UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Condizione di quantizzazione di Dirac per oggetti carichi estesi

Relatore

Prof. Kurt Lechner

Laureando

Enrico Marchetto

Anno Accademico 2017/2018

Indice

Introduzione

Un noto problema della Fisica teorica è riuscire a dare una spiegazione al fatto che la carica elettrica si presenti in natura sempre multipla intera di un'unità fondamentale, attualmente posta equivalente a $\frac{e}{3}$ [1]. L'elevatissima precisione degli esperimenti con cui viene verificata l'uguaglianza delle cariche del protone e dell'elettrone e la neutralità del neutrone nella materia (si veda [2]) impone la necessità di ottenere una spiegazione di tale fenomeno a partire dagli assiomi dell'elettrodinamica: poiché questa non impone alcun vincolo sul valore delle cariche elettriche, occorre cercare la soluzione in una sua estensione.

Un'altra importante questione consiste nell'asimmetria delle equazioni del moto dei campi elettromagnetici e delle particelle cariche rispetto alla *dualità elettromagnetica*, ovvero la trasformazione che, in uno spaziotempo 4-dimensionale, scambia i ruoli del campo elettrico e del campo magnetico nel modo seguente: $\vec{E} \to \vec{B}, \vec{B} \to -\vec{E}$. È noto che le equazioni di Maxwell rispettino la dualità elettromagnetica nel vuoto, ma perdono tale proprietà nel momento in cui, nel sistema studiato, viene introdotta una carica elettrica. Se si desidera che la teoria sia invariante sotto la trasformazione di dualità elettromagnetica anche in presenza di sorgenti è ancora una volta necessario estenderla ed, eventualmente, considerare simmetrie di dualità differenti. Una possibile soluzione a questa questione è data dall'introduzione della *carica magnetica*, posseduta sia da particelle puntiformi, i *monopoli magnetici*, sia da oggetti fondamentali più estesi, previsti da alcune teorie come, ad esempio, quelle di stringa. L'esistenza di questi oggetti e dei monopoli magnetici in particolare è *inevitabile* nell'ambito delle GUT (Grand Unification Theories), in quanto discende direttamente dagli assiomi delle teorie. Insieme alla loro carica, le GUT sono in grado di prevedere anche la massa dei monopoli magnetici, troppo elevata tuttavia per essere alla portata degli attuali rivelatori di particelle.

Lo scopo di questo lavoro consiste nello studio dei metodi atti a derivare la *condizione di quantizzazione di Dirac*, un vincolo imposto sui valori delle cariche elettriche e magnetiche di oggetti fondamentali sia puntiformi, sia estesi. L'analisi prevede l'introduzione della carica magnetica all'interno della cornice dell'elettrodinamica: si mostra che, a partire da tale ipotesi, mentre la dinamica classica rimane consistente, la dinamica quantistica di sistemi composti da oggetti elettricamente e magneticamente carichi è coerente soltanto nel caso in cui le cariche che tali oggetti possiedono siano sottoposte a una condizione di quantizzazione, ovvero che siano multiple intere di un'unità fondamentale. L'esistenza della carica magnetica in questa tesi non sarà dedotta (come nelle GUT), bensì imposta a priori.

Nel 1931 P. A. M. Dirac fornisce una possibile soluzione a entrambi i problemi sopra citati. In [6] egli introduce la possibilità che esistano *monopoli magnetici*, ovvero particelle puntiformi dotate di una carica magnetica, dando luogo a un campo magnetico $\vec{B}$ dalla divergenza non nulla. Dirac studia un sistema composto da una carica elettrica di carica e che si muove nel campo magnetico coulombiano di un monopolo magnetico di carica g, posto nell'origine. Il problema principale dovuto alla presenza del monopolo magnetico consiste nell'impossibilità di definire un potenziale vettore globale $\vec{A}$ tale per cui $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$: in elettrodinamica classica tale possibilità è infatti assicurata dall'equazione $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, sostituita nel sistema considerato da $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = g\delta^3(\vec{x})$. La soluzione adottata da Dirac consiste nel descrivere la dinamica della carica elettrica in tutto lo spazio meno che su una curva fittizia della quale un estremo è posto sul monopolo e l'altro all'infinito: tale curva assume il nome di *stringa di Dirac*. Sfruttando tale espediente è possibile definire un potenziale vettore non singolare ovunque, tranne che sui punti appartenenti alla stringa di Dirac. Data la non fisicità di tale oggetto geometrico, Dirac,

[1] Si tratta del valore in modulo della carica dei quarks *down*, *strange* e *bottom* e corrisponde a un terzo della carica dell'elettrone: tuttavia non è possibile osservare quarks isolati per via del fenomeno del confinamento, dunque è possibile considerare come unità fondamentale di carica anche la carica dell'elettrone.

studiando la dinamica quantistica del sistema, ne impone la non osservabilità, che si ottiene soltanto se vale la seguente condizione di quantizzazione sui valori delle cariche coinvolte:

$$eg = 2\pi\hbar cn,\ n \in \mathbb{Z}.$$

I problemi sopra elencati hanno così ottenuto una possibile soluzione: è sufficiente l'esistenza anche di un solo monopolo magnetico di carica g_0 affinchè tutte le cariche elettriche presenti in natura risultino necessariamente quantizzate:

$$e = n\left(\frac{2\pi\hbar c}{g_0}\right),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre le equazioni dell'elettrodinamica di un sistema composto da una carica elettrica e e da un monopolo magnetico g risultano simmetriche sotto l'azione della dualità elettromagnetica se, alle trasformazioni dei campi, vengono abbinate le trasformazioni delle cariche $e \to g, g \to -e$.

La condizione di quantizzazione della carica può essere ricavata con diversi metodi: in questa tesi ne vengono studiati tre per un sistema non relativistico di particelle puntiformi elettricamente e magneticamente cariche (metodo di Dirac-Wu-Yang, metodo di Feynman, quantizzazione del momento angolare del campo elettromagnetico) e uno per un sistema di cariche magnetiche ed elettriche relativistico, ovvero il metodo di Feynman per i sistemi relativistici; il metodo di Feynman relativistico e il metodo della quantizzazione del momento angolare vengono estesi al caso generale di oggetti carichi estesi in spaziotempi di dimensione qualsiasi. L'approccio legato al metodo di Feynman relativistico consiste nello studio di un sistema di N oggetti dionici (dotati sia di carica elettrica che di carica magnetica), puntiformi o estesi, su cui viene applicato un cambiamento delle brane di Dirac (ovvero, superfici i cui bordi coincidono con le brane che costituiscono il sistema) preventivamente scelte; l'azione classica I di tali sistemi non è invariante sotto tale trasformazione, tuttavia nello studio della dinamica quantistica non compare I, bensì il suo esponenziale complesso $e^{\frac{i}{\hbar}I}$: la trasformazione causa la comparsa di una fase $e^{\frac{i}{\hbar}\Delta I}$. Imponendo che il cambio delle brane di Dirac sia una simmetria fisica del sistema (condizione imposta dalla natura fittizia di tali oggetti, dai quali non deve dipendere la dinamica) è necessario che $e^{\frac{i}{\hbar}\Delta I} = 1$, ovvero (reintrodotta la costante c) $\Delta I = 2\pi\hbar cn$, $n \in \mathbb{Z}$: da quest'ultima espressione hanno origine le condizioni di quantizzazione di Dirac, che rendono consistenti a livello quantistico le teorie in questione. L'approccio legato alla quantizzazione del momento angolare invece sfrutta il seguente argomento semiclassico: dato un sistema composto da due oggetti carichi, si calcola esplicitamente una componente non nulla del momento angolare del campo elettromagnetico e la si pone uguale a $\frac{n\hbar}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, il generico autovalore appartenente allo spettro di una componente del momento angolare.

Per analizzare la quantizzazione delle cariche di oggetti di dimensione maggiore o uguale a 1, denominati p-brane (a seconda della loro dimensione p), è necessario estendere l'elettrodinamica delle cariche elettriche e magnetiche a spaziotempi di dimensione D arbitraria e ipotizzare che le cariche siano assunte da oggetti fondamentali estesi, quali curve, superfici, volumi etc. Nella tesi si mostra che la coerenza classica delle equazioni cardinali dell'elettrodinamica impone vincoli sulle dimensioni degli oggetti interagenti: brane elettricamente cariche di dimensione p possono interagire solo con brane magneticamente cariche di dimensione $(D-p-4)$. La differenza *fondamentale* dal caso puntiforme risiede in quest'ultima condizione: mentre in dimensione $D = 4$ è possibile soltanto l'interazione fra particella puntiforme e particella puntiforme e, per quella che appare come una *coincidenza*, queste ultime possono anche assumere carattere dionico, in dimensione più elevata, dove l'interazione avviene fra una p-brana elettrica e una $(D-p-4)$-brana magnetica, l'attibuzione del carattere dionico a una p-brana è possibile soltanto se la dimensione dello spaziotempo è $D = 2(p+2)$. Imposti tali vincoli, è possibile ottenere condizioni di quantizzazione diverse le cui simmetrie di dualità riflettono quelle dell'azione da cui discendono, similmente al caso delle particelle. Nella tesi viene infatti posta enfasi sugli spaziotempi di dimensione pari, nei quali è possibile studiare l'interazione fra brane dioniche di dimensione p e, nel caso in cui p fosse un intero dispari, è possibile identificare la carica magnetica con la carica elettrica, come nel caso delle stringhe in 6 dimensioni. Infine, particolare attenzione verrà dedicata all'analisi delle simmetrie di dualità delle condizioni di quantizzazione ottenute, che saranno confrontate con quelle dell'azione[2] e delle equazioni del moto.

Organizzazione del materiale. Il lavoro è organizzato come segue.

Nel **primo capitolo** vengono introdotti due strumenti matematici fondamentali per la trattazione svolta: il formalismo della forme differenziali e la dualità di Poincaré.

Nel **secondo capitolo** viene discussa l'elettrodinamica classica delle cariche elettriche in D dimensioni e l'elettrodinamica dei dioni puntiformi in 4 dimensioni; vengono discussi due sistemi di dioni, uno comprensivo di due dioni in approssimazione di dipolo e uno comprensivo di N dioni relativistici, ricavando per ognuno di essi un'azione.

Nel **terzo capitolo** vengono ricavate le condizioni di quantizzazione delle cariche per i sistemi considerati nel secondo capitolo. Per lo studio del sistema in approssimazione di dipolo vengono adottati tre diversi approcci: il metodo di Dirac-Wu-Yang, il metodo di Feynman, la quantizzazione del momento angolare del campo elettromagnetico; per lo studio del sistema relativistico viene adottato il metodo di Feynman adattato al caso relativistico: la distinzione con il metodo di Feynman precedentemente utilizzato risiede nel fatto che il primo studia un sistema descritto dalla meccanica quantistica, il secondo un sistema descritto dalla teoria dei campi quantistici; vengono studiate le proprietà di dualità delle condizioni di quantizzazione ottenute e vengono evidenziate le differenze fra di esse.

Nel **quarto capitolo** viene discussa l'elettrodinamica di oggetti estesi in spaziotempi di dimensione arbitraria e vengono fatti emergere i vincoli dimensionali che rendono coerenti le equazioni cardinali; vengono discussi i problemi che si riscontrano nel tentativo di generalizzare il metodo di Dirac-Wu-Yang; vengono ricavate con il metodo di Feynman le condizioni di quantizzazione delle cariche per sistemi di p brane elettriche e $(D-p-4)$-brane duali magnetiche relativistiche e per sistemi di p-brane dioniche relativistiche in spaziotempi di dimensione pari modulo 0 ($D = 4K$, $K \in \mathbb{Z}$) o modulo 2 ($D = 4K+2$, $K \in \mathbb{Z}$), delle quali vengono discusse proprietà e differenze reciproche; vengono ricavate col metodo della quantizzazione del momento angolare del campo elettromagnetico le condizioni di quantizzazione non relativistiche della carica per i sistemi di p-brane di tipo dionico[3] e si congettura l'applicabilità di tale metodo anche per sistemi di p-brane non di tipo dionico.

[2]Le simmetrie di dualità dell'azione non sono in generale *manifeste*: al fine di ovviare a questo problema si ricorre al metodo PST (sviluppato da P. Pasti, D. Sorokin, M. Tonin nell'articolo [20]), tuttavia in questa tesi non se ne farà uso se non attraverso la citazione dei risultati con esso ottenuti.

[3]Qui e nel seguito della tesi la locuzione "di tipo dionico", riferito a due p-brane, indica il fatto che tali brane possiedono o una carica magnetica o una carica elettrica, ma non entrambe, e hanno la stessa dimensione p.

Capitolo 1

Forme differenziali e dualità di Poincaré

In questo capitolo vengono presentati i principali strumenti matematici utilizzati in questa tesi: il formalismo delle forme differenziali e la dualità di Poincaré. Le forme differenziali sono utili per esprimere in maniera compatta le leggi dell'elettrodinamica e per estendere facilmente la trattazione svolta per le particelle puntiformi alle p-brane. La dualità di Poincaré è efficace nel descrivere le *stringhe di Dirac* e le *brane di Dirac*, le quali sono rispettivamente curve o superfici che rivestiranno un ruolo centrale nel seguito della tesi.

Ci poniamo in uno spaziotempo piatto di dimensione D e utilizziamo gli indici $\mu = (0, i)$, dove $i = 1, ..., D-1$. Adottiamo la metrica $\eta^{\mu\nu}$ di segnatura $(+-...-)$. Le leggi della fisica si postulano essere invarianti rispetto al gruppo di Lorentz $O(D) \equiv \left\{\Lambda \in M_{D\times D}(\mathbb{R}) | \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\right\}$.

1.1 Forme differenziali

Diamo una definizione operativa di p-forma differenziale. In uno spaziotempo D-dimensionale, che indichiamo con $\mathbb{R}^D$, su cui sono poste le coordinate $x^\mu = \left(x^0, ..., x^{D-1}\right)$, definiamo un tensore completamente antisimmetrico $\omega_{\mu_1...\mu_p}$ di rango p; definito il simbolo di *wedge product* $\wedge$ (si veda [1], sezione 1.4 per una definizione rigorosa di tale simbolo), è possibile definire nella seguente maniera la *p-forma differenziale* ω_p:

$$\omega_p = \frac{1}{p!} dx^{\mu_p} \wedge ... \wedge dx^{\mu_1} \omega_{\mu_1...\mu_p}. \tag{1.1}$$

Il fattore $\frac{1}{p!}$ rappresenta una normalizzazione della forma, prevista dalla convenzione utilizzata. Per la proprietà di completa antisimmetria il massimo grado di una forma è D e il numero di componenti indipendenti è $\binom{D}{p}$.

Elenchiamo le principali operazioni con le forme differenziali; gli indici racchiusi fra parentesi quadre sono *completamente antisimmetrici*:

- il *prodotto esterno* di una p-forma ω_p e una q-forma η_q:

$$\omega_p \wedge \eta_q = \frac{1}{p!}\frac{1}{q!} dx^{\mu_p} \wedge ... \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\nu_q} \wedge ... \wedge dx^{\nu_1} \omega_{[\mu_1...\mu_p} \eta_{\nu_1...\nu_q]}; \tag{1.2}$$

- il *differenziale esterno* di una p-forma ω_p, che restituisce una $(p+1)$-forma $d\omega_p$:

$$d\omega_p = \frac{1}{p!} dx^{\mu_p} \wedge ... \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^\alpha \partial_{[\alpha} \omega_{\mu_1...\mu_p]}. \tag{1.3}$$

Date una p-forma ω_p e una q-forma η_q, valgono le seguenti identità:

$$d(\omega_p \wedge \eta_q) = \omega_p \wedge d\eta_q + (-)^q d\omega_p \wedge \eta_q, \tag{1.4}$$

$$d^2\omega_p = 0; \tag{1.5}$$

- il *duale di Hodge* di una p-forma ω_p, che restituisce una $(D-p)$-forma $*\omega_p$:

$$*\omega_p = \frac{1}{(D-p)!} dx^{\mu_{D-p}} \wedge ... \wedge dx^{\mu_1} \tilde{\omega}_{\mu_1 ... \mu_{D-p}}, \tag{1.6}$$

dove

$$\tilde{\omega}_{\mu_1 ... \mu_{D-p}} = \frac{1}{p!} \epsilon_{\mu_1 ... \mu_{D-p} \nu_1 ... \nu_p} \omega^{\nu_1 ... \nu_p}. \tag{1.7}$$

Inoltre, vale la seguente identità:

$$*^2 \omega_p = (-)^{(D+1)(p+1)} \omega_p. \tag{1.8}$$

Definiamo le principali proprietà geometriche delle forme differenziali. Una forma differenziale ω_p è *chiusa* se

$$d\omega_p = 0. \tag{1.9}$$

Una forma differenziale ω_p è *esatta* se esiste una forma η_{p-1} tale che

$$\omega_p = d\eta_{p-1}. \tag{1.10}$$

Una forma esatta è sempre chiusa; in generale il contrario non è vero se consideriamo forme differenziali a valori in $C^\infty(\mathbb{R}^D)$, ovvero forme corrispondenti a campi tensoriali definiti in $C^\infty(\mathbb{R}^D)$: tuttavia vale il seguente risultato

Lemma di Poincaré: *Data una p-forma differenziale ω_p a valori nello spazio delle funzioni di classe $C^\infty(\mathbb{R}^D)$, se ω_p è chiusa e lo spazio Ω in cui ω_p è definita è contraibile, allora ω_p è esatta in Ω.*

Se le forme invece sono a valori nello spazio delle distribuzioni, ovvero corrispondono a campi tensoriali definiti nello spazio delle distribuzioni, vale la forma forte del lemma di Poincaré:

Lemma forte di Poincaré: *Data una p-forma differenziale ω_p a valori nello spazio delle distribuzioni, essa è chiusa se e solo se è esatta.*

Date una p-forma differenziale ω_p e una superficie orientata p-dimensionale Σ_p, entrambe definite in $\mathbb{R}^D$, definiamo l'*integrale di ω_p su Σ_p*, rappresentato dal simbolo

$$\int_{\Sigma_p} \omega_p. \tag{1.11}$$

Consideriamo p parametri $\lambda \equiv \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ e una parametrizzazione $y^\mu(\lambda)$ di Σ_p. Possiamo allora definire

$$\int_{\Sigma_p} \omega_p \equiv \int d^p\lambda \frac{\partial y^{\mu_1}}{\partial \lambda^1} ... \frac{\partial y^{\mu_p}}{\partial \lambda^p} \omega_{\mu_1 ... \mu_p}(y(\lambda)), \tag{1.12}$$

che, nel caso di una D-forma ω_D integrata su $\mathbb{R}^D$, si riduce a

$$\int_{\mathbb{R}^D} \omega_D = \int \omega_{0...D-1}\, d^D x. \tag{1.13}$$

La definizione (1.12) è indipendente dalla parametrizzazione scelta.

