

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"
Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Serie di Birkhoff e applicazioni

RELATORE:
Prof. Giancarlo Benettin

LAUREANDO:
Marco Dalla Via

Anno Accademico 2013/2014

Indice

1	Introduzione	5
2	Metodo diretto	8
2.1	L'operatore L_{H_2}	8
2.2	Risonanze e problemi risolutivi	10
2.3	Un caso particolare	11
3	Stime relative al metodo diretto	13
3.1	L'evoluzione degli integrali troncati	13
3.2	Un esempio numerico	15
3.3	La stabilità dell'equilibrio	21
4	Metodo indiretto	22
4.1	La trasformazione T_χ	22
4.2	La forma normale di Birkhoff	23
4.3	Le costanti del moto	24
4.4	Il "resto"	25
5	Stabilità degli asteroidi Troiani	26
5.1	Il problema a tre corpi	26
5.2	I punti lagrangiani	27
5.3	Studio di L_4 : gli asteroidi Troiani di Giove	28

Capitolo 1

Introduzione

Questo lavoro di tesi si occupa dello studio dei *sistemi hamiltoniani* nelle vicinanze di un *equilibrio ellittico* e affronta, in particolare, la questione dell'*integrabilità* di suddetti sistemi. Anche se non si tratta certo del caso più generale, tipicamente tale situazione si riscontra qualora si vadano a studiare le oscillazioni di un sistema fisico attorno ad un equilibrio stabile. Si inquadra ora il problema nella formulazione lagrangiana, per passare al linguaggio hamiltoniano in un secondo momento e mantenerlo per il prosieguo del lavoro.

Volendo considerare un caso particolarmente semplice (matrice cinetica pari alla matrice diagonale delle masse e potenziale solo posizionale), si parte da una Lagrangiana a n gradi di libertà del tipo

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{q}_i^2 + V(q) \quad q \in \mathbb{R}^n \quad \dot{q} \in \mathbb{R}^n$$

con $V(q)$ che presenti un minimo quadratico nell'origine dello spazio degli atti di moto, ovvero con la matrice Hessiana $V''(0)$ definita positiva. Per il teorema di Lagrange-Dirichlet, l'origine è allora equilibrio stabile per il sistema. Si tenga presente che non è restrittivo considerare tale equilibrio coincidente con l'origine del sistema di riferimento utilizzato: a tale caso ci si può, comunque, ricondurre con una traslazione.

Attraverso lo sviluppo in serie di Taylor attorno all'origine, la Lagrangiana diventa

$$\tilde{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_i^n m_i \dot{q}_i^2 + \tilde{V}(q)$$

con

$$\tilde{V} = \tilde{V}_2 + \tilde{V}_3 + \dots$$

dove ogni termine \tilde{V}_r è un polinomio omogeneo di ordine r e, in particolare

$$\tilde{V}_2(\tilde{q}) = \frac{1}{2} \tilde{q} \cdot V''(0) \tilde{q}$$

Se ci si limita a considerare un intorno "piccolo" dell'equilibrio, si può troncare lo sviluppo della Lagrangiana a \tilde{V}_2 , trascurando i termini successivi, e trattare il problema linearizzato. La *teoria delle piccole oscillazioni* spiega come, attraverso la diagonalizzazione di $V''(0)$ (che comporta l'adozione di nuove variabili $\hat{q}, \hat{\dot{q}}$), si possa arrivare a scrivere la Lagrangiana troncata al termine quadratico in questa forma

$$\hat{L}(\hat{q}, \hat{\dot{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\hat{\dot{q}}_i^2 - \omega_i^2 \hat{q}_i^2)$$

dove ω_i sono le frequenze, positive, dei cosiddetti *modi normali di oscillazione*. Il sistema lineare che ne deriva è del tipo

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix}$$

dove X è una matrice $2n \times 2n$ che presenta autovalori immaginari puri; pertanto l'origine è *equilibrio ellittico*. Fisicamente si tratta di un sistema di n oscillatori armonici disaccoppiati. Quello che ci si chiede a questo punto è cosa comporti considerare i termini successivi dello sviluppo, ovvero $\tilde{V}_3 + \tilde{V}_4 + \dots$, ai fini dell'integrabilità del sistema e della redistribuzione energetica tra i modi di oscillazioni, visto che tali termini aggiungono componenti di accoppiamento tra i vari gradi di libertà.

In altri casi, per esempio nel problema a tre corpi ristretto, la situazione è in partenza più complicata per la presenza di una o più frequenze $\omega < 0$ che inficia la stabilità dell'equilibrio per la Lagrangiana completa. Ai problemi già evidenziati, si aggiunge pertanto quello della connotazione dell'equilibrio.

Passando alla formulazione hamiltoniana, il problema si presenta in forma analoga: si considera un sistema hamiltoniano autonomo con n gradi di libertà di Hamiltoniana

$$H(q, p) \quad q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n \quad p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$$

e si ipotizza la presenza di un equilibrio ellittico per il problema linearizzato, ovvero di un punto $(\tilde{q}, \tilde{p}) \in \mathbb{R}^{2n}$ tale che

- $\nabla H(\tilde{q}, \tilde{p}) = 0$
- $\mathbb{J}H''(\tilde{q}, \tilde{p})$ presenta solo autovalori immaginari puri e non nulli, ove $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \mathbb{0}_{n \times n} & \mathbb{1}_{n \times n} \\ -\mathbb{1}_{n \times n} & \mathbb{0}_{n \times n} \end{pmatrix}$ è la matrice di *unità simplettica* e H'' è l'*Hessiana* di H

Lo sviluppo in serie attorno all'equilibrio in esame restituisce un'Hamiltoniana del tipo

$$\tilde{H} = \tilde{H}_2 + \tilde{H}_3 + \tilde{H}_4 + \dots$$

dove i vari termini \tilde{H}_r sono polinomi omogenei di grado r e in particolare \tilde{H}_2 può essere riscritta, tramite un opportuno cambio di variabili che diagonalizzi $\mathbb{J}H''(\tilde{q}, \tilde{p})$, nella forma

$$\hat{H}_2(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \omega_l (\hat{q}_l^2 + \hat{p}_l^2) \quad \omega_l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

La sola \hat{H}_2 fornisce lo stesso ben noto sistema integrabile già incontrato in ambito lagrangiano: n oscillatori armonici disaccoppiati con frequenze ω_l . Tale sistema presenta n integrali del moto in involuzione, le *azioni* (per non appesantire la notazione, d'ora in avanti si omettono i " $\hat{}$ " sopra le variabili, tenendo conto che quelle utilizzate sono quelle che diagonalizzano $\mathbb{J}H''(\tilde{q}, \tilde{p})$ e restituiscono \hat{H}_2)

$$I_l(q, p) = \frac{1}{2} (q_l^2 + p_l^2) \quad (l = 1, \dots, n)$$

la cui presenza è carattere fondamentale per l'integrabilità secondo il noto teorema di Liouville-Arnol'd. Come già anticipato, considerare ulteriori termini nello sviluppo di \tilde{H} comporta innanzitutto l'introduzione di problemi di integrabilità: ci si chiede se sia ancora possibile individuare n integrali primi tenendo conto di \tilde{H}_r con $r \geq 3$. L'approccio a questo tipo di

problema può seguire due diversi metodi, illustrati nei prossimi capitoli.

Il primo metodo, tipicamente indicato come *metodo diretto*, sviluppato da Whittaker, Chery e Contopoulos (cfr. [1] e [2]) consiste nel tentare di costruire n *integrali formali* $\Phi^{(l)}(q, p)$ (con $l = 1, \dots, n$), cioè n serie formali (ovvero serie la cui eventuale convergenza non viene discussa)

$$\Phi^{(l)}(q, p) = \sum_{s=2} \phi_s^{(l)}(q, p)$$

ove ciascun $\phi_s^{(l)}(q, p)$ è un polinomio omogeneo di grado s , tali che

$$\{\tilde{H}, \Phi^{(l)}\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_j} \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial p_j} - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_j} \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial q_j} \right) = 0 \quad (1.1)$$

Si cerca dunque di risolvere l'equazione (1.1) nell'incognita $\Phi^{(l)}$, andando a sviluppare un sistema di equazioni tra polinomi omogenei del medesimo grado.

Il secondo metodo, detto *metodo indiretto*, sviluppato da Von Zeipel, Birkhoff e Gustavson (cfr. [2], [3], [4]) si basa sulla ricerca e costruzione di una trasformazione canonica che porti l'Hamiltoniana in una forma particolare, chiamata *forma normale di Birkhoff*, in modo che gli integrali cercati siano immediatamente forniti.

L'obiettivo dunque è lo stesso, la costruzione di opportune costanti del moto, ma il tipo di lavoro è diverso: con il primo metodo ci si concentra "direttamente" sugli integrali cercati, tentando di costruire un numero sufficiente di funzioni Φ che risolvano (1.1), mentre con il secondo metodo si trasforma dapprima H per poi determinare le costanti del moto.

Verranno messi in luce pregi e difetti dei due approcci, mostrando in particolare come il primo presenti un grave problema di risolubilità che non assicura di poter determinare le funzioni $\Phi^{(l)}$, ovvero le costanti del moto del sistema.

Accanto al problema dell'integrabilità, c'è quello della connotazione dell'equilibrio poichè, come già sottolineato, in generale non è detto che l'equilibrio sia stabile per l'Hamiltoniana completa. In quest'ottica, verranno presentati i principali risultati relativi alle *stime* di stabilità dell'equilibrio e di costanza degli integrali costruiti col *metodo diretto*, mentre di quello *indiretto* verrà presentata un'applicazione nell'ambito della meccanica celeste, in relazione al *problema a tre corpi ristretto*, mostrandone l'effettiva efficacia e utilità per lo studio dei casi concreti.

Capitolo 2

Metodo diretto

Come già anticipato nel Capitolo 1, il *metodo diretto* consiste nel tentativo di costruzione di n integrali del moto del sistema in esame attraverso l'equazione (1.1) (riscritta ora con una notazione più semplice, priva di "~")

$$\{H, \Phi^{(l)}\} = 0 \quad (l = 1, \dots, n)$$

con $H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots$, dove ciascun H_r è un polinomio omogeneo di grado r e

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \omega_l (q_l^2 + p_l^2) \quad \omega_l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e la si va a risolvere nell'incognita

$$\Phi^{(l)}(q, p) = \sum_{s=2}^{\infty} \phi_s^{(l)}(q, p)$$

ove ciascun $\phi_s^{(l)}$ è un polinomio omogeneo di grado s e in particolare

$$\phi_2^{(l)}(q, p) = I_l(q, p) = \frac{1}{2}(q_l^2 + p_l^2)$$

sono le n azioni classiche. L'idea quindi è quella di partire dagli integrali primi del problema lineare e correggerli in modo che (1.1) sia soddisfatta ad ogni ordine.

2.1 L'operatore L_{H_2}

Per ciascun $\Phi^{(l)}$, sviluppando l'equazione (1.1), si ottiene:

$$\{H_2, \phi_2^{(l)}\} + \{H_2, \phi_3^{(l)}\} + \{H_2, \phi_4^{(l)}\} + \dots + \{H_3, \phi_2^{(l)}\} + \{H_3, \phi_3^{(l)}\} + \dots = 0 \quad (2.1)$$

È utile richiamare la seguente proprietà delle parentesi di Poisson: dati f, g polinomi omogenei, rispettivamente di grado k e k' , $\{f, g\}$ è un polinomio omogeneo di grado $k + k' - 2$.

