UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE ED AZIENDALI "M.FANNO"

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA

PROVA FINALE

"Condizioni sufficienti di Mangasarian per le soluzioni di problemi di controllo ottimo."

RELATRICE:

PROF. SSA ALESSANDRA BURATTO

LAUREANDO: FRANCESCO LANOTTE

MATRICOLA N. 1090209

ANNO ACCADEMICO 2016 – 2017

Indice

I Impostazione del problema **3**

II Teorema di Mangasarian **4**

III Dimostrazione del Teorema **4**

IV Esempio di Applicabilità del Teorema di Mangasarian: Consumo e Investimento **7**

V Esempio di Non Applicabilità del Teorema di Mangasarian: Economia Bisettoriale **9**

VI Conclusioni **12**

Condizioni sufficienti di Mangasarian per le soluzioni di problemi di controllo ottimo

Laureando LANOTTE FRANCESCO*

Università degli Studi di Padova
Scuola di Economia e Scienze Politiche
Dipartimento di Scienze Economiche ed Aziendali M. Fanno
Dipartimento di Matematica

Sommario

Nell'analisi di un problema economico ci si trova spesso nella situazione di dover comprendere, governare e modificare il comportamento di grandezze che variano nel tempo. In quest'ambito una decisione può essere vista come un problema di controllo ottimo, in quanto le possibili strategie che un decisore ha a disposizione influiscono sull'evoluzione di un sistema dinamico, ovvero un sistema in cui le leggi che governano il comportamento del sistema stesso sono rappresentate da equazioni differenziali. In questa prova finale si analizza il teorema di Mangasarian che fornisce condizioni sufficienti per stabilire l'ottimalità di soluzioni di problemi di controllo ottimo. Vengono poi presentati due modelli economici: un primo esempio sul Consumo e Investimento, dove il teorema di Mangasarian è applicabile ed un esempio di Economia Bisettoriale dove invece tale teorema non risulta essere applicabile, e quindi si introduce un teorema alternativo (teorema di Arrow).

In un problema di controllo ottimo un criterio di ottimalità assegna un certo valore ad ogni funzione di controllo ammissibile. Il problema si traduce nel trovare una funzione di controllo ammissibile che massimizzi il criterio di ottimalità. In letteratura esistono dei teoremi che danno condizioni necessarie per trovare i candidati all'ottimalità (4) (7).
Tra questi è noto il Principio del Massimo di Pontryagin (7) che fornisce le condizioni necessarie che permettono di caratterizzare le candidate soluzioni. La soluzione ottima di un problema di controllo ottimo deve necessariamente soddisfare tali condizioni. Tuttavia ciò non è sufficiente per garantire che tale coppia sia ottimale, infatti, le condizioni necessarie suggeriscono solamente candidate soluzioni.
Se si trovano più candidati si deve calcolare il valore della funzione obiettivo in questi punti e confrontarne i valori per la scelta ottima.
Un altro approccio potrebbe essere quello di considerare delle condizioni di esistenza: in letteratura si sostiene spesso che la natura del problema implichi che una soluzione ottimale esista. Da qui l'importanza di considerare teoremi di esistenza; fra i tanti in letteratura si ricorda quello standard per eccellenza di Filippov-Cesari (7, pp.131,132).
Un altro metodo consiste nel considerare condizioni sufficienti (3, pp.52,53): se esiste una soluzione che soddisfi tali condizioni essa allora è ottimale.
Il presente lavoro tratta di un teorema fondamentale di sufficienza per problemi di controllo ottimo: il teorema di Mangasarian (7) (1).
Dopo averne presentato l'enunciato e la sua dimostrazione per un problema di controllo ottimo nella forma di Bolza, cioè nella sua forma più generale, si analizza una sua applicazione in ambito macroeconomico in un modello di Consumo e Investimento. Ci sono dei casi in cui le ipotesi del teorema di Mangasarian non

*Relatrice: Dott.ssa Alessandra Buratto

sono soddisfatte e quindi questo teorema non risulta essere applicabile. Un esempio di tali casi si riscontra nel modello di microeconomia Bisettoriale.