Il risultato fondamentale sull'integrazione delle p-forme differenziali su p-superfici è il teorema di Stokes. Nell'enunciato compare il concetto di *bordo* di una varietà, per una definizione del quale si rimanda all'appendice A.1:

Teorema di Stokes: *Se ω_{p-1} è una $(p-1)$-forma differenziale e Σ_p una superficie orientata p-dimensionale, allora:*

$$\int_{\Sigma_p} d\omega_{p-1} = \int_{\partial\Sigma_p} \omega_{p-1}. \tag{1.14}$$

1.2 Dualità di Poincaré

Dualità di Poincaré: *Data la superficie p-dimensionale* Σ_p*, la* dualità di Poincaré $\mathcal{P} : \Sigma_p \to J_{\Sigma_p}$ *le associa una* $(D-p)$*-forma* J_{Σ_p} *tale che, per ogni p-forma* ω_p*:*

$$\int_{\Sigma_p} \omega_p = \int_{\mathbb{R}^D} \omega_p \wedge J_{\Sigma_p}. \tag{1.15}$$

Denominiamo J_{Σ_p} duale di Poincaré *di* Σ_p*.*

J_{Σ_p} agisce come una delta di Dirac localizzata sulla superficie Σ_p, descritta dalla parametrizzazione $y^\mu(\lambda)$. L'espressione esplicita è la seguente:

$$J_{\Sigma_p} = \frac{1}{(D-p)!} dx^{\alpha_{D-p}} \wedge ... \wedge dx^{\alpha_1} \epsilon_{\alpha_1 ... \alpha_{D-p} \nu_1 ... \nu_p} \int d^p\lambda \, \frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial \lambda^1} ... \frac{\partial y^{\nu_p}}{\partial \lambda^p} \delta^D(x - y(\lambda)). \tag{1.16}$$

Se Σ_p è una varietà bordata, $\partial\Sigma_p$ è una varietà $(p-1)$-dimensionale: è possibile applicare anche su di essa la dualità di Poincaré, che le assocerà una $(D-p+1)$-forma. Si mostra che vale l'importante proprietà che, a meno di un segno $(-)^{D-p+1}$, il duale di Poincaré di $\partial\Sigma_p$ è dJ_{Σ_p}. Infatti, sfruttando (1.4) e (1.14):

$$\int_{\partial\Sigma_p} \omega_{p-1} = \int_{\Sigma_p} d\omega_{p-1} = \int_{\mathbb{R}^D} d\omega_{p-1} \wedge J_{\Sigma_p} \tag{1.17}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^D} \left[d(\omega_{p-1} \wedge J_{\Sigma_p}) + (-)^{D-p+1} \omega_{p-1} \wedge dJ_{\Sigma_p} \right] \tag{1.18}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^D} (-)^{D-p+1} \omega_{p-1} \wedge dJ_{\Sigma_p}. \tag{1.19}$$

Dunque

$$\mathcal{P} : \partial\Sigma_p \to (-)^{D-p+1} dJ_{\Sigma_p}. \tag{1.20}$$

Un'applicazione interessante della dualità di Poincaré è la seguente: date due superfici Σ_p e Σ_{D-p} di dimensioni, rispettivamente, p e $(D-p)$ e parametrizzate rispettivamente da $y_1^\mu(\lambda)$ e $y_2^\mu(\rho)$, il numero algebrico[1] di intersezioni N fra le due è dato dall'integrale del prodotto esterno dei loro duali di Poincaré:

$$\int_{\Sigma_{D-p}} J_{\Sigma_p} = \int_{\mathbb{R}^D} J_{\Sigma_p} \wedge J_{\Sigma_{D-p}} = N \in \mathbb{Z}. \tag{1.21}$$

Le forme J_{Σ_p} e $J_{\Sigma_{D-p}}$ sono dette *forme intere*, in quanto il loro integrale rispettivamente su una qualsiasi $(D-p)$-superficie e su una qualsiasi p-superficie restituisce un numero intero.

[1] Un'intersezione può fornire un contributo al conteggio complessivo $+1$ oppure -1 a seconda della convenzione posta. Prendiamo l'esempio di una una curva parametrizzata in 3 dimensioni che interseca una 2-sfera: una convenzione usuale è quella di considerare il contributo dell'intersezione positivo se la curva esce dalla superficie sferica, negativo se entra in essa.

Capitolo 2

Dinamica classica di cariche e monopoli puntiformi

Il primo passo da compiere nello studio dell'introduzione di oggetti magnetici (puntiformi o estesi) all'interno della cornice dell'elettromagnetismo classico consiste nel generalizzare le equazioni del moto dei campi generati da cariche puntiformi (equazione di Maxwell, identità di Bianchi) e delle particelle cariche (equazione di Lorentz) da 4 a D dimensioni.

2.1 Elettrodinamica di sole cariche elettriche in D dimensioni

Sfruttando il formalismo delle forme differenziali possiamo introdurre i seguenti oggetti, dove con $y^\mu(\lambda)$ viene indicata la parametrizzazione della linea d'universo di una carica puntiforme in funzione del parametro λ:

- la 2-forma $F \equiv \frac{1}{2} dx^\nu \wedge dx^\mu F_{\mu\nu}$, dove $F_{\mu\nu}$ rappresenta il tensore elettromagnetico;
- la $(D-1)$-forma J, ovvero la *corrente* unitaria, la cui forma esplicita è

$$J = \frac{1}{(D-1)!} dx^{\mu_{D-1}} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_1} \epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_{D-1} \nu} \int d\lambda \frac{dy^\nu}{d\lambda} \delta^D(x - y(\lambda)). \tag{2.1}$$

  Ricordando (1.16), è immediatamente possibile riconoscere J come il duale di Poincaré della linea di universo $y(\lambda)$. Per descrivere un sistema di n particelle cariche è sufficiente sommare le rispettive n $(D-1)$-forme J_n, moltiplicate per le rispettive cariche. Si noti inoltre che $J = *j$, dove $j = dx^\sigma j_\sigma = dx^\sigma \int d\lambda \frac{dy_\sigma}{d\lambda} \delta^D(x - y(\lambda))$.

Le equazioni cardinali dell'elettrodinamica classica in presenza di r cariche elettriche (ciascuna dotata della carica e_r) sono le seguenti ($u_{r,\nu}$ rappresenta la quadrivelocità della particella r-sima, p_r^μ il quadrimomento, s_r il tempo proprio e J_r la corrente unitaria della particella r-sima):

$$dF = 0, \tag{2.2}$$

$$d * F = (-)^D \sum_r e_r J_r. \tag{2.3}$$

La prima, detta *identità di Bianchi*, descrive la geometria dei campi e rappresenta la proprietà di F di essere una forma chiusa (si veda la sezione 1.1 per la definizione di tale proprietà); la seconda, detta *equazione di Maxwell*, descrive la dinamica dei campi.

Applicando il *lemma forte di Poincaré* e considerando l'equazione (2.2) si può affermare che F è chiusa ed esatta, dunque esiste una 1-forma $A \equiv dx^\mu A_\mu$ tale che

$$F = dA. \tag{2.4}$$

A è la forma che descrive il potenziale elettromagnetico del sistema. Per le proprietà delle forme differenziali, tale forma è definita a meno di una forma esatta $d\Lambda$:

$$A \to A + d\Lambda, \tag{2.5}$$

dove Λ è un campo scalare (0-forma): questa trasformazione viene definita *di gauge* e costituisce una *simmetria* della teoria, l'*invarianza di gauge*. Consideriamo infatti l'azione del campo elettromagnetico in elettrodinamica classica, dove $j_e^\sigma = \sum_r e_r j_r^\sigma$:

$$I[y_r(\lambda_r), A_\sigma] = \int d^D x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_\sigma j_e^\sigma \right). \tag{2.6}$$

Tale azione, nel formalismo delle forme differenziali, equivale, a meno di un segno globale, alla seguente, dove $J_e = \sum_r e_r J_r$:

$$I[y_r(\lambda_r), A] = \int_{\mathbb{R}^D} \left(\frac{1}{2} dA \wedge * dA + A \wedge J_e \right). \tag{2.7}$$

Mostriamo che l'azione (2.7) è gauge-invariante: applicando una trasformazione di gauge si ottiene

$$I' = \int_{\mathbb{R}^D} \left(\frac{1}{2} d(A + d\Lambda) \wedge * d(A + d\Lambda) + (A + d\Lambda) \wedge J_e \right) = I + \int_{\mathbb{R}^D} d\Lambda \wedge J_e. \tag{2.8}$$

Applicando le proprietà del prodotto esterno e la legge di conservazione della carica[1] $dJ = 0$ si ottiene che

$$\int d\Lambda \wedge J_e = (-)^{D+1} \left(\int d(\Lambda \wedge J_e) - \int \Lambda \wedge dJ_e \right) = 0, \tag{2.9}$$

duque $I = I'$ e l'invarianza è dimostrata. A partire dall'azione (2.7), variandola rispetto alla linea di universo $y^\mu(\lambda)$ di una singola particella, se ne ottiene l'equazione del moto, detta *equazione di Lorentz*:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = e F^{\mu\nu} u_\nu. \tag{2.10}$$

2.2 Elettrodinamica di dioni in $D = 4$

Nel seguito parleremo di *carica* in riferimento a una particella dotata solo di carica elettrica, mentre parleremo di *monopolo* in riferimento a una particella dotata solo di carica magnetica. Definiamo *dione puntiforme* una particella puntiforme dotata sia di carica magnetica, sia di carica elettrica. In questa sezione generalizziamo le equazioni fondamentali dell'elettrodinamica introducendo i dioni puntiformi, operazione che si rivelerà essere consistente solo per $D = 4$.

Le equazioni dell'elettrodinamica in D dimensioni in presenza di r cariche elettriche e_r e di s cariche magnetiche g_s sono

$$dF = (-)^{D+1} \sum_s g_s J_s, \tag{2.11}$$

$$d * F = (-)^D \sum_r e_r J_r. \tag{2.12}$$

Notiamo che le equazioni (2.11) e (2.12) consistono in uguaglianze di forme di grado identico se e solo se la generica corrente J è, sia per le cariche elettriche che per le cariche magnetiche, una 3-forma e la dimensione dello spaziotempo è $D = 4$. La teoria dei dioni puntiformi si sviluppa quindi interamente in $D = 4$. Nel caso di un sistema di N dioni puntiformi di cariche e_r e g_s in $\mathbb{R}^4$, esse si riducono a

$$dF = -\sum_s g_s J_s, \tag{2.13}$$

$$d * F = \sum_r e_r J_r. \tag{2.14}$$

Per concludere, occorre scrivere l'equazione di Lorentz in presenza di cariche magnetiche. Consideriamo un dione di cariche e, g: deriviamo l'equazione di Lorentz come vincolo da soddisfare per ottenere la conservazione del tensore energia-impulso totale.

[1] Tale legge è valida in quanto la linea di universo di una particella carica è priva di bordo: la derivazione si ottiene dunque considerando che J è il duale di Poincaré della linea di universo e applicando (1.20).

Il tensore energia-impulso è la somma di due contributi: uno dovuto al campo, uno dovuto alla particella:

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{\text{em}} + T^{\mu\nu}_{\text{p}}. \tag{2.15}$$

La conservazione del tensore energia-impulso prevede che

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu}_{\text{em}} + \partial_\mu T^{\mu\nu}_{\text{p}} = 0. \tag{2.16}$$

Le espressioni esplicite dei contributi al tensore energia-impulso totale sono mostrate di seguito:

- il contributo dovuto alla particella, di massa m, è

$$T^{\mu\nu}_{\text{p}} = m \int u^\mu u^\nu \delta^4(x-y) ds; \tag{2.17}$$

- il contributo dovuto ai campi è

$$T^{\mu\nu}_{\text{em}} = F^{\mu\sigma} F_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \tag{2.18}$$

Dunque, definito $\tilde{F}^{\nu\alpha} = \frac{1}{2}\epsilon^{\nu\alpha\mu\beta} F_{\mu\beta}$, componendo i due contributi dopo averne calcolato i gradienti e usando le equazioni (2.13) e (2.14) otteniamo

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \int \left(\frac{dp^\nu}{ds} - (eF^{\nu\alpha} + g\tilde{F}^{\nu\alpha}) u_\alpha \right) \delta^4(x-y) ds = 0. \tag{2.19}$$

Come anticipato emerge, in qualità di vincolo, l'equazione di Lorentz per un dione puntiforme di cariche e, g:

$$\frac{dp^\nu}{ds} = (eF^{\nu\alpha} + g\tilde{F}^{\nu\alpha}) u_\alpha. \tag{2.20}$$

La conservazione del tensore simmetrico $T^{\mu\nu}$ implica la conservazione del tensore a tre indici $M^{\mu\alpha\beta} \equiv x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha}$, da cui discende la seguente carica conservata:

$$L^{\alpha\beta} \equiv \int M^{0\alpha\beta} d^3x. \tag{2.21}$$

Dalla conservazione di $L^{\alpha\beta}$ deriva la conservazione del tensore L^{ij}, il momento angolare del sistema, che risulta pertanto costante anche in seguito all'introduzione della carica magnetica:

$$L^{ij} \equiv \int M^{0ij} d^{D-1}x = \int (x^i T^{0j} - x^j T^{0i}) d^{D-1}x. \tag{2.22}$$

Dualità elettromagnetica In $D = 4$ è noto che le equazioni del moto (2.2) e (2.3) del campo elettromagnetico nel vuoto siano invarianti sotto la seguente trasformazione, denominata *dualità elettromagnetica*:

$$\vec{E} \to \vec{B}, \qquad \vec{B} \to -\vec{E}. \tag{2.23}$$

Nel formalismo delle forme differenziali tale invarianza può essere descritta in termini della dualità di Hodge alle forme F e $*F$:

$$F \to *F, \tag{2.24}$$

dalla quale consegue anche $*F \to -F$, dove il segno deriva da (1.8) considerando $p = 2$ e $D = 4$, da cui

$$*^2 = -1, \tag{2.25}$$

Traducendo (2.24) nel formalismo tensoriale si ottiene

$$F_{\mu\nu} \to \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \tag{2.26}$$

In elettrodinamica classica, in presenza di sorgenti elettriche le equazioni (2.2) e (2.3) non sono più invarianti sotto la trasformazione di dualità elettromagnetica, tuttavia l'introduzione della carica magnetica ripristina l'invarianza. Consideriamo l'esempio di un campo generato da N dioni puntiformi, descritto dalle equazioni del moto (2.13) e (2.14), a ognuno dei quali è associata una carica elettrica e_r e una carica magnetica g_r. Applicando le trasformazioni delle cariche

$$e_r \to g_r, \qquad g_r \to -e_r \tag{2.27}$$

e la trasformazione del campo elettromagnetico (2.24) alle equazioni (2.13) e (2.14), queste risultano essere invarianti. La trasformazione di dualità elettromagnetica appena descritta è in grado di generare un gruppo di dualità discreto, denominato $\mathbb{Z}_4$: per costruirlo è sufficiente considerare il doppietto $(e,\ g)$ e applicare su di esso la matrice

$$\begin{pmatrix} e' \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

il cui risultato è (2.27), e iterare tale applicazione. Il risultato di tale operazione è il gruppo $\mathbb{Z}_4 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

Notiamo che in realtà la dualità elettromagnetica $\mathbb{Z}_4$ può essere estesa alla simmetria sotto l'azione del gruppo continuo $SO(2)$: infatti, definito il doppietto $(F,\ *F)$, l'azione di tale gruppo è descritta da

$$\begin{pmatrix} F' \\ *F' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ *F \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} e' \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

Notiamo che tale trasformazione rispetta il vincolo $*^2 F = -F$, ricavato dall'identità (1.8) in $D = 4$ per particelle puntiformi: infatti

$$*^2 F' = -\sin\theta * F + \cos\theta *^2 F = -F'. \tag{2.30}$$

È immediato verificare che le equazioni (2.13) e (2.14) sono invarianti rispetto alla trasformazione eseguita sui doppietti $(F,\ *F)$ e $(e,\ g)$. In quest'ottica, il gruppo di dualità $\mathbb{Z}_4$ è un sottogruppo del gruppo di dualità $SO(2)$.

Abbiamo descritto le simmetrie di dualità delle equazioni del moto: tuttavia, non è ovvio come tali simmetrie possano estendersi alle simmetrie di dualità delle azioni che descrivono la dinamica dei sistemi. Al fine di promuovere tali simmetrie di dualità a simmetrie dell'azione è necessario sfruttare il metodo PST (si veda l'articolo [20]). Il risultato, nel caso di un sistema di dioni puntiformi, è che la stessa invarianza sotto l'azione di $SO(2)$ delle equazioni del moto è posseduta anche dall'azione del sistema: tale risultato si dimostra essere estendibile al caso di sistemi di p-brane dioniche, con p pari (si veda il capitolo 4); nel caso invece di sistemi di p-brane dioniche, con p dispari, la simmetria di dualità continua (in questo caso descritta dal gruppo $SO(1,1)$) delle equazioni del moto non è una simmetria della dinamica (si vedano [10] e [3]).

2.3 Il problema dell'azione

Proponendo (2.11) e (2.12) come equazioni del moto per i campi non è più possibile introdurre il potenziale elettromagnetico A sfruttando il lemma forte di Poincaré, come invece era possibile fare disponendo dell'identità di Bianchi (2.2). L'introduzione di A è di fondamentale importanza poichè consente di scrivere un'azione per il sistema considerato. Nel seguito, prendendo in cosiderazione due sistemi diversi di particelle puntiformi, vengono analizzate due possibili soluzioni al problema presentato.

2.3.1 Azione in approssimazione di dipolo per un sistema di due dioni

Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ un sistema composto da due dioni di masse m_1, m_2 e di cariche e_1,g_1 (rispettivamente carica elettrica e carica magnetica del primo dione) ed e_2,g_2 (rispettivamente carica elettrica e carica magnetica del secondo dione). I due dioni interagiscono con il campo generato dai dioni stessi:

siamo interessati a scrivere un'equazione del moto in approssimazione di dipolo, ovvero mantenendo solo termini al primo ordine in $\frac{v}{c}$, e a ricondurla a un'azione per il sistema.

Per poter scrivere le equazioni del moto dei due dioni è necessario scrivere i campi elettrico e magnetico. Sfruttando le espansioni al primo ordine in $\frac{v}{c}$ dei campi di Liénard-Wiechert e considerando le trasformazioni di dualità elettromagnetica (2.23) e (2.27), le espressioni dei campi generati dal dione di cariche e_1,g_1 sono le seguenti, dove $\vec{R}_1 \equiv \vec{x} - \vec{y}_1(t)$, dove $\vec{y}_1(t)$ è la traiettoria del dione e $\vec{v}_1(t)$ la sua velocità:

$$\vec{E}_1 = \frac{e_1}{4\pi}\frac{\vec{R}_1}{R_1^3} \xrightarrow{\text{dualità e.m.}} \frac{e_1}{4\pi}\frac{\vec{R}_1}{R_1^3} - \frac{g_1}{4\pi}\frac{\vec{v}_1}{c} \times \frac{\vec{R}_1}{R_1^3}, \tag{2.31}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{g_1}{4\pi}\frac{\vec{v}_1}{c} \times \frac{\vec{R}_1}{R_1^3} \xrightarrow{\text{dualità e.m.}} \frac{g_1}{4\pi}\frac{\vec{R}_1}{R_1^3} + \frac{e_1}{4\pi}\frac{\vec{v}_1}{c} \times \frac{\vec{R}_1}{R_1^3}. \tag{2.32}$$

Le espressioni dei campi generati dal dione di cariche e_2,g_2 sono del tutto analoghe.