Per risolvere l'eq. (2.1) si vanno a raccogliere i termini, ovvero i polinomi, dello stesso grado e, tenendo conto della suddetta proprietà, si ottiene un sistema di equazioni che, ad ogni ordine s di costruzione dell'integrale del moto, si può scrivere in questo modo

$$L_{H_2} \phi_s^{(l)} = - \sum_{k=1}^{s-2} \{H_{2+k}, \phi_{s-k}^{(l)}\} \quad (2.2)$$

ove si è introdotto l'operatore L_{H_2} che altro non è che $\{H_2, \cdot\}$.

Si tratta di un sistema di equazioni ordinate gerarchicamente, a partire dall'ordine $s = 2$ in cui si trova

$$L_{H_2}\phi_2^{(l)} = L_{H_2}I_l = 0 \quad (2.3)$$

passando poi agli ordini successivi, ai quali corrisponde sempre lo stesso tipo di equazione, ovvero

$$L_{H_2}\phi_s^{(l)} = \Psi_s^{(l)} \quad (2.4)$$

dove $\Psi_s^{(l)}$ è un polinomio noto perchè dipendente da grandezze già note o costruite nel passo precedente, cioè all'ordine $s - 1$. Il problema principale, e che ora si va ad affrontare, è dunque quello di invertire l'operatore L_{H_2} per determinare $\phi_s^{(l)}$ per $s \geq 3$.

Lo spazio in cui si sta lavorando è lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei; d'ora in avanti, tale spazio verrà denominato Π . Dunque $L_{H_2} : \Pi \rightarrow \Pi$ è un operatore lineare con un *immagine* R e un *nucleo* N .

Prima di soffermarsi sulle proprietà dell'operatore L_{H_2} , è conveniente introdurre il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{cases} q_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_l + iy_l) \\ p_l = \frac{i}{\sqrt{2}}(x_l - iy_l) \end{cases} \quad (2.5)$$

È semplice verificare che tale trasformazione è canonica: per esempio, si può vedere che essa conserva le parentesi di Poisson. Un'altra caratteristica importante di tale trasformazione è che essa è lineare e quindi non altera i gradi dei polinomi in (2.1), mantenendo pertanto inalterata la struttura del sistema di equazioni (2.2).

Nelle nuove variabili x, y si ha che

- $H_2(x, y) = i \sum_{l=1}^n \omega_l x_l y_l$
- $I_l(x, y) = i x_l y_l$

mentre l'operatore L_{H_2} ha una forma piuttosto semplice

$$L_{H_2} = \sum_{l=1}^n i\omega_l \left(y_l \frac{\partial}{\partial y_l} - x_l \frac{\partial}{\partial x_l} \right)$$

I monomi $x^j y^k = x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n} y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_n^{k_n}$, con $j_1, \dots, j_n, k_1, \dots, k_n$ interi non negativi, costituiscono una base per Π e si ha che

$$L_{H_2} x^j y^k = i\omega \cdot (k - j) x^j y^k \quad (2.6)$$

ove $\omega \cdot (k - j) = \sum_{l=1}^n \omega_l (k_l - j_l)$, ovvero si considerano le n -uple degli esponenti j e k e delle armoniche ω alla stregua di vettori, in particolare j e $k \in \mathbb{N}^n$, $(k - j) \in \mathbb{Z}^n$, mentre $\omega \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. È dunque evidente che i monomi $x^j y^k$ siano *autovettori* per L_{H_2} con *autovalori* $i\omega \cdot (k - j)$ e che L_{H_2} sia diagonalizzabile. Da ciò segue immediatamente che $R \cap N = \emptyset$ e $R \cup N = \Pi$. Inoltre $\forall f \in \Pi$ si ha la scomposizione $f = f_R + f_N$.

Queste considerazioni sull'immagine e sul nucleo di L_{H_2} sono molto importanti poichè, come sarà chiaro in seguito, sono proprio i termini di nucleo a costituire l'ostacolo principale all'efficacia del metodo.

2.2 Risonanze e problemi risolutivi

Osservando (2.6) si capisce che ci si possa trovare di fronte a due casi diversi:

- **caso risonante** : $\omega \cdot m = 0$ per qualche $m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. In questo caso, il *nucleo* N dell'operatore conterrà tutti i monomi $x^j y^k$ tali che la *n-upla* $(k - j)$ annulli il suddetto prodotto scalare.
- **caso non risonante** : $\omega \cdot m = 0 \Rightarrow m_l = 0 \quad \forall \quad l = 1, \dots, n$. Il *nucleo* N è ora costituito dai soli monomi $x^j y^k$ che verificano la condizione $j = k$; nelle variabili p, q a tali monomi corrispondono espressioni del tipo $[\frac{1}{2}(q_l^2 + p_l^2)]^k = I_l^k$, ovvero N è composto da funzioni solamente delle *azioni*.

Tornando al sistema di equazioni (2.2), è semplice constatare che (2.3) è automaticamente verificata in entrambi i casi, mentre per i termini $\phi_s^{(l)}$ con $s \geq 3$ la questione è più complicata. Si consideri, per esempio, il secondo termine dell'integrale formale in costruzione, ovvero $\phi_3^{(l)}$. Si deve andare a risolvere la seguente equazione, nell'incognita $\phi_3^{(l)}$:

$$L_{H_2} \phi_3^{(l)} = -\{H_3, \phi_2^{(l)}\} \quad (2.7)$$

Per quanto detto in precedenza riguardo alla parentesi di Poisson tra due polinomi omogenei, si ha che il termine di destra di (2.7) è un polinomio (noto, poichè sono noti sia H_3 che $\phi_2^{(l)} = I_l$) omogeneo di grado 3 e verrà da ora designato, in accordo con (2.4), come $\Psi_3^{(l)}(x, y) = \sum_{j,k} c_{jk} x^j y^k$, per certi coefficienti c_{jk} in generale complessi, con $\sum_{m=1}^n j_m + \sum_{i=1}^n k_i = 3$, condizione che verrà indicata con $|j+k|=3$.

Per quanto riguarda il termine di sinistra di (2.7), si ha che l'incognita $\phi_3^{(l)}$ avrà la forma $\phi_3^{(l)}(x, y) = \sum_{|j+k|=3} a_{jk} x^j y^k$ per dei coefficienti incogniti a_{jk} . Ricordando l'azione di L_{H_2} sui monomi $x^j y^k$ (si veda (2.6)), si ha che (2.7) diventa:

$$\sum_{|j+k|=3} i\omega \cdot (k - j) x^j y^k = \Psi_3^{(l)}(x, y) \quad (2.8)$$

A questo punto, si dovrebbe ottenere la soluzione cercata semplicemente dividendo i coefficienti c_{jk} per $i\omega \cdot (k - j)$ e calcolando, quindi, i coefficienti incogniti a_{jk} :

$$a_{jk} = \frac{c_{jk}}{i\omega \cdot (k - j)} \quad \text{da cui:} \quad \phi_3^{(l)}(x, y) = \sum_{|j+k|=3} \frac{c_{jk}}{i\omega \cdot (k - j)} x^j y^k$$

Più in generale, si ottiene:

$$\phi_s^{(l)}(x, y) = \sum_{|j+k|=s} \frac{c_{jk}}{i\omega \cdot (k - j)} x^j y^k$$

Innanzitutto, si manifesta in modo evidente il problema della possibile presenza di termini $\omega \cdot (k - j)$ che si annullano. Tale fatto rende impossibile l'equiparazione tra i coefficienti del termine di sinistra di (2.4) e $\Psi_s^{(l)}$ e quindi la costruzione di $\phi_s^{(l)}$, a meno che i coefficienti c_{jk} non siano nulli proprio per quei j, k tali che $\omega \cdot (k - j) = 0$ (ovvero che $\Psi_s^{(l)}$ non abbia componenti non nulle nel nucleo N), cosa che in generale però non è garantita.

Dal punto di vista operatoriale, il problema maggiore è quindi la mancata invertibilità di L_{H_2} qualora si trovi ad agire su un oggetto che abbia almeno una componente non nulla contenuta

nel nucleo N dell'operatore stesso.

Questo ostacolo si presenta sia nel caso *risonante* che *non risonante*, con la differenza che in presenza di risonanze il nucleo N è più grande, come detto in precedenza, e quindi i monomi $x^j y^k$ risonanti sono in numero maggiore.

2.3 Un caso particolare

Come visto, la certezza di trovare soluzione non può essere garantita in generale, poichè non c'è modo di assicurarsi a priori che $\Psi_{s_N}^{(l)}$ sia nullo; un caso particolare e semplice in cui si ha tale certezza, in assenza di risonanze, sarà oggetto della prossima proposizione (cfr. [5]).

Proposizione 1 *Si assuma che l'Hamiltoniana reale $H(q, p)$, $(q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$, sia scrivibile come serie formale $H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots$, con $H_2 = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \omega_l (q_l^2 + p_l^2)$ e ciascun H_r polinomio omogeneo di grado r . Siano, inoltre, soddisfatte le seguenti ipotesi:*

- i) H sia pari nei momenti, cioè $H(q, p) = H(q, -p)$
- ii) l' n -upla ω sia non risonante, cioè se $\sum_{l=1}^n \omega_l m_l = 0$, m_1, \dots, m_n interi, allora $m_1 = \dots = m_n = 0$.

Allora esistono n integrali formali pari nei momenti $\Phi^{(l)}(q, p) = \sum_{s=2} \phi_s^{(l)}(q, p)$ con $\phi_2^{(l)}(q, p) = I_l(q, p) = \frac{1}{2}(q_l^2 + p_l^2)$ ($l = 1, \dots, n$), che hanno componenti univocamente definite nell'immagine R dell'operatore L_{H_2} .

Dimostrazione. (Si noti che nella seguente dimostrazione le funzioni in Π verranno definite pari o dispari in base alla loro parità o disparità nei soli momenti)

È immediato dimostrare i seguenti asserti:

1. La parentesi di Poisson di funzioni di Π , aventi la stessa parità, restituisce una funzione dispari, mentre se le funzioni hanno parità opposta, restituisce una funzione pari. Ciò deriva dalla proprietà per cui, dati $f, g \in \Pi$, rispettivamente di grado s e k nei momenti, allora $\{f, g\}$ sarà di grado $s + k - 1$ nei momenti.
2. Nel caso non risonante, N contiene esclusivamente funzioni delle azioni, pertanto solo funzioni pari nei momenti.
3. Da 1. e 2. si ha che la parentesi di Poisson di funzioni di Π aventi la stessa parità restituisce una funzione contenuta in R .

Si supponga che siano stati calcolati i termini $\phi_3^{(l)}, \dots, \phi_{s-1}^{(l)}$ e che siano pari. Ciò è certamente vero per $s=4$, ovvero per $\phi_3^{(l)}$, poichè $\{H_3, \phi_2^{(l)}\}$ è una funzione dispari (dato che $\phi_2^{(l)}$ è pari così come tutti i termini che compongono lo sviluppo formale dell'Hamiltoniana) e dunque appartiene a R ; dalla parità di H_2 segue, infine, che $\phi_3^{(l)}$ sia pari. Si procede iterativamente e, poichè ad ogni ordine s , $\Psi_s^{(l)}$ dipende soltanto dalle parentesi di Poisson tra termini dell'Hamiltoniana e i $\phi_r^{(l)}$ (con $r = 2, \dots, s - 1$) determinati precedentemente e tutti pari, esso sarà per forza una funzione dispari, contenuta pertanto in R . Da ciò segue che è possibile determinare la soluzione dell'equazione (2.4), fino ad un qualsiasi ordine s desiderato. □

In conclusione, il metodo diretto, pur corrispondendo all'approccio più intuitivo ed immediato alla questione in esame, porta con sé un grande problema di consistenza che ne inficia la capacità risolutiva. Come visto infatti, da una parte la possibile presenza di risonanze rappresenta un ostacolo fondamentale e non si hanno risultati generali a tal proposito, dall'altra parte, anche se si fosse nel caso non risonante, non è garantita la possibilità di trovare soluzione al sistema di equazioni impostato (2.2), salvo in casi particolari (Proposizione 1). Tali problemi risolutivi, come si vedrà in seguito, non sono invece presenti nel metodo indiretto che è sicuramente più complesso, ma anche più potente.