I. Impostazione del problema

Si formalizza il problema di controllo ottimo come segue. Per la notazione si fa riferimento ai testi "Optimal Control Theory with Economics Applications" (7) e "Ottimizzazione Dinamica. Modelli economici e gestionali" (2).
Si consideri un intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ di analisi del sistema in oggetto, dove t_0 rappresenta lo stato iniziale e t_1 lo stato finale.
In un problema di controllo ottimo sono presenti due funzioni: la funzione $x(t)$:$[t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ che è detta *funzione di stato* e la funzione $u(t)$: $[t_0, t_1] \to \mathbb{R}^r$ che è detta *funzione di controllo*. In genere una funzione di controllo $u(t)$ è soggetta a vincoli come per esempio $u(t) \in \Omega$ dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^r$ è l'insieme dei controlli ammissibili spesso, compatto e invariante nel tempo.
In situazioni concrete l'insieme delle strategie di un decisore è soggetto a dei vincoli: per esempio l'intensità di spesa può essere soggetta ad un budget e non si può produrre all'infinito. I vincoli definiscono le politiche decisionali e dunque le decisioni ammissibili. Dal punto di vista matematico è molto importante l'analisi dei vincoli: infatti meno vincoli ci sono, più la regione è ampia. Bisogna considerare però il fatto che un problema potrebbe non avere soluzione non solo perché inammissibile (per esempio il caso in cui avendo troppi vincoli l'insieme di politiche ammissibili risulti vuoto), ma anche perché il problema potrebbe essere illimitato.
Esiste una relazione tra la funzione di stato e la funzione di controllo: questo legame è detto *equazione del moto* o *equazione di stato*. L'evoluzione dello stato nel tempo è influenzata dalle politiche decisionali in ogni istante appartenente all'intervallo $[t_0, t_1]$ ovvero dal vettore delle variabili di controllo. La relazione tra funzione di stato e di controllo indica l'evoluzione dello stato nell'intervallo di tempo considerato $[t_0, t_1]$, ed è rappresentata dal sistema delle equazioni del moto:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t)$$

per ogni controllo ammissibile $u(t)$ fissato. Si tratta di n equazioni differenziali del primo ordine per le n funzioni di stato $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$.
La funzione $f : \mathbb{R}^{n+r+1} \to \mathbb{R}^n$ è per ipotesi continua e dotata di derivate parziali prime continue in x.
Per ogni controllo ammissibile $u(t)$ fissato, le n equazioni del moto costituiscono, insieme alla condizione iniziale, il seguente problema di Cauchy che ammette una ed una sola soluzione.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t) \quad (1)$$
$$x(t_0) = x^0 \quad (2)$$

L'equazione 1 è l'equazione del moto, mentre l'equazione 2 fa riferimento allo stato iniziale del sistema.
Il controllo va ad agire nel sistema che è descritto dall'equazione del moto: sapendo dove si trova il sistema all'inizio della programmazione, si riesce a sapere dove esso si trovi in ogni altro istante, noto il controllo.
La funzione di stato è detta ammissibile se è determinata dal problema di Cauchy appena descritto (per un controllo $u(t)$ ammissibile) e se rispetta le condizioni finali sullo stato: $x(t_1) = x^1$ è lo stato finale. Si definisce quindi *soluzione ammissibile* una coppia ammissibile $(u(t), x(t))$.
In un problema di controllo ottimo il decisore si trova a massimizzare o minimizzare un obiettivo.
Bisogna considerare dunque la formulazione di una funzione obiettivo: essa tiene conto dei criteri decisionali, considerando anche il primo assioma dell'Economia: quello di non sazietà (6). L'obiettivo viene descritto da un integrale che dipende dalla funzione di controllo e quindi si indica con $J(u)$.
Si ha una funzione che controlla il sistema e si cerca fra tutti i controlli ammissibili quello che

rende massimo l'obiettivo.
È importante notare come la funzione obiettivo dipenda dal tempo, stato e controllo: quindi dipende dalle strategie del decisore.

Un generico problema di controllo ottimo nella forma di Bolza si presenta nella seguente forma

massimizza

$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)dt + S(x(t_1))$

Soggetto ai seguenti vincoli
$\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$
$x_i(t_0) = x^0$
$x_i(t_1) = x_i^1,$ $i = 1, ..., l$
$x_i(t_1) \geq x_i^1,$ $i = l+1, ..., m$
$x_i(t_1) \in \mathbb{R},$ $i = m+1, ..., n$
$u(t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^r$

Si definisce la funzione hamiltoniana (3, pp.78,79)

$$H(x, u, p, t) = p_0 f_0(x, u, t) + pf(x, u, t)$$
$$= p_0 f_0(x, u, t) + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(x, u, t)$$

II. Teorema di Mangasarian

Sia $(u^*(t), x^*(t))$ una coppia ammissibile; si supponga che Ω sia convesso e che esistano le derivate parziali $\frac{df_i}{du_j}$ e siano continue. Sia $p_0 = 1$, esistano n costanti $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n \in \mathbb{R}$ ed esista una funzione di classe C^1 a tratti $p(t)$ $(p : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n)$ tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1. $P_0 = 1$ per ipotesi
2. $\sum_{j=1}^{r} \frac{dH^*(x^*(t), u^*(t), p(t), t)}{du_j}(u_j^*(t) - u_j) \geq 0$
3. $\dot{p}_i(t) = -\frac{dH^*(x^*(t), u^*(t), p(t), t)}{dx_i}$
4. $p_i(t_1) = p_0 \frac{dS(x(t_1))}{dx_i} + \gamma_i$
   $\gamma_i \in \mathbb{R}$ $i : 1, ..., l$
   $\gamma_i \geq 0 \quad \gamma_i(x_i(t_1) - x_i^1) = 0$ $i : l+1, ..., m$
   $\gamma_i = 0$ $i : m+1, ..., n$
5. $H(x, u, p(t), t)$ è concava in (x,u) per ogni $t \in [t_o, t_1]$, e $S(x(t_1))$ è concava in x.