L'espressione dell'equazione del moto (2.20) per il primo dione nell'approssimazione considerata è la seguente, ottenuta applicando i campi generati dal secondo dione (modulo termini di ordine $\left(\frac{v}{c}\right)^2$) nei punti della traiettoria del primo (si veda [8]):

$$m_1\vec{a}_1 = e_1\left(\vec{E}_2(\vec{y}_1) + \frac{\vec{v}_1}{c} \times \vec{B}_2(\vec{y}_1)\right) + g_1\left(\vec{B}_2(\vec{y}_1) - \frac{\vec{v}_1}{c} \times \vec{E}_2(\vec{y}_1)\right). \tag{2.33}$$

L'equazione del moto del secondo dione è del tutto analoga. Componendo (2.31), (2.32) e (2.33), definendo la coordinata relativa $\vec{r} \equiv \vec{y}_2 - \vec{y}_1$ e la velocità relativa $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$ e infine definendo le costanti $\mathcal{E} \equiv e_1e_2 + g_1g_2$ e $\mathcal{G} \equiv e_2g_1 - e_1g_2$ si ottengono le equazioni

$$m_1\vec{a}_1 = -\frac{\mathcal{E}}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\mathcal{G}}{4\pi}\frac{\vec{v}}{c} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \equiv \vec{F}_{12}, \qquad m_2\vec{a}_2 = \frac{\mathcal{E}}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{\mathcal{G}}{4\pi}\frac{\vec{v}}{c} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \equiv \vec{F}_{21}. \tag{2.34}$$

Risulta subito evidente che, in approssimazione di dipolo, il sistema rispetta il principio di azione e reazione ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$). Introducendo la massa relativa $m \equiv \left(m_1^{-1} + m_2^{-1}\right)^{-1}$ e calcolando l'accelerazione relativa $\vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$ sfruttando (2.34) si ottiene l'equazione del moto del *dione relativo*, una particella fittizia di massa m e cariche $e = 1, g = 0$ che si muove nel campo elettromagnetico generato da un dione statico fittizio, posto nell'origine e di cariche $e = \mathcal{E}, g = \mathcal{G}$:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{\mathcal{G}}{4\pi}\frac{\vec{v}}{c} \times \frac{\vec{r}}{r^3}. \tag{2.35}$$

L'equazione (2.35) descrive la dinamica del sistema; in essa compaiono due campi statici, uno elettrico ($\vec{E} = \frac{\mathcal{E}}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}$) e uno magnetico

$$\vec{B} = \frac{\mathcal{G}}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}; \tag{2.36}$$

formalmente, dunque, essa è un'equazione di Lorentz $m\vec{a} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$, di cui conosciamo l'azione ad essa associata:

$$I[\vec{r}, \vec{v}] = \int dt\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A} - \frac{\mathcal{E}}{4\pi|\vec{r}|}\right), \tag{2.37}$$

supposto che il potenziale elettromagnetico $\vec{A}$ sia ben definito. Tuttavia, l'identità di Bianchi $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ non vale più in presenza di un dione posto nell'origine di carica magnetica $\mathcal{G}$: infatti il campo (2.36) soddisfa

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mathcal{G}\delta^3(\vec{r}). \tag{2.38}$$

Non esiste nessun vettore $\vec{A}$ tale per cui, *globalmente*, valga $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$, dunque l'azione (2.37) non è globalmente valida. Al fine di ovviare a tale problema, iniziamo col considerare l'equazione (2.13), da cui deriva direttamente la riscrittura in termini di forme differenziali di (2.38):

$$dB = \mathcal{G}J, \tag{2.39}$$

dove J rappresenta la corrente unitaria associata all'origine O, il punto in cui è posto il dione di cariche $\mathcal{E}, \mathcal{G}$. Poichè la forma J possiede la proprietà di essere chiusa, per il lemma forte di Poincaré esiste certamente una 2-forma C tale che $J = dC$. La forma C non è univocamente definita e ciò ci permette di scegliere un opportuno rappresentante per essa. Possiamo effettuare tale scelta definendo una stringa che possiede un estremo sul dione statico e un estremo all'infinito: tale curva viene denominata *stringa di Dirac* e possiede la parametrizzazione $\vec{y}(\lambda)$. La stringa di Dirac è un oggetto geometrico, ma non un oggetto fisico: in ogni teoria che ne prevede l'utilizzo occorre imporre l'indipendenza dei risultati ottenuti dalla scelta della stringa di Dirac. Scegliamo allora come rappresentante per la forma C il duale di Poincaré associato alla stringa di Dirac γ: la sua forma esplicita è

$$C = \frac{1}{2} dx^j \wedge dx^i \epsilon_{ijk} \int_\gamma \delta^3(\vec{r} - \vec{y}) dy^k. \tag{2.40}$$

La scelta è formalmente giustificata: infatti, dal momento che J è definita come il duale di Poincarè dell'origine O e che $\partial\gamma = O$, applicando (1.20) è immediato verificare la proprietà $J = dC$. Riprendendo (2.39), in seguito alle considerazioni fatte è possibile scrivere $d(B - \mathcal{G}C) = 0$, pertanto applicando il lemma forte di Poincaré è possibile definire una 1-forma A tale per cui

$$B = dA + \mathcal{G}C. \tag{2.41}$$

Analogamente al caso precedente A è definita modulo una trasformazione di gauge (si veda la trasformazione (2.5)). Un rappresentante per la forma A è fornito dal *potenziale di Dirac*. Esso è definito come un integrale di linea lungo γ, la stringa di Dirac scelta. Ricordando che $\vec{y}(\lambda)$ è la parametrizzazione della stringa γ, con $\lambda \in [0, \infty)$ e $\gamma(0) = O$, l'espressione esplicita del potenziale di Dirac è $A = dx^i A_i$, dove (si veda [8], sezione 19.3.1)

$$A_i(\vec{r}) = \frac{\mathcal{G}}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \int_\gamma \frac{r^j - y^j}{|\vec{r} - \vec{y}|^3} dy^k. \tag{2.42}$$

Un risultato importante mostrato in [8] relativo al potenziale di Dirac è il seguente: scelta una stringa di Dirac γ e un relativo potenziale di Dirac $\vec{A}$, si ha, nella regione $\mathbb{R}^3 \backslash \gamma$, $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$.

Studiamo ora l'effetto di un cambiamento della scelta della stringa di Dirac. Date due stringhe di Dirac γ_1 e γ_2 tali che $\gamma_1 \cap \gamma_2 = O$, ad esse corrispondono i duali di Poincaré C_1 e C_2, perciò alle due stringhe corrisponderanno rispettivamente i potenziali A_1 e A_2. Otteniamo due espressioni equivalenti per il campo magnetico B:

$$B = dA_1 + \mathcal{G}C_1 = dA_2 + \mathcal{G}C_2. \tag{2.43}$$

Da ciò discende che $\mathcal{G}(C_2 - C_1) = d(A_1 - A_2)$, da cui si evince che la forma $\mathcal{G}(C_2 - C_1)$ è esatta: dunque esiste una 1-forma S tale per cui

$$C_2 - C_1 = dS, \tag{2.44}$$

dalla quale, definita una 0-forma Λ, si ottiene la regola completa per la trasformazione del potenziale in seguito a un cambiamento della stringa di Dirac:

$$A_1 \to A_2 = A_1 + d\Lambda - \mathcal{G}S. \tag{2.45}$$

Per trovare un'opportuna forma S procediamo come segue. Le stringhe di Dirac γ_1 e γ_2 possiedono entrambe un estremo all'infinito e un estremo posto in corrispondenza dell'origine, dunque è possibile considerare la curva $\gamma_2 - \gamma_1$ come il bordo di una superficie bidimensionale Σ. Tenendo in considerazione l'equazione (2.44), possiamo dunque scegliere come rappresentante per la forma S il duale di Poincaré della superficie Σ; data una parametrizzazione $\vec{y}(\lambda_1, \lambda_2)$ della superficie Σ, la forma esplicita di S è data da (1.16):

$$S = dx^i \epsilon_{ijk} \int_\Sigma d^2\lambda \frac{\partial y^j}{d\lambda^1} \frac{\partial y^k}{d\lambda^2} \delta^3(\vec{r} - \vec{y}(\lambda_1, \lambda_2)). \tag{2.46}$$

Essendo state scritte le espressioni esplicite della forma S e dei potenziali di Dirac $\vec{A}_1$ e $\vec{A}_2$ (si veda la definizione (2.42)), l'espressione esplicita della forma Λ è fissata ed è

$$\Lambda(\vec{r}) = \epsilon_{ijk}\frac{\mathcal{G}}{4\pi}\int_\Sigma d^2\lambda\,\frac{\partial y^i}{d\lambda^1}\frac{\partial y^j}{d\lambda^2}\frac{r^k - y^k}{|\vec{r}-\vec{y}|^3}, \tag{2.47}$$

singolare nei punti $\vec{r} \in \Sigma$.

Vogliamo ora analizzare la dipendenza dell'azione (2.37) dalla scelta della stringa di Dirac. Consideriamo l'azione I data dall'espressione (2.37) e l'azione I', ottenuta a partire da I in seguito a un cambiamento della stringa di Dirac: chiameremo *anomalia* la differenza $I' - I$. L'anomalia dell'azione (2.37) rispetto a un cambiamento della stringa di Dirac γ è

$$I' - I = \int (\vec{A}' - \vec{A})\cdot\frac{\vec{v}}{c}dt = \frac{1}{c}\int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(T)}(A' - A), \tag{2.48}$$

dove $(A' - A)$ è una 1-forma integrata lungo la traiettoria $\vec{r}(t)$ fra il tempo $t = 0$ e $t = T$. Inserendo la regola di trasformazione (2.45) si ottiene

$$I' - I = \frac{1}{c}\int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(T)}(d\Lambda - \mathcal{G}S). \tag{2.49}$$

Concentriamoci sul primo addendo dell'integrando nell'integrale (2.49). Trattando l'integrale come distribuzionale e sfruttando il teorema fondamentale del calcolo nell'ipotesi che $d\Lambda$ non sia singolare negli estremi di integrazione è possibile scrivere:

$$\int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(T)} d\Lambda = \Lambda(\vec{r}(T)) - \Lambda(\vec{r}(0)), \tag{2.50}$$

mentre per il secondo termine sfruttiamo il fatto che S è una 1-forma *intera* (si veda la sezione 1.2, l'equazione (1.21)) integrata sulla traiettoria $\vec{r}(t)$ (una curva unidimensionale):

$$\int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(T)} \mathcal{G}S = m\mathcal{G},\ m \in \mathbb{Z}, \tag{2.51}$$

dove m corrisponde al numero algebrico di intersezioni fra la superficie Σ e la traiettoria $\vec{r}(t)$. Componendo i risultati ottenuti si ottiene l'anomalia complessiva

$$I' - I = \frac{1}{c}\left(\Lambda(\vec{r}(T)) - \Lambda(\vec{r}(0)) - m\mathcal{G}\right). \tag{2.52}$$

L'anomalia (2.52) possiede una dipendenza residua dalla scelta della stringa di Dirac, contenuta nel numero intero m, il numero algebrico di intersezioni fra la traiettoria $\vec{r}(t)$ e la superficie Σ, il cui bordo è $\partial\Sigma = \gamma_2 - \gamma_1$. Se chiediamo che la dinamica classica descritta dall'azione I (la cui definizione è (2.37)) sia indipendente dalla scelta della stringa di Dirac, allora dobbiamo imporre che $\delta I' = \delta I$, dove si applica il principio variazionale all'azione variando la traiettoria $\vec{r}(t)$: richiedere che tale uguaglianza sia verificata equivale a richiedere che l'azione I' e l'azione I conducano alle stesse equazioni del moto. Dunque si deve avere, considerando l'anomalia (2.52),

$$\delta(\Lambda(\vec{r}(T)) - \Lambda(\vec{r}(0)) - m\mathcal{G}) = 0, \tag{2.53}$$

dove viene variata la traiettoria $\vec{r}(t)$: banalmente $\delta(\Lambda(\vec{r}(T)) - \Lambda(\vec{r}(0))) = 0$, dato che tale contributo dipende solo dagli estremi della traiettoria, mentre $\delta m = 0$ soltanto se le variazioni $\delta\vec{r}(t)$ che vengono eseguite sulla traiettoria sono abbastanza piccole da non modificare il numero algebrico di intersezioni fra essa e la superficie Σ. Affermiamo quindi che le due azioni I e I' sono classicamente equivalenti (ovvero conducono alle stesse equazioni del moto) se vale un principio variazionale *locale*[2].

[2]Infatti, se applicassimo il principio variazionale senza imporre che le variazioni $\delta\vec{r}(t)$ siano piccole, potremmo in principio considerare anche variazioni della traiettoria $\vec{r}(t)$ in grado di far variare il numero algebrico di intersezioni m, ad esempio eseguendo uno o più loop intorno alla curva $\gamma_1 \cup \gamma_2$.

Vogliamo ora calcolare la discontinuità di $\Lambda(\vec{r})$ (la cui espressione esplicità è (2.47)) nei punti $\vec{r} \in \Sigma$. Al di fuori dei punti appartenenti alla superficie Σ la forma S ha valore nullo e non compare nella trasformazione (2.45), che , propedeuticamente alla trattazione che verrà svolta nella sezione 3.1.1, è possibile reinterpretare nel formalismo delle funzioni: i potenziali $\vec{A_1}$ e $\vec{A_2}$, nel formalismo vettoriale, sono legati fra di loro attraverso la seguente espressione, valida $\forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \backslash \Sigma$:

$$\vec{A_1} \to \vec{A_2} = \vec{A_1} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}). \tag{2.54}$$

Adottata questa intepretazione della trasformazione (2.45) nella regione $\mathbb{R}^3 \backslash \Sigma$, mostriamo che la funzione $\Lambda(\vec{r})$ acquista una discontinuità nei punti $\vec{r} \in \Sigma$. Consideriamo un generico punto $\vec{r} \in \Sigma$ e una curva Γ non intersecante Σ e di estremi $\vec{r} \pm \vec{\epsilon}$, nel limite $\vec{\epsilon} \to \vec{0}$. Applicando il teorema del gradiente si ottiene

$$\Delta\Lambda(\vec{r}) = \Lambda(\vec{r} + \vec{\epsilon}) - \Lambda(\vec{r} - \vec{\epsilon}) = \int_\Gamma \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_\Gamma \left(\vec{A_2} - \vec{A_1} \right) \cdot d\vec{r}. \tag{2.55}$$

Per valutare l'integrale (2.55) riscrivendolo come un integrale su superficie è necessario trovare una superficie Π tale per cui $\partial\Pi = \Gamma$: la difficoltà risiede nel fatto che tale superficie non esiste, in quanto la curva Γ compie un giro completo intorno alla curva $\gamma_1 \cup \gamma_2$. La soluzione risiede nel definire due superfici $\Pi_1 \subset \mathbb{R}^3 \backslash \gamma_1$ e $\Pi_2 \subset \mathbb{R}^3 \backslash \gamma_2$, tali che $\partial\Pi_1 = \partial\Pi_2 = \Gamma$. Allora, sfruttando il teorema del rotore:

$$\Delta\Lambda(\vec{r}) = \int_{\Pi_2} \vec{\nabla} \times \vec{A_2} \cdot d\vec{\sigma} - \int_{\Pi_1} \vec{\nabla} \times \vec{A_1} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\Pi_1 \cup \Pi_2} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = \Phi_{\vec{B}}. \tag{2.56}$$

La superficie $\Pi_1 \cup \Pi_2$ è chiusa e racchiude l'origine, perciò il flusso del campo magnetico $\Phi_{\vec{B}}$ vale, per il teorema di Gauss, esattamente $\mathcal{G}$, la carica magnetica contenuta all'interno di $\Pi_1 \cup \Pi_2$ (posseduta dal dione fittizio posto nell'origine). Dunque, nei punti $\vec{r} \in \Sigma$, vale

$$\Delta\Lambda(\vec{r}) = \mathcal{G}. \tag{2.57}$$

2.3.2 Azione relativistica per un sistema di N dioni puntiformi

Consideriamo un sistema di N dioni puntiformi in $\mathbb{R}^4$. Il campo elettromagnetico del sistema è descritto dalle equazioni (2.13) e (2.14). Per l's-simo dione tracciamo una stringa di Dirac γ_s, dotata delle stesse proprietà geometriche descritte nella sezione 2.3.1: il moto della stringa di Dirac nello spaziotempo genera una superficie 2-dimensionale che chiamiamo Σ_s; vale ovviamente $\partial\Sigma_s = y_s$, dove y_s rappresenta la linea d'universo del dione s-simo. Nel seguito ci riferiremo alle superfici Σ_s col nome di 2-*brane di Dirac*. Consideriamo la corrente del dione s-simo J_s: per il lemma forte di Poincaré esiste una 2-forma C_s tale per cui $J_s = dC_s$. La forma C_s non è univocamente definita, dunque possiamo scegliere un rappresentante per essa. Tale rappresentante è il duale di Poincaré della 2-brana di Dirac Σ_s.

Possiamo risolvere (2.13) sfruttando il lemma di Poincaré forte e introducendo la 1-forma A:

$$dF + \sum_s g_s J_s = d(F + \sum_s g_s C_s) = 0 \to F + \sum_s g_s C_s = dA. \tag{2.58}$$

Perciò la soluzione dell'equazione (2.13) è

$$F = dA - \sum_s g_s C_s, \tag{2.59}$$

dove il contributo ai campi dato da $\sum_s g_s C_s$ ha supporto solo sulle superfici Σ_s.

Studiamo ora l'effetto di un cambiamento di una 2-brana di Dirac Σ_s. Consideriamo due 2-brane di Dirac $\Sigma_{1,s}$ e $\Sigma_{2,s}$, relative allo stesso dione s-simo e tali che $\Sigma_{1,s} \cap \Sigma_{2,s} = y_s$. Considerare $\Sigma_{1,s} - \Sigma_{2,s}$ significa considerare un'unica superficie connessa e orientata composta dall'unione di $\Sigma_{1,s}$ e $\Sigma_{2,s}$: queste si intersecano in corrispondenza della linea di universo del dione, dunque costituiscono il bordo $\partial\Lambda_s$ di un 3-volume Λ_s. Per dualità di Poincaré alla 2-brana $\Sigma_{1,s}$ è associata $C_{1,s}$ e alla 2-brana $\Sigma_{2,s}$ è associata $C_{2,s}$, dunque la differenza $C_{2,s} - C_{1,s}$ è associata alla superficie bidimensionale $\Sigma_{2,s} - \Sigma_{1,s}$; definendo la 1-forma k_s, duale di Poincaré del volume Λ_s, applicando (1.20) si ottiene

$$\mathcal{P} : \partial\Lambda_s \to dk_s, \tag{2.60}$$

pertanto, tenendo conto del fatto che sempre per dualità di Poincaré a $\partial\Lambda_s$ è associata la 2-forma $C_{2,s} - C_{1,s}$:

$$C_{2,s} - C_{1,s} = dk_s, \tag{2.61}$$

dunque l'effetto di un cambiamento della 2-stringa di Dirac sulla forma $C_{1,s}$ è $C_{1,s} \to C_{2,s} = C_{1,s} + dk_s$, dove k_s è una forma intera (si veda la sezione 1.2).

