
Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Corso di Laurea in Ingegneria dell'informazione

Relazione per la prova finale
«Modellizzazione e Controllo di un nanorobot»

Relatore: Prof.ssa. Valcher Maria Elena

Laureando: Biancat Marchet Davide
Matricola n.: 1170874

Padova, 13/03/2026



INTRODUZIONE

La tesi affronta il problema di regolazione della posizione di un nanorobot medico in grado di muoversi nel flusso sanguigno.

Analisi del modello

- Modello non lineare
- Punti d'equilibrio del modello
- Linearizzazione del modello attorno ad un punto d'equilibrio
- Funzione di trasferimento

Controllo in retroazione

- Stabilità del sistema retroazionato
- Specifiche di progetto
- Requisiti della funzione di trasferimento in catena aperta
- Sintesi del controllore
- Verifica delle prestazioni sistema controllato

MODELLO DEL NANOROBOT

Dalle equazioni del moto si ricava il modello del nanorobot

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -F_r(\dot{x} - v_f) + F_m \cos(\alpha) + f_d \\ m\ddot{y} = -F_r\dot{y} + F_m \sin(\alpha) \end{cases}$$

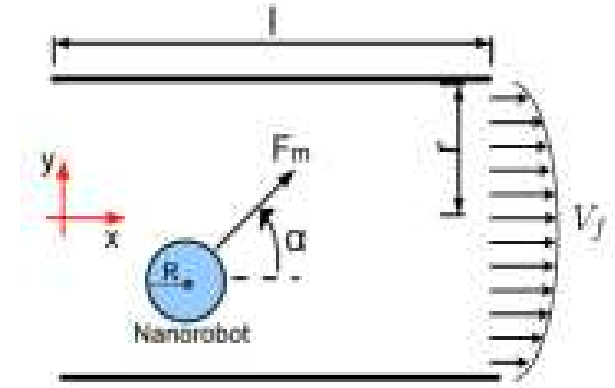
Assumendo come variabile di stato

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [x, y, \dot{x}, \dot{y}]^T$$

L'evoluzione del sistema è descritta dal sistema di equazioni differenziali non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{F_r}{m}(x_3 - v_f) + \frac{F_m \cos(\alpha)}{m} + \frac{f_d}{m} \\ \dot{x}_4 = -\frac{F_r}{m}x_4 + \frac{F_m \sin(\alpha)}{m} \end{cases}$$

Che può essere scritto in forma compatta $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, dove si sono presi come ingressi del sistema la direzione della forza motrice e la forza del disturbo $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = (\alpha, f_d)$



PUNTI DI EQUILIBRIO

I punti di equilibrio con ingresso costante e disturbo nullo $\mathbf{u} = (\alpha, 0)$ sono dati dalle soluzioni di

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ \frac{F_r \Delta P}{m 4\eta l} (r^2 - x_2^2) + \frac{F_m}{m} \cos(\alpha) = 0 \\ -\frac{F_r}{m} x_4 + \frac{F_m}{m} \sin(\alpha) = 0 \end{cases} \quad \text{Con } \alpha \in [0, 2\pi]$$

Le cui uniche soluzioni ammissibili si hanno per $\alpha = \pi$ e assumono la forma

$$\bar{\mathbf{x}} = \left[\bar{x}_1, \pm \sqrt{r^2 - F_m \frac{2l}{3\pi R \Delta P}}, 0, 0 \right]^T$$

LINEARIZZAZIONE

Il sistema viene linearizzato in corrispondenza dell' ingresso costante $\mathbf{u} = (\pi, 0)$ attorno al generico punto di equilibrio

$$\bar{\mathbf{x}} = \left[\bar{x}_1, \sqrt{r^2 - F_m \frac{2l}{3\pi R \Delta P}}, 0, 0 \right]^T$$

Tenendo in riferimento il sistema scritto in forma compatta $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ y = h(\mathbf{x}) \end{cases}$, dove $y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = h(\mathbf{x})$ è l'uscita del sistema, vengono calcolate le matrici jacobiane

