



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI SCIENZE STATISTICHE
CORSO DI LAUREA IN STATISTICA, ECONOMIA E
FINANZA

Effetti di valori anomali sulla stima di modelli GARCH(1,1)

Laureando:

Diego DALLA ROSA

Relatore:

Prof.ssa Luisa BISAGLIA

Anno accademico 2010/2011

Alla mia famiglia

Introduzione

Questo lavoro trae spunto dalla lettura dell'articolo "Effects of level shifts and temporary changes on the estimation of GARCH models" di Trivez and Catalan[1]. Si tratta di una simulazione degli effetti di outlier di tipo LSLO, LSVO, TCLO, TCVO (che in seguito definiremo), sulla stima dei parametri di un modello GARCH(1,1).

Altri studi affrontano questa tematica seppur in termini diversi, per esempio Franses e Van Dick [2], verificano gli effetti del non considerare un outlier additivo di dimensione 3,5,7,9; Dornik e Ooms [3] presentano un nuovo metodo per l'individuazione di outlier additivi, basato sulla verosomiglianza e ne valutano gli effetti, Verhoeven and McAleer [4] analizzano gli effetti di outlier su un AR(1)-GARCH(1,1) valutandone l'impatto sulla stima dei parametri e sull'errore di previsione che essi comportano.

Tuttavia, l'articolo di riferimento [1] risulta innotivo perchè valuta, per la prima volta, gli effetti di tutti gli outlier sopra citati sui modelli GARCH. L'obiettivo di questa tesi è di replicare ed ampliare il lavoro di Trivez e Catalan.

La tesi risulta così strutturata: nel primo capitolo è presente una breve introduzione, dove definiremo il modello Arch, il modello Garch univariato e le tipologie di outlier che consideriamo, nel secondo capitolo, invece, presenteremo l'esperimento Monte Carlo dove elencheremo le varie casistiche: abbiamo utilizzato infatti diversi valori dei parametri e diverse numerosità campionarie, infine nel capitolo conclusivo andremo a illustrare i risultati ottenuti servendoci di tabelle, (dove riporteremo media, media e deviazio-

ne standard) e di grafici, (dove sono presenti le stime di densità dei diversi parametri e le frequenze di sottostima-sovrastima).

Indice

Introduzione	ii
Elenco delle figure	vi
Elenco delle tabelle	vii
1 Modelli Garch univariati	1
1.1 Il modello Arch	1
1.1.1 Il processo ARCH(p)	3
1.2 Garch	4
1.3 Verosimiglianza Garch	5
1.4 Outlier	7
1.4.1 Valori anomali di tipo Level Shift	7
1.4.2 Valori anomali di tipo Temporary Change	11
2 Esperimento di Monte Carlo	15
2.1 Risultati relativi ai Level Shift	17
2.2 Risultati relativi ai Temporary Change	33
Conclusioni	51
Appendice: Data Sheet	53
Bibliografia	57

Elenco delle figure

1.1	Effetti sul livello della serie y di un outlier del tipo LS LO . .	7
1.2	Effetti sulla varianza condizionata di un outlier di tipo LS LO	8
1.3	Effetti sul livello della serie y di un outlier del tipo LS-VO . .	10
1.4	Effetti sulla varianza condizionata h di un outlier del tipo LS-VO	11
1.5	Effetti sul livello della serie y di un outlier del tipo TC-LO . .	12
1.6	Effetti sulla varianza condizionata h di un outlier del tipo TC-LO	13
1.7	Effetti sul livello della serie y di un outlier del tipo TC-VO . .	14
1.8	Effetti sulla varianza condizionata h di un outlier del tipo TC-VO	14
2.1	Stima della densità di ω in presenza di outlier del tipo LS LO	18
2.2	Stima della densità di α in presenza di outlier del tipo LS LO	19
2.3	Stima della densità di β in presenza di outlier del tipo LS LO	20
2.4	Distorsione di ω in presenza di outlier $c=5$ del tipo LS LO . .	21
2.5	Distorsione di ω in presenza di outlier $c=20$ del tipo LS LO . .	22
2.6	Distorsione di α in presenza di outlier $c=5$ del tipo LS LO . .	22
2.7	Distorsione di α in presenza di outlier $c=20$ del tipo LS LO . .	23
2.8	Distorsione di β in presenza di outlier $c=5$ del tipo LS LO . .	23
2.9	Distorsione di β in presenza di outlier $c=20$ del tipo LS LO . .	24
2.10	Stima della densità di ω in presenza di outlier del tipo LS VO	26
2.11	Stima della densità di α in presenza di outlier del tipo LS VO	27
2.12	Stima della densità di β in presenza di outlier del tipo LS VO	28
2.13	Distorsione di ω in presenza di outlier $c=5$ del tipo LS VO . .	29
2.14	Distorsione di ω in presenza di outlier $c=20$ del tipo LS VO .	30

