Università degli Studi di Padova

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Tesi di Laurea

C'è tanto spazio tra zero e uno.
Note sugli sviluppi della logica tra XIX e XX secolo

Relatore

Prof. Giulio Peruzzi

Laureando

Emanuele Abbatantuono

24 Luglio 2012

Anno Accademico 2011 / 2012

Sguardo dall’alto

Nel 1959 Feynman tiene la famosa lezione “*C’è un sacco di spazio giù in fondo*”, in cui considera la possibilità di una diretta manipolazione di singoli atomi come una forma più efficace di chimica sintetica rispetto a quelle adoperate ai suoi tempi.

Qualche anno dopo Jean Marie Lehn scriverà “*C’è ancora più spazio di sopra*” indicando la strada al di sopra delle dimensioni molecolari verso la chimica supramolecolare.

Questo tanto spazio tra zero e uno non è una dissertazione di analisi transfinita ricordando Cantor ma semplicemente una rassegna delle possibilità che sono apparse percorribili in logica nei due secoli passati. Forse l’unico ambito del sapere apparso davvero inattaccabile per secoli è stato proprio quello logico. Eppure una varietà a un certo punto della Storia è apparsa.

Si è cercato di superare un dualismo tra sincronia e diacronia nella trattazione utilizzando un potente mezzo: la divulgazione. Da qui la scelta di “Gödel, Escher, Bach: un’eterna ghirlanda brillante” di Hofstadter (Douglas, non il padre Robert nobel per la fisica nel 1961).

La simpatica proporzione in epigrafe si trova in “Sfiorando l’idolatria” tra l’indice e l’introduzione de “Il piacere di scoprire” di Feynman.

“*La logica Logica*” è il racconto di quello che la logica classica è stata, da Aristotele che l’ha codificata, agli Elementi di Euclide e alla Meccanica di Newton che l’hanno adoperata e quindi avvalorata.

“*Euclide E NON Euclide*” tratta dei postulati di Euclide e dei vari accadimenti che hanno portato alla scoperta delle geometrie non euclidee.

Siamo a metà Ottocento in “*Logica dei paradossi*” che affronta i paradossi studiati in quel periodo, le soluzioni proposte, le scuole affermatesi nei decenni successivi come risposta a problemi e questioni dibattute.

Del 1931 è il teorema di Gödel, centrale in ogni discussione sulla logica, che viene presentato attraverso la prospettiva di “*GEB*” unitamente a vari argomenti inerenti la metalogica.

1936. La pubblicazione dell’articolo di Birkhoff e von Neumann segna la nascita de “*Le logiche quantistiche*”.

Conclude “*Aristotele primo logico quantistico?*”, in cui si parla dell’esperimento mentale “Il microscopio di Feynman”.

$$\frac{\text{Shakespeare}}{\text{Jonson}} = \frac{\text{Feynman}}{\text{Dyson}}$$

1. La logica Logica

La storia della logica può venire suddivisa, con un certo grado di semplificazione, in tre stadi: l) la logica greca, 2) la logica scolastica, 3) la logica matematica. Nel primo stadio, le formule logiche consistevano di parole del linguaggio comune, soggette alle normali regole sintattiche. Nel secondo stadio, la logica faceva astrazione dal linguaggio ordinario ed era caratterizzata da speciali regole sintattiche e da specifiche funzioni semantiche. Nel terzo stadio, la logica é contrassegnata dall'uso di un linguaggio artificiale in cui parole e simboli hanno funzioni semantiche rigidamente delimitate. Mentre nei primi due stadi i teoremi logici erano derivati dal linguaggio comune, la logica del terzo stadio procede in maniera contraria: ossia essa dapprima costruisce un sistema puramente formale, e soltanto successivamente ne cerca un'interpretazione nel linguaggio comune. Nello schema tradizionale aristotelico, la logica non rappresentava una vera e propria scienza, ma solo la forma che doveva avere qualsiasi tipo di discorso che pretendesse di dimostrare qualcosa. La logica, secondo Aristotele, doveva mostrare quale fosse la struttura del ragionamento corretto, ed è per questo motivo che il complesso dei suoi scritti vennero indicati con il termine *organon*, cioè "strumento". Aristotele chiamava la logica con il termine "analitica" e *Analitici* sono intitolati gli scritti fondamentali dell'*Organon*. L'analitica (dal greco *analysis*, che vuol dire "risoluzione") spiega il metodo con cui noi, partendo da una data conclusione, espressa da una proposizione, la scomponiamo nei suoi termini costitutivi e la risolviamo negli elementi da cui deriva, cioè nelle premesse da cui scaturisce e quindi la fondiamo e giustifichiamo. Per secoli 1'*Organon* è stato considerato un indiscutibile punto di riferimento; in esso Aristotele ha definito il ragionamento perfetto nella forma del sillogismo, un processo sostanzialmente deduttivo in cui la conclusione cui si perviene è la conseguenza che scaturisce, di "necessità", dall'antecedente. Tra le premesse Aristotele aveva individuato alcune proposizioni la cui verità era autoevidente e che egli aveva chiamato "assiomi". Tra gli assiomi ve ne sono alcuni che sono comuni a tutte le scienze, come il principio di non contraddizione (non si può affermare e negare dello stesso soggetto e nello stesso tempo due predicati contraddittori), e quello del terzo escluso (non é possibile che ci sia un termine medio tra due contraddittori). L'indiscussa supremazia del concetto aristotelico di logica era stato avvalorato da due grandi teorie scientifiche: la geometria di Euclide e la Meccanica di Newton.

Euclide con i suoi *Elementi* dette una forma sistematica al sapere scientifico dei Greci ed ebbe il merito di riunire proposizioni e dimostrazioni prese dalle fonti più disparate e di presentarle in un assetto deduttivo seguendo la lezione aristotelica. Nel primo libro degli *Elementi* Euclide fissa ventitré definizioni, cinque postulati e alcune nozioni comuni o assiomi; successivamente passa, in base a quanto stabilito, alla dimostrazione (deduzione) delle proposizioni (teoremi) della geometria. Le definizioni intendono esplicitare i concetti della geometria. I postulati rappresentano verità indubitabili tipiche del sapere geometrico. Infine gli assiomi sono, per Euclide, verità che valgono non solo in geometria ma universalmente. La geometria euclidea è stata per secoli un modello insuperabile di sapere deduttivo: i termini della teoria vengono introdotti dopo essere stati definiti, le proposizioni sono asserite solo se vengono dimostrate. Al vertice di questo schema deduttivo piramidale Euclide pose i suoi famosi cinque postulati, scegliendoli in modo tale che riguardo alla loro verità non vi fossero dubbi. In sostanza Euclide espresse l'ideale aristotelico di una organizzazione assiomatica di una disciplina, ideale riducibile grosso modo, nella scelta di un piccolo numero di proposizioni "evidenti" e alla successiva deduzione logica da queste di tutte le altre proposizioni vere della teoria.

Allo stesso modo Isaac Newton ha sistemato e organizzato in maniera assiomatica e deduttiva la dinamica classica nei suoi *Principia*. Alla maniera di Euclide, tutta la teoria viene fatta discendere da pochi principi generali: le tre leggi del moto. In questo modo tutte le novità prodotte dalla rivoluzione scientifica del 1500-1600 contro la visione aristotelica del cosmo confluirono paradossalmente proprio nello schema logico e fondazionale aristotelico della sintesi newtoniana. Grazie al contributo decisivo del metodo delle flussioni, cioè del calcolo infinitesimale, la dinamica acquisì 1'assetto teorico di scienza esatta, così come era stata intesa da Aristotele quasi due millenni prima.

Ma, come notato da molti e in particolare da Mach, il modello cosmologico sottostante la fisica matematica di Newton si fondava su assiomi e definizioni solo in parte verificabili. La supposta autoevidenza dei tre principi assiomatici sostenuta da Newton era una ingenua pretesa. Non erano verificabili, ad esempio, le asserzioni fondamentali concernenti il principio di inerzia e i suoi parametri: tempo assoluto e spazio assoluto. Lo stesso concetto di forza affondava le radici in concezioni metafisiche e animistiche della natura che andavano al di là della verifica sperimentale. Nonostante però la problematicità dei suoi fondamenti, il modello newtoniano ha dominato per tutto il Settecento e l'Ottocento.

Il problema della evidenza dei principi-assiomi si presenterà ancora più drammatico con l'altra grande teoria deduttiva aristotelica, la geometria euclidea.

2. Euclide E NON Euclide

Euclide stabilì i cinque postulati da usare come "piano terra" dell'infinito grattacielo della geometria, di cui i suoi *Elementi* costituivano solo le prime centinaia di piani. I primi quattro postulati sono piuttosto concisi ed eleganti:

(1) Congiungendo due punti qualsiasi si ottiene un segmento di retta.

(2) Ogni segmento può essere prolungato all'infinito in linea retta.

(3) Dato un qualsiasi segmento, si può tracciare un cerchio che ha come raggio il segmento stesso e come centro un estremo del segmento.

(4) Tutti gli angoli retti sono congruenti.

Il quinto tuttavia non aveva la stessa eleganza:

(5) Se si tracciano due rette che intersecano una terza in modo tale che la somma degli angoli interni da una stessa parte sia inferiore a due angoli retti, allora le due rette, se prolungate sufficientemente, debbono necessariamente intersecarsi da quella parte.

Sebbene non l'abbia mai detto esplicitamente, Euclide considerava questo postulato in qualche modo inferiore agli altri, visto che fece in modo di evitarne l'uso nelle dimostrazioni delle prime ventotto proposizioni. Perciò le prime ventotto proposizioni appartengono a quella che potrebbe essere chiamata "geometria dei quattro postulati", cioè a quella parte della geometria che può essere derivata sulla base dei primi quattro postulati degli *Elementi*, senza 1'aiuto del quinto postulato. Questa parte è spesso chiamata *geometria assoluta*. Certo, Euclide avrebbe preferito di gran lunga dimostrare questo postulato, invece di doverlo presupporre. Ma non riuscì a trovare una dimostrazione, e quindi l'adottò.

Neanche ai discepoli di Euclide piacque molto dover presupporre questo quinto postulato. Nei secoli che seguirono, innumerevoli persone dedicarono molti anni della loro vita al tentativo di dimostrare che il quinto postulato era esso stesso parte della geometria dei quattro postulati. Tutte queste dimostrazioni erronee comportavano una confusione tra intuizione quotidiana e proprietà strettamente formali.

Girolamo Saccheri ambiva a liberare Euclide da ogni neo. Basandosi su alcuni suoi precedenti lavori di logica, egli decise di tentare un nuovo approccio alla dimostrazione del famoso quinto postulato: supponiamo di negarlo e, in sua vece, di *presupporre il suo opposto*; lavoriamo ora con quest'ultimo come se fosse il vero quinto postulato... Certamente dopo un po' si produrrà una contraddizione. Dal momento che nessun sistema matematico può sostenere una contraddizione, si sarà dimostrata l'erroneità di questo falso "quinto postulato" e quindi la correttezza del quinto postulato di Euclide. Saccheri elaborò, una dopo l'altra, numerose proposizioni. A un certo punto decise che aveva raggiunto una proposizione "che ripugna alla natura della retta". Era quello che aveva sperato: si trattava a suo giudizio, della contraddizione lungamente cercata. A quel punto, pubblicò la sua opera col titolo *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclide emendato da ogni neo).