$\Rightarrow$ allora $(u^*(t), x^*(t))$ è soluzione ottima.

Osservazione: Se H è strettamente concava in (x,u) e S è strettamente concava in x, allora esiste un'unica soluzione.

III. Dimostrazione del Teorema

Si deve dimostrare che il controllo sia un controllo ottimo cioè che

$$J(u^*) \geq J(u) \ \forall u \in \Omega$$

Posto

$$\bar{\Delta} = J(u^*) - J(u)$$

Si vuole dimostrare che

$$\bar{\Delta} \geq 0$$

Riscrivendo per esteso

$$\bar{\Delta} = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x^*(t), u^*(t), t)dt + S(x^*(t_1))$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)dt - S(x(t_1)) \ \geq 0$$

per ogni coppia (u(t),x(t)) ammissibile.

Si definisca Δ come

$$\Delta = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x^*, u^*, t)dt - f_0(x, u, t)dt$$

Quindi diventa da dimostrare:

$$\bar{\Delta} = \Delta + S(x^*(t_1)) - S(x(t_1)) \geq 0$$

D'ora in poi si omette la dipendenza dagli argomenti delle funzioni.

f_0 anzichè $f_0(x,u,t)$
f_0^* anzichè $f_0(x^*,u^*,t)$

Quindi:

$$H^* = f_0^* + pf^* \rightarrow f_0^* = H^* - pf^*$$

$$H = f_0 + pf \rightarrow f_0 = H - pf$$

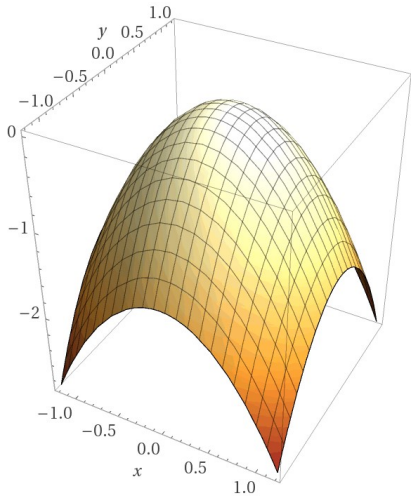
Servendosi di f_0^* per definire l'hamiltoniana, risulta

$$\Delta = \int_{t_0}^{t_1} H^* - pf^* dt - f_0(x,u,t) - H + pf$$

$$\Delta = \int_{t_0}^{t_1} (H^* - H)dt - \int_{t_0}^{t_1} p(f^* - f)dt$$

Le condizioni del primo ordine per una funzione concava richiedono che in ogni punto del suo grafico il piano (iperpiano), ivi tangente, giaccia sopra il grafico.
Sotto ipotesi di regolarità questo equivale a porre

$$f(y) < f(y^*) + \nabla f(y^*)(y - y^*)$$



Dove y=(x,u) cioè il vettore (x,u).

Dalle ipotesi di concavità della funzione H concava in (x,u), la formula appena descritta diventa la seguente
$H(x,u,p) < H^*(x^*,u^*,p) + \frac{dH^*}{dx}(x - x^*) + \frac{dH^*}{du}(u - u^*)$

Ne consegue che

$\Delta = \int_{t_0}^{t_1}(H^* - H)dt - \int_{t_0}^{t_1} p(f^* - f)dt \quad \geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{dH^*}{dx}(x - x^*) + \frac{dH^*}{du}(u - u^*) - p(f^* - f)dt$

dove
$\frac{dH^*}{dx} = -\dot{p}$

$\frac{dH^*}{du}(u - u^*) \geq 0$

$f^* = \dot{x}_i^*$
$f = \dot{x}_i$

Dalla condizione della derivata dell'equazione aggiunta si osserva che

$\dot{p} = -\frac{dH^*}{dx}$

e inotre emerge che

$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dH^*(x^*,u^*,p,t)}{du}(u^* - u)$ è ≥ 0

Quindi si trova

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dp(t)(x(t) - x^*(t)}{dt} dt$$

e si tratta di una derivata di un prodotto per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$p(t_1)(x(t_1) - x^*(t_1) - p(t_0)(x(t_0) - x^*(t_0)$$

nella quale la differenza nella seconda parentesi è nulla perchè sono ammesse soluzioni $x(t_0) = x^* = x^0$.