2.15	Distorsione di α in presenza di outlier $c=5$ del tipo LS VO . .	30
2.16	Distorsione di α in presenza di outlier $c=20$ del tipo LS VO . .	31
2.17	Distorsione di β in presenza di outlier $c=5$ del tipo LS VO . .	31
2.18	Distorsione di β in presenza di outlier $c=20$ del tipo LS VO . .	32
2.19	Stima della densità di ω in presenza di outlier del tipo TC LO	35
2.20	Stima della densità di α in presenza di outlier del tipo TC LO	36
2.21	Stima della densità di β in presenza di outlier del tipo TC LO	37
2.22	Distorsione di ω in presenza di outlier $c=5$ del tipo TC LO . .	38
2.23	Distorsione di ω in presenza di outlier $c=20$ del tipo TC LO . .	39
2.24	Distorsione di α in presenza di outlier $c=5$ del tipo TC LO . .	39
2.25	Distorsione di α in presenza di outlier $c=20$ del tipo TC LO . .	40
2.26	Distorsione di β in presenza di outlier $c=5$ del tipo TC LO . .	40
2.27	Distorsione di β in presenza di outlier $c=20$ del tipo TC LO . .	41
2.28	Stima della densità di ω in presenza di outlier del tipo TC VO	44
2.29	Stima della densità di α in presenza di outlier del tipo TC VO	45
2.30	Stima della densità di β in presenza di outlier del tipo TC VO	46
2.31	Distorsione di ω in presenza di outlier $c=5$ del tipo TC VO . .	47
2.32	Distorsione di ω in presenza di outlier $c=20$ del tipo TC VO . .	48
2.33	Distorsione di α in presenza di outlier $c=5$ del tipo TC VO . .	48
2.34	Distorsione di α in presenza di outlier $c=20$ del tipo TC VO . .	49
2.35	Distorsione di β in presenza di outlier $c=5$ del tipo TC VO . .	49
2.36	Distorsione di β in presenza di outlier $c=20$ del tipo TC VO . .	50

Elenco delle tabelle

2.1	valori usati per i vari parametri	16
2.2	Valori ω, α, β LS LO, n=1000	17
2.3	Valori ω, α, β LS VO, n=1000	25
2.4	Valori ω, α, β TC LO, n=1000	33
2.5	Valori ω, α, β TC VO n=1000	42
2.6	Valori ω, α, β LS LO's, n=200	53
2.7	Valori ω, α, β LS VO's, n=200	54
2.8	Valori ω, α, β LS LO, n=500	54
2.9	Valori ω, α, β LS VO, n=500	54
2.10	Valori ω, α, β TC LO, n=200	55
2.11	Valori ω, α, β TC VO, n=200	55
2.12	Valori ω, α, β TC LO, n=500	55
2.13	Valori ω, α, β TC VO, n=500	56

Capitolo 1

Modelli Garch univariati

1.1 Il modello Arch

I processi ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedastic*) sono stati introdotti da Engle [5] nell'articolo *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimate of United Kingdom Inflation* apparso su *Econometrica* nel 1982, con lo scopo primario di generalizzare l'assunzione fatta allora da gran parte dei modelli econometrici tradizionali di varianza condizionata costante per la previsione ad un periodo.

Fino ad allora molti modelli econometrici per l'analisi delle serie temporali si erano concentrati sull'individuazione delle medie condizionate assumendo costanti le varianze condizionate. Tuttavia, l'elevata volatilità manifestata sia da serie microeconomiche sia macroeconomiche durante gli anni '70 e '80 richiamò l'attenzione sul problema dell'eteroschedasticità e, in particolare dell'eteroschedasticità condizionata.

