m_a [g]	l_a [mm]	m_a [g]	l_a [mm]	m_a [g]	l_a [mm]
0,25	0,15	9400	210	$3,976 \times 10^{-4}$	0,0934	9,0	0,0509	12,5	0,0254	14,8

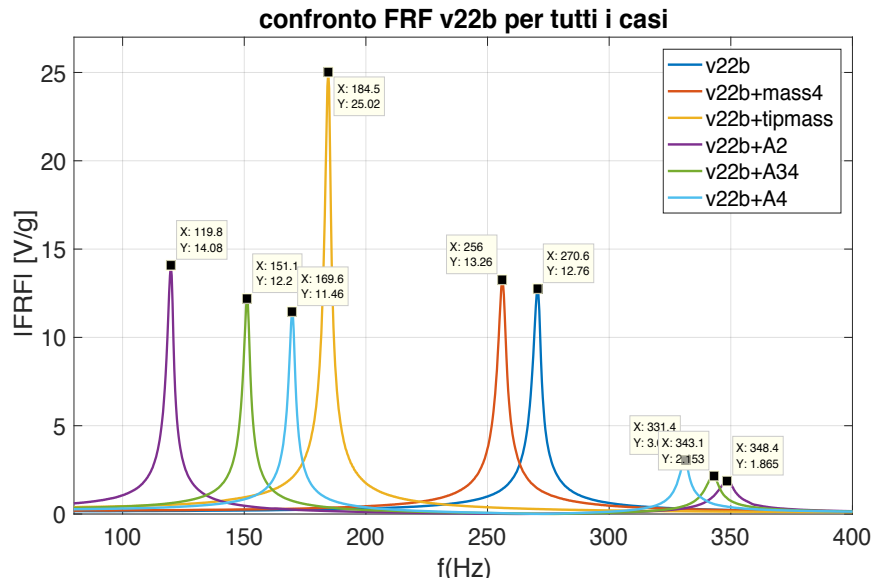


Figura 6.2: frf ottenute dalle misure per la piastra v22b

FEM:

tipmass [g]	r_{filo} [mm]	ρ_{filo} $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	E_{filo} [GPa]	$I_{flex, filo}$ [mm ⁴]	A2		A34		A4	
					m_a [g]	l_a [mm]	m_a [g]	l_a [mm]	m_a [g]	l_a [mm]
0,25	0,15	9400	210	$3,976 \times 10^{-4}$	0,0934	13,0	0,0509	14,22	0,0254	16,43

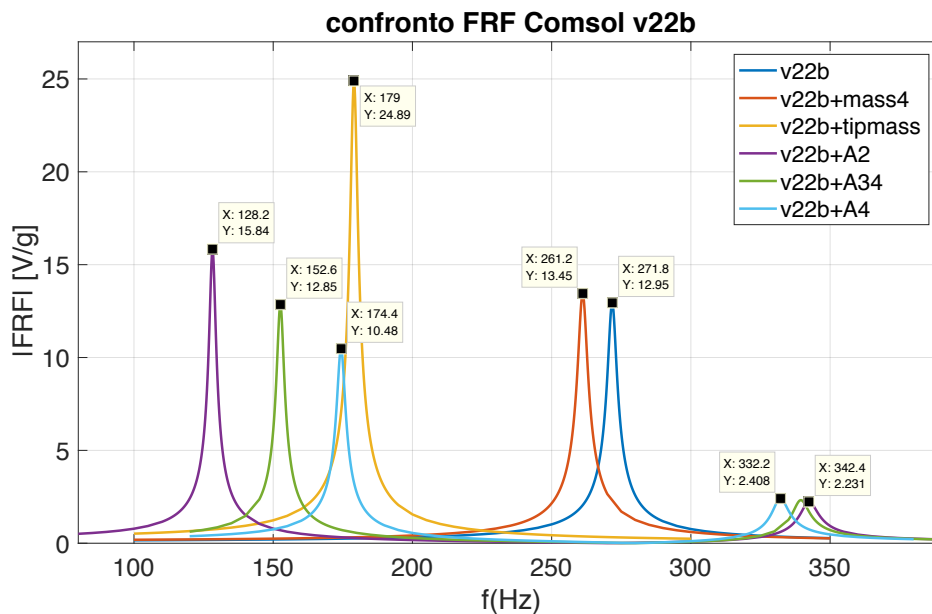


Figura 6.3: frf ottenute dalle simulazioni FEM per la piastra v22b

Riepilogo:

sistema	f1 [Hz]		ft [Hz]	f2 [Hz]	allargamento [Hz]	errore rispetto alla misura [%]
v22b	Matlab	270,8	-	-	-	-
	misure	270,6				
	FEM	271,8				
v22b+mass4	Matlab	245,9	-	-	-	-
	misure	256,0				
	FEM	261,2				
v22b+tipmass	Matlab	169,3	-	-	-	-
	misure	184,5				
	FEM	179,0				
v22b+A2	Matlab	167,5	340	438,5	271	18,6
	misure	119,8	263	348,4	228,5	0
	FEM	128,2	275	342,4	214,2	7,6
v22b+A34	Matlab	186,2	320	394,1	208	8,3
	misure	151,1	272	343,1	192	0
	FEM	152,6	275	339,4	187	2,6
v22b+A4	Matlab	203,5	295	359,8	235	45
	misure	169,6	271	331,4	161,4	0
	FEM	174,4	275	332,2	158	2,1

Tabella 6.1: riepilogo di tutti i risultati per la piastra V22B

2) V22BL

Caratteristiche globali piastra;

fn [Hz]	a_{b0} [m/s ²]	$m_{piastra} \left[\frac{kg}{m} \right]$	L_{PZT} [mm]	$L_{piastra}$ [mm]
120	1	0,01249	25,4	63,5

modello analitico:

tipmass [g]	r_{filo} [mm]	$\rho_{filo} \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	E_{filo} [GPa]	$I_{flex, filo}$ [mm ⁴]	A2	
					m_a [g]	l_a [mm]
0	0,15	9400	210	$3,976 \times 10^{-4}$	0,096	16,62