Cinquant'anni dopo Saccheri, J. H. Lambert ripeté questa "operazione quasi riuscita", avvicinandosi ancora di più, se é possibile, a una nuova geometria. Infine, quarant'anni dopo Lambert e novant'anni dopo Saccheri, la *geometria noneuclidea* fu riconosciuta per ciò che era: un settore autenticamente nuovo della geometria, una biforcazione nella corrente, fino ad allora unica, della matematica. Nel 1823 la geometria noneuclidea fu scoperta simultaneamente da un matematico ungherese, Janos Bolyai, e da un matematico russo, Nikolaj Lobacevskij.

L'indicazione da seguire per arrivare alla geometria noneuclidea era la "retta interpretazione" delle proposizioni che emergono in geometrie quali quelle di Saccheri e di Lambert. Le proposizioni saccheriane "ripugnano alla natura della retta" solo se non si riesce a liberarsi dalle idee preconcette su che cosa significhi "linea retta". Se viceversa ci si libera di quelle idee preconcette e si lascia semplicemente che "una retta" sia qualcosa che soddisfi le nuove proposizioni, allora si giunge a un punto di vista radicalmente nuovo. *Si può lasciare che i significati di "punto", "retta" e così via vengano determinati dall'insieme dei teoremi (o proposizioni) in cui compaiono*. Fu questa la grande intuizione degli scopritori della geometria noneuclidea. Essi trovarono diversi tipi di geometrie negando in modi diversi il quinto postulato di Euclide e traendone le conseguenze. A rigore, essi non negarono direttamente il quinto postulato, ma piuttosto negarono un postulato equivalente, chiamato il *postulato delle parallele*, che dice quanto segue:

> Data una qualsiasi retta e un punto esterno ad essa, esiste una e una sola retta che passa per quel punto e non interseca mai la retta data, per quanto la si prolunghi.

Si dice che la seconda retta é parallela alla prima. Se si afferma che tale retta non esiste, si perviene alla *geometria ellittica*; se si afferma che esistono almeno due rette siffatte si perviene alla *geometria iperbolica*. Osserviamo per inciso che la ragione per cui tali variazioni vengono ancora chiamate "geometrie" è che vi si trova incorporato il nucleo centrale della geometria, cioè la geometria dei quattro postulati o assoluta. Proprio per la presenza di questo nucleo minimo è ragionevole pensare che queste strutture descrivano anch'esse le proprietà di un qualche tipo di spazio geometrico, sia pure non così intuitivo come lo spazio ordinario.

In realtà, la geometria ellittica può essere visualizzata facilmente: si devono semplicemente considerare i "punti", le "rette", e così via come parti della superficie di una comune sfera. Conveniamo di scrivere "PUNTO" quando vogliamo indicare il termine tecnico e "punto" quando si intende il significato quotidiano. Possiamo dire allora che il PUNTO consiste di una coppia di punti diametralmente opposti sulla superficie della sfera. Una RETTA é un cerchio massimo della sfera (un cerchio che, come l'equatore, ha il suo centro nel centro della sfera). Con questa interpretazione, le proposizioni della geometria ellittica, sebbene contengano parole come "PUNTO" e "RETTA", parlano di ciò che avviene su una sfera, non su un piano. Si noti che due RETTE si intersecano sempre esattamente in due punti antipodali della superficie sferica, cioè in uno e un solo PUNTO! E proprio come due RETTE determinano un PUNTO, così due PUNTI determinano una RETTA.

Attribuendo a parole come “PUNTO” e “RETTA” unicamente il significato derivante loro dalle proposizioni in cui compaiono, facciamo un passo avanti verso la completa formalizzazione della geometria. Questa versione semiformalizzata fa ancora uso di molte parole italiane che conservano il loro significato abituale (parole come “il”, “se”, “e”, “congiungere”, “avere”), ma è stato eliminato il significato quotidiano di parole particolari come “PUNTO” e “RETTA”, le quali perciò sono chiamate *termini indefiniti*. I termini indefiniti in realtà vengono definiti, ma in un senso particolare, cioè *implicitamente*, dalla totalità delle proposizioni in cui essi compaiono, anziché esplicitamente, con una definizione.

Si può affermare che una definizione completa dei termini indefiniti risiede nei soli postulati, dal momento che le proposizioni che ne derivano sono già implicite in essi. Questo punto di vista implicherebbe che i postulati siano definizioni implicite di tutti i termini indefiniti, poiché tutti i termini indefiniti sono definiti in base a tutti gli altri.

L’apparizione nel 1826 della “geometria immaginaria” di Lobacevskij assestò un colpo decisivo alla fiducia di poter fondare assiomi e postulati sulla sola intuizione. Proprio in risposta alle nuove geometrie, alla fine dell’Ottocento Hilbert propone che il problema della verità delle proposizioni geometriche si sdoppi in un problema di verità matematica, che si riduce al loro essere conseguenza logica dagli assiomi, ed in un problema di verità empirica, che confluisce nell’epistemologia delle scienze empiriche, allorché queste trattano il rapporto tra teoria ed esperimenti. Finché gli assiomi venivano visti come principi veri, bastava la corretta deduzione da premesse vere per avere conseguenze vere e quindi non vi era il problema della coerenza del sistema. Ma se gli assiomi sono solo il punto di partenza del sistema formale, allora nasce il problema di quali categorie utilizzare per sceglierli e, una volta scelti, capire se c’é la possibilità di contraddizioni interne al sistema, nonostante una corretta deduzione. Inoltre gli assiomi scelti sono in grado di dimostrare o refutare tutte le proposizioni del calcolo (problema della completezza sintattica)? Chi ci assicura che non esistono proposizioni vere della teoria che non sono dimostrabili dagli assiomi scelti (problema della completezza semantica)? Come provare che gli assiomi sono indipendenti uno dall’altro?

3. Logica dei paradossi

Intorno alla metà dell’Ottocento, i logici inglesi George Boole e Augustus de Morgan andarono molto più avanti di Aristotele nel codificare le forme del ragionamento rigorosamente deduttivo. George Boole con il suo libro *Analisi matematica della logica* mostrava che era possibile un trattamento algebrico non solo delle grandezze matematiche ma anche di enti come proposizioni. In questo modo Boole riesce a tradurre in una teoria di equazioni la logica tradizionale dei termini, in particolar modo la sillogistica, e abbozza anche una teoria algebrica della logica delle proposizioni. Gottlob Frege a Jena e Giuseppe Peano a Torino lavoravano per abbinare il ragionamento formale allo studio degli insiemi e dei numeri. Negli anni ’80 Georg Cantor elaborò una teoria di vari tipi di infinito, nota come *teoria degli insiemi*. La teoria contrastava con l’intuizione. In breve tempo vennero alla luce tutta una serie di paradossi insiemistici. Il più famoso è il *paradosso di Russell*.

Si tratta di un'antinomia più che di un paradosso: un paradosso è una conclusione logica e non contraddittoria che si scontra con il nostro modo abituale di vedere le cose, l'antinomia è invece una contraddizione. Questo “paradosso” può essere espresso, non formalmente, nei termini seguenti:

> “In un villaggio c'è un unico barbiere. Il barbiere rade tutti (e solo) gli uomini che non si radono da sé. Chi rade il barbiere?”.

Si possono fare due ipotesi:

- il barbiere rade sé stesso, ma ciò non è possibile in quanto, secondo la definizione, il barbiere rade solo coloro che non si radono da sé;
- il barbiere non rade sé stesso, ma anche ciò è contrario alla definizione, dato che questa vuole che il barbiere rada tutti e solo quelli che non si radono da sé, quindi in questa ipotesi il barbiere deve radere anche sé stesso.

In entrambi i casi si giunge ad una contraddizione.

Il paradosso fu scoperto da Bertrand Russell nel 1901 mentre si dedicava allo studio della teoria degli insiemi di Cantor su cui contemporaneamente Frege stava realizzando la riduzione della matematica alla logica. Russell si rese subito conto delle conseguenze che la sua scoperta avrebbe avuto per il programma logicista e non esitò a mettersi immediatamente in contatto col logico di Jena. Il caso volle che la lettera di Russell fosse recapitata a Frege nell'estate del 1902 poco prima della pubblicazione del secondo e ultimo volume dei *Principi di aritmetica*. Frege prese atto delle conseguenze distruttive per il sistema che aveva costruito in quegli anni e decise di scrivere un’appendice ai suoi *Principi* in cui confessava il fallimento della sua opera. Le contraddizioni messe in luce dal paradosso di Russell sono insolubili nell’ambito della teoria di Cantor e Frege, se non generando altri paradossi; per superare questo scoglio fu necessario elaborare la cosiddetta *teoria assiomatica degli insiemi*, formulata inizialmente da Ernst Zermelo e modificata da Abraham Fraenkel che, con le successive estensioni, fornisce tuttora la base teorica per la maggior parte delle costruzioni matematiche. La vecchia teoria degli insiemi (peraltro tuttora largamente utilizzata a livello scolastico e divulgativo) viene chiamata teoria intuitiva degli insiemi in contrapposizione alla teoria assiomatica degli insiemi.

Al Congresso di Parigi del 1900, dove Hilbert presentò i suoi famosi problemi, Poincaré lesse una relazione nella quale metteva a confronto i ruoli rispettivi della logica e dell’intuizione nel campo della matematica. Boyer nella “Storia della matematica” sostiene che da allora si é soliti raggruppare i matematici in due o tre scuole di pensiero, a seconda delle loro concezioni circa i fondamenti della loro disciplina. Questo non rende la complessità del dibattito e delle posizioni sviluppatesi nel tempo su questi temi ma è utile come sguardo d’insieme. Quelli che adottarono concezioni affini alle idee di Poincaré formarono un gruppo dai contorni indefiniti, caratterizzato dalla predilezione per l’intuizione. Hilbert venne considerato il massimo esponente di una scuola di pensiero formalista. Alcuni dei suoi seguaci svilupparono tale posizione fino alle sue estreme conseguenze, giungendo alla conclusione che la matematica non é altro che un gioco privo di significato in cui si gioca con contrassegni privi di significato secondo certe regole formali concordate in partenza.

Al gruppo formalista si ricollegavano, senza però identificarsi con esso, numerosi matematici che esitavano ad ammettere la natura interamente arbitraria delle regole del gioco. Seguendo l’esempio di Bertrand Russell, costoro, spesso descritti come appartenenti alla *scuola logicista*, vorrebbero identificare la matematica con la logica, in opposizione a C. S. Peirce, ma in accordo con Frege. Fu L. E. J. Brouwer dell’Università di Amsterdam colui che promosse un movimento di pensiero che accomunava gli oppositori del *formalismo hilbertiano* e i seguaci del logicismo di Russell. Egli rivendicava agli elementi e agli assiomi della matematica un carattere considerevolmente meno arbitrario di quello che sembrerebbe. Nella sua dissertazione di dottorato del 1907 e in articoli successivi, Brouwer sferrò un duro attacco contro la fondazione logica dell’aritmetica e dell’analisi, e diventò conosciuto come il fondatore di una *scuola intuizionista* che ancora oggi é chiaramente riconoscibile. Secondo Brouwer, il linguaggio e la logica non sono i presupposti della matematica, ma questa ha la sua fonte nell’intuizione che ci rende immediatamente evidenti i suoi concetti e le sue deduzioni; 1’affermazione che esiste un certo oggetto dotato di una certa proprietà significa che vi é un metodo riconosciuto che permette di trovare o di costruire l’oggetto mediante un numero finito di passi. In particolare, egli sosteneva che il metodo della dimostrazione indiretta, cui ricorreva spesso l’aritmetica dei numeri transfiniti, era privo di validità. Fin dai tempi di Aristotele erano state considerate come sacrosante e intoccabili le tre leggi fondamentali della logica 1) *la legge di identità*, A é A; 2) *la legge di non contraddizione*, A non può essere simultaneamente B e non B; 3) *la legge del terzo escluso*, A è B oppure non B, e non vi è altra alternativa. Brouwer negava l’ultima di queste leggi e rifiutava di accettare i risultati basati su di essa. Per esempio, chiedeva ai formalisti se fosse vero o falso che “la successione delle cifre 123456789 compare in qualche punto della rappresentazione decimale di π”. Poiché non esiste nessun metodo per decidere in merito, non è possibile affermare che tale proposizione è vera o falsa.