Engle rispose a questa esigenza proponendo dei nuovi processi a varianza condizionata variabile che si rilevarono interessanti e utili per lo studio di fenomeni economici e finanziari.

La prima specificazione suggerita da Engle esprime la varianza σ_t come funzione lineare del quadrato dei valori del processo al tempo $t-1$. Tale modello, detto ARCH(1) (ossia modello ad eteroschedasticità condizionata del

primo ordine) è esprimibile nelle 2 equazioni:

$$\varepsilon_t = \mu_t \sigma_t \quad (1.1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 \quad (1.2)$$

con μ_t variabili casuali i.i.d. tali che $E(\mu_t)=0$ e $\text{Var}(\mu_t)=1$ Si pone inoltre $\omega > 0$ e $\alpha > 0$ per garantire la non negatività della varianza condizionata.

Qualora si aggiunga l'ipotesi di normalità, ossia $\mu \sim N(0,1)$ il processo può essere espresso come:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) &\sim N(0, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 \end{aligned}$$

I momenti condizionati del processo risultano:

$$E(\varepsilon_t | I_{t-1}) = E(\mu_t) \sigma_t = 0$$

$$\text{Var}(\varepsilon_t | I_{t-1}) = E(\mu_t^2) \sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2$$

Per calcolare i momenti non condizionati possiamo utilizzare il principio dei valori attesi iterati: indicando con E_{t-i} il valore atteso condizionato al tempo $t - i$ la media non condizionata risulta:

$$E(\varepsilon_t) = E_0 \dots E_{t-2} E_{t-2}(\varepsilon_t)$$

Dato che $E_{t-1} = 0$, risulta

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

Mentre per la varianza, sempre utilizzando i valori attesi condizionati avremo, notando che:

$$E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2$$

E quindi

$$\begin{aligned} E_{t-2}E_{t-1}(\varepsilon_t^2) &= \omega + \alpha E_{t-2}(\varepsilon_{t-1}^2) \\ &= \omega + \alpha_1\omega + \alpha_1^2\varepsilon_{t-2}^2 \end{aligned}$$

Ripetendo iterativamente il calcolo dei valori attesi condizionati si ottiene:

$$Var(\varepsilon_t) = \omega(1 + \alpha + \dots + \alpha^{t-1}) + \alpha_1^t\varepsilon_0^2$$

Se t è elevato a $|\alpha| < 1$ avremo:

$$Var(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \alpha} \quad (1.3)$$

Notiamo quindi, come nel modello ARCH(1) la varianza condizionata risulta variabile nel tempo, in quanto dipendente da ε_{t-1}^2 : se $\omega > 0$ e $\alpha > 0$, σ_{t-1}^2 è grande quando ε_{t-1}^2 è elevato ed è piccola quando ε_{t-1}^2 è vicino a 0. Infatti un valore elevato di $|\varepsilon_{t-1}|$ provoca un elevato valore di σ_t in base all'equazione 1.2; d'altra parte un valore elevato di σ_t provoca a sua volta un elevato valore di ε_t in base all'equazione 1.1.

Ne segue che ampie variazioni tendono ad essere seguite da ampie variazioni, e piccole da piccole, dell'uno e dell'altro segno, anche se, in questo particolare tipo di modello ARCH, la memoria del processo è limitata ad un periodo.

Il processo ARCH genera quindi osservazioni incorrelate, ma non indipendenti, in quanto legate attraverso i momenti secondi, tale legame si manifesta nell'autocorrelazione esistente tra i quadrati delle osservazioni.

1.1.1 Il processo ARCH(p)

Ridurre la memoria del processo ad un solo istante temporale può essere eccessivamente riduttivo. La più immediata generalizzazione del modello

visto è il modello ARCH(p) in cui:

$$(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p}) \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (1.4)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum \alpha_i \varepsilon_{t-1}^2 \quad (1.5)$$

con $\omega > 0$ a $\alpha_i > 0$.