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3\pi R \Delta P}{ml} \bar{x}_2 & -\frac{6\pi \eta R}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6\pi \eta R}{m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{F_m}{m} \sin \bar{u}_1 & \frac{1}{m} \\ \frac{F_m}{m} \cos \bar{u}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = (\nabla h|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}})^T = \begin{bmatrix} \frac{\bar{x}_1}{\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}} & \frac{\bar{x}_2}{\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Che vengono usate per scrivere il sistema linearizzato: $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$

SISTEMA LINEARE

Si introducono i seguenti valori per i parametri fisici: $\eta = 0.00116$ Pa s, $R = 10^{-7}$ m, $\Delta P = 0.5$ Pa, $m = 5 \cdot 10^{-10}$ Kg, $l = 90 \cdot 10^{-6}$ m, $r = 50 \cdot 10^{-5}$ m, $F_m = 1.4 \cdot 10^{-12}$ N e si calcolano i valori delle matrici A, B e C in corrispondenza del punto di equilibrio $\bar{\mathbf{x}} = [2.5 \times 10^{-7}, 4.995 \times 10^{-4}, 0, 0]^T$ ottenendo il sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5230 & -4.373 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.373 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \times 10^9 \\ -2.8 \times 10^{-3} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ y = [0.05 \quad 0.9987 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

Viene calcolata la forma di Jordan della matrice A, alla quale corrispondono il modo lineare, la rampa lineare e i due modi convergenti $\exp(-4.373t)$ e $t \exp(-4.373t)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.373 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4.373 \end{bmatrix}$$

L'instabilità del sistema lineare implica anche l'instabilità del punto d'equilibrio per il sistema non lineare



FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

Attraverso la trasformata di Laplace del sistema lineare

$$\begin{cases} s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \\ Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) \end{cases}$$

si ottengono le funzioni di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita

$$G_1(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_1 = -0.002796 \frac{(-18.51 - s)(14.14 - s)}{s^2(-4.373 - s)^2}$$

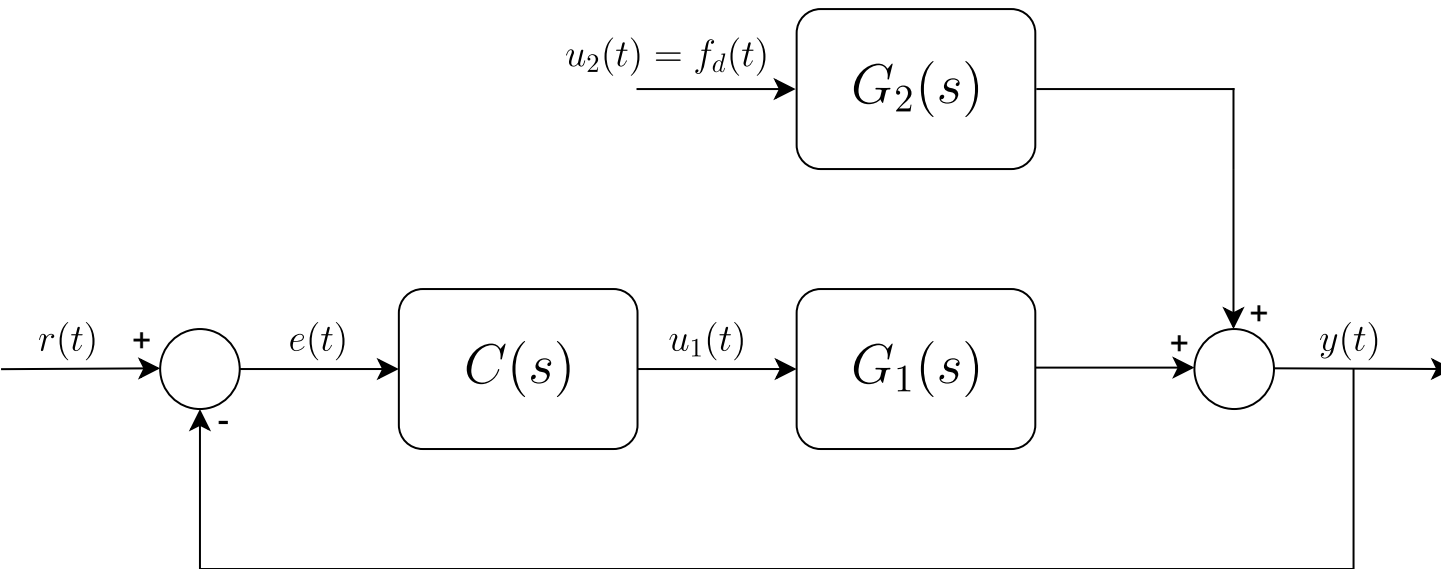
e tra il disturbo e l'uscita

$$G_2(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_2 = \frac{9998195.7}{s(-4.373 - s)}$$