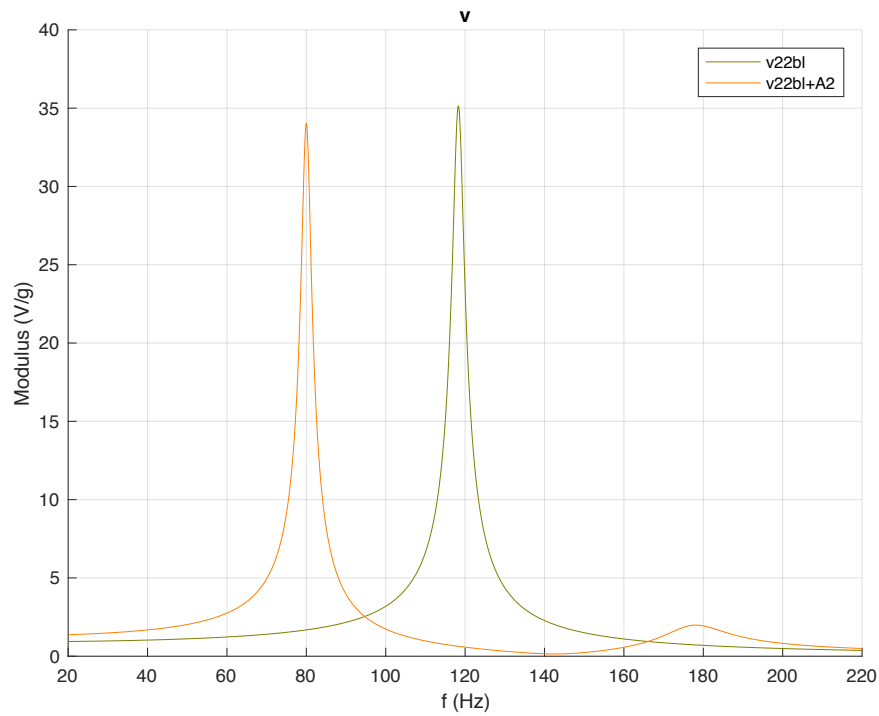


Figura 6.4: previsione modello analitico per la piastra v22bl

misure:

tipmass [g]	r_{filo} [mm]	$\rho_{filo} \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	E_{filo} [GPa]	$I_{flex, filo}$ [mm ⁴]	A2	
					m_a [g]	l_a [mm]
0	0,15	9400	210	$3,976 \times 10^{-4}$	0,0934	16,1

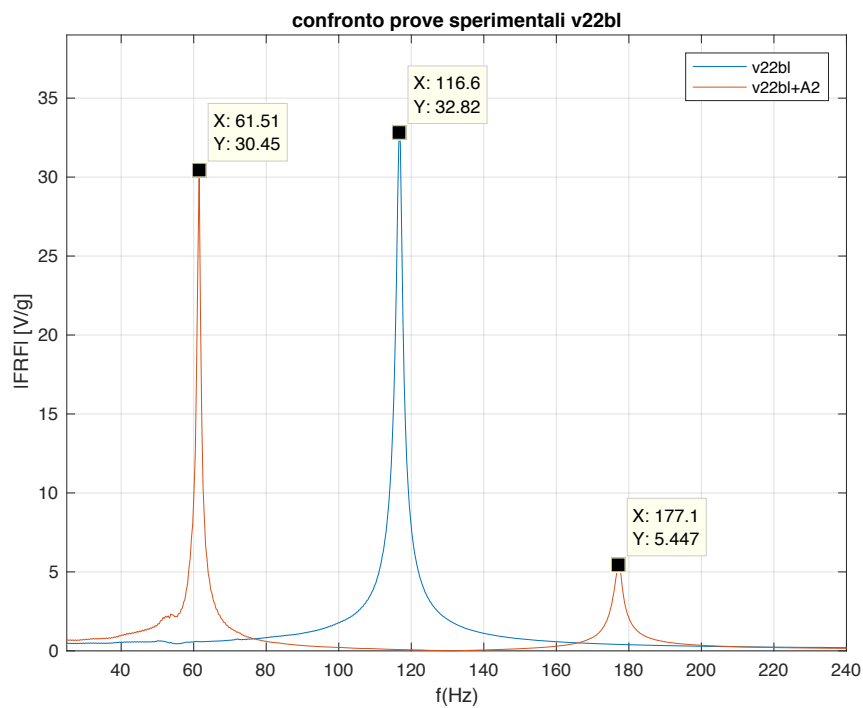


Figura 6.5: frf ottenute dalle misure per la piastra v22bl

FEM:

tipmass [g]	r_{filo} [mm]	$\rho_{filo} \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	E_{filo} [GPa]	$I_{flex, filo}$ [mm ⁴]	A2	
					m_a [g]	l_a [mm]
0	0,15	9400	210	$3,976 \times 10^{-4}$	0,0934	16,62

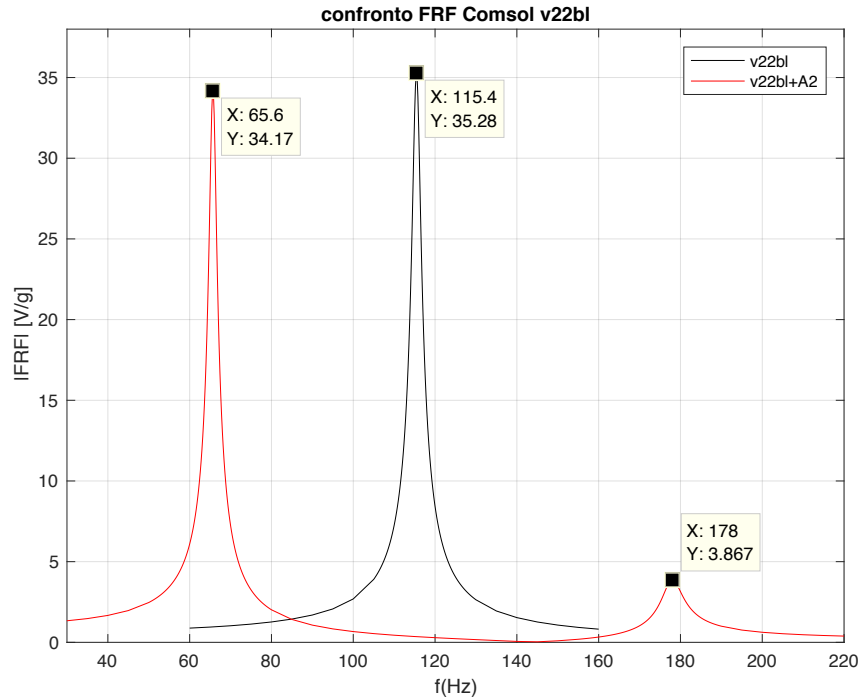


Figura 6.6: frf ottenute dalle simulazioni FEM per la piastra v22bl

Riepilogo:

sistema	f1 [Hz]		ft [Hz]	f2 [Hz]	allargamento [Hz]	errore rispetto alla misura [%]
v22bl	Matlab	118,4	-	-	-	-
	misure	116,6				
	FEM	115,4				
v22bl+A2	Matlab	80,0	142,5	178,2	98	15
	misure	61,5	131	177,1	115,6	0
	FEM	65,6	140	178,0	112,4	2,8

Tabella 6.2: riepilogo di tutti i risultati per la piastra V22BL

3) PPA1001

Caratteristiche globali piastra;

f_n [Hz]	a_{b0} [m/s ²]	$m_{piastra} \left[\frac{kg}{m} \right]$	L_{PZT} [mm]	$L_{piastra}$ [mm]
125	1	0,06079	46	42,5