Anche stavolta le condizioni di non negatività dei parametri vengono introdotte per evitare che la varianza possa risultare negativa, varianza che possiamo esprimere come:

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2 = \frac{\omega}{1 - \sum \alpha_i} \quad (1.6)$$

1.2 Garch

Sicuramente l'estensione più nota dei processi ARCH è costituita dai processi GARCH *Generalized ARCH*, introdotti dal 1986 da Bollerslev [6] in risposta a una esigenza pratica sorta subito dopo i primi studi empirici condotti su serie temporali economiche e finanziarie: comune a gran parte delle applicazioni svolte era infatti la necessità di stimare modelli ARCH con strutture di ritardi complesse che potessero catturare la lunga memoria che i dati manifestavano senza che i parametri violassero i vincoli di non negatività o le condizioni di stazionarietà.

Il modello GARCH permette una struttura di ritardi più flessibile nell'equazione della varianza condizionata e, allo stesso tempo, incorpora in forma semplice molte delle proprietà degli ARCH. Nella sua forma più comune esso è definito da:

$$\varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad (1.7)$$

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} \quad (1.8)$$

dove $p > 0$, $q > 0$, $\omega > 0$, $\alpha_i > 0$ e $\beta_j > 0$. Il processo si indica con la sigla GARCH(p,q). Per $q=0$ si riduce ad un ARCH(p).

Quindi mentre nel processo ARCH la varianza condizionata è funzione lineare dei quadrati degli ε_t passati, in questo caso sono rilevanti anche le varianze condizionate ritardate. Anche stavolta i vincoli di non negatività imposti ai parametri hanno lo scopo di garantire che il processo sia ben definito e, in particolare, che la varianza condizionata sia non negativa.

1.3 Verosimiglianza Garch

Per quanto concerne la stima dei parametri, in generale si ottengono da metodi basati sulla funzione verosomiglianza.

Nei modelli che consideremo, posto $\theta = (\omega, \alpha, \beta)$ come vettore dei parametri da stimare, la log verosimiglianza diventa:

$$l(\omega, \alpha, \beta) = \frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sigma_t^2 - \frac{1}{2} \sum \frac{y_t^2}{\sigma_t^2} \quad (1.9)$$

Per determinare le stime di max verosomiglianza bisogna trovare i valori dei parametri di θ che rendono massima la 1.9 e risultano essere le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta \partial \theta} < 0 \end{cases}$$

Solitamente, le condizioni del primo ordine (prima equazione del sistema sopra citato) danno luogo ad un sistema di equazioni non lineari che per esser risolto necessita di metodi di ottimizzazione numerica. Idealmente, si parte da un valore di θ fissato a priori, e si genera una sequenza di stime θ_2 , θ_3 , etc che converge al punto $\hat{\theta}$, ossia al punto tale per cui $l(\hat{\theta})$ è massima. Il passaggio da θ a θ_{i+1} viene chiamato i-esima iterata alla procedura e risulta ammissibile se la log-verosomiglianza risulta maggiore in θ_{i+1} . Si prosegue ad itinere con questo procedimento fino a che l'iterata non risulta più possibile,

o fino a che viene soddisfatto un criterio convenzionale; ad es

$$\frac{(\theta_{i-1} - \theta_i)}{\theta_i} < \xi$$

dove $\xi > 0$, è un valore piccolo.

Le stime che massimizzano l'equazione 1.9 sono chiamate stime di massima verosomiglianza (*ML*). Sotto condizioni di regolarità, queste stime risultano consistenti ed asintoticamente efficienti.

1.4 Outlier

In questa sezione descriviamo gli effetti di *valori anomali additivi* che riguardano sia il livello della serie, che chiameremo LO , sia la volatilità della serie, che indicheremo con VO , considerando l'effetto sul passaggio di livello LS e sul cambiamento temporaneo TC . Le definizioni di tali valori anomali sono quelle che compaiono nel lavoro di Trivez e Catalan [1].

1.4.1 Valori anomali di tipo Level Shift

Definiamo un outlier del tipo LS-LO (Level Shift-Level Outlier) come un evento che si verifica in un determinato istante di tempo, il cui effetto risulta permanente sul livello della serie ma non ne modifica la variabilità: le figure 1.1 e 1.2 ne illustrano il concetto su una serie di lunghezza 200 influenzata da outlier (che in seguito indicheremo con "c") di ampiezza $c=10$ al centro della stessa.