Entrambe le funzioni di trasferimento risultano BIBO instabili perchè hanno un polo nell'origine

CONTROLLO IN RETROAZIONE

Schema del sistema controllato in retroazione unitaria negativa



Dallo schema del sistema retroazionato si ricava la relazione tra le trasformate di Laplace degli ingressi e dell'uscita:

$$Y(s) = \frac{C(s)G_1(s)}{1 + C(s)G_1(s)} R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + C(s)G_1(s)} F_d(s)$$

Da cui si ricavano la funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita

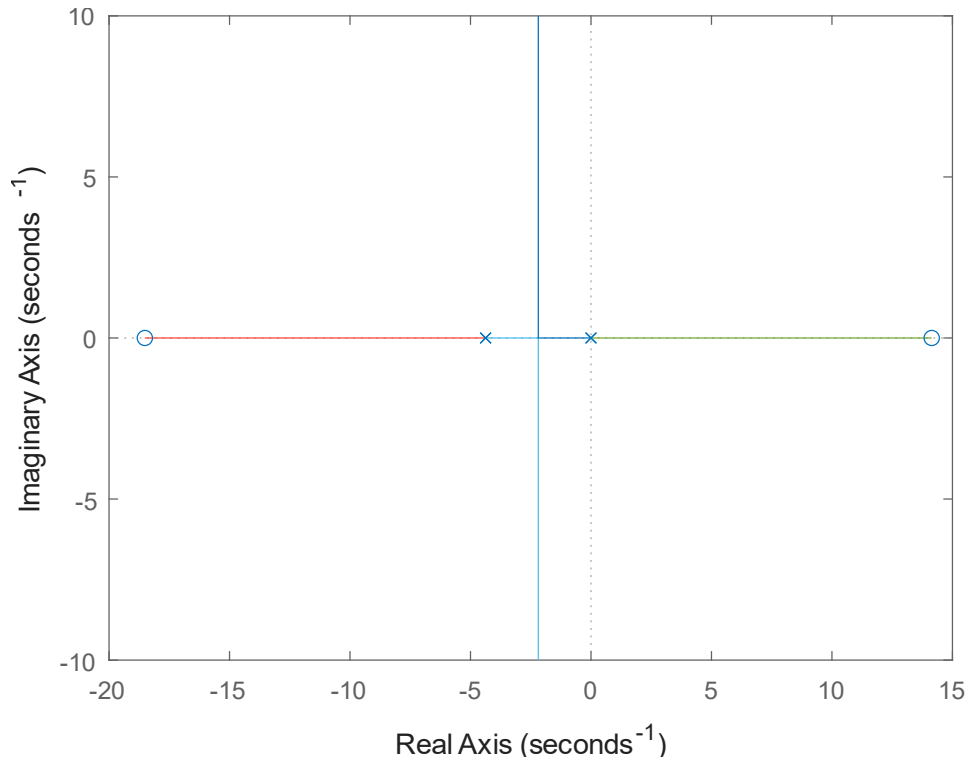
$$W(s) = \frac{C(s)G_1(s)}{1 + C(s)G_1(s)}$$

e quella tra il disturbo e l'uscita:

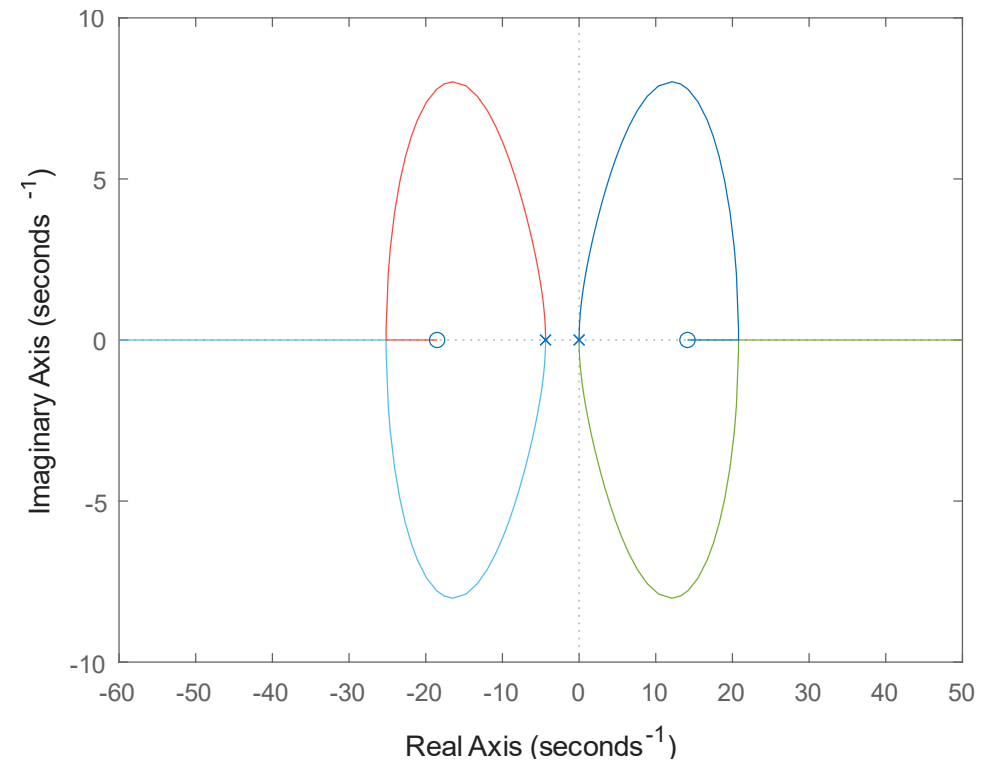
$$W_d(s) = \frac{G_2(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

STABILITÀ SISTEMA RETROAZIONATO

Luogo delle radici positivo di $G1(s)$



Luogo delle radici negativo di $G1(s)$



Analizzando il luogo delle radici di $G1(s)$ si conclude che un controllore proporzionale non è sufficiente a stabilizzare il sistema retroazionato



SPECIFICHE DI PROGETTO

Specifiche sulla risposta al gradino

- Errore di inseguimento a regime permanente del gradino nullo
- Tempo di assestamento al 5% minore di 10 secondi
- Sovraelongazione percentuale minore del 10%

Specifiche sulla reiezione del disturbo

- Completa reiezione del disturbo costante
- La variazione sulla posizione del robot indotta da sinusoidali con pulsazione minore di 0.01 rad/s e ampiezza minore di 10^{-16} N deve essere minore di 10^{-8} m

A partire da queste specifiche verranno ricavati i vincoli che il controllore deve far rispettare alla funzione di trasferimento in catena aperta $G(s)$.

REQUISITI FUNZIONE DI TRASFERIMENTO IN CATENA APERTA

Approssimando il sistema controllato con un modello a due poli complessi coniugati dominanti vengono ricavati il margine di fase minimo e la pulsazione di attraversamento minima che la FDT in catena aperta $G(S)$ deve avere per garantire le specifiche sul tempo di assestamento e la sovraelongazione

Margine di fase minimo $S = \exp\left(-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) < 0.1 \Rightarrow \delta > 0.59 \Rightarrow m_{\psi}^* > 59.1^\circ$

Pulsazione di attraversamento minima $t_a \approx \frac{3}{\delta\omega_a} < 10 \text{ s} \Rightarrow \omega_a > 0.51 \text{ rad/s}$

La specifica sull'errore d'inseguimento del gradino impone che $G(s)$ deve avere almeno un polo nell'origine.

La specifica sulla reiezione completa del disturbo costante equivale a chiedere che $Wd(j0) = 0$. Dallo studio di $Wd(s)$ emerge che per soddisfare questa specifica $G(s)$ deve avere almeno un polo doppio nell'origine

Infine la specifica sulla reiezione del disturbo sinusoidale è rispettata se $G(s)$ ha almeno un polo nell'origine e $|G(j0.01)| > 27 \text{ dB}$.