Dunque resta solo la prima parte: $p(t_1)(x(t_1) - x^*(t_1)) \geq 0$

Sia dunque $(u(t), x(t))$ una coppia ammissibile: da $p_0 = 1$ otteniamo che

$\Delta \geq \int_{t_o}^{t_1} \dot{p}(x - x^*) + p(\dot{x} - \dot{x}^*)dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{dH^*(x^*,u^*,p,t)}{du}(u^* - u)$

Quindi

$$\Delta \geq \sum_{i=1}^{n} p_i(t_1)[x_i(t_1) - x_i^*(t_1)]$$

Dalla concavità e differenziabilità di S(x) otteniamo che

$S(x^*(t_1)) - S(x(t_1)) \geq \nabla S(x^*(t_1))(x^*(t_1) - x(t_1) =$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dS(x^*(t_1))}{dx_i}[x_i^*(t_1) - x_i(t_1)]$$

Sommando le due disuguaglianze si può quindi concludere che

$\bar{\Delta} \geq \sum_{i=1}^{n}(p_i(t_i) - \frac{dS(x^*(t_1))}{dx_i})[x_i(t_1) - x_i^*(t_1)] =$
$= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i[x_i(t_1) - x_i^*(t_1)] \geq 0$

Tutti i termini nella sommatoria sono positivi infatti:

1. se $i \in [1, ..., l]$ allora
$$x_i(t_1) - x_i^*(t_1) = x_i^1 - x_i^1 = 0$$
2. se $i \in [l + 1, ..., m]$ allora
$\gamma_i \geq 0$ e
se $\gamma_i > 0$ allora $x_i^*(t_1) = x_i^1$
da cui
$$x_i(t_1) - x_i^*(t_1) \geq 0$$
e infine
$$\gamma_i[x_i(t_1) - x_i^*(t_1)] \geq 0$$
3. se $i \in [m + 1, ..., n]$ allora
$$\gamma_i = 0$$

Allora

$$\bar{\Delta} \geq \sum_{i=1}^{n} \gamma_i[x_i(t_1) - x_i^*(t_1)] \geq 0$$

E dunque il controllo $u^*(t)$ è ottimo.

Commenti al teorema:

- Questo teorema permette di verificare se le candidate soluzioni trovate con il Principio del Massimo di Pontryagin (7) sono ottime.
- Le condizioni sufficienti fornite in questo teorema richiamano quelle necessarie del Principio del Massimo di Pontryagin, salvo l'ultima che dà la condizione di sufficienza.
- Al fine di trovare il candidato controllo si deve massimizzare H rispetto a u, ora per provarne la sufficienza, si deve allargare l'analisi allo studio della concavità della funzione hamiltoniana in (x,u).

IV. Esempio di Applicabilità del Teorema di Mangasarian: Consumo e Investimento

Si analizza ora un esempio nel quale il teorema di Mangasarian permette di provare la sufficienza delle ipotesi del Principio del Massimo di Pontryagin.
Si consideri il problema di un paese che deve decidere come utilizzare al meglio il flusso di denaro che entra in maniera esogena nelle proprie casse dall'esterno. Il paese può utilizzare tale flusso di denaro o per investirlo in infrastrutture o per consumi immediati. Si denoti con a(t) il flusso di aiuti, che si suppone essere una funzione continua del tempo: istante per istante avviene l'erogazione dell'importo di denaro. Si ipotizzi in questo modello un flusso positivo $a(t) > 0$. Essendo però interessati alla programmazione di un intervallo di tempo [0,T] si deve considerare l'integrale del flusso o intensità di denaro. Si denoti con x(t) il livello di infrastrutture al tempo t: si precisa che x(t) è la funzione di stato.
È importante sottolineare la concavità come caratteristica della funzione di utilità: in questo modello si ipotizza strettamente concava. Si vuole decidere come ripartire il flusso di aiuti a(t) fra infrastrutture (con un conseguente aumento del livello delle infrastrutture) e consumi (il consumo invece porta ad una utilità). Si tratta quindi di determinare la percentuale w(t) da destinare alle infrastrutture e conseguentemente (1-w(t)) da destinare ai consumi: w(t) è la funzione di controllo.
Il decisore vorrebbe massimizzare la propria utilità derivante dai consumi, tenendo però in considerazione un vincolo legato alle infrastrutture: infatti si vuole garantire un livello minimo x^T di infrastrutture tale per cui all'istante finale valga $x(T) \geq x^T$.
L'incremento del livello delle infrastrutture è direttamente ottenuto dalla quantita di aiuti e dunque dal prodotto della percentuale $w(t) \in [0,1]$ moltiplicata per il flusso di aiuti $a(t)$.
Dunque $\dot{x}(t) = w(t)a(t)$
Il problema si formalizza come segue.

massimizza
$J(w) = \int_0^T U((1-w(t))a(t)dt$
soggetto a
$\dot{x}(t) = w(t)a(t).$
$x(0) = x^0$
$x(T) \geq x^T$
$w(T) \in [0,1]$

Ci si limita a studiare i casi in cui

$$x^0 < x^T < x^0 + \int_0^T a(t)dt$$

cioè si escludono le situazioni nelle quali qualsiasi funzione di controllo risulti banalmente nota e nulla oppure inammissibile imponendo un livello di infrastrutture all'istante finale maggiore del massimo livello effettivamente raggiungibile.

