UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Dipartimento di Fisica G.Galilei

Tesi di Laurea in Fisica

Rappresentazione integrale finita esatta del propagatore di Schrödinger e di Fokker-Planck

Laureando : Lorenzo Zanelli

Relatore : Pieralberto Marchetti

Correlatori : Franco Cardin, Paolo Guiotto

Anno Accademico : 2002/2003

INDICE

INTRODUZIONE

Lo scopo di questa tesi è la determinazione di una rappresentazione integrale *finito-dimensionale esatta* dei nuclei dei propagatori per le equazioni di Schrödinger e di Fokker-Planck:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi_S(t,x)+V(x)\psi_S(t,x)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_S(t,x) \quad \text{(Schrödinger)}$$

$$\psi_S(0,x)=\phi(x)$$

$$\frac{\lambda^2}{2m}\triangle\psi_{F-P}(t,x)-V(x)\psi_{F-P}(t,x)=\lambda\frac{\partial}{\partial t}\psi_{F-P}(t,x) \quad \text{(Fokker - Planck)}$$

$$\psi_{F-P}(0,x)=\phi(x)$$

Il problema della rappresentazione esatta delle soluzioni di tali equazioni è stato affrontato da diversi autori e in modi differenti.
Richard Feynman propose di rappresentare la soluzione dell'equazione di Schrödinger per mezzo del noto Integrale di Feynman, descritto in modo simbolico dalla formula:

$$\psi_S(t,x)=\int_{\gamma(t)=x} e^{\frac{i}{\hbar}A[\gamma(s)]}\,\phi(\gamma(0))\ D\gamma$$

path integral con dominio di integrazione corrispondente all'insieme delle curve continue $\gamma(s)$ tali che $\gamma(t)=x$, sul quale resta definita una misura (non formalizzata) $D\gamma$; inoltre, la funzione integranda corrisponde all'esponenziale del funzionale d'azione classico $A[\cdot]$ con il termine moltiplicativo $i/\hbar$. Tale formula, non formalmente giustificata, è stata successivamente riconsiderata in un contesto matematicamente rigoroso da vari autori (fisici e matematici) in modo da definire il path integral mediante una corretta misura sullo spazio dei cammini. L'uso rigoroso della formula di Lie-Trotter si ritrova per esempio in fondamentali lavori di Sergio Albeverio (vedi [9] e [10]) e di John Klauder (vedi [11]), che hanno ben spiegato le idee originali (differenze finite) di Feynman.
Marc Kac trattò inoltre (vedi [12]) una classe generale di equazioni alle derivate parziali tra cui l'equazione di Fokker-Planck, dimostrando che la soluzione di quest'ultima (per $m=1$) ammette la rappresentazione per mezzo della cosidetta Formula di Feynman-Kac:

$$\psi_{F-P}(t,x)=\int_{\gamma(t)=x} e^{-\frac{1}{\lambda}\int_0^t V(\gamma(s))ds}\,\phi(\gamma(0))\ dP_W(\gamma)$$

path integral definito sul dominio delle curve $C^0(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ tali che $\gamma(0) = 0$, dove la misura dP_W corrisponde alla misura di Wiener.
Altri autori in recenti articoli, utilizzando particolari tecniche di analisi funzionale, hanno invece effettuato costruzioni finito dimensionali integrali esatte delle soluzioni delle equazioni sopra considerate.
Michael Beals, Charles Fefferman, Robert Grossman hanno utilizzato la teoria degli Operatori Integrali di Fourier (F.I.O.) per rappresentare (vedi [18]) la soluzione dell'equazione di Schrödinger come:

$$\psi_S(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathfrak{D}} e^{\frac{i}{\hbar}(S(t,x,p)-py)} b(t,x,y,p)\phi(y)\, dpdy$$

dove $S(t,x,p)$ è la Funzione Generatrice risolvente il problema classico per l'equazione di Hamilton-Jacobi. La costruibilità di tale rappresentazione è però di carattere *strettamente locale*, ovvero risulta valida per le variabili $(t,x,y) \in [0,\tau] \times \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2n}$, opportuno dominio locale.
Joel Robbin e Dietmar Salomon, utilizzando differenti tecniche, hanno ottenuto (vedi [17]) un'analoga rappresentazione finito dimensionale integrale esatta del propagatore dell'equazione di Schrödinger, ma limitandosi a considerare potenziali puramente quadratici.
Tali lavori indicano comunque l'esistenza di una relazione fra i path integrals e gli integrali finito dimensionali risolventi l'equazione di Schrödinger, e questo grazie alla stretta connessione esistente fra il funzionale d'azione $A[\cdot]$ e la Funzione Generatrice $S(\cdot)$ associata all'equazione di Hamilton-Jacobi.
Si configura così l'idea, che rappresenta il contenuto originale di questa tesi, di una riduzione di path integrals risolventi le equazioni sopra considerate in integrali finito dimensionali.
A tale scopo verrà in questa tesi considerata e generalizzata un'alternativa rappresentazione dei nuclei delle soluzioni delle equazioni di Schrödinger e di Fokker-Planck relativa ad un nuovo tipo di path integral, dovuta a Vassili Kolokoltsov (vedi [7] e [8]).
Considerata infatti la soluzione dell'equazione di Schrödinger espressa per mezzo della rappresentazione integrale del propagatore:

$$\psi_S(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_S(t,x,y)\phi(y)dy$$

egli dimostra che con l'ipotesi di un potenziale $V(x) \in L^2 \cap C^2$ limitato, considerando inoltre $(t,x,y) \in [0,T] \times D$ in un opportuno intervallo di tempo $[0,T]$ e per un dominio (locale) $D \subset \mathbb{R}^{2n}$, il nucleo associato si può rappresentare come il seguente limite di path integrals:

$$\Phi_S(t,x,y) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{CPC(t,x,y)} e^{-\frac{1}{(i+\epsilon)\hbar}A[\omega]} M_S^{\epsilon}(d\omega)$$

integrali definiti sul dominio $CPC(t,x,y)$ [1] corrispondente all'insieme delle curve classiche [2] a tratti che connettono i punti y e x nel tempo t, sul quale è definita un'opportuna famiglia di misure σ-finite e complesse $M_S^\epsilon(d\omega)$, dipendenti dal parametro $\epsilon > 0$. La funzione integranda corrisponde all'esponenziale del funzionale d'azione con il termine moltiplicativo $-1/(i+\epsilon)\hbar$.
Analogamente, Kolokoltsov dimostra che il nucleo associato all'equazione di Fokker-Planck ammette la seguente rappresentazione:

$$\Phi_{F-P}(t,x,y) = \int_{CPC(t,x,y)} e^{-\frac{1}{\lambda}A[\omega(s)]} M_{F-P}(d\omega)$$

path integral costruito sul medesimo dominio di curve $CPC(t,x,y)$, sul quale è introdotta un'opportuna misura σ-finita reale $M_{F-P}(d\omega)$, e dove la funzione integranda viene definita per mezzo dell'esponenziale del funzionale d'azione con il termine moltiplicativo $-1/\lambda$.
In questa tesi si effettuerà inanzitutto una generalizzazione di tale risultato determinando delle nuove misure $M_S^\epsilon(d\omega)$ e $M_{F-P}(d\omega)$ in modo che i nuclei $\Phi_S(t,x,y)$ e $\Phi_{F-P}(t,x,y)$ così costruiti abbiano carattere *globale*, ovvero definiti per $(t,x,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^{2n}$.
Successivamente verrà dimostrata la possibilità di riduzione degli integrali sopra descritti in integrali finito dimensionali definiti su un opportuno spazio dei parametri $\mathbb{R}^k$.
E' importante osservare che la versione del path integral di Kolokoltsov, benché sia stata qui essenzialmente modificata, è comunque risultata il più adatto punto di partenza per il presente lavoro di tesi: è infatti la particolare topologia dell'insieme CPC che ha permesso la costruzione della riduzione qui proposta. Verrà infatti costruita un'opportuna mappa:

$$CPC(t,x,y) \xrightarrow{F} \mathbb{R}^k$$

detta *mappa di riduzione*, che permetterà di effettuare le trasformazioni dei path integrals nei seguenti integrali finito dimensionali:

$$\Phi_S(t,x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{\frac{i}{\hbar}S(t,x,y,u)} \rho_S(t,x,y,u)\,du$$

$$\Phi_{F-P}(t,x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\frac{1}{\lambda}S(t,x,y,u)} \rho_{F-P}(t,x,y,u)\,du$$

La funzione integranda corrisponde all'esponenziale della funzione $S(t,x,y,u)$, Funzione Generatrice globale della sottovarietà Lagrangiana associata alla

[1] Continuous Piecewise Classical paths

[2] risolventi il problema Hamiltoniano classico associato.

trasformazione canonica corrispondente al flusso Hamiltoniano $\phi_H^t(q,p)$ relativo all'Hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$.
La densità $\rho_S(t,x,y,u)$ per il propagatore di Schrödinger viene determinata nel seguente modo:

$$\rho_S(t,x,y,u) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \rho_S(t,x,y,\epsilon,u)$$

dove $\rho_S(t,x,y,\epsilon,u)$ è la derivata di Radon-Nikodym della misura immagine tramite $F(\cdot)$ della misura M_S^ϵ, rispetto alla misura di Lebesgue $L = du$:

$$\rho_S(t,x,y,\epsilon,u) = \frac{d\nu^S_{(t,x,y,\epsilon)}(u)}{dL(u)} = \frac{dF_\star[M_S^\epsilon]}{dL(u)}$$

Analogamente la densità $\rho_{F-P}(t,x,y,u)$ per il propagatore di Fokker-Planck viene determinata come:

$$\rho_{F-P}(t,x,y,u) = \frac{d\nu^{F-P}_{(t,x,y)}(u)}{dL(u)} = \frac{dF_\star[M_{F-P}]}{dL(u)}$$

la derivata di Radon-Nikodym della misura immagine tramite $F(\cdot)$ della misura M_{F-P}, ripetto alla misura di Lebesgue.
E' importante sottolineare che questa tecnica di riduzione è *esatta*, cioè non rappresenta un semplice cut-off di approssimazione del path integral.
Il risultato ottenuto rappresenta inoltre una generalizzazione del risultato di M.Beals, C.Fefferman, R.Grossman poichè il nucleo ottenuto è di carattere globale, e un'estensione del risultato di J.Robbin e D. Salomon in quanto non si limita a potenziali puramente quadratici ma comprende, anche se limitati, potenziali $V(x) \in L^2 \cap C^2$.
La procedura di riduzione elaborata in questa tesi, riguardante vari aspetti di teoria della misura, dipende in modo essenziale dall'esistenza e costruibilità della Funzione Generatrice globale $S(t,x,y,u)$ con finiti parametri ausiliari u. Tale costruzione deriva da un recente lavoro (vedi [5]) che sviluppa, a partire da idee di Amann-Conley-Zehnder, una certa tecnica di riduzione per la costruzione della Funzione Generatrice globale della trasformazione canonica a finiti parametri ausiliari.
In questa tesi tale tecnica è stata utilizzata e si è indagato sul carattere “quadratico all'infinito della Funzione Generatrice nei parametri ausiliari. Questo ha permesso di utilizzare un risultato di esistenza di curve classiche mediante tecniche di *topologia simplettica*: proprietà di Palais-Smale di $S(t,x,y,u)$ nelle u e conseguente utilizzo del teorema di esistenza di soluzioni min-max.

CAPITOLO 1. EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI

In questo capitolo si descrivono inizialmente le soluzioni del problema di Cauchy classico e geometrico per l'equazione di Hamilton-Jacobi.
Successivamente si illustra la tecnica di riduzione di Amann-Conley-Zehnder (vedi [19] e [20]), e per mezzo di questa si descrive la costruzione della Funzione Generatrice globale $S(t,x,y,u)$ che genera la sottovarietà Lagrangiana rappresentante la trasformazione canonica $\phi_H^t(q,p)$ per un'Hamiltoniana del tipo $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ (vedi [5]). Tale funzione è connessa direttamente alla Funzione Principale di Hamilton globale che risolve il problema di Cauchy geometrico per l'equazione di Hamilton-Jacobi.
Infine si dimostra che, sotto opportune ipotesi, tale Funzione Generatrice assume una particolare forma esplicita generale, e che verifica la condizione di Palais -Smale.

1.1 Soluzione classica e geometrica

Sia $H(q,p)$ un'Hamiltoniana del tipo:

$$T^\star\mathbb{R}^n \xrightarrow{H} \mathbb{R}$$

$$(q,p) \longmapsto H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

Fissata una sottovarietà $n-1$ dimensionale $\Sigma \subset U$ con U aperto connesso contenuto in $\mathbb{R}^n$:

$$\Sigma \hookrightarrow U$$

$$\xi \longmapsto q(\xi)$$

Fissata una funzione differenziabile σ:

$$\sigma : \Sigma \subset U \longrightarrow \mathbb{R}$$

Il problema di Cauchy *classico* per l'equazione di Hamilton-Jacobi consiste nel risolvere l'equazione:

$$H(q, \frac{\partial W}{\partial q}(q)) = e$$

La soluzione:

$$W : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

è definita sull' aperto connesso $U \subset \mathbb{R}^n$ e soddisfa la condizione al contorno:

$$W|_\Sigma = \sigma\,, \quad \text{ovvero } W(q(\xi)) = \sigma(\xi)\ \forall \xi \in \Sigma$$

In generale tale dominio di definizione U non può essere esteso ad $\mathbb{R}^n$ e dunque il problema di Cauchy classico ha soluzioni solo locali.
Si osserva che l'insieme definito come:

$$\Gamma = \left\{(q,p) \in T^\star\mathbb{R}^n;\ p = \frac{\partial W}{\partial q}(q)\ \forall q \in \mathbb{R}^n\right\}$$

è una particolare sottovarietà Lagrangiana di $T^\star\mathbb{R}^n$ contenuta nel sottoinsieme $H^{-1}(e)$ di energia costante di valore e, trasversale alla varietà base $\mathbb{R}^n$, ovvero trasversale alle fibre della proiezione canonica:

$$\pi_{\mathbb{R}^n} : T^\star\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(q,p) \longmapsto \pi_{\mathbb{R}^n}(q,p) := q$$

Questa osservazione introduce il problema di Cauchy *geometrico*, di natura più generale di quello classico, che corrisponde alla determinazione di una sottovarietà Lagrangiana connessa $\Lambda \subset T^{\star}\mathbb{R}^n$ tale che:

$$\Lambda \subset H^{-1}(e)$$

La condizione al contorno è data dall'inclusione:

$$\pi_{\mathbb{R}^n}(\Lambda \cap L_{\Sigma,\sigma}) \subseteq \Sigma$$

dove la cosiddetta sottovarietà Lagrangiana dei dati iniziali $L_{\Sigma,\sigma}$ viene definita come:

$$L_{\Sigma,\sigma} = \left\{ (q,p) \in T^{\star}\mathbb{R}^n; q = q(\xi), \; \frac{\partial \sigma}{\partial \xi^a} = \frac{\partial q^i}{\partial \xi^a}(\xi) p_i \quad \forall \xi \in \Sigma \right\}$$

La sottovarietà Λ non è in generale trasversale alla varietà base $\mathbb{R}^n$ e rappresenta perciò una generalizzazione geometrica della soluzione classica dell' equazione di Hamilton-Jacobi, descrivente comportamenti tipicamente multivoci.
Il Teorema di Maslov-Hörmander (vedi [12]) garantisce l'esistenza di parametrizzazioni locali di una sottovarietà Lagrangiana $\Lambda \subset T^{\star}\mathbb{R}^n$ per mezzo di Funzioni Generatrici $W(q,u)$:

$$W : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

con parametri ausiliari $u \in \mathbb{R}^k$, spazio di opportuna dimensione. Dunque localmente ad ogni punto $\lambda \in \Lambda$ si ha che:

$$\Lambda = \left\{ (q,p) \in T^{\star}\mathbb{R}^n; \quad p = \frac{\partial W}{\partial q}(q,u) \quad \text{con} \quad 0 = \frac{\partial W}{\partial u}(q,u) \right\}$$

1.2 Riduzione di Amann-Conley-Zehnder

La tecnica di riduzione di Amann-Conley-Zehnder (vedi [19] e [20]), qui descritta nel Teorema 1.2.3, permette la parametrizzazione delle soluzioni delle equazioni di Hamilton, con fissate condizioni al contorno e particolari condizioni sulla funzione Hamiltoniana, per mezzo di un opportuno spazio vettoriale finito-dimesionale $\mathbb{R}^k$.

Teorema 1.2.3
Sia $H(q,p) : T^\star\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione Hamiltoniana di classe C^2 che sia Legendre-correlata ad una funzione Lagrangiana $L(q,\dot{q}) : T\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2. Si ipotizzi inoltre che le seguenti condizioni siano soddisfatte:

$$\sup_{(q,\dot{q})\in T\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}(q,\dot{q}) \right| < B \quad \forall i,j = 1,2,...n \quad \text{per qualche}\, B \in \mathbb{R}$$

$$\sup_{(q,p)\in T^\star\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^2 H}{\partial q^i \partial p^j}(q,p) \right| < C \quad \forall i,j = 1,2,...n \quad \text{per qualche}\, D \in \mathbb{R}$$

Allora il problema della determinazione delle curve $\omega(s) = (\omega^q, \omega^p)(s)$ risolventi le equazioni di Hamilton con fissate condizioni al contorno,

$$\dot{\omega}^q(s) = \frac{\partial H}{\partial p}(\omega(s))$$

$$\dot{\omega}^p(s) = -\frac{\partial H}{\partial q}(\omega(s))$$

$$\omega^q(0) = y$$

$$\omega^q(t) = x$$

viene risolto per mezzo di una famiglia di curve $\gamma(t,x,y,\bar{u})(s) \in H^2([0,t];\mathbb{R}^{2n})$ dipendente dalle condizioni al contorno (t,x,y) e da opportuni parametri ausiliari $\bar{u} \in \mathbb{R}^k$:

$$[0,t] \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$s \longmapsto \omega(s) = \gamma(t,x,y,\bar{u})(s)$$

Al variare dei parametri $\bar{u}$ si ottengono tutte e sole le soluzioni del problema sopra considerato.

La dimostrazione di questo teorema necessita di alcune preliminari considerazioni e della dimostrazione di due lemmi.

Fissate le condizioni al contorno $(t,x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2n}$, si definisce il seguente insieme di curve:

$$\Gamma := \Big\{ \Big(q(\cdot),p(\cdot)\Big) := \gamma \in H^2([0,t];\mathbb{R}^{2n}) \quad \text{tale che}$$

$$q(0)=y,\; q(t)=x,\; p(0)=\frac{\partial L}{\partial \dot q}\Big(q(0),\dot q(0)\Big)\Big\}$$

Un elemento di Γ è una curva in $T^\star\mathbb{R}^n$ la cui proiezione canonica in $\mathbb{R}^n$ è una curva che connette i punti y e x nel tempo t e che risulta Legendre-correlata solo in $s=0$.
In accordo con il teorema d'immersione di Sobolev, si ha che:

$$H^{\alpha,\beta}(A,B) \hookrightarrow C^r \quad \text{se} \quad r < \alpha - \frac{\dim A}{\beta}$$

Si osserva di conseguenza che le curve in Γ sono C^1 e le loro velocità sono in $H^1([0,t];\mathbb{R}^{2n})$. Risulta ora possibile dare un'altra rappresentazione dell'insieme Γ. Data $\phi=(\phi_q,\phi_p)\in H^1([0,t];\mathbb{R}^{2n})$ si osserva che ϕ è continua sull'intervallo compatto $[0,t]$ ed inoltre che appartiene ad $L^1([0,t];\mathbb{R}^{2n})$.
Si definisce l'insieme:

$$\mathcal{H} := \Big\{\phi=(\phi_q,\phi_p)\in H^1([0,t];\mathbb{R}^{2n}) : \quad \int_0^t \phi_q(s)ds = 0\Big\}$$

Si definisce inoltre, fissato un $N\in\mathbb{N}$, la seguente mappa:

$$h_N : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H} \to \Gamma$$

$$(t,x,y,\phi) \mapsto (q(\cdot),p(\cdot))$$

dove le curve $(q(\cdot),p(\cdot))$ sono definite come:

$$\begin{cases} q(s) = y + \frac{x-y}{t}s + \int_0^s \frac{\phi_q(s)}{N}ds \\ \\ p(s) = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\Big(y, \frac{x-y}{t} + \frac{\phi_q(0)}{N}\Big) + \int_0^s \frac{\phi_p(s)}{N}ds \end{cases}$$

Si verifica facilente che la mappa h_N, con il valore di t fissato, è un isomorfismo e che la sua inversa è:

$$\begin{cases} y = q(0) \\ x = q(t) \\ \phi_q(t) = N\Big(\dot q(t) - \frac{x-y}{t}\Big) \\ \phi_p(t) = N\dot p(t) \end{cases}$$

Si è ottenuta dunque una differente rappresentazione delle curve in Γ per mezzo dei punti estremi x, y e delle componenti ϕ.
Si considerino ora gli operatori di proiezione $\mathbb{P}_N$ e $\mathbb{Q}_N$ sulla base ortogonale $\left\{\sinh(s-\frac{t}{2}), e^{i\frac{2\pi}{t}}rs\right\}_{r\in\mathbb{Z}}$ di $H^1 \supset \mathcal{H}$, così definiti:

$$H^1([0,t];\mathbb{R}^{2n}) \xrightarrow{\mathbb{P}_N} H^1([0,t];\mathbb{R}^{2n})$$

$$\phi(s) \longmapsto \mathbb{P}_N(\phi(s)) := \phi_S \sinh\Big(s - \frac{t}{2}\Big) + \sum_{|r|\leq N} \phi_r e^{i\frac{2\pi}{t}rs}$$

$$H^1([0,t];\mathbb{R}^{2n}) \xrightarrow{\mathbb{Q}_N} H^1([0,t];\mathbb{R}^{2n})$$
$$\phi(s) \longmapsto \mathbb{Q}_N(\phi(s)) := \phi(s) - \mathbb{P}_N(\phi(s))$$

Si osserva facilmente che:
• I seguenti sottospazi vettoriali, contenuti nei codomini dei due operatori, verificano:

$$\mathbb{P}_N\mathcal{H} \oplus \mathbb{Q}_N\mathcal{H} = \mathcal{H}$$

• $\forall N \in \mathbb{N}$ si verifica l'inclusione:

$$\mathbb{Q}_N H^1([0,t];\mathbb{R}^{2n}) \subset \mathcal{H}$$

• I sottospazi $\mathbb{P}_N\mathcal{H}$ e $\mathbb{Q}_N\mathcal{H}$ sono ortogonali rispetto al prodotto scalare di H^1 ed inoltre $\forall f \in \mathcal{H}$:

$$||\mathbb{P}_N f||^2_{H^1} + ||\mathbb{Q}_N f||^2_{H^1} = ||f||^2_{H^1}$$

$$||\mathbb{Q}_N f||_{H^1} \leq ||f||_{H^1}$$

A seguito di queste osservazioni è possibile ora dimostrare i seguenti lemmi.

Lemma 1.2.1
Nelle ipotesi del Teorema 1.2.3 sulla Lagrangiana $L(t,q,\dot{q})$, fissati $(t,x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2n}$ e una curva $u(s) \in \mathbb{P}_N\mathcal{H}$, si verifica che la mappa:

$$\mathbb{Q}_N\mathcal{H} \to (\Gamma, ||\cdot||_{H^1})$$

$$v \mapsto h_N(t,x,y,u+v)$$

è Lipschtziana con costante $\frac{\alpha}{N}$ dove α non dipende da N.

Dimostrazione

Utilizzando la forma della mappa h_N:

$$v \longmapsto \Big(y + \frac{x-y}{t}s + \int_0^s \frac{(u_q+v_q)(s)}{N}ds,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big(y, \frac{x-y}{t} + \frac{(u_q+v_q)(0)}{N}\Big) + \int_0^s \frac{(u_p+v_p)(s)}{N}ds\Big)$$

si effettuano semplici maggiorazioni:

$$||h_N(t,x,y,u+v^1) - h_N(t,x,y,u+v^2)||_{H^1} =$$

$$= ||h_N(t,x,y,u+v^1) - h_N(t,x,y,u+v^2)||_{L^2} +$$

$$+ \Big|\Big|\frac{dh_N}{dt}(t,x,y,u+v^1) - \frac{dh_N}{dt}(t,x,y,u+v^2)\Big|\Big|_{L^2} \leq$$

$$\leq \Big|\Big|\frac{1}{N}\int_0^t (v^1-v^2)(s)ds + \sup\Big|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\partial \dot{q}}\Big|\Big|\frac{(v_q^1-v_q^2)(0)}{N}\Big|\Big|\Big|_{L^2} + \frac{1}{N}||v^1-v^2||_{L^2} \leq$$

definendo $(v^1-v^2)(s) := v(s)$ si ottiene infine:

$$\leq \frac{1}{N}\Big(\Big|\Big|\int_0^t v(s)ds\Big|\Big|_{L^2} + Kt^{\frac{1}{2}}|v(0)| + ||v||_{L^2}\Big)$$

Grazie al teorema di Sobolev ($H^1 \hookrightarrow C^0$) si hanno le diseguaglianze:

$$|v(0)| \leq ||v||_{C^0} \leq c||v||_{H^1},$$

$$\Big(\Big|\Big|\int_0^t v(s)ds\Big|\Big|_{L^2} \leq ||v||_{C^0}\Big|\Big|\int_0^t ds$$

$$\Big|\Big|_{L^2} \leq t^{\frac{3}{2}}||v||_{C^0} \leq t^{\frac{3}{2}}c||v||_{H^1}$$

Si conclude che:

$$||h_N(t,x,y,u+v^1) - h_N(t,x,y,u+v^2)||_{H^1} \leq \frac{ct^{\frac{3}{2}} + Kct^{\frac{1}{2}} + 1}{N}||v||_{H^1} = \frac{\alpha}{N}||v||_{H^1}$$

dove $\alpha := ct^{\frac{3}{2}} + Kct^{\frac{1}{2}} + 1$ è un'opportuna costante indipendente da N.
$\square$

Lemma 1.2.2
In accordo alle ipotesi del Teorema 1.2.3 su H ed L, e supponendo $N > C\alpha$, si ha che fissata una curva $u(s) \in \mathbb{P}_N\mathcal{H}$ la mappa:

$$\mathbb{Q}_N\mathcal{H} \to \mathbb{Q}_N\mathcal{H}$$
$$v \mapsto Q_N J\nabla H(h_N(t,x,y,u+v))$$

è una contrazione nello spazio di Banach $(\mathbb{Q}_N\mathcal{H}, ||\cdot||_{H^1})$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \Big|\Big| Q_N J\nabla H(h_N(t,x,y,u+v^1)) - Q_N J\nabla H(h_N(t,x,y,u+v^2))\Big|\Big|_{H^1} \leq \\ \leq \sup|\nabla^2 H| \cdot \Big|\Big| h_N(t,x,y,u+v^1) - h_N(t,x,y,u+v^2)\Big|\Big|_{H^1} \leq \\ \leq C\Big|\Big| h_N(t,x,y,u+v^1) - h_N(t,x,y,u+v^2)\Big|\Big|_{H^1} \leq \frac{C\alpha}{N}||v||_{H^1} \end{aligned}$$

L'ipotesi di considerare il valore di $N > C\alpha$ garantisce dunque che tale mappa sia una contrazione. Il Lemma di Banach-Caccioppoli dimostra l'esistenza e l'unicità del punto fisso che corrisponderà in particolare all'unica mappa $f(t,x,y,u)(s) \in \mathbb{P}_N\mathcal{H}$ risolvente l'equazione:

$$f(t,x,y,u)(s) = Q_N J\nabla H(h_N(t,x,y,u+f(t,x,y,u)(s)))$$

$\forall u(s) \in \mathbb{P}_N\mathcal{H}$, $\forall (t,x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2n}$.
$\square$

Dimostrazione Teorema 1.2.3
Utilizzando il precedente Lemma 1.2.2 si definisce la mappa:

$$[0,t] \to \mathbb{R}^{2n}$$
$$s \mapsto \gamma(t,x,y,u)(s) := h_N(t,x,y,u+f(t,x,y,u)(s))$$

con fissate le condizioni al contorno (t,x,y) e la curva $u(s) \in \mathbb{Q}_N\mathcal{H}$.
Determinando le curve $\bar{u}(s)$ che risolvono l'equazione finita,

$$\bar{u}(s) = P_N J\nabla H(h_N(t,x,y,u+f(t,x,y,\bar{u})(s)))$$

si verifica facilmente che la curva $\gamma(t,x,y,\bar{u})(s)$ così costruita risolve le equazioni di Hamilton, infatti:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t,x,y,\bar{u})(s) = \bar{u}(s) + f(t,x,y,\bar{u})(s) = \\ = P_N J\nabla H(h_N(t,x,y,u+f(t,x,y,\bar{u})(s))) + \\ + Q_N J\nabla H(h_N(t,x,y,u+f(t,x,y,\bar{u})(s))) = \\ = J\nabla H(h_N(t,x,y,u+f(t,x,y,\bar{u})(s))) \end{aligned}$$

$\square$

Osservazione
Nel Teorema 1.2.3 si è visto come si possa costruire una famiglia di curve $\gamma(t,x,y,u)(s)$ dipendente dalle condizioni al contorno (t,x,y) e da curve $u(s) \in \mathbb{P}_N\mathcal{H}$ che contiene tutte e sole le soluzioni delle equazioni di Hamilton. Basta infatti determinare le curve $\bar{u}(s)$ che risolvono l'equazione:

$$\bar{u}(s) = P_N J \nabla H(h_N(t,x,y,u + f(t,x,y,\bar{u})(s)))$$

per generare con $\gamma(t,x,y,\bar{u})(s)$ tali soluzioni.
In forma esplicita le componenti q corrispondono a:

$$\gamma^q(t,x,y,u)(s) = y + \frac{x-y}{t}(s) + \int_0^s \frac{1}{N}\Big[u^q(\tau) + f^q(t,x,y,u)(\tau)\Big]d\tau$$

mentre le componenti p corrispondono a:

$$\gamma^p(t,x,y,u)(s) =$$
$$= m\Big(\frac{x-y}{t} + \frac{u^q(0) + f^q(t,x,y,u)(0)}{N}\Big) + \int_0^s \frac{1}{N}\Big[u^p(\tau) + f^p(t,x,y,u)(\tau)\Big]d\tau$$

Il valore di N va però fissato in modo che verifichi la diseguaglianza:

$$N > C(ct^{\frac{3}{2}} + Kct^{\frac{1}{2}} + 1)$$

ovvero dipende, nel suo limite inferiore, dal tempo t di definizione delle curve classiche. Al fine di rispettare tale vincolo verrà dunque fissato (per ora arbitrariamente) un limite superiore $T > t$ per il tempo di definizione delle curve, e di conseguenza verrà fissato un valore ammissibile per N:

$$N > C(cT^{\frac{3}{2}} + KcT^{\frac{1}{2}} + 1)$$

In tal modo si potrà considerare $t \in [0,T]$ ed utilizzare il medesimo valore di N. Si osserva ora che:

$$\dim(\mathbb{P}_N\mathcal{H}) = \dim(\mathbb{P}_N H^1([0,t];\mathbb{R}^{2n}) = 2n(2N+1)$$

Tale relazione permette di definire il valore $k := 2n(2N+1)$ e di riguardare una curva $u(s) \in \mathbb{P}_N\mathcal{H}$ come identificata da un parametro $u \in \mathbb{R}^k$. Ne consegue che anche la famiglia di curve $\gamma(t,x,y,u)(s)$ si può riguardare come dipendente da tali parametri dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^k$:

$$\mathbb{R}^k \times [0,t] \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$(u,s) \longmapsto \gamma(t,x,y,u)(s) = (\gamma^q;\gamma^p)(t,x,y,u)(s)$$

Si osserva infine, dalla diseguaglianza sopra riportata, che il tempo T deve essere considerato finito, se si vuole ottenere uno spazio dei parametri $\mathbb{R}^k$ finito dimensionale.

1.3 Funzione Generatrice globale

Sia $H(q,p)$ un'Hamiltoniana [3] del tipo:

$$T^\star\mathbb{R}^n \xrightarrow{H} \mathbb{R}$$

$$(q,p) \longmapsto H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

L'equazione di Hamilton:

$$\frac{d}{ds}\omega(s) = J\nabla H(\omega(s))\,; \quad \omega = (\omega^q, \omega^p)$$

definisce il flusso Hamiltoniano $\phi_H^s(q,p)$, che corrisponde ad una trasformazione canonica di $T^\star\mathbb{R}^n$ in $T^\star\mathbb{R}^n$.
Per ogni $t > 0$ fissato, la relazione caratteristica del sistema Hamiltoniano associato ad $H(q,p)$ corrispondente all'insieme:

$$\Lambda_t = \Big\{(q_0, p_0; q_t, p_t) \in T^\star\mathbb{R}^n \times T^\star\mathbb{R}^n; \quad \phi_H^t(q_0,p_0) = (q_t,p_t)\Big\}$$

risulta essere una sottovarietà Lagrangiana di $T^\star\mathbb{R}^n \times T^\star\mathbb{R}^n$ [4] che rappresenta in modo univoco la trasformazione canonica $\phi_H^t(q,p)$. Come osservato nel paragrafo 1.1, il Teorema di Maslov-Hörmander permette una parametrizzazione in generale solo locale per la sottovarietà Lagrangiana Λ_t, per mezzo di Funzioni Generatrici $S(q_0, q_t, u)$:

$$S(q_0,q_t,u) : U \subset \mathbb{R}^n \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

Dunque in generale Λ_t assume localmente la rappresentazione:

$$\Lambda_t = \Big\{(q_0, p_0; q_t, p_t) \in T^\star\mathbb{R}^n \times T^\star\mathbb{R}^n; \quad p_0 = -\frac{\partial S}{\partial q_0} \quad p_t = \frac{\partial S}{\partial q_t} \quad 0 = \frac{\partial S}{\partial u}\Big\}$$

Nel seguente Teorema 1.3.1 si dimostra come si possa costruire una Funzione Generatrice globale $S(q_0, q_t, u)$ di questa particolare sottovarietà Lagrangiana.