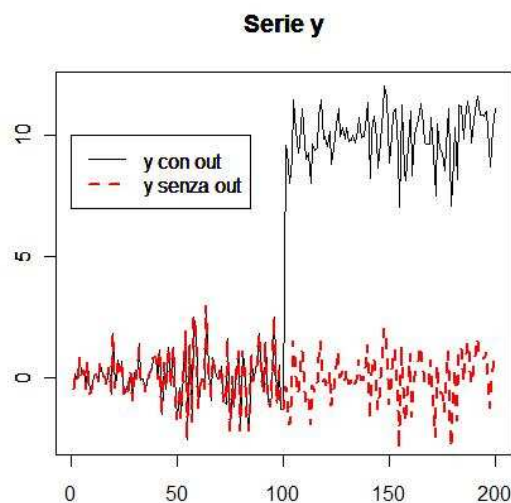


Figura 1.1: Effetti sul livello della serie y di un outlier del tipo LS LO

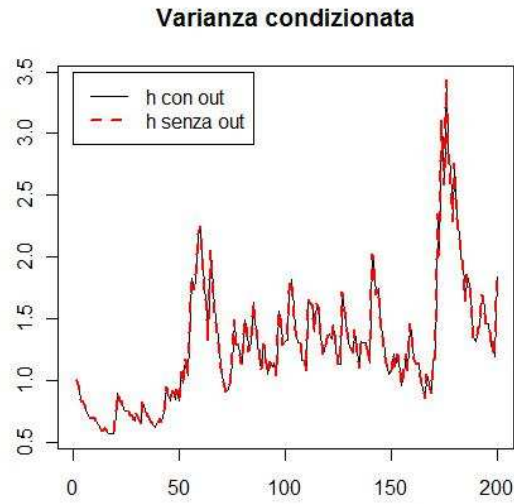


Figura 1.2: Effetti sulla varianza condizionata di un outlier di tipo LS LO

Definiamo il modello GARCH (1,1) con outlier di tipo LO-LS all'istante $t=k$, come segue: dove $\eta_t \sim N(0, 1)$, y_t indica la serie, h_t la volatilità, e_t gli errori e ε_t le innovazioni

$$\text{per } t=1, \dots, (k-1) \quad y_t = e_t = \varepsilon_t, \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t}, \quad (1.11)$$

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad (1.12)$$

$$\text{per } t=k \quad y_k = e_k \quad (1.13)$$

$$e_k = \eta_k \sqrt{h_k} + c = \varepsilon_k + c, \quad (1.14)$$

$$h_k = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{k-1}^2 + \beta_1 h_{k-1} \quad (1.15)$$

Per $t > k$

$$y_t = e_t, \quad (1.16)$$

$$e_t = \eta_t \sqrt{h_t} + c = \varepsilon_t + c, \quad (1.17)$$

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-i}^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad (1.18)$$

Definiamo un outlier del tipo LS-VO (*Level Shift- Volatility Outlier*) come un evento che si verifica in un determinato istante di tempo, il cui effetto si manifesta sia sul livello della serie, direttamente ed indirettamente, sia sulla variabilità. Le figure 1.3 e 1.4 chiariscono il concetto su una serie di lunghezza 200 influenzata da outlier di ampiezza $c=10$.

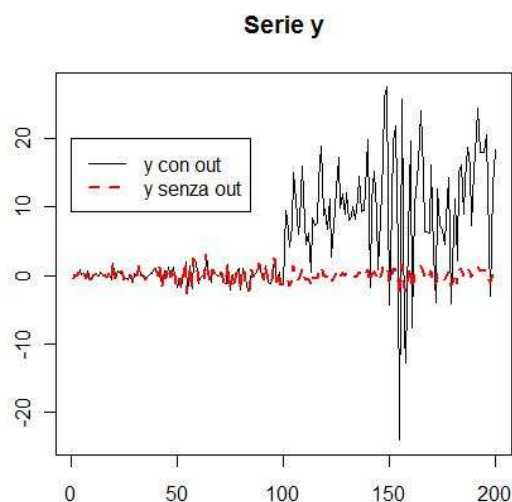


Figura 1.3: Effetti sul livello della serie y di un outlier del tipo LS-VO

Si noti come l'effetto dell'outlier sulla serie fig:1.4 incrementi rispetto al caso precedente fig:1.1 grazie all'effetto indiretto.