La richiesta di non fisicità della stringa di Dirac si esprime nell'invarianza della forma F (definita con la (2.59)) sotto il cambiamento di una o più 2-brane di Dirac: in tal modo il campo elettromagnetico non dipende dalla stringa scelta. La naturale conseguenza di ciò consiste nella sensibilità del potenziale A al cambiamento della scelta delle 2-brane di Dirac:

$$A \to A - \sum_s g_s k_s. \tag{2.62}$$

Abbiamo risolto l'equazione (2.13) e visto come modificare l'espressione del potenziale A in seguito al cambiamento delle 2-brane di Dirac. L'equazione rimanente (2.14) deriva dalla seguente azione, in cui compare il termine J_e, definito prima della definizione (2.7):

$$I[y_s, y_r, A] = \int_{\mathbb{R}^4} \left(\frac{1}{2}(dA - \sum_s g_s C_s) \wedge *(dA - \sum_s g_s C_s) + A \wedge J_e \right). \tag{2.63}$$

Essa è un funzionale delle linee d'universo dei dioni considerati (tale dipendenza è contenuta nella forma J_e e nelle forme C_s) e del potenziale elettromagnetico A. Per compattezza di notazione si reintroduce il simbolo F all'interno dell'azione, che da ora in avanti sarà definito come (2.59)[3]. Tale azione sotto a un cambiamento delle brane di Dirac si trasforma nella maniera seguente:

$$I' = \int_{\mathbb{R}^4} \left(\frac{1}{2} F \wedge *F + A \wedge J_e - \sum_s g_s k_s \wedge J_e \right) = I - \sum_s g_s \int k_s \wedge J_e. \tag{2.64}$$

L'integrale $\sum_s g_s \int k_s \wedge J_e$ si scompone a sua volta nella somma

$$\sum_{r,s=1}^{N} e_r g_s \int k_s \wedge J_r. \tag{2.65}$$

L'integrale $\int k_s \wedge J_r$ corrisponde al numero di intersezioni dotate di segno fra la linea di universo del dione r-simo $y_r(\lambda_r)$ e il volume Λ_s, relativo al dione s-simo (si veda il risultato (1.21)):

$$\int k_s \wedge J_r = M_{sr} \in \mathbb{Z}, \tag{2.66}$$

pertanto l'anomalia dell'azione (2.63) rispetto alla trasformazione (2.62) è

$$I' - I = \sum_{r,s=1}^{N} e_r g_s M_{sr},\ M_{sr} \in \mathbb{Z}. \tag{2.67}$$

Chiamiamo questa anomalia e l'azione (2.63) da cui discende *asimmetriche*.

Il risultato (2.66) contiene una difficoltà tecnica: i termini diagonali, per i quali $r = s$, divergono in quanto prevedono il conteggio delle intersezioni fra la r-sima linea d'universo y_r e il volume Λ_r, i quali hanno un numero infinito di intersezioni. Il calcolo prevede dunque una regolarizzazione ottenuta deformando leggermente le superfici $\Sigma_{1,r}$ e $\Sigma_{2,r}$, in maniera tale che $y_r \not\subseteq \Lambda_r$.

Una variante dovuta a J. S. Schwinger e proposta in [18] consiste nel modificare l'azione (2.63) aggiungendo un termine che non modifichi la dinamica del sistema. La motivazione di questa variante consiste nel voler ottenere una condizione di quantizzazione di Dirac invariante sotto l'azione di $SO(2)$,

[3] Questa precisazione viene fatta con lo scopo di non confondere l'azione (2.63) con l'azione (2.7), valida solo in assenza di cariche magnetiche.

in maniera tale che essa rifletta la simmetria delle equazioni del moto classiche, che come è stato fatto notare attraverso le espressioni (2.29), sono invarianti sotto l'azione non solo di $\mathbb{Z}_4$, ma anche di $SO(2)$. A partire dalla (2.63) definiamo la nuova azione, che denominiamo *simmetrica*:

$$I_S \equiv I - \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{N} e_r g_s \int C_s \wedge C_r. \tag{2.68}$$

Anche in questo caso i termini diagonali della forma $\int C_r \wedge C_r$ possono essere regolarizzati per evitare che divergano. Calcoliamo l'anomalia di I_S in seguito a una trasformazione generale delle 2-brane di Dirac:

$$I'_S = I_S - \sum_{r,s=1}^{N} e_r g_s \int k_s \wedge J_r - \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{N} e_r g_s \int (dk_s \wedge C_r + C_s \wedge dk_r) \tag{2.69}$$

$$= I_S - \sum_{r,s=1}^{N} e_r g_s \int k_s \wedge J_r + \frac{1}{2}(-k_s \wedge J_r + J_s \wedge k_r) \tag{2.70}$$

$$= I_S - \sum_{r,s=1}^{N} \frac{1}{2} e_r g_s \int (k_s \wedge J_r + J_s \wedge k_r) = I_S - \sum_{r,s=1}^{N} \frac{1}{2}(e_r g_s - e_s g_r) \int k_s \wedge J_r. \tag{2.71}$$

Allora:

$$I'_S - I_S = -\sum_{r,s=1}^{N} \frac{1}{2}(e_r g_s - e_s g_r) M_{sr} = \sum_{r,s=1}^{N} \frac{1}{2}(e_r g_s - e_s g_r) L_{sr},\ L_{sr} \in \mathbb{Z}. \tag{2.72}$$

Questa anomalia è denominata *simmetrica* come l'azione da cui discende. La modifica effettuata sull'azione ha eliminato la patologia presente in (2.66), in quanto grazie al coefficiente $(e_r g_s - e_s g_r)$ i termini diagonali sono identicamente nulli.

Discutiamo ora sotto quale condizione le azioni I (definita nella (2.63)) e I' (definita nella (2.64)) sono equivalenti fra di loro da un punto di vista classico. Affinchè sia vero che $\delta I = \delta I'$, dall'anomalia (2.67) si nota che è necessario che $\sum_{r,s=1}^{N} \delta M_{sr} = 0$. Quest'ultima condizione risulta essere vera se consideriamo un principio variazionale locale similmente a quanto fatto nella sezione 2.3.1 per l'azione (2.37): limitandosi a considerare piccole variazioni delle linee di universo δy^μ, i numeri algebrici di intersezioni fra queste e i volumi Λ non cambiano e si ottiene l'equivalenza classica delle azioni I e I'. Si può fare un discorso analogo per le azioni I_S ((2.68)) e I'_S e per le azioni I e I_S, le quali dunque risultano essere coppie di azioni classicamente equivalenti se si considera un principio variazionale locale.

Facciamo infine notare come le azioni I e I_S, pur essendo equivalenti a livello classico nel senso sopra specificato, a livello quantistico diano origine ad anomalie diverse, alle quali corrisponderanno condizioni di quantizzazione ben distinte.

Capitolo 3

Dinamica quantistica e quantizzazione di Dirac

In questo capitolo vengono proposti tre metodi con cui, a partire dalla descrizione quantistica dei sistemi trattati nelle sezioni 2.3.1 e 2.3.2, si ottiene la condizione di quantizzazione di Dirac, un vincolo da porre sui valori che possono assumere le cariche elettriche e le cariche magnetiche affinchè la teoria sia consistente: in particolare, esse devono essere quantizzate. Vengono adottati tre diversi approcci per lo studio del caso studiato nella sezione 2.3.1: metodo di Feynman, metodo di Dirac-Wu-Yang, quantizzazione del momento angolare del campo elettromagnetico; per il caso relativistico studiato nella sezione 2.3.2 viene nuovamente sfruttato il metodo di Feynman, letto non nell'ottica della meccanica quantistica, bensì in quella dell'elettrodinamica quantistica.

3.1 Condizione di quantizzazione non relativistica

3.1.1 Metodo di Dirac-Wu-Yang

Consideriamo il sistema analizzato nella sezione 2.3.1. A partire dall'azione (2.37) è possibile ricavare l'hamiltoniana classica che descrive l'elettrodinamica di una particella con carica elettrica $e = 1$ e massa m immersa nel campo generato dal dione posto nell'origine di cariche $\mathcal{E}, \mathcal{G}$:

$$H = \frac{\left(\vec{P} - \frac{1}{c}\vec{A}\right)^2}{2m} + \frac{\mathcal{E}}{4\pi|\vec{r}|}. \tag{3.1}$$

A causa del fatto che il potenziale (2.42) risulti singolare in corrispondenza della stringa di Dirac, non è possibile promuovere la funzione hamiltoniana (3.1) ad operatore su tutto $L^2(\mathbb{R}^3)$. Definiamo perciò le due stringhe di Dirac $\gamma_1 \equiv \left\{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 | z \geq 0\right\}$ e $\gamma_2 \equiv \left\{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 | z \leq 0\right\}$, in maniera tale che $\gamma_1 \cup \gamma_2 = \left\{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3\right\}$ e $\gamma_1 \cap \gamma_2 = (0,0,0)$; $\gamma_1 \cup \gamma_2$ costituisce il bordo della superficie $\Sigma \equiv \left\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 | x \leq 0\right\}$. Sugli spazi $\mathbb{R}^3 \backslash \gamma_1$ e $\mathbb{R}^3 \backslash \gamma_2$ sono definiti rispettivamente, privi di singolarità, i potenziali di Dirac $\vec{A}_1$ e $\vec{A}_2$ con espressioni esplicite date da (2.42): è possibile dunque introdurre gli operatori H_1 e H_2, definiti secondo la (3.1), sfruttando rispettivamente i potenziali $\vec{A}_1$ e $\vec{A}_2$. Gli operatori H_1 e H_2 saranno dunque ben definiti rispettivamente su $\mathbb{R}^3 \backslash \gamma_1$, dove il sistema è descritto dallo stato ψ_1, e $\mathbb{R}^3 \backslash \gamma_2$, dove il sistema è descritto dallo stato ψ_2. Nella regione $\mathbb{R}^3 \backslash (\gamma_1 \cup \gamma_2)$ la descrizione quantistica del sistema deve essere la stessa indipendentemente dal fatto che si usi l'operatore H_1 e lo stato ψ_1 o l'operatore H_2 e lo stato ψ_2: pertanto deve esistere un *operatore unitario* $U = U(\vec{r}), \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \backslash (\gamma_1 \cup \gamma_2)$ tale che

$$H_2 = U H_1 U^\dagger, \tag{3.2}$$

$$\psi_2 = U \psi_1. \tag{3.3}$$

Considerando il fatto che i potenziali $\vec{A}_1$ e $\vec{A}_2$ devono essere legati l'uno all'altro da una trasformazione di gauge $\vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r})$ al fine di dar luogo allo stesso campo elettromagnetico, è possibile verificare che l'espressione (3.1) vale se

$$U = e^{i\Lambda(\vec{r})\backslash\hbar c}. \tag{3.4}$$

Il risultato si dimostra sfruttando le espressioni delle hamiltoniane H_1 e H_2 in funzione dei rispettivi potenziali e le seguenti identità operatoriali:

$$U\vec{\nabla}U^\dagger = \vec{\nabla} - \frac{i}{\hbar c}\vec{\nabla}\Lambda(\vec{x}), \qquad U\left(\vec{\nabla} - \frac{i}{\hbar c}\vec{A}_1\right)U^\dagger = \vec{\nabla} - \frac{i}{\hbar c}\vec{A}_2. \tag{3.5}$$

In tal modo:

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\nabla} - \frac{i}{\hbar c}\vec{A}_2\right)^2 + \frac{\mathcal{E}}{4\pi|\vec{r}|} = -\frac{\hbar^2}{2m}U\left(\vec{\nabla} - \frac{i}{\hbar c}\vec{A}_1\right)UU^\dagger\left(\vec{\nabla} - \frac{i}{\hbar c}\vec{A}_1\right)U^\dagger + \frac{\mathcal{E}}{4\pi|\vec{r}|} \tag{3.6}$$

$$= UH_1U^\dagger. \tag{3.7}$$

Affinchè la condizione $\psi_2 = U\psi_1$ valga per ogni coppia di stati ψ_1 e ψ_2, essa deve valere anche per gli stati che appartengono ai domini di autoaggiuntezza degli operatori hamiltoniani H_1 e H_2, i quali sono composti da funzioni d'onda continue: è necessario che U sia un operatore unitario almeno continuo in $\vec{r}$. Consideriamo allora la discontinuità di U attraverso la superficie Σ: sfruttando il risultato (2.57) si ottiene

$$\Delta\left(e^{i\Lambda(\vec{r})\backslash\hbar c}\right) = e^{i\Lambda(\vec{r})\backslash\hbar c}\left(e^{i\Delta\Lambda(\vec{r})\backslash\hbar c} - 1\right) = e^{i\Lambda(\vec{r})\backslash\hbar c}\left(e^{i\mathcal{G}\backslash\hbar c} - 1\right). \tag{3.8}$$

Imponendo che $\Delta\left(e^{i\Lambda(\vec{r})\backslash\hbar c}\right) = 0$ e ricordando la definizione di $\mathcal{G}$ (data nella sezione 2.3.1 prima dell'equazione (2.34)), si ottiene la condizione di quantizzazione di Dirac

$$\mathcal{G} = e_2g_1 - e_1g_2 = 2\pi\hbar c n_{12},\ n_{12} \in \mathbb{Z}. \tag{3.9}$$

3.1.2 Quantizzazione del momento angolare del campo e.m.

Consideriamo il sistema analizzato nella sezione 2.3.1. Facendo riferimento alla (2.22) siamo in grado di ottenere l'espressione esplicita per il momento angolare del campo elettromagnetico del sistema considerato, dato da $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ e $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, dove $\vec{E}_{1,2}$ e $\vec{B}_{1,2}$ sono dati da (2.31) e (2.32):

$$\vec{L}_{\text{em}} = \frac{1}{c}\int \vec{x} \times \left(\vec{E} \times \vec{B}\right) d^3x = \frac{e_1g_2 - e_2g_1}{(4\pi)^2 c}\int \vec{x} \times \left(\frac{\vec{R}_1 \times \vec{R}_2}{R_1^3R_2^3}\right) d^3x, \tag{3.10}$$

dove si ricorda che $\vec{R}_1 \equiv \vec{x} - \vec{y}_1(t)$ e $\vec{R}_2 \equiv \vec{x} - \vec{y}_2(t)$, dove $\vec{y}_1(t)$ e $\vec{y}_2(t)$ sono le traiettorie del primo e del secondo dione. Il calcolo esplicito di $\vec{L}_{\text{em}}$ restituisce il seguente risultato finale (riportato in [19], sezione 6.12), dove $\vec{r}$ rappresenta il vettore che descrive la distanza fra i due dioni:

$$\vec{L}_{\text{em}} = \frac{e_1g_2 - e_2g_1}{4\pi c}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \tag{3.11}$$

Sfruttando un ragionamento semiclassico, promuoviamo il momento angolare $\vec{L}_{\text{em}}$ a operatore quantistico: il generico autovalore appartenente allo spettro di una componente del momento angolare è $\frac{n\hbar}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Pertanto possiamo porre

$$\frac{e_1g_2 - e_2g_1}{4\pi c} = \frac{n\hbar}{2},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{3.12}$$

da cui deriva la condizione di quantizzazione di Dirac

$$e_2g_1 - e_1g_2 = 2\pi\hbar c n_{12},\ n_{12} \in \mathbb{Z}. \tag{3.13}$$

3.1.3 Metodo di Feynman

Approccio di Feynman in Meccanica Quantistica

Nel caso in cui il sistema sia costituito da *particelle puntiformi* descritte dalle posizioni $\vec{x}$ e dalle velocità $\vec{v}$, la teoria che ne descrive la dinamica quantistica è la *meccanica quantistica*. Dato un operatore hamiltoniano H, l'evoluzione di una funzione d'onda $\psi(\vec{x}, t)$ che rappresenta lo stato del sistema al tempo t è descritta, per sistemi conservativi, dall'operatore unitario di evoluzione temporale:

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\psi(\vec{x}, 0). \tag{3.14}$$

Considerata la linearità di tale operatore si può proporre la seguente soluzione:

$$\psi(\vec{x}, t) = \int K(t, \vec{y}, \vec{x})\psi(\vec{y}, 0)d^3y, \tag{3.15}$$

dove $K(t, \vec{y}, \vec{x})$ è una funzione complessa di sette variabili reali chiamata *propagatore di Feynman*. I vincoli che tale funzione deve soddisfare sono:

$$i\hbar\frac{\partial K(t, \vec{y}, \vec{x})}{\partial t} = HK(t, \vec{y}, \vec{x}), \qquad K(0, \vec{y}, \vec{x}) = \delta^3(\vec{y} - \vec{x}). \tag{3.16}$$

Il propagatore possiede una rappresentazione esplicita dovuta a Feynman, che coinvolge l'esponenziale dell'azione classica del sistema $I[\vec{x}, \vec{v}]$:

$$K(t, \vec{y}, \vec{x}) = \int_{\vec{y}}^{\vec{x}} \{\mathcal{D}x(t)\}\, e^{\frac{i}{\hbar}I[\vec{x}, \vec{v}]}, \tag{3.17}$$

dove $\{\mathcal{D}x(t)\}$ indica una *misura funzionale* sullo spazio di tutti i cammini che congiungono il punto $\vec{x} = \vec{x}(t)$ e il punto $\vec{y} = \vec{x}(0)$.

L'elemento di interesse per questa tesi nella trattazione sopra riportata consiste nella comparsa, nella descrizione della dinamica dei sistemi quantistici, non dell'azione, bensì del suo esponenziale complesso. Pertanto nell'applicazione di una simmetria fisica non richiederemo l'invarianza dell'azione I, bensì del suo esponenziale complesso $e^{\frac{i}{\hbar}I}$.

Sistema di due dioni in approssimazione di dipolo

Consideriamo il sistema analizzato nella sezione 2.3.1. La descrizione della dinamica di tale sistema coinvolge il propagatore (3.17). Esaminiamo per il momento la trasformazione del propagatore in seguito all'applicazione di una generica trasformazione di gauge $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r})$ all'azione (2.37): posti $\vec{x} \equiv \vec{r}(T)$ e $\vec{y} \equiv \vec{r}(0)$, la variazione dell'azione risulta essere

$$I' - I = \int_0^T dt\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}) = \int_0^T dt\frac{1}{c}\frac{d\Lambda(\vec{r})}{dt} = \frac{1}{c}\left(\Lambda(\vec{x}) - \Lambda(\vec{y})\right). \tag{3.18}$$

Dunque, riprendendo l'espressione (3.17) e considerando il fatto che il termine (3.18) non dipende dal cammino scelto, otteniamo l'espressione del propagatore trasformato

$$K'(t, \vec{y}, \vec{x}) = e^{\frac{i}{\hbar c}(\Lambda(\vec{x}) - \Lambda(\vec{y}))}K(t, \vec{y}, \vec{x}). \tag{3.19}$$

In tal modo, sfruttando l'equazione risolutiva (3.15), si ottiene

$$\psi'(\vec{x}, t) = \int K'(t, \vec{y}, \vec{x})\psi'(\vec{y}, 0)d^3y = \int e^{\frac{i}{\hbar c}(\Lambda(\vec{x}) - \Lambda(\vec{y}))}K(t, \vec{y}, \vec{x})\psi'(\vec{y}, 0)d^3y. \tag{3.20}$$

Il termine $e^{\frac{i}{\hbar c}(\Lambda(\vec{x}) - \Lambda(\vec{y}))}$, indipendente dal cammino scelto, può uscire dall'integrale:

$$e^{-\frac{i}{\hbar c}\Lambda(\vec{x})}\psi'(\vec{x}, t) = \int K(t, \vec{y}, \vec{x})e^{-\frac{i}{\hbar c}\Lambda(\vec{y})}\psi'(\vec{y}, 0)d^3y. \tag{3.21}$$

Abbiamo così dimostrato che anche a livello quantistico vale l'invarianza di gauge: gli stati ψ' e ψ differiscono per la trasformazione unitaria $e^{-\frac{i}{\hbar c}\Lambda(\vec{r})}$, dunque rappresentano lo stesso stato.