[3] dove $T^\star\mathbb{R}^n$ è il fibrato cotangente di $\mathbb{R}^n$ dotato della struttura simplettica $\Omega = dp_i \wedge dq^i$

[4] $T^\star\mathbb{R}^n \times T^\star\mathbb{R}^n$ ammette la struttura simplettica $\bar{\Omega} = -pr_1^\star\Omega + pr_2^\star\Omega$ dove

$$T^\star\mathbb{R}^n \xleftarrow{pr_1} T^\star\mathbb{R}^n \times T^\star\mathbb{R}^n \xrightarrow{pr_2} T^\star\mathbb{R}^n$$

Teorema 1.3.1
Sia $H(q,p) : T^\star\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione Hamiltoniana di classe C^2 che sia Legendre-correlata ad una funzione Lagrangiana $L(q,\dot q) : T\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2. Si ipotizzi inoltre che le seguenti condizioni siano soddisfatte:

$$\sup_{(q,\dot q)\in T\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^i \partial \dot q^j}(q,\dot q) \right| < B \quad \forall i,j = 1,2,...n \quad \text{per qualche}\, B \in \mathbb{R}$$

$$\sup_{(q,p)\in T^\star\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^2 H}{\partial q^i \partial p^j}(q,p) \right| < C \quad \forall i,j = 1,2,...n \quad \text{per qualche}\, D \in \mathbb{R}$$

Allora la sottovarietà Lagrangiana Λ_t rappresentante la trasformazione canonica $\phi_H^t(q,p)$:

$$\Lambda_t = \Big\{ (q_0,p_0;q_t,p_t) \in T^\star\mathbb{R}^n \times T^\star\mathbb{R}^n; \quad \phi_H^t(q_0,p_0) = (q_t,p_t) \Big\}$$

ammette una Funzione Generatrice globale $S(q_0,q_t,u)$:

$$\Lambda_t = \Big\{ (q_0,p_0;q_t,p_t) \in T^\star\mathbb{R}^n \times T^\star\mathbb{R}^n; \quad p_0 = -\frac{\partial S}{\partial q_0} \quad p_t = \frac{\partial S}{\partial q_t} \quad 0 = \frac{\partial S}{\partial u}(q_0,q_t,u) \Big\}$$

Dimostrazione
Fissati due punti $x,y \in \mathbb{R}^n$, fissato il tempo $t \in [0,T]$ intervallo limitato, si considera la mappa $\gamma(t,x,y,u)(s)$, definita dalla procedura di riduzione di Amann-Conley-Zehnder (vedi paragrafo precedente):

$$\mathbb{R}^k \times [0,t] \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$(u,s) \longmapsto \gamma(t,x,y,u)(s) = (\gamma^q;\gamma^p)(t,x,y,u)(s)$$

La mappa $\gamma(t,x,y,u)(s)$ associa dunque ad ogni un parametro $u \in \mathbb{R}^k$ una curva in $\mathbb{R}^{2n}$ definita sull'intervallo di tempo $[0,t]$, dove il punto iniziale è y e il punto finale è x.
Le componenti q corrispondono a:

$$\gamma^q(t,x,y,u)(s) = y + \frac{x-y}{t}(s) + \int_0^s \frac{1}{N}\Big[u^q(\tau) + f^q(t,x,y,u)(\tau)\Big]d\tau$$

mentre le componenti p corrispondono a:

$$\gamma^p(t,x,y,u)(s) =$$

$$= m\Big(\frac{x-y}{t} + \frac{u^q(0) + f^q(t,x,y,u)(0)}{N}\Big) + \int_0^s \frac{1}{N}\Big[u^p(\tau) + f^p(t,x,y,u)(\tau)\Big]d\tau$$

Come visto in precedenza, determinando le curve $\bar{u}(s)$ che verificano la relazione:

$$\bar{u}(s) = \mathbb{P}_N J \nabla H(\gamma(t, x, y, \bar{u})(s))$$

si dimostra che le curve $\gamma(t, x, y, \bar{u})(s)$ corrispondono alle curve classiche che connettono i punti y e x nel tempo t.
Si consideri ora il funzionale d'azione $A[\cdot]$ costruito per mezzo dell'Hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ definito sul dominio naturale delle curve $C^1([0, t]; \mathbb{R}^{2n})$ come:

$$C^1([0, t]; \mathbb{R}^{2n}) \xrightarrow{A} \mathbb{R}$$

$$\omega(s) \longmapsto A[\omega(s)] := \int_0^t \Big[\omega^p(s)\dot{\omega}^q(s) - H(\omega(s))\Big]\, ds$$

Per definizione si pone $q_0 = y$, $q_t = x$ e di conseguenza la Funzione Generatrice globale si rappresenta come $S(q_0, q_t, u) = S(t, x, y, u)$. Si definisce tale funzione come:

$$S(t, x, y, u) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, x, y, u) \longmapsto S(t, x, y, u) := A[\gamma(t, x, y, u)(s)]$$

Si è dunque costruita una funzione differenziabile dei punti x e y, del tempo t, e dei parametri $u \in \mathbb{R}^k$ in quanto composizione del funzionale d'azione con la mappa $\gamma(t, x, y, u)(s)$ che è una funzione proprio di queste variabili.
Si dimostra ora che la sottovarietà Lagrangiana:

$$\Lambda_t = \Big\{(y, p_0; x, p_t) \in T^\star\mathbb{R}^n \times T^\star\mathbb{R}^n; \quad \phi_H^t(y, p_0) = (x, p_t)\Big\}$$

viene parametrizzata da $S(t, x, y, u)$ come:

$$\Lambda_t = \Big\{(y, p_0; x, p_t) \in T^\star\mathbb{R}^n \times T^\star\mathbb{R}^n; \quad p_0 = -\frac{\partial S}{\partial y} \quad p_t = \frac{\partial S}{\partial x} \quad 0 = \frac{\partial S}{\partial u}\Big\}$$

Bisogna dunque verificare che, relativamente ai parametri $\bar{u}$ che verificano la condizione:

$$0 = \frac{\partial S}{\partial u}(t, x, y, \bar{u})$$

si ha che:

$$p_0 = -\frac{\partial S}{\partial y}(t, x, y, \bar{u})$$

$$p_t = \frac{\partial S}{\partial x}(t, x, y, \bar{u})$$

Ovvero, per quanto detto in precedenza sulle curve $\gamma(t,x,y,\bar{u})(s)$, tali relazioni coincidono con:

$$\gamma^p(t,x,y,\bar{u})(0) = -\frac{\partial S}{\partial y}(t,x,y,\bar{u})$$

$$\gamma^p(t,x,y,\bar{u})(t) = \frac{\partial S}{\partial x}(t,x,y,\bar{u})$$

Al fine di verificare tali relazioni, si osserva dapprima facilmente (vedi [5]) che i parametri critici della Funzione Generatrice S:

$$0 = \frac{\partial S}{\partial u}(t,x,y,\bar{u})$$

corrispondono in modo biunivoco alle curve $\bar{u}(s)$ che verificano la relazione:

$$\bar{u}(s) = \mathbb{P}_N J \nabla H(\gamma(t,x,y,\bar{u})(s))$$

Tali parametri corrispondono dunque in modo biunivoco anche alle curve $\gamma(t,x,y,\bar{u})(s)$ classiche che connettono i punti y e x nel tempo t.
In seguito a tale osservazione, esplicitando la derivata parziale di S, si verifica direttamente la seconda delle due relazioni:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t,x,y,\bar{u}) = \frac{\partial}{\partial x} A[\gamma(t,x,y,\bar{u})(s)] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \gamma^p(s)\dot{\gamma}^q(s) - H(\gamma(s))\Big|_{\gamma=\gamma(t,x,y,\bar{u})(s)} ds =$$

$$= \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\Big[\gamma^p(s)\dot{\gamma}^q(s) - H(\gamma(s))\Big]\Big|_{\gamma=\gamma(t,x,y,\bar{u})(s)} ds =$$

$$= \int_0^t \Big[\frac{\partial}{\partial x}\gamma^p(t,x,y,\bar{u})(s)\Big]\dot{\gamma}^q(t,x,y,\bar{u})(s) + \gamma^p(t,x,y,\bar{u})(s)\Big[\frac{\partial}{\partial x}\dot{\gamma}^q(t,x,y,\bar{u})(s)\Big] ds +$$

$$- \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} H(\gamma(t,x,y,\bar{u})(s))\, ds =$$

$$= \int_0^t \Big[\frac{\partial}{\partial x}\gamma^p(t,x,y,\bar{u})(s)\Big]\dot{\gamma}^q(t,x,y,\bar{u})(s) + \gamma^p(t,x,y,\bar{u})(s)\Big[\frac{\partial}{\partial x}\dot{\gamma}^q(t,x,y,\bar{u})(s)\Big] ds +$$

$$- \int_0^t \frac{\partial H}{\partial q}\Big[\frac{\partial}{\partial x}\gamma^q(t,x,y,\bar{u})(s)\Big] + \frac{\partial H}{\partial p}\Big[\frac{\partial}{\partial x}\gamma^p(t,x,y,\bar{u})(s)\Big]\, ds =$$

$$= \int_0^t \Big[\frac{\partial}{\partial x}\gamma^p(t,x,y,\bar{u})(s)\Big] \cdot \Big[\dot{\gamma}^q(t,x,y,\bar{u})(s) - \frac{\partial H}{\partial p}(\gamma(t,x,y,\bar{u})(s))\Big] ds +$$

$$+\int_0^t \gamma^p(t,x,y,\bar{u})(s)\Big[\frac{\partial}{\partial x}\dot{\gamma}^q(t,x,y,\bar{u})(s)\Big] - \frac{\partial H}{\partial q}\Big[\frac{\partial}{\partial x}\gamma^q(t,x,y,\bar{u})(s)\Big]\,ds$$

Ma $\gamma(t,x,y,\bar{u})(s)$ sono curve classiche e perciò:

$$\dot{\gamma}^q(t,x,y,\bar{u})(s) - \frac{\partial H}{\partial p}(\gamma(t,x,y,\bar{u})(s)) = 0$$

Dunque si ottiene che:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t,x,y,\bar{u}) = \int_0^t \gamma^p(t,x,y,\bar{u})(s)\Big[\frac{\partial}{\partial x}\dot{\gamma}^q(t,x,y,\bar{u})(s)\Big] - \frac{\partial H}{\partial q}\Big[\frac{\partial}{\partial x}\gamma^q(t,x,y,\bar{u})(s)\Big]\,ds$$

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t,x,y,\bar{u}) = \int_0^t \frac{d}{ds}\Big[\gamma^p(t,x,y,\bar{u})(s)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\gamma^q(t,x,y,\bar{u})(s)\Big]\,ds +$$
$$-\int_0^t \dot{\gamma}^p(t,x,y,\bar{u})(s)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\gamma^q(t,x,y,\bar{u})(s) + \frac{\partial H}{\partial q}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\gamma^q(t,x,y,\bar{u})(s)\,ds$$

Ma analogamente a quanto visto sopra:

$$\dot{\gamma}^p(t,x,y,\bar{u})(s) + \frac{\partial H}{\partial q}(\gamma(t,x,y,\bar{u})(s)) = 0$$

Perciò l'espressione si semplifica come:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t,x,y,\bar{u}) = \int_0^t \frac{d}{ds}\Big[\gamma^p(t,x,y,\bar{u})(s)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\gamma^q(t,x,y,\bar{u})(s)\Big]\,ds$$

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t,x,y,\bar{u}) = \Big[\gamma^p(t,x,y,\bar{u})(s)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\gamma^q(t,x,y,\bar{u})(s)\Big]_0^t$$

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t,x,y,\bar{u}) = \gamma^p(t,x,y,\bar{u})(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\gamma^q(t,x,y,\bar{u})(t) - \gamma^p(t,x,y,\bar{u})(0)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\gamma^q(t,x,y,\bar{u})(0)$$

Ma per costruzione di $\gamma^q(t,x,y,\bar{u})(s)$ si ha che:

$$y = \gamma^q(t,x,y,\bar{u})(0) \quad \forall\, t,x,y,\bar{u}$$

$$x = \gamma^q(t,x,y,\bar{u})(t) \quad \forall\, t,x,y,\bar{u}$$

e dunque

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\gamma^q(t,x,y,\bar{u})(0) \quad \forall\, t,x,y,\bar{u}$$
$$1 = \frac{\partial}{\partial x}\gamma^q(t,x,y,\bar{u})(t) \quad \forall\, t,x,y,\bar{u}$$

Si ottiene infine l'espressione cercata:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t, x, y, \bar{u}) = \gamma^p(t, x, y, \bar{u})(t)$$

Analogamente si effettua la verifica della relazione:

$$-\frac{\partial S}{\partial y}(t, x, y, \bar{u}) = \gamma^p(t, x, y, \bar{u})(0)$$

$\square$

1.4 Proprietà della Funzione Generatrice globale

Sulla base della costruzione data nel precedente paragrafo della Funzione Generatrice globale $S(t,x,y,u)$, e assumendo sul potenziale $V(x)$ opportune ipotesi di limitatezza, si dimostra che tale funzione assume la forma esplicita generale:

$$S(t,x,y,u) = \langle A(t)u; u\rangle + C(t,x,y,u)$$

dove la matrice $A(t)$ è non degenere e il termine scalare $C(t,x,y,u)$ risulta limitato con derivate prime limitate nella variabile u.
Questa rappresentazione di $S(t,x,y,u)$ permette di osservare che tale funzione, per (t,x,y) fissati, verifica la condizione di Palais Smale: Ogni successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $||\nabla_u S(t,x,y,u_n)|| \to 0$ e $S(t,x,y,u_n)$ sia limitata, ammette qualche sottosuccesione convergente. Grazie a questa proprietà, utilizzando la teoria variazionale di Lusternik-Schnirelman (vedi [6]) è possibile verificare l'esistenza, $\forall(t,x,y) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, di almeno un parametro critico $\bar{u}$:

$$0 = \frac{\partial S}{\partial u}(t,x,y,\bar{u})$$

in corrispondenza al quale si costruisce la cosidetta soluzione *min-max*; si dimostra cosí l'esistenza di almeno una curva classica $\gamma(t,x,y,\bar{u})(s)$ che connette i punti y e x nel tempo t.

Proposizione 1.4.0 Forma generale della Funzione Generatrice
Sia data l'Hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$, con l'energia potenziale $V(x)$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big|V(x)\Big| = V^0 < +\infty$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big|\frac{\partial V}{\partial x^i}(x)\Big| = V_i' < +\infty \quad \forall i = 1,2,...n$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big|\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^i \partial x^j}\Big| = V_{i,j}'' < +\infty \quad \forall i,j = 1,2,...n$$

Allora la Funzione Generatrice Globale $S(t,x,y,u)$ assume la forma esplicita generale:

$$S(t,x,y,u) = \langle A(t)u; u\rangle + C(t,x,y,u)$$

dove la matrice $A(t)$ è non degenere e il termine scalare $C(t,x,y,u)$ risulta limitato e possiede derivate limitate in u.

Dimostrazione

L'ipotesi di limitatezza delle derivate seconde del potenziale garantisce la validità delle ipotesi del Teorema 1.3.1 e quindi la possibilità di costruire la Funzione Generatrice globale come:

$$[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t,x,y,u) \longmapsto S(t,x,y,u) := A[\gamma(t,x,y,u)(s)]$$

dove le componenti γ^q, corrispondono a:

$$\gamma^q(t,x,y,u)(s) = y + \frac{x-y}{t}(s) + \int_0^s \frac{1}{N}\Big[u^q(\tau) + f^q(t,x,y,u)(\tau)\Big]d\tau$$

mentre le componenti γ^p corrispondono, per questo tipo di Hamiltoniana, a:

$$\gamma^p(t,x,y,u)(s) = m\Big(\frac{x-y}{t} + \frac{u^q(0)}{N}\Big) + \int_0^s \frac{1}{N}\Big[u^p(\tau) + f^p(t,x,y,u)(\tau)\Big]d\tau$$

Si osserva che per un'Hamiltoniana generica esiste il termine $f^q(t,x,y,u)(0)$ ma è possibile vedere che, in questo caso particolare con $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$, tale termine risulta nullo.

Esplicitando dunque la definizione di $S(t,x,y,u)$:

$$S(t,x,y,u) = \int_0^t \gamma^p(s)\dot{\gamma}^q(s) - H(\gamma(s))\,ds\Big|_{\gamma=\gamma(t,x,y,u)(s)}$$

Si può scivere come la somma di due termini:

$$S(t,x,y,u) = S_1(t,x,y,u) + S_2(t,x,y,u)$$

dove

$$S_1(t,x,y,u) = \int_0^t \gamma^p(s)\dot{\gamma}^q(s)\,ds\Big|_{\gamma=\gamma(t,x,y,u)(s)}$$

$$S_2(t,x,y,u) = -\int_0^t H(\gamma(t,x,y,u)(s))\,ds$$

Entrambi i termini si possono sviluppare ulteriormente utilizzando la forma esplicita di $\gamma(t,x,y,u)(s)$; dunque per il primo integrale si ha che:

$$S_1(t,x,y,u) = \int_0^t \Big\{\gamma^p(s)\Big\}\Big\{\dot{\gamma}^q(s)\Big\}\,ds\Big|_{\gamma=\gamma(t,x,y,u)(s)}$$

$$S_1(t,x,y,u) = \int_0^t \Big\{m\Big(\frac{x-y}{t} + \frac{u^q(0)}{N}\Big) + \int_0^s \frac{u^p(\tau) + f^p(t,x,y,u)(\tau)}{N}d\tau\Big\}\cdot$$

$$\cdot\Big\{\frac{x-y}{t}+\frac{u^q(s)+f^q(t,x,y,u)(s)}{N}\Big\}\,ds$$

Considerando il prodotto dei termini in parentesi, si può scrivere $S_1(t,x,y,u)$ a sua volta come somma di tre integrali:

$$S_1(t,x,y,u)=\int_0^t\Big[\Big(m\frac{u^q(0)}{N}+\int_0^s\frac{u^p(\tau)}{N}d\tau\Big)\cdot\Big(\frac{u^q(s)}{N}\Big)\Big]ds+$$

$$+\int_0^t\Big[m\frac{x-y}{t}\cdot\frac{u^q(s)}{N}+m\frac{u^q(0)}{N}\cdot\frac{x-y}{t}+\int_0^s\frac{u^p(\tau)}{N}d\tau\cdot\frac{x-y}{t}\Big]ds+$$

$$+\int_0^t\Big[m\frac{x-y}{t}\cdot\frac{x-y}{t}+m\frac{x-y}{t}\cdot\frac{f^q(t,x,y,u)(s)}{N}+m\frac{u^q(0)}{N}\cdot\frac{f^q(t,x,y,u)(s)}{N}+$$

$$+\int_0^s\frac{f^p(t,x,y,u)(\tau)}{N}d\tau\cdot\Big(\frac{x-y}{t}+\frac{u^q(s)+f^q(t,x,y,u)(s)}{N}\Big)+$$

$$+\int_0^s\frac{u^p(\tau)}{N}d\tau\cdot\frac{f^q(t,x,y,u)(s)}{N}\Big]ds.$$

Il primo integrale corrisponde ad un termine quadratico nei parametri $u\in\mathbb{R}^k$:

$$\langle A_1(t)u;u\rangle=\int_0^t\Big[\Big(m\frac{u^q(0)}{N}+\int_0^s\frac{u^p(\tau)}{N}d\tau\Big)\cdot\Big(\frac{u^q(s)}{N}\Big)\Big]ds$$

Il secondo integrale corrisponde ad un termine lineare nei parametri:

$$\langle B_1(t,x,y);u\rangle=\int_0^t\Big[m\frac{x-y}{t}\cdot\frac{u^q(s)}{N}+m\frac{u^q(0)}{N}\cdot\frac{x-y}{t}+\int_0^s\frac{u^p(\tau)}{N}d\tau\cdot\frac{x-y}{t}\Big]ds$$

Il terzo integrale, più complesso dei precedenti, corrisponde a:

$$C_1(t,x,y,u)=\int_0^t\Big[m\frac{x-y}{t}\cdot\frac{x-y}{t}+m\frac{x-y}{t}\cdot\frac{f^q(t,x,y,u)(s)}{N}+$$

$$+m\frac{u^q(0)}{N}\cdot\frac{f^q(t,x,y,u)(s)}{N}+\int_0^s\frac{f^p(t,x,y,u)(\tau)}{N}d\tau\cdot$$

$$\cdot\Big(\frac{x-y}{t}+\frac{u^q(s)+f^q(t,x,y,u)(s)}{N}\Big)+\int_0^s\frac{u^p(\tau)}{N}d\tau\cdot\frac{f^q(t,x,y,u)(s)}{N}\Big]ds.$$

Ma ricordando che (vedi paragrafo 1.2) per costruzione:

$$u(s)\in\mathbb{P}_NH^1([0,t];\mathbb{R}^{2n})$$

$$f(s)\in\mathbb{Q}_NH^1([0,t];\mathbb{R}^{2n})$$

ed inoltre:

$$0 = \int_0^t f(t,x,y,u)(s)\, ds$$

$$0 = \int_0^t u(s)\, ds$$

Si deduce che il seguente termine, contenuto in $\langle B_1(t,x,y); u\rangle$, risulta nullo:

$$\int_0^t m\frac{x-y}{t} \cdot \frac{u^q(s)}{N} ds = 0$$

Da cui si deduce che il termine $\langle B_1(t,x,y); u\rangle$, si riduce a:

$$\langle B_1(t,x,y); u\rangle = \int_0^t \Big[m\frac{u^q(0)}{N} \cdot \frac{x-y}{t} + \int_0^s \frac{u^p(\tau)}{N} d\tau \cdot \frac{x-y}{t} \Big] ds$$

Analogamente i seguenti termini, contenuti in $C_1(t,x,y,u)$, sono nulli:

$$\int_0^t \frac{x-y}{t} \cdot \frac{f^q(t,x,y,u)(s)}{N}\, ds = 0$$

$$\int_0^t \frac{u^q(0)}{N} \cdot \frac{f^q(t,x,y,u)(s)}{N}\, ds = 0$$

$$\int_0^t \int_0^s \frac{u^p(\tau)}{N} d\tau \cdot \frac{f^q(t,x,y,u)(s)}{N}\, ds = 0$$

$$\int_0^t \int_0^s \frac{f^p(t,x,y,u)(\tau)}{N} d\tau \cdot \frac{u^q(s)}{N}\, ds = 0$$

Perciò $C_1(t,x,y,u)$ si semplifica come:

$$C_1(t,x,y,u) = m\frac{(x-y)^2}{t} + \int_0^t \Big[\int_0^s \frac{f^p(t,x,y,u)(\tau)}{N} d\tau \cdot \frac{x-y}{t} +$$

$$+ \int_0^s \frac{f^p(t,x,y,u)(\tau)}{N} d\tau \cdot \Big(\frac{f^q(t,x,y,u)(s)}{N} \Big) \Big]\, ds$$

Ma è possibile dimostrare che, utilizzando l'ipotesi di limitatezza delle derivate del potenziale e la particolare forma dell'Hamiltoniana considerata, si ha la limitatezza di $f(t,x,y,u)(s)$ e delle sue derivate nella variabile u; questo implica la limitatezza di $C_1(t,x,y,u)$ e delle sue derivate.
Basta infatti ricordare che per definizione $f(t,x,y,u)(s)$ risolve l'equazione:

$$f(t,x,y,u)(s) = Q_N J \nabla H(h_N(t,x,y,u + f(t,x,y,u)(s)))$$

che equivale alla coppia di equazioni:

$$f^q(t,x,y,u)(s) = Q_N \frac{\partial H}{\partial p}(h_N(t,x,y,u+f(t,x,y,u)(s)))$$

$$f^p(t,x,y,u)(s) = -Q_N \frac{\partial H}{\partial q}(h_N(t,x,y,u+f(t,x,y,u)(s)))$$

Ma utilizzando la forma particolare dell'Hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ tali equazioni si traducono in:

$$f^q(t,x,y,u)(s) = Q_N \frac{1}{m} h_N^p(t,x,y,u+f(t,x,y,u)(s))$$

$$f^p(t,x,y,u)(s) = -Q_N \frac{\partial V}{\partial q}(h_N(t,x,y,u+f(t,x,y,u)(s)))$$

Risulta ora evidente che la limitatezza delle derivate prime e seconde del potenziale garantisce la limitatezza di $f^p(t,x,y,u)(s)$ e delle sue derivate, e dalla prima equazione si deduce anche quella di $f^q(t,x,y,u)(s)$.
In conclusione il termine $S_1(t,x,y,u)$ si rappresenta come:

$$S_1(t,x,y,u) = \langle A_1(t)u; u\rangle + \langle B_1(t,x,y); u\rangle + C_1(t,x,y,u)$$

dove $C_1(t,x,y,u)$ è limitato con derivate prime limitate in u.
Bisogna ora sviluppare il termine $S_2(t,x,y,u)$:

$$S_2(t,x,y,u) = -\int_0^t H(\gamma(t,x,y,u)(s))\, ds$$

$$S_2(t,x,y,u) = -\int_0^t \frac{1}{2m}\Big(\gamma^p(t,x,y,u)(s)\Big)^2 + V(\gamma(t,x,y,u)(s))\, ds$$

Il termine scalare:

$$-\int_0^t V(\gamma(t,x,y,u)(s))\, ds$$

è limitato dall'ipotesi di limitatezza del potenziale $V(x)$; inoltre le derivate nella variabile u corrispondono a:

$$-\frac{\partial}{\partial u^r}\int_0^t V(\gamma(t,x,y,u)(s))\, ds = -\int_0^t \frac{\partial V}{\partial x^i}(\gamma(t,x,y,u)(s))\frac{\partial \gamma^i}{\partial u^r}(t,x,y,u)\, ds$$

La loro limitatezza è garantita da quella imposta per ipotesi sulle derivate prime del potenziale:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial V}{\partial x^i}(x)\right| = V_i' < +\infty \quad \forall i = 1,2,...n$$

e da quella dei termini $\frac{\partial \gamma^i}{\partial u^r}$ che si verifica facilmente utilizzando la forma esplicita di γ e dunque usando la limitatezza della $f(t,x,y,u)$.
Il termine relativo a $(\gamma^p(t,x,y,u)(s))^2$ deve essere esplicitato e si dimostra avere la medesima struttura vista per $S_1(t,x,y,u)$; infatti:

$$-\int_0^t \frac{1}{2m}\Big(\gamma^p(t,x,y,u)(s)\Big)^2 ds =$$

$$= -\int_0^t \frac{1}{2m}\Big(m\Big(\frac{x-y}{t}+\frac{u^q(0)}{N}\Big)+\int_0^s \frac{u^p(\tau)+f^p(t,x,y,u)(\tau)}{N}d\tau\Big)^2 ds =$$

che si può riordinare nella somma di tre integrali:

$$= -\frac{1}{2m}\int_0^t \Big(m\frac{u^q(0)}{N}\Big)^2+\Big(\int_0^s \frac{u^p(\tau)}{N}\Big)^2+2m\frac{u^q(0)}{N}\int_0^s \frac{u^p(\tau)}{N}d\tau \quad ds+$$

$$-\frac{1}{2m}\int_0^t 2m^2\frac{x-y}{t}\frac{u^q(0)}{N}+2m\frac{x-y}{t}\int_0^s \frac{u^p(\tau)}{N}d\tau \quad ds+$$

$$-\frac{1}{2m}\int_0^t \Big(m\frac{x-y}{t}\Big)^2+\Big(\int_0^s \frac{f^p(t,x,y,u)(\tau)}{N}d\tau\Big)^2$$

i restanti termini si annullano analogamente a quanto visto in precedenza.
Il primo integrale è di tipo quadratico:

$$\langle A_2(t)u;u\rangle = -\frac{1}{2m}\int_0^t \Big(m\frac{u^q(0)}{N}\Big)^2+\Big(\int_0^s \frac{u^p(\tau)}{N}\Big)^2+2m\frac{u^q(0)}{N}\int_0^s \frac{u^p(\tau)}{N}d\tau\, ds$$

Il secondo integrale è di tipo lineare:

$$\langle B_2(t,x,y);u\rangle = -\frac{1}{2m}\int_0^t 2m^2\frac{x-y}{t}\frac{u^q(0)}{N}+2m\frac{x-y}{t}\int_0^s \frac{u^p(\tau)}{N}d\tau\, ds$$

$$\langle B_2(t,x,y);u\rangle = -m\frac{x-y}{t}\int_0^t \frac{u^q(0)}{N}-\frac{x-y}{t}\int_0^s \frac{u^p(\tau)}{N}d\tau\, ds$$

dunque si osserva che il termine $\langle B_2(t,x,y);u\rangle = -\langle B_1(t,x,y);u\rangle$.
Il terzo integrale è scalare:

$$C_2(t,x,y,u) = -\frac{1}{2}m\frac{(x-y)^2}{t}+\int_0^t \Big(\int_0^s \frac{f^p(t,x,y,u)(\tau)}{N}d\tau\Big)^2 ds$$

Sempre grazie alla limitatezza di $f(t,x,y,u)$ e delle sue derivate, si deduce la limitatezza di $C_2(t,x,y,u)$ e delle sue derivate nella variabile u.
Riassumendo si ha che:

$$S_2(t,x,y,u) = \langle A_2(t)u;u\rangle+\langle B_2(t,x,y);u\rangle+C_2(t,x,y,u)-\int_0^t V(\gamma(t,x,y,u)(s))\, ds$$

$$S_1(t,x,y,u) = \langle A_1(t)u; u\rangle + \langle B_1(t,x,y); u\rangle + C_1(t,x,y,u)$$

Definendo ora i termini generali, derivanti dalla somma dei termini contenuti in $S_1(t,x,y,u)$ e $S_2(t,x,y,u)$:

$$A(t) := A_1(t) + A_2(t)$$

$$\langle B(t,x,y); u\rangle := \langle B_1(t,x,y); u\rangle + \langle B_2(t,x,y); u\rangle = 0$$

$$C(t,x,y,u) := C_1(t,x,y,u) + C_2(t,x,y,u) - \int_0^t V(\gamma(t,x,y,u)(s))\, ds$$

Si ottiene in conclusione che la Funzione Generatrice si esprime nella forma generale:

$$S(t,x,y,u) = \langle A(t)u; u\rangle + C(t,x,y,u)$$

dove $C(t,x,y,u)$ risulta limitato e possiede derivate prime limitate in u, mentre nel prossimo Teorema si vedrà che $A(t)$ è una matrice non degenere. $\square$

Teorema 1.4.1
Fissato il tempo t, la forma quadratica:

$$\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto \langle A(t)u; u\rangle$$

contenuta nella Funzione Generatrice $S(t,x,y,u)$, risulta non degenere.

Dimostrazione
Come visto nelle pagine precedenti la Funzione Generatrice $S(t,x,y,u)$ associata all'Hamiltoniana del tipo $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$, assume la forma:

$$S(t,x,y,u) = \langle A(t)u; u\rangle + C(t,x,y,u)$$

dove il termine quadratico $\langle A(t)u; u\rangle$ non dipende dal tipo di potenziale $V(q)$. Risulta facile verificare che l'Hamitoniana $H_0(q,p) = \frac{p^2}{2m}$ ammette la Funzione Generatrice $S_0(t,x,y,u)$:

$$S_0(t,x,y,u) = \langle A(t)u; u\rangle + m\frac{(x-y)^2}{2t}$$

Ma come visto in precedenza, i punti critici delle Funzioni Generatrici sono in corrispondenza biunivoca con le curve classiche che connettono i punti y e x nel tempo t.
L'unicità delle curve classiche relative ad $H_0(q,p)$ che connettono i punti y e x nel tempo t (una retta), garantisce dunque l'esistenza di un solo punto critico della Funzione Generatrice $S_0(t,x,y,u)$, che coincide con il punto critico della forma quadratica $\langle A(t)u; u\rangle$ ($u = 0$). Del resto l'insieme dei punti critici di $\langle A(t)u; u\rangle$ corrisponde al nucleo della matrice $A(t)$ e di conseguenza si deduce l'invertibilità della matrice $A(t)$.
$\square$

Teorema 1.4.2
La Funzione Generatrice $S(t,x,y,u)$, fissate le variabili (t,x,y), verifica la condizione di Palais-Smale:
Per ogni successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^k$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} ||\nabla_u S(t,x,y,u_n)|| = 0 \tag{1}$$

$$\exists\, S_0 \text{ t.c. } |S(t,x,y,u_n)| \le S_0 < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

esiste una sottosuccesione $\{u_{r(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.