Una possibile via di sviluppo potrebbe essere considerare la possibilità di aggiungere arbitrariamente termini di nucleo ai vari $\phi_s^{(l)}$ costruiti. Tali termini sarebbero ininfluenti ai fini della verifica di (1.1), ma potrebbero modificare le $\Psi_s^{(l)}$ seguenti, aggiustandole opportunamente: in linea di principio, si potrebbe sperare di annullare $\Psi_{s_N}^{(l)}$ e garantire la possibilità di risoluzione, sia nel caso risonante che non risonante. Ad oggi, non ci sono risultati in questa direzione ma il fatto che il metodo indiretto risulti funzionare (si veda il Capitolo 4), anche in presenza di risonanze, là dove quello diretto fallisce, suggerisce che si possa fare qualcosa in più, che qualche manipolazione di questo tipo possa essere una buona strada per rendere più efficace quest'ultimo.

Capitolo 3

Stime relative al metodo diretto

Nel Capitolo precedente si è visto come, attraverso il *metodo diretto*, vengano costruiti (qualora ciò sia possibile) integrali formali del tipo

$$\Phi^{(l)} = \sum_{s=2}^{\infty} \phi_s^{(l)}$$

Tali serie in generale divergono ma opportuni troncamenti ad ordini alti, dipendenti dall'ampiezza del dominio in cui si lavora, permettono di ottenere un risultato interessante: delle funzioni che non sono esattamente costanti del moto ma evolvono molto lentamente.

Propriamente si fa riferimento all'idea di *asintoticità*, come intesa da Poincaré; data una serie di potenze (per semplicità si considera il caso unidimensionale reale con $x \in \mathbb{R}$)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \quad a_k \in \mathbb{R}$$

in generale divergente, se ne considera la somma troncata all'ordine r

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=1}^r a_k x^k$$

e ci si chiede quanto essa si scosti da quella completa. È intuitivo pensare che maggiore sia r , minore sia la differenza tra $f(x)$ e $f^{(r)}(x)$, ma in generale ciò non è sufficiente e all'aumento di r va accompagnata una restrizione del dominio. Si impone quindi il doppio limite $\lim_{r \rightarrow \infty}$ e $\lim_{\rho \rightarrow 0}$ dove ρ indica la grandezza del dominio di x (nel caso unidimensionale, l'ampiezza dell'intervallo in \mathbb{R}). Non si parla di disco (o intervallo) di convergenza ma si richiede l'azione combinata dei due limiti per controllare la differenza $|f(x) - f^{(r)}(x)|$.

Questa idea è alla base di tutto il lavoro finalizzato al calcolo delle stime relative all'evoluzione temporale delle funzioni $\Phi^{(l,r)}$ costruite e di cui verranno ora esposti i risultati principali.

3.1 L'evoluzione degli integrali troncati

Gli integrali formali costruiti vengono troncati ad un certo ordine r , in linea di principio arbitrario, scelto o perchè conduce a stime analitiche ottimali oppure, nell'ambito di lavori computazionali, in relazione alla potenza e alla memoria del calcolatore. È chiaro pertanto che essi non restino costanti nel tempo poichè si ha

$$\dot{\Phi}^{(l,r)} = \{H, \Phi^{(l,r)}\} \neq 0$$

e $\dot{\Phi}^{(l,r)}$ è una funzione ben definita, di cui si cerca di dare una stima, al fine di valutare se le funzioni $\Phi^{(l,r)}$ evolvano rapidamente o lentamente e poter quindi, in ultima analisi, giudicare la bontà del metodo di lavoro utilizzato.

Il risultato che si ottiene fa sua l'idea di asintoticità in un modo da spiegare preliminarmente. Si lavora con alcune funzioni $\Phi^{(l,r)}$ ben definite tramite la sommatoria di un certo numero di termini ed esse si differenziano per il diverso ordine di troncamento, nel senso che $\Phi^{(l,r+1)}$ contiene tutti gli ordini $\phi_s^{(l)}$ di $\Phi^{(l,r)}$ più uno : non c'è una serie a termini infiniti da confrontare con la troncata *r-esima*, ma si hanno diverse serie troncate tra cui operare una scelta, ricordando che l'obiettivo è quello di costruire delle buone "costanti del moto" per il sistema in esame, ovvero funzioni che evolvano lentamente. Si considera allora $\dot{\Phi}^{(l,r)}$ e, al fine di darne una stima, lo si sviluppa in serie e quest'ultima converge in un dominio che è tanto più piccolo, quanto maggiore è l'ordine r di troncamento di $\Phi^{(l,r)}$. A questo punto si opera su due fronti ed è qui che entra in gioco l'idea di asintoticità: si varia l'ampiezza del dominio e l'ordine di troncamento per minimizzare la stima di $\dot{\Phi}^{(l,r)}$ e quindi l'evoluzione temporale degli integrali costruiti in modo da ottenere delle funzioni $\Phi^{(l,r)}$ che siano in buona approssimazione delle costanti del moto.

Lavorando con l'Hamiltoniana sviluppata in serie, $\dot{\Phi}^{(l,r)}$ è espressa tramite una serie che parte dall'ordine $\geq r + 1$, precisamente della forma

$$\dot{\Phi}^{(l,r)} = \sum_{s=r+1} \dot{\Phi}_s^{(l,r)}$$

dove $\dot{\Phi}_s^{(l,r)}$ è polinomio omogeneo di grado s .

Per dare un'idea del tipo di lavoro da affrontare, si consideri la maggiorazione ¹

$$\|\dot{\Phi}^{(l,r)}\| \leq \sum_{s=r+1} \|\dot{\Phi}_s^{(l,r)}\|$$

Si ipotizzi, ad esempio, di riuscire ad ottenere una stima del tipo

$$\|\dot{\Phi}_s^{(l,r)}\| \leq \rho^s C_s \quad C_s \in \mathbb{R}_{>0}$$

ove ρ indica l'ampiezza del dominio considerato. Qualora si avesse $C_s \sim AB^s$, per certe costanti positive A e B , la serie $\|\dot{\Phi}^{(l,r)}\|$ convergerebbe semplicemente, in un intorno indipendente dall'ordine di troncamento r , secondo la condizione $\rho < 1/B$, ma in generale non ci si trova in questa situazione. Tipicamente si trova un andamento del tipo $C_s \sim Ar^{sn}$ e si ha quindi convergenza in un dominio che diventa sempre più piccolo all'aumentare dell'ordine r

$$C_s \sim Ar^{sn} \quad \longrightarrow \quad \text{convergenza per } \rho < \frac{1}{r^n}$$

Si arriva quindi a una stima del tipo $\|\dot{\Phi}^{(l,r)}\| < A(\rho r^n)^r$ su cui si può lavorare scegliendo un'opportuna relazione tra r e ρ .

Nei lavori di tipo analitico si cerca pertanto di individuare un *ordine ottimale di troncamento* degli integrali costruiti che dipenda dalla grandezza del dominio considerato, con l'obiettivo di minimizzare la stima dell'evoluzione temporale degli integrali stessi.

Vengono ora presentati i principali risultati ottenuti in quest'ottica, senza le relative dimostrazioni per le quali, oltre che per ulteriori dettagli, si rimanda a [6].

¹Preliminarmente va definita una qualche norma per lo spazio Π dei polinomi omogenei in un certo dominio di grandezza ρ (si veda più avanti (3.1)).

Nota Di seguito, per avere espressioni più semplici, si farà uso di un diverso modo di numerazione dei termini della serie formale che definisce $\Phi = \sum_i \phi_i$: essa non sarà più del tipo $\sum_{l=2}$ ma $\sum_{s=0}$. Pertanto, al termine s corrisponderà il termine $l = s + 2$ nella vecchia notazione.

Innanzitutto, si fa uso della seguente norma nello spazio Π : fissato $R = (R_1, \dots, R_n) \in \mathbb{R}_+^n$ e dato $f \in \Pi$, $f = \sum_{j,k} f_{jk} q^j p^k$, la sua norma è così definita

$$\|f\|_R = \sum_{j,k} |f_{jk}| R^{j+k} \quad \text{con} \quad R^{j+k} = R_1^{j_1+k_1} \dots R_n^{j_n+k_n} \quad (3.1)$$

La condizione di non risonanza viene inoltre rafforzata, richiedendo che le frequenze soddisfino una condizione di tipo *diofanteo* che comprende una successione non crescente $(\alpha_s)_{s \geq 1}$ di numeri positivi reali ². Tale condizione è:

$$|k \cdot \omega| \geq \alpha_s \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad 0 < |k| \leq s + 2 \quad (|k| = |k_1| + \dots + |k_n|)$$

Si considera poi un intorno dell'origine, ovvero dell'equilibrio ellittico in esame, del tipo:

$$\Delta_{\rho R} = \left\{ (q, p) \in \mathbb{R}^n : (q_l^2 + p_l^2)^{\frac{1}{2}} \leq \rho R_l, \quad 1 \leq l \leq n \right\}$$

dove ρ è un numero reale positivo. Dunque, dato $f \in \Pi$, di grado s , vale la seguente stima in $\Delta_{\rho R}$

$$|f| \leq \rho^s \|f\|_R$$

A questo punto si ricava una stima di $|\dot{\Phi}^{(l,r)}|$ in $\Delta_{\rho R}$ dipendente dalla grandezza del dominio, espressa da ρ , e dall'ordine di troncamento r . Si cerca quindi di rimuovere la dipendenza da tale ordine, minimizzando la stima ricavata, ottenendo un risultato che dipenda soltanto dalla grandezza dell'insieme $\Delta_{\rho R}$ considerato. In questo modo si arriva a definire un *ordine ottimale di troncamento* r_{opt} dipendente da ρ e si ricavano, per gli n integrali formali troncati all'ordine r_{opt} , le seguenti stime in $\Delta_{\rho R}$:

$$|\Phi^{(l,r_{opt})} - I_l| < C_1 \frac{\rho^3}{\rho_*} \quad (3.2)$$

$$|\dot{\Phi}^{(l,r_{opt})}| < C_2 e^{[-C_3 (\frac{\rho_*}{\rho})^{\frac{1}{n+1}}]} \quad (3.3)$$

per certe costanti $\rho_* < \rho, C_1, C_2, C_3$ positive. Si noti in particolare che sia la stima della separazione tra $\Phi^{(l,r_{opt})}$ e I_l , sia quella dello stesso $|\dot{\Phi}^{(l,r_{opt})}|$ diventano più piccole al diminuire di ρ e cioè della grandezza del dominio.

3.2 Un esempio numerico

Non è difficile avvedersi dell'esistenza di un ordine ottimale di troncamento che minimizzi $|\dot{\Phi}^{(l,r)}|$ stimato tramite la norma (3.1). Per dare prova di ciò, è stata realizzata una simulazione

²Più precisamente, la condizione nota in letteratura come *diofantea* richiede qualcosa di più, ovvero l'esistenza di una costante $\gamma > 0$ tale che

$$|k \cdot \omega| \geq \frac{\gamma}{|k|^n} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n, \quad k \neq 0$$

al computer, con l'utilizzo del software *Mathematica*, i cui risultati sono esposti di seguito. Si considera l'Hamiltoniana

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(q_2^2 + p_2^2) + q_1^2 q_2$$

Si tratta di un caso semplice, ma che concettualmente contiene tutto l'essenziale e illustra bene la proprietà di asintoticità descritta sopra: il sistema presenta due gradi di libertà (problema piano), l'equilibrio ellittico è posizionato nell'origine del sistema di riferimento considerato e l'Hamiltoniana è costituita da una parte quadratica, somma di due azioni di frequenze $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = \sqrt{2}$, e da un termine cubico $H_3 = q_1^2 q_2$.