Consideriamo ora l'azione (2.37), alla quale corrisponde l'anomalia (2.52) in seguito alla trasformazione (2.45), che corrisponde a un cambiamento della stringa di Dirac. Consideriamo nuovamente l'espressione del propagatore di Feynman (3.17): l'espressione del propagatore trasformato è

$$K'(t,\vec{y},\vec{x}) = \int_{\vec{y}}^{\vec{x}} \{Dx(t)\}\, e^{\frac{i}{\hbar}I'[\vec{x},\vec{v}]} = \int_{\vec{y}}^{\vec{x}} \{Dx(t)\}\, e^{\frac{i}{\hbar}I[\vec{x},\vec{v}]} e^{\frac{i}{\hbar c}(\Lambda(\vec{x})-\Lambda(\vec{y})-m\mathcal{G})} \tag{3.22}$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar c}(\Lambda(\vec{x})-\Lambda(\vec{y}))} \int_{\vec{y}}^{\vec{x}} \{Dx(t)\}\, e^{\frac{i}{\hbar}I'[\vec{x},\vec{v}]} e^{\frac{i}{\hbar c}(-m\mathcal{G})}. \tag{3.23}$$

La fase $e^{\frac{i}{\hbar c}(-m\mathcal{G})}$ contiene il numero intero m che dipende dal cammino della particella, dunque non può essere portata fuori dall'integrale. Affinchè i propagatori K' e K siano legati dalla relazione (3.19) è necessario imporre

$$e^{\frac{i}{\hbar c}(-m\mathcal{G})} = 1, \tag{3.24}$$

ovvero

$$\mathcal{G} = e_2 g_1 - e_1 g_2 = 2\pi\hbar c n_{12},\ n_{12} \in \mathbb{Z}. \tag{3.25}$$

Abbiamo così ricavato la condizione di quantizzazione di Dirac a partire dallo studio di un sistema di due dioni in approssimazione di dipolo.

3.2 Condizioni di quantizzazione relativistiche

3.2.1 Metodo di Feynman

Approccio di Feynman in Teoria dei Campi Quantistici

Nel caso in cui il sistema venga trattato in maniera *relativistica* e comprenda *particelle cariche* e *campi elettromagnetici*, la teoria che ne descrive la dinamica quantistica è l'elettrodinamica quantistica, per la quale è necessario trattare le funzioni d'onda associate a ciascuna particella come campi, i quali assumono il ruolo di variabili dinamiche dell'azione; è possibile descrivere la dinamica del sistema attraverso il calcolo di oggetti denominati *funzioni di correlazione*, il cui computo prevede il calcolo di integrali funzionali del tipo:

$$\int \{\mathcal{D}\varphi\}\,\{\mathcal{D}\varphi^*\}\,\{\mathcal{D}A\}\,(...)e^{\frac{i}{\hbar}I[A,\varphi]}, \tag{3.26}$$

dove φ indica le funzioni d'onda delle N particelle cariche appartenenti al sistema considerato e A indica il potenziale elettromagnetico. Si può mostrare che è possibile riscrivere (3.26) convertendo la dipendenza da φ_n, la funzione d'onda della particella n-sima, nella dipendenza da $y_n^\mu(\lambda)$, la sua linea d'universo:

$$\int \prod_{n=1}^{N} \{\mathcal{D}y_n\}\,\{\mathcal{D}A\}\,(...)e^{\frac{i}{\hbar}I[A,y_n]}. \tag{3.27}$$

Il risultato, non banale, è dovuto a D. Zwanziger (si veda [17]).

Come nel caso non relativistico, l'elemento di interesse consiste nella centralità dell'esponenziale complesso dell'azione. Pertanto nell'implementazione di una simmetria fisica non richiederemo l'invarianza dell'azione I, bensì del suo esponenziale complesso $e^{\frac{i}{\hbar}I}$.

Sistema relativistico di N dioni

Trattiamo il sistema analizzato nella sezione 2.3.2. Consideriamo l'azione (2.63), alla quale corrispondono le anomalie (2.67) e (2.72) in seguito a cambiamenti delle brane di Dirac. Studiamo il comportamento dell'esponenziale complesso dell'azione che compare nelle formule (3.27) in seguito al cambiamento di un insieme di 2-brane di Dirac. Considerando la teoria asimmetrica l'esponenziale complesso dell'azione varia come (vedi l'anomalia (2.67))

$$e^{\frac{i}{\hbar}I'[A,y_n]} = e^{\frac{i}{\hbar}I[A,y_n]}e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{r,s=1}^{n} e_r g_s M_{sr}}. \tag{3.28}$$

Allora affinchè il cambiamento delle 2-brane di Dirac dia luogo a una simmetria fisica è necessario che

$$e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{r,s=1}^{N} e_r g_s M_{sr}} = 1, \tag{3.29}$$

da cui discende, reintrodotta la costante c, la condizione di quantizzazione

$$e_r g_s = 2\pi\hbar c n_{rs},\ n_{rs} \in \mathbb{Z}. \tag{3.30}$$

Adottando invece la teoria (2.68) e procedendo in maniera del tutto analoga (vedi l'anomalia (2.72)) si ottiene la condizione di quantizzazione

$$e_r g_s - e_s g_r = 4\pi\hbar c\tilde{n}_{rs},\ \tilde{n}_{rs} \in \mathbb{Z}. \tag{3.31}$$

3.3 Analisi delle condizioni di quantizzazione ottenute

Nelle sezioni precedenti sono state ricavate tre distinte condizioni di quantizzazione, due relativistiche e una non relativistica. In questa sezione ne discutiamo le simmetrie, confrontandole fra di loro. La generica azione di un gruppo di simmetria di dualità agirà sui doppietti $(e_r,\ g_r)$ e $(F,\ *F)$ attraverso una trasformazione lineare: se M è una matrice che appartiene al gruppo di simmetria di dualità considerato, si ha:

$$\begin{pmatrix} e'_r \\ g'_r \end{pmatrix} \equiv M \begin{pmatrix} e_r \\ g_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_r \\ g_r \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

per opportuni coefficienti reali a, b, c, d. La trasformazione del doppietto $(F,\ *F)$ è del tutto analoga. Una condizione di quantizzazione è detta essere *invariante* sotto l'azione di un gruppo di simmetria se, riscritta in termini del doppietto trasformato $(e'_r,\ g'_r)$, essa preserva la sua espressione.

Condizioni di quantizzazione relativistiche

Consideriamo la seguente condizione di quantizzazione, che deriva dalla teoria asimmetrica :

$$e_r g_s = 2\pi\hbar c n_{rs},\ n_{rs} \in \mathbb{Z}. \tag{3.33}$$

Definiamo e_0 la carica più piccola esistente nella teoria: se $e_r = e_0$, la condizione (3.33) restituisce $g_s = \frac{2\pi\hbar c}{e_0} n_{0s},\ n_{0s} \in \mathbb{Z}$ per la generica carica magnetica s-sima, la quale, sostituita sempre in (3.33), restituisce la soluzione $e_r = e_0\tilde{n}_{0s},\ \tilde{n}_{0s} \in \mathbb{Z}$ per la generica carica elettrica r-sima: queste sono le soluzioni generali di questa condizione di quantizzazione. La condizione di quantizzazione (3.33) è invariante sotto l'azione del gruppo di dualità discreto $\mathbb{Z}_2$, generato dalla matrice $g = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Tuttavia, consideriamo l'azione del gruppo di dualità discreto $\mathbb{Z}_4$, generato dalla trasformazione di dualità elettromagnetica: l'espressione di (3.33) non è invariante sotto l'azione di $\mathbb{Z}_4$, tuttavia essa manda il prodotto di una carica elettrica per una carica magnetica in un altro prodotto delle stesso tipo, sempre posto uguale a un numero intero (moltiplicato per la costante $2\pi\hbar c$); quest'ultima proprietà è sufficiente a rendere coerente la dinamica quantistica descritta dall'azione (2.63).

Consideriamo la seguente condizione di quantizzazione, che deriva dalla teoria simmetrica:

$$e_r g_s - e_s g_r = 4\pi\hbar c\tilde{n}_{rs},\ \tilde{n}_{rs} \in \mathbb{Z}. \tag{3.34}$$

Questa condizione è invariante (nel senso specificato dall'espressione (3.32)) rispetto all'azione del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$, l'insieme delle matrici quadrate 2×2 con determinante unitario.

Per sistemi dionici in $D = 4$ abbiamo già mostrato che le equazioni del moto sono invarianti sotto l'azione del gruppo di dualità $SO(2)$ (si veda la sezione 2.2). Sfruttando il metodo PST (si vedano gli articoli [10] e [20]) sarebbe possibile rendere la teoria simmetrica manifestamente invariante sempre sotto l'azione del gruppo di dualità $SO(2)$; la teoria asimmetrica, invece, possiede come gruppo di dualità il gruppo $\mathbb{Z}_4$: è importante evidenziare che tale differenza fra le due teorie emerge a livello quantistico, mentre a livello classico esse sono descritte da azioni equivalenti.

Condizione di quantizzazione non relativistica

Analizziamo infine la condizione di quantizzazione propriamente definita "di Dirac", in quanto ricavata per sistemi non relativistici. Consideriamo perciò la condizione di quantizzazione (3.9), analoga a (3.13) e (3.25):

$$e_2 g_1 - e_1 g_2 = 2\pi\hbar c n_{12},\ n_{12} \in \mathbb{Z}. \tag{3.35}$$

Essa è meno forte della (3.34) in quanto tutte le soluzioni di (3.35) soddisfano anche (3.34), ma non viceversa: il fattore 2 mancante nella condizione (3.35) e presente nella condizione (3.34) riflette difatti l'invarianza relativistica, posseduta soltanto dalla teoria da cui deriva la (3.34).

Capitolo 4

Brane elettriche e magnetiche in D dimensioni

4.1 Dinamica classica

L'elettrodinamica può essere estesa in maniera tale da includere non solo particelle puntiformi, ma anche le p-brane, oggetti estesi che possono essere dotati di carica magnetica ed elettrica. Tali oggetti rappresentano, oltre alle particelle, curve, superfici, volumi fondamentali etc. L'importanza di questa estensione è testimoniata dall'esistenza di molteplici teorie fisiche che fanno uso di oggetti fondamentali estesi (basti pensare alle teorie delle stringhe).

Le equazioni fondamentali vengono scritte in uno spaziotempo di dimensione D, dove D è superiore alle dimensioni delle brane che costituiscono i sistemi studiati.

In questa sezione e in quelle successive, a fini chiarificatori, porremo a pedice di ogni forma il suo grado: se ω è una p-forma differenziale, allora $\omega \equiv \omega_p$.

4.1.1 Elettrodinamica di brane in D dimensioni: equazioni del moto

Consideriamo una generica p-brana che si muove nello spaziotempo: il suo moto dà origine a un $(p+1)$-volume d'universo che è possibile descrivere attraverso una parametrizzazione $y(\lambda) \equiv y^\mu(\lambda_1, ..., \lambda_{p+1})$, dipendente da $(p+1)$ parametri $\lambda \equiv \{\lambda_1, ..., \lambda_{p+1}\}$. Consideriamo il sottoinsieme di parametri $\tilde{\lambda} = \{\lambda_2, ..., \lambda_{p+1}\}$ e consideriamo la componente temporale $y^0(\lambda_1, \tilde{\lambda}) = t(\lambda_1, \tilde{\lambda})$. Invertendo la funzione $t(\lambda_1, \tilde{\lambda})$ rispetto al parametro λ_1 è possibile definire $\lambda_1(t, \tilde{\lambda})$, da cui $y^i(\lambda_1, \tilde{\lambda}) = y^i(t, \tilde{\lambda})$: a t fissato, $y^i(t, \tilde{\lambda})$ è detto *profilo* della p-brana e dipende da p parametri. Una brana si dice *statica* se le sue coordinate spaziali non dipendono dal tempo. È possibile definire una *metrica indotta* dalla metrica di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ sul volume d'universo di una p-brana:

$$g_{ab}(\lambda) \equiv \frac{\partial y^\mu}{\partial \lambda^a} \frac{\partial y^\nu}{\partial \lambda^b} \eta_{\mu\nu} = U_a^\mu(\lambda) U_b^\nu(\lambda) \eta_{\mu\nu}, \tag{4.1}$$

dove compaiono i *vettori tangenti* $U_a^\mu \equiv \frac{\partial y^\mu}{\partial \lambda^a}$; si definisce $g \equiv |\det g_{ab}|$. Una brana si dice *piatta* se la metrica indotta sulla brana è $g_{ab} = \eta_{ab}$. Definendo gli indici I, con $I = 0, ..., p$, e a, con $a = p+1, ..., D-1$, a partire dall'indice $\mu = (I, a)$ e suddividendo le coordinate dello spaziotempo x^μ in un sottoinsieme di coordinate *parallele* x^Ie in un sottoinsieme di coordinate *ortogonali* x^a alla p-brana, il volume d'universo di una brana statica e piatta si può parametrizzare come $y^\mu(\lambda) = \{y^I(\lambda) = \lambda^I; y^a(\lambda) = 0\}$. In questa tesi tratteremo solo brane *chiuse*, ovvero dotate di un profilo spaziale privo di bordo.

Analogamente a ciò che è stato fatto nella sottosezione 2.1 definiamo i seguenti oggetti:

- la $(p+2)$-forma $F_{p+2} = \frac{1}{(p+2)!} dx^{\mu_{p+2}} \wedge ... \wedge dx^{\mu_1} F_{\mu_1 ... \mu_{p+2}}$, dove $F_{\mu_1 ... \mu_{p+2}}$ rappresenta il tensore elettromagnetico;

- la $(D-p-1)$-forma J_{D-p-1}, denominata *corrente* unitaria, che corrisponde al duale di Poincaré del $(p+1)$-volume d'universo generato dal moto della p-brana. la sua espressione esplicita è

$$J_{D-p-1} \equiv \frac{1}{(D-p-1)!} dx^{\mu_{D-p-1}} \wedge ... \wedge dx^{\mu_1} \epsilon_{\mu_1 ... \mu_{D-p-1} \nu_1 ... \nu_{p+1}} \int d^{p+1}\lambda \frac{dy^{\nu_1}}{d\lambda^1} ... \frac{dy^{\nu_{p+1}}}{d\lambda^{p+1}} \delta^D(x-y(\lambda)). \tag{4.2}$$

Per descrivere un sistema di n p-brane cariche è sufficiente sommare fra di loro le correnti unitarie $J_{n,D-p-1}$ moltiplicate per le relative cariche. Il vantaggio di studiare brane chiuse consiste nel fatto che il volume d'universo non possiede bordo: rileggendo tale affermazione alla luce della dualità di Poincaré è possibile affermare che $dJ_{D-p-1} = 0$.

Elettrodinamica di brane elettricamente cariche

Studiamo l'elettrodinamica delle p-brane in presenza delle sole cariche elettriche: le equazioni del moto dei campi per un sistema di r p-brane dotate di cariche elettriche e_r sono

$$dF_{p+2} = 0, \tag{4.3}$$

$$d * F_{p+2} = (-)^{D+p} \sum_r e_r J_{r,D-p-1}. \tag{4.4}$$

Applicando il lemma forte di Poincaré alla (4.3) è possibile introdurre la $(p+1)$-forma A_{p+1} che rappresenta il potenziale elettromagnetico:

$$F_{p+2} = dA_{p+1}, \tag{4.5}$$

L'azione che descrive tale sistema assume la forma seguente, dove $J_{e,D-p-1} \equiv \sum_r e_r J_{r,D-p-1}$:

$$I[y_r(\lambda_r), A_{p+1}] = \int_{\mathbb{R}^D} \left(\frac{1}{2} dA_{p+1} \wedge *dA_{p+1} + A_{p+1} \wedge J_{e,D-p-1} \right). \tag{4.6}$$

L'azione che descrive il moto di una p-brana libera si può scrivere in funzione della metrica indotta sul suo volume d'universo: detta m la massa per unità di volume della brana,

$$I[y(\lambda)] = -m \int \sqrt{g}\; d^{p+1}\lambda. \tag{4.7}$$

Consideriamo un sistema di r p-brane dotate di cariche elettriche e_r e definiamo per ognuna di esse una massa per unità di volume m_r, una metrica indotta $g_{r,ab}$ e un set di parametri λ_r, i quali parametrizzano il volume d'universo $y_r^\mu(\lambda_r)$; l'azione complessiva è data dalla somma delle azioni (4.6) e (4.7):

$$I[y_r(\lambda_r), A_{p+1}] = \int_{\mathbb{R}^D} \left(\frac{1}{2} dA_{p+1} \wedge *dA_{p+1} + A_{p+1} \wedge J_{e,D-p-1} \right) - \sum_r m_r \int \sqrt{g_r}\; d^{p+1}\lambda_r. \tag{4.8}$$

Variando tale azione rispetto al volume d'universo $y_r(\lambda_r)$ si ottiene l'equazione di Lorentz che descrive il moto della brana r-sima, derivata in [8]:

$$m_r \frac{\partial}{\partial \lambda_r^b} \left(\sqrt{g_r} g_r^{ab} \frac{\partial y_r^\mu}{\partial \lambda_r^a} \right) = (-)^p e_r F^{\mu\mu_1 ... \mu_{p+1}} U_{r,\mu_1 0} ... U_{r,\mu_{p+1} p}. \tag{4.9}$$

Elettrodinamica di brane elettriche in copresenza di brane magnetiche

Introduciamo la carica magnetica. Attribuiamo a ogni p-brana una carica elettrica, una carica magnetica oppure entrambe: in quest'ultimo caso si parla di p-brana *dionica*. Nel seguito si mostra che una p-brana può essere dionica soltanto in uno spaziotempo di dimensione pari. Scriviamo le equazioni del moto per il campo elettromagnetico generato da un insieme di s $(D-p-4)$-brane dotate di cariche magnetiche g_s e un insieme di r p-brane dotate di cariche elettriche e_r[1]. Denominando $J_{r,D-p-1}$ la

[1] Forniamo qualche esempio di sistemi di p-brane e $(D-p-4)$-brane duali: in 10 dimensioni una stringa elettricamente carica può interagire elettromagneticamente con una 5-brana magnetica; in 6 dimensioni vi possono essere sistemi di stringhe elettriche e stringhe magnetiche, ma anche sistemi di cariche elettriche puntiformi e 2-superfici magneticamente cariche.

forma (4.2) relativa alla brana elettrica r-sima e $J_{s,p+3}$ quella relativa alla brana magnetica s-sima, le equazioni di Maxwell *generalizzate* sono

$$dF_{p+2} = (-)^{D+pD+1} \sum_s g_s J_{s,p+3}, \tag{4.10}$$

$$d * F_{p+2} = (-)^{D+p} \sum_r e_r J_{r,D-p-1}. \tag{4.11}$$

L'equazione (4.10) e l'equazione (4.11) sono coerenti poichè uguagliano forme di grado identico. Nel caso si considerasse un sistema composto da un insieme di p-brane dioniche, imponendo l'uguaglianza dei gradi delle correnti $J_{s,p+3}$ e $J_{r,D-p-1}$ occorrerebbe aggiungere la condizione $p+3 = D-p-1$, da cui deriverebbe la condizione $D = 2(p+2)$, ovvero la condizione per cui D deve essere pari. Solo spaziotempi di dimensione pari dunque ammettono brane dioniche.