Modello analitico:

tipmass [g]	r _{filo} [mm]	ρ_{filo} $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	E _{filo} [GPa]	I _{flex, filo} [mm ⁴]	A2		A34		A4	
					m _a [g]	l _a [mm]	m _a [g]	l _a [mm]	m _a [g]	l _a [mm]
0,59	0,15	9400	210	3,976x10 ⁻⁴	0,0959	16,17	0,0539	19,59	0,0293	24,08

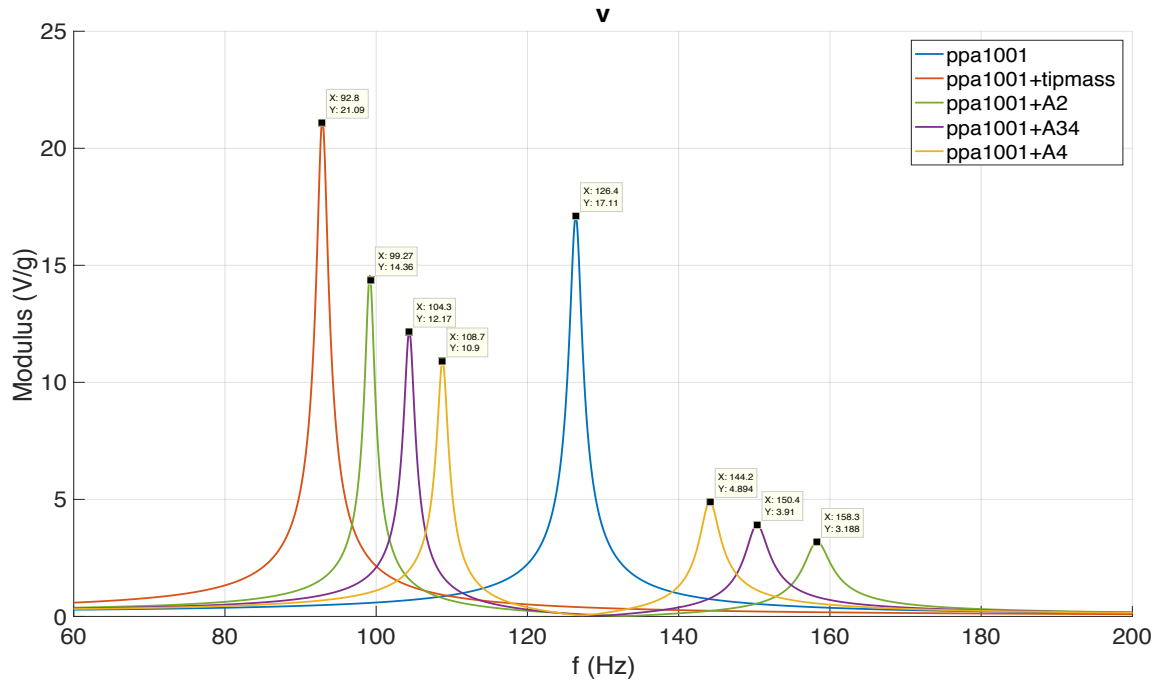


Figura 6.7: previsione modello analitico per la piastra ppa1001

misure:

tipmass [g]	r _{filo} [mm]	ρ_{filo} $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	E _{filo} [GPa]	I _{flex, filo} [mm ⁴]	A2		A34		A4	
					m _a [g]	l _a [mm]	m _a [g]	l _a [mm]	m _a [g]	l _a [mm]
0,55	0,15	9400	210	3,976x10 ⁻⁴	0,0934	14,5	0,0509	17,5	0,0254	22,5

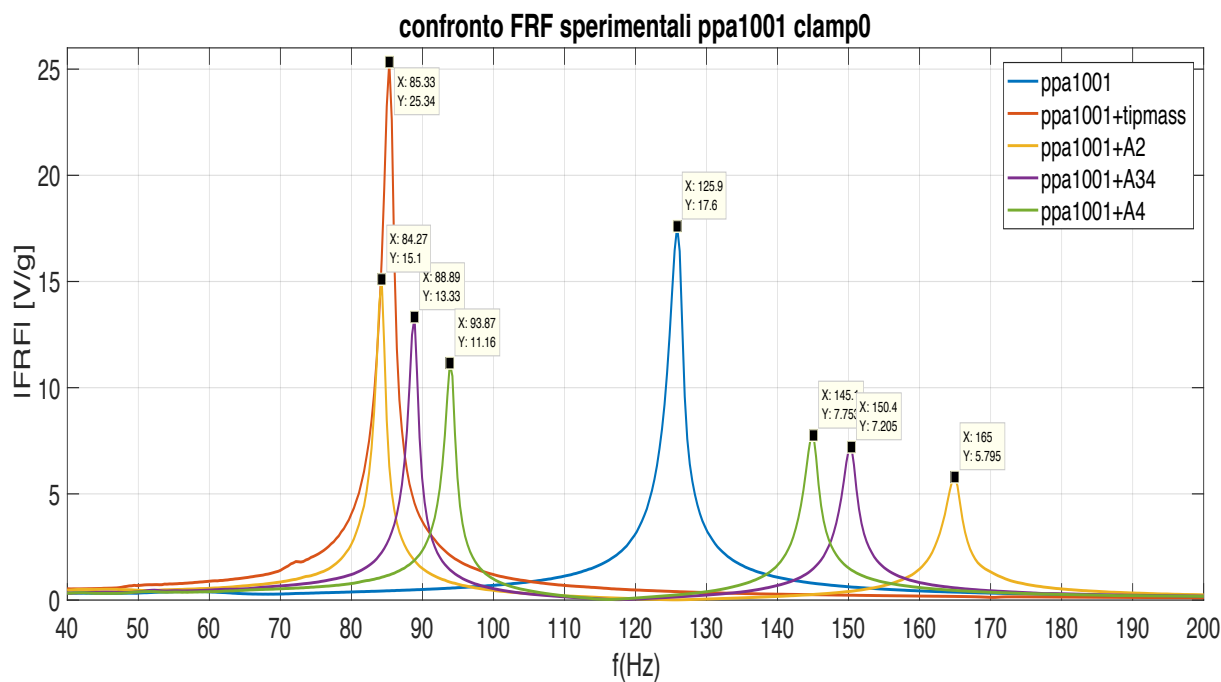


Figura 6.8: frf ottenute dalle misure per la piastra ppa1001

FEM:

tipmass [g]	r_{filo} [mm]	ρ_{filo} $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	E_{filo} [GPa]	$I_{flex, filo}$ [mm ⁴]	A2		A34		A4	
					m_a [g]	l_a [mm]	m_a [g]	l_a [mm]	m_a [g]	l_a [mm]
0,59	0,15	9400	210	$3,976 \times 10^{-4}$	0,0934	16,17	0,0509	19,59	0,0254	24,08