L'obiettivo, ormai familiare, è la costruzione di $n = 2$ integrali formali del moto, della consueta forma $\Phi^{(l)} = \sum_{s=2} \phi_s^{(l)}$, attraverso il metodo diretto esposto nel Capitolo precedente. Si noti che H_3 dipende solo dalle coordinate (fisicamente si può pensare ad un potenziale posizionale) e pertanto H è pari nei momenti: $H(q, -p) = H(q, p)$. Questo fatto, unito alle frequenze non risonanti, garantisce la possibilità di trovare soluzione al sistema di equazioni (2.2) per qualsiasi ordine, come dimostrato nella Proposizione 1.

Preliminarmente, si è passati alle variabili x, y attraverso (2.5). In tali variabili si ha

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = ix_1 y_1 + i\sqrt{2}x_2 y_2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x_1^2 x_2 + ix_1^2 y_2 - y_1^2 x_2 - iy_1^2 y_2 + 2ix_1 x_2 y_1 - 2x_1 y_1 y_2)$$

Si è quindi impostato l'algoritmo per il calcolo dell'equazione (2.2) ad ogni ordine. Si noti che, nel caso considerato in cui è presente solo H_3 , il problema si riduce a risolvere

$$L_{H_2} \phi_s^{(l)} = -\{H_3, \phi_{s-1}^{(l)}\} \quad l = 1, 2 \quad s = 3, 4, \dots$$

Arrestato il processo ad un certo ordine r e ottenuto quindi $\Phi^{(l,r)} = \sum_{s=2}^r \phi_s^{(l)}$, si è andati a calcolare $\dot{\Phi}^{(l,r)}$ che risulta essere uguale a

$$\dot{\Phi}^{(l,r)} = \{H_3, \Phi^{(l,r)}\}$$

$\dot{\Phi}^{(l,r)}$ verrà indicato come "resto", con l'idea di sottolineare che esso è ciò che "allontana" $\Phi^{(l,r)}$ dall'essere un vero integrale del moto. Si noti che il resto è un polinomio omogeneo di grado $r + 1$, scrivibile nella consueta forma

$$\dot{\Phi}^{(l,r)} = \sum_{|j+k|=r+1} a_{jk} x_1^{j_1} x_2^{j_2} y_1^{k_1} y_2^{k_2} \quad a_{jk} \in \mathbb{C}$$

Viene quindi definito un opportuno intorno dell'origine, del tipo $\Delta_{\rho R}$ con $R_1 = R_2 = 1$ per semplicità, precisamente

$$\Delta_{\rho} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^4 : (x_l^2 + y_l^2)^{\frac{1}{2}} \leq \rho, \rho > 0, l = 1, 2 \right\}$$

Sfruttando la norma (3.1), si ottiene la seguente maggiorazione per dare una stima del resto in Δ_{ρ}

$$|\dot{\Phi}^{(l,r)}| \leq \rho^{r+1} \sum_{|j+k|=r+1} \|a_{jk}\|$$

dove $\|a_{jk}\|$ indica il modulo di a_{jk} .

Si è quindi proceduti alla simulazione numerica: è stato fissato $\rho = 0.28, 0.25, 0.19$ (le unità di misura sono arbitrarie, non è su di esse che si pone l'attenzione) e si è calcolato il termine

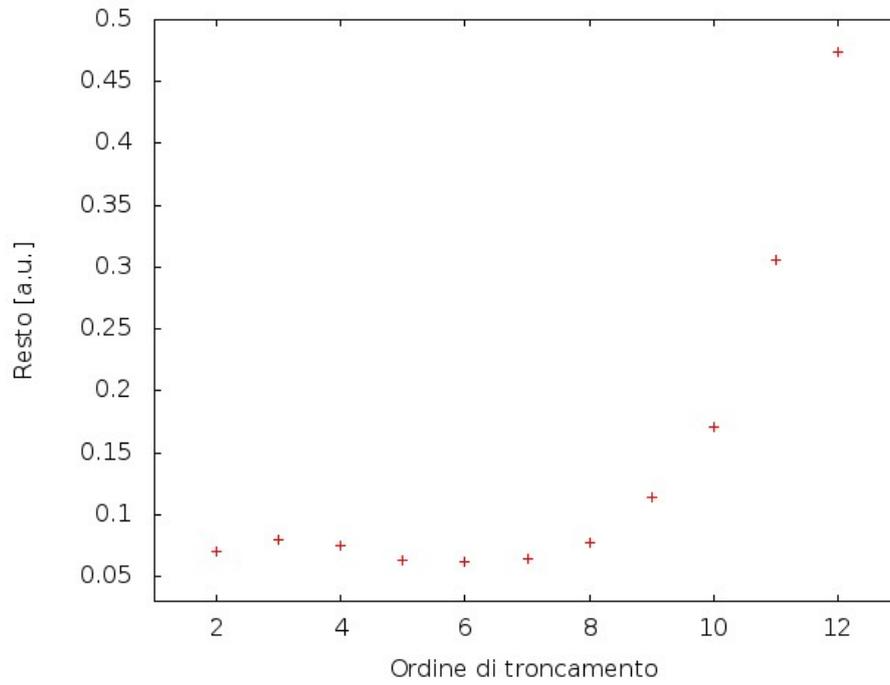
di destra della precedente maggiorazione, riferendosi ad esso come ad una stima del resto, troncando il processo a diversi ordini, da $r = 2$ a $r = 12$. I risultati sono riportati nei grafici delle pagine seguenti, disposti a coppie in riferimento ai due integrali costruiti per i diversi valori di ρ .

Per tutti e tre i valori di ρ si può constatare la presenza di un minimo a cui corrisponde l'ordine ottimale di troncamento (esso è lo stesso sia per $\Phi^{(1)}$ che per $\Phi^{(2)}$, ma in generale non è detto che sia così). A $\rho = 0.28$ il minimo corrisponde all'ordine di troncamento 6, a $\rho = 0.25$ corrisponde all'ordine 7, mentre a $\rho = 0.19$ corrisponde all'ordine 9. Si vede come al diminuire di ρ e quindi dell'ampiezza del dominio in cui si lavora, r_{opt} aumenta, come appare ragionevole debba essere, mentre diminuisce la stima del resto (si presti attenzione alle diverse scale in ordinata dei grafici): come già detto infatti, l'evoluzione degli integrali troncati diminuisce in domini via via più piccoli.

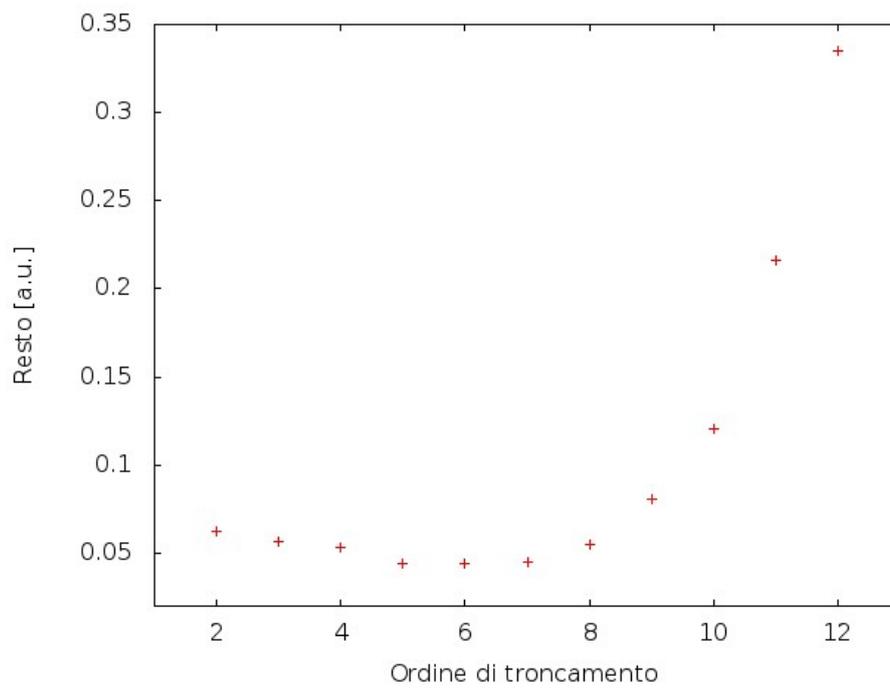
Il semplice esempio ora illustrato è puramente didattico, ma dà comunque l'idea di quale sia il risultato su cui poggia il calcolo delle stime successive, ovvero l'esistenza dell'ordine ottimale di troncamento r_{opt} che minimizzi la stima di $|\dot{\Phi}^{(l,r)}|$ e che dipende dall'ampiezza del dominio considerato. È importante notare che oltre l'ordine ottimale di troncamento, il termine $|\dot{\Phi}^{(l,r)}|$ così stimato torna a crescere molto rapidamente.