Come nel caso delle particelle, definiamo un tensore energia-impulso che è somma di due contributi: uno dovuto al campo, uno dovuto alle p-brane:

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{\text{em}} + T^{\mu\nu}_{\text{p}}, \tag{4.12}$$

L'espressione esplicita del tensore energia-impulso del campo elettromagnetico nel formalismo tensoriale è

$$T^{\mu\nu}_{\text{em}} = \frac{(-)^{p+1}}{(p+1)!} \left(F^{\mu\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}} F^{\nu}{}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}} - \frac{1}{2(p+2)} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha_1\ldots\alpha_{p+2}} F_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+2}} \right). \tag{4.13}$$

L'espressione esplicita del tensore energia-impulso di una brana, in cui compare la massa per unità di volume m della brana, è

$$\tilde{T}^{\mu\nu}_{\text{p}} = m \int \sqrt{g} g^{ab} U^{\mu}_a U^{\nu}_b \delta^D(x - y(\lambda)) d^{p+1}\lambda. \tag{4.14}$$

Per un sistema di s $(D-p-4)$-brane magnetiche di cariche g_s ed r p-brane elettriche di cariche e_r, il tensore $T^{\mu\nu}_{\text{p}}$ è dato dalla somma

$$T^{\mu\nu}_{\text{p}} = \sum_r \tilde{T}^{\mu\nu}_{r,\text{p}} + \sum_s \tilde{T}^{\mu\nu}_{s,\text{p}}. \tag{4.15}$$

Imponendo la conservazione del tensore $T^{\mu\nu}$ e considerando le equazioni (4.10) e (4.11) si ottengono, in qualità di vincoli, l'equazione di Lorentz dell'r-sima p-brana elettrica (si veda l'equazione (4.9)) e l'equazione di Lorentz dell's-sima $(D-p-4)$-brana magnetica

$$m_s \frac{\partial}{\partial \lambda^b_s} \left(\sqrt{g_s} g^{ab}_s \frac{\partial y^{\mu}_s}{\partial \lambda^a_s} \right) = (-)^{D-p-4} g_s \tilde{F}^{\mu\mu_1\ldots\mu_{D-p-3}} U_{s,\mu_1 0} \ldots U_{s,\mu_{D-p-3}(D-p-4)}. \tag{4.16}$$

Imporre la conservazione del tensore simmetrico $T^{\mu\nu}$ implica, come nella sezione 2.1, la conservazione del tensore a tre indici $M^{\mu\alpha\beta} \equiv x^{\alpha}T^{\mu\beta} - x^{\beta}T^{\mu\alpha}$, da cui discende la seguente carica conservata:

$$L^{\alpha\beta} \equiv \int M^{0\alpha\beta} d^{D-1}x = \int (x^{\alpha}T^{0\beta} - x^{\beta}T^{0\alpha}) d^{D-1}x, \tag{4.17}$$

dalla quale deriva la conservazione del momento angolare L^{ij}:

$$L^{ij} \equiv \int M^{0ij} d^{D-1}x = \int (x^i T^{0j} - x^j T^{0i}) d^{D-1}x. \tag{4.18}$$

4.1.2 Azione per un sistema di p-brane e p-brane duali cariche

In presenza di cariche magnetiche l'azione (4.6) non descrive la dinamica di un sistema di brane e brane duali cariche: similmente al caso delle cariche puntiformi, in presenza di cariche magnetiche non è più possibile usare (4.3) per definire il potenziale elettromagnetico.

Studiamo un generico sistema composto da un insieme di $(D-p-4)$-brane magnetiche e da un insieme di p-brane elettriche. Il sistema è posto in uno spaziotempo di dimensione D e le equazioni del moto del campo sono (4.10) e (4.11). A ogni brana è associato un volume di universo di dimensione $(p+1)$ nel caso delle brane elettriche, $(D-p-3)$ nel caso delle brane magnetiche: indichiamo con

$y_{m,s}$ il volume d'universo associato all's-sima brana magnetica e con $y_{e,r}$ il volume d'universo associato all'r-sima brana elettrica. Generalizziamo il procedimento seguito nella sezione 2.3.2. Consideriamo le correnti $J_{s,p+3}$ (relative alle brane magnetiche) e le correnti $J_{s,D-p-1}$ (relative alle brane elettriche), le quali coincidono coi i duali di Poincaré dei volumi di universo $y_{m,s}$ e $y_{e,r}$: sapendo che $dJ = 0$, poichè il volume d'universo di una brana chiusa è privo di bordo, è possibile applicare il lemma forte di Poincaré e affermare che, nel caso delle brane magnetiche, esiste una $(p+2)$-forma $C_{s,p+2}$ tale per cui $J_{s,p+3} = dC_{s,p+2}$; per le brane elettriche si procede analogamente. La forma $C_{s,p+2}$ non è univocamente definita, pertanto possiamo scegliere come rappresentante per essa il duale di Poincaré di una $(D-p-2)$-superficie Σ_s, denominata *brana di Dirac*, tracciata nello spaziotempo dal moto di una $(D-p-3)$-superficie scelta per ogni brana magnetica e avente come bordo il profilo della brana. Ancora una volta si procede analogamente per definire le forme $C_{r,D-p-2}$, relative alle brane elettriche.

Risolviamo (4.10) introducendo una $(p+1)$-forma di potenziale A_{p+1}:

$$dF_{p+2} + (-)^{D+pD} \sum_s g_s J_{s,p+3} = d\left(F_{p+2} + (-)^{D+pD} \sum_s g_s C_{s,p+2}\right) = 0, \tag{4.19}$$

dunque, applicando il lemma forte di Poincaré:

$$F_{p+2} + (-)^{D+pD} \sum_s g_s C_{s,p+2} = dA_{p+1}. \tag{4.20}$$

Perciò la soluzione generale dell'equazione (4.10) è

$$F_{p+2} = dA_{p+1} + (-)^{D+pD+1} \sum_s g_s C_{s,p+2}, \tag{4.21}$$

dove il contributo ai campi dato da $\sum_s g_s C_{s,p+2}$ ha supporto solo sulle $(D-p-2)$-superfici Σ_s. L'azione del sistema considerato avrà dunque l'espressione

$$I[y_{m,s}, y_{e,r}, A_{p+1}] = \int_{\mathbb{R}^D} \left(\frac{1}{2}(dA_{p+1} + C_{p+2}) \wedge *(dA_{p+1} + C_{p+2}) + A_{p+1} \wedge J_{e,D-p-1}\right). \tag{4.22}$$

dove è stato utilizzato il simbolo $J_{e,D-p-1}$ definito prima della definizione (4.6) ed è stata definita per compattezza di notazione la forma $C_{p+2} \equiv (-)^{D+pD+1} \sum_s g_s C_{s,p+2}$. Per facilitare nel seguito la lettura si reintroduce il simbolo F_{p+2} all'interno dell'azione, che da ora in avanti sarà definito come (4.20)[2].

Studiamo ora l'effetto del cambiamento della scelta dell's-sima $(D-p-2)$-brana di Dirac Σ_s. Introduciamo dunque $\Sigma_{1,s}$ e $\Sigma_{2,s}$, relative alla stessa brana magnetica s-sima, tali che $\Sigma_{1,s} \cap \Sigma_{2,s} = y_{m,s}$. Analogamente al ragionamento svolto nella sezione 2.3.2, la $(D-p-2)$-brana $\Sigma_{1,s} - \Sigma_{2,s}$ è orientata, priva di bordo e costituisce il bordo di un $(D-p-1)$-volume Λ_s, il cui duale di Poincaré è la $(p+1)$-forma $k_{s,p+1}$: dunque

$$C^2_{s,p+2} - C^1_{s,p+2} = dk_{s,p+1}. \tag{4.23}$$

Richiedendo che le $(D-p-2)$-brane di Dirac non siano osservabili, è necessario imporre l'invarianza dei campi F_{p+2} rispetto alle trasformazioni (4.23): da (4.21) si deduce che il potenziale A_{p+1} deve trasformare nel modo seguente:

$$A_{p+1} \to A_{p+1} + (-)^{D+pD+1} \sum_s g_s k_{s,p+1}. \tag{4.24}$$

4.1.3 Anomalie dell'azione (4.22)

L'equazione rimanente (4.11) può essere derivata come equazione del moto; l'azione del sistema è la (4.22). Ricaviamo le anomalie dell'azione nel caso generico di un sistema di p-brane elettriche e $(D-p-4)$-brane magnetiche e in due casi particolari: un sistema di p-brane dioniche in dimensione $D = 2(p+2)$ con p pari e un sistema di p-brane dioniche in dimensione $D = 2(p+2)$ con p dispari.

[2] Questa precisazione viene fatta con lo scopo di non confondere l'azione (4.22) con l'azione (4.6), valida solo in assenza di cariche magnetiche.

Per ognuno di questi casi utilizzeremo due azioni classicamente equivalenti fra loro[3]: l'azione (4.22), denominata *asimmetrica*, e un'azione derivata da (4.22) attraverso l'aggiunta del termine di Schwinger, denominata *simmetrica*.

p-brane elettriche e $(D-p-4)$-brane magnetiche

Applichiamo la (4.24) all'azione (4.22), che in questo contesto denominiamo *asimmetrica*:

$$I' = \int_{\mathbb{R}^D} \left(\frac{1}{2}F_{p+2} \wedge *F_{p+2} + A'_{p+1} \wedge J_{e,D-p-1}\right) \tag{4.25}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^D} \left(\frac{1}{2}F_{p+2} \wedge *F_{p+2} + A_{p+1} \wedge J_{e,D-p-1}\right) + (-)^{D+pD+1} \sum_{s,r} e_r g_s \int_{\mathbb{R}^D} k_{s,p+1} \wedge J_{r,D-p-1} \tag{4.26}$$

$$= I + (-)^{D+pD+1} \sum_{s,r} g_s \int_{\mathbb{R}^D} k_{s,p+1} \wedge J_{r,D-p-1}, \tag{4.27}$$

da cui si ottiene l'anomalia

$$I' - I = (-)^{D+pD+1} \sum_{r,s=1} e_r g_s \int_{\mathbb{R}^D} k_{s,p+1} \wedge J_{r,D-p-1} = \sum_{r,s=1} e_r g_s N_{rs},\ N_{rs} \in \mathbb{Z}, \tag{4.28}$$

dove è stato sfruttato il fatto che le forme $k_{s,p+1}$ sono forme intere (si veda la sezione 1.2).

p-brane dioniche in dimensione $D = 2(p+2)$, p pari

Il sistema considerato è composto da N p-brane dioniche; le cariche associate alla brana s-sima sono e_s e g_s. L'anomalia asimmetrica rimane immutata rispetto a quella del caso generale:

$$I' - I = \sum_{r,s=1}^{n} e_r g_s N_{rs},\ N_{rs} \in \mathbb{Z}, \tag{4.29}$$

Consideriamo ora l'azione *simmetrica*, contenente il termine di Schwinger, già presentato nella sezione 3.2.1. La sua espressione è

$$I_S \equiv I - \frac{1}{2}(-)^p \sum_{r,s=1}^{N} e_r g_s \int_{\mathbb{R}^D} C_{s,p+2} \wedge C_{r,p+2}. \tag{4.30}$$

La sua anomalia è:

$$I'_S - I_S = -\sum_{r,s=1}^{N} e_r g_s \left(\int_{\mathbb{R}^D} k_{s,p+1} \wedge J_{r,p+3} - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^D} (dk_{s,p+1} \wedge C_{r,p+2} + C_{s,p+2} \wedge dk_{r,p+1})\right) \tag{4.31}$$

$$= -\sum_{r,s=1}^{N} \frac{1}{2} e_r g_s \int_{\mathbb{R}^D} (k_{s,p+1} \wedge J_{r,p+3} + J_{s,p+3} \wedge k_{r,p+1}) \tag{4.32}$$

$$= -\sum_{r,s=1}^{N} \frac{1}{2}(e_r g_s - e_s g_r) \int_{\mathbb{R}^D} k_{s,p+1} \wedge J_{r,p+3} = \sum_{r,s=1}^{N} \frac{1}{2}(e_r g_s - e_s g_r)\tilde{N}_{rs},\ \tilde{N}_{rs} \in \mathbb{Z} \tag{4.33}$$

Abbiamo così ottenuto, a partire da due azioni classicamente equivalenti, due anomalie distinte.

[3] Tali equazioni sono equivalenti fra loro soltanto se adottiamo un principio variazionale locale, ovvero se consideriamo piccole variazioni dei volumi di universo $\delta y^\mu(\lambda)$. Si veda la fine della sezione 2.3.2, dove viene discusso il principio variazionale locale. Un discorso analogo a quello appena fatto sulla coppia di azioni I e I_S si può fare per le coppie I, I' e I_S, I'_S.

p-brane dioniche in dimensione $D = 2(p+2)$, p dispari

Procedendo in modo analogo al caso precedente, otteniamo la medesima anomalia asimmetrica:

$$I' - I = \sum_{r,s=1}^{N} e_r g_s N_{rs},\ N_{rs} \in \mathbb{Z}, \tag{4.34}$$

Studiando invece l'anomalia simmetrica otteniamo un risultato diverso rispetto al caso particolare precedente. Valutando l'anomalia di I_S, definita come in (4.30), analogamente al caso precedente si ottiene

$$I'_S - I_S = -\sum_{r,s=1}^{N} \frac{1}{2} e_r g_s \int_{\mathbb{R}^D} (k_{s,p+1} \wedge J_{r,p+3} + J_{s,p+3} \wedge k_{r,p+1}) \tag{4.35}$$

$$= -\sum_{r,s=1}^{N} \frac{1}{2}(e_r g_s + e_s g_r) \int_{\mathbb{R}^D} k_{s,p+1} \wedge J_{r,p+3} = \sum_{r,s=1}^{N} \frac{1}{2}(e_r g_s + e_s g_r)\hat{N}_{rs},\ \hat{N}_{rs} \in \mathbb{Z} \tag{4.36}$$

Si noti la comparsa di un segno $+$ al posto di un segno $-$: da ciò discende che il gruppo di simmetria rispetto al quale l'anomalia (4.36) è invariante è diverso da quello dell'anomalia (4.33). Questo aspetto sarà approfondito nella sezione successiva.

4.2 Quantizzazione di Dirac

Lo scopo di questa sezione è presentare l'estensione di due dei tre metodi utilizzati nel capitolo precedente, il metodo di Feynman descritto nella sezione 3.2.1 e il metodo della quantizzazione del momento angolare del campo elettromagnetico, con l'obiettivo di derivare le condizioni di quantizzazione della carica per sistemi di oggetti carichi estesi.

Non affronteremo il problema dell'estensione del metodo di Dirac-Wu-Yang al caso di oggetti carichi estesi: infatti, come si è avuto modo di vedere nella sezione 3.1.1, il metodo di Dirac-Wu-Yang richiederebbe che per il sistema studiato si possa definire un operatore hamiltoniano e uno spazio di Hilbert su cui tale operatore hamiltoniano possa agire. La problematica è pertanto duplice: la definizione di funzionali d'onda in grado di descrivere una p-brana in uno spazio D-dimensionale non è chiara, così come la definizione di un operatore hamiltoniano dipendente da un potenziale $A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$ dotato di $(p+1)$ indici. I lavori [4], [14] e [15] esplorano tentativi di generalizzazione del metodo di Dirac-Wu-Yang, ma non risolvono fino in fondo le difficoltà appena evidenziate.

Il metodo della quantizzazione del momento angolare del campo elettromagnetico è estendibile al caso di sistemi di oggetti carichi estesi ed è possibile trovarne una trattazione approfondita nell'articolo [4]. In questa tesi ci limitiamo a fornire il filo logico di tale argomento.

4.2.1 Metodo di Feynman

Generalizziamo il metodo presentato nella sezione 3.2.1 in D dimensioni e per oggetti di dimensione p sfruttando lo stesso approccio alla Feynman, ovvero applichiamo l'azione di una certa simmetria sull'esponenziale dell'azione per verificare che la dinamica del sistema sia invariante a livello quantistico. Applicando le trasformazioni dovute ai cambiamenti delle brane di Dirac ai sistemi considerati si otterrà l'esponenziale complesso dell'anomalia dell'azione:

$$e^{\frac{i}{\hbar}I} \to e^{\frac{i}{\hbar}I'} = e^{\frac{i}{\hbar}(I'-I)} e^{\frac{i}{\hbar}I}; \tag{4.37}$$

tali trasformazioni sono simmetrie fisiche del sistema soltanto se $e^{\frac{i}{\hbar}(I'-I)} = 1$, ovvero se, reintroducendo la costante c,

$$I' - I = 2\pi\hbar c N,\ \forall N \in \mathbb{Z}. \tag{4.38}$$

p-brane elettriche e $(D-p-4)$-brane magnetiche

Considerando l'anomalia (4.28) dell'azione asimmetrica si ricava

$$e_r g_s = 2\pi\hbar c n_{rs},\ n_{rs} \in \mathbb{Z}, \tag{4.39}$$

le cui soluzioni sono già state discusse nella sezione 3.3. La sua simmetria di dualità è la stessa della condizione di quantizzazione (3.33).

p-brane dioniche in dimensione $D = 2(p+2)$, p pari

Nella sezione 3.3 è stato trattato il caso di un sistema dionico in 4 dimensioni, il quale ricade in questo caso più generale, tuttavia le considerazioni fatte nella sezione 3.3 sono estendibili al caso di sistemi di p-brane dioniche qualsiasi con p pari. Considerando l'anomalia (4.29) dell'azione asimmetrica si ricava

$$e_r g_s = 2\pi\hbar c n_{rs},\ n_{rs} \in \mathbb{Z}, \tag{4.40}$$

le cui soluzioni e la simmetria di dualità sono già state discusse nella sezione 3.3. Una trasformazione di questa condizione di quantizzazione sotto l'azione del gruppo discreto $\mathbb{Z}_4$ conserva la coerenza della dinamica quantistica (nel senso specificato nella sezione 3.3). Considerando l'anomalia (4.33) dell'azione simmetrica si ricava invece

$$e_r g_s - e_s g_r = 4\pi\hbar c \tilde{n}_{rs},\ \tilde{n}_{rs} \in \mathbb{Z}, \tag{4.41}$$

A questa condizione di quantizzazione corrisponde una simmetria sotto l'azione del gruppo continuo $SL(2,\mathbb{R})$.

Il metodo PST, applicato alla teoria simmetrica, mostra che anche nel caso generale per p pari il gruppo di dualità della dinamica è $SO(2)$ (si veda l'articolo [10], sezione 6.2); le equazioni del moto (4.10) e (4.11) sono ancora invarianti sotto l'azione del gruppo $SO(2)$. La teoria asimmetrica invece è invariante sotto l'azione del gruppo $\mathbb{Z}_4$: si ricorda che tale differenza fra le due teorie, classicamente equivalenti, emerge solamente a livello quantistico.

p-brane dioniche in dimensione $D = 2(p+2)$, p dispari

Un esempio notevole di sistemi che appartengono a questo caso sono i sistemi di stringhe cariche dioniche in uno spaziotempo 6-dimensionale: infatti uno spaziotempo 6 dimensionale consente l'interazione fra 1-brane elettriche e 1-brane magnetiche.