Dimostrazione
Si è precedentemente dimostrato che la Funzione Generatrice assume la forma:

$$S(t,x,y,u) = \langle A(t)u; u\rangle + C(t,x,y,u)$$

dove $A(t)$ è una matrice non degenere, $C(t,x,y,u)$ è uno scalare limitato con derivate prime limitate nella variabile u.
Consideriamo dunque la successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^k$ tale che:

$$\lim_{n\to\infty} ||\nabla_u S(t,x,y,u_n)|| = 0$$

$$\exists\, S_0 \text{ t.c. } |S(t,x,y,u_n)| \le S_0 < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La prima condizione corrisponde a:

$$\lim_{n\to\infty} ||2A(t)u_n + \nabla_u C(t,x,y,u_n)|| = 0$$

Questo equivale al limite:

$$\lim_{n\to\infty} 2A(t)u_n + \nabla_u C(t,x,y,u_n) = 0$$

ma $\nabla_u C(t,x,y,u_n)$ è vettore limitato su $\mathbb{R}^k$, di conseguenza anche $2A(t)u_n$ deve essere limitato. Dal fatto che la matrice $A(t)$ è non degenere si deduce che la successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deve rimanere in un compatto di $\mathbb{R}^k$, da cui segue l'esistenza di una sottosuccessione convergente.
$\square$

In questo capitolo si definisce lo spazio di curve $CPC(t,x,y)$ che [5] corrisponde all'insieme delle curve $\omega(s)$ classiche a tratti che connettono i punti y e x nel tempo t, relative ad un'Hamiltoniana del tipo $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$. Per tale insieme, a seguito di opportune ipotesi sulla terna (t,x,y), si riconoscerà una ben definita struttura di spazio misurabile e su di esso verrà definita una classe di misure σ-finite e complesse $M(d\omega)$.
Successivamente verrà costruita la classe path integrals:

$$\Phi(t,x,y) = \int_{CPC(t,x,y)} \beta(A[\omega(s)])\, M(d\omega)$$

integrali con dominio $CPC(t,x,y)$, misura $M(d\omega)$, e funzione integranda definita per mezzo di una mappa $\beta(\cdot) \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ composta con il funzionale d'azione:

$$A[\omega(s)] := \int_0^t \left[\omega^p(s)\dot{\omega}^q(s) - H(\omega(s))\right] ds$$

costruito con l'utilizzo dell'Hamiltoniana $H(q,p)$ e naturalmente definito sull'insieme $CPC(t,x,y)$.
Nel proseguo del capitolo si vedrà come due particolari path integrals appartenenti a tale classe, danno una rappresentazione integrale infinito dimensionale esatta per i nuclei dei propagatori associati alle equazioni di Schrödinger e di Fokker-Planck.
Infatti, data l'equazione di Schrödinger con la condizione iniziale $\phi(x)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi_S(t,x) + V(x)\psi_S(t,x) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_S(t,x)$$

$$\psi_S(0,x) = \phi(x)\,,$$

la rappresentazione integrale del propagatore si scrive:

$$\psi_S(t,x) = \Phi_S(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_S(t,x,y)\phi(y)dy$$

Si dimostrerà nel paragrafo 2.3 che il nucleo $\Phi_S(t,x,y)$ ammette la rappresentazione integrale infinito dimensionale data dal limite di una famiglia di path integrals a parametro $\epsilon > 0$, costruita sul dominio $CPC(t,x,y)$ utilizzando

[5]CPC: Continuous Piecewise Classical, vedi [8]

un'opportuna famiglia di misure $M_S^\epsilon(d\omega)$ σ-finite e complesse e la mappa $\beta^\epsilon(\cdot) = \exp\{-\frac{1}{(i+\epsilon)\hbar}(\cdot)\}$:

$$\Phi_S(t,x,y) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{CPC(t,x,y)} \exp\Big\{ -\frac{1}{(i+\epsilon)\hbar} A[\omega(s)]\Big\}\, M_S^\epsilon(d\omega)$$

Analogamente, per l'equazione di Fokker-Planck,

$$\frac{\lambda^2}{2m}\triangle\psi_{F-P}(t,x) - V(x)\psi_{F-P}(t,x) = \lambda\frac{\partial}{\partial t}\psi_{F-P}(t,x)$$

$$\psi_{F-P}(0,x) = \phi(x)$$

la soluzione ammette la rappresentazione integrale:

$$\psi_{F-P}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{F-P}(t,x,y)\phi(y)dy$$

Si dimostrerà nel paragrafo 2.4 che il nucleo $\Phi_{F-P}(t,x,y)$ ammette la rappresentazione integrale infinito dimensionale data da un path integral definito sul medesimo dominio di curve, utilizzando un'opportuna misura $M_{F-P}(d\omega)$ σ-finita e reale e la mappa $\beta(\cdot) = \exp\{-\frac{1}{\lambda}(\cdot)\}$:

$$\Phi_{F-P}(t,x,y) = \int_{CPC(t,x,y)} \exp\Big\{ -\frac{1}{\lambda} A[\omega(s)]\Big\} M_{F-P}(d\omega)$$

I risultati di rappresentazione integrale qui ottenuti valgono considerando le variabili $(t,x,y) \in [0,T]\times\mathbb{R}^{2n}$ con un opportuno limite superiore T per l'evoluzione temporale.
Viene realizzata dunque una generalizzazione del lavoro di Vassili Kolokoltsov (vedi [7] e [8]), che dimostra la validità di tali path integrals utilizzando delle differenti misure $M(d\omega)$ valide solo localmente, per $(t,x,y) \in [0,T]\times D \subset \mathbb{R}^{2n}$.

2.1 L'insieme CPC

In questo paragrafo si descrive l'insieme di curve $CPC(t,x,y)$, e una classe generale di misure complesse su di esso definita.
Data l'Hamiltoniana:

$$T^{\star}\mathbb{R}^n \xrightarrow{H} \mathbb{R}$$

$$(q,p) \longmapsto H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

Fissati due punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ e l'intervallo di tempo t, si pone il problema di determinare la totalità delle curve:

$$[0,t] \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$s \longmapsto \omega(s) = (\omega^q(s); \omega^p(s))$$

che risolvono l'equazione di Hamilton con le condizioni al contorno:

$$\frac{d}{ds}\omega(s) = J\nabla H(\omega(s))$$

$$\omega^q(0) = y$$

$$\omega^q(t) = x$$

Scritta in componenti:

$$\frac{d}{ds}\omega^q(s) = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p}\Big|_{\omega(s)}$$

$$\frac{d}{ds}\omega^p(s) = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q}\Big|_{\omega(s)}$$

$$\omega^q(0) = y$$

$$\omega^q(t) = x$$

Il problema consiste dunque nel trovare la totalità delle curve classiche, senza punti di discontinuità nella derivata, che connettono i punti y e x nell'intervallo di tempo t.
Una volta fissato un arbitrario ma finito limite superiore T per il tempo t, la procedura di riduzione di Amann-Conley-Zehnder (vedi paragrafo 1.2) permette la rappresentazione esplicita di tali curve secondo la forma:

$$\omega(s) = \gamma(t,x,y,\bar{u})(s)$$

dove i parametri $\bar{u} \in \mathbb{R}^k$ corrispondono ai punti critici della funzione generatrice $S(t, x, y, u)$ e dunque verificano:

$$\nabla_u S(t, x, y, \bar{u}) = 0$$

Ne consegue che ad ogni punto critico di $S(t, x, y, u)$ corrisponde una curva classica che connette i punti y e x nell'intervallo di tempo t.
Il problema sopra esposto può essere generalizzato considerando la risoluzione dell'equazione di Hamilton con le stesse condizioni al contorno, ma ammettendo che le curve $\omega(s)$ abbiano una quantità finita o numerabile di discontinuità nella derivata.
Data una suddivisione $0 < t_1 < t_2 < ...t_m < t$ finita o numerabile dell'intervallo di tempo $[0, t]$ si vuole determinare la totalità delle curve,

$$[0, t] \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$s \longmapsto \omega(s)$$

derivabili negli intervalli (t_r, t_{r+1}), ma in generale non su tutto $[0, t]$, tali che ristrette ad ogni intervallo di tempo (t_r, t_{r+1}) risolvano l'equazione di Hamilton associata all'Hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$:

$$\frac{d}{ds}\omega(s)\Big|_{(t_r, t_{r+1})} = J\nabla H(\omega(s)) \quad \forall r = 1, 2, ...m$$

con fissate le condizioni al contorno sulle componenti q, relativamente ai tempi $s = 0$ e $s = t$:

$$\omega^q(0) = x$$

$$\omega^q(t) = y$$

Dunque su ogni singolo intervallo $[t_r, t_{r+1}]$ la restrizione $\omega(s)|_{(t_r, t_{r+1}]}$ è una curva classica, senza punti di discontinuità nella derivata, che connette i punti intermedi $x_r = \omega^q(t_r)$ e $x_{r+1} = \omega^q(t_{r+1})$ nell'intervallo di tempo $t_{r+1} - t_r$. Ma considerando l'intero intervallo $[0, t]$ la curva $\omega(s)|_{[0,t]}$ risulta in generale classica a tratti, con discontinuità nella derivata relativamente ai punti $x_1, x_2, ...x_m$ e relativamente ai tempi $t_1, t_2, ...t_m$.
La procedura di riduzione di Amann-Conley-Zehnder permette di dare solo una rappresentazione locale delle curve $\omega(s)$ classiche a tratti, e precisamente solo sui singoli intervalli di tempo (t_r, t_{r+1}) dove tali curve sono derivabili. Le restrizioni a tali intervalli di tempo assumono dunque la forma:

$$\omega(s)\Big|_{(t_r, t_{r+1})} = \gamma(t_{r+1} - t_r, x_r, x_{r+1}, \bar{u}_r)(s - t_r)$$

dove il parametro $\bar{u}_r \in \mathbb{R}^k$ risolve:

$$\nabla_u S(t_{r+1} - t_r, x_r, x_{r+1}, \bar{u}_r) = 0$$

ovvero corrisponde ad un punto critico di $S(t_{r+1} - t_r, x_r, x_{r+1}, u)$; ma in generale, non imponendo alcuna ipotesi sulla terna $(t_{r+1} - t_r, x_r, x_{r+1})$, tale parametro critico non è unico, e questo implica che possono esistere diverse curve classiche $\gamma(t_{r+1} - t_r, x_r, x_{r+1}, \bar{u}_r)(s - t_r)$ che connettono i punti intermedi x_r e x_{r+1} nel tempo $t_{r+1} - t_r$.
Una curva $\omega(s)$ classica a tratti definita sull'intero intervallo $[0, t]$, con discontinuità nella derivata relativamente ai punti $x_1, x_2, x_r ... x_m$ e relativamente ai tempi $t_1, t_2, t_r ... t_m$ si può rappresentare dunque come:

$$\omega(s) = \begin{cases} \gamma(t_1, y, x_1, \bar{u}_1)(s) & s \in [0, t_1] \\ \gamma(t_2 - t_1, x_1, x_2, \bar{u}_2)(s - t_1) & s \in [t_1, t_2] \\ \gamma(t_{r+1} - t_r, x_r, x_{r+1}, \bar{u}_r)(s - t_r) & s \in [t_r, t_{r+1}] \\ ... & \\ \gamma(t - t_m, x_m, x, \bar{u}_m)(s - t_m) & s \in [t_m, t] \end{cases}$$

Il fatto, sopra osservato, che in generale vi possono essere diverse curve classiche $\gamma(t_{r+1} - t_r, x_r, x_{r+1}, \bar{u}_r)(s - t_r)$ che connettono i punti intermedi x_r e x_{r+1}, implica che a priori possono esistere differenti curve classiche a tratti $\omega(s)$ che connettono i punti y e x nel tempo t aventi i medesimi punti di discontinuità $x_1, x_2, x_r, ... x_m$ per i medesimi tempi $t_1, t_2, t_r ... t_m$.

Osservazione Importante
Si ricorda che l'esistenza di almeno una curva classica che connette due punti y e x nel tempo t (e dunque anche delle curve classiche a tratti) è stata dimostrata nel capitolo 1. Infatti nel Teorema 1.4.2 si verifica la condizione di Palais-Smale per la Funzione Generatrice $S(t, x, y, u)$; tale proprietà garantisce l'esistenza di almeno un punto critico di $S(t, x, y, u)$ $\forall (t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{2n}$ fissati, e di conseguenza l'esistenza di almeno una curva classica.

Definizione $CPC_0(t,x,y)$
L'insieme $CPC_0(t,x,y)$ corrisponde alla totalità delle curve classiche, senza punti di discontinuità, che connettono i punti y e x nell'intervallo di tempo $[0,t]$.

Definizione $CPC_m(t,x,y)$
Fissato $m \in \mathbb{N}$ si definisce l'insieme $CPC_m(t,x,y)$ come la totalità delle curve classiche a tratti con esattamente m punti di discontinuità nella derivata, che connettono i punti y e x nell'intervallo di tempo $[0,t]$.

Definizione $CPC(t,x,y)$
Si definisce l'insieme $CPC(t,x,y)$ come:

$$CPC(t,x,y) := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} CPC_m(t,x,y)$$

Proposizione 2.1.0
Data un'Hamiltoniana $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ *e supposto che il minimo assoluto per funzionale d'azione* $A[\cdot]$ *corrispondente sia assunto da una curva derivabile a tratti, si ha che tale curva è classica e senza punti di discontinuità.*
Dimostrazione
Vedi [8]

Osservazione
L' insieme $CPC(t,x,y)$ ha una struttura di spazio topologico, ma per generiche Hamiltoniane $H(q,p)$ non vi sono ulteriori informazioni sulla natura di questo insieme. Nella Proposizione 2.1.1 si vedrà come, a seguito di opportune ipotesi riguardanti l'Hamiltoniana e la terna (t,x,y), si evidenzierà una ben definita struttura per questo insieme; inoltre in tali condizioni si verificerà l'ipotesi richiesta nella Proposizione 2.1.0.

Definizione $\mathcal{P}_0(t,x,y)$
L'insieme viene definito dalla terna (t,x,y) con $x,y \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$.

Definizione $\mathcal{P}_m(t,x,y)$
Fissato il tempo t ed i punti y e $x \in \mathbb{R}^n$, fissato $m \in \mathbb{N}$, si definisce l'insieme:

$$\mathcal{P}_m(t,x,y) := \Big\{ (t_1, t_2, ...t_m; x_1, x_2, ...x_m) \in (\mathbb{R}^+)^m \times (\mathbb{R}^n)^m \Big\}$$

dove $0 < t_1 < t_2 < ...t_m < t$ sono le suddivisioni finite di m tempi dell'intervallo $[0,t]$, mentre i punti devono verificare $x_r \neq x_{r+1}$ $\forall r = 1,2,...m-1$ e $x_1 \neq y$, $x_m \neq x$.

Osservazione
L'insieme $\mathcal{P}_m(t,x,y)$ ha la natura di aperto per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{m(n+1)}$.

Definizione $\mathcal{P}(t,x,y)$
Fissato il tempo t ed i punti y e $x \in \mathbb{R}^n$, si definisce l'insieme:

$$\mathcal{P}(t,x,y) := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_m(t,x,y)$$

Definizione $CPL_0(t,x,y)$
L'insieme $CPL_0(t,x,y)$ è definito [6] dalla retta che connette i punti y e x nell'intervallo di tempo $[0,t]$, tale curva si scrive come:

$$\alpha(s) = y + \frac{x-y}{t}s$$

Definizione $CPL_m(t,x,y)$
Fissato $m \in \mathbb{N}$ si definisce l'insieme $CPL_m(t,x,y)$ come la totalità delle rette spezzate $\alpha_m(s)$ con esattamente m punti di discontinuità nella derivata, che connettono i punti y e x nell'intervallo di tempo $[0,t]$. Tali curve si scrivono come:

$$\alpha_m(s) = \begin{cases} y + \frac{x_1-y}{t_1}s & s \in [0,t_1] \\ x_1 + \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}(s-t_1) & s \in [t_1,t_2] \\ x_r + \frac{x_{r+1}-x_r}{t_{r+1}-t_r}(s-t_r) & s \in [t_r,t_{r+1}] \\ ... & \\ x_m + \frac{x-x_m}{t-t_m}(s-t_m) & s \in [t_m,t] \end{cases}$$

Definizione $CPL(t,x,y)$
Si definisce l'insieme $CPL(t,x,y)$ come:

$$CPL(t,x,y) := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} CPL_m(t,x,y)$$

[6] CPL: Continuous Piecewise Linear

Osservazione

Si osserva che, a seguito delle precedenti definizioni, si stabilisce un naturale isomorfismo:

$$CPL(t,x,y) \simeq \mathcal{P}(t,x,y)$$

Infatti ogni spezzata $\alpha(s) \in CPL(t,x,y)$ è definita in modo univoco dai punti $x_1, x_2, x_r, ...x_m$ e dai tempi $t_1, t_2, t_r...t_m$ che definiscono le discontinuità della derivata e che identificano anche un unico elemento di $\mathcal{P}(t,x,y)$.

Proposizione 2.1.1

Data $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ con il potenziale $V(q) \in C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ che soddisfa:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |V(x)| = V^0 < +\infty$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial V}{\partial x^i}(x)\right| = V_i' < +\infty \quad \forall i = 1,2,...n$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^i \partial x^j}\right| = V_{i,j}'' < +\infty \quad \forall i,j = 1,2,...n$$

Allora per ogni raggio $R > 0$ fissato, esiste un tempo $t_0 > 0$ tale che $\forall |\eta_1 - \eta_2| < R$ e $\forall t \leq t_0$ esiste un'unica curva classica $\omega(s)$ che connette i punti η_1 e η_2 nel tempo t; tale curva realizza inoltre un minimo locale per il funzionale d'azione.

Dimostrazione

L'esistenza di almeno una curva classica è stata dimostrata nel paragrafo 1.4, utilizzando le ipotesi di limitatezza del potenziale e delle sue derivate; mentre l'unicità e la condizione di minimo si possono dimostrare sulla base di argomenti di calcolo delle variazioni (vedi ad esempio [25]).

Osservazione 1

Dato che il raggio $R > 0$ può essere considerato arbitrariamente grande, si deduce che nel limite di R che tende all'infinito esiste comunque un tempo $t_0 > 0$ che permette sempre la selezione di una curva classica che connette due punti η_1 e η_2 arbitrariamente lontani, nel tempo t, secondo la condizione $t \leq t_0$.

Corollario 2.1.2
Nelle ipotesi della Proposizione 2.1.1 si verifica il seguente isomorfismo:

$$CPC(t,x,y) \simeq \mathcal{P}(t,x,y)$$

Dimostrazione
Sulla base della Proposizione 2.1.1 e considerando l'osservazione successiva, si pone $t \leq T = t_0$ e si seleziona la curva classica $\omega_0(s)$ che connette x e y arbitrariamente lontani, nel tempo t; ne consegue che con questo criterio l'insieme $CPC_0(t,x,y) = \{\omega_0(s)\}$ è definito da una sola curva. Per quanto riguarda le curve classiche a tratti viene adottato di conseguenza lo stesso criterio, dato che ogni singolo sottointervallo di $[0,t]$ verifica la diseguaglianza $(t_{r+1} - t_r) < t$ e dunque esiste un'unica curva classica che in tale intervallo connette i punti x_r e x_{r+1}. Ne consegue che fissato un elemento $(t_1, t_2, ...t_m; x_1, x_2, ...x_m) \in \mathcal{P}_m(t,x,y)$ si seleziona un'unica curva $\omega(s)$ classica a tratti definita sull'intero intervallo $[0,t]$, con discontinuità nella derivata relativamente ai punti $x_1, x_2, x_r...x_m$ e relativamente ai tempi $t_1, t_2, t_r...t_m$. Questo significa dunque che la mappa $\lambda(\cdot)$ definita come:

$$CPC_m(t,x,y) \xrightarrow{\lambda} \mathcal{P}_m(t,x,y)$$

$$\omega(s) \longmapsto \lambda(\omega(s)) := (t_1, t_2, ...t_m; \omega(t_1), \omega(t_2), ...\omega(t_m))$$

che associa ad una curva $\omega(s)$ classica a tratti i suoi m tempi e punti corrispondenti alle discontinuità nella derivata, risulta iniettiva e suriettiva, ovvero è un isomorfismo.
Anche per gli insiemi $CPC_0(t,x,y)$ e $\mathcal{P}_0(t,x,y)$ sussiste un isomorfismo in quanto sono due insiemi puntuali.
Si conclude che fissata in generale una curva classica a tratti $\omega(s) \in CPC(t,x,y)$ esiste ed è unico il corrispondente elemento di $\mathcal{P}(t,x,y)$, ovvero si stabilisce l'isomorfismo:

$$CPC(t,x,y) \simeq \mathcal{P}(t,x,y)$$

□

Osservazione 2
Come conseguenza del Corollario 2.1.2 si verifica l'ipotesi contenuta nell'enunciato della Proposizione 2.1.0. Infatti il funzionale d'azione $A[\cdot]$ possiede un minimo locale nella classe delle curve $C^2([0,T]; \mathbb{R}^{2n})$ tali che $\gamma(0) = y$ e $\gamma(t) = x$; tale minimo è assunto dall' unica curva classica $\omega_0(s)$ che connette i punti y e x nel tempo t. Ma in tali condizioni è facile dimostrare (vedi [8]) che tutte le curve derivabili a tratti $\omega(s)$ verificano la diseguaglianza:

$$A[\omega] > A[\omega_0] \quad \forall \omega(s) \neq \omega_0(s)$$

Si conclude che esiste il punto di minimo assoluto del funzionale $A[\cdot]$ sull'insieme delle curve derivabili a tratti, poichè coincide propio con il punto di minimo locale $\omega_0(s)$.

Osservazione 3
Considerando il limite superiore per il tempo t uguale a $T = t_0$ ed i punti x e y arbitrariamente lontani, si deduce che la Funzione Generatrice (vedi paragrafo 1.3):

$$S(t, x, y, u) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, x, y, u) \longmapsto S(t, x, y, u) := A[\gamma(t, x, y, u)(s)]$$

possiede, in virtù della corrispondenza biunivoca fra curve classiche e parametri critici, un unico parametro critico $\bar{u}$, $\forall (t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{2n}$ fissati.
Ne consegue che data l'equazione:

$$\nabla_u S(t, x, y, \bar{u}) = 0$$

Esiste la funzione $\bar{u}(t, x, y)$ tale che:

$$\nabla_u S(t, x, y, \bar{u}(t, x, y)) = 0 \quad \forall (t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{2n}$$

Si ricorda ora che la Funzione Generatrice ha una dipendenza C^r da tutte le sue variabili e che la curva $\gamma(t, x, y, \bar{u})(s)$ è un minimo locale per il funzionale d'azione $A[\cdot]$; si deduce allora che il parametro critico $\bar{u}$ è un punto di minimo locale per $S(t, x, y, u)$. Inoltre si può dimostrare che grazie all'unicità, la curva $\gamma(t, x, y, \bar{u}(t, x, y))(s)$ possiede una dipendenza continua dalle condizioni al contorno (t, x, y).

Misure su CPC

L'insieme $\mathcal{P}(t,x,y)$ possiede una naturale struttura di spazio di probabilità, ovvero una σ-algebra e una misura su di esso definite. Infatti per definizione:

$$\mathcal{P}(t,x,y) := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_m(t,x,y)$$

Dove, fissati i punti x e $y \in \mathbb{R}^n$ e il tempo $t > 0$, si è definito $\mathcal{P}_0(t,x,y) := \{(t,x,y)\}$ che possiede dunque la σ-algebra generata dal solo elemento (t,x,y) e dall'insieme vuoto; inoltre una classe di misure σ-finite e complesse su tale insieme è data dall'insieme delle funzioni $M_0(t,x,y) \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2n};\mathbb{C})$ con modulo limitato su tutto il dominio.
L'insieme $\mathcal{P}_m(t,x,y) := \{(t_1,t_2,...t_m;x_1,x_2,...x_m) \in (\mathbb{R}^+)^m \times (\mathbb{R}^n)^m\,;\, t_j < t_{j+1}\ x_j \neq x_{j+1}\}$ corrisponde ad un aperto di $\mathbb{R}^{m(n+1)}$ e dunque possiede la σ-algebra di Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m(n+1)})$ ristretta a tale sottoinsieme. Una classe di misure σ-finite e complesse su tale insieme è definibile per mezzo della misura di Lebesgue e utilizzando opportune funzioni densità $\bar{M}_m(t,x,y,t_j,x_j) \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2n} \times c;\mathbb{C})$.
Dato un sottoinsieme misurabile $\bar{\Omega}_m$ di $\mathcal{P}_m(t,x,y)$ si vuole definire la sua misura come:

$$\bar{M}(\bar{\Omega}_m) := \int_{\bar{\Omega}_m} \bar{M}_m(t,x,y;t_j,x_j)\, dt_1dt_2dt_j...dt_mdx_1dx_2dx_j...dx_m$$

Le funzioni $\bar{M}_m(t,x,y;t_j,x_j)$ ammissibili saranno dunque quelle che garantiscono la convergenza e la limitatezza di tale integrale per ogni insieme $\bar{\Omega}_m$.
In generale la misura di un sottoinsieme misurabile del tipo:

$$\bar{\Omega} = \{(t,x,y)\} \bigcup_{m=1,2,...\infty} \bar{\Omega}_m \subseteq \mathcal{P}(t,x,y)$$

si vuole definire come il valore assunto dalla serie:

$$\bar{M}(\bar{\Omega}) := M_0(t,x,y) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\bar{\Omega}_m} \bar{M}_m(t,x,y;t_j,x_j) dt_1dt_2dt_j...dt_mdx_1dx_2dx_j...dx_m$$

La convergenza (ma in generale non la limitatezza) di tale serie, per ogni insieme $\bar{\Omega}$, sarà l'ulteriore condizione da imporre per determinare le funzioni densità ammissibili.
Si osserva che anche se il dominio $\mathcal{P}(t,x,y)$ dipende dalle variabili (t,x,y), queste non prendono parte all'integrazione.

Si ricorda ora che l'isomorfismo λ, descritto nel Corollario 2.1.2, fra gli insiemi $CPC_m(t,x,y)$ e $\mathcal{P}_m(t,x,y)$ con $m \geq 1$:

$$CPC_m(t,x,y) \xrightarrow{\lambda} \mathcal{P}_m(t,x,y)$$
$$\omega(s) \longmapsto \lambda(\omega(s)) := (t_1, t_2, ...t_m; \omega^q(t_1), \omega^q(t_2), ...\omega^q(t_m))$$

è la mappa che associa ad ogni curva classica a tratti i suoi tempi e punti di discontinuità. Tale isomorfismo permette di indurre direttamente la struttura di spazio di probabilità vista per $\mathcal{P}(t,x,y)$ sull'insieme $CPC(t,x,y)$.
Si definisce quindi una σ-algebra $\mathcal{D}$ su $CPC_m(t,x,y)$ per mezzo dell'immagine, tramite $\lambda(\cdot)$, della σ-algebra dell'insieme $\mathcal{P}_m(t,x,y)$, che sarà dunque generata dagli insiemi del tipo:

$$\mathcal{D}[I_1, I_2, ...I_m; V_1, V_2, ...V_m] := \Big\{\omega(s) \in CPC(t,x,y)\,;\,(t_j; \omega^q(t_j)) \in (I_j; V_j)\Big\}$$

insieme delle curve $\omega(s)$ classiche a tratti che connettono i punti y e x nel tempo t e dove i tempi ed i punti di discontinuità $(t_j, \omega^q(t_j))$ con $j = 1, ...m$ appartenengono agli aperti $(I_j; V_j) \subset [0,t] \times \mathbb{R}^n$.
L'insieme $CPC_0(t,x,y) := \{\omega_0(s)\}$, nelle ipotesi della Proposizione 2.1.1, è l'insieme definito dall'unica curva classica, senza punti di discontinuità nella derivata, che connette i punti y e x nel tempo t, tale insieme possiede dunque la σ-algebra generata dal suo unico elemento e dall'insieme vuoto.
Sempre grazie all'isomorfismo esistente fra i due spazi, si definisce ora sull'insieme $CPC(t,x,y)$ una classe di misure σ-finite e complesse $M(d\omega)$ direttamente mediante la classe di misure $\bar{M}$ definite precedentemente su $\mathcal{P}(t,x,y)$.
Dato dunque un sottoinsieme misurabile Ω di $CPC(t,x,y)$, che si scrive in generale come:

$$\Omega = CPC_0(t,x,y) \bigcup_{m=1,2,...\infty} \Omega_m$$

dove $\Omega_m \subseteq CPC_m(t,x,y)$ sono sottoinsiemi misurabili relativi ad m punti di discontinuità delle curve, la misura dell'insieme Ω si definisce come:

$$M(\Omega) = \int_{\Omega \subseteq CPC(t,x,y)} M(d\omega) := \bar{M}(\lambda(\Omega)) =$$

$$= M_0(t,x,y) + \sum_{m=1}^{m=\infty} \int_{\lambda(\Omega_m) \subseteq \mathcal{P}_m(t,x,y)} \bar{M}_m(t,x,y;t_j,x_j)dt_1dt_2...dt_mdx_1dx_2...dx_m$$

La funzione $M_0(t,x,y) \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2n};\mathbb{C})$ definisce direttamente una misura sull'insieme puntuale $CPC_0(t,x,y)$ mentre la collezione di funzioni densità ammissibili $\bar{M}_m(t,x,y;t_j,x_j) \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{P}_m(t,x,y);\mathbb{C})$ permette di

costruire le misure sui sottoinsiemi Ω_m di $CPC_m(t,x,y)$.
Valutando la misura di tutto l'insieme $CPC(t,x,y)$, si ottiene:

$$M(t,x,y) = \int_{CPC(t,x,y)} M(d\omega) :=$$

$$= M_0(t,x,y) + \sum_{m=1}^{m=\infty} \int_{\mathcal{P}_m(t,x,y)} \bar{M}_m(t,x,y;t_j,x_j) dt_1 dt_2 dt_j ... dt_m dx_1 dx_2 dx_j ... dx_m$$

Dato che (t,x,y) non prendono parte all'integrazione, il risultato dell'integrale si configura come una funzione:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{M} \mathbb{C}$$

$$(t,x,y) \longmapsto M(t,x,y)$$

In conseguenza del fatto che le funzioni M_0 e $\bar{M}_m$ possiedono una dipendenza C^2 dalle variabili (t,x,y) si deduce che la funzione $M(t,x,y) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$.
La definizione precedentemente data di una misura $M(d\omega)$ su $CPC(t,x,y)$ si applica anche per una misura $M(d\alpha)$ su $CPL(t,x,y)$, in virtù dell'isomorfismo $CPL(t,x,y) \simeq \mathcal{P}(t,x,y)$ osservato anche per tale insieme.
Infatti la mappa λ risulta ben definita anche per $CPL(t,x,y)$:

$$CPL(t,x,y) \xrightarrow{\lambda} \mathcal{P}(t,x,y)$$

$$\alpha(s) \longmapsto \lambda(\alpha(s)) := (t_1, t_2, ... t_m; \alpha(t_1), \alpha(t_2), ... \alpha(t_m))$$

e stabilisce naturalmente un isomorfismo.
Fissato dunque un funzionale $\bar{M}$ su $\mathcal{P}(t,x,y)$, definito dalla collezione di funzioni M_0 e $\bar{M}_m$ precedentemente considerate, si definisce una misura $M(d\alpha)$ su $CPL(t,x,y)$:

$$\int_{\Lambda \subseteq CPL(t,x,y)} M(d\alpha) :=$$

$$= M_0(t,x,y) + \sum_{m=1}^{m=\infty} \int_{\lambda(\Lambda_m) \subseteq \mathcal{P}_m(t,x,y)} \bar{M}_m(t,x,y;t_j,x_j) dt_1 dt_2 ... dt_m dx_1 dx_2 ... dx_m$$

Osservazione
La misura $M(d\alpha)$ su $CPL(t,x,y)$ risulta dunque equivalente alla misura $M(d\omega)$ su $CPC(t,x,y)$, in quanto generata dal medesimo funzionale misurabile $\bar{M}$ definito su $\mathcal{P}(t,x,y)$.

2.2 Path Integral su CPC

Sia $\bar{g}$ una funzione misurabile su $\mathcal{P}(t,x,y)$:

$$\mathcal{P}(t,x,y) \xrightarrow{\bar{g}} \mathbb{C}$$

$$(t_j, x_j)_{j\in N} \longmapsto \bar{g}(t,x,y;t_j,x_j)$$

dove (t,x,y) appaiono come parametri, e la dipendenza di $\bar{g}$ da tali parametri si richiederà essere di tipo C^2.
Tale funzione viene dunque definita dalla collezione di funzioni:

$$\mathcal{P}_m(t,x,y) \xrightarrow{\bar{g}_m} \mathbb{C}$$

$$(t_j, x_j)_{j=1,2,...m} \longmapsto \bar{g}_m(t,x,y;t_j,x_j)$$

dove $m = 1, 2, ...\infty$ e dalla funzione $g_0 \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2n}; \mathbb{C})$:

$$\mathcal{P}_0(t,x,y) \xrightarrow{g_0} \mathbb{C}$$

$$(t,x,y) \longmapsto g_0(t,x,y)$$

L'isomorfismo λ, descritto nel Corollario 2.1.2, fra gli insiemi $CPC_m(t,x,y)$ e $\mathcal{P}_m(t,x,y)$:

$$CPC_m(t,x,y) \xrightarrow{\lambda} \mathcal{P}_m(t,x,y)$$

$$\omega(s) \longmapsto \lambda(\omega(s)) := (t_1, t_2, ...t_m; \omega(t_1), \omega(t_2), ...\omega(t_m))$$

permette di definire di conseguenza funzioni misurabili $g_m := \bar{g}_m \circ \lambda$ su $CPC_m(t,x,y)$ con $m \geq 1$:

$$CPC_m(t,x,y) \xrightarrow{\lambda} \mathcal{P}_m(t,x,y) \xrightarrow{\bar{g}} \mathbb{C}$$

$$\omega(s) \longmapsto g_m(\omega(s)) := \bar{g}_m(\lambda(\omega(s)))$$

Mentre la funzione $g_0(t,x,y)$ definisce direttamente una funzione misurabile sull'insieme $CPC_0(t,x,y)$.
La collezione di funzioni $\{g_m(\cdot)\}_{m\in\mathbb{N}}$ così costruite definisce dunque una funzione misurabile $g(\omega)$ sull'intero spazio di curve $CPC(t,x,y)$:

$$CPC(t,x,y) \xrightarrow{g} \mathbb{C}$$

$$\omega(s) \longmapsto g(\omega(s))$$

Fissata ora una misura $M(d\omega)$, nella classe generale delle misure σ-finite definite nel paragrafo precedente, fissata una funzione misurabile $g(\omega)$, si costruisce il path integral sull'insieme $CPC(t,x,y)$:

$$\Phi(t,x,y)=\int_{CPC(t,x,y)} g(\omega)M(d\omega):=$$
$$=g_0(t,x,y)M_0(t,x,y)+$$
$$+\sum_{m=1}^{m=\infty}\int_{\mathcal{P}_m(t,x,y)} \bar{g}_m(t,x,y;t_j,x_j)\bar{M}_m(t,x,y;t_j,x_j)dt_1dt_2...dt_mdx_1dx_2...dx_m$$

Analogamente a quanto richiesto per le funzioni $\bar{M}_m(t,x,y;t_j,x_j)$ si imporrà ora che le funzioni integrande $\bar{g}_m(t,x,y;t_j,x_j)$ ammissibili siano quelle che garantiscono la convergenza e la limitatezza di ogni singolo integrale e la convergenza della serie; richiedendo per esempio che il modulo $|\bar{g}_m|$ sia una funzione limitata su tutto $\mathcal{P}_m(t,x,y)$ si garantisce che il path integral sia ben definito.
Dato che (t,x,y) non prendono parte all'integrazione, si osserva il risultato del path integral si configura come una funzione:

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \xrightarrow{\ \Phi\ } \mathbb{C}$$
$$(t,x,y)\longmapsto \Phi(t,x,y)$$

In conseguenza del fatto che le funzioni $\bar{g}$, $\bar{M}$, g_0 e M_0 possiedono una dipendenza C^2 dai parametri (t,x,y) si ha che il risultato del path integral è una funzione $\Phi(t,x,y)\in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.
Così come è stato osservato nel paragrafo precedente, che ad ogni misura $M(d\omega)$ su $CPC(t,x,y)$ corrisponde una misura equivalente $M(d\alpha)$ sull'insieme $CPL(t,x,y)$ in virtù dell'isomorfismo dei due spazi, anche per il path integral $\Phi(t,x,y)$ si osserva tale corrispondenza.
Infatti si definisce il path integral su $CPL(t,x,y)$ in modo equivalente:

$$\Phi(t,x,y)=\int_{CPL(t,x,y)} G(\alpha)M(d\alpha):=$$
$$=g_0(t,x,y)M_0(t,x,y)+$$
$$+\sum_{m=1}^{m=\infty}\int_{\mathcal{P}(t,x,y)} \bar{g}_m(t,x,y;t_j,x_j)\bar{M}_m(t,x,y;t_j,x_j)dt_1dt_2dt_j...dt_mdx_1dx_2dx_j...dx_m$$

il risultato dell'integrazione risulta il medesimo di quello relativo a $CPC(t,x,y)$ in quanto emerge dall'utilizzo dalle medesime funzioni $\bar{g}_m(t,x,y;t_j,x_j)$ e dalle medesime misure $\bar{M}_m(t,x,y;t_j,x_j)dt_1dt_2...dt_mdx_1dx_2...dx_m$ definite su $\mathcal{P}_m(t,x,y)$.