SINTESI DEL CONTROLLORE

Per soddisfare i requisiti sulla fdt in catena aperta il controllore dovrà:

- Alzare la fase di $G_1(j0.51)$ di almeno 76.2°
- Alzare il modulo di $G_1(j0.51)$ di almeno 16.75 dB
- Garantire che $|G_1(j0.01)| > 27$ dB

Siccome bisogna alzare sia la fase che il modulo di $G_1(j0.51)$ si fa ricorso ad una rete anticipatrice nella forma:

$$C(s) = K_c \frac{1 - \frac{s}{z}}{1 - \frac{s}{p}}$$

Dove la posizione dello zero e il valore del guadagno vengono scelti in modo da garantire una pulsazione di attraversamento di $C(j\omega)G_1(j\omega)$ maggiore di ωa^* , con un margine di fase maggiore di 59° e $|C(j0.01)G_1(j0.01)| > 27$ dB.

Infine il polo viene posizionato sufficientemente a destra di ωa^* da non compromettere il margine di fase

SINTESI DEL CONTROLLORE

Il controllore proposto è:

$$C(s) = 0.45 \frac{1 + \frac{s}{0.02}}{1 + \frac{s}{50}} = 1125 \frac{s + 0.02}{s + 50}$$

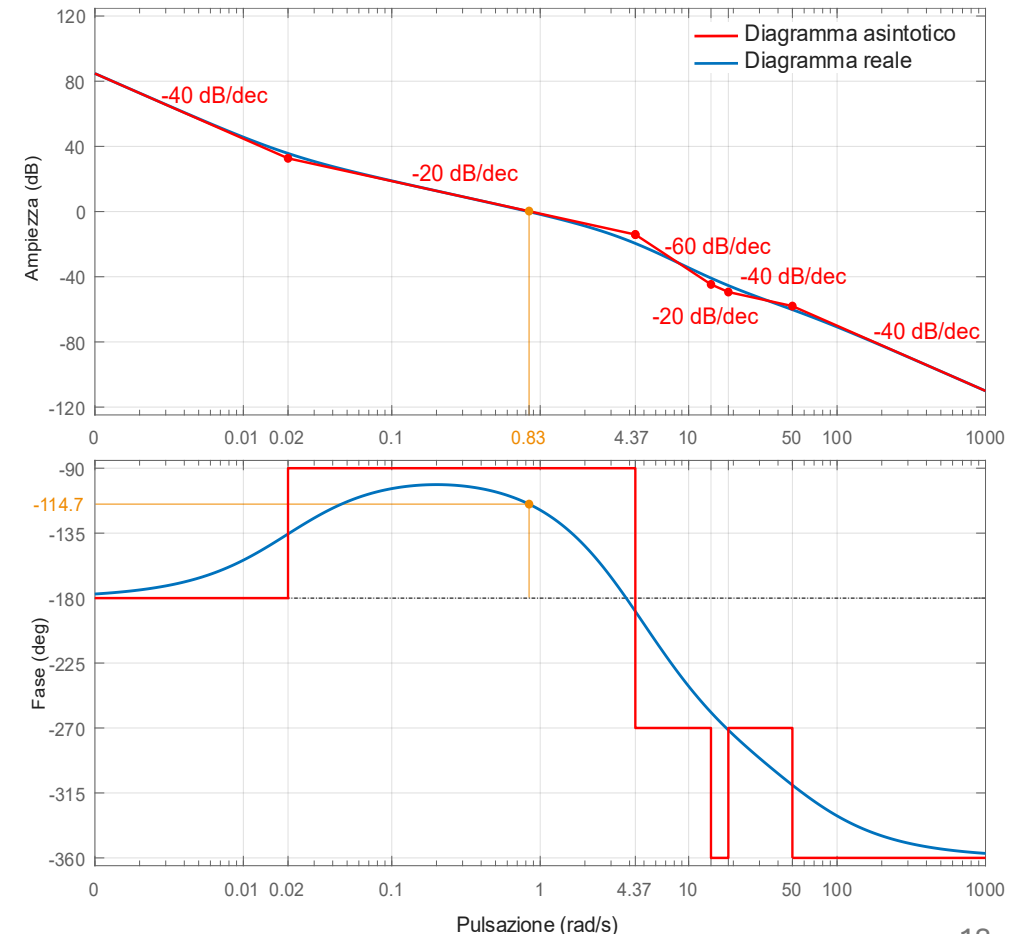
Che rende la fdt in catena aperta:

$$C(s)G_1(s) = -3.1461 \frac{(s + 18.51)(s - 14.14)(s + 0.02)}{s^2(s + 50)(s + 4.373)^2}$$