Effettuando un'analisi delle condizioni necessarie del Principio del Massimo di Pontryagin (2, pp.15,16) si possono trarre alcune conclusioni:

La costante P_0 non può essere uguale a zero: se così fosse ciò contraddirebbe le condizioni di trasversalità. In questo caso l'hamiltoniana sarebbe pari a H(x,w,p,t)=pa(t)w. Quindi deve necessariamente essere $p_0 = 1$.
L'hamiltoniana è qui definita:

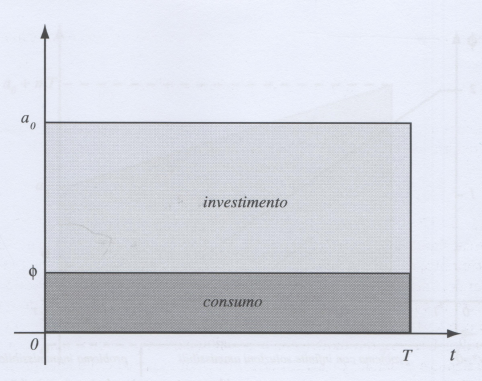
$$H(x,w,p,t) = p_0 U((1-w)a(t) + pa(t)w$$

che è di classe C^2.
Dallo studio delle condizioni necessarie (2, pp.36,37) emerge che la derivata della funzione aggiunta sia nulla.
Questo significa che la funzione aggiunta $p(t) \equiv K$ è costante. Dallo studio delle condizioni di trasversalità emerge che la funzione aggiunta è costante e positiva. La condizione $K = 0$ porta a soluzioni non ammissibili ($x(T) < x^T$).
Essendo $K > 0$ e $K(x(T) - x^T) = 0$ ne segue che $x(T) = x^T$, ovvero si raggiunge il minimo livello di infrastrutture richiesto.

Le condizioni del Principio del Massimo di Pontryagin di massimizzazione della funzione hamiltoniana rispetto al controllo w, portano ai seguenti 2 casi con corrispondenti candidate funzioni di controllo ottimo:

- w(t) = 1 se $a(t) > 0$ e $k \geq U'(0)$
- w(t) = $\frac{max[0,a(t)-\phi(k)]}{a(t)}$ se $a(t) > 0$ e $k < U'(0)$

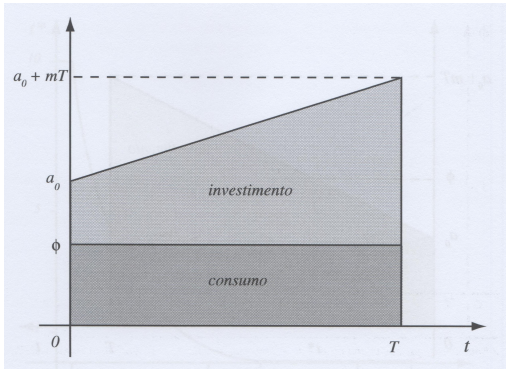
Ove $\Phi(K)$ è la funzione inversa dell'utilità marginale.
Si presentano ora alcuni casi particolari al variare del flusso di aiuti $a(t)$. Nel caso di un flusso di aiuti $a(t)$ costante, il valore massimo di infrastrutture raggiungibile all'istante finale è $x_{max}(T) = x^0 + a_0 T$. Il controllo ottimo $w^*(t)$ determinato in questo caso è $\frac{x^T - x_0}{a_0 T}$ ovvero la frazione di flusso di aiuti da destinare agli investimenti risulta essere uguale al rapporto fra il gap di livello di infrastrutture da raggiungere e l'importo totale di aiuti nell'intervallo di tempo considerato $[0, T]$.

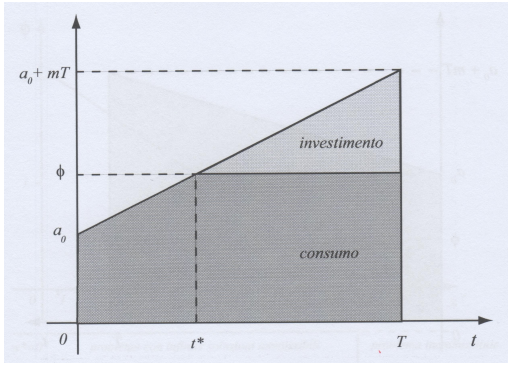


Si consideri ora il caso in cui il flusso di aiuti $a(t)$ sia strettamente crescente: si possono avere due situazioni: o si investe fin dall'istante 0 con un livello di consumi costanti, oppure se il livello di flussi iniziali a_0 non è molto grande all'inizio si investe in consumi, ma non in infrastrutture. L'istante a partire dal quale si inizia anche ad investire è descrescente in x^T, cioè maggiore è il livello di infrastrutture richiesto e prima occorre dedicarsi ad esse. Infatti questo istante è della forma (2, pp.46,47):

$$t^* = T - \sqrt{\frac{2(x^T - x_0)}{m}}$$

ove m è il coefficiente angolare della retta $a(t) = a_0 + mt$.
Seguono le rappresentazioni grafiche di questi ultimi due casi nell'ipotesi di flussi di aiuti crescenti.