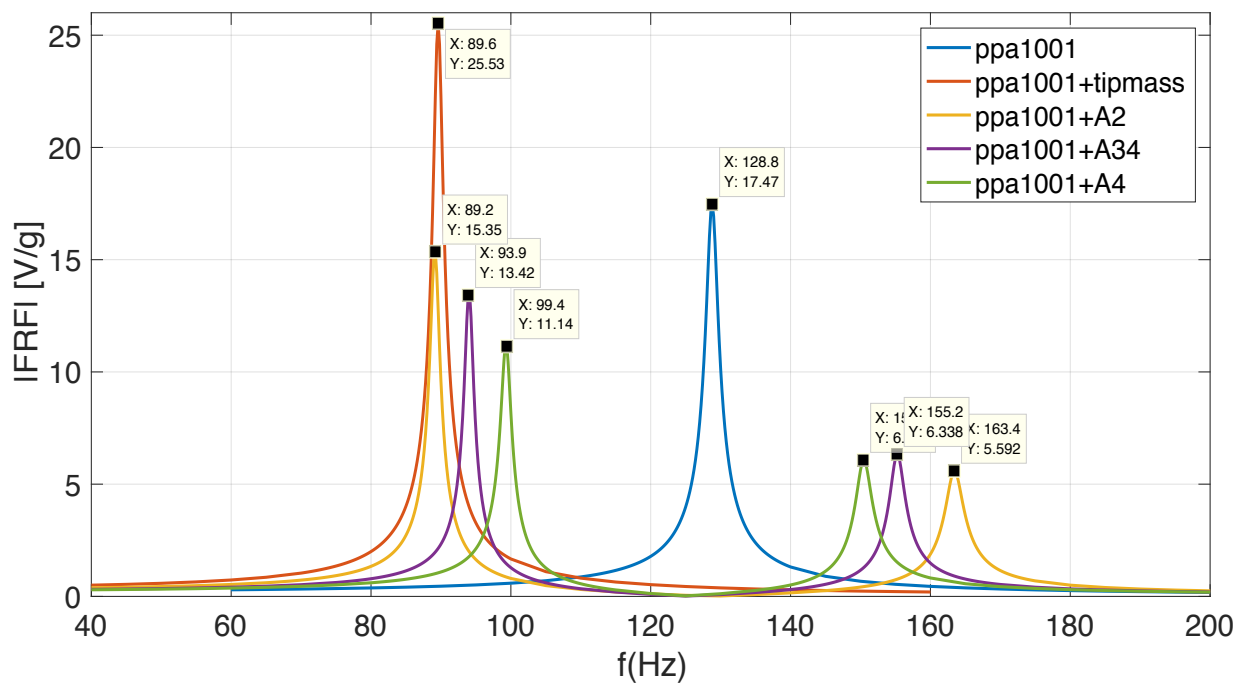


Figura 6.9: frf ottenute dalle simulazioni FEM per la piastra ppa1001

Riepilogo:

sistema	f1 [Hz]		ft [Hz]	f2 [Hz]	allargamento [Hz]	errore rispetto alla misura [%]
ppa1001	Matlab	126,4	-	-	-	-
	misure	126				
	FEM	128,8				
ppa1001+tipmass	Matlab	92,8	-	-	-	-
	misure	85,3				
	FEM	89,6				
ppa1001+A2	Matlab	99,3	132	158,3	59	26,9
	misure	84,3	126	165	80,7	0
	FEM	89,2	130	163,4	74,2	8,3
ppa1001+A34	Matlab	104,3	129	150,4	46,1	25
	misure	88,9	120	150,4	61,5	0
	FEM	93,9	125	155,2	61,3	0,3
ppa1001+A4	Matlab	108,7	127	144,2	35,5	30,7
	misure	93,9	117	145,1	51,2	0
	FEM	99,4	125	150,4	51	0,2

Tabella 6.3: riepilogo di tutti i risultati per la piastra PPA1001

In ognuna delle tabelle di riepilogo, l'errore sull'allargamento dei picchi è stato calcolato in questo modo;

$$errore = \left(1 - \frac{allargamento_{FEM-Matlab}}{allargamento_{misura}}\right) \times 100$$

Conclusioni

L'obiettivo di questa tesi è di migliorare il tuning di harvesters piezoelettrici attraverso l'accoppiamento con opportuni assorbitori dinamici, sfruttando i dati ottenuti da una notevole campagna sperimentale. Questa sperimentazione viene poi utilizzata per validare un modello agli elementi finiti, il quale serve soprattutto a visualizzare le forme dei modi di vibrare associati alle risonanze delle FRF, le quali non sono visualizzabili in altra maniera (vi sono alcuni metodi sperimentali che permettono di effettuare queste valutazioni, ma si avvalgono di vibrometri laser, degli strumenti abbastanza onerosi). Gli assorbitori sono progettati con un modello analitico abbastanza semplice che permette di ricavare i dati iniziali di progetto in modo che soddisfino l'accordatura alla piastra alla quale viene applicato; dopodiché si sviluppa un modello analitico completo che unisca il comportamento vibratorio della piastra con quello dell'assorbitore, a un gdl, il cui obiettivo è avere un primo inquadramento nei valori delle frequenze e degli allargamenti ottenibili con i diversi assorbitori, ma anche nei moduli dei picchi corrispondenti alle uscite elettriche generate dalle piastre.

I parametri di confronto per la validazione delle misure sono quelli legati alla natura meccanica ed elettrica dei test, ovvero l'analisi dei modi di vibrazione, le frequenze di risonanza, gli smorzamenti, i picchi delle FRF elettromeccaniche, gli rms delle tensioni nel tempo e le tensioni picco-picco.

Questo modo di operare può comunque trovare applicazione nella progettazione di dispositivi che sfruttino le lamine ed i materiali piezoelettrici, anche in contesti diversi da quelli esaminati in questo lavoro, ad esempio nell'ottimizzazione del loro comportamento sotto certe condizioni di funzionamento, come è stato fatto in alcuni articoli di ricerca presenti nella bibliografia alla fine di questo lavoro, i quali hanno aiutato molto nell'impostazione del lavoro complessivo realizzato.

Si è inizialmente effettuata una breve introduzione molto generale dell'argomento; successivamente nel capitolo 2 sono state esposte le motivazioni che hanno condotto al voler affrontare tale lavoro e la teoria alla base della piezoelettricità lineare, per capire il comportamento dei materiali piezoelettrici utilizzati nelle lamine testate. Alla fine di questo capitolo si sono inoltre riportati i casi di interesse scientifico più notevoli che sono stati sviluppati negli ultimi anni, relativamente a quanto è stato già fatto nell'analisi dell'allargamento di banda per gli harvesters.