L’aver distinto tre indirizzi principali nelle concezioni circa la natura della matematica non deve indurci a trarre la conclusione che ogni matematico appartenga all’uno o all’altro dei tre campi. Nulla potrebbe essere più lontano dalla verità, e persino all'interno di ciascun indirizzo di pensiero vi è una grande varietà di opinioni. Si potrebbe quasi affermare che non esistono oggi nemmeno due matematici che siano d'accordo circa la natura della loro disciplina. Certo, il termine stesso "matematica" ha significato per l'umanità cose diverse in diversi momenti storici, e sarebbe irrealistico aspettarci una vasta unanimità di opinione in un campo di studi che è diventato così vasto. Nella prima metà del XX secolo il conflitto fra vari indirizzi é stato a volte molto aspro; più recentemente, però, si é diffuso il convincimento, che ricorda un po' quello espresso da d'Alembert duecento anni fa, che dovremmo piuttosto darci da fare per sviluppare la conoscenza matematica, sia in termini di studio dei fondamenti sia per quanto riguarda la sovrastruttura, senza preoccuparci eccessivamente di questo o di quel particolare credo filosofico.

4. GEB

Hofstadter stesso annota che inizialmente era sua intenzione scrivere un saggio al centro del quale si trovasse il teorema di Gödel. Immaginava che sarebbe stato un semplice opuscolo. Ma le idee dell'autore si allargarono a sfera, toccando presto Bach ed Escher. Ecco quindi che Gödel, Escher e Bach erano ombre proiettate in diverse direzioni da una qualche solida essenza centrale. Nel tentativo di ricostruire questo oggetto "centrale" è venuto fuori GEB.

E' notevole come la struttura di GEB sia al tempo stesso un assunto teorico, un esempio dimostrativo, un capitolo ulteriore nella trattazione di tutte le idee presenti in esso. Questo libro è strutturato in modo insolito: come un contrappunto tra dialoghi e capitoli. Lo scopo di questa struttura è permettere di presentare i concetti nuovi due volte. Quasi ogni concetto nuovo viene prima presentato metaforicamente in un dialogo, con una serie di immagini concrete, visive; queste servono poi, durante la lettura del capitolo successivo, come sfondo intuitivo per una presentazione più "seria" e astratta dello stesso concetto.

In modo seminale tratto due sole immagini, come motivi: il succedersi a contrappunto dei primi tre capitoli, circolarmente dialogati a tre, due, una voce rispettivamente; la voce nella bibliografia ragionata

> * — *What Is the Name of This Book?* Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, l978 [trad. it. *Qual e' il titolo di questo libro?*, Zanichelli, Bologna, 1981]. Un libro di giochi e fantasie sui paradossi, 1'autoreferenza e il Teorema di Gödel. Dovrebbe attirare lo stesso pubblico di lettori del mio libro. Libro pubblicato quando avevo già finito di scrivere il mio (con l'eccezione di una certa voce della mia bibliografia).

evidente rimando di autoriferimento, con tanto di paradosso in questo procedimento di autogemmazione.

Fondamentali in GEB sono le idee di Strano Anello e di Gerarchia Aggrovigliata. Il fenomeno dello “Strano Anello” consiste nel fatto di ritrovarsi inaspettatamente, salendo o scendendo lungo i gradini di qualche sistema gerarchico, al punto di partenza. Il termine “Gerarchia Aggrovigliata” indica un sistema nel quale è presente uno Strano Anello.

Un primo esempio di Strano Anello si ha nel “Canone per toni” a tre voci di Bach. In questo caso il sistema gerarchico è quello delle tonalità musicali.

Imponenti realizzazioni visive di Strano Anello si trovano nell’opera di Escher. Alcuni disegni di Escher hanno la loro ispirazione in paradossi, illusioni o doppi sensi. I matematici furono tra i primi ammiratori dei disegni di Escher, e si capisce perché: spesso essi sono basati su principi matematici di simmetria o di regolarità. Ma in un disegno tipicamente escheriano c’é molto di più di semplici simmetrie e regolarità; spesso c’é un’idea di fondo che viene realizzata in forma artistica. In particolare lo Strano Anello é uno dei temi più frequenti nell’opera di Escher. Guardiamo, per esempio, nella litografia *Cascata* (fig. 1) l’anello eternamente discendente.

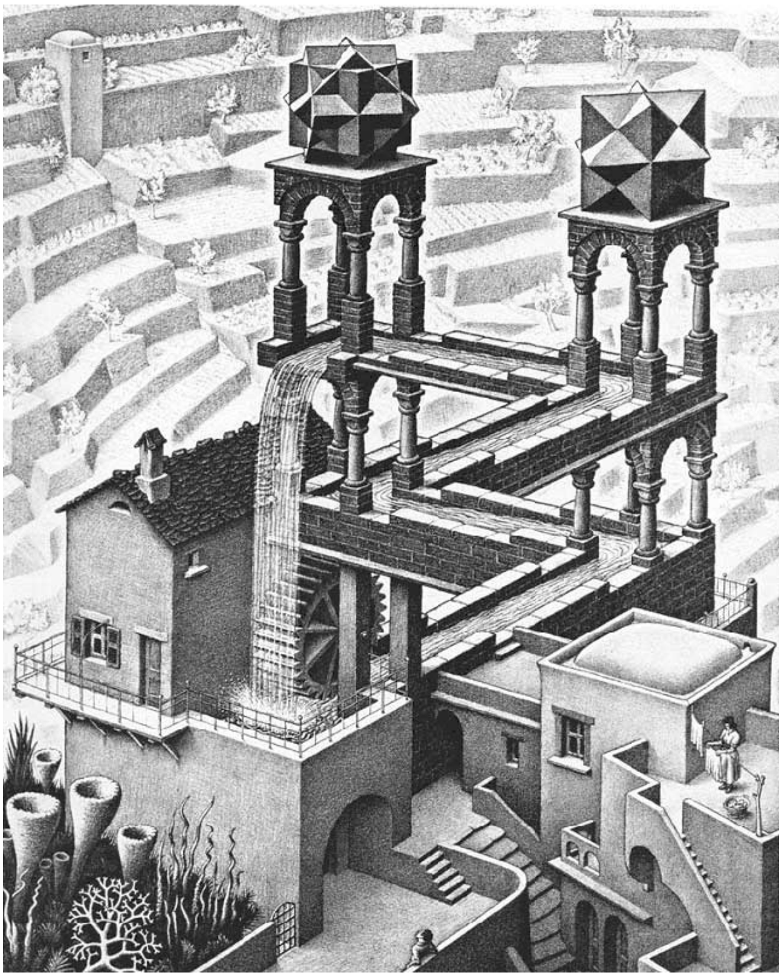


Figura 1. *Cascata*, di M. C. Escher (litografia, 1961)

Veniamo all’interessante *Mani che disegnano* (fig. 2) dove si vedono due mani ognuna delle quali disegna l’altra: uno Strano Anello a due componenti. Ed infine, il più stretto di tutti gli Strani Anelli si trova realizzato in *Galleria di stampe* (fig. 3): un quadro di un quadro che contiene se stesso. Oppure è il quadro di una galleria che contiene se stessa? O di una città che contiene se stessa? Per inciso, l’illusione sulla quale si fondano sia *Salita e discesa* sia *Cascata* non è stata inventata da Escher ma da Roger Penrose nel 1958. Il concetto di Strano Anello contiene quello di infinito: un anello, infatti, non è proprio un modo per rappresentare un processo senza fine in un modo finito? In effetti l’infinito interviene ampiamente in molti disegni di Escher.

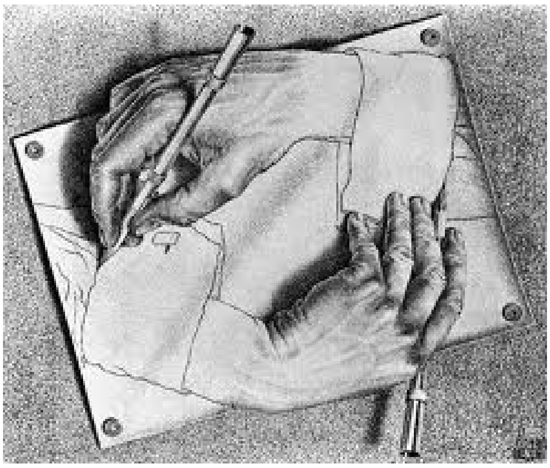


Figura 2. *Mani che disegnano*

Figura 3. *Galleria di stampe*

Negli esempi di Strani Anelli che abbiamo visti in Bach e in Escher c'è un conflitto tra finito e infinito, e quindi un forte senso di paradosso. Si percepisce che vi è un sottofondo matematico. E infatti, nel nostro secolo, è stato scoperto un equivalente matematico di quei fenomeni. E come gli anelli di Bach e di Escher fanno appello ad intuizioni molto semplici e antiche come la scala musicale o la scala di un edificio, così la scoperta ad opera di Kurt Gödel di uno Strano Anello in un sistema matematico trae le sue origini da intuizioni semplici e antiche. La scoperta di Gödel, nella sua forma essenziale, comporta la traduzione in termini matematici di un antico paradosso. Si tratta del cosidetto paradosso di Epimenide o *paradosso del mentitore*. Epimenide era un cretese che pronunciò questo enunciato immortale: "Tutti i cretesi sono mentitori". Una versione più incisiva di questo enunciato è semplicemente: "Io sto mentendo" o ancora: "Questo enunciato è falso". Si tratta di un enunciato che viola brutalmente la consueta assunzione che vuole gli enunciati suddivisi in veri e falsi: se si prova a pensare che sia vero immediatamente esso si rovescia forzandoci a pensare che sia falso. Ma una volta che si sia deciso che è falso, si viene inevitabilmente riportati all'idea che sia vero. Il paradosso di Epimenide è uno Strano Anello con un'unica componente, come *Galleria di stampe* di Escher. Ma come avviene il collegamento con la matematica? E' ciò che scoprì Gödel. Egli pensò di utilizzare il ragionamento matematico per esplorare il ragionamento matematico stesso. Questa idea di rendere la matematica "introspettiva" si rivelò estremamente potente, e forse la sua conseguenza più profonda è quella scoperta da Gödel: il *Teorema di Incompletezza di Gödel*.

Il teorema di Gödel compare come la proposizione VI del suo scritto del 1931 *Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei "Principia Mathematica" e di sistemi affini*. Una enunciazione non formale può essere:

> Tutte le assiomatizzazioni coerenti dell'aritmetica contengono proposizioni indecidibili.

In essa non è facile vedere uno Strano Anello. Ciò è dovuto al fatto che lo Strano Anello è nascosto nella dimostrazione. Il cardine della dimostrazione del Teorema di Incompletezza di Gödel è la scrittura di un enunciato matematico autoreferenziale, allo stesso modo in cui il paradosso di Epimenide è un enunciato autoreferenziale del linguaggio. Ma mentre é molto semplice parlare del linguaggio naturale nel linguaggio naturale, non è altrettanto facile vedere come un enunciato sui numeri possa parlare di se stesso. In effetti, ci voleva genialità anche solo per collegare l'idea di un enunciato autoreferenziale con l'aritmetica. Con 1'intuizione della possibilità di un enunciato del genere, Gödel aveva superato l'ostacolo maggiore: la sua effettiva creazione era il compimento di quella splendida intuizione.