Torniamo ora a dimostrare l'applicabilità del teorema di Mangasarian a questo modello. Essendo per ipotesi $p_0 = 1$, l'hamiltoniana diventa
$H(x, w, p, t) = U((1 - w)a(t) + pa(t)w$
e soddisfa quindi le condizioni 1,2,3,4 di Mangasarian. Resta quindi da verificare l'ultima: quella di sufficienza e cioè di concavità dell'hamiltoniana in (x,w).
Le derivate parziali prime e seconde (pure e miste) della funzione hamiltoniana rispetto allo stato x e al controllo w sono:

$$\frac{dH}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d^2H}{dx^2} = \frac{d^2H}{dxdw} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dw} &= -U'(1-w)a + pa \\ \frac{d^2H}{dw^2} &= U''((1-w)a)a^2\end{aligned}$$

Perciò la matrice hessiana della funzione hamiltoniana è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a^2(t)U''((1-w)a(t)) \end{pmatrix}$$

Tale matrice è semidefinita negativa (8, pp.122,123), infatti i minori principali di ordine 1 (dispari) sono ≤ 0 essendo

$$a^2(t)U''((1-w)a(t) < 0$$

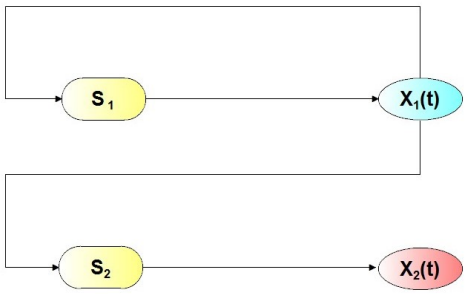
e il minore di ordine 2 (pari) risulta ≥ 0 infatti il determinante della matrice è uguale a zero. È possibile concludere che le candidate soluzioni presentate nel seguente paragrafo costituiscono il controllo ottimo del problema riguardante la spartizione degli aiuti fra consumi e investimenti.

V. Esempio di Non Applicabilità del Teorema di Mangasarian: Economia Bisettoriale

Viene presentato un esempio dove il teorema di Mangasarian non risulta essere applicabile. Si consideri il problema di pianificare un'Economia Bisettoriale, cioè un sistema economico costituito da due settori che producono due tipologie diverse di beni (investimento e consumo). Si intende ottimizzare l'allocazione dei beni d'investimento in un'economia chiusa ristretta a due settori: un primo settore formato da aziende produttrici beni d'investimento e un secondo settore dove vengono prodotti beni di consumo. I beni d'investimento possono essere utilizzati in due modi:

1. possono essere reinvestiti
2. possono essere input per il settore dei beni di consumo

Si indichi con $x_1(t)$ il flusso di output prodotto dal settore S_1 e con $x_2(t)$ il flusso di beni prodotti dal settore S_2. Queste due funzioni costituiscono le due funzioni di stato.



La variabile di controllo in questo problema è la frazione $u(t)$ di beni d'investimento riutilizzato nel primo settore. Dalla sua definizione si ha che $u(t) \in [0,1]$. Si supponga che ciò che non viene reinvestito in beni d'investimento nel primo settore, venga investito nel secondo. Si ottengono i due flussi di investimento nei due settori:

- $u(t)x_1(t)$ nel primo settore
- $(1-u(t))x_1(t)$ nel secondo settore

Per ipotesi si consideri un fattore di produttività dell'investimento proporzionale al flusso ivi investito ed uguale per entrambi i settori. Sia esso costante e denotato dal parametro $a > 0$. Quindi si hanno le equazioni del moto:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= au(t)x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a(1-u(t))x_1(t)\end{aligned}$$

Noti i valori iniziali delle intensità di produzione $x_1(t) = x_1^0 > 0$ e $x_2(t) = x_2^0 \geq 0$, è importante sottolineare l'ipotesi di stretta positività dell'intensità di x^0 altrimenti il problema degenererebbe perdendo quindi di significato. Si vuole determinare una politica di investimento in un intervallo $[0,T]$ che consenta di raggiungere la massima intensità di infrastrutture all'istante finale $x_2(T)$.

Il problema diventa:

massimizza $J_1(u) = x_2(T)$
soggetto ai vincoli

$\dot{x}_1(t) = au(t)x_1(t)$
$\dot{x}_2(t) = a(1-u(t))x_1(t)$
$x_1(t) = x_1^0$ e $x_2(t) = x_2^0$
$u(t) \in [0,1]$

Sebbene nel problema così formulato appaiano due variabili di stato, è possibile esplicitare la variabile di stato x_2 in funzione di x_1 arrivando quindi ad una formulazione equivalente.

massimizza $J_1'(u) = a\int_0^T (1-u(t))x_1(t)dt$
soggetto a

$\dot{x}_1(t) = au(t)x_1(t)$
$x_1(t) = x_1^0$
$u(t) \in [0,1]$

Il legame tra i due problemi è dato dalla relazione

$$J_1(u) = x_2^0 + J_1'(u)$$

per ogni controllo ammissibile.
Si definisce la funzione hamiltoniana

$$H(x_1,u,p_1,t) = p_0a(1-u)x_1 + p_1aux_1 = p_0ax_1(p_1-p_0)x_1$$

È importante sottolineare come la funzione hamiltoniana sia lineare nel controllo. Il controllo ottimo dunque può assumere solamente due valori:

- $u^*(t) = 1$ se $p_1(t) > p_0$ cioè $p_1(t) > 1$
- $u^*(t) = 0$ se $p_1(t) < p_0$ cioè $p_1(t) < 1$

Un controllo con le caratteristiche di questo tipo è detto *bang bang* (8, pp.605,606) (7, pp.166,167).