Si deve però osservare che la funzione integranda definita su $CPL(t,x,y)$ come $G(\alpha) := \bar{g} \circ \lambda(\alpha)$ risulta diversa da quella precedentemente definita su $CPC(t,x,y)$ come $g(\omega) := \bar{g} \circ \lambda(\omega)$, pur essendo generate dalle medesime funzioni densità $\bar{g}$; questo avviene in quanto la mappa λ agisce in modo diverso sui due spazi di curve.
Questa osservazione risulterà evidente nel prossimo paragrafo dove si effettuerà la trasformazione di un path integral definito su $CPL(t,x,y)$ in uno su $CPC(t,x,y)$, con il conseguente cambiamento delle funzioni integrande.

Rappresentazione esplicita del funzionale $A[\cdot]$
La particolare natura dell'insieme $CPC(t,x,y)$ permette una rappresentazione esplicita dell'immagine del funzionale $A[\cdot]$ definito su tale dominio:

$$CPC \xrightarrow{A} \mathbb{R}$$

$$\omega(s) \longmapsto A[\omega(s)] := \int_0^t \Big[\omega^p(s)\dot{\omega}^q(s) - H(\omega(s))\Big]\, ds$$

dove si considera $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$.
Il calcolo del funzionale d'azione, valutato su una curva $\omega(s)$ con m punti di discontinuità nella derivata, può essere decomposto nella somma di m termini:

$$A[\omega(s)] = \sum_{j=0}^{j=m} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Big[\omega^p(s)\dot{\omega}^q(s) - H(\omega(s))\Big]\, ds$$

Ma $\omega(s)$ ristretta sul singolo intervallo $[t_j, t_{j+1}]$ corrisponde alla curva classica senza punti di dicontinuità che connette i punti x_j e x_{j+1} nel tempo $t_{j+1} - t_j$, e grazie alla procedura di riduzione di Amann-Conley-Zehnder (vedi paragrafo 1.2) si può rappresentare come:

$$\omega(s)|_{(t_j,t_{j+1})} = \gamma(t_{j+1} - t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(s - t_j)$$

dove le componenti q corrispondono a:

$$\omega^q(s)|_{[t_j,t_{j+1}]} = \gamma^q(t_{j+1} - t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(s - t_j) =$$

$$= x_j + \frac{x_{j+1} - x_j}{t_{j+1} - t_j}(s - t_j) + \int_0^{s-t_j} \frac{\bar{u}_j^q(\tau) + f^q(t_{j+1} - t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(\tau)}{N} d\tau$$

mentre le componenti p corrispondono a:

$$\omega^p(s)|_{(t_j,t_{j+1})} = \gamma^p(t_{j+1} - t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(s - t_j) =$$

$$= m(\frac{x_{j+1} - x_j}{t_{j+1} - t_j} + \bar{u}_j^q(0)) + \int_0^{s-t_j} \frac{\bar{u}_j^p(\tau) + f^p(t_{j+1} - t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(\tau)}{N} d\tau$$

dove per costruzione:

$$\bar{u}(s) := \sum_{|\alpha|\leq N} \bar{u}_\alpha e^{\frac{2\pi}{t_{j+1}-t_j} i\alpha s} \in \mathbb{P}_N L^2([0, t_{j+1}-t_j]; \mathbb{R}^{2n})$$

e le curve (vedi paragrafo 1.2) verificano:

$$f(t_{j+1}-t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(s) \in \mathbb{Q}_N L^2([0, t_{j+1}-t_j]; \mathbb{R}^{2n})$$

Il parametro $\bar{u}_j$ associato alla curva $\bar{u}_j(s)$ si determina, una volta fissati $(t_j, t_{j+1}, x_j, x_{j+1})$, come il punto critico della funzione:

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{S_j} \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto S(t_{j+1}-t_j, x_j, x_{j+1}, u)$$

ovvero verifica:

$$\nabla_u S(t_{j+1}-t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j) = 0$$

Ma come osservato in precedenza, sotto le ipotesi della Proposizione 2.1.1, il parametro $\bar{u}_j$ risulta unico e dunque si può rappresentare come $\bar{u}_j = \bar{u}(x_j, x_{j+1}, t_{j+1}-t_j)$ una funzione di x_j, x_{j+1} e $t_{j+1}-t_j$ con dipendenza almeno continua da tali variabili.
Dalla costruzione della Funzione Generatrice (vedi paragrafo 1.3) si ha che:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega^p(s)\dot{\omega}^q(s) - H(\omega(s))\, ds = S(t_{j+1}-t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}(x_j, x_{j+1}, t_{j+1}-t_j))$$

Ne consegue che il funzionale d'azione $A[\cdot]$ valutato su una curva classica a tratti $\omega(s)$ con m punti di discontinuità nella derivata, relativamente ai tempi t_j e ai punti $x_j = \omega(t_j)$, si calcola come:

$$A[\omega(s)] = \sum_{j=0}^{j=m} S(t_{j+1}-t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}(x_j, x_{j+1}, t_{j+1}-t_j))$$

Si conclude dunque che la procedura di riduzione di Amann-Conley-Zehnder permette di scrivere $A[\omega(s)]$ come una funzione nota dei punti e dei tempi di discontinuità della derivata della curva.

Osservazione Importante

La rappresentazione esplicita del funzionale d'azione, precedentemente descritta grazie alla procedura di riduzione di Amann-Conley-Zehnder, permette la costruzione del path integral dove come funzione integranda si vuole utilizzare $\beta(A[\omega(s)])$ con $\beta(\cdot) \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
Infatti seguendo il criterio, esposto in questo paragrafo, della costruzione del path integral sul dominio $CPC(t,x,y)$, si fissa una mappa $\beta(\cdot) \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e si considera la funzione $\bar{g}$ su $\mathcal{P}(t,x,y)$ definita dalla collezione di mappe:

$$\mathcal{P}_m(t,x,y) \xrightarrow{\bar{g}_m} \mathbb{C}$$

$$(t_j,x_j) \longmapsto \bar{g}_m(t,x,y;t_j,x_j) = \beta\Big(\sum_{r=0}^{r=m} S(t_{r+1}-t_r;x_r;x_{r+1};\bar{u}(x_r,x_{r+1},t_{r+1}-t_r))\Big)$$

e dalla mappa:

$$\mathcal{P}_0(t,x,y) \xrightarrow{g_0} \mathbb{C}$$

$$(t,x,y) \longmapsto g_0(t,x,y) = \beta\Big(S(t;x;y;\bar{u}(t,x,y))\Big)$$

Ma, proprio per via della rappresentazione vista per il funzionale $A[\cdot]$, tale funzione $\bar{g}$ rappresenta in modo univoco la mappa:

$$CPC(t,x,y) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega(s) \longmapsto g(\omega) = \beta(A[\omega])$$

Cosiderata una generica misura $M(d\omega)$, è dunque possibile costruire il path integral:

$$\Phi(t,x,y) = \int_{CPC(t,x,y)} \beta(A[\omega(s)])\, M(d\omega) =$$

$$= \beta\Big(S(t;x;y;\bar{u}(t,x,y))\Big) M_0(t,x,y) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{m=\infty} \int_{\mathcal{P}_m(t,x,y)} \beta\Big(\sum_{r=0}^{r=m} S(t_{r+1}-t_r, x_r, x_{r+1}, \bar{u}(x_r, x_{r+1}, t_{j+1}-t_j))\Big) \cdot$$

$$\cdot \bar{M}_m(t,x,y;t_j,x_j)\, dt_1 dt_2 ... dt_m dx_1 dx_2 ... dx_m$$

2.3 Path Integral per l'equazione di Schrödinger

Teorema 2.3.1
Dato il potenziale $V(x) \in L^2 \cap C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *tale che :*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |V(x)| = V_0 < +\infty$$

il problema di Cauchy per l'equazione:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi_S^\epsilon(t,x) + V(x)\psi_S^\epsilon(t,x) = -\frac{1}{(i+\epsilon)}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_S^\epsilon(t,x)$$

$$\psi_S^\epsilon(0,x) = \phi(x)$$

con il parametro $\epsilon > 0$ *e con il tempo* $t \in [0,+\infty)$ *è risolto da:*

$$\psi_S^\epsilon(t,x) = e^{-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}tH}\phi = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_S^\epsilon(t,x,y)\phi(y)dy$$

dove il nucleo del propagatore ammette la rappresentazione integrale:

$$\Phi_S^\epsilon(t,x,y) = \int_{CPL(t,x,y)} \exp\Big\{ -\frac{m}{2(i+\epsilon)\hbar}\int_0^t \dot\alpha^2(s)ds\Big\}\ M^\epsilon(d\alpha)$$

Tale path integral si calcola mediante la serie:

$$\Phi_S^\epsilon(t,x,y) = \Big(\frac{m}{2\pi\hbar t(i+\epsilon)}\Big)^{\frac{n}{2}} \exp\Big\{ -\frac{m|y-x|^2}{2(i+\epsilon)\hbar t}\Big\} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int\prod_{j=1}^{k+1}\Big(\frac{2\pi\hbar(t_j-t_{j-1})(i+\epsilon)}{m}\Big)^{-\frac{n}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{k}\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}V(x_j)\Big)\cdot$$

$$\cdot \exp\Big\{ -\frac{m}{2(i+\epsilon)\hbar}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{|x_j-x_{j-1}|^2}{t_j-t_{j-1}}\Big\} dt_1dt_2...dt_kdx_1dx_2...dx_k$$

Dimostrazione

Il problema di Cauchy per l'equazione:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi^\epsilon(t,x) = -\frac{1}{(i+\epsilon)}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^\epsilon(t,x)$$

$$\psi^\epsilon(0,x) = \phi(x)$$

si risolve per mezzo del propagatore:

$$\psi^\epsilon(t,x) = U_t^\epsilon(\phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} U^\epsilon(t,x,y)\phi(y)dy$$

dove il nucleo del propagatore è dato dalla nota formula:

$$U^\epsilon(t,x,y) = \left(\frac{m}{2\pi t(i+\epsilon)\hbar}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\Big\{-\frac{m|x-y|^2}{2\hbar(i+\epsilon)t}\Big\}$$

Consideriamo ora il problema di Cauchy contenente il termine di disomogeneità $g(t,x)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi^\epsilon(t,x) + g(t,x) = -\frac{1}{(i+\epsilon)}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^\epsilon(t,x)$$

$$\psi(0,x) = \phi(x)$$

che si risolve per mezzo del metodo della variazione delle costanti:

$$\psi^\epsilon(t,x) = U_t^\epsilon(\phi)(x) - \frac{(i+\epsilon)}{\hbar}\int_0^t U_{t-s}^\epsilon(g)(s,x)\,ds$$

$$\psi^\epsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} U^\epsilon(t,x,y)\phi(y)\,dy - \frac{(i+\epsilon)}{\hbar}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} U^\epsilon(t-s,x,y)g(s,y)\,dyds$$

Utilizzando la forma del nucleo $U^\epsilon(t,x,y)$ si ottiene la rappresentazione esplicita della soluzione:

$$\psi^\epsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{m}{2\pi t(i+\epsilon)\hbar}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\Big\{-\frac{m|x-y|^2}{2\hbar(i+\epsilon)t}\Big\}\phi(y)dy +$$

$$-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{m}{2\pi(t-s)(i+\epsilon)\hbar}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\Big\{-\frac{m|x-y|^2}{2\hbar(i+\epsilon)(t-s)}\Big\}g(s,y)dyds$$

Consideriamo infine il problema di Cauchy per l'equazione:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi_S^\epsilon(t,x)+V(x)\psi_S^\epsilon(t,x)=-\frac{1}{(i+\epsilon)}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_S^\epsilon(t,x)$$

$$\psi_S^\epsilon(0,x)=\phi(x)$$

con il parametro $\epsilon>0$ fissato.
La formula della variazione delle costanti precedentemente descritta si può utilizzare anche per tale equazione in quanto la soluzione $\psi_S^\epsilon(t,x)$ soddisfa automaticamente l'equazione integrale:

$$\psi_S^\epsilon(t,x)=U_t^\epsilon(\phi)(x)-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}\int_0^t U_{t-t_1}^\epsilon(V(x_1)\psi_S(t_1,x_1))dt_1$$

$$\psi_S^\epsilon(t,x)=\int_{\mathbb{R}^n}U^\epsilon(t,x,y)\phi(y)\,dy+$$

$$-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}U^\epsilon(t-t_1,x,x_1)V(x_1)\psi_S(t_1,x_1)dx_1dt_1$$

L'obiettivo è quello di dare una rappresentazione esatta della soluzione $\psi_S(t,x)$ in termini di un path integral definito sul dominio di curve $CPL(t,x,y)$ delle spezzate che connettono i punti y e x nel tempo t, che vengono identificate dai loro punti e tempi di discontinuità x_j,t_j.
A tale scopo, partendo dalla relazione integrale sopra descritta, si procede sostituendo ripetutamente nel secondo membro la forma integrale di $\psi_S^\epsilon(t,x)$.
Utilizzando dunque nuovamente la relazione:

$$\psi_S^\epsilon(t_1,x_1)=U_{t_1}^\epsilon(\phi)(x_1)-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}\int_0^{t_1}U_{t1-t_2}^\epsilon(V(x_2)\psi_S^\epsilon(t_2,x_2))dt_2$$

$$\psi_S^\epsilon(t_1,x_1)=\int_{\mathbb{R}^n}U^\epsilon(t_1,x_1,y)\phi(y)dy+$$

$$-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n}U^\epsilon(t_1-t_2,x_1,x_2)V(x_2)\psi_S^\epsilon(t_2,x_2)dx_2dt_2$$

si sostituisce la forma di $\psi_S^\epsilon(t_1,x_1)$ nell'espressione di $\psi_S^\epsilon(t,x)$, e si ottiene:

$$\psi_S^\epsilon(t,x)=\int_{\mathbb{R}^n}U^\epsilon(t,x,y)\phi(y)dy+$$

$$-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}U^\epsilon(t-t_1,x,x_1)V(x_1)\cdot\Big\{\int_{\mathbb{R}^n}U^\epsilon(t_1,x_1,y)\phi(y)\,dy+$$

$$-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n} U^\epsilon(t_1-t_2,x_1,x_2)V(x_2)\psi_S(t_2,x_2)dx_2dt_2 \Big\} dx_1dt_1$$

Riordinando i termini, si ottengono tre integrali:

$$\psi_S^\epsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} U^\epsilon(t,x,y)\phi(y)dy+$$

$$-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} U^\epsilon(t-t_1,x,x_1)V(x_1)U^\epsilon(t_1,x_1,y)\phi(y)dt_1dx_1dy+$$

$$+\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}\Big)^2\int_0^t\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} U^\epsilon(t-t_1,x,x_1)V(x_1)U^\epsilon(t_1-t_2,x_1,x_2)V(x_2)\cdot$$

$$\cdot\psi_S^\epsilon(t_2,x_2)dt_1dt_2dx_1dx_2$$

i primi due integrali non dipendono da ψ_S^ϵ e possono essere effettivamente calcolati; il terzo integrale contiene ancora ψ_S^ϵ e va dunque sviluppato ulteriormente.

Sostituendo $\psi_S^\epsilon(t_2,x_2)$ con l'espressione contenente $\psi_S^\epsilon(t_3,x_3)$ si ha che:

$$\psi_S^\epsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} U^\epsilon(t,x,y)\phi(y)dy+$$

$$-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(U^\epsilon(t-t_1,x,x_1)V(x_1)U^\epsilon(t_1,x_1,y)\phi(y)\Big)dt_1dx_1dy+$$

$$+\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}\Big)^2\int_0^t\int_0^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(U^\epsilon(t-t_1,x,x_1)V(x_1)U^\epsilon(t_1-t_2,x_1,x_2)V(x_2)\cdot$$

$$\cdot U^\epsilon(t_2,x_2,y)\phi(y)\Big)dt_1dt_2dx_1dx_2dy+$$

$$+\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}\Big)^3\int_0^t\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(U^\epsilon(t-t_1,x,x_1)V(x_1)U^\epsilon(t_1-t_2,x_1,x_2)V(x_2)\cdot$$

$$\cdot U^\epsilon(t_2-t_3,x_2,x_3)V(x_3)\psi_S(t_3,x_3)\Big)dt_1dt_2dt_3dx_1dx_2dx_3.$$

Si osserva che in tale formula l'ordine dei tempi è $0\le t_3\le t_2\le t_1\le t$.

Utilizzando per r-volte tale procedura si ottiene così la relazione integrale generale per $\psi_S^\epsilon(t,x)$:

$$\psi_S^\epsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} U^\epsilon(t,x,y)\phi(y)dy +$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\Big[\int_0^t\int_0^{t_k}\int_0^{t_{k-1}}...\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n}...\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^{k}\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}V(x_j)\Big)\cdot$$

$$\prod_{j=1}^{k+1}\Big(U^\epsilon(t_j-t_{j-1},x_j,x_{j-1})\Big)\cdot\phi(y)dt_1dt_2...dt_kdx_1dx_2...dx_kdy\Big]+$$

$$+\int_0^t\int_0^{t_r}\int_0^{t_{r-1}}...\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n}...\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^{r}\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}U^\epsilon(t_j-t_{j-1},x_j,x_{j-1})V(x_j)\Big)\cdot$$

$$\cdot\psi_S^\epsilon(t_r,x_r)dt_1dt_2...dt_rdx_1dx_2...dx_r$$

dove per chiarezza espositiva si è invertito, rispetto alla formula precedente, l'ordine dei tempi in modo che relativamente al k-esimo integrale sia $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_{k+1} = t$ e per i punti si è posto $x_0 := y$, $x_{k+1} := x$.
Tale relazione integrale sussiste $\forall r > 0$ e dunque risulta possibile considerare il limite:

$$\psi_S^\epsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} U^\epsilon(t,x,y)\phi(y)dy +$$

$$+\lim_{r\mapsto\infty}\sum_{k=1}^{r}\Big[\int_0^t\int_0^{t_k}\int_0^{t_{k-1}}...\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n}...\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^{k}\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}V(x_j)\Big)\cdot$$

$$\prod_{j=1}^{k+1}\Big(U^\epsilon(t_j-t_{j-1},x_j,x_{j-1})\Big)\cdot\phi(y)dt_1dt_2...dt_kdx_1dx_2...dx_kdy\Big]+$$

$$+\lim_{r\mapsto\infty}\int_0^t\int_0^{t_r}\int_0^{t_{r-1}}...\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n}...\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^{r}\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}U^\epsilon(t_j-t_{j-1},x_j,x_{j-1})V(x_j)\Big)\cdot$$

$$\cdot\psi_S^\epsilon(t_r,x_r)dt_1dt_2...dt_rdx_1dx_2...dx_r$$

Ma si dimostra che, a seguito dell'operazione di limite, la serie degli integrali che non dipendono da $\psi_S^\epsilon(t,x)$ resta convergente mentre l'ultimo integrale converge a zero, eliminando così nella relazione integrale la dipendenza dal termine $\psi_S^\epsilon(t_r,x_r)$.

A tale scopo è sufficente valutare il modulo del k-esimo integrale:

$$\Big|\int_0^t\int_0^{t_k}\int_0^{t_{k-1}}...\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n}...\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^{k}\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}U^\epsilon(t_j-t_{j-1},x_j,x_{j-1})V(x_j)\Big)\cdot$$

$$\cdot\alpha(y)dt_1dt_2...dt_kdx_1dx_2...dx_kdy\Big|\leq$$

$$\leq\int_0^t\int_0^{t_k}\int_0^{t_{k-1}}...\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n}...\int_{\mathbb{R}^n}\Big|\prod_{j=1}^{k}\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}U^\epsilon(t_j-t_{j-1},x_j,x_{j-1})V(x_j)\Big)\cdot$$

$$\cdot\alpha(y)\Big|dt_1dt_2...dt_kdx_1dx_2...dx_kdy$$

ma con una funzione d'onda $\alpha(y)$ tale che $|\alpha(y)|\leq B<+\infty$, si deduce la maggiorazione:

$$\leq B\int_0^t...\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n}...\int_{\mathbb{R}^n}\Big|\prod_{j=1}^{k}\Big(\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}V(x_j)U^\epsilon(t_j-t_{j-1},x_j,x_{j-1})\Big)\Big|dt_1...dt_kdx_1...dx_k$$

Sostituendo la forma esplicita di $U^\epsilon(t_j-t_{j-1},x_{j-1},x_j)$ si ottiene:

$$\leq B\int_0^t...\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n}...\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^{k}\Big|\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}V(x_j)\Big(\frac{m}{2\pi(i+\epsilon)(t_j-t_{j-1})}\Big)^{\frac{n}{2}}\cdot$$

$$\cdot\exp\Big\{-\frac{|x_j-x_{j-1}|^2}{2\hbar(i+\epsilon)(t_j-t_{j-1})}\Big\}\Big|dt_1dt_2...dt_kdx_1dx_2...dx_k\leq$$

Supponendo il potenziale $V(x)\in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ e limitato, si ha che effettuando le integrazioni si ottiene la maggiorazione (vedi [8]):

$$\leq C(2\pi t)^{-n/2}\Big(\frac{1}{\hbar}\Big)^k\frac{(t\epsilon^{-n/2})^k}{k!}$$

e questo dimostra che il k-esimo integrale, con il parametro $\epsilon>0$ fissato, è convergente. Inoltre si osserva, sempre considerando $\epsilon>0$ fissato, la convergenza del seguente limite e della serie:

$$\lim_{k\to\infty}C(2\pi t)^{-n/2}\Big(\frac{1}{\hbar}\Big)^k\frac{(t\epsilon^{-n/2})^k}{k!}=0$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}C(2\pi t)^{-n/2}\Big(\frac{1}{\hbar}\Big)^k\frac{(t\epsilon^{-n/2})^k}{k!}=D<+\infty$$

Questo dimostra che la rappresentazione integrale di $\psi_S^\epsilon(t,x)$ dopo l'operazione di limite risulta valida, e che l'ultimo integrale risulta nullo:

$$\lim_{r\mapsto\infty}\int_0^t\int_0^{t_r}\int_0^{t_{r-1}}...\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n}...\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^{r}\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}U^\epsilon(t_j-t_{j-1},x_j,x_{j-1})V(x_j)\Big)\cdot$$

$$\cdot\psi_S^\epsilon(t_r,x_r)dt_1dt_2...dt_rdx_1dx_2...dx_r=0$$

Si deduce dunque che la soluzione $\psi_S^\epsilon(t,x)$ dell'equazione considerata con il parametro $\epsilon>0$ fissato, con la condizione iniziale $\phi(x)$, si può rappresentare per mezzo della seguente serie di integrali:

$$\psi_S^\epsilon(t,x)=\int_{\mathbb{R}^n}U^\epsilon(t,x,y)\phi(y)dy+$$

$$+\lim_{r\mapsto\infty}\sum_{k=1}^{r}\Big[\int_0^t\int_0^{t_k}\int_0^{t_{k-1}}...\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n}...\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^{k}\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}V(x_j)\Big)\cdot$$

$$\prod_{j=1}^{k+1}\Big(U^\epsilon(t_j-t_{j-1},x_j,x_{j-1})\Big)\cdot\phi(y)dt_1dt_2...dt_kdx_1dx_2...dx_kdy\Big]$$

Considerando ora il nucleo $\Phi_S^\epsilon(t,x,y)$ associato al propagatore nella sua rappresentazione integrale:

$$\psi_S^\epsilon(t,x)=\Phi_S^\epsilon(\phi(y))=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_S^\epsilon(t,x,y)\phi(y)dy$$

Si deduce la rappresentazione:

$$\Phi_S^\epsilon(t,x,y)=U^\epsilon(t,x,y)+$$

$$+\lim_{r\mapsto\infty}\sum_{k=1}^{r}\Big[\int_0^t\int_0^{t_k}\int_0^{t_{k-1}}...\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n}...\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^{k}\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}V(x_j)\Big)\cdot$$

$$\prod_{j=1}^{k+1}\Big(U^\epsilon(t_j-t_{j-1},x_j,x_{j-1})\Big)dt_1dt_2...dt_kdx_1dx_2...dx_k\Big]$$

Utilizzando la forma esplicita di $U^\epsilon(t,x,y)$ si ottiene:

$$\Phi^\epsilon_S(t,x,y) = \Big(\frac{m}{2\pi t(i+\epsilon)\hbar}\Big)^{\frac{n}{2}} \exp\Big\{-\frac{m|x-y|^2}{2\hbar(i+\epsilon)t}\Big\} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\int_0^t\int_0^{t_k}\int_0^{t_{k-1}}\cdots\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^{k}\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}V(x_j)\Big)\cdot$$

$$\prod_{j=1}^{k+1}\Big(\frac{m}{2\pi(t_j-t_{j-1})(i+\epsilon)\hbar}\Big)^{\frac{n}{2}}\exp\Big\{-\frac{m|x_j-x_{j-1}|^2}{2\hbar(i+\epsilon)(t_j-t_{j-1})}\Big\}dt_1dt_2...dt_kdx_1dx_2...dx_k\Big]$$

Riordinando i termini si ottiene la rappresentazione finale:

$$\Phi^\epsilon_S(t,x,y) = \Big(\frac{m}{2\pi t(i+\epsilon)\hbar}\Big)^{\frac{n}{2}} \exp\Big\{-\frac{m|x-y|^2}{2\hbar(i+\epsilon)t}\Big\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int\prod_{j=1}^{k+1}\Big(2\pi\hbar(t_j-t_{j-1})(i+\epsilon)/m\Big)^{-\frac{n}{2}}\cdot\prod_{j=1}^{k}\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}V(x_j)\Big)\cdot$$

$$\cdot\exp\Big\{-\frac{m}{2(i+\epsilon)\hbar}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{|x_j-x_{j-1}|^2}{t_j-t_{j-1}}\Big\}\cdot dt_1dt_2...dt_kdx_1dx_2...dx_k$$

Ma si osserva ora che tale rappresentazione di $\Phi^\epsilon_S(t,x,y)$ per mezzo di una serie di integrali corrisponde, secondo il criterio descritto nel paragrafo 2.2, alla rappresentazione per mezzo di un path integral. Infatti i termini contenuti negli esponenziali corrispondono, a meno della medesima costante, al funzionale energia cinetica valutata sulle curve spezzate $\alpha(s)\in CPL(t,x,y)$, e si possono dunque riscrivere come:

$$\Big\{-\frac{m}{2(i+\epsilon)\hbar}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{|x_j-x_{j-1}|^2}{t_j-t_{j-1}}\Big\} = \Big\{-\frac{m}{2(i+\epsilon)\hbar}\int_0^t\dot\alpha_k^2(s)ds\Big\}$$

dove $\alpha_k(s)$ corrisponde appunto alla generica spezzata con k punti di discontinuità che connette i punti estremi y e x nel tempo t.
Tale osservazione risulta valida anche per la retta $\alpha_0(s)$, dato che il primo esponenziale corrisponde all'energia cinetica valutata su tale curva:

$$\exp\Big\{-\frac{m|x-y|^2}{2\hbar(i+\epsilon)t}\Big\} = \Big\{-\frac{m}{2(i+\epsilon)\hbar}\int_0^t\dot\alpha_0^2(s)ds\Big\}$$

Questa famiglia di funzioni si può quindi considerare come la funzione integranda data dall'esponenziale dell'energia cinetica definita sul dominio di curve $CPL(t,x,y)$.

A seguito si tali osservazioni, risulta naturale considerare il termine:

$$M_0(t,x,y) = \Big(\frac{m}{2\pi t(i+\epsilon)\hbar}\Big)^{\frac{n}{2}}$$

come una misura σ-finita e complessa definita sull'insieme $CPL_0(t,x,y) := \{\alpha_0(s)\}$ composto dalla sola retta che connette i punti y e x nel tempo t.
Inoltre, utilizzando il fatto che il potenziale è limitato e che appartiene ad L^2, si deduce che i termini definiti come:

$$\bar{M}_k^\epsilon(t,x,y;t_j,x_j) := \prod_{j=1}^{k+1}\Big(2\pi\hbar(t_j - t_{j-1})(i+\epsilon)/m\Big)^{-\frac{n}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{k}\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}V(x_j)\Big)$$

si configurano come delle densità da utilizzare per definire una misura σ-finita $M^\epsilon(d\alpha)$ su tutto lo spazio $CPL(t,x,y)$, secondo il criterio descritto nel paragrafo 2.1.
In base a queste considerazioni si conclude che la serie di integrali sopra descritta si può riguardare come un path integral con il dominio delle curve $CPL(t,x,y)$:

$$\Phi_S^\epsilon(t,x,y) = \int_{CPL(t,x,y)} \exp\Big\{-\frac{m}{2(i+\epsilon)\hbar}\int_0^t \dot{\alpha}^2(s)ds\Big\}\ M^\epsilon(d\alpha)$$

dove la funzione integranda è definita per mezzo dell'esponenziale dell'energia cinetica, e la misura $M^\epsilon(d\alpha)$ costruita per mezzo delle funzioni densità sopra considerate.
$\square$

Teorema 2.3.2
Dato il potenziale $V(x) \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) + L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, *allora l'operatore Hamiltoniano:*

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle + V(x)$$

è autoaggiunto sul dominio $D(\triangle) = \{\phi(x) \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) : \triangle\phi \in L^2\}$.

Dimostrazione
Vedi: M.Reed, B.Simon Functional Analysis vol.1,2; Academic Press, 1980.

Teorema 2.3.3
Dato $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle + V(x)$ *un'operatore Hamiltoniano autoaggiunto, sussiste il seguente limite di propagatori:*

$$\lim_{\epsilon \mapsto 0^+} \exp\{-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}tH\} = \exp\{-\frac{i}{\hbar}tH\}$$

nel senso forte della convergenza.

Dimostrazione
Vedi appendice C.

Teorema 2.3.4
Dato $V(x) \in L^2 \cap C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *tale che :*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |V(x)| = V_0 < +\infty$$

Il problema di Cauchy per l'equazione di Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi_S(t,x) + V(x)\psi_S(t,x) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_S(t,x)$$

$$\psi_S(0,x) = \phi(x)$$

è risolto per $t \in [0,+\infty)$ *dal propagatore:*

$$\psi_S(t,x) = e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\phi = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_S(t,x,y)\phi(y)dy$$

Dove il nucleo ammette la rappresentazione integrale:

$$\Phi_S(t,x,y) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{CPL(t,x,y)} \exp\Big\{-\frac{m}{2(i+\epsilon)\hbar}\int_0^t \dot\alpha^2(s)ds\Big\}\, M^\epsilon(d\alpha)$$

path integral descritto nel Teorema 2.3.1.