- $\rho = 0.28$

Resto di $\Phi^{(1,r)}$

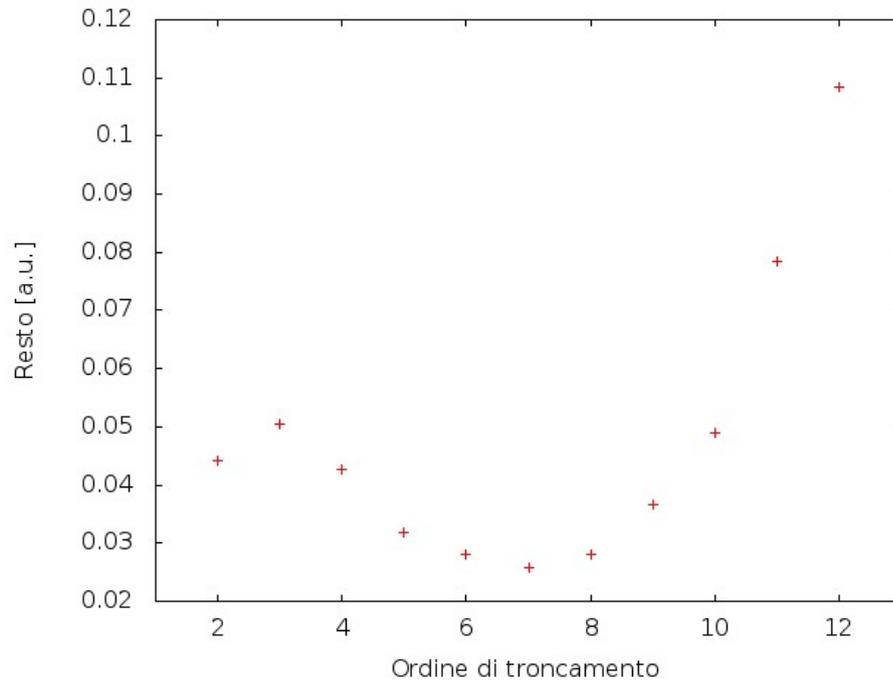


Resto di $\Phi^{(2,r)}$

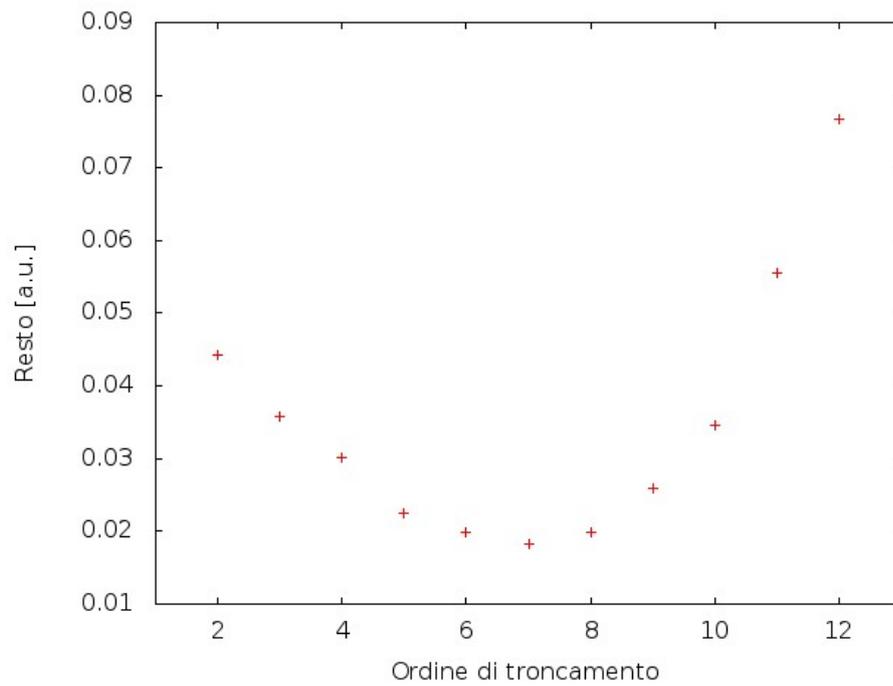


- $\rho = 0.25$

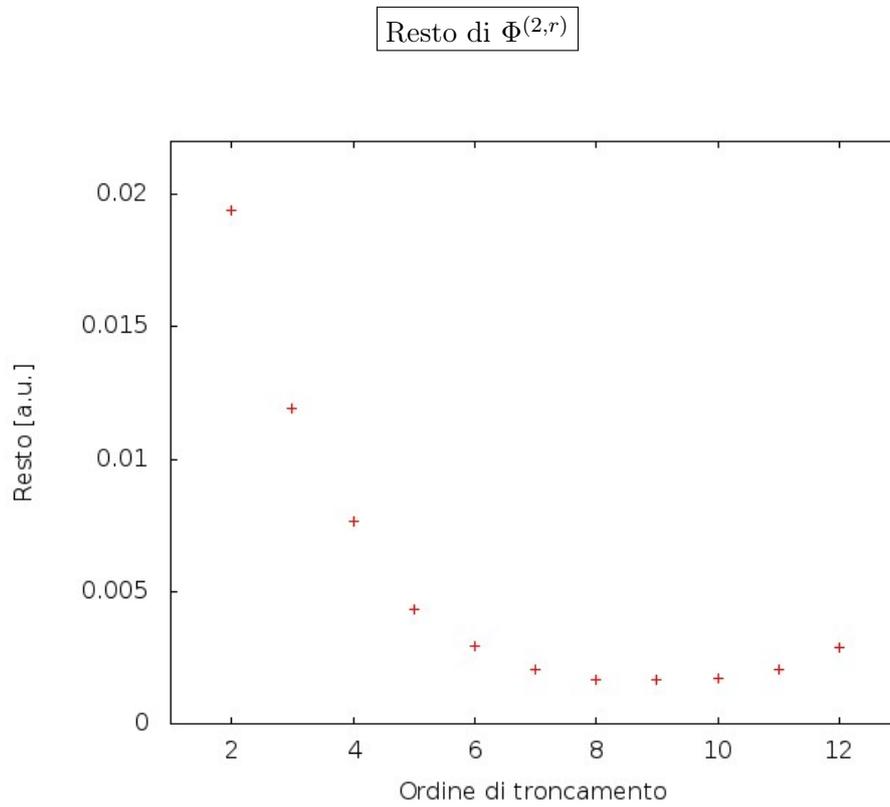
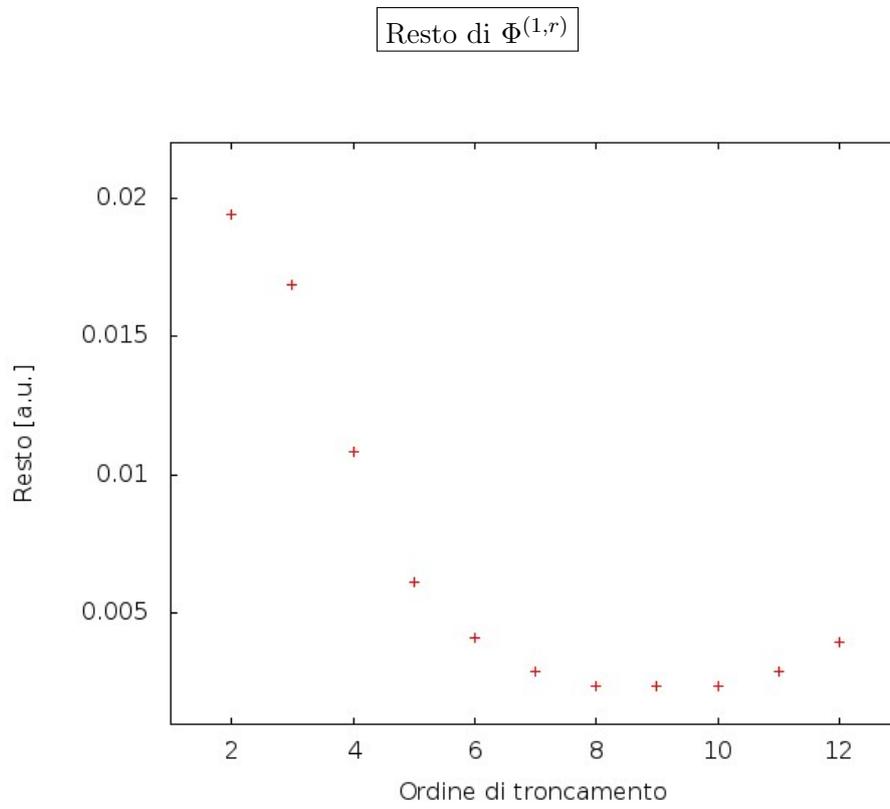
Resto di $\Phi^{(1,r)}$



Resto di $\Phi^{(2,r)}$



- $\rho = 0.19$



3.3 La stabilità dell'equilibrio

Tornando al discorso generale, le stime (3.2) e (3.3), ottenute sfruttando proprio r_{opt} , sono utili per studiare la stabilità dell'equilibrio in esame, in particolare per capire come evolvano le *azioni* I_l . Secondo i criteri di stabilità alla Lyapunov, dato il dominio $\Delta_{\rho R}$, si cerca un sottoinsieme $\Delta_{\rho_0 R}$ tale che una soluzione con dato iniziale in $\Delta_{\rho_0 R}$ resti in $\Delta_{\rho R}$ per tutti i tempi. Si noti che un punto (q, p) appartiene a $\Delta_{\rho R}$ se e solo se $I_l(q, p) \leq I_{l,max}$ per $l = 1, \dots, n$, dove $I_{l,max} = \frac{\rho^2 R_l^2}{2}$.

Si supponga, per ora, che $\Phi^{(1,r_{opt})}, \dots, \Phi^{(n,r_{opt})}$ siano delle vere costanti del moto. L'evoluzione delle azioni viene così stimata:

$$|I_l(t) - I_l(0)| \leq |I_l(t) - \Phi^{(l,r_{opt})}(t)| + |\Phi^{(l,r_{opt})}(t) - \Phi^{(l,r_{opt})}(0)| + |\Phi^{(l,r_{opt})}(0) - I_l(0)|$$

e, usando (3.2), si ottiene

$$|I_l(t) - I_l(0)| \leq 2C_1 \frac{\rho^3}{\rho_*} = \frac{4C_1 \rho}{R_l^2} I_{l,max}$$

Dunque, $I_l(t) < I_{l,max}$ se $I_l(0) \leq (1 - \frac{4C_1 \rho}{R_l^2 \rho_*}) I_{l,max}$. Se ciò è vero, l'orbita è confinata in $\Delta_{\rho R}$ per tutti i tempi e l'equilibrio è stabile. Occorre tuttavia tenere conto dell'evoluzione dei $\Phi^{(l,r_{opt})}$. Si definisce la costante di tempo

$$T = T_* e^{[C_3 (\frac{\rho_*}{\rho})^{\frac{1}{n+1}}]} \quad (3.4)$$

per una certa costante positiva T_* .

Il risultato principale riguardante la stabilità dell'equilibrio è espresso nella seguente proposizione (per approfondire, cfr. [6])

Proposizione 2 *Dati una certa costante C_4 e un qualsiasi numero reale positivo μ , vale che per ogni $\rho < [C_4(1 + \mu)]^{-1} \rho_*$ e per ogni dato iniziale che soddisfi la condizione $I_l(0) \leq [1 - \frac{4C_1 \rho}{R_l^2 \rho_*} (1 + \mu)] I_{l,max}$, si ha che*

$$I_l(t) < I_{l,max} \quad \text{per} \quad |t| < T$$

Quella trovata è una stima tipica quando si lavora nell'ambito del Teorema di Nekhoroshev, ovvero viene garantito il confinamento in $\Delta_{\rho R}$ e conseguentemente la stabilità dell'equilibrio, per tempi esponenzialmente lunghi, a condizione di considerare il dato iniziale in un certo intorno dell'equilibrio. Parallelamente e sempre per lo stesso lasso temporale, si vede come l'evoluzione delle *azioni* sia limitata, ovvero esse sono "quasi" conservate.

Come già puntualizzato, non va dimenticato che il lavoro non termina una volta ottenuta una stima soddisfacente: occorre (ed è forse l'aspetto più complesso) verificare che essa sia qualitativamente aderente al problema fisico in esame e capire se quest'ultimo possa permettere di chiedersi qualcosa in più o, altrimenti, imponga di limitare le pretese.

Capitolo 4

Metodo indiretto

Il *metodo indiretto* si basa sull'utilizzo di una *trasformazione canonica* che porti l'Hamiltoniana, sviluppata in serie, in una nuova forma, detta *forma normale di Birkhoff*, avente determinate caratteristiche. Nel caso non risonante, essa è integrabile e cioè ammette n costanti del moto, ma come si vedrà, tale metodo è utile anche nel caso risonante, contrariamente al metodo diretto, poichè permette comunque di costruire un certo numero di integrali primi. L'obiettivo, che ora verrà chiarito, è quello di trasformare l'Hamiltoniana in una nuova funzione Z , detta appunto forma normale di Birkhoff, contenente solamente termini del nucleo N di L_{H_2} . In tal modo, in assenza di risonanze, Z sarà funzione delle sole n azioni che quindi saranno costanti del moto sia del problema linearizzato, sia di quello completo. In presenza di risonanze invece, Z non sarà funzione soltanto delle azioni e, come si vedrà, il numero di integrali costruibili diminuirà. L'ottica, comune al metodo diretto, è quindi quella di procedere a partire dal problema linearizzato, rappresentato da H_2 e dalle azioni, e apportarvi delle opportune correzioni.

4.1 La trasformazione T_χ

Il punto di partenza è l'Hamiltoniana sviluppata nell'ormai consueto modo $H = H_2 + H_3 + \dots$ con H_r polinomio omogeneo di grado r e H_2 opportunamente portata nella forma

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \omega_l (q_l^2 + p_l^2) \quad \omega_l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Mentre con il metodo diretto si cerca di risolvere l'equazione (1.1) $\{H, \Phi\} = 0$ costruendo ad hoc la funzione Φ , ora ci si concentra sull'Hamiltoniana e si cerca di modificarla mantenendo l'obiettivo di trovare un certo numero di costanti del moto Φ .

Innanzitutto si introduce una funzione χ che *generi* la trasformazione T_χ cercata.