Nel capitolo 3 si sono presentati i modelli analitici a parametri distribuiti in grado di descrivere al meglio il comportamento elettromeccanico delle piastre testate; sono poi stati descritti gli assorbitori dinamici utilizzati, la loro progettazione ed i risultati di previsione conseguenti alla loro applicazione

nel modello analitico precedentemente descritto, sia al caso delle lamine bimorfe che a quella unimorfa.

Dopodiché nel capitolo 4 si è descritto il lavoro eseguito in laboratorio in merito alla raccolta dei risultati ottenuti dalle misure sperimentali, da confrontare con la previsione ottenuta analiticamente e per la validazione con i modelli FEM descritti nel capitolo 5. Viene brevemente presentato l'approccio utilizzato per l'esecuzione delle misure (analisi modale sperimentale con eccitazione impulsiva), il dettaglio del settaggio delle singole misure, gli effetti di disturbo tenuti in considerazione (effetto di carico delle lamine bimorfe) e l'insieme dei risultati delle misure ottenute in tutte le prove eseguite con le tre lamine.

Nel capitolo 5 vengono presentati in dettaglio i modelli agli elementi finiti costruiti con il software Comsol Multiphysics, riportando geometria, proprietà dei materiali e condizioni al contorno utilizzate per le varie piastre, oltre che alla mesh creata per la discretizzazione delle stesse, per poter affrontare gli studi (autofrequenze e analisi armonica) per la valutazione dei parametri vibratorii e della risposta elettromeccanica ottenuta dalle simulazioni.

Si riportano i risultati delle simulazioni effettuate, mettendo prima quelli relativi allo studio delle autofrequenze ovvero frequenze caratteristiche e forme dei relativi modi vibratorii, e successivamente le FRF relative alla risposta piezoelettrica della piastra simulata.

Sia nel capitolo 4 che nel capitolo 5, viene riportato alla fine dei risultati di ogni piastra, un grafico contenente tutte le FRF relative alle diverse misure effettuate con quella piastra, per mostrare che l'ottenimento dei risultati sia coerente relativamente a quanto si è imposto di perseguire in questo lavoro.

Nel capitolo 6 infine viene presentato un riepilogo sui risultati ottenuti con le tre piastre in termini dei parametri utilizzati nei modelli (analitico e FEM) e nelle misure ed in termini di FRF ottenute, al fine di verificare la positività della validazione dei modelli. Si evidenziano le differenze nei valori dei parametri e negli allargamenti ottenuti nell'utilizzo dei tre assorbitori con i tre metodi (misure, Fem e modello analitico), osservando che tra misure e FEM vi è un buon accordo sia in termini di frequenze principali ottenute, sia in termini di allargamento tra i picchi; infatti l'errore rispetto alla misura è sempre inferiore al 10% e ciò indica che i modelli simulati descrivono in maniera sufficientemente accurata le piastre reali testate.

Per quanto riguarda il modello analitico, descrive molto bene i casi delle prove relative alle piastre testate senza assorbitori (cioè piastra da sola e assieme alle tipmass) mentre nei casi con i tre assorbitori sovrastima di 20-30 Hz la prima risonanza e di 5-10 Hz la seconda; tali sovrastime comportano un errore sull'allargamento teorico dei picchi rispetto alla misura anche superiore al 20%

(legato anche al fatto di aver utilizzato un modello a 1 gdl, che comunque inquadra bene la collocazione delle frequenze principali relative ai primi due modi vibratorii della piastra).

Il modello analitico può essere migliorato affinandolo con modelli fisici più complessi che qui non sono stati presentati, poiché lo scopo del modello analitico non era l'individuazione esatta delle risonanze, ma solo fornire un metodo semplice di valutazione delle stesse, cercando di mostrare l'allargamento ottenibile con assorbitori con massa crescente.

Per quanto riguarda le misure invece, oltre agli effetti di carico presenti nelle lamine bimorfe, vi sono altri fattori che le rendono affette da errori di misura e da una mancanza di una stretta ripetibilità delle stesse, come:

- Incastro delle piastre nel sistema di attacco posto sulla barra di alluminio soggetto alla variabilità intrinseca delle operazioni svolte da operatori umani
- Influenza dei cavi elettrici attaccati alla lamina e dell'inerzia dell'accelerometro durante le misure
- Effetto viscoso della cera che non vincola perfettamente l'assorbitore sulla lamina, né le tipmass

Sono effetti che non sono tenuti in considerazione nei modelli FEM perché già nelle prove sperimentali è difficile controllarli; a questi si possono attribuire la maggior parte delle differenze che vi sono tra misure e modelli FEM.

Al fine di ottenere delle misure più ripetibili e precise si osserva la necessità di:

- Misurare in modo più accurato le distanze geometriche caratteristiche delle piastre e degli assorbitori
- Usare un altro materiale per vincolare le tipmass e gli assorbitori, o cambiare modalità di attacco di quest'ultimi, o infine costruirli in maniera differente
- Usare sensori di forza nel bloccaggio delle piastre in modo da garantire lo stesso livello di serraggio

Nonostante alcuni limiti di natura sperimentale-numerico, questo lavoro ha consentito di capire come l'aggiunta di assorbitori dinamici alle piastre piezoelettriche spostati a frequenze inferiori il picco del primo modo di vibrare del sistema e permetta di sfruttare i primi due modi vibratorii per il recupero di energia dalle vibrazioni meccaniche; questa tesi ha inoltre permesso di validare le piastre testate e di capire come operare nelle operazioni di tuning meccanico delle stesse.

Ringraziamenti

Dedico questo elaborato alla mia famiglia per il supporto e l'affetto dimostrato durante questi mesi di lavoro

Appendici

A1: Riduzione delle equazioni costitutive piezoelettriche lineari

Generalmente i materiali piezoceramici (PZT 5A e PZT 5H) sono ortotropi e trasversalmente isotropo, ed il piano di isotropia è spesso definito dal piano xy o 12. La direzione 3 (asse z) si è vista essere l'asse di polarizzazione del materiale piezoelettrico.

Le variabili fisiche che entrano in gioco nelle relazioni costitutive sono le componenti dello stress meccanico T_{ij} , delle deformazioni S_{ij} , del campo elettrico E_k e dello spostamento elettrico D_k ; considerando una rappresentazione tensoriale nella d-form (deformazione-carica), le relazioni che legano tali variabili si esprimono così:

$$S_{ij} = s_{ijkl}^E T_{kl} + d_{kij} E_k \quad (\text{A.1})$$

$$D_i = d_{ikl} T_{kl} + \varepsilon_{ik}^T E_k \quad (\text{A.2})$$

che in forma matriciale diviene;

$$\begin{bmatrix} S \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^E & d^t \\ d & \varepsilon^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ E \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

nella quale gli apici E e T indicano che la matrice di cedevolezza s e la matrice della permittività dielettrica ε sono valutate a campo elettrico E costante e a stress meccanico T costante rispettivamente.