Dal diagramma di Bode di $C(s)G_1(s)$ si verifica che i vincoli su pulsazione di attraversamento e margine di fase sono rispettati:

$$m_\psi = 67.5^\circ \quad \omega_a = 0.83 \text{ rad/s}$$

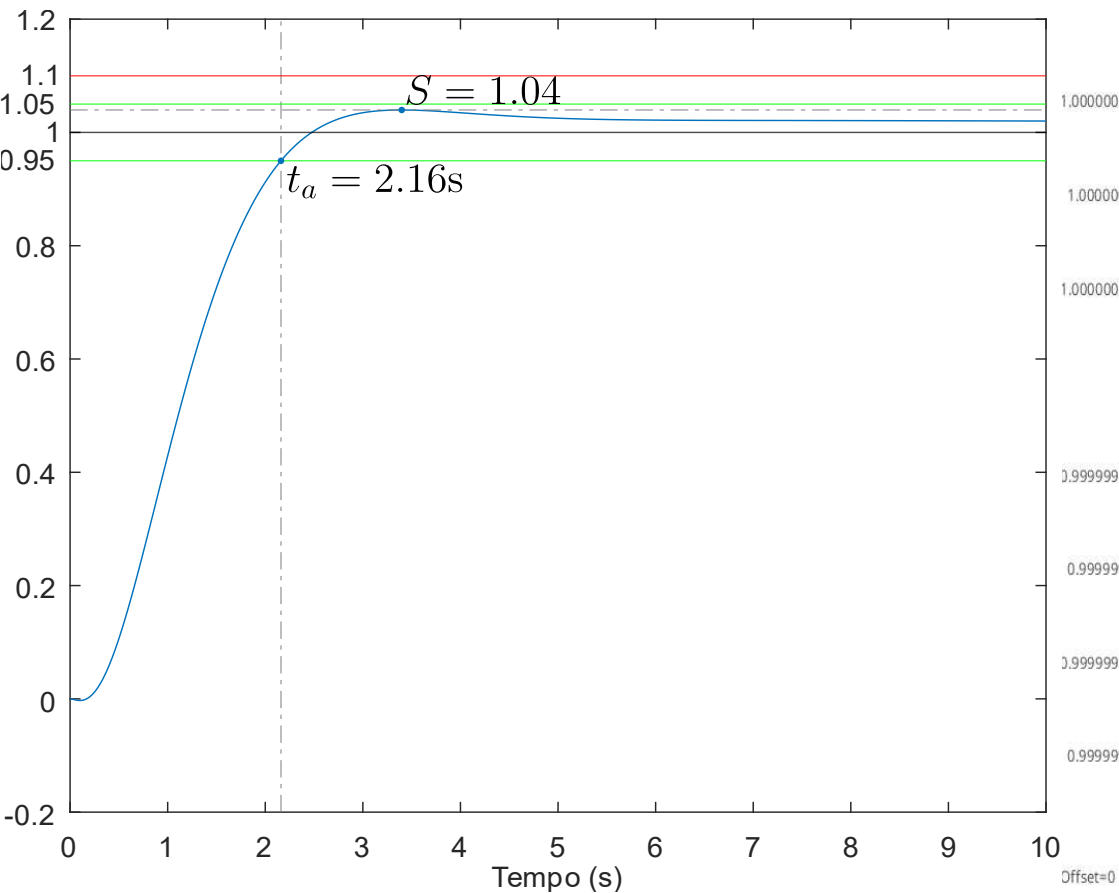
Diagramma di Bode di $C(s)G_1(s)$





PRESTAZIONI DEL SISTEMA CONTROLLATO

Risposta al gradino in assenza di disturbo



Differenza tra la risposta al gradino in assenza di disturbo (blu) e con la presenza del disturbo sinusoidale $10^{-16} \sin(0.01t)$ (giallo)