Gli enunciati matematici, e in particolare quelli dell'aritmetica, riguardano le proprietà dei numeri interi. I numeri interi non sono enunciati, né lo sono le loro proprietà. Un enunciato dell'aritmetica non parla di un enunciato dell'aritmetica; è semplicemente un enunciato dell'aritmetica. Questo è il problema; ma Gödel seppe riconoscere che la situazione offre maggiori possibilità di quanto non sembri a prima vista. Egli ebbe l'intuizione che un enunciato dell'aritmetica poteva parlare di un enunciato dell'aritmetica (magari addirittura di se stesso), purché fosse possibile rappresentare in qualche modo gli enunciati mediante numeri. In altre parole, alla base della sua costruzione c'è l'idea di un *codice*. Nella codificazione di Gödel, detta anche "numerazione di Gödel" o *gödelizzazione*, si assegna un numero ad ogni simbolo o successione di simboli. In questo modo, ogni enunciato dell'aritmetica, in quanto è una successione di simboli specifici, riceve un numero di Gödel: qualcosa di simile a un numero telefonico o a una targa automobilistica, con cui si può fare riferimento ad esso. E questo espediente della codificazione consente di interpretare gli enunciati dell'aritmetica a due diversi livelli: come enunciati dell'aritmetica e come enunciati su enunciati dell'aritmetica.

Dopo aver inventato questo schema di codificazione, Gödel dovette elaborare dettagliatamente un modo per trapiantare il paradosso di Epimenide nel formalismo aritmetico. La formulazione ultima del paradosso, dopo il trapianto, non fu: "Questo enunciato dell'aritmetica è falso", bensì "Questo enunciato dell'aritmetica non ammette alcuna dimostrazione". Ciò può creare una grande confusione, poiché di solito non si ha un'idea precisa della nozione di "dimostrazione". In effetti, il lavoro di Gödel costituiva precisamente un contributo al lungo sforzo dei matematici per spiegare a se stessi che cosa sia una dimostrazione. E' necessario tener presente che una dimostrazione è un'argomentazione che si svolge entro un determinato sistema di proposizioni. Nel caso dell'opera di Gödel, il determinato sistema di ragionamenti aritmetici al quale la parola "dimostrazione" si riferisce è quello dei *Principia Mathematica*, un'opera gigantesca di Bertrand Russell e Alfred North Whitehead pubblicata tra il 1910 e il 1913.

Mentre l'enunciato di Epimenide crea un paradosso poiché non è né vero né falso, l'enunciato G di Gödel é indimostrabile (all'interno dei *Principia Mathematica*) ma vero. Qual è la grande conclusione? Che il sistema dei *Principia Mathematica* è "incompleto": vi sono enunciati veri dell'aritmetica che i metodi di dimostrazione del sistema sono troppo deboli per dimostrare.

Ma se i *Principia Mathematica* sono stati la prima vittima di questo colpo, non furono certo 1'ultima! L'espressione "e sistemi affini" nel titolo del lavoro di Gödel è significativa; se infatti il risultato di Gödel avesse semplicemente individuato un difetto nell'opera di Russell e Whitehead, vi sarebbe stata la possibilità che altri trovassero il modo di migliorare i *Principia Mathematica*, eludendo così il Teorema di Gödel. Ma ciò non era possibile: la dimostrazione di Gödel riguardava qualsiasi sistema assiomatico che pretendesse di raggiungere gli obiettivi che Whitehead e Russell si erano posti. E per ogni altro sistema, un metodo basilarmente identico portava a risultati analoghi. In breve, Gödel metteva in evidenza che la dimostrabilità è una nozione più debole della verità, indipendentemente dal sistema assiomatico considerato.

Perciò il Teorema di Gödel ebbe un effetto elettrizzante sui logici, sui matematici e sui filosofi interessati ai fondamenti della matematica, poiché mostrava che nessun determinato sistema, per quanto complicato esso fosse, poteva rappresentare la complessità dei numeri interi 0, 1, 2, 3, ... I lettori di oggi saranno meno sconcertati da questo fatto dei lettori del 1931, poiché nel frattempo la nostra cultura ha assorbito il Teorema di Gödel, insieme con le rivoluzioni concettuali della relatività e della meccanica quantistica, e i loro messaggi sconcertanti a livello filosofico, hanno raggiunto il pubblico, anche se attenuati dai numerosi passaggi del processo di trasmissione (che normalmente equivale a offuscamento). Oggi c'è nella gente uno stato d'animo di aspettativa che la rende preparata ad accogliere risultati "limitativi", ma nel lontano 1931 questa notizia cadde come un fulmine a ciel sereno.

Molti altri paradossi, oltre a quelli di Russell e del mentitore qui citati, sono stati studiati all'inizio del Novecento.

Questi paradossi sembrano tutti indicare uno stesso colpevole, e cioè l'autoreferenza ovvero la "presenza di Strani Anelli". Se quindi lo scopo é quello di scongiurare tutti i paradossi, perché non tentare di mettere al bando l'autoreferenza e tutto ciò che ne favorisce la nascita? Non è facile come può sembrare, perché a volte la difficoltà sta proprio nell'individuare il punto esatto in cui si manifesta l'autoreferenza. Questa può presentarsi diffusa su un intero Strano Anello a varie componenti, come in questa versione "ampliata" di Epimenide che ricorda *Mani che disegnano*:

L'enunciato che segue è falso.
L'enunciato precedente è vero.

Congiuntamente questi enunciati danno lo stesso risultato del paradosso di Epimenide; eppure separatamente sono enunciati innocui e perfino potenzialmente utili. Non è possibile addossare la "colpa" di questo Strano Anello all'uno o all'altro dei due enunciati, ma solo al modo in cui essi si "riferiscono" l'uno all'altro. Dal momento che ci sono modi sia diretti sia indiretti che conducono all'autoreferenza, occorre trovare il sistema per evitarli entrambi contemporaneamente, sempre che l'autoreferenza sia considerata la fonte di ogni male.

Russell e Whitehead erano effettivamente di questo avviso, e quindi i *Principia Mathematica* costituivano un'impresa gigantesca per estromettere gli Strani Anelli dalla logica, dalla teoria degli insiemi e dall'aritmetica. L'idea del loro sistema era essenzialmente questa: un insieme del "tipo" più basso poteva avere come elementi solo "oggetti", non insiemi. Un insieme del tipo successivo poteva contenere solo oggetti o insiemi del tipo più basso. In generale, un insieme di un dato tipo poteva contenere solo insiemi di un tipo inferiore oppure oggetti. Ogni insieme doveva appartenere ad un determinato tipo. Chiaramente nessun insieme poteva contenere se stesso, poiché avrebbe dovuto appartenere ad un tipo superiore al proprio. Perciò questa *teoria dei tipi* ha tutta l'aria di riuscire a sbarazzare dalla teoria degli insiemi i suoi paradossi, ma solo a costo di introdurre una gerarchia alquanto artificiale e di proibire la formazione di insiemi con certe caratteristiche. Non è questo il modo in cui concepiamo gli insiemi da un punto di vista intuitivo.

La teoria dei tipi aveva risolto il paradosso di Russell, ma non aveva nessun effetto sul paradosso di Epimenide. Per chi non spingeva il proprio interesse oltre la teoria degli insiemi ciò bastava, ma quanti erano interessati ad eliminare i paradossi in generale avrebbero dovuto procedere ad una qualche analoga "gerarchizzazione" per impedire il sorgere di circoli chiusi all'interno del linguaggio. Alla base di una gerarchia del genere vi sarebbe un *linguaggio-oggetto*. In esso sarebbe possibile riferirsi soltanto ad un dominio specifico e non ad aspetti del linguaggio-oggetto medesimo, come regole grammaticali o enunciati particolari del linguaggio; per parlare di questi, vi sarebbe un *metalinguaggio*.

Problematiche di questo genere sui fondamenti della matematica hanno determinato all'inizio di questo secolo un grande interesse per la codificazione dei metodi del ragionamento umano. Matematici e filosofi hanno cominciato a nutrire seri dubbi perfino nei confronti della più concreta di tutte le teorie, quella che studia i numeri interi (l'aritmetica). E' basata su fondamenti solidi? Se i paradossi saltano fuori con tanta facilità nella teoria degli insiemi, in una teoria, cioè, che si fonda su un concetto così intuitivo come quello di insieme, non ne potrebbero allora esistere anche in altri rami della matematica? Un altro inquietante interrogativo, collegato al precedente, era se i paradossi della logica, come il paradosso di Epimenide, potessero rivelarsi come qualcosa di interno alla matematica, mettendo così in dubbio l'intera matematica. Questo era particolarmente preoccupante per coloro, ed erano molti, che credevano fermamente che la matematica fosse solo un ramo della logica (o viceversa, che la logica fosse solo un ramo della matematica). In effetti, proprio la domanda "La matematica e la logica sono cose distinte, separate?" fu fonte di molte controversie, come già accennato.

Questo studio della matematica stessa venne definito metamatematica, o a volte *metalogica*, dal momento che matematica e logica sono cosi intrecciate. Con priorità assoluta i metamatematici si accinsero a determinare la vera natura del ragionamento matematico. Quali sono i metodi di procedere legittimi, quali quelli illegittimi? Poiché il ragionamento matematico si era sempre svolto in un "linguaggio naturale" (ad esempio in francese o in latino o in qualche linguaggio per la normale comunicazione), era sempre rimasto pieno di possibili ambiguità. Le parole avevano significati diversi per persone diverse, evocavano immagini diverse, e via dicendo. Sembrava ragionevole e addirittura importante fissare un'unica notazione uniforme nella quale si potesse svolgere tutto il lavoro matematico, e che permettesse a due matematici qualsiasi di risolvere una controversia circa la validità o meno di una data dimostrazione. Ciò avrebbe richiesto una codificazione completa dei modi di ragionamento universalmente accettabili, o perlomeno di quelli usati in matematica.

Tale era l'obiettivo dei *Principia Mathematica*, in cui si pretendeva di derivare l'intera matematica dalla logica; e ciò, beninteso, senza contraddizioni. L'impresa fu oggetto di grande ammirazione, ma nessuno aveva la certezza che tutta la matematica fosse realmente contenuta nei metodi indicati da Russell e da Whitehead e che, almeno, i metodi esposti fossero coerenti fra di loro. Era veramente sicuro che mai nessun matematico avrebbe potuto ottenere risultati contraddittori seguendo i metodi di Russell e di Whitehead?

Questo problema turbava in modo particolare l'insigne matematico (e metamatematico) Hilbert, il quale lanciò alla comunità mondiale dei matematici (e dei metamatematici) la seguente sfida: dimostrare rigorosamente, magari seguendo proprio i metodi indicati da Russell e da Whitehead, che il sistema definito nei *Principia Mathematica* era sia *coerente* (non contraddittorio) sia *completo* (tale cioè che ogni enunciato vero dell'aritmetica potesse essere derivato all'interno della struttura predisposta nei Principia Mathematica).

Hilbert esprimeva la speranza che fosse possibile trovare una dimostrazione della coerenza o della completezza che dipendesse soltanto da metodi "finitistici" di ragionamento, ossia da un numero ristretto di metodi comunemente accettati da tutti i matematici.