Dimostrazione
Nel Teorema 2.3.1 si è dimostrato che il propagatore $\exp\{-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}tH\}$ con il parametro $\epsilon > 0$ fissato ed il tempo $t \in [0,+\infty)$, assume la rappresentazione integrale:

$$\exp\Big\{-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}tH\Big\}\phi = \int_{\mathbb{R}^n}\Phi_S^\epsilon(t,x,y)\phi(y)dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{CPL(t,x,y)} \exp\Big\{-\frac{m}{2(i+\epsilon)\hbar}\int_0^t \dot\alpha^2(s)ds\Big\}\, M^\epsilon(d\alpha)\phi(y)dy$$

Inoltre nel Teorema 2.3.3 si è osservato come il limite di tale propagatore, nel senso forte della convergenza, corrisponda a:

$$\lim_{\epsilon\mapsto 0^+}\exp\Big\{-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}tH\Big\} = \exp\Big\{-\frac{i}{\hbar}tH\Big\}$$

ovvero

$$\lim_{\epsilon\mapsto 0^+}\exp\Big\{-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}tH\Big\}\phi = \exp\Big\{-\frac{i}{\hbar}tH\Big\}\phi \quad \forall\phi \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$$

Ne consegue che l'equazione di Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi_S(t,x) + V(x)\psi_S(t,x) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_S(t,x)$$

$$\psi_S^\epsilon(0,x)=\phi(x)$$

viene risolta come:

$$\psi_S(t,x)=e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\phi=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_S(t,x,y)\phi(y)dy$$

dove il nucleo si determina mediante il limite, nel senso debole della convergenza, del nucleo $\Phi_S^\epsilon(t,x,y)$:

$$\Phi_S(t,x,y)=\lim_{\epsilon\to 0^+}\Phi_S^\epsilon(t,x,y)$$

$$\Phi_S(t,x,y)=\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{CPL(t,x,y)}\exp\Big\{-\frac{m}{2(i+\epsilon)\hbar}\int_0^t\dot{\alpha}^2(s)ds\Big\}M^\epsilon(d\alpha)$$

Il calcolo di tale path integral, come visto nel Teorema 2.3.1, corrisponde a:

$$\Phi_S(t,x,y)=\Big(\frac{m}{2\pi ti\hbar}\Big)^{\frac{n}{2}}\exp\Big\{-\frac{m|x-y|^2}{2\hbar it}\Big\}+$$

$$+\lim_{\epsilon\to 0^+}\sum_{k=1}^{\infty}\int\exp\Big\{-\frac{m}{2(i+\epsilon)\hbar}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{|x_j-x_{j-1}|^2}{t_j-t_{j-1}}\Big\}\cdot$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{k+1}\Big(2\pi\hbar(t_j-t_{j-1})(i+\epsilon)/m\Big)^{-\frac{n}{2}}\cdot\prod_{j=1}^{k}\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}V(x_j)\Big)dt_1dt_2...dt_kdx_1dx_2...dx_k$$

$\square$

Teorema 2.3.5
Dato il potenziale $V(x) \in L^2 \cap C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$ *tale che:*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |V(x)| = V^0 < +\infty$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial V}{\partial x^i}(x)\right| = V_i' < +\infty \quad \forall i = 1, 2, ...n$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^i \partial x^j}\right| = V_{i,j}'' < +\infty \quad \forall i, j = 1, 2, ...n$$

Il problema di Cauchy per l'equazione di Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi_S(t,x) + V(x)\psi_S(t,x) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_S(t,x)$$

$$\psi_S(0,x) = \phi(x)$$

è risolto per $t \in [0,T]$ *dal propagatore:*

$$\psi_S(t,x) = e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\phi = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_S(t,x,y)\phi(y)dy$$

dove il nucleo assume la rappresentazione integrale:

$$\Phi_S(t,x,y) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{CPC(t,x,y)} \exp\Big\{-\frac{1}{(i+\epsilon)\hbar}A[\omega(s)]\Big\}M_S^\epsilon(d\omega)$$

Dimostrazione
Nel teorema 2.3.4 si è dimostrato che, con l'ipotesi di limitatezza del potenziale, il nucleo del propagatore assume, per il tempo $t \in [0; +\infty)$, la rappresentazione integrale:

$$\Phi_S(t,x,y) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{CPL(t,x,y)} \exp\Big\{-\frac{m}{2(i+\epsilon)\hbar}\int_0^t \dot\alpha^2(s)ds\Big\}\, M^\epsilon(d\alpha)$$

Ma come visto nella Corollario 2.1.2, a seguito delle ipotesi di limitatezza sulle derivate del potenziale e del tempo $t \in [0,T]$, esiste un naturale isomorfimo:

$$CPC(t,x,y) \simeq \mathcal{P}(t,x,y)$$

la cui esistenza permette di costruire l'ulteriore l'isomorfismo:

$$CPL(t,x,y) \xrightarrow{\tilde\lambda} CPC(t,x,y)$$

$$\alpha(s) \longmapsto \omega(s) = \widetilde{\lambda}(\alpha(s))$$

Tale mappa trasforma le spezzate $\alpha(s)$ del tipo:

$$\alpha(s) = \begin{cases} y + \frac{x_1-y}{t_1}s & s \in [0, t_1] \\ x_1 + \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}(s-t_1) & s \in [t_1, t_2] \\ x_r + \frac{x_{r+1}-x_r}{t_{r+1}-t_r}(s-t_r) & s \in [t_r, t_{r+1}] \\ \dots & \\ x_k + \frac{x-x_k}{t-t_k}(s-t_k) & s \in [t_k, t] \end{cases}$$

nelle curve classiche a tratti $\omega^q(s) = \widetilde{\lambda}(\alpha(s))$ corrispondenti:

$$\omega^q(s) = \begin{cases} \gamma^q(t_1-0, y, x_1, \bar{u}_1)(s) & s \in [0, t_1] \\ \gamma^q(t_2-t_1, x_1, x_2, \bar{u}_2)(s-t_1) & s \in [t_1, t_2] \\ \gamma^q(t_{r+1}-t_r, x_r, x_{r+1}, \bar{u}_r)(s-t_r) & s \in [t_r, t_{r+1}] \\ \dots & \\ \gamma^q(t-t_k, x_k, x, \bar{u}_k)(s-t_k) & s \in [t_k, t] \end{cases}$$

dove i paprametri $\bar{u}_r$ verificano la condizione $0 = \nabla_u S(t_{r+1}-t_r; x_r; x_{r+1}; \bar{u}_r)$ e sono univocamente definiti da $(t_{r+1}-t_r, x_r, x_{r+1})$.
Dove la forma delle curve γ^q, generate dalla procedura di riduzione di Amann-Conley-Zehnder, corrisponde a:

$$\gamma^q(t_{r+1}-t_r, x_r, x_{r+1}, \bar{u}_r)(s-t_r) = x_r + \frac{x_{r+1}-x_r}{t_{r+1}-t_r}(s-t_r) +$$

$$+ \int_0^{s-t_r} \frac{1}{N}\Big[u_r^q(\tau) + f_r^q(t_{r+1}-t_r, x_r, x_{r+1}, \bar{u}_r)(\tau)\Big] d\tau$$

Analoga rappresentazione sussiste per le componenti $\omega^p(s)$.
Questo isomorfismo fra i due spazi di curve, permette di effettuare la trasformazione dell'integrale definito sul dominio $CPL(t,x,y)$ nell'integrale definito su $CPC(t,x,y)$, con il conseguente cambiamento della funzione integranda e della misura, e quindi di ottenere subito la rappresentazione cercata.
Si osserva che la derivata di una spezzata $\alpha(s)$ corrisponde a:

$$\dot{\alpha}(s) = \begin{cases} \frac{x_1-y}{t_1} & s \in (0, t_1) \\ \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1} & s \in (t_1, t_2) \\ \frac{x_{r+1}-x_r}{t_{r+1}-t_r} & s \in (t_r, t_{r+1}) \\ \dots & \\ \frac{x-x_k}{t-t_k} & s \in (t_k, t) \end{cases}$$

mentre la derivata per le componenti q della curva classica a tratti corrispondente è:

$$\dot{\omega}^q(s) = \begin{cases} \dot{\gamma}^q(t_1 - 0, y, x_1, \bar{u}_1)(s) & s \in (0, t_1) \\ \dot{\gamma}^q(t_2 - t_1, x_1, x_2, \bar{u}_2)(s - t_1) & s \in (t_1, t_2) \\ \dot{\gamma}^q(t_{r+1} - t_r, x_r, x_{r+1}, \bar{u}_r)(s - t_r) & s \in (t_r, t_{r+1}) \\ \dots \\ \dot{\gamma}^q(t - t_k, x_k, x, \bar{u}_k)(s - t_k) & s \in (t_k, t) \end{cases}$$

Sostituendo dunque la forma esplicita di γ^q, si ottiene:

$$\dot{\omega}^q(s) = \begin{cases} \frac{x_1 - y}{t_1} + \frac{1}{N}[u_1^q(s) + f_1^q(t_1, y, x_1, \bar{u}_1)(s)] & s \in (0, t_1) \\ \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \frac{1}{N}[u_2^q(s) + f_2^q(t_2 - t_1, x_1, x_2, \bar{u}_2)(s)] & s \in (t_1, t_2) \\ \frac{x_{r+1} - x_r}{t_{r+1} - t_r} + \frac{1}{N}[u_r^q(s) + f_r^q(t_r - t_{r-1}, x_{r+1}, x_r, \bar{u}_r)(s)] & s \in (t_r, t_{r+1}) \\ \dots \\ \frac{x - x_k}{t - t_k} + \frac{1}{N}[u_{k+1}^q(s) + f_{k+1}^q(t - t_k, x, x_k, \bar{u}_{k+1})(s)] & s \in (t_k, t) \end{cases}$$

Sussiste perciò la seguente relazione fra le derivate della spezzata $\alpha(s)$ e della curva classica a tratti $\omega^q(s) = \widetilde{\lambda}(\alpha(s))$ corrispondente:

$$\dot{\omega}^q(s) = \dot{\alpha}(s) + \frac{1}{N} \begin{cases} u_1^q(s) + f_1^q(t_1, y, x_1, \bar{u}_1)(s) & s \in (0, t_1) \\ u_2^q(s) + f_2^q(t_2 - t_1, x_1, x_2, \bar{u}_2)(s) & s \in (t_1, t_2) \\ u_r^q(s) + f_r^q(t_r - t_{r-1}, x_{r+1}, x_r, \bar{u}_r)(s) & s \in (t_r, t_{r+1}) \\ \dots \\ u_{k+1}^q(s) + f_{k+1}^q(t - t_k, x, x_k, \bar{u}_{k+1})(s) & s \in (t_k, t) \end{cases}$$

In modo simbolico tale relazione si indicherà come:

$$\dot{\omega}^q(s) = \dot{\alpha}(s) + \delta(s)$$

dove la deviazione $\delta(s)$ delle derivate, ristretta all'intervallo (t_r, t_{r-1}) corrisponde a:

$$\delta(s)|_{(t_r, t_{r+1})} = \frac{1}{N}[u_r^q(s) + f_r^q(t_r - t_{r-1}, x_r, x_{r-1}, \bar{u}_r)(s)]$$

A seguito di tale relazione, resa possibile dalla prodedura di riduzione di Amann-Conley-Zehnder, risulta ora possibile stabilire un collegamento fra il termine dell'energia cinetica valutata sulla spezzata $\alpha(s)$, contenuto nel path integral definito sul dominio di curve $CPL(t, x, y)$:

$$\frac{1}{2}m \int_0^t \dot{\alpha}^2(s) ds$$

e il funzionale d'azione $A[\cdot]$ valutato sulla curva classica a tratti $\omega(s)$ corrispondente, e contenuto nel path integral definito su $CPC(t,x,y)$:

$$A[\omega] = \int_0^t \Big[\frac{1}{2}m\dot{\omega^q}^2(s) - V(\omega(s))\Big]\,ds$$

Sviluppando infatti il termine cinetico in $\alpha(s)$, si ha che:

$$\frac{1}{2}m\int_0^t \dot{\alpha}^2(s)ds = \frac{1}{2}m\int_0^t \Big(\dot{\omega}^q(s) - \delta(s)\Big)^2 ds$$

$$\frac{1}{2}m\int_0^t \dot{\alpha}^2(s)ds = \frac{1}{2}m\int_0^t \Big(\dot{\omega}^q(s)\Big)^2 + \Big(\delta(s)\Big)^2 - 2\dot{\omega}^q(s)\delta(s)\,ds$$

Ma $\omega(s)$ è una curva classica a tratti e dunque l'energia $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ risulta costante lungo le curve classiche $\omega(s)|_{(t_r,t_{r+1})}$ corrispondenti alle restrizioni della curva classica a tratti sugli intervalli (t_r, t_{r+1}) per $r = 0, 2, ...k$. Dunque valutando l'energia su $\omega(s)$ si ottiene una funzione scalare dei tempi di discontinuità $(t_1, t_2..t_k)$ e dei punti di discontinuità $(x_1, x_2...x_k)$. Infatti:

$$\int_0^t H(\omega^q(s), \omega^p(s))ds = \int_0^t \frac{(\omega^p(s))^2}{2m} + V(\omega^q(s))ds =$$

$$= \sum_{r=0}^{k}\int_{t_r}^{t_{r+1}} \frac{(\omega^p(s))^2}{2m} + V(\omega^q(s))ds =$$

$$= \sum_{r=0}^{k}\int_{t_r}^{t_{r+1}} \frac{1}{2}m(\dot{\omega}^q(s))^2 + V(\omega^q(s))ds =$$

$$= \sum_{r=0}^{k}(t_{r+1} - t_r)\Big\{\frac{1}{2}m(\dot{\omega}^q(t_r))^2 + V(\omega^q(t_r))\Big\} =$$

Ma per definizione si ha che $\omega^q(t_r) = x_r$ e perciò:

$$= \sum_{r=0}^{m}(t_{r+1} - t_r)\Big\{\frac{1}{2}m(\dot{\omega}^q(t_r))^2 + V(x_r)\Big\}$$

dove

$$\dot{\omega}^q(t_r) = \frac{x_{r+1} - x_r}{t_{r+1} - t_r} + \frac{1}{N}\Big[u_r^q(t_r) + f_r^q(t_r - t_{r-1}, x_{r+1}, x_r, \bar{u}_r)(t_r)\Big]$$

è una funzione nota dei tempi t_r, t_{r+1} e dei punti x_r, x_{r+1}.
In conclusione l'integrale dell'energia lungo la curva classica a tratti $\omega(s)$ è una funzione nota dei tempi e dei punti di discontinuità della curva:

$$W_k(t_1, t_2...t_k; x_1, x_2...x_k) = \int_0^t H(\omega^q(s), \omega^p(s))ds =$$

$$= \sum_{r=0}^{k}(t_{r+1}-t_r)\Big\{\frac{1}{2}m\Big(\frac{x_{r+1}-x_r}{t_{r+1}-t_r}+\frac{1}{N}[u_r^q(t_r)+f_r^q(t_r-t_{r-1}, x_{r+1}, x_r, \bar{u}_r)(t_r)]\Big)^2+V(x_r)\Big\}.$$

Ricordando ora la definizione di W si ha che:

$$W_k(t_1, t_2...t_k; x_1, x_2...x_k) = \sum_{r=0}^{k}\int_0^t \frac{1}{2}m(\dot{\omega}^q(s))^2 + V(\omega^q(s))ds$$

sostituendo $\dot{\omega}^q(s) = \dot{\alpha}(s) + \delta(s)$ si ottiene:

$$W_k(t_1, t_2...t_k; x_1, x_2...x_k) = \int_0^t \frac{1}{2}m\Big(\dot{\alpha}(s) + \delta(s)\Big)^2 + V(\omega^q(s))ds$$

$$W_k(t_1, t_2...t_k; x_1, x_2...x_k) = \int_0^t \frac{1}{2}m\Big(\dot{\alpha}(s)\Big)^2+\frac{1}{2}m\Big(\delta(s)\Big)^2+m\dot{\alpha}(s)\delta(s)+V(\omega^q(s))ds$$

Risulta dunque possibile ricavare la relazione:

$$\frac{1}{2}m\int_0^t \Big(\delta(s)\Big)^2 ds = W_k(t_1, t_2...t_k; x_1, x_2...x_k) +$$

$$-\int_0^t \frac{1}{2}m\Big(\dot{\alpha}(s)\Big)^2 + m\dot{\alpha}(s)\delta(s) + V(\omega^q(s))\, ds$$

Considerando ora l'espressione iniziale del termine cinetico di $\alpha(s)$:

$$\frac{1}{2}m\int_0^t \dot{\alpha}^2(s)ds = \int_0^t \frac{1}{2}m\Big(\dot{\omega}^q(s)\Big)^2 - m\Big(\dot{\omega}^q(s)\Big)\delta(s)\, ds + \int_0^t \frac{1}{2}m\Big(\delta(s)\Big)^2 ds$$

e sostituendo il termine in $\Big(\delta(s)\Big)^2$, si ottiene:

$$\frac{1}{2}m\int_0^t \dot{\alpha}^2(s)ds = \int_0^t \frac{1}{2}m\Big(\dot{\omega}^q(s)\Big)^2 - m\Big(\dot{\omega}^q(s)\Big)\delta(s)\, ds+$$

$$+W_k(t_1, t_2...t_k; x_1, x_2...x_k) - \int_0^t \frac{1}{2}m\Big(\dot{\alpha}(s)\Big)^2 + m\dot{\alpha}(s)\delta(s) + V(\omega^q(s))\, ds$$

Riordinando i termini, si ottiene:

$$\frac{1}{2}m\int_0^t \dot\alpha^2(s)ds = \int_0^t \frac{1}{2}m\Big(\dot\omega^q(s)\Big)^2 - V(\omega^q(s))\, ds +$$

$$+W_k(t_1,t_2...t_k;x_1,x_2...x_k) - \int_0^t \frac{1}{2}m\Big(\dot\alpha(s)\Big)^2 + m[\dot\alpha + \dot\omega^q(s)]\delta(s)\, ds$$

dove si osserva che nel secondo membro compare il funzionale d'azione $A[\cdot]$ valutato sulla curva classica a tratti $\omega(s)$; è inoltre presente un termine in $\dot\omega^q(s)$ accoppiato con la deviazione $\delta(s)$.
Utilizzando ancora la relazione $\dot{\omega^q}(s) = \dot\alpha(s) + \delta(s)$ si ottiene infine:

$$\frac{1}{2}m\int_0^t \dot\alpha^2(s)ds = \int_0^t \frac{1}{2}m\Big(\dot\omega^q(s)\Big)^2 - V(\omega^q(s))\, ds +$$

$$+W(t_1,t_2...t_k;x_1,x_2...x_k) - \int_0^t \frac{1}{2}m\Big(\dot\alpha(s)\Big)^2 + m\Big[2\dot\alpha + \delta\Big]\delta(s)\, ds$$

L'ultimo integrale, pur dipendendo implicitamente da $\dot\omega^q(s)$, si può rappresentare come una funzione nota dei tempi $(t_1,t_2...t_k)$ e dei punti $(x_1,x_2...x_k)$ di discontinuità. Infatti utilizzando la forma esplicita della spezzata $\alpha(s)$ e della deviazione $\delta(s)$ si definisce la funzione scalare:

$$V_k(t_1,t_2...t_k;x_1,x_2...x_k) := -\int_0^t \frac{1}{2}m\Big(\dot\alpha(s)\Big)^2 + m\Big[2\dot\alpha + \delta\Big]\delta(s)\, ds$$

$$= -\sum_{r=0}^{k}\int_{t_r}^{t_{r+1}} \frac{1}{2}m\Big(\dot\alpha(s)\Big)^2 + m\Big[2\dot\alpha + \delta\Big]\delta(s)\, ds \; =$$

$$= -\sum_{r=0}^{k}\int_{t_r}^{t_{r+1}} \frac{1}{2}m\Big(\frac{x_{r+1}-x_r}{t_{r+1}-t_r}\Big)^2 + m\Big[2\frac{x_{r+1}-x_r}{t_{r+1}-t_r}+$$

$$+\frac{1}{N}\Big(u_r^q(s)+f_r^q(t_{r+1}-t_r,x_r,x_{r+1},\bar u_r)(s)\Big)\Big]\cdot\frac{1}{N}\Big(u_r^q(s)+f_r^q(t_{r+1}-t_r,x_r,x_{r+1},\bar u_r)(s)\Big)\, ds$$

In conclusione il termine cinetico relativo alla generica spezzata $\alpha_k(s)$ si può rappresentare come:

$$\frac{1}{2}m\int_0^t \dot\alpha_k^2(s)ds = A[\omega_k(s)] + \Big(W_k + V_k\Big)(t_1,t_2...t_k;x_1,x_2...x_k)$$

con V_k e W_k funzioni scalari note dei tempi $(t_1,t_2...t_k)$ e dei punti $(x_1,x_2...x_k)$ di discontinuità della curva $\omega_k(s)$ classica a tratti.

Si ricorda che la determinazione di tali funzioni è resa possibile dall'utilizzo della procedura di riduzione di Amann-Conley-Zehnder che fornisce una rappresentazione esplicita delle curve classiche a tratti in funzione dei punti e dei tempi di discontinuità.
Anche nel caso della retta $\alpha_0(s)$ vale l'analoga relazione:

$$\frac{1}{2}m\int_0^t \dot{\alpha}_0^2(s)ds = A[\omega_0(s)] + \Big(W_0 + V_0\Big)(t,x,y)$$

dove V_0 e W_0 sono funzioni note dei punti estremi x e y e del tempo t, ma si ottengono per mezzo delle medesime definizioni dei termini precedenti.
Nel Teorema 2.3.4 si è visto che il limite di path integrals:

$$\Phi_S(t,x,y) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{CPL(t,x,y)} \exp\Big\{-\frac{m}{2(i+\epsilon)\hbar}\int_0^t \dot{\alpha}^2(s)ds\Big\}\, M^\epsilon(d\alpha)$$

rappresenta il nucleo del propagatore dell'equazione di Schrödinger, che si calcola in modo esplicito con la serie di integrali:

$$\Phi_S^\epsilon(t,x,y) = \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\frac{m}{2\pi t(i+\epsilon)\hbar}\Big)^{\frac{n}{2}}\exp\Big\{-\frac{m|x-y|^2}{2\hbar(i+\epsilon)t}\Big\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int\prod_{j=1}^{k+1}\Big(2\pi\hbar(t_j-t_{j-1})(i+\epsilon)/m\Big)^{-\frac{n}{2}}\cdot\prod_{j=1}^{k}\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}V(x_j)\Big)\cdot$$

$$\cdot\exp\Big\{-\frac{m}{2(i+\epsilon)\hbar}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{|x_j-x_{j-1}|^2}{t_j-t_{j-1}}\Big\}\cdot dt_1dt_2...dt_kdx_1dx_2...dx_k$$

Sostituendo i termini cinetici relativi alle spezzate $\alpha_k(s)$ con le espressioni contenenti il funzionale d'azione $A[\cdot]$ valutato sulle curve classiche a tratti $\omega_k(s)$ corrispondenti si ottiene:

$$\Phi_S(t,x,y) = \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\frac{m}{2\pi t(i+\epsilon)\hbar}\Big)^{\frac{n}{2}}\exp\Big\{-\frac{1}{(i+\epsilon)\hbar}\Big(A[\omega_0(s)]+\Big(W_0+V_0\Big)(t;x,y)\Big)\Big\}+$$

$$+\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\int\exp\Big\{-\frac{1}{(i+\epsilon)\hbar}\Big(A[\omega_k(s)]+\Big(W_k+V_k\Big)(t_j;x_j)\Big)\Big\}\cdot$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{k}\Big(2\pi\hbar(s_j-s_{j-1})(i+\epsilon)/m\Big)^{-\frac{n}{2}}\cdot\prod_{j=1}^{k}\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}V(x_j))\Big)dt_1dt_2...dt_kdx_1dx_2...dx_k$$

Il termine relativo al funzionale d'azione:

$$\exp\Big\{-\frac{1}{(i+\epsilon)\hbar}A[\omega(s)]\Big\}$$

si configura, in modo naturale, come una funzione integranda sul dominio di curve $CPC(t,x,y)$.
Di conseguenza gli esponenziali dei termini $W+V$ possono essere inglobati nella misura, definendo così una nuova famiglia di densità (diversa da quella considerata per il path integral su $CPL(t,x,y)$ e descritta nel Teorema 2.3.5):

$$\bar{M}_k^{\epsilon}(t,x,y;t_j,x_j) := \prod_{j=1}^{k+1}\Big(2\pi\hbar(t_j-t_{j-1})(i+\epsilon)/m\Big)^{-\frac{n}{2}}\cdot\prod_{j=1}^{k}\Big(-\frac{(i+\epsilon)}{\hbar}V(x_j)\Big)\cdot$$

$$\cdot\exp\Big\{-\frac{1}{(i+\epsilon)\hbar}\Big(W_k+V_k\Big)(t_j;x_j)\Big\}$$

$$\bar{M}_0(t,x,y) := \Big(\frac{m}{2\pi t(i+\epsilon)\hbar}\Big)^{\frac{n}{2}}\cdot\exp\Big\{-\frac{1}{(i+\epsilon)\hbar}\Big(W_0+V_0\Big)(t,x,y)\Big\}\cdot$$

che inducono una nuova misura $\bar{M}^{\epsilon}$ su $\mathcal{P}(t,x,y)$ e di conseguenza, secondo il criterio descritto nel paragrafo 2.1, anche una misura $M_S^{\epsilon}(d\omega)$ sull'insieme di curve $CPC(t,x,y)$.
A seguito di queste considerazioni risulta possibile il cambiamento del dominio di integrazione del path integral da $CPL(t,x,y)$ in $CPC(t,x,y)$, con il conseguente cambiamento della funzione integranda e della misura. Il nucleo $\Phi_S(t,x,y)$ si quindi può rappresentare come il limite dei differenti path integrals:

$$\Phi_S(t,x,y) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{CPC(t,x,y)}\exp\Big\{-\frac{1}{(i+\epsilon)\hbar}A[\omega(s)]\Big\}\,M_S^{\epsilon}(d\omega)$$

□

2.4 Path Integral per l'equazione di Fokker-Planck

Teorema 2.4.1
Dato $V(x) \in L^2 \cap C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *tale che:*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |V(x)| = V_0 < +\infty$$

Il problema di Cauchy per l'equazione di Fokker-Planck:

$$\frac{\lambda^2}{2m}\triangle\psi_{F-P}(t,x) - V(x)\psi_{F-P}(t,x) = \lambda\frac{\partial}{\partial t}\psi_{F-P}(t,x)$$

$$\psi_{F-P}(0,x) = \phi(x)$$

è risolto per $t \in [0,+\infty)$ *dal propagatore:*

$$\psi_{F-P}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{F-P}(t,x,y)\phi(y)dy$$

dove il nucleo assume la rappresentazione:

$$\Phi_{F-P}(t,x,y) = \int_{CPL(t,x,y)} \exp\Big\{ -\frac{m}{2\lambda}\int_0^t \dot{\alpha}^2(s)ds\Big\}\, M(d\alpha)$$

Tale path integral si calcola per mezzo della serie:

$$\Phi_{F-P}(t,x,y) = \Big(\frac{m}{2\pi t\lambda}\Big)^{\frac{n}{2}} \exp\Big\{-\frac{m|x-y|^2}{2\lambda t}\Big\} + \sum_{k=1}^{\infty}\int\prod_{j=1}^{k+1}\Big(2\pi\lambda(s_j - s_{j-1})/m\Big)^{-\frac{n}{2}}$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{k}\Big(\frac{V(x_j)}{\lambda}\Big)\cdot\exp\Big\{-\frac{1}{2\lambda}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{|x_j - x_{j-1}|^2}{s_j - s_{j-1}}\Big\}ds_1...ds_k dx_1...dx_k$$

Dimostrazione

Dato il problema di Cauchy per l'equazione di Fokker-Planck:

$$\frac{\lambda^2}{2m}\triangle\psi_{F-P}(t,x) - V(x)\psi_{F-P}(t,x) = \lambda\frac{\partial}{\partial t}\psi_{F-P}(t,x)$$

$$\psi_{F-P}(0,x) = \phi(x)$$

La soluzione soddisfa l'equazione integrale:

$$\psi_{F-P}(t,x) = G_t(\phi)(x) + \frac{1}{\lambda}\int_0^t G_{t-s}(V\psi_{F-P})(s,x)\,ds$$

$$\psi_{F-P}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x,y)\phi(y)\,dy + \frac{1}{\lambda}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} G(t-s,x,y)V(y)\psi_{F-P}(s,y)\,dyds$$

Dove la forma del nucleo $G(t,x,y)$ corrisponde a:

$$G(t,x,y) = \Big(\frac{m}{2\pi t\lambda}\Big)^{\frac{n}{2}}\exp\Big\{-\frac{m|x-y|^2}{2\lambda t}\Big\}$$

Sostituendo nel secondo membro dell'equazione integrale la forma di $\psi_{F-P}(s,y)$ si ottiene:

$$\psi_{F-P}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x,y)\phi(y)\,dy + \frac{1}{\lambda}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} G(t-t_1,x,x_1)V(x_1)\cdot$$

$$\cdot\Big[\int_{\mathbb{R}^n} G(t_1,x_1,y)\phi(y)\,dy + \frac{1}{\lambda}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} G(t_1-t_2,x_1,x_2)V(x_2)\psi_{F-P}(t_2,x_2)\,dx_2dt_2\Big]\,dx_1dt_1$$

Riordinando i termini si evidenziano tre integrali:

$$\psi_{F-P}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x,y)\phi(y)\,dy +$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} G(t-t_1,x,x_1)V(x_1)G(t_1,x_1,y)\phi(y)\,dt_1dx_1dy +$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}\int_0^t\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} G(t-t_1,x,x_1)V(x_1)G(t_1-t_2,x_1,x_2)V(x_2)\cdot$$

$$\cdot\psi_{F-P}(t_2,x_2)\,dt_1dx_1dt_2dx_2dy$$

I primi due integrali sono effettivamente calcolabili, il terzo integrale va ulteriormente sviluppato nella somma di integrali negli ordini superiori di $(1/\lambda)$.

Iterando per r volte il procedimento precedentemente descritto, si ottiene:

$$\psi_{F-P}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x,y)\phi(y)dy +$$

$$+\sum_{k=1}^{r} \Big[\int_0^t \int_0^{t_k} .... \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^n} ... \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{k} \Big(\frac{V(x_j)}{\lambda} \Big) \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{k+1} \Big(G(t_j - t_{j-1}, x_{j-1}, x_j) \Big) \phi(y) dt_1 dt_2 ... dt_k dx_1 dx_2 ... dx_k dy \Big] +$$

$$+ \int_0^t \int_0^{t_r} ... \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^n} ... \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{r} \Big(G(t_j - t_{j-1}, x_{j-1}, x_j) \frac{V(x_j)}{\lambda} \Big) \cdot$$

$$\cdot \psi_{F-P}(t_r, x_r) dt_1 dt_2 ... dt_r dx_1 dx_2 ... dx_r.$$

dove per chiarezza espositiva si è invertito, rispetto alla formula precedente, l'ordine dei tempi in modo che relativamente al k-esimo integrale sia $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_{k+1} = t$ e per i punti si è posto $x_0 := y$, $x_{k+1} := x$, $t_{k+1} := t$.
Valutando ora il modulo del k-esimo termine:

$$\Big| \int_0^t \int_0^{t_k} ... \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^n} ... \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{k} \Big(\frac{V(x_j)}{\lambda} G(t_j - t_{j-1}, x_{j-1}, x_j) \Big) dt_1 ... dt_k dx_1 ... dx_k dy \Big| \leq$$

Si ottiene una maggiorazione supponendo il potenziale $V(x) \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ e limitato ed utilizzando la forma esplicita di $G(t_j - t_{j-1}, x_{j-1}, x_j)$ (vedi [8]):

$$\leq C(2\pi t)^{-n/2} \Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^k \frac{(t\epsilon^{-n/2})^k}{k!}$$

Tali termini verificano:

$$\lim_{k \mapsto \infty} C(2\pi t)^{-n/2} \Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^k \frac{(t\epsilon^{-n/2})^k}{k!} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} C(2\pi t)^{-n/2} \Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^k \frac{(t\epsilon^{-n/2})^k}{k!} = D < +\infty$$

Ne consegue che la serie degli integrali è convergente in quanto maggiorata dalla serie sopra descitta; inoltre l'ultimo integrale della serie, che contiene $\psi_{F-P}(t_r, x_r)$, converge a zero e non contribuisce alla rappresentazione della

soluzione dell'equazione di Fokker-Planck $\psi_{F-P}(t,x)$.
Attraverso l'operazione di limite si ottiene dunque la rappresentazione:

$$\psi_{F-P}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x,y)\phi(y)dy +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\int_0^t\int_0^{t_k}\cdots\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^{k}\Big(\frac{V(x_j)}{\lambda}\Big)\cdot$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{k+1}\Big(G(t_j-t_{j-1},x_{j-1},x_j)\Big)\cdot\phi(y)dt_1dt_2...dt_kdx_1dx_2...dx_kdy\Big]$$

La soluzione dell'equazione di Fokker-Planck assume dunque la forma:

$$\psi_{F-P}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n}\Phi_{F-P}(t,x,y)\phi_(y)dy$$

Dove il nucleo $\Phi_{F-P}(t,x,y)$ corrisponde a:

$$\Phi_{F-P}(t,x,y) = G(t,x,y) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\int_0^t\int_0^{t_k}\cdots\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^{k}\Big(\frac{V(x_j)}{\lambda}\Big)\cdot$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{k+1}\Big(G(t_j-t_{j-1},x_{j-1},x_j)\Big)dt_1dt_2...dt_kdx_1dx_2...dx_k\Big]$$

dove $x_0 = y$, $x_{k+1} = x$ e $t_{k+1} = t$.
Utilizzando la forma esplicita di $G(t,x,y)$ e riordinando i termini si ha che:

$$\Phi_{F-P}(t,x,y) = \Big(\frac{m}{2\pi t\lambda}\Big)^{\frac{n}{2}}\exp\Big\{-\frac{m|x-y|^2}{2\lambda t}\Big\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int\prod_{j=1}^{k+1}\Big(2\pi\lambda(t_j-t_{j-1})/m\Big)^{-\frac{n}{2}}\cdot\prod_{j=1}^{k}\Big(\frac{V(x_j)}{\lambda}\Big)\cdot$$

$$\cdot\exp\Big\{-\frac{1}{2\lambda}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{|x_j-x_{j-1}|^2}{t_j-t_{j-1}}\Big\}\cdot dt_1dt_2...dt_kdx_1dx_2...dx_k$$

Si osserva ora che i termini contenuti negli esponenziali corrispondono, a meno della medesima costante, al funzionale energia cinetica valutata sulle curve spezzate $\alpha(s) \in CPL(t,x,y)$, e si possono dunque riscrivere come:

$$\Big\{ -\frac{m}{2\lambda}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{|x_j - x_{j-1}|^2}{t_j - t_{j-1}}\Big\} = \Big\{ -\frac{m}{2\lambda}\int_0^t \dot{\alpha}_k^2(s)ds\Big\}$$

dove $\alpha_k(s)$ corrisponde appunto alla generica spezzata con k punti di discontinuità che connette i punti estremi y e x nel tempo t.
Tale osservazione risulta valida anche per la retta $\alpha_0(s)$, dato che il primo esponenziale corrisponde all'energia cinetica valutata su tale curva:

$$\exp\Big\{ -\frac{m|x-y|^2}{2\lambda t}\Big\} = \Big\{ -\frac{m}{2\lambda}\int_0^t \dot{\alpha}_0^2(s)ds\Big\}$$

Questa famiglia di funzioni si può quindi considerare come una funzione integranda data dall'esponenziale dell'energia cinetica definita sul dominio di curve $CPL(t,x,y)$, con il termine moltiplicativo $(-1/\lambda)$.
Si definisce perciò in modo naturale la famiglia di funzioni densità $\bar{M}_k(t,x,y;t_j,x_j)$ su $\mathcal{P}(t,x,y)$ come:

$$\bar{M}_k(t,x,y;t_j,x_j) := \prod_{j=1}^{k+1}\Big(2\pi\lambda(t_j - t_{j-1})/m\Big)^{-\frac{n}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{k}\Big(\frac{V(x_j)}{\lambda}\Big)$$

per $k \geq 1$, mentre per $k = 0$ si pone:

$$\bar{M}_0(t,x,y) := \Big(2\pi\lambda t/m\Big)^{-\frac{n}{2}}$$

che induce una misura $M(d\alpha)$ sullo spazio di curve $CPL(t,x,y)$.
A seguito di tali considerazioni si riconosce che, secondo il criterio descritto nel paragrafo 2.2, la serie di integrali sopra descritta corrisponde ad un path integral con dominio di integrazione relativo alle curve $CPL(t,x,y)$ sul quale è definita la misura σ-finita e reale $M(d\alpha)$, e con funzione integranda data dall'esponenziale del funzionale energia cinetica con il termine moltiplicativo $(-1/\lambda)$.
In conclusione il nucleo $\Phi_{F-P}(t,x,y)$ del propagatore dell'equazione di Fokker-Planck si rappresenta per mezzo del seguente path integral:

$$\Phi_{F-P}(t,x,y) = \int_{CPL(t,x,y)} \exp\Big\{ -\frac{m}{2\lambda}\int_0^t \dot{\alpha}^2(s)ds\Big\} M(d\alpha)$$

□

Teorema 2.4.2
Dato il potenziale $V(x) \in L^2 \cap C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$ *tale che:*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |V(x)| = V^0 < +\infty$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial V}{\partial x^i}(x) \right| = V_i' < +\infty \quad \forall i = 1, 2, ...n$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^i \partial x^j} \right| = V_{i,j}'' < +\infty \quad \forall i, j = 1, 2, ...n$$

L'equazione di Fokker-Planck:

$$\frac{\lambda^2}{2m} \triangle \psi_{F-P}(t, x) - V(x) \psi_{F-P}(t, x) = \lambda \frac{\partial}{\partial t} \psi_{F-P}(t, x)$$

$$\psi_{F-P}(0, x) = \phi(x)$$

viene risolta per $t \in [0, T]$ *dal propagatore:*

$$\psi_{F-P}(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{F-P}(t, x, y) \phi(y) dy$$

dove il nucleo assume la rappresentazione:

$$\Phi_{F-P}(t, x, y) = \int_{CPC(t,x,y)} \exp\Big\{ - \frac{1}{\lambda} A[\omega(s)] \Big\} M_{F-P}(d\omega)$$

Dimostrazione
Nel precedente Teorema 2.4.1 si è dimostrato che il nucleo del propagatore dell'equazione di Fokker-Planck assume, per $t \in [0, +\infty)$, la rappresentazione integrale:

$$\Phi_{F-P}(t, x, y) = \int_{CPL(t,x,y)} \exp\Big\{ - \frac{1}{\lambda} \int_0^t \frac{m}{2} \dot{\alpha}^2(s) ds \Big\} M(d\alpha)$$

Ma in modo esattamente analogo al Teorema 2.3.6 si dimostra ora che l'isomorfismo esistente fra gli spazi di curve $CPL(t, x, y)$ e $CPC(t, x, y)$, dedotto grazie alla limitatezza del potenziale e delle sue derivate e imponendo la limitazione a $t \in [0, T]$ (vedi Corol. 2.1.2), permette di passare direttamente alla rappresentazione integrale sul nuovo dominio di curve.
Infatti a seguito della trasformazione del dominio di integrazione del path integral, emerge la nuova funzione integranda:

$$\exp\Big\{ - \frac{1}{\lambda} A[\omega(s)] \Big\}$$

Mentre la nuova misura $M_{F-P}(d\alpha)$ viene indotta di conseguenza, secondo il criterio descritto nel paragrafo 2.1, dalla nuova famiglia di densità:

$$\bar{M}_k(t,x,y;t_j,x_j) := \prod_{j=1}^{k+1} \Big(2\pi\lambda(t_j - t_{j-1})/m\Big)^{-\frac{n}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{k} \Big(\frac{V(x_j)}{\lambda}\Big) \cdot$$

$$\cdot \exp\Big\{ -\frac{1}{\lambda}\Big(W_k + V_k\Big)(t_j;x_j)\Big\}$$

per $k \geq 1$, e per $k = 0$:

$$\bar{M}_0(t,x,y) := \prod_{j=1}^{k+1} \Big(2\pi\lambda t/m\Big)^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp\Big\{ -\frac{1}{\lambda}\Big(W_0 + V_0\Big)(t;x;y)\Big\}$$

Dove le funzioni scalari W_k e V_k sono le medesime del Teorema 2.3.5.
Si conclude che a seguito di tale trasformazione, il nuovo path integral che rappresenta il nucleo del propagatore dell'equazione di Fokker-Planck corrisponde a:

$$\Phi_{F-P}(t,x,y) = \int_{CPC(t,x,y)} \exp\Big\{ -\frac{1}{\lambda} A[\omega(s)]\Big\} \, M_{F-P}(d\omega)$$

□

CAPITOLO 3. RIDUZIONE DI PATH INTEGRAL

In questo capitolo si sviluppa la procedura di riduzione della classe generale di path integrals descritti nel capitolo 2:

$$\Phi(t, x, y) = \int_{CPC(t,x,y)} \beta(A[\omega(s)])M(d\omega)$$

integrali definiti sul dominio di integrazione $CPC(t, x, y)$ [7] (insieme della curve classiche a tratti che connettono y e x nel tempo t) sul quale è definita una classe di misure σ-finite e complesse $M(d\omega(s))$, e con una funzione integranda costruita mediante una mappa $\beta(\cdot) \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ (di modulo limitato) composta con il funzionale d'azione $A[\omega(s)] := \int_0^t \omega^p(s)\dot{\omega}^q(s) - H(\omega(s))\, ds$.
La procedura di riduzione consiste nella trasformazione del path integral in un integrale finito:

$$\Phi(t, x, y) = \int_{\mathbb{R}^k} \beta(S(t, x, y, u))\rho(t, x, y, u)du$$

integrale di Lebesgue definito su un opportuno spazio dei parametri $\mathbb{R}^k$ finito dimensionale, relativo ad una misura σ-finita $\rho(t, x, y, u)du$, e con funzione integranda costruita mediante la mappa $\beta(\cdot)$ composta con la Funzione Generatrice $S(t, x, y, u)$ associata al problema di Hamilton-Jacobi (vedi capitolo 1).
Tale trasformazione risulta possibile grazie al Teorema del cambio di variabili (vedi appendice B) che puó essere qui applicato tramite la determinazione (vedi paragrafo 3.1) di una funzione $F(\cdot)$, che chiameremo *mappa di riduzione* di $CPC(t, x, y)$ in $\mathbb{R}^k$:

$$\begin{aligned} CPC &\xrightarrow{F} \mathbb{R}^k \\ \omega(s) &\longmapsto F(\omega(s)) \end{aligned}$$

mappa che si dimostra, nel paragrafo 3.3, essere un particolare morfismo dallo spazio di probabilità $\{CPC; \mathcal{D}; M(d\omega)\}$ nello spazio di probabilità $\{\mathbb{R}^k; \mathcal{B}(\mathbb{R}^k); \rho(t, x, y, u)du\}$.