Definizione Data $\chi \in \Pi$, $\chi = \chi^{(3)} + \chi^{(4)} + \dots$, si definisce $T_\chi : \Pi \rightarrow \Pi$ nel modo seguente:

$$T_\chi f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots \quad (4.1)$$

dove $f \in \Pi$ e

$$f_0 = f, \quad f_r = \sum_{k=1}^r \frac{k}{r} \{\chi^{(2+k)}, f_{r-k}\} \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (4.2)$$

Vale la proprietà, di semplice verifica, per cui se f è di ordine s , allora f_r è di ordine $r + s$. Inoltre T_χ è lineare, invertibile e gode della seguente proprietà:

$$T_\chi\{f, g\} = \{T_\chi f, T_\chi g\} \quad (4.3)$$

da cui deriva che T_χ sia una *trasformazione canonica* (per la dimostrazione delle proprietà di T_χ cfr. [2]). Dunque, dati H e χ , esiste un'unica funzione Z tale che $T_\chi Z = H$ e si costruirà χ in modo che Z sia proprio la forma normale di Birkhoff. La nuova Hamiltoniana Z sarà funzione di nuove variabili *normali* $\hat{x} = T_\chi x$ e $\hat{y} = T_\chi y$ (dalle quali si può passare a \hat{q}, \hat{p} tramite (2.5)); a questo proposito si noti che $T_\chi Z = H$ definisce la trasformazione inversa, dalla forma normale all'Hamiltoniana originaria, cioè antitransforma $Z(\hat{x}, \hat{y})$ in $H(x, y)$.

Una volta ottenuta Z e in virtù della proprietà (4.3), la ricerca di un integrale del moto $\Phi(x, y)$ tale che $\{H, \Phi\} = 0$ diventerà la ricerca di una funzione $\tilde{\Phi}(\hat{x}, \hat{y})$ tale che $\{Z, \tilde{\Phi}\} = 0$ e l'integrale cercato sarà dato da $\Phi = T_\chi \tilde{\Phi}$.

Prima di procedere con la costruzione di Z , è utile ricordare il *nucleo* N e l'*immagine* R dell'operatore L_{H_2} e, accanto ad essi, considerare lo spazio $\bar{N} \subset \Pi$ di quegli elementi f tali che $\{f, g\} = 0 \quad \forall g \in N$. Si noti che, poichè $H_2 \in N$, si ha che $\bar{N} \subset N$ e inoltre \bar{N} non è vuoto dato che H_2 vi appartiene. L'utilità di \bar{N} consiste nel fatto che, come si vedrà in seguito, esso contiene proprio le funzioni $\tilde{\Phi}$ cercate.

4.2 La forma normale di Birkhoff

Definita T_χ e inquadrato l'obiettivo, si può ora mostrare come sia possibile trovare χ in modo tale che $Z \in N$ e allora qualsiasi $\tilde{\Phi} \in \bar{N}$, tramite T_χ , darà l'integrale cercato. A tal fine, si scrive esplicitamente l'equazione $T_\chi Z = H$ e, definendo Z come serie formale $Z = Z^{(2)} + Z^{(3)} + Z^{(4)} + \dots$, per la linearità di T_χ , si ha:

$$T_\chi Z = T_\chi Z^{(2)} + T_\chi Z^{(3)} + \dots = Z^{(2)} + Z_1^{(2)} + Z_2^{(2)} + \dots + Z^{(3)} + Z_1^{(3)} + Z_2^{(3)} + \dots = H$$

Ricordando ora che $Z_r^{(s)}$ è di ordine $r + s$, si sviluppa un sistema di equazioni raggruppando i termini dello stesso ordine. Di fatto ci si riconduce ad un sistema "iterativo" di equazioni ordinate gerarchicamente, sul modello di (2.2), con la differenza che ora le funzioni incognite sono due: Z e χ . Tale sistema presenta, in analogia con (2.2), un'equazione di base che si ripete per ogni ordine s

$$Z^{(s)} = H_s - \sum_{k=1}^{s-2} Z_k^{(s-k)} \quad (s = 2, 3, \dots) \quad (4.4)$$

La prima equazione è dunque quella per l'ordine $s = 2$

$$Z^{(2)} = H_2$$

Si tratta di un'uguaglianza in forma funzionale, proprio come (4.4), in quanto, come già detto, Z sarà funzione delle nuove variabili normali \hat{x}, \hat{y} . Si può quindi constatare come la forma normale parta dal termine quadratico dell'Hamiltoniana, mantenendolo immutato nella forma, poichè H_2 , come si è già avuto modo di far notare, è contenuto in N .

Si noti che, proprio come nel caso del metodo diretto ove i termini quadratici di ogni $\Phi^{(l)}$

sono le azioni I_l le quali sono integrali primi per il problema linearizzato prodotto dalla sola H_2 , anche in questa sede il punto di partenza è, in un certo senso, lo stesso: l'attenzione ora è posta sull'Hamiltoniana e non sugli integrali da costruire, ma la base da cui si sviluppa il processo è proprio H_2 .

Per quanto riguarda gli ordini successivi a $s = 2$, richiamando (4.1) e (4.2) e sviluppando i conti si vede che l'equazione per $Z^{(s)}$ in (4.4) può essere così riscritta:

$$Z^{(s)} - L_{H_2}\chi^{(s)} = H_s + Q^{(s)} \quad (s = 3, 4, \dots) \quad (4.5)$$

dove $Q^{(s)}$ dipende da Z e χ solo fino all'ordine $s - 1$.

A questo punto, seguendo il lavoro di Birkhoff e Gustavson, si considera (4.5) come un'equazione per $Z^{(s)}$ e $\chi^{(s)}$ e si pone in atto l'idea principale del processo: si richiede che $Z^{(s)}$ appartenga a N . Per far ciò si riscrive e si scompone (4.5) nel modo seguente:

$$L_{H_2}\chi^{(s)} = -P_R(H^{(s)} + Q^{(s)}) \quad (4.6)$$

$$Z^{(s)} = P_N(H^{(s)} + Q^{(s)}) \quad (4.7)$$

dove P_R e P_N sono i *proiettori*, rispettivamente in R e in N , ben definiti vista la diagonalizzabilità di L_{H_2} e la scomposizione $\Pi = R \oplus N$.

Si noti che, procedendo iterativamente per entrambe le equazioni, ad ogni ordine s il termine di destra è noto, poichè calcolato nel passo precedente, cioè all'ordine $s - 1$. L'equazione (4.6) determina univocamente $\chi_R^{(s)}$, mentre $\chi_N^{(s)}$ resta arbitrario. Nel contempo viene determinato il termine $Z^{(s)}$ della *forma normale* che, per costruzione, sarà funzione esclusivamente di $\hat{x}^j \hat{y}^k$ con $(k - j) \cdot \omega = 0$.

Si è dunque dimostrato come sia possibile trovare χ in modo tale che $Z \in N$ e si può ora andare a determinare un integrale formale Φ per ogni $\tilde{\Phi} \in \bar{N}$.

4.3 Le costanti del moto

Prima di indagare cosa sia contenuto in \bar{N} , si deve operare un distinguo tra il caso *risonante* e il caso *non risonante*, come definiti nel Capitolo 2. Come già detto in precedenza, una base di N è costituita dai monomi $x^j y^k$ tali che $\omega \cdot (k - j) = 0$, con k e $j \in \mathbb{N}^n$ e in assenza di risonanze tale base si riduce ai monomi $x^k y^k$ dove $k \in \mathbb{N}^n$. Si indicherà ora con $M_\omega \subset \mathbb{Z}^n$ l'insieme delle *n-uple* m di interi tali che $\omega \cdot m = 0$. M_ω ha dimensione r , con $0 \leq r < n$. Dunque, per costruzione, Z è funzione dei monomi $\hat{x}^j \hat{y}^k$ con $(k - j) \in M_\omega$ e si tenga presente che M_ω contiene anche l'*n-upla* banale nulla a cui corrisponde il caso $k = j$.

In assenza di risonanze, $r = 0$ e Z sarà funzione dei soli monomi $\hat{x}^k \hat{y}^k$ a cui, come visto in precedenza, corrispondono le *azioni* nelle variabili \hat{q}, \hat{p} . In \bar{N} sono quindi contenuti i monomi relativi alle singole azioni, ovvero $\hat{x}_l \hat{y}_l$ ($l = 1, \dots, n$) ed essi possono quindi essere utilizzati per costruire n costanti del moto: è semplice verificare che $\{\hat{x}_l \hat{y}_l, Z\} = 0$ (è un caso particolare della nota proprietà delle parentesi di Poisson per cui $\{g, f(g)\} = 0$). Come detto in precedenza, si arriva quindi alla non banale conclusione che le azioni rimangono integrali primi dell'Hamiltoniana completa.

Si supponga, invece, di essere in presenza di $r > 0$ relazioni indipendenti di risonanza, ovvero r *n-uple* m non nulle, linearmente indipendenti, tali che $m \cdot \omega = 0$. In questo caso, Z sarà funzione, in generale, non solo delle azioni ma anche dei monomi $\hat{x}^j \hat{y}^k$ con $(k - j) \neq 0$: si parla di *forma normale risonante*. Si possono allora costruire non n , bensì $n - r$ integrali indipendenti della forma

$$\tilde{\Phi} = \sum_{l=1}^n \gamma_l \hat{x}_l \hat{y}_l \quad \text{dove} \quad \gamma \perp M_\omega \quad (4.8)$$

Infatti si ha che

$$\{\tilde{\Phi}, Z\} = \sum_{(k-j) \in M_\omega} \left(\frac{\partial Z}{\partial(\hat{x}^j \hat{y}^k)} \hat{x}^j \hat{y}^k \sum_{l=1}^n \gamma_l(k_l - j_l) \right)$$

dove $\sum_{l=1}^n \gamma_l(k_l - j_l) = \gamma \cdot (k - j) = 0 \quad \forall \quad (k - j) \in M_\omega$, per la connotazione di γ in (4.8), e dunque $\{\tilde{\Phi}, Z\} = 0$ come si voleva.

Poichè M_ω ha dimensione r , è chiaro che il suo spazio ortogonale avrà dimensione $n - r$ e tale sarà il numero di integrali indipendenti costruibili. Pertanto, all'aumentare del numero di risonanze, l'insieme \bar{N} , che contiene le costanti del moto, diventa via via più piccolo. Si tenga infine presente che $n - r$ integrali sono in numero insufficiente per l'integrabilità del sistema in esame, ma la loro individuazione costituisce comunque un successo se confrontato con l'inefficacia del *metodo diretto* riscontrata in presenza di risonanze.

4.4 Il "resto"

In analogia con quanto visto nel Capitolo 3, anche in questo caso il processo viene arrestato ad un certo ordine r e, opportunamente, viene troncata anche la funzione generatrice χ . Andrà allora preso in considerazione il termine di "resto"

$$R^{(r)} = H - T_\chi(Z)$$

con $Z = \sum_{i=2}^r Z^{(i)}$; esso sarà una serie di polinomi omogenei di grado $\geq r + 1$. Si noti che il termine "resto" è qui usato con un'accezione sottilmente diversa rispetto a quella vista nel Capitolo 3: in quella sede fa riferimento alla derivata temporale degli integrali del moto troncati ($\dot{\Phi}^{(l,r)} \neq 0$), mentre ora viene utilizzato per indicare quella parte dell'Hamiltoniana sviluppata in serie che non viene portata in forma normale e che quindi impedisce alle funzioni $\tilde{\Phi}$ costruite di essere esattamente conservate. L'Hamiltoniana con cui si andrà a lavorare dovrà tenere conto del resto e sarà quindi

$$\hat{Z} = Z + T_\chi^{-1} R^{(r)}$$

e quindi le funzioni $\tilde{\Phi}$ non saranno esattamente conservate poichè si avrà

$$\dot{\tilde{\Phi}} = \{\tilde{\Phi}, \hat{Z}\} = \{\tilde{\Phi}, T_\chi^{-1} R^{(r)}\} \neq 0$$

Nel trattare $\dot{\tilde{\Phi}}$ si opera seguendo le stesse idee (asintoticità, ordine ottimale di troncamento) esposte nel Capitolo 3. Si arriva ad enunciare dei teoremi che stabiliscono condizioni di esistenza, in un certo dominio, della trasformazione canonica considerata e che individuano delle opportune stime per il termine di "resto", mostrando l'esistenza di un ordine ottimale di troncamento per la forma normale che minimizza la norma $\|T_\chi^{-1} R^{(r)}\|$ (norma definita in modo analogo a (3.1)) e quindi l'evoluzione degli integrali costruiti. Tali argomenti non verranno trattati nel qui presente lavoro; per un maggiore approfondimento si rimanda a [7] e [8]. L'idea guida è quella già vista, ovvero stimare l'evoluzione delle *azioni*, sia nelle variabili normali che in quelle di partenza, e almeno nel caso non risonante, quello che si riesce a dimostrare è, ancora una volta, il confinamento del moto entro un certo intorno dell'equilibrio per un tempo esponenzialmente lungo, del tipo (3.4). Un risultato di questo tipo sarà esposto nel prossimo Capitolo.