La forma espansa di questa relazione, facendo uso della notazione di Voigt per i tensori degli sforzi T e delle deformazioni S , si rappresenta così;

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{12}^E & s_{11}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

ed appare chiara la simmetria trasversalmente isotropa del materiale in quanto ad esempio $s_{11}^E = s_{22}^E$, $d_{31} = d_{32}$, etc.

Se il comportamento elettromeccanico dei materiali piezoelettrici (lamine) viene modellato come una trave sottile basata sul modello di Eulero-Bernoulli, tutti gli stress meccanici escluso il momento flettente T_1 sono trascurabili, in modo che;

$$T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = 0 \quad (\text{A.5})$$

e se si applica una coppia di elettrodi sulle facce opposte della lamina piezoceramica, ortogonalmente alla direzione 3, che è parallela allo spessore delle lamine, la relazione matriciale precedente si semplifica come segue;

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & d_{31} \\ d_{31} & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Essa può essere scritta anche così;

$$\begin{bmatrix} s_{11}^E & 0 \\ -d_{31} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -d_{31} \\ 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Invece l'equazione costitutiva piezoelettrica per una trave sottile, sotto il modello di Eulero-Bernoulli, tenendo come variabili indipendenti la deformazione S e il campo elettrico E si scrive come;

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & -e_{31} \\ e_{31} & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

e confrontando le ultime due relazioni si ricavano le correlazioni tra le costanti elastiche e piezoelettriche del materiale;

$$C = \begin{bmatrix} c_{11}^E & -e_{31} \\ e_{31} & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & 0 \\ -d_{31} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -d_{31} \\ 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

ovvero [24],

$$c_{11}^E = \frac{1}{s_{11}^E} \quad e_{31} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \quad \varepsilon_{33}^S = \varepsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E} \quad (\text{A.10})$$

A2: Script Matlab modello analitico V22B

```

clc
clear all
close all

% v22b, v22b+tipmass, v22b+mass4, v22b+A2, v22b+A34 e v22b+A4

f_max=500;
f=[50:f_max/5000:f_max];
m=0.0148; % densità lineare harvester v22b
L=0.0355; % harvester length
abo=1; % accelerazione della base
om_n=266*2*pi; % natural frequency
zeta_n=[0.012 0.0195 0.014 0.0165 0.012 0.010]; % damping
b_n=1.875/L;
s_n=0.7341;

La_p=[10^-10 10^-10 10^-10 9.71 11.81 14.63]*10^-3; % lunghezze assorbitori
r=0.15*10^-3; % raggio filo assorbitori
E=210*10^9; % modulo elastico filo
I=pi*(r^4)/4; % momento d'inerzia flessionale filo
ka_p=3*E*I./(La_p.^3); % rigidezza elastica filo
zeta_a=[1 1 1 0.0299 0.026 0.024]; % rapporto di smorzamento assorbitori
xa=L; % posizione tipmass e assorbitori
h=0.001;
ma_p=[10^-10 2.05*10^-1 2.8*10^-2 9.49*10^-2 5.275*10^-2 2.779*10^-2]*10^-3;
ccra_p=2*(ka_p.*ma_p).^0.5; % c critico assorbitori
ca_p=ccra_p.*zeta_a; % c assorbitori

x=sym('x');
phi=(cosh(b_n*x)-cos(b_n*x)-s_n*(sinh(b_n*x)-sin(b_n*x)))/sqrt(m*L);
phiint=double(int(phi,0,L));
phia=double(subs(phi,xa));
phiah=double(subs(phi,xa-h));
dphi=diff(phi,x);
dphir=double(subs(dphi,L));

% Electromechanical model

d31 = -190e-12; % strain constant [m/V] Comsol (Mide 190)
sE11 = 16.4e-12; % elastic compliance [m^2/N] PZT-5A Comsol e Mide
e31 = d31/sE11; % piezoelectric constant [C/m^2]
e33 = 1651*8.854e-12; % permittivity [F/m] Comsol e Mide
b = 3.81e-3; % Piezo width [m]
h_w = 0.81e-3; % wafer thickness [m]
h_pb = 0.18e-3; % piezo-layer thickness [m] (Mide)
Lpzt=0.0254; % piezo-layer length [m]
h_sb=0.00009; % thickness of the substrate that separate the 2 pzt layers
Cpb=e33*b*Lpzt/h_pb; % capacitance of each piezo layer
theta_bs=e31*b/2/h_pb*((h_sb^2)/4-(h_pb+h_sb/2)^2);
chi=theta_bs*dphir;
phir_b=-(h_pb+h_sb)*b*e31/2*dphir;
om_eq=sqrt(om_n^2+2*chi*phir_b/Cpb);
f_eq=om_eq/(2*pi)

%% calcolo e plot di eta
for i_p=1:size(La_p,2)
    La=La_p(i_p);
    ma=ma_p(i_p);

```

```

    ka=ka_p(i_p);
    ca=ca_p(i_p);
    zeta=zeta_n(i_p);
for j=1:size(f,2)

Num=abo*(ma*(phiah*La*(-ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)-phia*La*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)-phia*h*(-
ma*((2*pi*f(j))^2)+2*pi*ca*i*f(j)+ka))+...
    ma^2*(-phia*La*(2*pi*f(j))^2+phiah*La*(2*pi*f(j))^2-phia*h*(2*pi*f(j))^2)-
phiint*m*h*(-ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka));

Den=4*om_eq*pi*zeta*i*f(j)*h*(-ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)+om_eq^2*h*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)-phia^2*ma^2*h*(2*pi*f(j))^4-...
    phia^2*La*ma^2*(2*pi*f(j))^4+phia*phiah*La*ma^2*(2*pi*f(j))^4-
phia^2*La*ma*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)*((2*pi*f(j))^2)+phia*phiah*La*ma*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)*((2*pi*f(j))^2)-phia^2*ma*h*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)*((2*pi*f(j))^2)-h*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)*((2*pi*f(j))^2);

eta(i_p,j)=(Num./Den)/abo;

end

figure(1)
hold on
plot(f,sqrt(real(eta(i_p,:)).^2+imag(eta(i_p,:)).^2),'color',[i_p/size(La_p,2)
0.5 0])
grid on
xlabel('f (Hz)')
ylabel('Modulus')
title('\eta_0')

figure(2)
hold on
plot(f,atan(real(eta(i_p,:))./imag(eta(i_p,:)))*180/pi,'color',[i_p/size(La_p,2)
0.5 0])
grid on
xlabel('f (Hz)')
ylabel('Phase')
title('\eta_0')
end

% calculus and plot of v, R very large

v=2*phir_b*eta*9.81/Cpb;

for i_p=1:size(La_p,2)

figure(3)
hold on
plot(f,sqrt(real(v(i_p,:)).^2+imag(v(i_p,:)).^2),'color',[i_p/size(La_p,2) 0.5
0])
grid on
xlabel('f (Hz)')
ylabel('Modulus (V/g)')
title('v')
legend('v22b','v22b+tipmass','v22b+mass4','v22b+A2','v22b+A34','v22b+A4')
end
save Tip v