Ricaviamo ora le condizioni di quantizzazione. Considerando l'anomalia (4.34) della teoria asimmetrica si ricava

$$e_r g_s = 2\pi\hbar c n_{rs},\ n_{rs} \in \mathbb{Z}, \tag{4.42}$$

le cui soluzioni e la simmetria di dualità sono già state discusse nella sezione 3.3. Analogamente alle condizioni di quantizzazione (3.33) e (4.40), la dinamica quantistica descritta dalla teoria asimmetrica resta coerente se viene applicata un'azione del gruppo $\mathbb{Z}_4$ sulla condizione di quantizzazione (4.42). Considerando l'anomalia (4.36) si ricava la seguente condizione di quantizzazione, derivata per la prima volta negli articoli [3], [4] e [5]:

$$e_r g_s + e_s g_r = 4\pi\hbar c \hat{n}_{rs},\ \hat{n}_{rs} \in \mathbb{Z}. \tag{4.43}$$

Il gruppo sotto la cui azione questa condizione di quantizzazione è invariante è quello delle matrici M (si veda la sezione 3.3) tali che

$$M^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv A. \tag{4.44}$$

Si può porre un isomorfismo[4] fra il gruppo delle matrici M e $O(1,1)$, il gruppo delle matrici che lasciano invariata la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Tuttavia, mediante l'utilizzo del metodo PST è possibile

[4]Infatti, se Λ è una matrice che lascia invariata B, allora ogni matrice M si può scrivere nella forma $M = U\Lambda U^T$, dove $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

verificare (si veda l'articolo [10]) che sia la teoria simmetrica che la teoria asimmetrica sono invarianti solo sotto l'azione del gruppo discreto $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2'$, il prodotto di due gruppi di simmetria discreti generati rispettivamente da $g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $g' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. A differenza del caso con p pari in cui la simmetria di dualità delle equazioni del moto è la stessa di quella dell'azione, in questo caso non risulta essere così: le equazioni del moto sono infatti invarianti sotto l'azione del gruppo $SO(1,1)$ (si veda l'articolo [4]).

Nei sistemi di brane dioniche appena trattati, *sia per p pari che per p dispari*, l'equazione di Lorentz assume una forma differente in quanto ogni p-brana possiede sia una carica elettrica che una carica magnetica. Variando l'azione simmetrica rispetto al volume di universo y_r^μ del dione r-simo, si ottiene l'espressione

$$m_r \frac{\partial}{\partial \lambda_r^b} \left(\sqrt{g_r} g_r^{ab} \frac{\partial y_r^\mu}{\partial \lambda_r^a} \right) = (-)^p \left[e_r F^{\mu\mu_1 \ldots \mu_{p+1}} + g_r \tilde{F}^{\mu\mu_1 \ldots \mu_{p+1}} \right] U_{r,\mu_1 0} \ldots U_{r,\mu_{p+1} p}. \tag{4.45}$$

Consideriamo il termine racchiuso fra parentesi quadre $\left[e_n F^{\mu\mu_1 \ldots \mu_{p+1}} + g_n \tilde{F}^{\mu\mu_1 \ldots \mu_{p+1}} \right]$: sfruttando i doppietti $\vec{V} \equiv (e,\, g)$ e $\vec{U} \equiv (F,\, \tilde{F})$ (sui quali far agire la medesima azione di un gruppo di simmetria), possiamo riscrivere tale termine usando il prodotto scalare standard:

$$\left[e_n F^{\mu\mu_1 \ldots \mu_{p+1}} + g_n \tilde{F}^{\mu\mu_1 \ldots \mu_{p+1}} \right] = \vec{V} \cdot \vec{U}; \tag{4.46}$$

è immediato dunque verificare che esso è invariante sotto l'azione di $SO(2)$, applicata ai doppietti sopra definiti, e dunque, nel caso di un sistema dionico con p pari, che l'equazione di Lorentz (4.45) rispetti la simmetria della dinamica classica; anche nel caso in cui p sia dispari si verifica che la simmetria della dinamica sotto il gruppo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2'$ è rispettata: per verificarlo è sufficiente applicare le matrici g e g' ai doppietti $\vec{V}$ e $\vec{U}$ e verificare che il prodotto scalare dei doppietti trasformati dia ancora luogo al termine $\left[e_n F^{\mu\mu_1 \ldots \mu_{p+1}} + g_n \tilde{F}^{\mu\mu_1 \ldots \mu_{p+1}} \right]$.

p-brane autoduali in dimensione $D = 2(p+2)$

Analizziamo la condizione di *autodualità* della forma F_{p+2}. Una teoria che comprende p-brane dioniche in uno spaziotempo di dimensione pari $D = 2(p+2)$ ammette l'identificazione della carica magnetica con la carica elettrica se p è un intero dispari. Allora imponendo $e = g$, dall'analisi delle equazioni del moto (4.10) e (4.11) si deve avere $F_{p+2} = *F_{p+2}$: si dice allora che F_{p+2} è una forma autoduale[5]. Applicando (1.8) e considerando $D = 2(p+2)$, si ottiene

$$*^2 = 1 \tag{4.47}$$

soltanto se p è dispari: dunque la doppia applicazione del duale di Hodge manda la forma F_{p+2} in se stessa e questa si mostra essere una condizione sufficiente per imporre l'autodualità di F_{p+2}. In spaziotempi di dimensioni $D = 2, 6, 10...$ è possibile dunque un'identificazione della carica magnetica con quella elettrica. Alla luce della trattazione appena svolta in uno spaziotempo 6-dimensionale le stringhe possono non solo essere oggetti dionici, ma anche autoduali.

Pertanto, se p è dispari, è possibile considerare un sistema di p-brane autoduali. Le equazioni del moto (4.10) e (4.11) possono essere riscritte nella seguente maniera:

$$dF_{p+2} = -\sum_s g_s J_{s,p+3}, \tag{4.48}$$

$$F = *F. \tag{4.49}$$

La scrittura di un'azione per tale sistema di equazioni del moto non è banale è può essere scritta mediante l'utilizzo del già citato metodo PST (si veda l'articolo [20]), che non viene trattato in questa tesi. Pertanto, ci limitiamo a fornire soltanto la condizione di quantizzazione di Dirac relativa a questo caso (si veda l'articolo [10], sezione 6.1):

$$e_r e_s = 2\pi\hbar c n_{rs},\; n_{rs} \in \mathbb{Z}. \tag{4.50}$$

[5]Nel caso in cui invece si ponga l'anti-identificazione $e = -g$ si dovrà imporre la condizione $F_{p+2} = - * F_{p+2}$: in tal caso si dice che F_{p+2} è una forma (anti)-autoduale.

4.2.2 Quantizzazione del momento angolare del campo e.m.

Esponiamo brevemente in questa sezione l'estensione del metodo adottato nella sezione 3.1.2, trattata in dettaglio nell'articolo [4]. Consideriamo un sistema non relativistico composto da una p-brana elettrica di carica e e una $(D-p-4)$-brana magnetica duale di carica g. Consideriamo le brane illimitate, statiche e piatte (si veda la sezione 4.1.1 per le definizioni di queste proprietà). I volumi di universo della brana elettrica e della brana magnetica sono parametrizzati rispettivamente $y_e^\mu(\lambda)$ e $y_m^\mu(\rho)$. Dato il campo elettromagnetico F_{p+2} definito come nella sezione 4.1.1, è possibile definire il campo elettrico e il campo magnetico *generalizzati* come

$$F^{i_1\ldots i_{p+1}0} \equiv E^{i_1\ldots i_{p+1}}, \qquad F^{i_1\ldots i_{p+2}} \equiv B^{i_1\ldots i_{p+2}}. \tag{4.51}$$

Poichè le brane sono statiche, la brana elettrica genera un campo elettrico statico, mentre la brana magnetica genera un campo magnetico statico. Per calcolare il campo generato da una brana statica ricorriamo alle definizioni date nella sezione 4.1.1 delle coordinate parallele e ortogonali x^I e x^a. Consideriamo la brana elettrica: vogliamo risolvere il sistema

$$dG_{p+2} = 0 \tag{4.52}$$

$$d * G_{p+2} = (-)^{D+p} e J_{D-p-1} \tag{4.53}$$

dove G_{p+2} rappresenta il campo elettromagnetico generato dalla brana elettrica. Ricorrendo a un risultato riportato nell'articolo [11] possiamo scrivere un'espressione esplicita per il campo elettromagnetico G_{p+2} in cui compaiono gli indici ortogonali a e paralleli I:

$$G^{I_1\ldots I_{p+1}a} = -\frac{e}{\Omega_{D-p-1}} \frac{\epsilon^{I_1\ldots I_{p+1}} x^a}{(x^b x^b)^{(D-p-1)/2}}, \tag{4.54}$$

dove, per un generico k, $\Omega_k = 2\pi^{k/2}/\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)$ rappresenta l'angolo solido in k dimensioni. Il tensore $G^{I_1\ldots I_{p+1}a}$ contiene tutti gli indici paralleli alla p-brana, compreso quello temporale: dunque, separando gli indici paralleli temporale e spaziali ($I = (0, A)$), i campi elettrico e magnetico della p-brana elettrica risultano essere

$$B^{i_1\ldots i_{p+2}} = 0, \qquad E^{A_1\ldots A_p a} = \frac{e}{\Omega_{D-p-1}} \frac{\epsilon^{A_1\ldots A_p} x^a}{(x^b x^b)^{(D-p-1)/2}} \tag{4.55}$$

Se noi ora volessimo scrivere l'espressione del campo H_{p+2} generato dalla brana duale magnetica, dovremmo risolvere il sistema

$$dH_{p+2} = (-)^{D+pD+1} g J_{p+3} \tag{4.56}$$

$$d * H_{p+2} = 0 \tag{4.57}$$

L'applicazione del metodo utilizzato per ricavare G_{p+2} tuttavia ci permette di ricavare $*H_{p+2}$, sostituendo nell'equazione (4.53) $(D-p-4)$ a p: utilizzando gli indici $\Theta = 0, 1, ..., (D-p-4)$, paralleli alla brana magnetica duale (per separare il tempo dagli indici spaziali definiamo $\Theta = (0, \Delta)$) e gli indici $\tau = (D-p-3), ..., (D-1)$, ortogonali alla brana magnetica, possiamo scrivere

$$\tilde{H}^{\Theta_1\ldots\Theta_{D-p-3}\tau} = -\frac{g}{\Omega_{p+3}} \frac{\epsilon^{\Theta_1\ldots\Theta_{D-p-3}} x^\tau}{(x^\sigma x^\sigma)^{(p+3)/2}} : \tag{4.58}$$

calcolandone il duale otteniamo:

$$H^{\tau_1\ldots\tau_{p+2}} = (-)^{(D+1)(p+1)+1} \frac{g}{\Omega_{p+3}} \frac{\epsilon^{\tau_1\ldots\tau_{p+2}\tau_{p+3}} x^{\tau_{p+3}}}{(x^\sigma x^\sigma)^{(p+3)/2}}. \tag{4.59}$$

Il campo elettromagnetico $H^{\tau_1\ldots\tau_{p+2}}$ non possiede nessun indice parallelo alla $(D-p-4)$-brana, bensì esclusivamente indici ortogonali: dunque nessuno di tali indici può valere 0 (indice temporale); ne consegue che i campi generati dalla brana magnetica, da confrontare con i campi (4.55), sono

$$B^{\tau_1\ldots\tau_{p+2}} = (-)^{(D+1)(p+1)} \frac{g}{\Omega_{p+3}} \frac{\epsilon^{\tau_1\ldots\tau_{p+2}\tau_{p+3}} x^{\tau_{p+3}}}{(x^\sigma x^\sigma)^{(p+3)/2}}, \qquad E^{i_1\ldots i_{p+1}} = 0. \tag{4.60}$$

Il campo elettromagnetico *totale* F_{p+2} sarà, per la linearità delle equazioni (4.10) e (4.11), la somma dei campi generati dalle due brane:

$$F_{p+2} = G_{p+2} + H_{p+2}. \tag{4.61}$$

Consideriamo ora l'espressione del momento angolare (4.18):

$$L^{ij} \equiv \int M^{0ij} d^{D-1}x = \int (x^i T^{0j} - x^j T^{0i}) d^{D-1}x. \tag{4.62}$$

Ricordando l'espressione (4.13) e le definizioni dei campi generalizzati (4.51), è immediato vedere che

$$T^{0i} = \frac{(-)^{p+1}}{(p+1)!} F^{0i_1 \dots i_{p+1}} F^{i}_{i_1 \dots i_{p+1}} = \frac{(-)^{p+1}}{(p+1)!} F^{i_1 \dots i_{p+1} 0} F^{i i_1 \dots i_{p+1}} = \frac{(-)^{p+1}}{(p+1)!} E^{i_1 \dots i_{p+1}} B^{i i_1 \dots i_{p+1}}, \tag{4.63}$$

dunque

$$L^{ij} = \frac{(-)^{p+1}}{(p+1)!} \int (x^i E^{i_1 \dots i_{p+1}} B^{j, i_1 \dots i_{p+1}} - (i \leftrightarrow j)). \tag{4.64}$$

Affinchè il momento angolare non si annulli è necessaria la compresenza di una brana elettrica e di una brana magnetica duali e tali che il campo magnetico (generato dalla brana magnetica) e il campo elettrico (generato dalla brana elettrica) siano essenzialmente *paralleli*: questo pone un vincolo sulla disposizione reciproca delle brane elettrica e magnetica nello spazio. Analizzando l'integrando nell'espressione (4.64) è immediato vedere che i $(p+1)$ indici del campo elettrico (paralleli alla brana elettrica, si veda (4.55)) devono contrarsi con altrettanti indici del campo magnetico (ortogonali alla brana magnetica, si veda (4.60)): ciò implica che le due brane debbano essere *ortogonali* fra di loro, vale a dire che i loro profili *spaziali* siano della forma

$$y^i_e(\lambda) = (0, 0, \xi, \lambda^1, ..., \lambda^p, 0, ..., 0) \tag{4.65}$$

$$y^i_m(\rho) = (0, 0, 0, 0, ..., 0, \rho^1, ..., \rho^{D-p-4}) \tag{4.66}$$

dove $\lambda^A \in (-\infty, +\infty)$ e $\rho^\Delta \in (-\infty, +\infty)$; la brana magnetica poggia sullo spazio generato dalle coordinate $x_{p+4}, ..., x_{D-1}$, mentre la brana elettrica poggia sullo spazio generato dalle coordinate $x_4, ..., x_{p+3}$ ed è opportunamente *traslata* nella direzione x_3, ortogonale a entrambe le brane, attraverso un vettore spostamento di modulo ξ. Tale vettore spostamento è necessario affinchè il valore del momento angolare del sistema non si annulli: nel caso delle particelle, se tale vettore fosse nullo, esse sarebbero sovrapposte e il momento angolare si annullerebbe identicamente (si faccia riferimento al vettore *distanza relativa* $\vec{r}$ introdotto nella sezione 3.1.2 nell'analisi della quantizzazione del momento angolare del campo generato da due dioni puntiformi, il quale riveste in tale contesto lo stesso ruolo del vettore di modulo ξ).

Nel caso del conto svolto nell'articolo [4] vengono adottate una p-brana elettrica di carica e_1 e una p-brana magnetica di carica g_2 di tipo dionico in uno spaziotempo di dimensione $D = 2(p+2)$ (si ricorda che l'espressione "di tipo dionico" esprime il fatto che le due brane possiedono la stessa dimensione, ma non il fatto che possiedano sia carica elettrica, sia carica magnetica). L'unica componente non nulla del momento angolare è L^{12}, ortogonale a entrambe le brane. Il calcolo esplicito dell'integrale (4.64) restituisce il seguente risultato:

$$L^{12} = \frac{e_1 g_2}{4\pi}. \tag{4.67}$$

La condizione di quantizzazione di Dirac si ottiene promuovendo L^{12} a operatore quantistico: uguagliando l'espressione (4.67) al generico autovalore dello spettro[6] dell'operatore momento angolare L^{12} si ottiene

$$e_1 g_2 = 2\pi\hbar c n,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{4.68}$$

Abbiamo così ritrovato la condizione di quantizzazione non relativistica di Dirac. Nel caso il conto fosse generalizzato a due p-brane dioniche di cariche e_1, g_1 ed e_2, g_2, si otterrebbe (si veda l'articolo [4]) il risultato seguente:

$$e_1 g_2 + (-)^{p+1} e_2 g_1 = 2\pi\hbar c n_{12},\ n_{12} \in \mathbb{Z}, \tag{4.69}$$

[6] È possibile mostrare che gli autovalori dell'operatore momento angolare, sono sempre della forma $\lambda = \frac{n}{2}\hbar$, $n \in \mathbb{Z}$, in qualsiasi dimensione $D \geq 3$.

distinte a seconda che p sia pari o dispari analogamente alle condizioni relativistiche (4.41) e (4.43).

Concludiamo la sezione con una congettura relativa all'utilizzo dell'approccio della quantizzazione del momento angolare del campo elettromagnetico anche per sistemi che coinvolgono una p-brana elettrica di carica e e una $(D-p-4)$-brana magnetica di carica g, entrambe illimitate, statiche, piatte e ortogonali fra di loro. La congettura prevede che sia possibile ritrovare la condizione di quantizzazione di Dirac non solo per brane di tipo dionico, bensì anche per p-brane elettriche e $(D-p-4)$-brane duali magnetiche con p generico. Gli argomenti a favore di tale congettura sono i seguenti:

- il momento angolare, essendo dato dall'integrale (4.64), coinvolge il prodotto del campo magnetico generato dalla brana magnetica per il campo elettrico generato dalla brana elettrica: è ovvio quindi che continui a valere una dipendenza del tipo $L^{12} \propto eg$;

- è possibile mostrare con un conto dimensionale che l'integrale (4.64) fornisce sempre un risultato adimensionale (a meno di un fattore eg): infatti, sfruttando le espressioni (4.55) e (4.60), è possibile vedere che, per un campo elettromagnetico generato da una p-brana e da una $(D-p-4)$-brana statiche e piatte, si ha

$$F_{p-\text{brana}} \sim \frac{1}{x^{D-p-2}}, \qquad F_{(D-p-4)-\text{brana}} \sim \frac{1}{x^{p+2}}. \tag{4.70}$$

  Per verificare la dimensione di (4.64) è ora sufficiente vedere che

$$L \sim \int x\, F_{p-\text{brana}}\, F_{(D-p-4)-\text{brana}} d^{D-1}x \sim \int \frac{x}{x^D} d^{D-1}x = \int \frac{1}{x^{D-1}} d^{D-1}x, \tag{4.71}$$

  dunque il risultato è adimensionale (a parte un fattore eg), come richiesto.

Il problema che la congettura pone è dunque quello di individuare il *coefficiente* che moltiplica il fattore eg.