Capitolo 5

Stabilità degli asteroidi Troiani

Si illustra di seguito un'applicazione del *metodo indiretto* nell'ambito della meccanica celeste e i risultati ottenuti (cfr. [9]). Si considera il sistema costituito da Sole, Giove e un gruppo di asteroidi detti "Troiani" orbitanti in una certa regione dello spazio. Si tratta di un caso del problema a tre corpi, *ristretto* perchè si assume che il moto degli asteroidi non influenzi quello dei due corpi primari, *circolare* poichè il Sole e Giove sono messi in un'orbita circolare e non ellittica, *piano* poichè ci si restringe ai moti degli asteroidi nel piano formato dall'orbita dei due primari. L'obiettivo è studiare la stabilità dell'equilibrio attorno a cui si trovano disposti gli asteroidi.

5.1 Il problema a tre corpi

Innanzitutto, viene inquadrato il problema in esame partendo dallo studio del moto nel piano dei due primari sotto l'azione dell'interazione gravitazionale, considerando l'Hamiltoniana (le coordinante maiuscole sono riferite al Sole, mentre quelle minuscole a Giove):

$$H(Q, q, P, p) = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2m} - \frac{GMm}{r} \quad (5.1)$$

dove

$$\begin{aligned} Q &= (Q_1, Q_2), & q &= (q_1, q_2), & P &= (P_1, P_2), & p &= (p_1, p_2) \\ P^2 &= P_1^2 + P_2^2, & p^2 &= p_1^2 + p_2^2, & r &= \sqrt{(Q_1 - q_1)^2 + (Q_2 - q_2)^2} \end{aligned}$$

e G è la costante di gravitazione universale. Si introducono quindi le coordinate del baricentro $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ e quelle relative $\rho = (\rho_1, \rho_2)$

$$\tilde{q} = \frac{MQ + mq}{M + m}, \quad \rho = q - Q$$

definendo una trasformazione puntuale che si estende ai momenti con

$$\tilde{p} = P + p, \quad \pi = \frac{Mm}{M + m} \left(\frac{p}{m} - \frac{P}{M} \right)$$

dove $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ e $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ sono i momenti coniugati rispettivamente a \tilde{q} e ρ . Si ottiene una nuova Hamiltoniana K

$$K(\tilde{q}, \rho, \tilde{p}, \pi) = \frac{\tilde{p}^2}{2(M + m)} + \frac{\pi^2}{2\mu} + \frac{GMm}{r}$$

dove $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ è la *massa ridotta* del sistema e $r = \|\rho\| = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$. Il problema è ora disaccoppiato e il grado di libertà interno ρ, π è governato dall'Hamiltoniana a due gradi di libertà

$$\hat{K}(\rho, \pi) = \frac{\pi^2}{2\mu} + \frac{GMm}{r}$$

\hat{K} è l'Hamiltoniana del noto problema piano di Keplero che è integrabile alla Liouville-Arnol'd ed ammette, come moto possibile, quello circolare attorno al centro di massa con velocità angolare ω che soddisfa la relazione $\omega^2 r^3 = G(M+m)$ (terza legge di Keplero).

All'Hamiltoniana (5.1), denotata ora H_0 , si aggiunge un terzo corpo di massa ϵ (un asteroide nel caso che sarà studiato in seguito) descritto dalle coordinate q', p' , ottenendo

$$H = H_0 + H'$$

con

$$H' = \frac{p'^2}{2\epsilon} - \frac{\epsilon GM}{\|q' - Q\|} - \frac{\epsilon Gm}{\|q' - q\|}$$

Nel problema "ristretto" si considera $\epsilon \ll M$ e $\epsilon \ll m$ e, come già detto, il moto di ϵ non influenza quello degli altri due corpi; pertanto Q e q non sono coordinate, ma funzioni date, corrispondenti a particolari soluzioni del problema piano a due corpi. Si fa quindi riferimento non ad un solo problema per il terzo corpo, ma ad una famiglia di problemi, a seconda di quale specifica soluzione venga considerata: nel caso in esame, si prende la soluzione circolare di cui si è discusso sopra. C'è da tener presente che, a priori, il moto del terzo corpo non è piano, ovvero sia q' che p' appartengono a \mathbb{R}^3 . Il valore di ϵ è secondario e si può porre uguale a uno con un riscaldamento canonico.

Considerata dunque la soluzione circolare, è conveniente passare al sistema corotante con velocità angolare ω tale che $\omega^2 r^3 = G(M+m)$. Inoltre si effettuano alcuni riscalamanti delle costanti presenti, introducendo quindi nuove unità di misura per il problema: si pone $r = 1$, $\omega = 1$, $m+M = 1$ e quindi $G = 1$. Nel sistema di riferimento adottato pertanto i due primari appaiono fermi in $Q^* = (-\eta, 0, 0)$ e $q^* = (1-\eta, 0, 0)$ dove $\eta = \frac{m}{m+M} = m$; si ottiene infine la nuova Hamiltoniana nelle variabili finali q, p

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2} - q_1 p_2 + q_2 p_1 - \frac{1-\eta}{\|q - Q^*\|} - \frac{\eta}{\|q - q^*\|}$$

5.2 I punti lagrangiani

Si cercano ora i punti che annullano ∇H e che saranno pertanto di equilibrio. Si trova subito, come anche intuitivamente appare plausibile, che debba essere

$$q_3 = 0, \quad p_3 = 0$$

ovvero si resta nel piano formato dai due primari. Restano da determinare q_1, q_2, p_1, p_2 : tramite le equazioni

$$p_1 + q_2 = 0, \quad p_2 - q_1 = 0$$

si trovano p_1 e p_2 e si passa dunque a

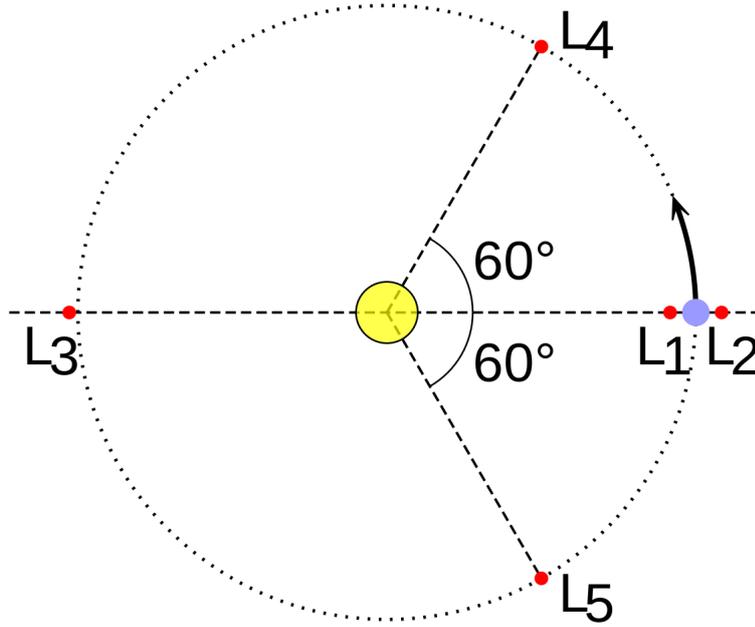
$$-q_1 + \frac{(1-\eta)(q_1 + \eta)}{[(q_1 + \eta)^2 + q_2^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\eta(q_1 - 1 + \eta)}{[(q_1 - 1 + \eta)^2 + q_2^2]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$-q_2 + \frac{(1-\eta)q_2}{[(q_1+\eta)^2+q_2^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\eta q_2}{[(q_1-1+\eta)^2+q_2^2]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Ponendo $q_2 = 0$, ovvero ponendosi lungo la congiungente tra i due primari, si trovano tre soluzioni diverse, mentre per $q_2 \neq 0$ si trovano altre due soluzioni simmetriche rispetto tale congiungente, tali da formare due triangoli equilateri con i primari.

I cinque equilibri così individuati vengono chiamati *punti lagrangiani*: L_1, L_2, L_3 lungo la congiungente, L_4, L_5 simmetrici rispetto ad essa.

Disposizione dei punti lagrangiani



5.3 Studio di L_4 : gli asteroidi Troiani di Giove

Si dimostra, col metodo spettrale, l'instabilità dei primi 3 punti lagrangiani, mentre per L_4 e L_5 la situazione è più complicata. Tipicamente, si considera un sistema di riferimento centrato nell'equilibrio in esame (in questo caso L_4 , ma il discorso è assolutamente analogo per L_5) e si sviluppa l'Hamiltoniana nel consueto modo attorno ad esso: $H = H_2 + H_3 + \dots$. Considerata la sola H_2 , corrispondente al sistema linearizzato, ne si studiano gli autovalori λ risolvendo l'equazione

$$\lambda_{\pm}^2 = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + 27(\eta^2 - \eta)})$$

A seconda del segno del radicando $\Delta = 1 + 27(\eta^2 - \eta)$ si hanno due possibilità:

- per $\eta > \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{23}{27}}) = \eta_R$ ¹ con η_R detto *limite di Routh*, $\Delta < 0$ e i due λ_{\pm}^2 sono entrambi immaginari e danno origine, una volta estratte le radici quadrate, a quattro autovalori con parte reale non nulla; l'equilibrio risulta quindi iperbolico (instabile, tenendo conto che la linearizzazione di un sistema hamiltoniano comporta sempre la comparsa di autovalori in coppie opposte e che, quindi, sicuramente un autovalore avrà parte reale positiva)

¹Fisicamente ha senso considerare valori per $\eta < 1$ poichè esso, si ricorda, è definito come $\frac{m}{m+M}$.

- per $\eta \leq \eta_R$, $\Delta \geq 0$ ma $\sqrt{\Delta} < 1$ e quindi $\lambda_{\pm}^2 < 0$: gli autovalori sono tutti immaginari puri e l'equilibrio risulta ellittico e quindi linearmente stabile

Il caso in esame è il secondo e H_2 è riscrivibile come Hamiltoniana di due oscillatori armonici disaccoppiati, con la peculiarità che una delle due frequenze è negativa:

$$H_2 = \frac{\omega_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_2^2 + p_2^2)$$

La presenza di una frequenza negativa è innocua se si considera il sistema linearizzato, ma risulta determinante quando si vanno a considerare termini successivi nello sviluppo dell'Hamiltoniana, infatti a causa di tale componente negativa, l'origine non è punto di minimo di H_2 , ma punto di sella, e l'aggiunta di $H_3 + H_4 + \dots$ può modificare la connotazione dell'equilibrio. Un tipico modo di affrontare la questione consiste nella costruzione della *forma normale di Birkhoff*, secondo lo schema del *metodo indiretto* esposto nel precedente Capitolo.