Nel trentunesimo anno del secolo, comunque, Gödel pubblicò il suo articolo che, per certi versi, demolì completamente il *programma di Hilbert*. Quell'articolo non solo rivelò la presenza di "buchi" irreparabili nel sistema assiomatico proposto da Russell e da Whitehead, ma, più in generale, mise in evidenza l'impossibilità che esistesse un qualche sistema assiomatico in grado di produrre tutte le verità aritmetiche, a meno che il sistema in questione non fosse incoerente.

Nessuna teoria che contenga la teoria dei numeri interi (quindi nessuna teoria che pretenda di fondare la matematica) che sia consistente può essere anche completa, nel senso di poter dimostrare tutte le verità matematiche esprimibili nel suo linguaggio, e una delle verità è precisamente la sua consistenza. L'impossibilità di provare la consistenza di una teoria dal suo interno non esclude comunque la possibilità di dimostrazioni "esterne" (*metateoria*), ma pur sempre convincenti, e dunque non costituisce l'ultima parola sul secondo problema di Hilbert. Per esempio una dimostrazione di consistenza significativa (anche se ovviamente non elementare) è stata data nel 1936 da *Gentzen*: questa costituisce il punto di partenza della teoria della dimostrazione.

Negli anni '30 e '40 del secolo scorso la *teoria della computabilità* si sviluppò a passi da gigante. Questa teoria aveva stretti legami con la metamatematica. Infatti il Teorema di Gödel ha un equivalente nella teoria della calcolabilità scoperta da Alan *Turing*, il quale rivela l'esistenza di "buchi" inevitabili perfino nel calcolatore più potente che si possa immaginare.

Il programma di Hilbert è fallito. Hilbert stesso scrive in una lettera come “questo studente sconosciuto [Turing], spuntato chissà da dove, sancisce il fallimento del programma con una *macchina immaginaria* più ancora dei Teoremi di Incompletezza”.

Paradossalmente, proprio mentre venivano messi in evidenza questi limiti in un certo senso misteriosi, si cominciarono a costruire calcolatori reali le cui capacità sembravano crescere a dismisura, al di là della stessa capacità profetica dei loro creatori. *Babbage*, il quale una volta aveva dichiarato che avrebbe allegramente rinunciato al resto della sua vita se solo avesse potuto tornare sulla Terra cinquecento anni dopo per fare una visita guidata di tre giorni alle conquiste scientifiche dell’era nuova, sarebbe probabilmente rimasto stupefatto e senza parole un secolo appena dopo la sua morte sia di fronte alle nuove macchine sia di fronte ai loro limiti inaspettati.

5. Le logiche quantistiche

All’inizio della discussione sulla natura della logica alla fine del 1800, la richiesta che la logica “giusta” dovesse dipendere anche da considerazioni sperimentali apparve come una posizione estremista, in contrasto con la tradizione filosofica passata. Come detto, fin dai tempi di Aristotele, infatti, la logica, intesa come il corretto ragionare, si era distinta da ogni altra disciplina per la sua universalità e per la sua assoluta indipendenza da ogni contesto. Tuttavia questo ha cominciato a essere sempre più messo in discussione dopo che *Birkhoff* e *von Neumann* nel 1936 proposero una logica non classica che in una teoria fisica come la *Meccanica Quantistica* era in grado di rendere conto degli esperimenti nel campo dell’infinitamente piccolo. Era la prima volta che una teoria empirica metteva in discussione la logica classica, che dagli *Elementi* di Euclide alla *Meccanica* di Newton era stata la logica del reale. Da quel momento la questione se la logica delle scienze empiriche dovesse dipendere da considerazioni sperimentali oppure no è stata ampiamente dibattuta.

L’atto di nascita ufficiale della logica quantistica coincide quindi con la pubblicazione di questo famoso articolo intitolato *“The logic of quantum mechanics”* (Annals of Mathematics).

L’articolo inizia con la seguente osservazione:

> “Uno degli aspetti della teoria quantistica che ha suscitato maggiore attenzione è la novità delle nozioni logiche che essa presuppone [...] Oggetto del presente lavoro è scoprire quali strutture logiche si possono individuare in quelle teorie fisiche che, come la meccanica quantistica, non sono conformi alla logica classica”.

Ma perché la teoria quantistica "non è conforme" alla logica classica ?

Per giustificare la loro tesi, Birkhoff e von Neumann fanno un'analisi approfondita dei concetti di *sistema fisico*, *stato*, *osservabile*, *proprietà* e *proposizione fisica*. Ogni teoria fisica (e così anche la meccanica classica, l'elettromagnetismo e la meccanica quantistica) si occupa di sistemi fisici, che possono assumere stati diversi e su cui è possibile fare delle osservazioni. In generale, una osservazione si realizza come una misura di una o più grandezze fisiche (osservabili). Già nel libro "*The Mathematical Foundation of Quantum Mechanics*", scritto nel 1932, von Neumann si occupa di un *ri-esame del linguaggio* con il quale occorre esprimere i concetti legati ai fenomeni quantistici. E' nell'esame del linguaggio infatti, che è possibile trovare il germe di quella che diventerà a tutti gli effetti la logica quantistica.

Nel focalizzarsi sul problema del linguaggio, von Neumann indica perché è così difficile rispondere alla domanda "Che cos'è la meccanica quantistica?".

Se la meccanica è lo studio del moto, allora la meccanica quantistica è lo studio del moto dei quanti. Ma cosa è realmente un quanto ? E' "un pezzo di azione", è...

Il vero problema è che un quanto può essere contemporaneamente un'onda e un corpuscolo. Inoltre, anche quando un quanto è simile a un dato microoggetto, non lo è nel senso normale dell'espressione. Una particella subatomica infatti, non è una "cosa specifica"…

> "Se volete visualizzare un quanto come un puntino allora siete in trappola. Lo state plasmando con la logica classica. Il punto è che non esiste alcuna rappresentazione classica di esso".
>
> [David Finkelstein]

Una particella subatomica è un insieme di relazioni, uno stato intermedio. Può essere disintegrata, ma dalla disintegrazione possono nascere nuove particelle altrettanto elementari quanto quella originaria. "Quelli che non sono rimasti scioccati quando si sono imbattuti per la prima volta nella teoria quantistica", disse una volta Niels Bohr (W. Heisenberg, "Physics and Beyond", Harper e Row, 1971), "non possono averla capita".

La teoria quantistica non è particolarmente difficile da spiegare in quanto complicata, ma perché le parole che si hanno a disposizione per comunicare i suoi concetti non sono adatte. Ciò era ben noto ed è stato parecchio discusso dai fondatori della meccanica quantistica. Max Born, per esempio, scrive (M. Born, "Atomic Physics", Hafner, 1957):

> "L'origine ultima delle difficoltà risiede nel fatto (o nel principio filosofico) che siamo costretti a usare parole del linguaggio comune quando vogliamo descrivere un fenomeno [...] Il linguaggio comune è cresciuto con l'esperienza quotidiana e non potrà mai oltrepassare certi limiti. La fisica classica si è

> adattata all'uso di concetti di questo tipo. Analizzando i movimenti visibili ha sviluppato due modi di rappresentarli attraverso processi elementari: particelle in movimento e onde. Non esiste altro modo di fornire una descrizione per immagini del movimento, e noi dobbiamo applicarla anche alla sfera dei processi subatomici, dove la fisica classica ci viene meno".

Questo è il punto di vista corrente di gran parte dei fisici: "Noi incontriamo i veri problemi nello spiegare i fenomeni subatomici quando cerchiamo di descriverli, raffigurarli". Il problema allora è il linguaggio; il linguaggio da usarsi per descrivere i fenomeni microfisici.

Il linguaggio che usiamo per comunicare le nostre esperienze quotidiane segue un certo gruppo di regole (la logica classica) e quando cerchiamo di descrivere le "situazioni quantistiche" tramite la logica classica è come se mettessimo dei paraocchi che non solo restringono il nostro campo visuale, ma per giunta lo distorcono. Di fronte a questo carattere costitutivo dei principi quantici, non immediato e tanto sorprendentemente lontano da situazioni fisicamente concepibili, appare inadeguato persino lo strumento linguistico, che pure si conferma l'unico mezzo a nostra disposizione per organizzare in modo coerente uno scenario gnoseologico.

E' questa una preoccupazione già ben presente a Niels Bohr, che così la esprime:

> "Cos'è ciò da cui noi esseri umani dipendiamo? Dipendiamo dalle nostre parole. Siamo sospesi al linguaggio. Nostro obiettivo è comunicare esperienze e idee agli altri. Dobbiamo continuamente lottare per estendere lo scopo della nostra descrizione, ma in modo tale che i nostri messaggi non debbano perciò perdere la loro oggettività o il loro carattere non ambiguo".

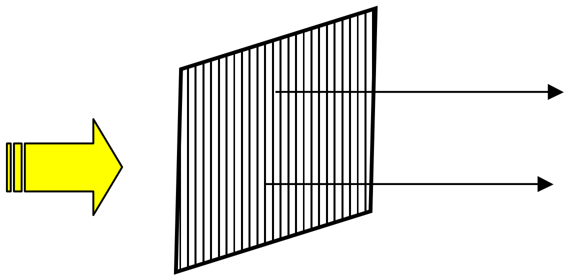
Rifacendoci alla testimonianza di Abraham Pais:

> "Un importante impulso al pensiero giovanile di Bohr - da lui spesso ricordato - fu la teoria delle cosiddette superfici di Riemann di cui venne a conoscenza in un corso universitario di matematica. Brevemente, questa teoria tratta funzioni multivalenti, cioè funzioni che possono assumere uno fra molti valori in uno stesso punto del piano complesso. Le ambiguità risultanti possono essere evitate introducendo "fogli di Riemann", un insieme di piani complessi sovrapposti disposti in modo tale che le funzioni assumano valori unici specificando non solo un punto, ma piuttosto un punto in un dato foglio. Colpì Bohr che questo modo di affrontare le ambiguità poteva essere applicato all'uso di "piani di oggettività" impiegati nella lingua comune in cui spesso una parola può avere molteplici significati; l'ultima figura che egli schizzò su una lavagna prima di morire rappresentava una curva su una superficie di Riemann".

La differenza più importante fra le regole della logica classica e le regole della logica quantistica coinvolgono la *legge della distributività*. Tale legge, uno dei fondamenti della logica classica, dice che $X \bullet (Y + Z)$ equivale a $(X \bullet Y) + (X \bullet Z)$. Con un esempio fatto successivamente, se $b = \{s_z = \hbar/2\}$, $a = \{s_x = \hbar/2\}$ e $a^{\perp} = \{s_x = - \hbar/2\}$ allora $b \cap (a \cup a^{\perp}) = b$ ed è $\neq (b \cap a) \cup (b \cap a^{\perp}) = 0$. La struttura logica del calcolo proposizionale, che classicamente è un reticolo booleano, è il reticolo ortomodulare ortocomplementato.