[7] Continuous Piecewise Classical paths

3.1 Mappa di riduzione

In questo paragrafo si costruisce la mappa di riduzione $F(\cdot)$ dello spazio delle curve $CPC(t,x,y)$ (vedi paragrafo 2.1) nello spazio dei parametri $\mathbb{R}^k$ associato alla Funzione Generatrice $S(t,x,y,u)$ della sottovarietà Lagrangiana rappresentante la trasformazione canonica $\phi_H^t(q,p)$ che connette i punti y e x nel tempo t (vedi capitolo 1).

$$CPC(t,x,y) \xrightarrow{F} \mathbb{R}^k$$
$$\omega(s) \longmapsto F(\omega(s))$$

Successivamente si dimostrerà , nel Teorema 3.1.1, che verifica le tre seguenti fondamentali proprietà:

(i) $F(\cdot)$ è una mappa misurabile dallo spazio misurabile {CPC,$\mathfrak{D}$} nello spazio misurabile { $\mathbb{R}^k$,$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$ }, ovvero verifica la proprietà:

$$F^{-1}(\mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)) \subset \mathfrak{D}$$

la controimmagine della σ-algebra di Borel di $\mathbb{R}^k$ risulta contenuta nella σ-algebra $\mathfrak{D}$ di $CPC(t,x,y)$. Questa proprietà risulta necessaria al fine di effettuare l'operazione di push-forward di una misura definita su $CPC(t,x,y)$ in una misura definita su $\mathbb{R}^k$.

(ii) La mappa $F(\cdot)$ verifica la proprietà :

$$\int_{F^{-1}(C)/CPC_0(t,x,y)} M(d\omega(s)) = 0 \quad \forall C \in \mathbb{R}^k \text{con} \int_C du = 0$$

ovvero la controimmagine in $CPC(t,x,y)/CPC_0(t,x,y)$ di un sottoinsieme $C \subset \mathbb{R}^k$ di misura nulla secondo Lebesgue, risulta di misura nulla anche secondo $M(d\omega(s))$ (misura σ-finita e complessa definita nel paragrafo 2.1).

(iii) Per (t,x,y) fissati, $F(\cdot)$ rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} CPC \arrow[r, "F"] \arrow[d, "A"'] & \mathbb{R}^k \arrow[d, "S"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "id"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

ovvero si verifica che:

$$A[\omega(s)] = S(t,x,y,F(\omega(s))) \quad \forall\, \omega(s) \in CPC\backslash W \; con \int_W M(d\omega(s)) = 0$$

dove $A[\cdot]$ corrisponde al funzionale d'azione definito per mezzo dell'Hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$.

$$CPC \xrightarrow{A} \mathbb{R}$$

$$\omega(s) \longmapsto A[\omega(s)] := \int_0^t \Big[\omega^p(s)\dot{\omega}^q(s) - H(\omega(s))\Big]\, ds$$

Queste tre proprietà saranno utilizzate, nel paragrafo 3.3, al fine di effettuare la riduzione del path integral in un integrale finito dimensionale.

Definizione della mappa di riduzione

Sia $M(d\omega(s))$ una misura nella classe di misure σ-finite e complesse definite sull'insieme $CPC(t,x,y)$, sia $S(t,x,y,u)$ la Funzione Generatrice globale descritta nel capitolo 1.
Si definisce la mappa di riduzione $F(\cdot)$ dell'insieme $CPC(t,x,y)$ nello spazio dei parametri $\mathbb{R}^k$:

$$CPC \xrightarrow{F} \mathbb{R}^k$$
$$\omega(s) \longmapsto u = F(\omega(s))$$

per mezzo della composizione di due mappe:

$$CPC \xrightarrow{L} \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \xrightarrow{G} \mathbb{R}^k$$
$$\omega(s) \longmapsto L(\omega(s)) \longmapsto G \circ L(\omega(s))$$
$$\omega(s) \longmapsto F(\omega(s)) := G \circ L(\omega(s))$$

qui di seguito definite.
• *Definizione della mappa L*
(1) Si definisce una prima mappa ϕ_ω che associa ad una curva $\omega(s) \in CPC(t,x,y)$ (vedi paragrafo 2.1) una curva $\phi_\omega(s) \in L^2([0,t];\mathbb{R}^{2n})$:

$$CPC \xrightarrow{\phi_\omega} L^2([0,t];\mathbb{R}^{2n})$$
$$\omega(s) \longrightarrow \phi_\omega(s) = (\phi_\omega^q(s), \phi_\omega^p(s))$$

dove le componenti $\phi_\omega^q(s)$ e $\phi_\omega^p(s)$ sono definite come:

$$\phi_\omega^q(s) := \dot{\omega}^q(s) - \frac{x-y}{t}$$
$$\phi_\omega^p(s) := \dot{\omega}^p(s)$$

Tale mappa associa quindi alla curva $\omega(s) \in CPC(t,x,y)$ una curva $\phi_\omega(s) \in L^2([0,t];\mathbb{R}^{2n})$ data, per le componenti q, dalla deviazione della derivata $\dot{\omega}^q(s)$ dalla derivata $\frac{x-y}{t}$ della retta che connette y e x nel tempo t, mentre per le componenti p solo dalla derivata $\dot{\omega}^p(s)$.
Si osserva di conseguenza che in corrispondenza delle discontinuità della derivata della curva $\omega(s) = (\omega^q(s), \omega^q(s))$ vi sono discontinuità per la curva $\phi_\omega(s) = (\phi_\omega^q(s), \phi_\omega^p(s))$ che appartiene comunque ad $L^2([0,t];\mathbb{R}^{2n})$.

(2) Si definisce una seconda mappa $T_N(\cdot)$ che tronca lo sviluppo della serie di Fourier di una curva $\xi(s) \in L^2([0,t];\mathbb{R}^{2n})$ all'ordine N:

$$L^2([0,t];\mathbb{R}^{2n}) \xrightarrow{T_N} \mathbb{R}^k$$

$$\xi(s) \longmapsto T_N(\xi(s)) := (b_r)_{|r|\leq N}$$

dove i $2N+1$ coefficenti $b_r \in \mathbb{R}^{2n}$ sono dati da:

$$b_r = \int_0^t \xi(s) e^{\frac{2\pi}{t} irs} ds$$

l'insieme di tali coefficenti $(b_r)_{|r|\leq N}$ è rappresentato da un parametro u nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^k$, dove $k := (2N+1)2n$. Il valore di N e quindi la dimensione di tale spazio dei parametri vengono fissati a monte della procedura di riduzione di path integral descritta in questo capitolo, e precisamente nell'apparato tecnico della procedura di riduzione di Amann-Conley-Zehnder (vedi paragrafo 1.2).

(3) Dalla composizione delle due mappe sopra definite segue la costruzione della mappa $R(\cdot)$:

$$CPC \xrightarrow{\phi_\omega} L^2([0,t];\mathbb{R}^{2n}) \xrightarrow{T_N} \mathbb{R}^k$$

$$\omega(s) \longmapsto \phi_\omega(s) \longmapsto T_N(\phi_\omega(s))$$

$$\omega(s) \longmapsto R(\omega(s)) := T_N(\phi_\omega(s))$$

Lo scopo della mappa $R(\cdot)$ valutata su una curva $\omega(s) \in CPC(t,x,y)$ è dunque quello di determinare l'insieme dei coefficenti dello sviluppo di Fourier troncato all'ordine N effettuato per la derivata della deviazione di $\omega(s)$ dalla retta che connette y e x nel tempo t; l'insieme di tali coefficenti sarà determinato da un parametro $u \in \mathbb{R}^k$.

Osservazione

Si osserva che per le curve $\bar{\omega}(s)$ classiche nell'insieme $CPC(t,x,y)$, che non hanno punti di discontinuità nella derivata, il parametro definito come $u = R(\bar{\omega}(s))$ corrisponde al parametro $\bar{u}$ che risulta associato ad $\bar{\omega}(s)$ per mezzo della procedura di riduzione di Amann-Conley-Zehnder, e tale parametro verifica la condizione $0 = \nabla_u S(t,x,y,\bar{u})$ (vedi paragrafi 1.2, 1.3).

(4) La definizione della mappa $L(\cdot)$ utilizza la precedentemente definita mappa $R(\cdot)$ e il funzionale d'azione $A[\cdot]$:

$$CPC \xrightarrow{L} \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$$

$$\omega(s) \longmapsto L(\omega(s)) := (\, R(\omega(s))\, ;\, A[\omega(s)]\,)$$

$$\omega(s) \longmapsto L(\omega(s)) := (\, T_N(\phi_\omega(s))\, ;\, A[\omega(s)]\,)$$

La mappa $L(\cdot)$ valutata su una curva $\omega(s) \in CPC(t,x,y)$ risulta definita dal parametro $u = R(\omega(s))$ e dal valore del funzionale d'azione della curva $\omega(s)$.

Osservazione

La mappa $L(\cdot)$ risulta naturalmente definita in un dominio di curve più vasto di $CPC(t,x,y)$; infatti è sufficente che le curve $\omega(s)$ ammettano derivate a meno di un insieme numerabile di punti. La scelta sopra fatta di restringere subito il dominio di definizione di $L(\cdot)$ è motivata dalla chiarezza espositiva. In seguito si vedrà come tale dominio $CPC(t,x,y)$ per la mappa $L := (R;A)$ implichi una rappresentazione più esplicita dell'immagine di quella data precedentemente.

Rappresentazione esplicita della mappa $R(\cdot)$

La particolare natura dell'insieme $CPC(t,x,y)$ permette una rappresentazione più esplicita dell'immagine della mappa $R(\cdot)$. Infatti una curva classica a tratti $\omega(s) \in CPC(t,x,y)$ avente m punti dicontinuità nella derivata nei tempi t_j con $j = 1,...m$ e nei punti x_j con $j = 1,...m$, se ristretta all'intervallo di tempo (t_j, t_{j+1}) diviene la curva classica senza punti di discontinuità nella derivata che connette i punti x_j e x_{j+1} nell'intervallo di tempo $t_{j+1} - t_j$. Grazie alla procedura di riduzione di Amann-Conley-Zehnder (vedi capitolo 1) applicabile su tali curve, si ottiene la rappresentazione:

$$\omega(s)|_{(t_j,t_{j+1})} = \gamma(t_{j+1} - t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(s - t_j)$$

dove le componenti q corrispondono a:

$$\omega^q(s)|_{(t_j,t_{j+1})} = \gamma^q(t_{j+1} - t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(s - t_j) =$$

$$= x_j + \frac{x_{j+1} - x_j}{t_{j+1} - t_j}(s - t_j) + \int_0^{s-t_j} u_j^q(\tau) + f^q(t_{j+1} - t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(\tau) d\tau$$

mentre le componenti p corrispondono a:

$$\omega^p(s)|_{(t_j,t_{j+1})} = \gamma^p(t_{j+1} - t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(s - t_j) =$$

$$= m(\frac{x_{j+1} - x_j}{t_{j+1} - t_j} + u^q(0)) + \int_0^{s-t_j} u_j^p(\tau) + f^p(t_{j+1} - t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(\tau) d\tau$$

dove la curva

$$u_j(\tau) = \sum_{|\alpha| \le N} u_\alpha e^{\frac{2\pi}{t_{j+1} - t_j} i\alpha\tau} \in \mathbb{P}_N L^2([0, t_{j+1} - t_j]; \mathbb{R}^{2n})$$

mentre la curva

$$f(t_{j+1} - t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(\tau) \in \mathbb{Q}_N L^2([0, t_{j+1} - t_j]; \mathbb{R}^{2n})$$

Il parametro $\bar{u}_j$ corrispondente a tale curva si determina, una volta fissati $(t_j, t_{j+1}, x_j, x_{j+1})$, come il punto critico del funzionale:

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{\phi_\omega} \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto S(t_{j+1} - t_j, x_j, x_{j+1}, u)$$

perciò il parametro $\bar{u}_j$, una volta fissati i punti x_j e x_{j+1} ed i tempi t_j e t_{j+1} risulta determinato in modo univoco (per l'unicità vedi Proposizione 2.1) dalla condizione:

$$0 = \nabla_u S(t_{j+1} - t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)$$

Applicando ora la mappa ϕ_ω, definita al punto 1, sulla curva $\omega(s)$ definita su $(0, t)$ e restringendo la curva immagine $\phi_\omega(s)$ sull'intervallo (t_j, t_{j+1}) si ottiene:

$$CPC(t, x, y) \xrightarrow{\phi_\omega} L^2([t_j, t_{j+1}]; \mathbb{R}^{2n})$$

$$\omega(s) \longrightarrow \phi_\omega(s)|_{(t_j, t_{j+1})} = (\phi_\omega^q(s), \phi_\omega^p(s))|_{(t_j, t_{j+1})}$$

dove le componenti $\phi_\omega^q(s)$ e $\phi_\omega^p(s)$ corrispondono a:

$$\phi_\omega^q(s)|_{(t_j, t_{j+1})} := \dot{\omega}^q(s)|_{(t_j, t_{j+1})} - \frac{y - x}{t}$$

$$\phi_\omega^p(s)|_{(t_j, t_{j+1})} := \dot{\omega}^p(s)|_{(t_j, t_{j+1})}$$

ma eseguire la derivata della curva $\omega(s)$ e poi restringersi all'intervallo (t_j, t_{j+1}) equivale a restringersi a tale intervallo ed in seguito eseguire la derivata, ovvero:

$$\{\frac{d}{ds}\omega(s)\}|_{(t_j, t_{j+1})} = \frac{d}{ds}\{\omega|_{(t_j, t_{j+1})}(s)\}$$

Ne consegue che per le componenti q si ottiene:

$$\frac{d}{ds}\omega^q(s)|_{(t_j, t_{j+1})} = \frac{x_{j+1} - x_j}{t_{j+1} - t_j} + u_j^q(s - t_j) + f^q(t_{j+1} - t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(s - t_j)$$

mentre per le componenti p:

$$\frac{d}{ds}\omega^p(s)|_{(t_j,t_{j+1})} = +u_j^p(s-t_j) + f^p(t_{j+1}-t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(s-t_j)$$

Dunque si ottiene:

$$\phi_\omega^q(s)|_{(t_j,t_{j+1})} = \frac{x_{j+1}-x_j}{t_{j+1}-t_j} + u_j^q(s-t_j) + f^q(t_{j+1}-t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(s-t_j) - \frac{y-x}{t}$$

$$\phi_\omega^p(s)|_{(t_j,t_{j+1})} = u_j^p(s-t_j) + f^p(t_{j+1}-t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(s-t_j)$$

Volendo ora applicare la mappa $T_N(\cdot)$, costruita al punto 1, sulla curva $\phi_\omega(s)$ definita sull'ntervallo $(0,t)$ è conveniente utilizzare la forma esplicita della restrizione $\phi_\omega(s)|_{(t_j,t_{j+1})}$ per ogni intervallo (t_j, t_{j+1}). Si ricorda che la mappa $T_N(\cdot)$ è definita come:

$$L^2([0,t];\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

$$\phi_{\xi(s)} \longmapsto T_N(\xi(s)) := (b_r)_{|r|\leq N}$$

dove i $2N+1$ coefficenti $b_r \in \mathbb{R}^{2n}$ sono dati da:

$$b_r = \int_0^t \xi(s) e^{\frac{2\pi}{t} irs} ds$$

Poiché k è definito come $k := (2N+1)2n$ (vedi capitolo 1) segue che l'insieme dei coefficenti $(b_r)_{|r|\leq N}$ è rappresentato da un parametro u nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^k$.
L'immagine della mappa $T_N(\cdot)$ valutata sulla curva $\phi_\omega(s)$ corrisponde per definizione all'immagine della mappa $R(\cdot)$ dato che $R(\cdot) := T_N \circ \phi_\omega$, ed è dunque definita dall'insieme dei seguenti coefficenti:

$$b_r = \int_0^t \phi_\omega(s) e^{\frac{2\pi}{t} irs} ds$$

Riducendo l'integrale alla somma degli integrali sui singoli intervalli (t_j, t_{j+1}) dove non vi sono punti di discontinuità per $\phi_\omega(s)$ si può utilizzare la forma esplicita di $\phi_\omega(s)|_{(t_j,t_{j+1})}$:

$$b_r = \sum_{j=0}^{j=m} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \phi_\omega(s)|_{(t_j,t_{j+1})} e^{\frac{2\pi}{t} irs} ds$$

Considerando le componenti p e q:

$$\begin{cases} b_r^q = \sum_{j=0}^{j=m} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \{\phi_\omega^q(s)|_{(t_j,t_{j+1})}\} e^{\frac{2\pi}{t} irs} ds \\ \\ b_r^p = \sum_{j=0}^{j=m} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \{\phi_\omega^p(s)|_{(t_j,t_{j+1})}\} e^{\frac{2\pi}{t} irs} ds \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^q_r = \sum_{j=0}^{j=m} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \{ \frac{x_{j+1}-x_j}{t_{j+1}-t_j} + u^q_j(s-t_j) + \\ \qquad +f^q(t_{j+1}-t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(s-t_j) - \frac{y-x}{t} \} e^{\frac{2\pi}{t} irs} ds \\ \\ b^p_r = \sum_{j=0}^{j=m} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \{ u^p_j(s-t_j) + \\ \qquad +f^p(t_{j+1}-t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(s-t_j) \} e^{\frac{2\pi}{t} irs} ds \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^q_r = \sum_{j=0}^{j=m} \int_0^{t_{j+1}-t_j} \{ \frac{x_{j+1}-x_j}{t_{j+1}-t_j} + u^q_j(s) + \\ \qquad +f^q(t_{j+1}-t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(s) - \frac{y-x}{t} \} e^{\frac{2\pi}{t} ir(s+t_j)} ds \\ \\ b^p_r = \sum_{j=0}^{j=m} \int_0^{t_{j+1}-t_j} \{ u^p_j(s) + \\ \qquad +f^p(t_{j+1}-t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(s) \} e^{\frac{2\pi}{t} ir(s+t_j)} ds \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^q_r = \sum_{j=0}^{j=m} e^{\frac{2\pi}{t} irt_j} \int_0^{t_{j+1}-t_j} \{ \frac{x_{j+1}-x_j}{t_{j+1}-t_j} + u^q_j(s) + \\ \qquad +f^q(t_{j+1}-t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(s) - \frac{y-x}{t} \} e^{\frac{2\pi}{t} irs} ds \\ \\ b^p_r = \sum_{j=0}^{j=m} e^{\frac{2\pi}{t} irt_j} \int_0^{t_{j+1}-t_j} \{ u^p_j(s) + \\ \qquad +f^p(t_{j+1}-t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(s) \} e^{\frac{2\pi}{t} irs} ds \end{cases}$$

Risulta facilmente calcolabile il seguente termine, contenuto nell'espressione di b^q_r:

$$\sum_{j=0}^{j=m} e^{\frac{2\pi}{t} irt_j} \int_0^{t_{j+1}-t_j} \Big\{ \frac{x_{j+1}-x_j}{t_{j+1}-t_j} - \frac{y-x}{t} \Big\} e^{\frac{2\pi}{t} irs} ds =$$

$$= \sum_{j=0}^{j=m} e^{\frac{2\pi}{t} irt_j} \Big\{ \frac{x_{j+1}-x_j}{t_{j+1}-t_j} - \frac{y-x}{t} \Big\} \int_0^{t_{j+1}-t_j} e^{\frac{2\pi}{t} irs} ds =$$

$$= \sum_{j=0}^{j=m} e^{\frac{2\pi}{t} irt_j} \Big\{ \frac{x_{j+1}-x_j}{t_{j+1}-t_j} - \frac{y-x}{t} \Big\} \frac{t}{2\pi ir} \Big[e^{\frac{2\pi}{t} irs} \Big]_0^{t_{j+1}-t_j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{j=m} e^{\frac{2\pi}{t} irt_j} \Big\{ \frac{x_{j+1}-x_j}{t_{j+1}-t_j} - \frac{y-x}{t} \Big\} \frac{t}{2\pi ir} \Big(e^{\frac{2\pi}{t} ir(t_{j+1}-t_j)} - 1 \Big) =$$

$$= \sum_{j=0}^{j=m} \Big\{ \frac{x_{j+1}-x_j}{t_{j+1}-t_j} - \frac{y-x}{t} \Big\} \frac{t}{2\pi ir} \Big(e^{\frac{2\pi}{t} irt_{j+1}} - e^{\frac{2\pi}{t} irt_j} \Big).$$

Inoltre si sviluppa il termine, contenuto sia nell'espressione di b_r^q che nell'espressione di b_r^p, relativo all'integrale di $u(s)$:

$$\sum_{j=0}^{j=m} e^{\frac{2\pi}{t}irt_j} \int_0^{t_{j+1}-t_j} \Big\{u(s)\Big\} e^{\frac{2\pi}{t}irs} ds =$$

$$= \sum_{j=0}^{j=m} e^{\frac{2\pi}{t}irt_j} \int_0^{t_{j+1}-t_j} \Big\{ \sum_{|\alpha|\leq N} u_\alpha e^{\frac{2\pi}{t_{j+1}-t_j}i\alpha s} \Big\} e^{\frac{2\pi}{t}irs} ds =$$

$$= \sum_{j=0}^{j=m} \sum_{|\alpha|\leq N} e^{\frac{2\pi}{t}irt_j} u_\alpha \int_0^{t_{j+1}-t_j} e^{\frac{2\pi}{t_{j+1}-t_j}i\alpha s} e^{\frac{2\pi}{t}irs} ds =$$

$$= \sum_{j=0}^{j=m} \sum_{|\alpha|\leq N} e^{\frac{2\pi}{t}irt_j} u_\alpha \int_0^{t_{j+1}-t_j} e^{(\frac{2\pi}{t_{j+1}-t_j}\alpha + \frac{2\pi}{t}r)is} ds =$$

$$= \sum_{j=0}^{j=m} \sum_{|\alpha|\leq N} e^{\frac{2\pi}{t}irt_j} u_\alpha \Big((\frac{2\pi}{t_{j+1}-t_j}\alpha + \frac{2\pi}{t}r)i \Big)^{-1} \Big[e^{(\frac{2\pi}{t_{j+1}-t_j}\alpha + \frac{2\pi}{t}r)is} \Big]_0^{t_{j+1}-t_j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{j=m} \sum_{|\alpha|\leq N} e^{\frac{2\pi}{t}irt_j} u_\alpha \Big(\frac{\alpha}{t_{j+1}-t_j} + \frac{r}{t} \Big)^{-1} (2\pi i)^{-1} \Big(e^{(\frac{\alpha}{t_{j+1}-t_j} + \frac{r}{t})2\pi i(t_{j+1}-t_j)} - 1 \Big) =$$

$$= \sum_{j=0}^{j=m} \sum_{|\alpha|\leq N} e^{\frac{2\pi}{t}irt_j} u_\alpha \Big(\frac{\alpha}{t_{j+1}-t_j} + \frac{r}{t} \Big)^{-1} \frac{i}{2\pi} \Big(1 - e^{(\frac{\alpha}{t_{j+1}-t_j} + \frac{r}{t})2\pi i(t_{j+1}-t_j)} \Big).$$

Infine per effettuare lo sviluppo del termine:

$$\sum_{j=0}^{j=m} e^{\frac{2\pi}{t}irt_j} \int_0^{t_{j+1}-t_j} \Big\{ f(t_{j+1}-t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(s) \Big\} e^{\frac{2\pi}{t}irs} ds$$

si necessita della forma esplicita di $f(t_{j+1}-t_j, x_j, x_{j+1}, \bar{u}_j)(s)$ che va calcolata secondo il metodo descritto nella procedura di riduzione di Amann-Conley-Zehnder (vedi paragrafo 1.2).
Dopo aver effettuato lo sviluppo di questi diversi termini risulta dunque possibile dare una rappresentazione più esplicita dei coefficenti b_r che definiscono l'azione della mappa $R(\cdot) := T_N \circ \phi_\omega$ sulle curve $\omega(s) \in CPC(t, x, y)$.
La forma eplicita finale per b_r^q:

$$b_r^q = \sum_{j=0}^{j=m} \Big\{ \frac{x_{j+1}-x_j}{t_{j+1}-t_j} - \frac{y-x}{t} \Big\} \frac{t}{2\pi ir} \Big(e^{\frac{2\pi}{t}irt_{j+1}} - 1 \Big) +$$

$$+\sum_{j=0}^{j=m}\sum_{|\alpha|\leq N} e^{\frac{2\pi}{t}irt_j} u^q_{\alpha,j}\Big(\frac{\alpha}{t_{j+1}-t_j}+\frac{r}{t}\Big)^{-1}\frac{i}{2\pi}\Big(1-e^{(\frac{\alpha}{t_{j+1}-t_j}+\frac{r}{t})2\pi i(t_{j+1}-t_j)}\Big)$$

$$+\sum_{j=0}^{j=m} e^{\frac{2\pi}{t}irt_j}\int_0^{t_{j+1}-t_j}\Big\{f^q(t_{j+1}-t_j,x_j,x_{j+1},\bar{u}_j)(s)\Big\}e^{\frac{2\pi}{t}irs}ds$$

La forma esplicita finale per b^p_r:

$$b^p_r=\sum_{j=0}^{j=m}\sum_{|\alpha|\leq N} e^{\frac{2\pi}{t}irt_j} u^p_{\alpha,j}\Big(\frac{\alpha}{t_{j+1}-t_j}+\frac{r}{t}\Big)^{-1}\frac{i}{2\pi}\Big(1-e^{(\frac{\alpha}{t_{j+1}-t_j}+\frac{r}{t})2\pi i(t_{j+1}-t_j)}\Big)$$

$$+\sum_{j=0}^{j=m} e^{\frac{2\pi}{t}irt_j}\int_0^{t_{j+1}-t_j}\Big\{f^p(t_{j+1}-t_j,x_j,x_{j+1},\bar{u}_j)(s)\Big\}e^{\frac{2\pi}{t}irs}ds$$

□

• *Definizione della mappa G*
Sia $\Theta(u,\tau)$ il flusso ad un parametro di diffeomorfismi su $\mathbb{R}^k$ che risolve l'equazione differenziale:

$$\frac{d}{d\tau}\Theta(u,\tau) = \frac{\nabla_u S(t,x,y,\Theta(u,\tau))}{||\nabla_u S(t,x,y,\Theta(u,\tau))||^2}$$

$$\Theta(u,0) = u \quad \forall u \in \mathbb{R}^k$$

dove $S(t,x,y,u)$ è la Funzione Generatrice descritta nel capitolo 1.
Si definisce la mappa $G(u,a)$ come:

$$\mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

$$(u,a) \longmapsto G(u,a) := \Theta(u, a - S(t,x,y,u))$$

Si osserva che i punti $G(u,a)$ ed u sono connessi dalla curva integrale generata dal campo vettoriale definito dal gradiente di $S(t,x,y,u)$, in quanto la mappa $\Theta(\cdot,\cdot)$ muove il parametro u lungo la curva integrale del campo vettoriale normalizzato, per un tempo $\tau = a - S(t,x,y,u)$ fino al punto $G(u,a)$.
In particolare se $S(t,x,y,u) = a$ allora la mappa $G(\cdot,a)$ si riduce all'identità:

$$G(u,S(t,x,y,u)) = id(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}^k \quad \forall (t,x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$$

Verifichiamo inoltre la seguente fondamentale proprietà della mappa $G(\cdot,\cdot)$:

$$S(t,x,y,G(u,a)) = a$$

$\forall\ (t,x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \quad \forall\ u \in \mathcal{D}^+(a)\cup\mathcal{D}^-(a) \subset \mathbb{R}^k$.
Dove i domini corrispondono a:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^+(a) := \{u \in \mathbb{R}^k;\ 0 \neq \nabla_u S(t,x,y,v)\ \forall v \text{ che verifica}\\ a < S(t,x,y,v) \leq S(t,x,y,u)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^-(a) := \{u \in \mathbb{R}^k;\ 0 \neq \nabla_u S(t,x,y,v)\ \forall v \text{ che verifica}\\ S(t,x,y,u) \leq S(t,x,y,v) < a\}\end{aligned}$$

Infatti dato che in questi sottoinsiemi di $\mathbb{R}^k$ non ci sono punti critici di $S(t,x,y,u)$, la mappa $G(\cdot,a)$ muove il parametro u lungo la linea integrale del campo vettoriale $\nabla_u S(t,x,y,u)$, non incontrando mai un punto critico di $S(t,x,y,u)$ fino al punto $G(u,a)$. Del resto la normalizzazione del campo vettoriale sopra utilizzata, garantisce che:

$$\frac{d}{d\tau}S(t,x,y,\Theta(u,\tau)) = 1 \quad \forall (t,x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\,\forall (u,\tau) \in \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}$$

A seguito di tali considerazioni segue che:

$$S(t,x,y,G(u,a)) = S(t,x,y,\Theta(u,a-S(t,x,y,u)))$$

$$S(t,x,y,G(u,a)) = S(t,x,y,\Theta(u,0)) + \{a - S(t,x,y,u)\}$$

$$S(t,x,y,G(u,a)) = S(t,x,y,u) + \{a - S(t,x,y,u)\}$$

Infine si ottiene:

$$S(t,x,y,G(u,a)) = a \quad \forall u \in \mathcal{D}^+(a) \cup \mathcal{D}^-(a) \subset \mathbb{R}^k$$

L'eventuale presenza di punti critici nel complementare di $\mathcal{D}^+(a) \cup \mathcal{D}^-(a)$ non permette di verificare tale proprietà $\forall (u,\tau) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$, in quanto supponendo che $v \in \mathbb{R}^k$ sia tale che la curva integrale del campo vettoriale $+\nabla_u S(t,x,y,u)$ passante per v termini in un punto critico $\widetilde{u}$ il cui valore $S(t,x,y,\widetilde{u})$ verifica:

$$S(t,x,y,\widetilde{u}) < a$$

allora si ha che:

$$G(v;a) = \Theta(v; a - S(t,x,y,v) = \Theta(\widetilde{u}; a - S(t,x,y,\widetilde{u})) = \widetilde{u}$$

il punto (v,a) viene mandato nel punto critico $\widetilde{u}$ e di conseguenza vale la diseguaglianza:

$$S(t,x,y,G(v,a)) = S(t,x,y,\widetilde{u}) < a$$

e dunque l'uguaglianza non è verificata per (v,a).
Ma si è dimostrato nel capitolo 2 (vedi proposizione 2.1.1 e successiva osservazione 3) che sotto opportune ipotesi riguardanti la terna (t,x,y) la funzione $S(t,x,y,u)$ ammette un unico punto critico $\bar{u} \in \mathbb{R}^k$. Il problema che comporta l'esitenza di tale punto verrà considerato in seguito nella dimostrazione del Teorema 3.1.1.