Capitolo 5

Conclusioni

L'idea che possano effettivamente esistere una carica magnetica e oggetti fondamentali portatori di essa, dovuta a Dirac, ha aperto numerose strade in direzione della soluzione di diversi problemi fondamentali della Fisica teorica. L'introduzione dei monopoli magnetici, seppur manuale e non necessaria come nelle GUT (Grand Unification Theories), ha permesso di poter osservare la quantizzazione della carica elettrica da un nuovo punto di vista. Il primo passo è stato verificare la possibilità che l'elettrodinamica delle particelle cariche potesse estendersi in maniera coerente inglobando anche le cariche magnetiche, delle quali tuttora non si ha alcuna evidenza sperimentale. Una volta verificata la coerenza della nuova teoria classica, è stato necessario affrontare il problema della definizione di un potenziale elettromagnetico, resa più difficile per via della scomparsa dell'identità di Bianchi a causa dell'introduzione delle correnti magnetiche. La definizione di un potenziale, fondamentale al fine di poter descrivere i sistemi quantistici, è stata resa possibile attraverso l'utilizzo delle stringhe di Dirac, oggetti geometrici fittizi di cui imporre l'inosservabilità; nell'imporre quest'ultima condizione è stata evidenziata la comparsa di anomalie dell'azione contenenti dipendenze residue dalla scelta delle brane di Dirac: il problema è stato risolto imponendo che il principio variazionale valesse a livello locale (nel senso specificato nel capitolo 2, sezione 2.3). L'elettrodinamica classica è stata poi generalizzata ulteriormente per includere al suo interno anche oggetti fondamentali estesi, le p-brane: un risultato notevole è risultato essere il vincolo dimensionale sui sistemi di brane interagenti che impone che in D dimensioni p-brane possano interagire elettromagneticamente soltanto con $(D - p - 4)$-brane duali estese. Il problema della definizione del potenziale elettromagnetico è stato affrontato e risolto analogamente anche per i sistemi di p-brane, stavolta attraverso la definizione di brane di Dirac estese. Tutte le proprietà fondamentali dell'elettrodinamica classica si preservano anche per la teoria delle brane.

Le condizioni di quantizzazione della carica sono risultate essere leggi di natura quantistica, ottenibili attraverso l'imposizione della non osservabilità delle stringhe o brane di Dirac in sistemi relativistici di cariche o brane cariche. La trasformazione legata al cambiamento della scelta di tali oggetti è stata imposta sull'azione classica, che è risultata essere non invariante rispetto ad essa, e sul suo esponenziale complesso, il quale è invece risultato essere invariante a patto che le condizioni di quantizzazione siano soddisfatte. Nello studio delle proprietà delle condizioni di quantizzazione è stato interessante investigare sistemi di particelle o brane dioniche. La novità più importante, emersa dallo studio di tali sistemi, è stata la comparsa, a partire da azioni equivalenti a livello classico ma inequivalenti a livello quantistico, di condizioni di quantizzazione diverse, di cui una derivata da un'azione detta *simmetrica* e l'altra da un'azione detta *asimmetrica*. Nel caso di sistemi di brane dioniche in spaziotempi di dimensione $D = (0 \mod 4)$ è possibile mostrare, attraverso il metodo PST, l'invarianza per dualità della teoria simmetria rispetto al gruppo di simmetria $SO(2)$, similmente alle equazioni del moto; la condizione di quantizzazione simmetrica (4.41) è risultata essere invariante sotto l'azione del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$; per quanto riguarda la condizione di quantizzazione asimmetrica (4.40) è stato fatto notare che, pur non essendo la sua espressione invariante sotto l'azione del gruppo $\mathbb{Z}_4$, sottogruppo di $SO(2)$, l'azione di tale gruppo su di essa non inficia la coerenza della dinamica quantistica del sistema, descritta dalla teoria asimmetrica, invariante sotto l'azione del gruppo $\mathbb{Z}_4$. Nel caso di sistemi di brane dioniche in spaziotempi di dimensione $D = (2 \mod 4)$ è possibile invece mostrare che, sempre attraverso il metodo PST, sia l'azione simmetrica che l'azione asimmetrica sono invarianti sotto l'azione del gruppo di dualità $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2'$: la condizione di quantizzazione simmetrica (4.43) risulta essere invariante rispetto all'azione di $O(1,1)$, il quale contiene $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2'$.

Un altro argomento di grande interesse nello studio dei sistemi di oggetti dionici è stato l'identificazione delle cariche elettriche con le cariche magnetiche: tale fenomeno non è possibile in 4 dimensioni, ma lo è, ad esempio, in 6 dimensioni per sistemi di stringhe interagenti con stringhe.

Infine, un'attenzione particolare è stata rivolta anche a metodi alternativi a quello di Feynman per i sistemi relativistici: il metodo di Dirac-Wu-Yang, la quantizzazione del momento angolare del campo elettromagnetico, il metodo di Feynman per sistemi non relativistici. Tali approcci, pur fornendo condizioni di quantizzazione, sono risultati meno soddisfacenti del metodo di Feynman per i sistemi relativistici, di respiro più generale e per questo capace di fornire condizioni di quantizzazione più forti.

Appendice A

Appendici

A.1 Varietà con bordo e bordo

In questa sezione vengono date le definizioni di *varietà con bordo* e *bordo*, utili ai fini della comprensione dell'enunciato del teorema di Stokes e della dualità di Poincaré applicata ai bordi.

Definiamo propedeuticamente il *semispazio n-dimensionale superiore* $\mathbb{H}^n = \{(x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n | x^n \geqslant 0\}$ e il suo *bordo* $\partial\mathbb{H}^n = \{(x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n | x^n = 0\}$. Gli insiemi aperti di $\mathbb{H}^n$ sono indotti dalla topologia di $\mathbb{R}^n$: $A \subset \mathbb{H}^n$ è definito essere un insieme aperto su $\mathbb{H}^n$ se esiste un insieme B aperto in $\mathbb{R}^n$ tale che $A = B \cap \mathbb{H}^n$.

Varietà bordata: *Una* varietà bordata *M è un oggetto localmente diffeomorfo ad un insieme aperto del semipiano chiuso $\mathbb{H}^n$, ovvero esiste un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tale che $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$, dove $U_\alpha \subset M$ è aperto $\forall\alpha$, e $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ è un diffeomorfismo, dove $V_\alpha \subset \mathbb{H}^n$ è un insieme aperto per la topologia indotta.*

Per qualche α, la carta locale $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ è tale che $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{H}^n$ dove $V_\alpha \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \varnothing$: per tali α ridenominiamo $\varphi_\alpha \equiv \varphi_{\alpha,\text{bordo}}$.

Bordo: *L'insieme dei punti $P \in M$ che appartengono al sottoinsieme $\varphi^{-1}_{\alpha,bordo}(\partial\mathbb{H}^n)$ è definito* bordo *di M.*

A.2 Forma esplicita del duale di Poincaré

In questa sezione dimostriamo che l'espressione (1.16) è effettivamente l'espressione esplicita del duale di Poincaré della p-superficie Σ_p descritta dalla parametrizzazione $y^\mu(\lambda)$. Nel conto che segue verrà fatto uso delle seguenti identità (η_D è una D-forma differenziale):

$$\epsilon_{\mu_1...\mu_p\alpha_1...\alpha_{D-p}}\epsilon^{\nu_1...\nu_p\alpha_1...\alpha_{D-p}} = (-1)^{D+1}p!(D-p)!\delta^{\nu_1}_{[\mu_1}...\delta^{\nu_p}_{\mu_p]}, \tag{A.1}$$

$$\int_{\mathbb{R}^D} \eta_D = \int d^D x \frac{(-)^{D+1}}{D!}\epsilon^{\alpha_1...\alpha_D}\eta_{\alpha_1...\alpha_D} = \int d^D x\, \eta_{0...D-1}. \tag{A.2}$$

Il conto si sviluppa sostituendo a J_{Σ_p} l'espressione (1.16):

$$\int_{\mathbb{R}^D} \omega_p \wedge J_{\Sigma_p} = \int d^D x \frac{(-)^{D+1}}{D!}\epsilon^{\alpha_1...\alpha_D}\frac{D!}{(D-p)!p!}\omega_{\alpha_{D-p+1}...\alpha_D} J_{\Sigma_p,\alpha_1...\alpha_{D-p}} \tag{A.3}$$

$$= \int d^D x \int d^p\lambda \frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial\lambda^1}...\frac{\partial y^{\nu_p}}{\partial\lambda^p}\delta^D(x-y(\lambda))\delta^{\alpha_{D-p+1}}_{[\nu_1}...\delta^{\alpha_D}_{\nu_p]}\omega_{\alpha_{D-p+1}...\alpha_D} \tag{A.4}$$

$$= \int d^p\lambda \frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial\lambda^1}...\frac{\partial y^{\nu_p}}{\partial\lambda^p}\omega_{\nu_1...\nu_p}(y(\lambda)) = \int_{\Sigma_p}\omega_p. \tag{A.5}$$

A.3 Dualità dell'azione (2.63)

Evidenziamo una proprietà di dualità dell'azione (2.63). Essa sembrerebbe privilegiare il ruolo della carica elettrica rispetto a quello della carica magnetica, poichè compare il termine $A \wedge J_e$: tuttavia tale scelta è convenzionale.

Consideriamo le equazioni (2.13) e (2.14) per un sistema di n dioni in 4 dimensioni: analogamente a quanto fatto nella sezione 2.3.2 possiamo risolvere l'equazione (2.14) introducendo una 1-forma B tale che:

$$*F = dB + \sum_n e_n C_n. \tag{A.6}$$

Per comodità di notazione poniamo $\sum_n e_n J_n \equiv J_e$, $\sum_n g_n J_n \equiv J_m$, $\sum_n e_n C_n \equiv C_e$, $\sum_n g_n C_n \equiv C_m$. Trasformiamo l'azione (2.63) in un'azione equivalente che privilegia invece il ruolo della carica magnetica:

$$\int_{\mathbb{R}^4} \left(\frac{1}{2} F \wedge *F + A \wedge J_e \right) = \int_{\mathbb{R}^4} \left(\frac{1}{2} F \wedge *F + A \wedge dC_e \right) \tag{A.7}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^4} \left(\frac{1}{2} F \wedge *F - (dA - C_m) \wedge C_e - C_m \wedge C_e - \underbrace{(dF + J_m)}_{=0} \wedge B \right) \tag{A.8}$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^4} C_m \wedge C_e + \int_{\mathbb{R}^4} \left(\frac{1}{2} F \wedge *F - F \wedge C_e - F \wedge dB + B \wedge J_m \right) \tag{A.9}$$

Trascurando il termine $\int C_m \wedge C_e$, che non dipende né da A né da B:

$$\int \left(-\frac{1}{2} F \wedge *F + B \wedge J_m \right) = \int \left(\frac{1}{2} * F \wedge *(*F) + B \wedge J_m \right). \tag{A.10}$$

otteniamo due azioni equivalenti:

$$\int \frac{1}{2} (dA - C_m) \wedge *(dA - C_m) + A \wedge J_e, \qquad \int \frac{1}{2} (dB + C_e) \wedge *(dB + C_e) + B \wedge J_m. \tag{A.11}$$

Scegliendo l'azione a primo membro si sfrutta (2.14) come equazione del moto, mentre scegliendo l'azione a secondo membro si sfrutta (2.13).

A.4 Simmetria di dualità del tensore energia-impulso

In questa sezione ricaviamo le simmetrie di dualità di alcune componenti del tensore energia impulso (4.13) (densità di energia T^{00}, vettore di Poynting T^{0i}) per due sistemi dionici: un sistema di dioni puntiformi in 4 dimensioni e un sistema di stringhe dioniche in 6 dimensioni. Notiamo che il primo sistema appartiene al caso dei sistemi dionici in dimensione $D = 2(p+2)$ con p pari, mentre il secondo al caso dei sistemi dionici in dimensione $D = 2(p+2)$ con p dispari: sapendo che nel primo caso la simmetria di dualità della dinamica è descritta dal gruppo $SO(2)$ e nel secondo caso dal gruppo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2'$ (si veda la sezione 4.2.1), il nostro obiettivo è giustificare tali risultati nei casi specifici che prendiamo in considerazione.

Consideriamo il tensore energia-impulso (4.13), il quale possiede l'espressione

$$T^{\mu\nu}_{\text{em}} = \frac{(-)^{p+1}}{(p+1)!} \left(F^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{p+1}} F^{\nu}{}_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1}} - \frac{1}{2(p+2)} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha_1 \dots \alpha_{p+2}} F_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+2}} \right). \tag{A.12}$$

Ricordando le definizioni dei campi generalizzati (4.51), scriviamo per un p generico la componente T^{00} (densità di energia del campo elettromagnetico) e la componente T^{0i} (vettore di Poynting):

$$T^{00} = \frac{1}{2(p+1)!} \left(E^{i_1 \dots i_{p+1}} E^{i_1 \dots i_{p+1}} + \frac{1}{(p+2)} B^{i_1 \dots i_{p+2}} B^{i_1 \dots i_{p+2}} \right), \quad T^{0i} = \frac{1}{(p+1)!} \left(E^{i_1 \dots i_{p+1}} B^{i_1 \dots i_{p+1} i} \right) \tag{A.13}$$

Consideriamo un sistema di particelle puntiformi nel caso 4-dimensionale: la densità di energia e il vettore di Poynting sono

$$T_4^{00} = \frac{1}{2}\left(E^i E^i + \frac{1}{2} B^{jk} B^{jk}\right), \qquad T_4^{0i} = -E^j B^{ij}. \tag{A.14}$$

Sostituendo al campo generalizzato B^{jk} il suo duale attraverso la relazione $B^{jk} = -\epsilon^{jkl} B^l$ si ottengono le espressioni

$$T_4^{00} = \frac{1}{2}\left(E^i E^i + B^l B^l\right) = \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right), \qquad T_4^{0i} = \epsilon^{ijk} E^j B^k. \tag{A.15}$$

Introduciamo ora il doppietto $V^i = (E^i, B^i)$ e dotiamolo di un indice interno $a = (1, 2)$ tale che $V_1^i = E^i$ e $V_2^i = B^i$: in termini di tale doppietto le espressioni (A.15) si possono riscrivere nella seguente maniera:

$$T_4^{00} = \frac{1}{2} V_a^i V_b^i \delta^{ab}, \qquad T_4^{0i} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} V_a^j V_b^k \epsilon^{ab}. \tag{A.16}$$

La simmetria di dualità di tali componenti è quella che lascia invariati i tensori δ^{ab} e ϵ^{ab} (identità e tensore antisimmetrico)e corrisponde al gruppo di dualità $SO(2)$: abbiamo dunque ritrovato la simmetria di dualità della dinamica in dimensione $D = (0 \mod 4)$, come è già stato fatto notare nella sezione 4.2.1.

Consideriamo ora invece un sistema di stringhe nel caso 6-dimensionale: la densità di energia e il vettore di Poynting sono

$$T_6^{00} = \frac{1}{4}\left(E^{ij} E^{ij} + \frac{1}{3} B^{ijk} B^{ijk}\right), \qquad T_6^{0i} = \frac{1}{2} E^{jk} B^{ijk}. \tag{A.17}$$

Sostituendo al campo generalizzato B^{ijk} il suo duale attraverso la relazione $B^{ijk} = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijkmn} B^{mn}$ si ottengono le espressioni

$$T_6^{00} = \frac{1}{4}\left(E^{ij} E^{ij} + B^{mn} B^{mn}\right), \qquad T_6^{0i} = -\frac{1}{4} \epsilon^{ijkmn} E^{jk} B^{mn}. \tag{A.18}$$

Analogamente a quanto fatto nel caso precedente, introduciamo il doppietto $V^{mn} = (E^{mn}, B^{mn})$ e dotiamolo di un indice interno $a = (1, 2)$ tale che $V_1^{mn} = E^{mn}$ e $V_2^{mn} = B^{mn}$: in termini di tale doppietto le espressioni (A.18) si possono riscrivere nella seguente maniera:

$$T_6^{00} = \frac{1}{4} V_a^{mn} V_b^{mn} \delta^{ab}, \qquad T_6^{0i} = -\frac{1}{8} \epsilon^{imnkl} V_a^{mn} V_b^{kl} \kappa^{ab}. \tag{A.19}$$

La simmetria di dualità di tali componenti è quella che lascia invariati i tensori δ^{ab} e κ^{ab}, dove κ^{ab} indica le componenti della matrice $\kappa = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, e corrisponde al gruppo di dualità $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2'$: abbiamo dunque ritrovato la simmetria di dualità della dinamica in dimensione $D = (2 \mod 4)$, come è già stato fatto notare nella sezione 4.2.1.

Bibliografia

[1] M. Abate and F. Tovena, *Geometria Differenziale*, Springer Science & Business Media, 2017.

[2] G. Bressi, G. Carugno, F. Della Valle, G. Galeazzi, G. Ruoso and G. Sartori, *Testing the neutrality of matter by acoustic means in a spherical resonator*, Phys. Rev. **A83** 5, 2011.

[3] S. Deser, A. Gomberoff, M. Henneaux and C. Teitelboim, *Duality, selfduality, sources and charge quantization in Abelian N form theories*, Phys. Lett. **B400** 80-86, 1997.

[4] S. Deser, A. Gomberoff, M. Henneaux and C. Teitelboim, *P-brane dyons and electric magnetic duality*, Nucl. Phys. **B520** 179-204, 1998.

[5] S. Deser, M. Henneaux and A. Schwimmer, *P-brane dyons, theta terms and dimensional reduction*, Phys. Lett. **B428** 284-288, 1998.

[6] P. A. M. Dirac, *Quantised Singularities in the Electromagnetic Field*, Proc. Roy. Soc. London **A133** 60, 1931.

[7] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, McGraw-Hill, 1965.

[8] K. Lechner, *Elettrodinamica classica*, Springer Science & Business Media, 2014.

[9] K. Lechner and P. Marchetti, *Duality-invariant Quantum Field Theories of Charges and Monopoles*, Nucl. Phys. **B529** 529-576, 1991.

[10] K. Lechner and P. Marchetti, *Interacting branes, dual branes, and dyonic branes: a unifying lagrangian approach in D dimensions*, JHEP **0101** 003, 2000.

[11] K. Lechner, *Ultraviolet singularities in classical brane theory*, JHEP **1012** 063, 2010.

[12] R. I. Nepomechie, *Magnetic monopoles from antisymmetric tensor gauge fields*, Phys. Rev. **D31** 1921, 1985.

[13] J. S. Schwinger, *Magnetic charge and quantum field theory*, Phys. Rev. **144** 1087, 1966.

[14] C. Teitelboim, *Monopoles of higher rank*, Phys. Lett. **167B** 69-72, 1986.

[15] C. Teitelboim and M. Henneaux, *p-Form Electrodynamics*, Found. Phys. **16** 593-617, 1986.

[16] T. T. Wu and C. N. Yang, *Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields*, Phys. Rev. **D12** 3845, 1975.

[17] D. Zwanziger, F. Neri and R. A. Brandt, *Lorentz Invariance From Classical Particle Paths in Quantum Field Theory of Electric and Magnetic Charge*, Phys. Rev. **D19** 1153, 1979.

[18] J. S. Schwinger, *Magnetic Charge and the Charge Quantization Condition*, Phys. Rev. **D12** 3105, 1975.

[19] J. D. Jackson, *Elettrodinamica Classica*, Zanichelli editore, 2001.

[20] P. Pasti, D. P. Sorokin and M. Tonin *Duality symmetric actions with manifest space-time symmetries*, Phys. Rev. **D52** R4277-R4281, 1995.