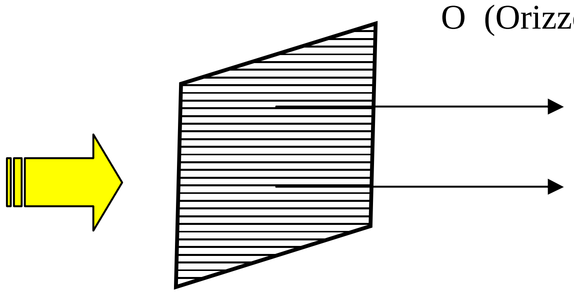
Nell'articolo di Birkhoff e von Neumann troviamo un chiarissimo esempio di fenomeno che confuta la legge della distributività. Le onde luminose provenienti da una normale sorgente di luce come il sole si propagano in ogni modo, orizzontalmente, verticalmente e in tutte le direzioni intermedie. Ciò non significa solamente che la luce si irradia da una sorgente in tutte le direzioni. Significa anche che in ogni raggio di luce alcune delle onde luminose sono verticali, alcune orizzontali, alcune diagonali e così via. Per un'onda di luce, un polarizzatore assomiglia a una staccionata. Se possa o meno attraversarla dipende dal fatto che sia o meno allineata con la direzione dei pali. Se il polarizzatore è allineato verticalmente, solo le onde di luce verticali lo attraverseranno. Tutte le altre verranno bloccate. Tutte le onde che passano attraverso un polarizzatore verticale sono allineate verticalmente.

V (Verticale)

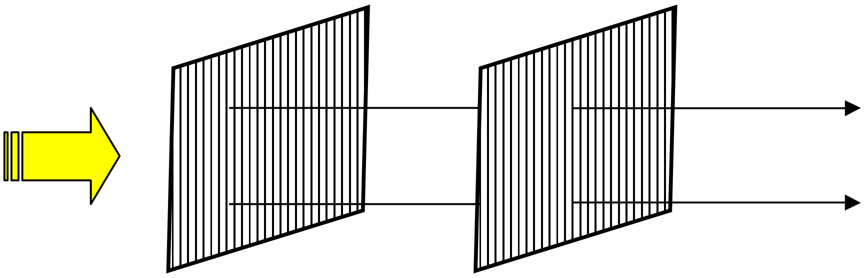


Questa è ciò che viene definita luce polarizzata verticalmente. Lo stesso ragionamento si può fare, mutatis mutandis, per un polarizzatore allineato orizzontalmente.

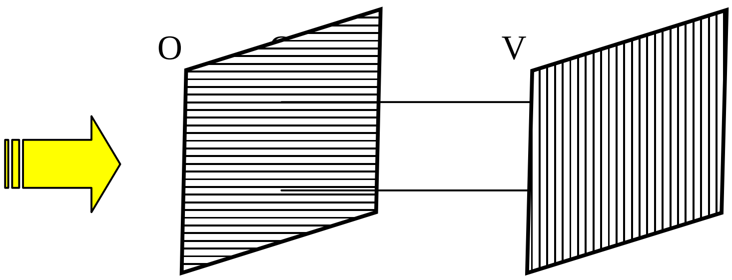
O (Orizzontale)



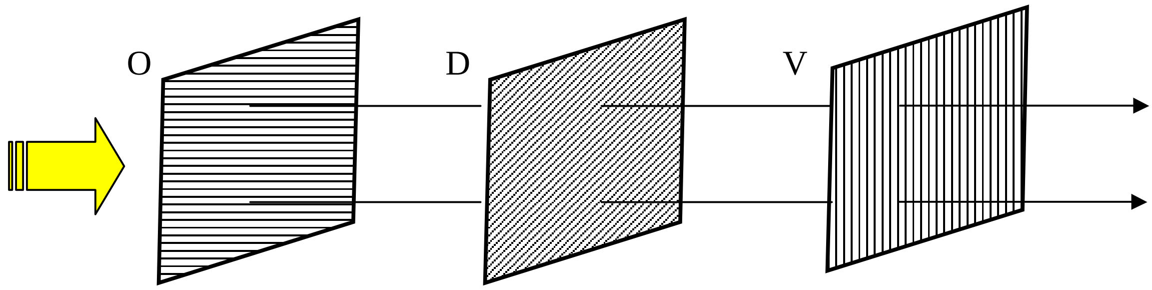
In effetti non ha importanza come sia allineato il polarizzatore. Le onde di luce che lo attraversano saranno allineate sullo stesso piano. I polarizzatori sono dotati di frecce che indicano la direzione in cui viene polarizzata la luce che li attraversa.
Se ne prendiamo uno e lo teniamo con la freccia puntata verso l'alto (o il basso) la luce che lo attraversa sarà polarizzata verticalmente. Se adesso ne prendiamo un altro e lo mettiamo dietro il primo, con la freccia sempre puntata verso l'alto o il basso, noteremo che tutta la luce che passa attraverso il primo polarizzatore passerà anche attraverso il secondo.



Se ruotiamo uno dei polarizzatori dalla polarizzazione verticale a quella orizzontale, noteremo che, man mano che la rotazione procede, sempre meno luce passerà attraverso la coppia. Quando uno dei polarizzatori è orizzontale e l'altro verticale la luce viene bloccata completamente. Il primo polarizzatore elimina tutte le onde luminose tranne quelle polarizzate orizzontalmente. Queste vengono eliminate dal secondo polarizzatore, che lascia passare solo la luce polarizzata verticalmente. Non ha importanza se il primo polarizzatore sia orizzontale e il secondo verticale o viceversa. In ogni caso, nessuna onda li attraverserà entrambi.



Consideriamo adesso un terzo filtro. Se lo allineiamo in modo che polarizzi la luce diagonalmente e lo poniamo in mezzo ai filtri O e V la luce passerà attraverso i tre filtri. Se lo togliamo, la luce scomparirà.



Come può accadere ciò? La spiegazione che si può dare di questo fenomeno in un'ottica logico-quantistica è che la luce che esce dal polarizzatore diagonale possiede [...] tutte le probabili polarizzazioni comprese tra la luce polarizzata orizzontalmente e la luce polarizzata verticalmente.

Come può un'onda luminosa (o ancor di più un singolo fotone) che esce da un polarizzatore possedere tali speciali caratteristiche? Secondo la "logica di tutti i giorni" non può!

Inoltre come può l'aggiunta di un "ostacolo" (il filtro diagonale) tra due filtri, "attivare" il passaggio della luce?

Le situazioni sopra analizzate esemplificano meglio di ogni altra dimostrazione la differenza tra logica classica e logica quantistica. In realtà i paradossi sopra menzionati risultano tali perché i nostri processi mentali seguono determinate logiche. La ragione infatti ci dice che ciò che stiamo vedendo è impossibile (dopo tutto un fotone che esce da un polarizzatore non può che essere polarizzato in un solo modo: o solo verticalmente, o solo orizzontalmente, o solo diagonalmente). Ciononostante l'inserimento del polarizzatore diagonale fra quelli orizzontale e verticale fa riapparire la luce. La natura di "entità a sé" della luce che esce da un polarizzatore diagonale riflette la vera natura dell'esperienza. *Il nostro processo di pensiero ci impone* le categorie del "o questo o quello". Ci pone sempre di fronte a questo o a quello.

6. Aristotele primo logico quantistico?

Si deve al logico polacco *Łukasiewicz* la scoperta che Aristotele fu il primo logico polivalente, che accettò la possibilità di un terzo valore di verità (indeterminato) oltre ai valori vero e falso. Seguendo questa linea di pensiero, si potrebbe ragionevolmente affermare che Aristotele fu anche il primo logico quantistico.

Facciamo riferimento all'analisi di Łukasiewicz del capitolo IX del "De Interpretatione" di Aristotele. Si tratta del famoso esempio aristotelico della battaglia navale. Secondo l'interpretazione di Łukasiewicz, Aristotele sembra asserire che entrambi gli enunciati, uno negazione dell'altro,

"Domani ci sarà una battaglia"
"Domani non ci sarà una battaglia"

hanno oggi valore di verità indeterminato. Tuttavia, la disgiunzione

"Domani ci sarà una battaglia oppure domani non ci sarà una battaglia"

è vera oggi (e sempre).
In altri termini, Aristotele sembra consapevole della necessità di distinguere la legge logica del terzo escluso (secondo cui ogni proposizione che abbia la forma "A o non A" è vera) dal principio semantico di bivalenza (secondo cui ogni proposizione deve essere vera oppure falsa). Si ottiene così una situazione semantica tipicamente logico-quantistica: le verità di una disgiunzione non implica, in generale, la verità di almeno un membro della disgiunzione stessa.

Uno degli esperimenti fondamentali della meccanica quantistica, l'*esperimento delle due fenditure*, è stato spesso descritto come una sorta di *experimentum crucis* per la logica quantistica. Si tratta di un risultato intrigante che Feynman nelle sue celebri "Lezioni di Fisica" ha commentato "E' tutto molto misterioso. E più guardiamo a questo esperimento più misterioso ci appare".

Per capire da un punto di vista intuitivo perché l'esperimento delle due fenditure appare così "misterioso", si può leggere una descrizione divertente che si trova nel libro "Alice nel Paese dei Quanti. Una allegoria della fisica quantistica" di R. Gilmore. L'Alice di Gilmore (moderna variante di "Alice nel paese delle meraviglie") fa un viaggio fantastico attraverso i misteri del mondo dei quanti. Gilmore riprende in modo divertente l'esperimento mentale proposto da Feynman nel 1960 chiamato "*Microscopio di Feynman*".

Alice a un certo punto giunge alla Sala Gedanken, dove tutti gli esperimenti di pensiero diventano reali. Prima di tutto il Meccanico Classico illustra l'esperimento delle due fenditure usando una mitragliatrice che comincia a sparare un certo numero di proiettili. Mentre la maggior parte dei proiettili si disperde in varie direzioni, alcuni attraversano una parete (posta di fronte alla mitragliatrice) su cui si trovano due fori (il foro l e il foro 2), colpendo uno schermo di fronte alla parete dove lasciano ciascuno una traccia precisa. La configurazione finale di tutte le tracce sullo schermo dà luogo a una tipica figura a campana (chiamata anche *figura additiva*, v. fig. 4).

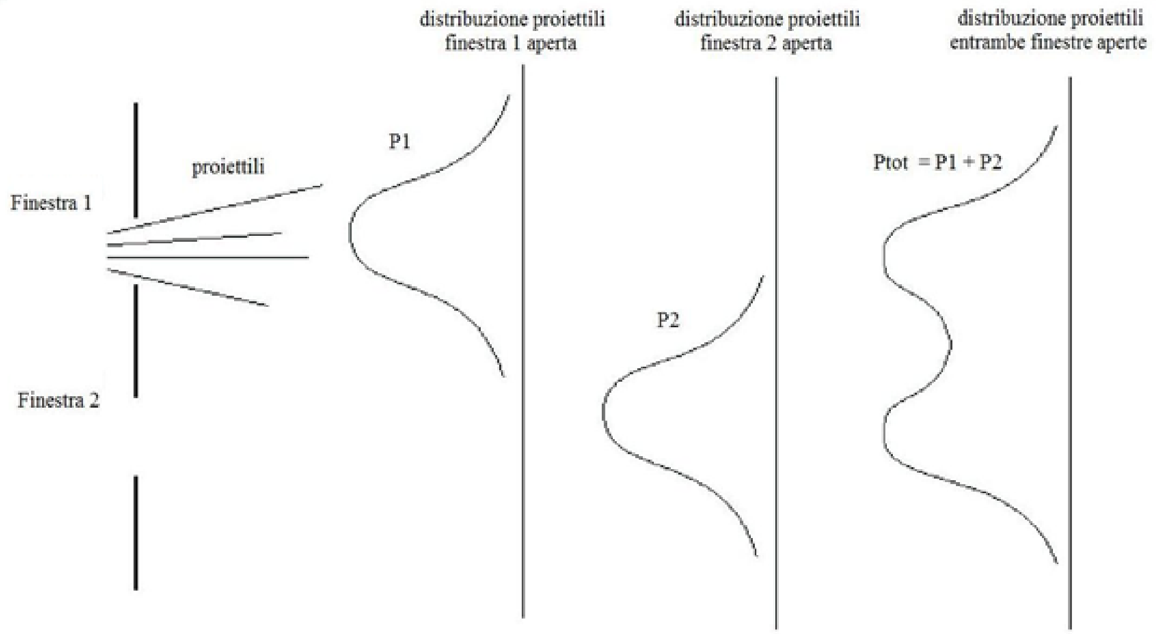


Figura 4. Le probabilità non quantistiche di eventi indipendenti si sommano

Si può dire che la figura rappresenta la probabilità che un proiettile generico raggiunga le diverse regioni dello schermo. Il Meccanico Classico spiega così l'esperimento ad Alice:

> "Poiché entrambi i fori sono aperti, i proiettili possono passare attraverso l'uno o l'altro dei due fori. Ne viene che la distribuzione di probabilità globale è data dalla somma delle probabilità che abbiamo per ciascuno dei due fori presi singolarmente. Infatti i proiettili che arrivano sullo schermo devono essere passati attraverso l'uno o l'altro dei due fori, ma non possono essere passati attraverso entrambi!"