• *Definizione della mappa F*
La composizione delle mappe $L(\cdot)$ e $G(\cdot)$ definisce dunque la mappa $F(\cdot) := G \circ L(\cdot)$ come:

$$CPC \xrightarrow{L} \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \xrightarrow{G} \mathbb{R}^k$$

$$\omega(s) \longmapsto L(\omega(s)) \longmapsto F(\omega(s)) := G \circ L(\omega(s))$$

$$\omega(s) \longmapsto T_N(\phi_\omega(s)) \longmapsto F(\omega(s)) := G(T_N(\phi_\omega(s))\,;\, A[\omega(s)])$$

$$\omega(s) \longmapsto F(\omega(s)) := \Theta(\,T_N(\phi_\omega(s))\,;\, A[\omega(s)] - S(t,x,y,T_N(\phi_\omega(s)))\,)$$

Osservazione 1
La mappa $F(\cdot)$ risulta continua, in quanto definita dalla composizione di funzioni continue.

Osservazione 2
Il significato operativo della mappa di riduzione $F(\cdot)$ consiste nell'associare ad ogni curva $\omega(s) \in CPC(t,x,y)/W$ (W di misura nulla, vedi Teorema 3.1.1) un parametro $u = F(\omega(s))$ che realizza mediante $S(t,x,y,u)$ il valore numerico dell'azione $A[\cdot]$ valutata in $\omega(s)$, ovvero:

$$A[\omega(s)] = S(t,x,y,F(\omega(s)))$$

Tale condizione risulta fondamentale per la procedura di riduzione dei path integral definiti su $CPC(t,x,y)$ in quanto dalla rappresentazione iniziale (vedi paragrafo 2.2):

$$\Phi(t,x,y) = \int_{CPC} \beta(A[\omega(s)])M(d\omega)$$

si ottiene l'integrale equivalente:

$$\Phi(t,x,y) = \int_{CPC} \beta(S(t,x,y,F(\omega(s))))M(d\omega)$$

$\forall \beta(\cdot) \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$
Ma tale forma permette l'applicazione, descritta in dettaglio nel paragrafo 3.3, del Teorema del cambio di variabili (vedi appendice B) che trasforma l'integrale come:

$$\Phi(t,x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} \beta(S(t,x,y,u))\rho(t,x,y,u)l(u)du$$

dove $\rho(t,x,y,u)l(u)$ è un'opportuna densità sullo spazio $\mathbb{R}^k$ con parametri (t,x,y) descritta nel paragrafo 3.2.

Osservazione 3
Si osserva che per la curva $\omega_0(s)$ classica in $CPC(t,x,y)$, che non possiede punti di discontinuità nella derivata, il parametro definito come $u = F(\omega_0(s))$ corrisponde al parametro $\bar{u}$ che risulta associato ad $\omega_0(s)$ per mezzo della procedura di riduzione di Amann-Conley-Zehnder, ovvero che verifica $\bar{u} = R(\omega_0(s))$ e $0 = \nabla_u S(t,x,y,\bar{u})$.
Infatti dato che $\omega_0(s)$ corrisponde ad una curva classica senza punti di discontinuità nella derivata allora risulta rappresentabile (vedi paragrafo 1.2) nella forma:

$$\omega_0(s) = \gamma(t,x,y,\bar{u})(s)$$

dove $\gamma(t,x,y,u)(s)$ con $u \in \mathbb{R}^k$ sono le curve generate dalla procedura di riduzione di Amann-Conley-Zehnder, e dove $\bar{u} = R(\omega_0(s)) = T_N(\phi_{\omega_0}(s))$ e $0 = \nabla_u S(t,x,y,\bar{u})$ cioè $\bar{u}$ corrisponde ad un punto critico di $S(t,x,y,u)$.
Il parametro critico $\bar{u}$ verifica $\bar{u} = G(\bar{u},a)$ $\forall a \in \mathbb{R}$ (la mappa G non modifica i parametri critici, vedi paragrafo precedente) e dunque ne consegue che $F(\omega_0(s)) = G \circ L(\omega_0(s)) = G(T_N(\phi_{\omega_0}(s))\,;\, A[\omega_0(s)]) = G(\bar{u}; A[\omega_0(s)]) = \bar{u}$.

Teorema 3.1.1
La mappa di riduzione $F(\cdot)$:

$$CPC(t,x,y) \longrightarrow \mathbb{R}^k$$
$$\omega(s) \longmapsto F(\omega(s)) := \Theta(\, T_N(\phi_\omega(s))\, ;\, A[\omega(s)] - S(t,x,y,T_N(\phi_\omega(s)))\,)$$

verifica le seguenti proprietà:

$$F^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)) \subset \mathcal{D} \tag{3}$$

$$A[\omega(s)] = S(t,x,y,F(\omega(s))) \quad \forall\, \omega(s) \in CPC \backslash W \text{ con} \int_W M(d\omega(s)) = 0 \tag{4}$$

$$\int_{F^{-1}(C)/CPC_0} M(d\omega(s)) = 0 \quad \forall C \subset \mathbb{R}^k \text{ con} \int_C du = 0 \tag{5}$$

Dimostrazione
(I) La proprietà:

$$F^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)) \subset \mathcal{D}$$

significa che la controimmagine della σ-algebra di Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ è contenuta nella σ-algebra $\mathcal{D}$ dell'insieme $CPC(t,x,y)$; per definizione allora la mappa $F(\cdot)$ è una mappa misurabile dallo spazio misurabile {CPC,$\mathcal{D}$} nello spazio misurabile $\{\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\}$.
Per definizione la σ-algebra di Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ è la piú piccola σ-algebra che contiene tutti gli aperti di $\mathbb{R}^k$.
La σ-algebra $\mathcal{D}$ dell'insieme $CPC(t,x,y)$ è generata dai sottoinsiemi del tipo:

$$\mathcal{D}[I_1, I_2, ...I_m; V_1, V_2, ...V_m] := \{\omega(s) \in CPC\, ;\, (t_j : \omega(t_j)) \in (I_j; V_j)\}$$

insieme delle curve $\omega(s)$ classiche a tratti con i tempi ed i punti di discontinuità $(t_j, \omega(t_j))$ con $j = 1, ...m$ appartenenti agli aperti $(I_j; V_j) \subset [0,t] \times \mathbb{R}^k$; tali sottoinsiemi generano anche una topologia per l'insieme $CPC(t,x,y)$.
La mappa $F(\cdot)$, come osservato in precedenza, è definita dalla composizione di funzioni continue, e questo garantisce che sia una funzione continua da $CPC(t,x,y)$ in $\mathbb{R}^k$.
Ne consegue che la controimmagine, tramite $F(\cdot)$, di un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^k$ corrisponde ad un aperto di $CPC(t,x,y)$, che corrisponde anche ad un elemento della σ-algebra $\mathcal{D}$.

(II) Dati i sottoinsiemi Ω_-, Ω_0, $\Omega_+ \subset CPC(t,x,y)$ definiti come:

$$\Omega_- := \{\, \omega(s) \in CPC(t,x,y)\,;\, S(t,x,y,R(\omega(s))) < A[\omega(s)] \,\}$$

$$\Omega_0 := \{\, \omega(s) \in CPC(t,x,y)\,;\, S(t,x,y,R(\omega(s))) = A[\omega(s)] \,\}$$

$$\Omega_+ := \{\, \omega(s) \in CPC(t,x,y)\,;\, S(t,x,y,R(\omega(s))) > A[\omega(s)] \,\}$$

si osserva facilmente che danno una decomposizione dell'insieme $CPC(t,x,y)$:

$$CPC(t,x,y) = \Omega_- \cup \Omega_0 \cup \Omega_+$$

Si vuole verificare la proprietà (4) su ciascuno dei sottoinsiemi $\Omega_-, \Omega_0, \Omega_+$ e di conseguenza dedurne la validità su tutto l'insieme $CPC(t,x,y)$.
• La restrizione della mappa $F(\cdot)$ al sottoinsieme Ω_0:

$$\Omega_0 \subset CPC(t,x,y) \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

$$\omega(s) \longmapsto F(\omega(s))$$

si semplifica come:

$$F(\omega(s)) = \Theta(R(\omega(s)); A[\omega(s)] - S(t,x,y,R(\omega(s))) = \Theta(R(\omega(s)); 0)$$

Ma la mappa $\Theta(u,\tau)$ è il flusso ad un parametro di diffeomorfismi generato dal campo vettoriale $+\nabla_u S(t,x,y,u)$, e dunque si ha che $\forall\ u \in \mathbb{R}^k$ risulta verificata:

$$\Theta(u;0) = u$$

Di conseguenza l'azione di $F(\cdot)$ su Ω_0 è così semplificata:

$$F(\omega(s)) = R(\omega(s)) \quad \forall \omega(s) \in \Omega_0$$

In conclusione si ottiene che la proprietà (4) è verificata $\forall\ \omega(s) \in \Omega_0$:

$$S(t,x,y,F(\omega(s))) = S(t,x,y,R(\omega(s))) = A[\omega(s)]$$

Si osserva che in Ω_0 è contenuta la curva $\omega_0(s)$ classica senza punti di discontinuità nella derivata che connette i punti y e x nel tempo t e che definisce l'insieme $CPC_0(t,x,y)$; a tale curva è associato il parametro $R(\omega_0)$ che coincide con l'unico punto critico $\bar{u}$ della Funzione Generatrice (per l'esistenza vedi paragrafo 1.4, per l'unicità 2.1).

- Consideriamo ora la restrizione della mappa $F(\cdot)$ al sottoinsieme Ω_-:

$$\Omega_- \subset CPC(t,x,y) \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

$$\omega(s) \longmapsto F(\omega(s))$$

e definiamo l'insieme:

$$W_- := \{\widetilde{\omega}(s) \in \Omega_- : \exists \tau \geq 0;\, \Theta(R(\widetilde{\omega}(s)), \tau) = \bar{u}\,,\, S(t,x,y,\bar{u}) < A[\widetilde{\omega}(s)]\}$$

Allora per tali curve si ha che:

$$F(\widetilde{\omega}(s)) = \Theta(R(\widetilde{\omega}(s)); A[\widetilde{\omega}(s)] - S(t,x,y,R(\widetilde{\omega}(s))) = \bar{u}$$

le curve vengono mandate, tramite $F(\cdot)$, nell'unico punto critico $\bar{u}$ di $S(t,x,y,u)$ e di conseguenza vale:

$$S(t,x,y,F(\widetilde{\omega}(s))) = S(t,x,y,\bar{u}) < A[\widetilde{\omega}(s)]$$

Questo significa che la proprietà (4) non è verificata in corrispondenza delle curve $\widetilde{\omega}(s) \in W_-$.
Si può scrivere comunque l'inclusione:

$$W_- \subset F^{-1}\{\bar{u}\}/\{\omega_0(s)\}$$

dove si evidenzia che la curva $\omega_0(s)$ non può essere contenuta nell'insieme W_- in quanto appartenente ad Ω_0. Esplicitando le k componenti della mappa $F(\cdot)$, si può scrivere:

$$W_- \subset \bigcap_{j=1,2,\ldots k} (F^j)^{-1}\{\bar{u}\}/\{\omega_0(s)\}$$

Dove si osserva che il sottoinsieme $F^{-1}\{\bar{u}\}$ corrisponde all'intersezione di k insiemi di livello e dunque, a seguito della definizione data nel paragrafo paragrafo 2.1 della misura sullo spazio di curve , risulta di misura nulla rispetto a $M(d\omega)$:

$$\int_{F^{-1}\{\bar{u}\}} M(d\omega) = 0$$

Utilizzando l'inclusione sopra vista, si ottiene dunque che:

$$\int_{W_-} M(d\omega) = 0$$

Per l'insieme $\Omega_-\backslash W_-$, non si pone il problema del punto critico $\bar{u}$ sopra analizzato, perciò la funzione $S(t,x,y,u)$ valutata sul parametro $F(\omega(s))$ assume il valore richiesto:

$$A[\omega(s)] = S(t,x,y,F(\omega(s))) \quad \forall\, \omega(s) \in \Omega_-\backslash W_- \subset CPC(t,x,y)$$

• Per la restrizione di $F(\cdot)$ all'insieme Ω_+:

$$\Omega_+ \subset CPC(t,x,y) \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

$$\omega(s) \longmapsto F(\omega(s))$$

si applica, in modo analogo, la dimostrazione del caso precedente e si deduce la proprietà (4) a meno di un sottoinsieme di misura nulla W_+:

$$A[\omega(s)] = S(t,x,y,F(\omega(s))) \quad \forall\, \omega(s) \in \Omega_+\backslash W_+ \subset CPC$$

• In conclusione a seguito dei punti precedenti è sufficente definire il sottoinsieme $W := W_- \cup W_+$ per ottenere:

$$A[\omega(s)] = S(t,x,y,F(\omega(s))) \quad \forall\, \omega(s) \in CPC\backslash W \subset CPC$$

dove $W \subset CPC(t,x,y)$ è di misura nulla secondo $M(d\omega)$ in quanto definito come l'unione di due insiemi di misura nulla.

(III) Si vuole dimostrare che la mappa di riduzione $F(\cdot)$ verifica la seguente proprietà:

$$\int_{F^{-1}(C)/CPC_0} M(d\omega) = 0 \quad \forall C \subset \mathbb{R}^k \,\text{con} \int_C du = 0$$

ovvero la controimmagine $F^{-1}(C)/\{CPC_0\} \subset CPC(t,x,y)$ di un insieme $C \subset \mathbb{R}^k$ di misura nulla secondo Lebesgue risulta anch'esso di misura nulla secondo $M(d\omega(s))$.
L'insieme $CPC_0(t,x,y) = \{\omega_0(s)\}$ va rimosso dal dominio di integrazione $F^{-1}(C)$, in quanto su di esso è concentrata una misura M_0 (vedi paragrafo 2.1) che non permette di verificare la proprietà sopra descritta.
Al fine di provare tale proprietà, si ricorda dapprima che Teorema di teoria della misura garantisce l'esistenza di una famiglia numerabile $\mathcal{F}$ di sfere $\{B_{r_\alpha}(u_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{F}}$ disgiunte e arbitrariamente piccole che ricoprono l'insieme C:

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \{B_{r_\alpha}(u_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{F}} : C \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{F}} B_{r_\alpha}(u_\alpha) \; \int_{\bigcup B_{r_\alpha}(u_\alpha)} du < \delta$$

Si procede poi nel valutare l'integrale:

$$\int_{F^{-1}(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{F}} B_{r_\alpha}(u_\alpha))/\{\omega_0\}} M(d\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{F}} \int_{F^{-1}(B_{r_\alpha}(u_\alpha))/\{\omega_0\}} M(d\omega)$$

e ci si riduce a calcolare gli integrali sui sottoinsiemi disgiunti $F^{-1}(B_{r_\alpha}(u_\alpha))/\{\omega_0\}$ relativi alle controimmagini delle sfere di raggio arbitrariamente piccolo. Ma ognuno di tali sottoinsiemi verifica l'inclusione:

$$F^{-1}(B_{r_\alpha}(u_\alpha)) \subset A^{-1}\Big(\inf_{u\in B_{r_\alpha}(u_\alpha)} S\,;\ \sup_{u\in B_{r_\alpha}(u_\alpha)} S\Big)$$

Infatti, come osservato nel punto precedente, la mappa F è stata costruita in modo tale che $S(t,x,y,F(\omega(s))) = A[\omega(s)]$ a meno di un sottoinsieme W di misura nulla e da questo segue facilmente l'inclusione sopra descritta.
Grazie al fatto che le sfere possono essere scelte con raggio r_α arbitrariamente piccolo, risulta dunque possibile considerare il limite degli integrali per il valore di δ che converge a zero:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{A^{-1}(\inf_{u\in B_{r_\alpha}(u_\alpha)} S\,;\,\sup_{u\in B_{r_\alpha}(u_\alpha)} S)/\{\omega_0\}} M(d\omega) =$$

che equivale al valore dell'integrale valutato sul dominio limite:

$$= \int_{A^{-1}[S(t,x,y,u_\alpha)]/\{\omega_0\}} M(d\omega) = 0$$

Il dominio corrisponde ad un insieme di livello, in particolare del funzionale d'azione, e grazie alla definizione della misura $M(d\omega)$, tale integrale deve essere nullo.
Dall'inclusione sopra vista segue anche il seguente limite:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{F^{-1}\{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{F}} B_{r_\alpha}(u_\alpha)\}/\{\omega_0\}} M(d\omega) = 0$$

Utilizzando l'inclusione iniziale del Teorema di teoria della misura citato si ha che:

$$F^{-1}\{C\} \subset F^{-1}\{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{F}} B_{r_\alpha}(u_\alpha)\} \quad \forall\,\delta > 0$$

Si conclude infine che anche l'integrale sul dominio $F^{-1}\{C\}/\{\omega_0\}$ deve essere nullo:

$$\int_{F^{-1}\{C\}/\{\omega_0\}} M(d\omega) = 0$$

$\square$

3.2 Misura di riduzione

La mappa di riduzione $F(\cdot)$ da $CPC(t,x,y)$ in $\mathbb{R}^k$ risulta, come visto nel Teorema 3.1.1, una mappa misurabile dallo spazio misurabile {CPC,$\mathfrak{D}$} nello spazio misurabile $\{\mathbb{R}^k, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)\}$ [8]; di conseguenza è possibile definire una mappa $F_\star[\cdot]$ detta *la mappa di push-forward* di $F(\cdot)$, che manda la classe generale di misure σ-finite $M(d\omega)$ definite su $CPC(t,x,y)$ (vedi paragrafo 2.1) in una classe di misure σ-finite $d\nu_{(t,x,y)}(u)$:=$F_\star[M(d\omega)]$ su $\mathbb{R}^k$ nel seguente modo:

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k) & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ C & \longmapsto & \displaystyle\int_C d\nu_{(t,x,y)}(u) = \int_C F_\star[M(d\omega)] := \int_{F^{-1}(C)} M(d\omega) \end{array}$$

misure ben definite sulla σ-algebra di Borel $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$ e dove la dipendenza dai parametri t,x,y si vedrà essere di tipo C^2.
Nel Teorema 3.2.2 si dimostrerà che per una certa classe di misure σ-finite $M^R(d\omega)$, più ristretta di quella generale, la classe di misure $d\nu_{(t,x,y)}(u)$ corrispondenti risultano assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue $L = du$.
La derivata di Radon-Nikodym (vedi appendice A) della misura $d\nu_{(t,x,y)}(u)$ rispetto alla misura di Lebesgue L, permetterà di determinare una funzione $\rho(t,x,y,u)$ da $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}$, detta *funzione densità sullo spazio dei parametri* con dipendenza C^2 da (t,x,y) e L^1 dalla variabile u, tale che la corrispondente misura:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ C & \longmapsto & \displaystyle\int_C \rho(t,x,y,u)du \end{array}$$

risulti equivalente alla misura $d\nu_{(t,x,y)}(u)$, ovvero:

$$\int_C d\nu_{(t,x,y)}(u) = \int_C \rho(t,x,y,u)du \qquad \forall C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$$

Questo permetterà di concludere che $F(\cdot)$ è un morfismo dallo spazio di probabilità $\{CPC; \mathfrak{D}; M^R(d\omega)\}$ nello spazio $\{\mathbb{R}^k; \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k); \rho(t,x,y,u)du\}$.

[8] $F^{-1}(\mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)) \subset \mathfrak{D}$

Proposizione 3.2.1
La mappa di riduzione $F(\cdot)$:

$$CPC \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

$$\omega(s) \longmapsto F(\omega(s))$$

è un morfismo dallo spazio di probabilità $\{CPC; \mathcal{D}; M(d\omega)\}$ nello spazio di probabilità $\{\mathbb{R}^k; \mathcal{B}(\mathbb{R}^k); d\nu_{(t,x,y)}(u)\}$.

Dimostrazione
Nel Teorema 3.1.1 si è verificato che:

$$F^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)) \subset \mathcal{D}$$

ovvero $F(\cdot)$ risulta una mappa misurabile dallo spazio misurabile {CPC,$\mathcal{D}$} nello spazio misurabile $\{\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\}$.
Fissta una misura $M(d\omega)$ nella classe generale vista, si costruisce di conseguenza la misura $d\nu_{(t,x,y)}(u) := F_\star[M(d\omega)]$ come:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

$$C \quad \longmapsto \quad \int_C d\nu_{(t,x,y)}(u) := \int_C F_\star[M(d\omega)] = \int_{F^{-1}(C)} M(d\omega)$$

tale misura è il push-forwarf della misura $M(d\omega)$ per mezzo della mappa misurabile $F(\cdot)$.
Per definizione la mappa di riduzione è dunque un morfismo dallo spazio di probabilità $\{CPC; \mathcal{D}; M(d\omega)\}$ (vedi paragrafo 2.1) nello spazio di probabilità $\{\mathbb{R}^k; \mathcal{B}(\mathbb{R}^k); d\nu_{(t,x,y)}(u)\}$.
$\square$

Teorema 3.2.2 : Misura equivalente
Considerata un'opportuna classe di misure $M^R(d\omega)$ su $CPC(t,x,y)$, si dimostra che la classe di misure corrispondenti:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$C \longmapsto \nu_{(t,x,y)}(C) = \int_C d\nu_{(t,x,y)}(u) := \int_C F_\star[M^R(d\omega)] = \int_{F^{-1}(C)} M^R(d\omega)$$

risultano assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue.
Per ognuna di tali misure σ-finite esiste dunque una misura $\rho(t,x,y,u)du$ equivalente, ovvero che verifica:

$$\int_C d\nu_{(t,x,y)}(u) = \int_C \rho(t,x,y,u)du \quad \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$$

Dimostrazione
La particolare classe di misure $M^R(d\omega)$ qui considerate saranno quelle concentrate sull'insieme $CPC(t,x,y)/CPC_0(t,x,y)$ dove per definizione si ha che $CPC_0(t,x,y) := \{\omega_0(s)\}$ con $\omega_0(s)$ la curva classica senza discontinuità che connette i punti y e x nel tempo t. Le misure trattate sono dunque quelle che verificano:

$$\int_{CPC_0} M^R(d\omega) = 0$$

ovvero associano misura nulla all' insieme puntuale $CPC_0(t,x,y)$.
Dalla definizione di misura immagine, la σ-finitezza di $M^R(d\omega)$ implica facilmente anche quella della misura $d\nu_{(t,x,y)}(u)$.
Si vuole ora dimostrare che la misura $d\nu_{(t,x,y)}(u)$ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue du; ovvero si vuole verificare che:

$$0 = \int_C du \to \int_C d\nu_{(t,x,y)}(u) = 0 \quad \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$$

gli insiemi $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ di misura nulla secondo Lebesgue lo sono anche secondo la misura $d\nu_{(t,x,y)}(u)$.
Tale proprietà si deduce subito dalla proprietà della mappa $F(\cdot)$ (vedi Teorema 3.1.1), verificata per la classe generale di misure $M(d\omega)$:

$$\int_{F^{-1}(C)/\{\omega_0\}} M(d\omega(s)) = 0 \quad \forall C \subset \mathbb{R}^k \, con \int_C du = 0$$

Infatti utilizzando la particolare classe di misure M^R si riconosce che deve valere:

$$\int_{F^{-1}(C)} M^R(d\omega) = 0 \quad \forall C \subset \mathbb{R}^k \, con \int_C du = 0$$

Dalla definizione della misura $d\nu_{(t,x,y)}(u)$ segue allora immediatamente l'assoluta continuità:

$$0 = \int_C du \to \int_{F^{-1}(C)} M^R(d\omega(s)) = 0 \to \int_C d\nu_{(t,x,y)}(u) = 0 \quad \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$$

Il Teorema di Radon-Nikodym (vedi appendice A) garantisce l'esistenza di una funzione $\rho(t,x,y,u) \in L^1$:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

$$(t,x,y,u) \mapsto \rho(t,x,y,u) := \frac{d\nu_{(t,x,y)}(u)}{dL(u)}$$

detta la derivata di Radon-Nikodym della misura σ-finita $d\nu_{(t,x,y)}(u)$ rispetto ad L, tale che la misura costruita come:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

$$C \quad \longmapsto \quad \int_C \rho(t,x,y,u)du$$

sia equivalente alla misura $d\nu_{(t,x,y)}(u)$.
Si conclude dunque che:

$$\int_C d\nu_{(t,x,y)}(u) = \int_C \rho(t,x,y,u)du \quad \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$$

Utilizzando la forma esplicita delle misure $M^R(d\omega)$ (vedi paragrafo 2.1) è facile verificare che la dipendenza C^2 che tali misure possiedono dalle variabili (t,x,y) implica un'analoga dipendenza per le misure immagine $d\nu_{(t,x,y)}(u)$ e di conseguenza per le funzioni densità $\rho(t,x,y,u)$.
Dall'equivalenza della misura $\rho(t,x,y,u)du$ con la misura $d\nu_{(t,x,y)}(u)$ segue inoltre facilmente che $F(\cdot)$ è un morfismo anche per lo spazio di probabilità $\{\mathbb{R}^k; \mathcal{B}(\mathbb{R}^k); \rho(t,x,y,u)du\}$.
$\square$

Osservazione
La determinazione della densità $\rho(t,x,y,u)$ si effettua per mezzo della derivata di Radon-Nikodym:

$$\rho(t,x,y,u) := \frac{d\nu_{(t,x,y)}(u)}{dL(u)}$$

Tale derivata si può calcolare esplicitamente per mezzo della formula (vedi [22]):

$$\rho(t,x,y,u_1) = \lim_{r\to 0} \frac{\int_{B_r(u_1)} d\nu_{(t,x,y)}(u)}{\int_{B_r(u_1)} du}$$

Utilizzando la definizione della misura $d\nu_{(t,x,y)}(u)$, si ottiene:

$$\rho(t,x,y,u_1) = \lim_{r\to 0} \frac{\int_{F^{-1}(B_r(u_1))} M^R(d\omega)}{\int_{B_r(u_1)} du}$$

Ma per determinare il numeratore bisogna dunque calcolare il path integral sul dominio $F^{-1}(B_r(u_1)) \subset CPC(t,x,y)$.
Si ricorda però che i sottoinsiemi finito dimensionali $CPC_{\leq m}(t,x,y)$ delle curve classiche a tratti che hanno al massimo m punti di discontinuità corrispondono per definizione a:

$$CPC_{\leq m}(t,x,y) := \bigcup_{j\leq m} CPC_j(t,x,y)$$

Inoltre l'intero insieme $CPC(t,x,y)$ è definito come:

$$CPC(t,x,y) := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} CPC_j(t,x,y)$$

Si deduce allora che dopo aver determinato le densità approssimate:

$$\rho_m(t,x,y,u_1) = \lim_{r\to 0} \frac{\int_{F^{-1}(B_r(u_1))\cap CPC_{\leq m}} M_R(d\omega)}{\int_{B_r(u_1)} du}$$

la densità $\rho(t,x,y,u)$ è il limite della successione:

$$\rho(t,x,y,u_1) = \lim_{m\to\infty} \rho_m(t,x,y,u_1)$$

dove il limite è nel senso di L^1.

3.3 Riduzione di Path Integral

Teorema 3.3.1
La classe generale di path integral:

$$\Phi(t,x,y)=\int_{CPC(t,x,y)}\beta(A[\omega(s)])\,M(d\omega)$$

definita nel paragrafo 3.2, ammette la riduzione ad una classe di integrali finito dimensionali:

$$\Phi(t,x,y)=\int_{\mathbb{R}^k}\beta(S(t,x,y,u))\rho(t,x,y,u)du$$

Dove $S(t,x,y,u)$ è la Funzione Generatrice della sottovarietà Lagrangiana rappresentante la trasformazione canonica $\phi_H^t(q,p)$ relativa all'Hamiltoniana $H(q,p)=\frac{p^2}{2m}+V(q)$, mentre $\rho(t,x,y,u)$ sono opportune densità sullo spazio dei parametri con dipendenza L^1 nella variabile u e dipendenza C^2 nelle variabili (t,x,y).

Dimostrazione
Un path integral del tipo:

$$\Phi(t,x,y)=\int_{CPC(t,x,y)}\beta(A[\omega(s)])\,M(d\omega)$$

si calcola, a seguito della definizione data nel paragrafo 2.2, per mezzo della serie:

$$\Phi(t,x,y)=\beta\Big(S(t;x;y;\bar{u}(t,x,y))\Big)M_0(t,x,y)+$$
$$+\sum_{m=1}^{m=\infty}\int_{\mathcal{P}_m(t,x,y)}\beta\Big(\sum_{r=0}^{r=m}S(t_{r+1}-t_r,x_r,x_{r+1},\bar{u}(x_r,x_{r+1},t_{r+1}-t_r))\Big)\cdot$$
$$\cdot\bar{M}_m(t,x,y;t_j,x_j)\,dt_1dt_2dt_j...dt_mdx_1dx_2dt_j...dx_m$$

dove, relativamente al m-esimo integrale, si ha che $t_0=0$, $t_{m+1}=t$, $x_0=y$ e $x_{m+1}=x$.
Ma si dimostra ora che è possibile cambiare la misura $M(d\omega)$ definita su $CPC(t,x,y)$ in una misura $M^R(d\omega)$ concentrata su $CPC(t,x,y)/CPC_0(t,x,y)$, in modo che il path integral costruito con la medesima funzione integranda sia equivalente:

$$\Phi(t,x,y)=\int_{CPC(t,x,y)}\beta(A[\omega(s)])\,M(d\omega)=\int_{CPC(t,x,y)}\beta(A[\omega(s)])\,M^R(d\omega)$$

A tale scopo basta infatti definire le nuove funzioni di densità:

$$\bar{M}_0^R(t,x,y;t_j,x_j) := 0$$

$$\bar{M}_1^R(t,x,y;t_1,x_1) := \beta\Big(S(t;x;y;\bar{u}(t,x,y))\Big)M_0(t,x,y)\mu(t_1,x_1)+\bar{M}_1(t,x,y;t_1,x_1)$$

con la funzione $\mu(t_1,x_1)$ che verifica il vincolo:

$$1 = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \mu(t_1,x_1)\sum_{r=0}^{r=1} S(t_{r+1}-t_r, x_r, x_{r+1}, \bar{u}(x_r, x_{r+1}, t_{r+1}-t_r))dt_1 dx_1$$

mentre le restanti densità per $m \geq 2$ si possono lasciare inalterate:

$$\bar{M}_m^R(t,x,y;t_j,x_j) := \bar{M}_m(t,x,y;t_j,x_j)$$

Si verifica facilmente che utilizzando tali densità per definire la misura $M^R(d\omega)$, il path integral così costruito risulta equivalente a quello precedente, relativo alle densità $\bar{M}_m$ e dunque alla misura $M(d\omega)$.
Si ricorda ora che la mappa di riduzione $F(\cdot)$ definita nel paragrafo 3.1 verifica, come dimostrato nel Teorema 3.1.1, la seguente proprietà:

$$A[\omega(s)] = S(t,x,y,F(\omega(s))) \quad \forall\, \omega(s) \in CPC\backslash W \; con \int_W M^R(d\omega(s)) = 0$$

Dunque nel path integral può essere cambiata la funzione integranda:

$$\Phi(t,x,y) = \int_{CPC(t,x,y)} \beta(A[\omega(s)])M^R(d\omega) = \int_{CPC(t,x,y)} \beta(S(t,x,y,F(\omega))\,)M^R(d\omega)$$

Ma nella proposizione 3.2.1 si è dimostrato che la mappa di riduzione $F(\cdot)$ risulta un morfismo fra lo spazio di probabilità $\{CPC;\mathfrak{D};M^R(d\omega)\}$ e lo spazio di probabilità $\{\mathbb{R}^k;\mathfrak{B}(\mathbb{R}^k);d\nu_{(t,x,y)}(u)\}$. Ovvero $F(\cdot)$ risulta una mappa misurabile dallo spazio misurabile $\{\text{CPC},\mathfrak{D}\}$ nello spazio misurabile $\{\mathbb{R}^k,\mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)\}$ ed inoltre la misura $d\nu_{(t,x,y)}(u) := F_\star[M^R(d\omega)]$ è definita per mezzo della mappa di push forward $F_\star[\cdot]$ applicata sulla misura $M^R(d\omega)$.
L'esistenza del morfismo $F(\cdot)$ da $CPC(t,x,y)$ in $\mathbb{R}^k$ permette dunque di applicare il Teorema del cambio di variabili (vedi appendice B), per trasformare il path integral:

$$\Phi(t,x,y) = \int_{CPC(t,x,y)} \beta(S(t,x,y,F(\omega))\,)M^R(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^k} \beta(S(t,x,y,u))d\nu_{(t,x,y)}(u)$$

La trasformazione del path integral consiste dunque nel cambiamento del dominio di integrazione da $CPC(t,x,y)$ nello spazio vettoriale finito dimensionale $\mathbb{R}^k$, nell' integrazione rispetto alla misura σ-finita $d\nu_{(t,x,y)}(u)$, e nella

riduzione ad una funzione integranda definita come la mappa $\beta(\cdot)$ composta con la Funzione Generatrice $S(t,x,y,u)$ associata al problema di Hamilton-Jacobi.
Il Teorema 3.2.2 garantisce che avendo utilizzato $M^R(d\omega)$, la misura corrispondente $d\nu_{(t,x,y)}(u)$ possiede una misura equivalente $\rho(t,x,y,u)du$. Si conclude così che l'integrale sopra ottenuto può essere modificato come:

$$\Phi(t,x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} \beta(S(t,x,y,u))\rho(t,x,y,u)du$$

La funzione densità $\rho(t,x,y,u)$, come visto in tale teorema, ha una dipendenza C^2 nei parametri (t,x,y) mentre risulta L^1 nella variabile u; tale dipendenza si deduce perciò anche per $\Phi(t,x,y)$.
$\square$

CAPITOLO 4. RAPPRESENTAZIONE FINITA ESATTA DEL PROPAGATORE

In questo capitolo si considera la rappresentazione mediante path initegral dei nuclei dei propagatori associati alle equazioni di Fokker-Planck e di Schrödinger descritta nel capitolo 2 e per mezzo della procedura di riduzione sviluppata nel capitolo precedente, si ottiene la rappresentazione integrale finito dimensionale esatta di tali nuclei.
Nell'ultimo paragrafo si verificherà in modo esplicito come il semplice caso particolare dell'equazione del calore esibisca tali rappresentazioni integrali.