```


A3: Script Matlab modello analitico V22BL

```

clc
clear all
close all

f_max=220;
f=[20:f_max/3000:f_max];
m=0.01249; % densità lineare harvester
L=0.0635; % harvester length
abo=1; % accelerazione della base
om_n=116*2*pi; % natural frequency
zeta_n=[0.013 0.0195]; % damping
b_n=1.875/L;
s_n=0.7341;

La_p=[10^-10 16.62]*10^-3; % lunghezze assorbitori
r=0.15*10^-3; % raggio filo assorbitori
E=210*10^9; % modulo elastico filo assorbitori
I=pi*(r^4)/4; % momento d'inerzia flessionale filo
ka_p=3*E*I./(La_p.^3); % rigidezza filo
zeta_a=[1 0.036]; % rapporto di smorzamento assorbitori
xa=L; % posizione tipmass e assorbitori
h=0.001;
ma_p=[10^-25 9.6*10^-5]; % masse equivalenti assorbitori
ccra_p=2*(ka_p.*ma_p).^0.5; % c critico assorbitori
ca_p=ccra_p.*zeta_a; % c assorbitori

x=sym('x');
phi=(cosh(b_n*x)-cos(b_n*x)-s_n*(sinh(b_n*x)-sin(b_n*x)))/sqrt(m*L);
phiint=double(int(phi,0,L));
phia=double(subs(phi,xa));
phiah=double(subs(phi,xa-h));
dphi=diff(phi,x);
dphir=double(subs(dphi,L));

% Electromechanical model

d31 = -190e-12; % strain constant [m/V] Comsol (Mide 190)
sE11 = 16.4e-12; % elastic compliance [m^2/N] PZT-5A Comsol e Mide
e31 = d31/sE11; % piezoelectric constant [C/m^2]
e33 = 1651*8.854e-12; % permittivity [F/m] Comsol e Mide
b = 3.81e-3; % Piezo width [m]
h_w = 0.81e-3; % wafer thickness [m]
h_pb = 0.18e-3; % piezo-layer thickness [m] (Mide)
Lpzt=0.0254; % piezo-layer lenght [m]
h_sb=0.00009; % thickness of the substract that separate the 2 pzt layers
Cpb=e33*b*Lpzt/h_pb; % capacitance of each piezo layer
theta_bs=e31*b/2/h_pb*((h_sb^2)/4-(h_pb+h_sb/2)^2);
chi=theta_bs*dphir;
phir_b=-(h_pb+h_sb)*b*e31/2*dphir;
om_eq=sqrt(om_n^2+2*chi*phir_b/Cpb);
f_eq=om_eq/(2*pi)

%% calcolo e plot di eta
for i_p=1:size(La_p,2)
    La=La_p(i_p);
    ma=ma_p(i_p);
    ka=ka_p(i_p);
    ca=ca_p(i_p);
    zeta=zeta_n(i_p);

```

```

for j=1:size(f,2)

Num=abo*(ma*(phiah*La*(-ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)-phia*La*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)-phia*h*(-
ma*((2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka))+...
ma^2*(-phia*La*(2*pi*f(j))^2+phiah*La*(2*pi*f(j))^2-phia*h*(2*pi*f(j))^2)-
phiint*m*h*(-ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka));

Den=4*om_eq*pi*zeta*i*f(j)*h*(-ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)+om_eq^2*h*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)-phia^2*ma^2*h*(2*pi*f(j))^4-...
phia^2*La*ma^2*(2*pi*f(j))^4+phia*phiah*La*ma^2*(2*pi*f(j))^4-
phia^2*La*ma*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)*((2*pi*f(j))^2)+phia*phiah*La*ma*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)*((2*pi*f(j))^2)-phia^2*ma*h*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)*((2*pi*f(j))^2)-h*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)*((2*pi*f(j))^2);

eta(i_p,j)=(Num./Den)/abo;

end

figure(1)
hold on
plot(f,sqrt(real(eta(i_p,:)).^2+imag(eta(i_p,:)).^2),'color',[i_p/size(La_p,2)
0.5 0])
grid on
xlabel('f (Hz)')
ylabel('Modulus')
title('\eta_0')

figure(2)
hold on
plot(f,atan(real(eta(i_p,:))./imag(eta(i_p,:)))*180/pi,'color',[i_p/size(La_p,2)
0.5 0])
grid on
xlabel('f (Hz)')
ylabel('Phase')
title('\eta_0')

end

% calculus and plot of v, R very large

v=2*phir_b*eta*9.81/Cpb;

for i_p=1:size(La_p,2)

figure(3)
hold on
plot(f,sqrt(real(v(i_p,:)).^2+imag(v(i_p,:)).^2),'color',[i_p/size(La_p,2) 0.5
0])
grid on
xlabel('f (Hz)')
ylabel('Modulus (V/g)')
title('v')
legend('v22b1','v22b1+A2')
end
save Tip v