Subito dopo, il Meccanico Quantistico fa un esperimento simile, usando un cannone elettronico. L'effetto che si ottiene è completamente diverso: sullo schermo appare una chiara *figura di interferenza* (v. fig. 5), del tutto simile a quella che si avrebbe nel caso di un fenomeno di tipo ondulatorio. In particolare la distribuzione di frequenza ottenuta con entrambe le fenditure aperte rivela chiaramente la presenza di fenomeni di interferenza, analoghi a quelli che si ottengono per la luce con un'esperienza di Young di doppia fenditura (v. fig. 6).

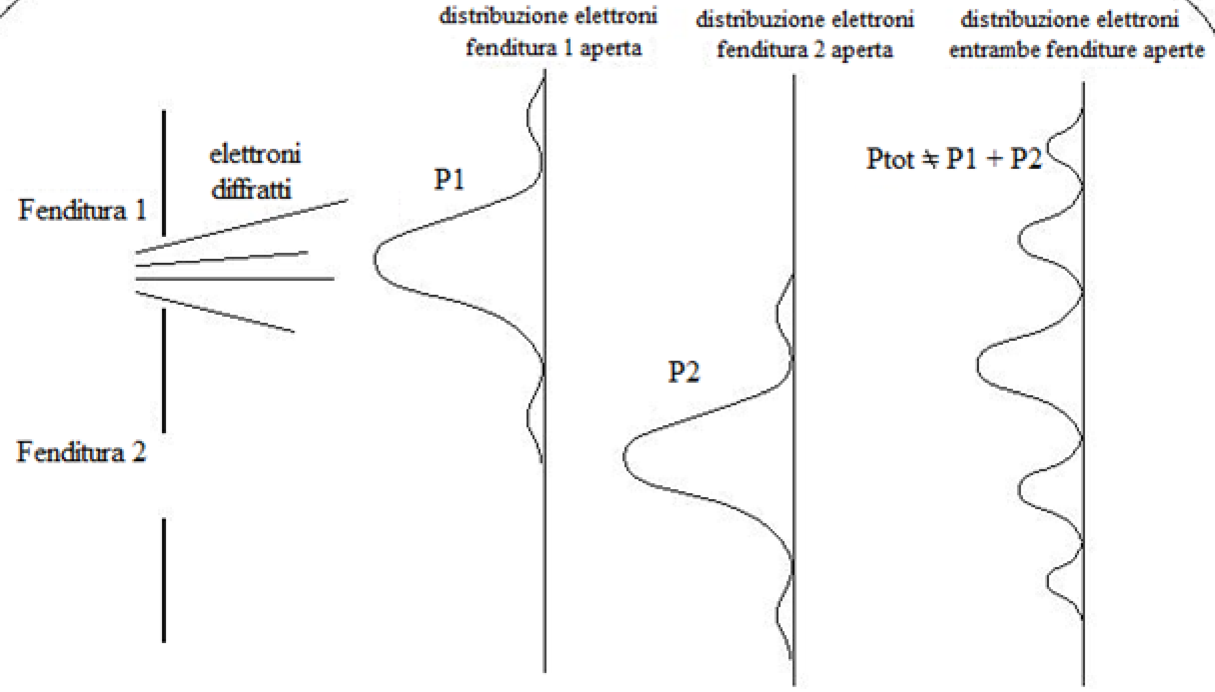


Figura 5. Le probabilità quantistiche di eventi indipendenti non si sommano

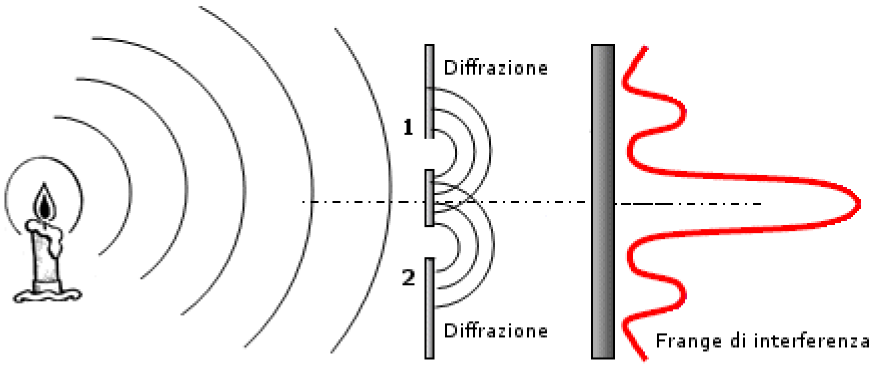


Figura 6. Esperienza di Young

Il Meccanico Quantistico spiega:

> "Ecco vedete un chiaro effetto di interferenza. Se avessimo tenuto aperto un solo foro, avreste potuto vedere che la distribuzione sarebbe andata calando in modo continuo e tranquillo da entrambi i lati proprio come nel caso dei proiettili. In questo caso vediamo invece che quando sono aperti tutti e due i fori, c'è un fenomeno di interferenza. Il comportamento degli elettroni è molto diverso da quello dei proiettili del mio amico, il Meccanico Classico!"

“Non capisco - dice Alice - Vuol dire che ci sono così tanti elettroni che riescono a passare che, in qualche modo, gli elettroni che passano da uno dei due fori interferiscono con quelli che passano dall’altro?”

“No, assolutamente no - risponde il Meccanico Quantistico - L’effetto di interferenza si verifica anche quando c’è un solo elettrone presente in ogni istante. Anche se si fanno passare, attraverso le due fenditure aperte, singoli elettroni a grandi intervalli di tempo l’uno dall’altro, essi andranno a cadere solo in corrispondenza dei massimi di interferenza (v. figg. 7-8). Un elettrone da solo può esibire l’interferenza, può passare attraverso tutte e due le fenditure e interferire con se stesso, se così si può dire.”

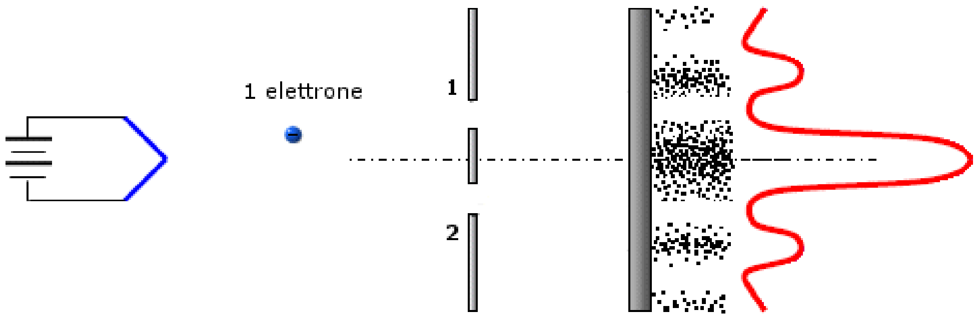


Figura 7. Frange di interferenza

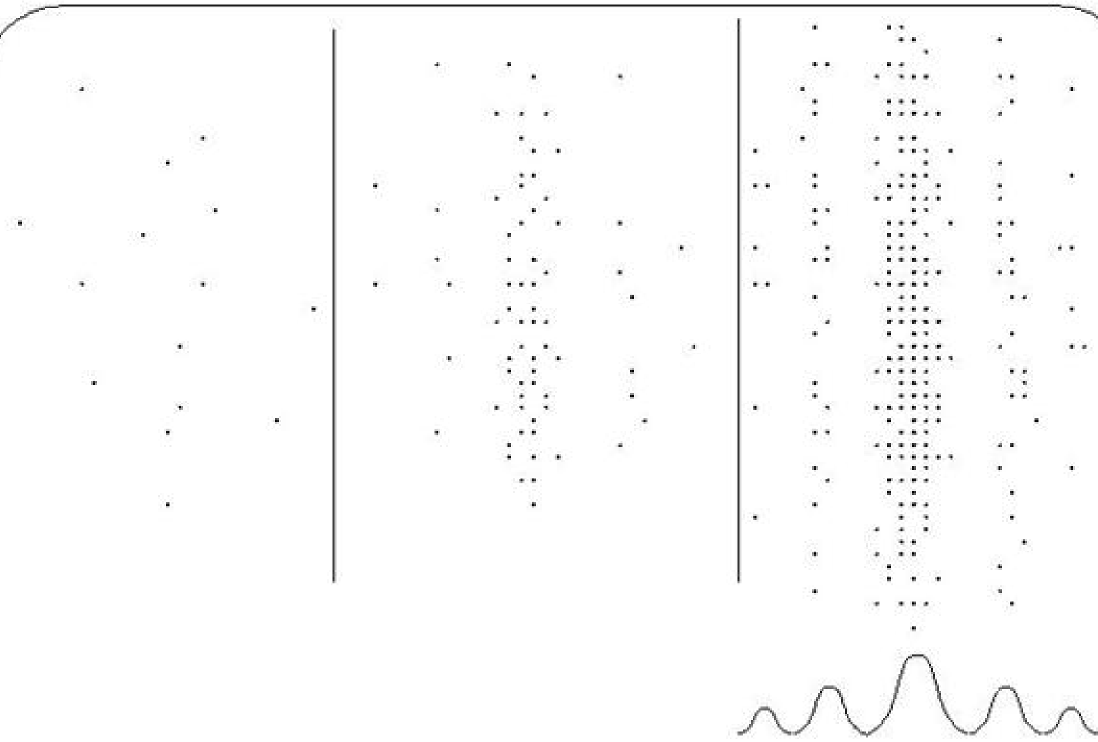


Figura 8. All'aumentare del numero di elettroni si formano le frange di interferenza

“Ma questa è una sciocchezza! - esclama Alice - Un elettrone non può passare attraverso entrambe le fenditure. Non è una cosa sensata”.
Subito dirige la luce verso le due fenditure: “Ce l’ho fatta! Riesco a vedere gli elettroni che passano attraverso le fenditure, ed è proprio come dicevo io: ciascuno di essi passa da una parte o dall’altra”.

> “Ah, ma davvero? – ribatte il Meccanico Quantistico – Ma hai provato a guardare se sullo schermo c’è sempre la figura di interferenza? Gli effetti di interferenza si verificano solo quando non c’è modo di sapere attraverso quale fenditura passa l’elettrone. Che tu poi lo sappia o no, non ha alcuna importanza. Così, come vedi, quando c’è interferenza sembrerebbe che ciascun elettrone passi per entrambe le fenditure. Se fai la prova e controlli, scoprirai che gli elettroni passano attraverso una fenditura sola, ma allora ciao interferenza! Non puoi vincere a questo gioco!”