4.1 Il propagatore finito di Schrödinger

Teorema 4.1.1
Dato il potenziale $V(x) \in L^2 \cap C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$ *tale che:*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |V(x)| = V^0 < +\infty$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial V}{\partial x^i}(x)\right| = V_i' < +\infty \quad \forall i = 1, 2, ...n$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^i \partial x^j}\right| = V_{i,j}'' < +\infty \quad \forall i, j = 1, 2, ...n$$

Il problema di Cauchy per l'equazione di Schrödinger,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi_S(t,x) + V(x)\psi_S(t,x) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_S(t,x)$$

$$\psi_S(0,x) = \phi(x)$$

ammette la soluzione, per $t \in [0,T]$, *nella rappresentazione:*

$$\psi_S(t,x) = e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\phi = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_S(t,x,y)\phi(y)dy$$

dove il nucleo del propagatore corrisponde:

$$\Phi_S(t,x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(t,x,y,u)\right\}\rho_S(t,x,y,u)du$$

Dimostrazione
Sulla base delle ipotesi di limitatezza del potenziale e delle sue derivate e considerando $t \in [0,T]$, si ha che la rappresentazione integrale infinito dimensionale del nucleo del propagatore descritta nel paragrafo 2.3 corrisponde al seguente limite di path integrals:

$$\Phi_S(t,x,y) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \Phi_S^\epsilon(t,x,y)$$

$$\Phi_S(t,x,y) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{CPC(t,x,y)} \exp\left\{-\frac{1}{(i+\epsilon)\hbar}A[\omega(s)]\right\} M_S^\epsilon(d\omega)$$

Ma la procedura di riduzione sviluppata nel capitolo precedente, si applica alla classe generale di path integrals del tipo:

$$\Phi(t,x,y) = \int_{CPC(t,x,y)} \beta(A[\omega(s)])\, M(d\omega)$$

dove la mappa $\beta(\cdot) \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, e dove $M(d\omega)$ corrisponde alla classe generale di misure σ-finite e complesse definite su $CPC(t,x,y)$ nel paragrafo 2.1. Tale procedura effettua la trasformazione del path integral nell'integrale finito dimensionale:

$$\Phi(t,x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} \beta(S(t,x,y,u))\rho(t,x,y,u)du$$

La densità $\rho(t,x,y,u)$ si determina come (vedi paragrafo 3.2):

$$\rho(t,x,y,u) = \frac{d\nu_{(t,x,y)}(u)}{dL(u)} = \frac{dF_\star[M]}{dL(u)}$$

La derivata di Radon-Nikodym, rispetto alla misura di Lebesgue $L = du$, della misura immagine tramite $F(\cdot)$ della misura $M(d\omega)$. Tale densità possiede una dipendenza C^2 dalle variabili (t,x,y), grazie all'analoga dipendenza che la misura $M(d\omega)$ possiede da tali variabili; il Teorema di Radon-Nikodym (vedi appendice A) garantisce inoltre che la dipendenza di tale funzione nella variabile u sia di tipo L^1.
Questa classe generale di path integrals, contiene in particolare il path integral che rappresenta il nucleo dell'equazione di Schrödinger sopra visto in quanto basta porre:

$$\beta^\epsilon(\tau) := \exp\Big(- \frac{1}{(i+\epsilon)\hbar}\tau\Big)$$

$$M^\epsilon(d\omega) := M^\epsilon_S(d\omega)$$

Di conseguenza la riduzione è applicabile su $\Phi^\epsilon_S(t,x,y)$ con il parametro $\epsilon > 0$ fissato, ottenendo così la sua rappresentazione integrale finito dimensionale.

$$\Phi^\epsilon_S(t,x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} \exp\Big\{ - \frac{1}{(i+\epsilon)\hbar} S(t,x,y,u)\Big\}\rho^\epsilon_S(t,x,y,u)du$$

Con la densità $\rho^\epsilon_S(t,x,y,u)$ che dipenderà in modo continuo dal parametro $\epsilon > 0$ dato che la misura $M^\epsilon_S(d\omega)$ dipende da esso in modo continuo (vedi paragrafo 2.3) e dato che si determina mediante la derivata di Radon-Nikodym.

$$\rho^\epsilon_S(t,x,y,u) = \frac{d\nu^S_{(t,x,y,\epsilon)}(u)}{dL(u)} = \frac{dF_\star[M^\epsilon_S]}{dL(u)}$$

Ma l'operazione di limite nel parametro ϵ, che risulta applicabile per i path integrals come dimostrato nel paragrafo 2.3, risulta applicabile anche per gli integrali di Lebesgue a parametro ϵ:

$$\Phi_S(t,x,y) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^k} \exp\Big\{ - \frac{1}{(i+\epsilon)\hbar} S(t,x,y,u)\Big\}\rho_S(t,x,y,u,\epsilon)du$$

Del resto esiste il limite della funzione integranda:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \exp\Big\{-\frac{1}{(i+\epsilon)\hbar}S(t,x,y,u)\Big\} = \exp\Big\{\frac{i}{\hbar}S(t,x,y,u)\Big\}$$

Esiste anche il limite della densità:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \rho_S^\epsilon(t,x,y,u) = \rho_S^0(t,x,y,u)$$

grazie alla dipendenza continua dal parametro ϵ; la densità limite si calcolerà dunque come:

$$\rho_S(t,x,y,u) := \rho_S^0(t,x,y,u) = \frac{d\nu^S_{(t,x,y,0)}(u)}{dL(u)} = \frac{dF_\star[M_S^0]}{dL(u)}$$

Ne consegue che risulta applicabile il Teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale:

$$\Phi_S(t,x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} \lim_{\epsilon\to 0^+} \exp\Big\{-\frac{1}{(i+\epsilon)\hbar}S(t,x,y,u)\Big\}\rho_S^\epsilon(t,x,y,u)du$$

Utilizzando i limiti sopra scritti si ottiene la rappresentazione finale:

$$\Phi_S(t,x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} \exp\Big\{\frac{i}{\hbar}S(t,x,y,u)\Big\}\rho_S(t,x,y,u)du$$

Con la densità $\rho_S(t,x,y,u)$ che ha una dipendenza C^2 dai parametri (t,x,y) mentre è L^1 nella variabile u.
$\square$

4.2 Il propagatore finito di Fokker-Planck

Teorema 4.2.1
Dato il potenziale $V(x) \in L^2 \cap C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$ *tale che:*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |V(x)| = V^0 < +\infty$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial V}{\partial x^i}(x) \right| = V_i' < +\infty \quad \forall i = 1, 2, ...n$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^i \partial x^j} \right| = V_{i,j}'' < +\infty \quad \forall i, j = 1, 2, ...n$$

Il problema di Cauchy per l'equazione di Fokker-Planck,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \triangle \psi_{F-P}(t,x) + V(x)\psi_{F-P}(t,x) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{F-P}(t,x)$$

$$\psi_{F-P}(0,x) = \phi(x)$$

ammette la soluzione, per $t \in [0,T]$, *nella rappresentazione integrale:*

$$\psi_{F-P}(t,x) = \Phi_{F-P}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{F-P}(t,x,y)\phi(y)dy$$

dove il nucleo corrisponde:

$$\Phi_{F-P}(t,x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\frac{1}{\lambda}S(t,x,y,u)} \rho_{F-P}(t,x,y,u)du$$

Dimostrazione
Sulla base delle ipotesi di limitatezza delle derivate del potenziale e considerando $t \in [0,T]$ si è dimostrata nel paragrafo 2.4 la rappresentazione integrale infinito dimensionale del nucleo del propagatore, che corrisponde al seguente path integral:

$$\Phi_{F-P}(t,x,y) = \int_{CPC(t,x,y)} e^{-\frac{1}{\lambda}A[\omega(s)]} M_{F-P}(d\omega)$$

Applicando la procedura di riduzione sviluppata nel capitolo precedente, si ottiene la rappresentazione integrale finito dimensionale:

$$\Phi_{F-P}(t,x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\frac{1}{\lambda}S(t,x,y,u)} \rho_{F-P}(t,x,y,u)du$$

La densità $\rho_{F-P}(t,x,y,u)$, come dimostrato nel paragrafo 3.2, si ottiene come:

$$\rho_{F-P}(t,x,y,u) = \frac{d\nu^{F-P}_{(t,x,y)}(u)}{dL(u)} = \frac{dF_\star[M_{F-P}]}{dL(u)}$$

la derivata di Radon-Nikodym rispetto alla misura di Lebesgue $L = du$ della misura immagine, tramite $F(\cdot)$, della misura M_{F-P}.
Tale densità $\rho_{F-P}(t,x,y,u)$ possiede una dipendenza C^2 dai parametri (t,x,y) mentre ha una dipendenza di tipo L^1 nella variabile u.
□

4.3 L'equazione del calore

L'equazione del calore:

$$\triangle\psi_C(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\psi_C(t,x)$$

$$\psi_C(0,x) = \phi(x)$$

viene risolta con il propagatore in forma integrale:

$$\psi_C(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_C(t,x,y)\phi(y)dy$$

dove il nucleo corrisponde alla nota formula:

$$\Phi_C(t,x,y) = \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}$$

Tale equazione è un caso particolare dell'equazione di Fokker-Planck e perciò si vuole verificare direttamente che il suo nucleo $\Phi_C(t,x,y)$ ammette la rappresentazione integrale di Kolokoltsov:

$$\Phi_C(t,x,y) = \int_{CPC(t,x,y)} e^{-A[\omega(s)]} M_C(d\omega)$$

Dove funzionale $A[\cdot]$ corrisponde al funzionale d'azione definito per mezzo dell'Hamiltoniana $H_0 = p^2$:

$$CPC(t,x,y) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega(s) \longmapsto A[\omega(s)] := \int_0^t \frac{1}{2}\dot{\omega}^2(s)ds$$

Mentre la misura $M_C(d\omega)$ si ottiene come caso particolare della misura $M_{F-P}(d\omega)$ trattata nel paragrafo precedente. In questo caso il potenziale $V(x)$ è nullo e dunque la misura si concentra sulla retta $\omega_0(s)$ (che coincide con la curva classica relativa ad H_0) che connette i punti y e x nel tempo t:

$$\int_\Omega M_C(d\omega) = \begin{cases} (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} & \text{se } \omega_0(s) \in \Omega \\ 0 & \text{se } \omega_0(s) \notin \Omega \end{cases}$$

Dunque il path integral sopra descritto si concentra sulla retta $\omega_0(s)$:

$$\int_{CPC(t,x,y)} e^{-A[\omega(s)]} M_C(d\omega) = \int_{\{\omega_0(s)\}} e^{-A[\omega(s)]} M_C(d\omega) =$$

$$= e^{-A[\omega_0(s)]} \int_{\{\omega_0(s)\}} M_C(d\omega) = e^{-A[\omega_0(s)]}(2\pi t)^{-\frac{n}{2}} =$$

$$= e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}(2\pi t)^{-\frac{n}{2}} = \Phi_C(t,x,y)$$

Si conclude perciò che la rappresentazione integrale infinito dimensionale di $\Phi_C(t,x,y)$, anche se di carattere degenere, risulta corretta.
Si vuole inoltre verificare direttamente che la procedura di riduzione del nucleo del propagatore permette la rappresentazione finito dimensionale:

$$\Phi_C(t,x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-S_0(t,x,y,u)} d\nu_{C\,(t,x,y)}(u) du$$

dove però la misura $d\nu_{C\,(t,x,y)}(u)$ sullo spazio dei parametri non risulta assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue; questo succede a causa del carattere singolare della misura $M_C(d\omega)$ sopra descritta.
La funzione $S_0(t,x,y,u)$ corrisponde alla Funzione Generatrice globale associata all'Hamiltoniana $H_0 = p^2$ (vedi capitolo 1):

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t,x,y,u) \longmapsto S_0(t,x,y,u) = +\frac{|x-y|^2}{2t} + \langle A(t)u; u\rangle$$

dove $A(t)$ è una matrice non dengenere.
La misura $M_C(d\omega)$ induce, per mezzo della mappa di riduzione $F(\cdot)$ (vedi paragrafo 3.2) la misura $d\nu_{C\,(t,x,y)}(u)$ su $\mathbb{R}^k$:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

$$U \quad \longmapsto \quad \int_U d\nu_{C\,(t,x,y)}(u) := \int_U F_\star[M_C(d\omega)] = \int_{F^{-1}(U)} M_C(d\omega)$$

Dato che la mappa di riduzione manda la retta $\omega_0(s)$ nel parametro $u = 0 \in \mathbb{R}^k$:

$$F(\omega_0(s)) = 0$$

ne consegue che la misura $d\nu_{C\,(t,x,y)}(u)$ è concentrata attorno al parametro nullo:

$$\int_U d\nu_{C\,(t,x,y)}(u) = \begin{cases} (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} & \text{se } u = 0 \in U \\ 0 & \text{se } u = 0 \notin U \end{cases}$$

ovvero in modo simbolico si può scrivere:

$$d\nu_{C\,(t,x,y)}(u) = (2\pi t)^{-\frac{n}{2}}\delta(u)$$

Conoscendo ora la forma esplicita della funzione $S_0(t,x,y,u)$ e della misura $d\nu_{C\,(t,x,y)}(u)$ si può verificare direttamente la correttezza della rappresentazione integrale finito dimensionale di $\Phi_C(t,x,y)$.
Ovvero si vuole verificare l'uguaglianza:

$$\left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-S_0(t,x,y,u)} d\nu_{C\,(t,x,y)}(u)$$

effettuando l'integrazione sullo spazio dei parametri $\mathbb{R}^k$.
L'espressione si verifica immediatamente in quanto si ottiene:

$$\int_{\mathbb{R}^k} e^{-S_0(t,x,y,u)} d\nu_{C\,(t,x,y)}(u) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t} - \langle A(t)u;u\rangle} (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \delta(u) du =$$

ma il termine quadratico $\langle A(t)u;u\rangle$ si annulla per $u=0$ e di conseguenza:

$$\int_{\mathbb{R}^k} e^{-S_0(t,x,y,u)} d\nu_{C\,(t,x,y)}(u) = \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}$$

APPENDICE A

Il teorema qui riportato è tratto dal libro di Robert B. Ash, Catherine A. Doleans-Dade: Probability and Measure Theory, seconda edizione; Harcourt Academic Press, 2000.

Teorema di Radon-Nikodym
Sia $\{\Omega;\mathcal{A}\}$ uno spazio misurabile, siano μ e λ due misure finite definite su Ω, con λ assolutamente continua rispetto a μ.
Allora esiste $\rho(\omega) \in L^1_\mu(\Omega;\bar{\mathbb{R}}^+)$, tale che:

$$\lambda(A) = \int_A \rho(\omega)\, d\mu(\omega) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Dimostrazione
Si definiscono dapprima:

$$\mathcal{S} := \left\{ f \in L^1_\mu(\Omega;\mathbb{R}^+) : \quad \int_A f(\omega)\, d\mu(\omega) \;\leq\; \lambda(A) \quad \forall A \in \mathcal{A} \right\}$$

$$s := \sup\left\{ \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) : \; f \in \mathcal{S} \right\} \leq \lambda(\Omega) < \infty$$

Si osserva poi che $\mathcal{S}$ è non vuoto e che risulta parzialmente ordinabile secondo la relazione:

$$f \leq g \iff f(\omega) \leq g(\omega) \text{ q.o.}$$

Fissati due elementi $f, g \in \mathcal{S}$ si indicherà l'elemento massimale con h=max(f,g). Se B è l'insieme tale che $f \geq g$ e C corrisponde all'insieme dove $f < g$, allora si verifica facilmente che:

$$\int_A h(\omega)\, d\mu(\omega) = \int_{A\cap B} f(\omega)\, d\mu(\omega) + \int_{A\cap C} g(\omega)\, d\mu(\omega)$$

$$\int_A h(\omega)\, d\mu(\omega) \leq \lambda(A\cap B) + \lambda(A\cap C) = \lambda(A)$$

Data una successione $f_1, f_2, ...f_n$ in $\mathcal{S}$ tale che $\int_\Omega f_n(\omega)\, d\mu(\omega) \to s$ si costruisce il corrispondente elemento massimale $\rho_n = max(f_1, f_2, ...f_n)$. Allora, utilizzando il Teorema della convergenza monotona ed il fatto che $\rho_n \geq f_n$, si deduce che $\rho_n \in \mathcal{S}$ e che:

$$\exists\; \rho := \lim_{n\to\infty} \rho_n$$

$$\int_\Omega \rho(\omega)\, d\mu(\omega) = s$$

Vediamo inoltre che $\rho \in \mathcal{S}$ utilizzando il fatto che:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \rho_n(\omega)\, d\mu(\omega) = \int_A \rho(\omega)\, d\mu(\omega) \quad A \in \mathcal{A}$$

e che per costruzione $\int_A \rho_n(\omega)\, d\mu(\omega) \leq \lambda(A)$, da cui si deduce:

$$\int_A \rho(\omega)\, d\mu(\omega) \leq \lambda(A) \quad A \in \mathcal{A}$$

ovvero $\rho \in \mathcal{S}$ ed è il suo elemento massimale.
Si definisce ora la misura:

$$\lambda_1(A) := \lambda(A) - \int_A \rho(\omega)\, d\mu(\omega)$$

e si osserva facilmente che risulta assolutamente continua rispetto a μ e che verifica $\lambda_1(\Omega) < \infty$.
Se λ_1 è identicamente nulla allora la tesi del teorema è dimostrata, in quanto $\rho(\omega)$ corrisponde alla funzione cercata. Altrimenti deve valere:

$$\mu(\Omega) - k\lambda_1(\Omega) < 0 \quad \text{per qualche } k > 0 \tag{6}$$

Ma si dimostra (vedi [24]) che in tal caso esiste $D \in \mathcal{A}$ tale che $\forall A \in \mathcal{A}$:

$$\mu(A \cap D) - k\lambda_1(A \cap D) \leq 0 \tag{7}$$

e

$$\mu(A \cap D^c) - k\lambda_1(A \cap D^c) \geq 0 \tag{8}$$

Inoltre deve essere $\mu(D) > 0$ perchè altrimenti se fosse $\mu(D) = 0$, grazie all'assoluta continuità di λ rispetto a μ si avrebbe $\lambda(D) = 0$ e dunque $\lambda_1(D) = 0$. Ma utilizzando ora la relazione (8) con $A = \Omega$ si otterrebbe:

$$0 \leq \mu(D^c) - k\lambda_1(D^c) = \mu(\Omega) - k\lambda_1(\Omega) < 0$$

che è una contraddizione, e dunque deve essere $\mu(D) > 0$.
Cosiderando la funzione $h(\omega)$ così definita:

$$h(\omega) = \begin{cases} 1/k & \text{se } \omega \in D \\ 0 & \text{se } \omega \in D^c \end{cases}$$

si ha che, grazie alla (7):

$$\int_A h(\omega) d\mu(\omega) = \frac{1}{k}\mu(A \cap D) \leq \lambda_1(A \cap D)$$

Dal fatto che $\mu(D) > 0$ si deduce la diseguaglianza:

$$\int_A h(\omega)d\mu(\omega) \leq \lambda_1(A) = \lambda(A) - \int_A \rho(\omega)\, d\mu(\omega)$$

Riordinando i termini si ottiene infine:

$$\int_A (h+g)(\omega)d\mu(\omega) \leq \lambda(A)$$

Ma $h + g > g$ sull'insieme D che è in contraddizione con il fatto prima dimostrato che g è l'elemento massimale di $\mathcal{S}$. Si conclude che deve necessariamente essere $\lambda_1 = 0$, da cui segue la tesi:

$$\lambda(A) = \int_A \rho(\omega)\, d\mu(\omega)$$

$\square$

Osservazione
Il teorema sopra riportato vale anche se λ e μ sono misure σ-finite. Infatti per definizione la σ-finitezza significa che:

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n \quad \lambda(\Omega_n) < +\infty \quad \mu(\Omega_n) < +\infty$$

l'insieme Ω è ricoperto dai sottoinsiemi disgiunti Ω_n sui quali λ e μ sono misure finite; basterà allora determinare la funzione ρ su ogni sottoinsieme per determinarla anche globalmente.

Notazione
È consuetudine chiamare la funzione $\rho(\omega)$ la derivata di Radon-Nykodym della misura λ rispetto alla misura μ, ed utilizzare il simbolo:

$$\rho = \frac{d\lambda}{d\mu}$$

APPENDICE B

Il teorema qui riportato è tratto dal libro di Paul Malliavin: Integration and Probability; Springer-Verlag, 1995.

Teorema del cambio di variabili
Siano $\{\Omega; \mathcal{A}; P\}$ *e* $\{\Omega'; \mathcal{A}'; P'\}$ *due spazi di probabilità, sia* F *un morfismo dal primo spazio nel secondo* [9].
Allora $\forall\ g' \in L^1_{P'}(\Omega'; \mathbb{C})$ *si ha che:*

$$g := g' \circ F \ \in L^1_P(\Omega; \mathbb{C}) \tag{9}$$

$$\int_\Omega g(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega'} g'(\omega') dP'(\omega') \tag{10}$$

Dimostrazione
Supponiano dapprima che g' sia una funzione semplice, ovvero che sia rappresentabile come:

$$g' = \sum \alpha_k \chi_{\mathcal{A}'_k}$$

Allora la corrispondente funzione $g := F^{-1} \circ g'$ si rappresenta come:

$$g = \sum \alpha_k \chi_{\mathcal{A}_k}, \quad \mathcal{A}_k := F^{-1}(\mathcal{A}'_k)$$

Ne consegue che si verifica immediatamente il punto (9), e che:

$$\int_\Omega g(\omega) dP(\omega) = \sum \alpha_k \int_{\mathcal{A}_k} dP(\omega) = \sum \alpha_k \int_{F^{-1}(\mathcal{A}'_k)} dP(\omega) =$$

Ma F è per ipotesi un morfismo fra i due spazi di probabilità e dunque per definizione si ha che $dP' = F_\star(dP)$, ovvero:

$$\int_{C'} dP'(\omega') = \int_{F^{-1}(C')} dP(\omega) \quad \forall C' \subset \Omega'$$

L'integrale sopra riportato diviene perciò:

$$= \sum \alpha_k \int_{\mathcal{A}'_k} dP'(\omega') = \int_{\Omega'} g'(\omega') dP'(\omega')$$

[9] $P' = F_\star[P]$

e il punto (10) è verificato per le funzioni semplici.
Supponiamo ora in generale che $g' \in L^1_{P'}(\Omega'; \mathbb{C})$, allora esiste (vedi [24]) una successione $\{g'_n\}$ di funzioni semplici tale che:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega'} |g'(\omega') - g'_n(\omega')| dP'(\omega') = \lim_{n\to\infty} ||g' - g'_n||_{L^1_{P'}} = 0$$

Costruita la successione $g_n := g'_n \circ F$, utilizzando le proprietà viste per le funzioni semplici si ha che:

$$\lim_{n,m\to\infty} ||g_n - g_m||_{L^1_P} = \lim_{n,m\to\infty} \int_\Omega |g_n - g_m|(\omega) dP(\omega) =$$

$$= \lim_{n,m\to\infty} \int_{\Omega'} |g'_n - g'_m|(\omega') dP'(\omega') = \lim_{n,m\to\infty} ||g'_n - g'_m||_{L^1_{P'}} = 0$$

Dunque $\{g_n\}$ è una successione di Cauchy in L^1_P.
Si osserva ora che esiste una sottosuccessine $\{g'_n : n \in \sigma\}$ di $\{g'_n\}$ che converge in Ω'; analogamente esiste una sottosuccessione $\{g_n : n \in \sigma\}$ di $\{g_n\}$ che converge verso g in Ω. Allora la relazione $g_n := g'_n \circ F$ ammette il passaggio al limite e perciò:

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} g'_n \circ F$$

$$g = g' \circ F \in L^1_P$$

si è verificato il punto (9) per generiche funzioni $L^1_{P'}$.
Del resto, utilizzando la convergenza delle funzioni, si ottiene anche quella degli integrali:

$$\int_\Omega g(\omega) dP(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n(\omega) dP(\omega)$$

$$\int_{\Omega'} g'(\omega) dP'(\omega') = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega'} g_n(\omega') dP(\omega')$$

Ma dal fatto che g_n e g'_n sono funzioni semplici:

$$\int_\Omega g_n(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega'} g_n(\omega') dP'(\omega')$$

In conclusione si verifica la proprietà (10) in generale:

$$\int_\Omega g(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega'} g'(\omega) dP'(\omega')$$

□

APPENDICE C

Le definizioni ed i teoremi qui riportati sono tratti dal libro di M.Reed e B.Simon: Functional Analysis, vol.1; Academic Press, 1980.

Teorema
Dato il potenziale $V(x) \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) + L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, *allora l'operatore Hamiltoniano:*

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle + V(x)$$

è autoaggiunto sul dominio $D(\triangle) = \{\phi(x) \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) : \triangle\phi \in L^2\}$.

Teorema Spettrale (forma funzionale)
Dato un operatore lineare L *autoaggiunto su* $\mathcal{H}$, *esiste un'unica mappa* $\hat{\phi}(\cdot)$ *definita sull'insieme delle funzioni* $g(\cdot)$ *Borel misurabili su* $\mathbb{R}$ *nell'insieme* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, *tale che:*

1. $\hat{\phi}(\cdot)$ *è un omomorfismo algebrico*
2. $\hat{\phi}(\cdot)$ *verifica* $||\hat{\phi}(g)||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq ||g||_\infty$
3. *Data una successione di funzioni* g_n *Borel misurabili tali che* $g_n(x) \to x$ *per ogni* x *e* $|g_n(x)| \leq |x|$ *per ogni* x *e* n. *Allora* $\forall\psi \in D(L)$ *si ha che* $\lim_{n\to\infty} \hat{\phi}(g_n) = L\psi$
4. *Se* $g_n(x) \to g(x)$ *puntualente e se la sequenza* $||g_n||_\infty$ *è limitata, allora* $\lim_{n\to\infty} \hat{\phi}(g_n) = \hat{\phi}(g)$ *fortemente.*
5. *Se* $L\psi = \lambda\psi$ *allora* $\hat{\phi}(g)\psi = \lambda\psi$

Teorema Spettrale (forma p.v.m.)[10]
Esiste una corrispondenza biunivoca fra gli operatori autoaggiunti L e le misure a valori di proiettori $\{P_\Omega\}$ *data da:*

$$L \mapsto \{P_\Omega\} = \{\chi_\Omega(L)\}$$

$$\{P_\Omega\} \mapsto L = \int \lambda dP_\lambda$$

Inoltre se $g(\cdot)$ *è una funzione complessa Borel-misurabile limitata su* $\mathbb{R}$*, allora l'operatore:*

$$g(L) = \int g(\lambda) dP_\lambda$$

coincide con $\hat{\phi}(g)$*.*

Osservazione
Questi due teoremi permettono in particolare di definire l'operatore e^{itL} anche nel caso generale di un operatore L non limitato (se L è limitato risulta valida la nota rappresentazione $e^{itL} = \sum_0^\infty (it)^n L^n/(n!)$).
In questa tesi vengono appunto trattati operatori Hamiltoniani $H = -\triangle + V(x)$ autoaggiunti ma non limitati, ma per mezzo di questi risultati viene comunque garatinta l'esistenza del propagatore e^{itH} per l'equazione di Schrödinger come operatore unitario definito su $D(H)$.

Teorema
Sia L un operatore autoaggiunto, e si definisca $e^{itL} := \int e^{it\lambda} dP_\lambda$*, allora tale operatore verifica le seguenti proprietà:*

1. *Per ogni* $t \in \mathbb{R}$ $U(t) = e^{itL}$ *è un operatore unitario che verifica* $U(t+s) = U(t) \circ U(s)$
2. *Se* $\phi \in D(L)$ *e* $t \to t_0$ *allora* $U(t)\phi \to U(t_0)\phi$
3. *Per* $\psi \in D(L)$ *si ha che* $\lim_{t\to 0} \frac{U(t)\psi - \psi}{t} = iL\psi$
4. *Se esiste* $\lim_{t\to 0} \frac{U(t)\psi - \psi}{t}$*, allora* $\psi \in D(L)$

[10]proiection valued measure

Definizione
Un operatore lineare $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ si dice inferiormente limitato se esiste una costante Λ tale che:

$$\langle L\phi, \phi \rangle \geq \Lambda ||\phi||^2 \quad \forall \phi \in \mathcal{H}$$

Proposizione
Dato il potenziale $V(x) \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ che verifica:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |V(x)| = V_0 < +\infty$$

Allora l'operatore Hamiltoniano:

$$H = -\triangle + V(x)$$

risulta inferiormente limitato.

Osservazione
L'inferiore limitatezza (più debole della limitatezza) garantisce dunque che l'operatore Hamiltoniano $H = -\triangle + V(x)$ possieda uno spettro limitato inferiormente da una costante Λ: $\sigma(H) \subset [\Lambda, +\infty)$. Tramite questa proprietà e utilizzando i precedenti teoremi, risulta possibile definire la famiglia di operatori $e^{-(i+\epsilon)tH}$ con il parametro $\epsilon > 0$ fissato e dimostrare che tali operatori convergono, nel limite del parametro che tende a zero, all'operatore e^{itH}.

Corollario
Dato l'operatore Hamiltoniano $H = -\triangle + V(x)$ autoaggiunto e inferiormente limitato, si ha che esiste la famiglia di operatori unitari $e^{-(i+\epsilon)tH}$ e che verifica il limite:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} e^{-(i+\epsilon)tH} = e^{itH}$$

nel senso forte della convergenza.

Dimostrazione
Al fine di costruire gli operatori esponenziali mediante i teoremi spettrali sopra citati, si richiede che le funzioni g siano limitate su $\mathbb{R}$; ma si osserva facilmente che la mappa $e^{-(i+\epsilon)t\lambda}$, con il parametro $\epsilon > 0$ fissato, non risulta limitata su $\mathbb{R}$.
Risulta comunque possibile la costruzione degli operatori:

$$e^{-(i+\epsilon)tH} = \int e^{-(i+\epsilon)t\lambda} dP_\lambda$$

se si assume che lo spettro di H sia inferiormente limitato $\sigma(H) \subset [\Lambda, +\infty)$, e tale richiesta è verificata se l'operatore Hamiltoniano $H = -\triangle + V(x)$ è inferiormente limitato. In tal caso l'integrazione secondo la misura dP_λ a valori operatoriali si effettua su tale dominio $[\Lambda, +\infty)$ e su di esso la mappa $e^{-(i+\epsilon)t\lambda}$ risulta limitata.
Utilizzando ora il punto (4) del teorema spettrale nella forma funzionale si deduce subito la convergenza, nel senso forte, del limite:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} e^{-(i+\epsilon)tH} = e^{itH}$$

$\square$

Riferimenti bibliografici

[1] R.Abraham, J.E.Marsden, Foundation of Mechanics, Benjamin/Cummings Publishing Company, 1978.

[2] V.I.Arnol'd, Mathematical Methods of Classical Mechanics; Springer, 1978.

[3] Dubrovin B.A., Fomenko A.T., Novikov S.P., Modern geometry-methods and applications, Vol. 3. Introduction to homology theory; Graduate Texts in Mathematics 124, Springer-Verlag, 1990.

[4] F.Cardin, *The global finite structure of generic envelop loci for Hamilton-Jacobi equations*; Journal of Mathematical Physics, Vol 43, N 1, january 2002.

[5] F.Cardin, A. Marigonda, *Global World Functions*; Journal of Geometry and Symmetry in Physics, in stampa.

[6] B.Aebischer, Symplectic geometry; Progress in Mathematics, Basel, Vol. 12, 1994.

[7] V.Kolokoltsov, *A new path integral representation for the solutions of the Schrödinger, heat, and stochastic Schrödinger equations*; Mathematical Proceedings Cambridge Philosophical Society, 2000.

[8] V.Kolokoltsov, Semiclassical Analysis for Diffusion and Stochastic Processes; Springer, 2000.

[9] S.Albeverio, R.J. Hoegh-Krohn, Mathematical Theory of Feynman Path Integrals; Springer-Verlag, 1976.

[10] S.Albeverio, *Wiener and Feynman Path Integrals and Their Applications*; Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, vol.52, 1997.

[11] J.R. Klauder, *Wiener Regularisation for Quantum Mechanical Path Integral*; Internationale Universitätswochen für Kernphysik, 1987.

[12] M. Kac, Integration in function spaces and some of its applications; Pisa, 1980.

[13] M. Kac, Probability and related topics in physical sciences; Providence, American Mathematical Society, 1959.

[14] R.Feynman, A.Hibbs, Quantum Mechanics and Path integrals, McGraw-Hill, 1965.

[15] M.Reed, B.Simon Functional Analysis vol.1,2; Academic Press, 1980.

[16] L.Hörmander, Fourier Integral Operators; Acta Math., N 127, 1971, pg. 79-183.

[17] J.Robbin, D. Salomon, *Feynman path integrals on phase space and the metaplectic representation*; Mathematische Zeitschrift, Spinger-Verlag, N 221, 1996, pg.307-335.

[18] M.Beals, C.Fefferman, R.Grossman, *Strictly Pseudoconvex Domains in* $\mathbb{C}^n$; Bulletin American Mathematical Society, vol. 8, 1983, pg. 125-322.

[19] H.Amann, E.Zehnder, *Perodic Solutions of asymptotically linear hamiltonian systems*, Manus. Math., N 32, pg. 149-189, 1980.

[20] C.Conley, E.Zehnder, *Morse type index theory for flows and periodic solutions for Hamilton equations*; Comm. Pure Appl. Math., N 37, pg 207-253, 1984.

[21] N.Ikeda, S.Watanabe, Stochastic Differential Equation and Diffusion Processes; North Holland, 1981.

[22] D.Strook, S.Varadan, Multidimensional Diffusion Processes; Springer-Verlag, 1979.

[23] P.Malliavin, Integration and Probability; Springer-Verlag, 1995.

[24] Robert B. Ash, Catherine A. Doleans-Dade, Probability and Measure Theory; Harcourt Academic Press, 2000.

[25] Giovanni Gallavotti, Meccanica elementare; Boringhieri, 1980.