```

A4: Script Matlab modello analitico PPA1001

```
clc
clear all
close all

% ppa1001, ppa1001+tipmass, ppa1001+A2, ppa1001+A34 e ppa1001+A4

f_max=200;
f=[60:f_max/3000:f_max];
m=0.06079; % densità lineare harvester
L=0.0425; % harvester length
abo=1; % accelerazione della base
om_n=125*2*pi; % natural frequency
zeta_n=[0.0065 0.011 0.007 0.007 0.007]; % damping
b_n=1.875/L;
s_n=0.7341;

La_p=[10^-10 10^-10 16.17 19.59 24.04]*10^-3; % lunghezze assorbitori
r=0.15*10^-3; % raggio filo assorbitori
E=210*10^9; % modulo elastico filo assorbitori
I=pi*(r^4)/4; % momento d'inerzia flessionale filo
ka_p=3*E*I./(La_p.^3); % rigidezza filo
zeta_a=[1 1 0.0096 0.0094 0.0085]; % rapporto di smorzamento assorbitori
xa=L; % posizione tipmass e assorbitori
h=0.001;
ma_p=[10^-10 5.5*10^-1 0.09593 0.05397 0.02927]*10^-3;% masse equiv. assorbitori
ccra_p=2*(ka_p.*ma_p).^0.5; % c critico assorbitori
ca_p=ccra_p.*zeta_a; % c assorbitori

x=sym('x');
phi=(cosh(b_n*x)-cos(b_n*x)-s_n*(sinh(b_n*x)-sin(b_n*x)))/sqrt(m*L);
phiint=double(int(phi,0,L));
phia=double(subs(phi,xa));
phiah=double(subs(phi,xa-h));
dphi=diff(phi,x);
dphir=double(subs(dphi,L));

% Electromechanical model

d31 = -3.2e-10; % strain constant [m/V] Comsol (Mide 190)
sE11 = 1.65e-11; % elastic compliance [m^2/N] PZT-5A Comsol e Mide
e31 = d31/sE11; % piezoelectric constant [C/m^2]
e33 = 3800*8.854e-12; % permittivity [F/m] Comsol e Mide
b = 20.8e-3; % Piezo width [m]
h_w = 0.46e-3; % wafer thickness [m]
h_pb = 0.15e-3; % piezo-layer thickness [m] (Mide)
Lpzt=0.046; % piezo-layer lenght [m]
Cpb=e33*b*Lpzt/h_pb; % capacitance of the piezo layer
theta_bs=-e31*b/2/h_pb*((h_pb^2));
chi=theta_bs*dphir;
phir_b=-(h_pb/2)*b*e31*dphir;
om_eq=sqrt(om_n^2+2*chi*phir_b/Cpb);
f_eq=om_eq/(2*pi)

%% calcolo e plot di eta
for i_p=1:size(La_p,2)
    La=La_p(i_p);
    ma=ma_p(i_p);
    ka=ka_p(i_p);
    ca=ca_p(i_p);
```

```

zeta=zeta_n(i_p);

for j=1:size(f,2)

Num=abo*(ma*(phiah*La*(-ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)-phia*La*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)-phia*h*(-
ma*((2*pi*f(j))^2)+2*pi*ca*i*f(j)+ka))+...
ma^2*(-phia*La*(2*pi*f(j))^2+phiah*La*(2*pi*f(j))^2-phia*h*(2*pi*f(j))^2)-
phiint*m*h*(-ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka));

Den=4*om_eq*pi*zeta*i*f(j)*h*(-ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)+om_eq^2*h*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)-phia^2*ma^2*h*(2*pi*f(j))^4-...
phia^2*La*ma^2*(2*pi*f(j))^4+phia*phiah*La*ma^2*(2*pi*f(j))^4-
phia^2*La*ma*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)*((2*pi*f(j))^2)+phia*phiah*La*ma*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)*((2*pi*f(j))^2)-phia^2*ma*h*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)*((2*pi*f(j))^2)-h*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)*((2*pi*f(j))^2);

eta(i_p,j)=(Num./Den)/abo;

end

figure(1)
hold on
plot(f,sqrt(real(eta(i_p,:)).^2+imag(eta(i_p,:)).^2),'color',[i_p/size(La_p,2)
0.5 0])
grid on
xlabel('f (Hz)')
ylabel('Modulus')
title('\eta_0')

figure(2)
hold on
plot(f,atan(real(eta(i_p,:))./imag(eta(i_p,:)))*180/pi,'color',[i_p/size(La_p,2)
0.5 0])
grid on
xlabel('f (Hz)')
ylabel('Phase')
title('\eta_0')

end

% calculus and plot of v, R very large

v=2*phir_b*eta*9.81/Cpb;

for i_p=1:size(La_p,2)

figure(3)
hold on
plot(f,sqrt(real(v(i_p,:)).^2+imag(v(i_p,:)).^2),'color',[i_p/size(La_p,2) 0.5
0])
grid on
xlabel('f (Hz)')
ylabel('Modulus (V/g)')
title('v')
legend('ppa1001','ppa1001+tipmass','ppa1001+A2','ppa1001+A34','ppa1001+A4')
end
save Tip v

```

Bibliografia

- [1] Energy Harvesting Systems: Principles, Modeling and Applications, Tom J. Kazmierski and Steve Beeby, Springer, 2011
- [2] Energy Harvesting Technologies, Shashank Priya e Daniel J. Inman, New York: Springer, 2009
- [3] www.pcbpiezotronics.it/
- [4] MODELLAZIONE E SPERIMENTAZIONE DI ELEMENTI STRUTTURALI COMPOSITI PIEZO ELETTRICI, Tesi di laurea magistrale, A. Morbio, A. Pepe, Politecnico di Milano, Milano, 2013
- [5] www.ni.com/datasheet/pdf/en/ds-316
- [6] www.mide.com/
- [7] MIDE Engineering Smart Technology Products, Product datasheet available at: www.mide.com/pdfs/Volture_Datasheet_001.pdf/
- [8] MIDE Engineering Smart Technology Products, Material datasheet available at: www.mide.com/pdfs/volture_specs_piezo_properties.pdf/
- [9] Mechanical Vibrations, Singiresu S. Rao, University of Miami, 5th edition, 2011
- [10] Introduction to Vibration Energy Harvesting, Francesco Cottone, ESIEE Paris – University of Paris Est, 2011
- [11] An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations, A. Erturk and D. J. Inman, IOP publishing, smart materials and structures, 2009
- [12] Enhancing Power Harvesting using a Tuned Auxiliary Structure, P. J. Cornwell, J. Goethal, J. Kowko and M. Damianakis, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2005
- [13] Energy harvester with a Dynamic Magnifier, O. Aldraihem and A. Baz, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2011
- [14] Energy Harvesting Dynamic Vibration Absorber under Random Vibration, S. Dipak, M. Rajarathinam and S. F. Ali, IEEE Multi-conference on Systems and Control, Hyderabad, India, 2013

- [15] Modelling and experimental verification of more efficient power harvesting by coupled piezoelectric cantilevers, L G H Staaf, P Lundgren and P Enoksson, *Journal of Physics*, 2014
- [16] Connected vibrating piezoelectric bimorph beams as a wide-band piezoelectric power harvester, Zengato Yang and Jiashi Yang, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2009
- [17] An efficient vibration energy harvester with a multi-mode dynamic magnifier, W. Zhou, G. R. Penamalli and L. Zuo, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2012
- [18] A multi-degree of freedom piezoelectric vibration energy harvester with piezoelectric elements inserted between two nearby oscillators, Han Xiao, Xu Wang, Sabu John, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, 2015
- [19] Tunable vibration absorber design to suppress vibrations: an application in boring manufacturing process, H. Moradi, F. Bakhtiari-Nejad, M. R. Movahhedy, *Journal of sound and vibration*, Elsevier, 2008
- [20] Energy harvesting dynamic vibration absorbers, S. F. Ali, S. Adhikari, *Journal of applied mechanics*, ASME, 2013
- [21] Enhanced vibration energy harvesting using dual-mass systems, Xiudong Tang, Lei Zuo, *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, 2011
- [22] A wideband vibration-based energy harvester, M. S. Soliman, E. M. Abdel-Rahman, E. F. El-Saadany and R. R. Mansour, *Journal of micromechanics and micro-engineering*, IOP, 2008
- [23] Piezo Systems Inc. *Introduction to piezoelectricity*, available on <http://www.piezo.com>
- [24] *Piezoelectric Energy Harvesting*, A. Erturk, D. J. Inman, Wiley, 2011