La stesura del modello risulterà analoga al precedente eccezion fatta per le eq:1.12 e eq:1.15 che risulteranno rispettivamente:

$$\text{Per } t=k \quad h_k = \omega + \alpha_1 e_{t-i}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad (1.19)$$

$$\text{per } t > k \quad h_t = \omega + \alpha_1 e_{t-i}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad (1.20)$$

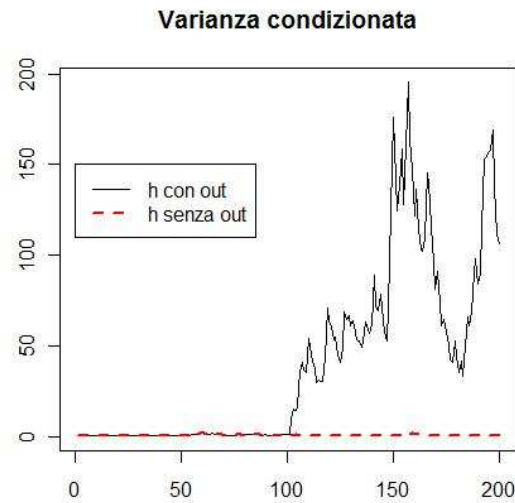


Figura 1.4: Effetti sulla varianza condizionata h di un outlier del tipo LS-VO

1.4.2 Valori anomali di tipo Temporary Change

Definiamo un outlier del tipo TC-LO (*Temporary Change- Level Outlier*) come un evento che si verifica in un determinato istante di tempo il cui effetto si manifesta sul livello della serie ma non ne modifica la variabilità. Le figure fig:1.5 e fig:1.6 illustrano il concetto, su una serie di lunghezza 200 colpita al centro da outlier additivo di dimensioni 10.

Il modello GARCH (1,1) con outlier di tipo TC-LO all'istante k , è definito come segue:

$$\text{per } t=1, \dots, (k-1) \quad y_t = e_t = \varepsilon_t, \quad (1.21)$$

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t}, \quad (1.22)$$

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad (1.23)$$

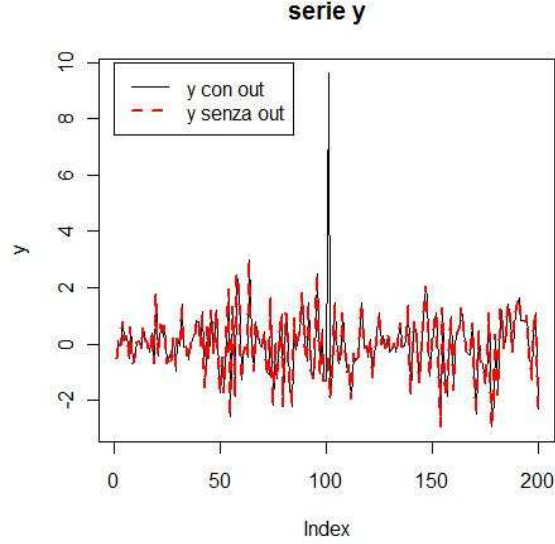


Figura 1.5: Effetti sul livello della serie y di un outlier del tipo TC-LO

$$\text{per } t=k \quad y_k = e_k \quad (1.24)$$

$$e_k = \eta_k \sqrt{h_k} + c = \varepsilon_k + c, \quad (1.25)$$

$$h_k = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-i}^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad (1.26)$$

$$\text{Per } t \text{ maggiore di } k \quad y_t = e_t, \quad (1.27)$$

$$e_t = \eta_t \sqrt{h_t} + c = \varepsilon_t + c\delta^i, \quad (1.28)$$

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-i}^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad (1.29)$$

Si noti che in questo caso l'effetto dell'outlier, c , per $t > k$, viene moltiplicato per δ^t , dove δ è un parametro compreso tra 0 e 1, dato dal prodotto di α e β secondo la definizione adottata da Zeinol [7]: l'effetto dell'outlier non risulterà permanente ma diminuirà nel tempo.