Dall'analisi delle condizioni del Principio del Massimo di Pontryagin (2, pp.151,152) si individua il candidato controllo ottimo $u^*(t)$ in funzione dell'istante di tempo finale T. Più precisamente (2, pp.153,154) per un intervallo di programmazione breve $T \leq \frac{1}{a}$ risulta $u^*(t) = 0$ ovvero si investe tutto in infrastrutture. Per un intervallo di programmazione più lungo invece si ha:

- $u^*(t) = 1, \qquad t \in [0, t^*]$
- $u^*(t) = 0, \qquad t \in (t^*, T]$

Conviene dunque investire soltanto in infrastrutture fino ad un certo istante t^* dove $t^* = T - \frac{1}{a}$ e poi in soli beni di consumo fino al tempo T.
Non avendo vincoli sullo stato all'istante finale si ha che p(t)=0 e dunque $p_0 = 1$. Perciò l'hamiltoniana diventa:
$H(x_1,u,p_1,t) = a[1+(p_1-1)u]x_1$

Si vuole ora verificare che il teorema di Mangasarian non è applicabile e dunque a priori il candidato controllo non è ottimo.

La matrice hessiana della funzione hamiltoniana

$$\begin{pmatrix} 0 & a(p_1-1) \\ a(p_1-1) & 0 \end{pmatrix}$$

è indefinita se $p_1 \neq 1$. Infatti il suo determinante $-a^2(p_1-1)^2$ risulta negativo.
È violata quindi l'ipotesi di sufficienza del teorema di Mangasarian perché la funzione hamiltoniana non è concava in (x,u).

L'argomento principale di questa prova finale è l'analisi del teorema di Mangasarian. Per completezza si vuole ricorrere ora ad un altro teorema di sufficienza che può essere di aiuto talvolta quando Mangasarian non è applicabile .

Si deve ricorrere quindi ad un teorema alternativo: il teorema di Kenneth J. Arrow. Si tratta di un altro teorema di sufficienza che usa una condizione più debole rispetto a Mangasarian (7), nonostante si debba ricorrere alla definizione di una nuova funzione: l'hamiltoniana massimizzata.

Teorema di Arrow

Sia$(u^*(t), x^*(t))$ una coppia ammissibile; sia $p_0 = 1$ ed esista una funzione continua e di classe C^1 a tratti $p(t)$ ($p : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1. $\dot{p}_i(t) = -\frac{dH^*(x^*(t),u^*(t),p(t),t)}{dx_i}, i = 1, ..., n;$
2. $H^*(x^*(t), u, p(t), t) \leq H(x^*(t), u^*(t), p(t), t)$

   $\forall u \in \Omega, \forall t \in [t_0, t_1]$
3. $p_i(t_1) \geq 0$ e $p_i(t_1)(x_i(t_1) - x_i^1) = 0$
   $i : l + 1, ..., m$
   $p_i(t_1) = 0 \qquad i : m + 1, ..., n$
4. La funzione $H^*(x, p(t), t)$ = max $H(x, u, p(t), t)$ con u $\in$ Ω esiste ed è concava in x $\forall t \in [t_0, t_1]$.

$\Rightarrow$ allora $(u^*(t), x^*(t))$ è soluzione ottima.

Se $H(x, p(t), t)$ è strettamente concava in x, per ogni t $\in [t_0, t_1]$, allora $(u^*(t), x^*(t))$ è l'unica soluzione ottima.

Si noti come qui è richiesta solo la concavità dell'hamiltoniana massimizzata solo in x.

Ritornando quindi al problema dell'Economia Bisettoriale, si consideri la funzione hamiltoniana massimizzata che risulta essere lineare in x_1 e dunque concava in x_1, infatti

$H^*(x_1, p_1, t) = maxH(x_1, u, p_1, t) =$

- ax_1 se $p_1 \leq 1$
- ax_1p_1 se $p_1 > 1$

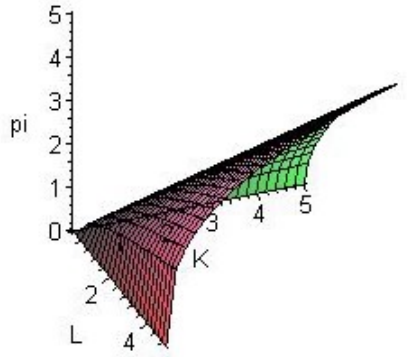
Le ipotesi del teorema di sufficienza di Arrow sono soddisfatte e quindi si può affermare che quello sopra trovato è il controllo ottimo (unico) del problema.
Osservazione: Si osservi che in generale non è sufficiente verificare che l'hamiltoniana sia concava in x. Questo perché la $H^*(t, x, \lambda) = H(t, x, u^*(t, x, \lambda), \lambda)$ dipende da x non solo per via del secondo termine nell'argomento della funzione, ma anche dal terzo: $u^*(t, x, \lambda)$ (5, pp.141,142).