E’ possibile sapere attraverso quale fenditura passa il singolo elettrone collocando un rivelatore alle fenditure che ci informi del passaggio del singolo elettrone. Ad esempio, potremmo osservare l’elettrone illuminandolo con un fotone (microscopio di Feynman). Saremo così in grado di sapere da quale fenditura è passato l’elettrone (v. fig. 9). Ma nel momento in cui verifichiamo il passaggio dell’elettrone-particella attraverso una delle due fenditure, l’elettrone cessa di comportarsi come un’onda e inizia a colpire anche le zone dello schermo che prima non colpiva: le frange di interferenza scompaiono.

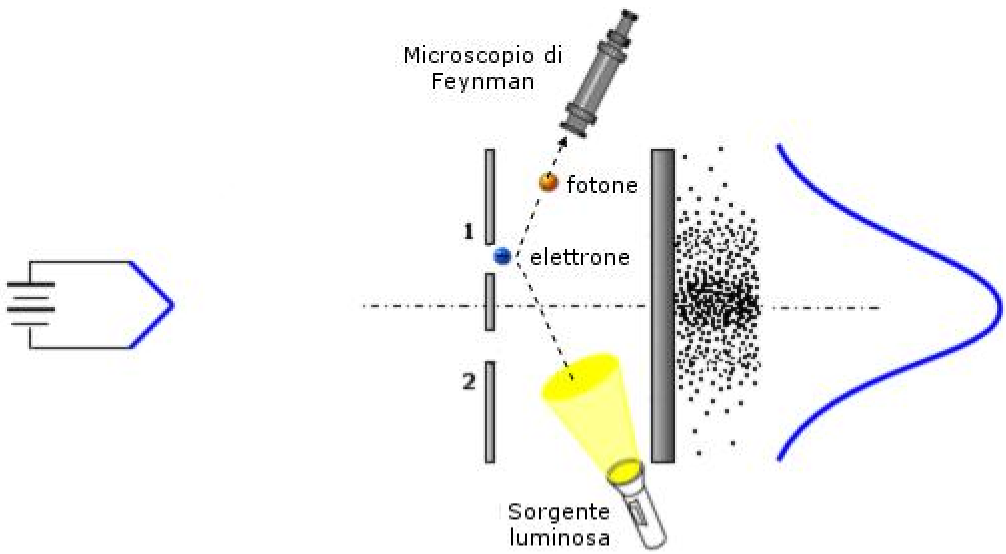


Figura 9. Microscopio di Feynman

Il caso della figura di interferenza che si verifica quando non è possibile osservare, dà luogo a un *comportamento tipicamente logico-quantistico*: la verità di una disgiunzione non implica in generale la verità di uno dei due membri della disgiunzione stessa.
La disgiunzione

l'elettrone è passato attraverso il foro 1
oppure
l'elettrone è passato attraverso il foro 2

è determinata e vera. Tuttavia, entrambi i membri della disgiunzione sono entrambi indeterminati e dunque non veri.
Quando invece osservare è possibile (anche se nessun osservatore reale sta osservando), la figura di interferenza sparisce e il connettivo "oppure" si comporta secondo la logica classica. La verità della disgiunzione implica che ciascun elettrone sia passato attraverso un foro determinato.

Una volta che abbiamo deciso di verificare che l'elettrone è una particella che passa effettivamente attraverso una delle due fenditure come un proiettile, esso si comporta effettivamente come una particella che attraversa la fenditura.
Prescindendo dunque da un effettivo atto di osservazione, non ha dunque senso parlare di esistenza oggettiva della particella in un dato punto dello spazio, ad esempio in corrispondenza di una delle due fenditure. E' ciò che viene chiamata *realtà creata dall'osservatore*. Nel momento in cui lo osserviamo, l'elettrone è una particella. Ma appena cessiamo di osservarlo, si comporta come un'onda. Le diverse condizioni sperimentali alterano quindi in modo sensibile i risultati che si possono ottenere. Ecco quindi che, date le sostanziali differenze di preparazione degli esperimenti, la decisione tra un modello interpretativo e l'altro è compiuta all'atto stesso dell'osservazione. La misurazione diviene in un certo qual modo un nuovo ente che viene a far parte in modo imprescindibile dello stesso fenomeno fisico sul quale si compie.

Per trattare il teorema di Gödel evitando un eccesso di tecnicismo matematico, Hofstadter costruisce in GEB un sistema semiformale dalle regole molto semplici e lo chiama *Aritmetica Tipografica*. Giocando con simboli elementari e caratteri tipografici si evita una trattazione puramente formale e le pagine guadagnano appetibilità agli occhi di un lettore non esperto in matematica.

Nel disegno seguente, di Hofsdtadter stesso, si fa un uso considerevole del simbolismo visivo per illustrare le relazioni tra varie classi di stringhe nell'Aritmetica Tipografica.

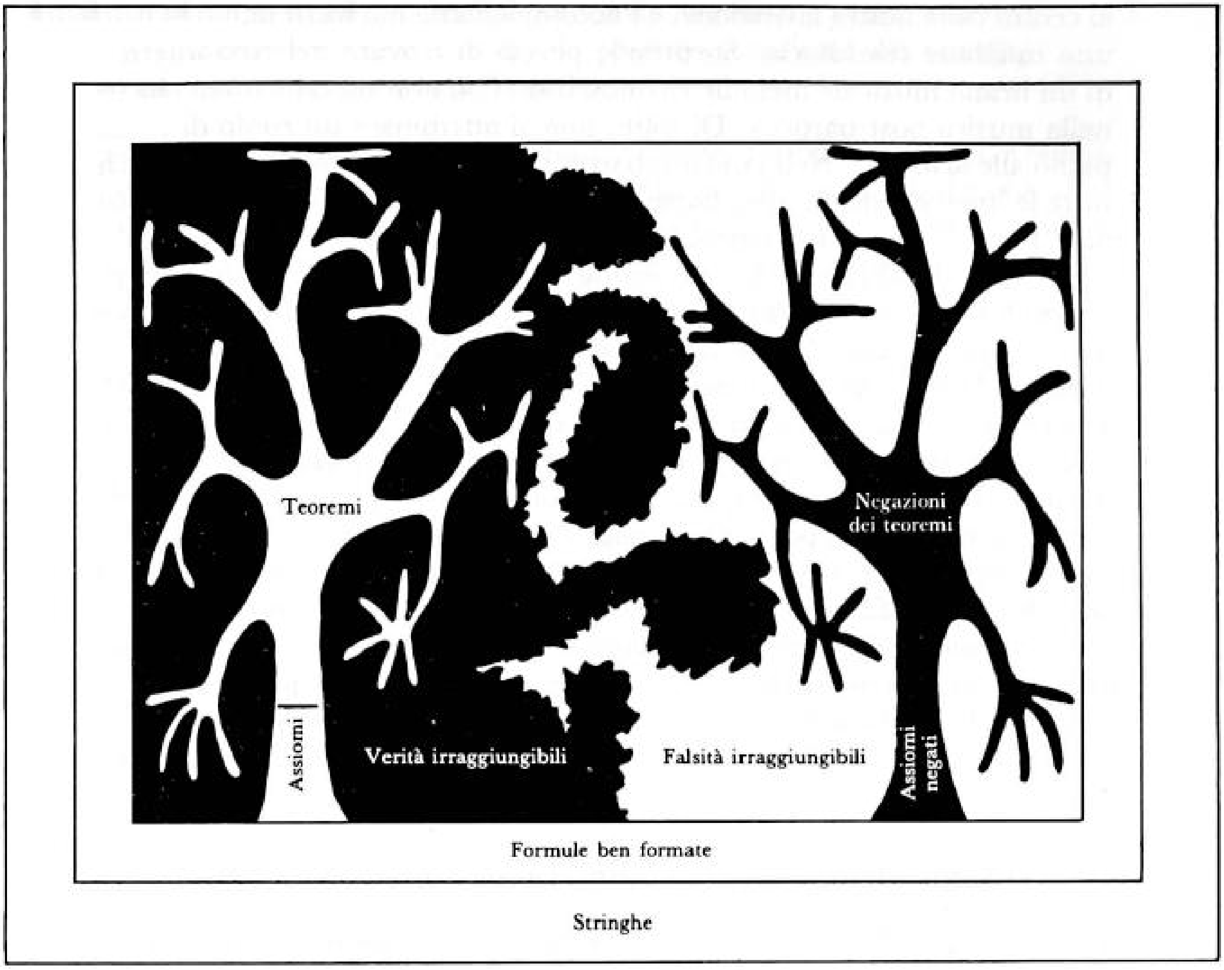


Figura 10. Classi di stringhe nell'Aritmetica Tipografica

Il riquadro più esterno rappresenta l'insieme di tutte le stringhe dell'Aritmetica Tipografica (AT). Il riquadro successivo rappresenta quello delle stringhe ben formate dell'AT. In esso si trova l'insieme degli enunciati (chiusi) dell'AT. Ora si entra nel vivo del problema. L'insieme dei teoremi è illustrato come un albero che si sviluppa da un tronco (il quale rappresenta l'insieme degli assiomi). E' stato scelto l'albero quale simbolo a causa della struttura ricorsiva del suo crescere: nuovi rami (teoremi) spuntano costantemente dai più vecchi. I rami a forma di dita scandagliano negli angoli della regione delimitante (l'insieme delle verità), senza mai poterla occupare tutta. Il confine tra l'insieme delle verità e l'insieme delle falsità vuole suggerire l'idea di una linea di costa, che mostra livelli di struttura tanto più dettagliati quanto più se ne approfondisce l'analisi, e che perciò non può mai essere descritta esattamente con strumenti finiti (si veda il libro di Mandelbrot, *Fractals*).
L'immagine speculare dell'albero dei teoremi rappresenta l'insieme delle negazioni dei teoremi: tutte false e tuttavia incapaci nel loro insieme di esaurire lo spazio degli enunciati falsi.

A questo punto di GEB, Hofstadter presenta diversi esempi tratti dall’opera di Escher, tutti accomunati dal trarre in qualche modo ispirazione dall’ambivalenza figura-sfondo.

Le ambivalenze *figura-sfondo*, *oggetto-misura*, *realtà-osservatore*, *coerenza-completezza* appaiono come declinazioni diverse della stessa domanda posta da Russell nel suo paradosso *“Un insieme può contenere se stesso?”*.

Bibliografia

G. Birkhoff, J. von Neumann
"The logic of quantum mechanics"
Ann. of Math. (2) 37 (1936), 823.

E. G. Beltrametti, G. Cassinelli
"The logic of quantum mechanics"
Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 15,
Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.

J. M. Jauch
"Foundations of quantum mechanics"
Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.

A. Venezia
"I diversi approcci alla fisica quantistica: due classificazioni e loro interpretazione"
Atti del XX Congresso Nazionale di Storia della Fisica e dell'Astronomia,
Napoli, 2001, pagg.423-450.

G. W. Mackey
"Mathematical foundations of quantum mechanics"
Benjamin, New York, 1963.

H. Reichenbach
"*I fondamenti filosofici della meccanica quantistica*"
Boringhieri, 1964.

R. P. Feynman
"*Feynman lectures on computation*"
Perseus Books Group, 2000

C. B. Boyer
"*Storia della matematica*"
Mondadori, 2000

D. R. Hofstadter
"*Godel, Escher, Bach: un'eterna ghirlanda brillante*"
Adelphi, 1984