Preliminarmente, si costruisce un apparato algebrico per lo studio delle stime e della stabilità, in analogia con quanto visto nel Capitolo 3: si fissano due costanti positive R_1, R_2 e si introduce una famiglia di intorno dell'origine del tipo

$$\Delta_{\rho R} = \left\{ (q, p) \in \mathbb{R}^4 : (q_l^2 + p_l^2)^{\frac{1}{2}} \leq \rho R_l, 1 \leq l \leq n \right\}$$

dove ρ è un parametro reale positivo. Considerato ora un polinomio f omogeneo di grado s nelle variabili $(q, p) \in \mathbb{R}^4$

$$f(q, p) = \sum_{j_1+j_2+k_1+k_2=s} C_{j_1 j_2 k_1 k_2} q_1^{j_1} q_2^{j_2} p_3^{j_3} p_4^{j_4} \quad C_{j_1 j_2 k_1 k_2} \in \mathbb{C}$$

si può facilmente vedere che la sua norma in $\Delta_{\rho R}$ presenta la seguente maggiorazione

$$\|f\|_{\rho R} < \rho^s \sum_{j_1+j_2+k_1+k_2=s} |C_{j_1 j_2 k_1 k_2}| R_1^{j_1+k_1} R_2^{j_2+k_2}$$

e, poichè il termine maggiorante è di facile calcolo, esso stesso viene usato come norma per f (si verifica che essa è effettivamente una norma). I domini e la norma ora introdotti sono ben definiti sia nelle variabili originali del problema q, p , sia in quelle normali \hat{q}, \hat{p} .

Dunque, una volta passati alla forma normale di Birkhoff, fino all'ordine r , e costruiti, nel caso non risonante, n funzioni $\tilde{\Phi}$, ci si chiede se ci sia o meno stabilità. Più nello specifico, fissato $\rho_0 < \rho$ e individuato l'intorno $\Delta_{\rho_0 R}$ dell'equilibrio, si va a stimare per quanto tempo un'orbita, con dato iniziale in $\Delta_{\rho_0 R}$, resti in $\Delta_{\rho R}$, tenendo conto che un punto $(\hat{q}, \hat{p}) \in \Delta_{\rho R}$ se e solo se $\hat{I}_l(\hat{q}, \hat{p}) \leq \rho^2 R_l^2 / 2$.

Si usa l'ovvia disuguaglianza

$$|\hat{I}_l(t) - \hat{I}_l(0)| \leq |t| \sup_{\Delta_{\rho R}} |\dot{\hat{I}}_l|$$

Per stimare $\sup |\dot{\hat{I}}_l|$ si scrive il termine di resto della forma normale come serie di potenze

$$T_X^{-1} R^{(r)} = \hat{R}_{r+1}^{(r)} + \hat{R}_{r+2}^{(r)} + \dots$$

e si usa

$$\sup_{\Delta_{\rho R}} |\dot{\hat{I}}_l| < 2 \| \{ \hat{I}_l, \hat{R}_{r+1}^{(r)} \} \|_{\rho R}$$

Tale stima è giustificata dal fatto (dimostrabile) che, in un opportuno intorno di L_4 , il sup del resto non supera la norma del suo primo termine $\hat{R}_{r+1}^{(r)}$ moltiplicata per 2.

Si stima poi il "tempo di fuga" da $\Delta_{\rho R}$ partendo da $\Delta_{\rho_0 R}$

$$\tau_r(\rho_0, \rho) = \min_{l=1,2,4} \frac{R_l^2(\rho^2 - \rho_0^2)}{4 \|\{\hat{I}_l, \hat{R}_{r+1}^{(r)}\}\|_{\rho R}}$$

Si cerca ora di ruomevere la dipendenza dall'ordine r e da ρ . Dapprima, tenendo fisso r , si trova ρ che massimizza l'espressione e si libera in tal modo τ dalla dipendenza da ρ . Successivamente, avendo a disposizione per r valori fino ad un certo \tilde{r} massimo imposto dalle capacità del calcolatore, si seleziona quello *ottimale* che massimizza quanto trovato e si perviene dunque ad una stima del "tempo di fuga" dipendente solo da ρ_0 , cioè dal dato iniziale

$$T(\rho_0) = \max_{r \leq \tilde{r}} \sup_{\rho > \rho_0} \tau_r(\rho, \rho_0)$$

Venendo dunque al sistema Sole-Giove, si trova che le frequenze di H_2 sono

$$\omega_1 \simeq 9.9675752552 \times 10^{-1}, \quad \omega_2 \simeq -8.0463875837 \times 10^{-2}$$

mentre $\eta = 9.5387536 \times 10^{-4}$. Si ricordi che le unità di misura utilizzate sono tali per cui l'unità di massa è la somma delle masse di Sole e Giove, circa $2 \times 10^{30} Kg$, l'unità di tempo è $1/2\pi$ volte il periodo di rotazione attorno al centro di massa dei due primari (tale periodo è circa uguale al periodo di rivoluzione di Giove attorno al Sole, circa 11 anni, poichè il centro di massa è posizionato all'interno di quest'ultimo) in modo che $\omega = 1$, mentre l'unità di spazio è la distanza tra di essi, circa $7.78 \times 10^8 Km$.

I risultati seguenti sono stati ottenuti a partire da serie di potenze sviluppate fino all'ordine $\tilde{r} = 35$, con la scelta $R_1 = R_2 = 1$. L'idea è quella di determinare la stabilità dell'equilibrio per un tempo comparabile con l'età dell'universo (circa 14×10^9 anni) ovvero per circa 10^{10} volte l'unità di tempo e a tale valore si trova corrispondere $\rho_0 \simeq 2.911 \times 10^{-2}$.

Per dare un significato fisico tangibile a tale valore, occorre tornare alle coordinate originali q, p . Si tratta di un compito difficile da realizzare nella pratica, mentre è più semplice fare uso della seguente stima.

Dando per vero che la trasformazione dalle vecchie coordinate a quelle normali

$$q = T_\chi^{-1} \hat{q} \quad p = T_\chi^{-1} \hat{p}$$

sia ben definita nel dominio utilizzato, ovvero $\Delta_{\rho_0 R}$, si ha che $T_\chi^{-1}(\Delta_{\rho_0 R})$ è simile ad un disco multidimensionale di cui occorre stimare la grandezza. Si considerano quindi le azioni $I_l = (q_l^2 + p_l^2)/2$ e $\hat{I}_l = (\hat{q}_l^2 + \hat{p}_l^2)/2$, rispettivamente nelle coordinate vecchie e in quelle normali. Poichè T_χ , così come la sua inversa, gode della proprietà

$$T_\chi f(q, p) = f(T_\chi q, T_\chi p) \quad f \in \Pi$$

allora vale

$$I_l(q, p)|_{q=T_\chi^{-1}\hat{q}, p=T_\chi^{-1}\hat{p}} = (T_\chi^{-1} I_l)(\hat{q}, \hat{p}) \quad (5.2)$$

Il termine di destra di (5.2) è una serie di potenze in cui ogni termine è un polinomio omogeneo di un certo ordine (si vedano (4.1) e (4.2)) e il cui termine di ordine minore è proprio \hat{I}_l

$$(T_\chi^{-1} I_l)(\hat{q}, \hat{p}) = \hat{I}_l(\hat{q}, \hat{p}) + \Phi_l^{(3)}(\hat{q}, \hat{p}) + \Phi_l^{(4)}(\hat{q}, \hat{p}) + \dots$$

Pertanto si ricava la seguente stima

$$|I_l - \hat{I}_l| < \|\Phi_l^{(3)}\|_{\rho_0 R} + \dots + \|\Phi_l^{(\bar{r})}\|_{\rho_0 R} \quad (5.3)$$

Il termine di destra di (5.3) è calcolabile poichè la funzione generatrice χ è stata determinata quando si è andati a costruire la forma normale di Birkhoff. Utilizzando il valore di ρ_0 indicato in precedenza si trova

$$|I_1 - \hat{I}_1| \simeq 5.032 \times 10^{-5} < 0.119\hat{I}_1 \quad |I_2 - \hat{I}_2| \simeq 1.834 \times 10^{-4} < 0.217\hat{I}_2$$

Si conclude che il dominio di stabilità dei dati iniziali è certamente contenuto in un disco multidimensionale di raggio $\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_0^2 - 2|I_2 - \hat{I}_2|} \simeq 2.192 \times 10^{-2}$, a cui corrisponde una regione piana di raggio circa $1.6 \times 10^7 Km$ a partire ovviamente da L_4 . Confrontando tali risultati con la reale posizione degli asteroidi, si trova che soltanto il 4% degli asteroidi catalogati ricadono nella regione di stabilità. Tuttavia, se si riuscisse a perfezionare il lavoro svolto ed ottenere una stima maggiore della regione di stabilità, il risultato migliorerebbe molto: se $\tilde{\rho}$ fosse 10 volte più grande si arriverebbe a comprendere circa il 75% degli asteroidi nel dominio di stabilità, il che rappresenterebbe già un risultato più soddisfacente e non utopistico secondo gli autori del lavoro citato [9].

Nella lettura di questi risultati va tenuto conto del fatto che le stime realizzate sono migliorabili in diversi aspetti. Per esempio, volendo restare sul problema piano, un primo aggiustamento potrebbe essere considerare $R_1 \neq R_2$ e permettere ai due gradi di libertà di evolvere in modo diverso. Questa considerazione terrebbe conto dell'effettiva disposizione degli asteroidi i quali sono disposti in una regione ben lungi dall'essere simmetrica.

In conclusione, i risultati ottenuti permettono di esprimere un giudizio positivo sulla reale efficacia dell'approccio utilizzato, ovvero la costruzione della *forma normale* tramite il *metodo indiretto*. Gli sviluppi futuri, non solo nel caso appena affrontato del problema a tre corpi ristretto che resta comunque non del tutto risolto, potranno portare a migliorare le stime di stabilità, sia da un punto di vista quantitativo che qualitativo.

Bibliografia

- [1] A. Giorgilli - Effective stability for realistic physical systems - *Nonlinear problems in future particle accelerators*, W. Scandale e G. Turchetti ed., pp 53-66, World Scientific (1989)
- [2] A. Giorgilli e L. Galgani - Formal integrals for an autonomous hamiltonian system near an equilibrium point - *Cel. Mech.*, **17**, 267-280 (1978)
- [3] J. K. Moser - Lectures on hamiltonian systems - *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, **81** (1968)
- [4] A. Giorgilli - Recent developments in perturbation theory of classical hamiltonian systems - *Conferences on nonlinear dynamics*, G. Turchett ed., pp. 30-43, World Scientific (1988)
- [5] E. Diana, L. Galgani, A. Giorgilli, A. Scotti - On the direct construction of formal integrals of a hamiltonian system near an equilibrium point - *Bollettino Unione Mat. Ita.*, **11**, 84-89 (1975)
- [6] A. Giorgilli - Rigorous results on the power expansions for the integrals of a hamiltonian system near an elliptic equilibrium point - *Ann. Ist. H. Poincaré*, **48**, n.4, 423-439 (1988)
- [7] A. Giorgilli, A. Delshams, E. Fontich, L. Galgani, C. Simó - Effective stability for a hamiltonian system near an elliptic equilibrium point, with an application to the restricted three body problem - *Journal of Diff. Eq.*, **77**, 267-280 (1978)
- [8] L. Galgani e A. Giorgilli - Rigorous estimates for the series expansions of hamiltonian pertubation theory - *Cel. Mech.*, **37**, 95-112 (1985)
- [9] A. Giorgilli e C. Skokos - On the stability of the Trojan asteroids - *Astron. Astroph.*, **317**, 254-261 (1997)