La corrispondente massima produttività di beni di consumo è la funzione
x_2^{max}(T) = $J_1(u^*) = x_2^0 + J(u^*)$=

- $x_2^*(T) = x_2^0 + ax_1^0T$ se $T \leq 1/a$
- $x_2^*(T) = x_2^0 + x_1^0e^{aT-1}$ se $T > 1/a$

VI. Conclusioni

In questa prova finale si è voluto sottolineare l'applicabilità del Teorema di Mangasarian allo studio delle coppie di soluzioni stato-controllo in modelli economici al fine di classificarle come soluzioni ottime per un problema di controllo ottimo. Dallo studio è emerso che questo teorema è di ampia applicabilità (2) (7). Tuttavia quando non è applicabile si può ricorrere ad altri teoremi di suffcienza. Infatti nel secondo esempio si è potuto concludere che laddove non valga Mangasarian si può cercare di applicare la condizione di sufficienza di Arrow.
La massimizzazione di funzioni concave e la minimizzazione di funzioni convesse aprono questioni per le ipotesi generalmente considerate in letteratura economica (9): risulta che funzioni di produzione e utilità sono crescenti e concave, mentre quelle di costo convesse. A proposito si consideri la funzione di produzione aggregata nel modello di Solow (2, pp.210,211): l'intensità di produzione è strettamente crescente e tale funzione di produzione aggregata è strettamente crescente con produttività marginale strettamente decrescente rispetto alla forza lavoro e capitale: cioè l'intensità di produzione è strettamente crescente e strettamente concava. Si pensi quindi alla ricorrente funzione di tipo Cobb-Douglas la quale è strettamente concava.



Queste considerazioni fanno capire perché in letteratura economica si ritrovano condizioni di concavità per funzioni da massimizzare e concave per funzioni da minimizzare.
Nel modello di Consumo e Investimento si è considerata una funzione di utilità strettamente concava in modo che, evitando i casi in cui tale funzione presenti il carattere di linearità, le sue derivate prime e seconde risultino essere diverse da zero.
In generale, in Economia, le funzioni fondamentali presentano delle caratteristiche ricorrenti: si pensi per esempio alle curve di indifferenza che sono strettamente convesse: se esse fossero lineari l'individuo cui è associata tale curva sarebbe indifferente alle varie combinazioni di panieri. Si ricorda come le curve di indifferenza siano funzioni di utlità ordinale e non cardinale.
Quindi considerare modelli economici laddove si vogliono massimizzare funzioni concave o minimizzare funzioni convesse può essere più semplice se certe situazioni di concavità vengono rispettate in quanto assunte implicitamente. A tale proposito Alpha C. Chiang (4) [Chiang, 1992.pp220-221] afferma: "Frequently, therefore, models are constructed with the appropriate concavity/convexity properties incorporated or assumed at the outset, thereby obviating the need to check sufficient conditions".

Riferimenti bibliografici

[1] **A. Bressan e B Piccoli**, 2007, *Introduction to the Mathematical Theory of Control*. Volume 2. AIMS Series on Applied Mathematics.

[2] **A. Buratto, L. Grosset e B. Viscolani**, 2017, *Ottimizzazione Dinamica. Modelli economici e gestionali*. Quarta Edizione. Padova: Edizioni Libreria Progetto.

[3] **M. R. Caputo**, 2005, *Foundations of Dynamic Economic Analysis*. Cambridge, UK: Cambridge Univerity Press.

[4] **A.C. Chiang**, 1992, *Elements of Dynamic Optimization*. (s.l.) MCGraw Hill International Editions. Economics Series.

[5] **J. C. Engwerda**, 2005, *LQ Dynamic Optimization and Differential Games*. (s.l) Tilburg Univerity.

[6] **W. Nicholson e C. Snyder**, 2008, *Microeconomic Theory - Basic Principles and Extentions.* (s.l.) Thomson South-Western.

[7] **A. Seierstad e K. Sydsaeter**, 1987, *Optimal Control Theory with Economics Applications*. North Hollande, Amsterdam.

[8] **A. Takayama**, 1987, *Mathematical Economics*. Wiley, Chichester. Second Edition. Cambridge Univerity Press.

[9] **Hal R. Varian**, a cura di A. Medio, 2011, *Microeconomia*. (s.l) Libreria Universitaria Cafoscarina.