Infine definiamo un outlier del tipo TC VO *Temporary Change- Volatility Outlier* come un evento che interessa la nostra serie in un determinato periodo, il cui effetto si manifesta sia sulla serie (direttamente ed indirettamente

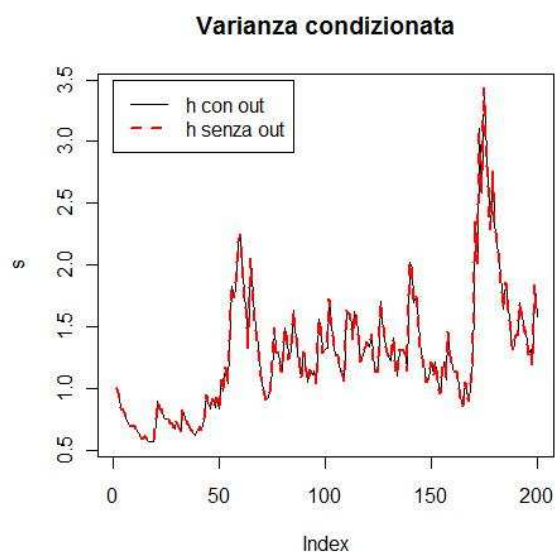


Figura 1.6: Effetti sulla varianza condizionata h di un outlier del tipo TC-LO

grazie alla volatilità) sia sulla variabilità. Anche in questo caso, l'effetto dell'outlier c , per $t > k$ viene moltiplicato per δ . Le fig: 1.7 e 1.8 illustrano il concetto

Il modello risulterà uguale al precedente eccezion fatta per le equazioni della varianza condizionata che risulteranno:

$$\text{Per } t=k \quad h_k = \omega + \alpha_1 e_{t-i}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad (1.30)$$

$$\text{per } t > k \quad h_t = \omega + \alpha_1 e_{t-i}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad (1.31)$$

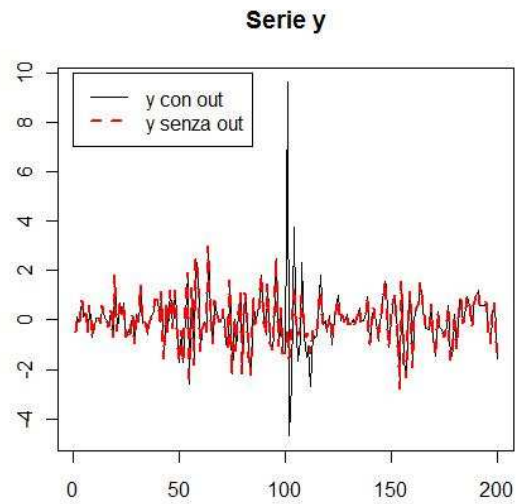


Figura 1.7: Effetti sul livello della serie y di un outlier del tipo TC-VO

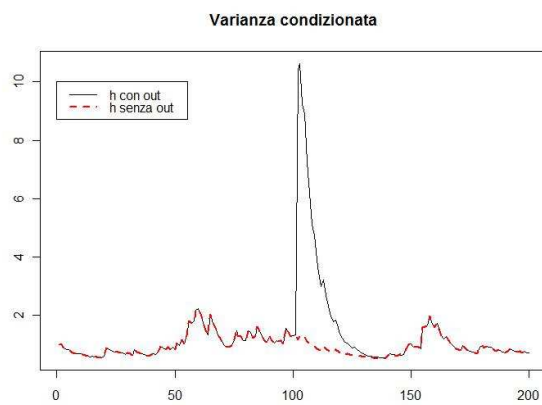


Figura 1.8: Effetti sulla varianza condizionata h di un outlier del tipo TC-VO

Capitolo 2

Esperimento di Monte Carlo

Per studiare il comportamento in campioni finiti degli stimatori dei parametri di modelli di tipo GARCH, in presenza degli outlier definiti nel capitolo precedente, abbiamo simulato serie da processi di tipo GARCH (1,1) per diversi valori dei parametri e diverse numerosità campionarie. In particolare, i processi generatori dei dati sono i quattro modelli GARCH con i parametri riportati nella tabella 2.1. Da ogni modello abbiamo quindi simulato $m=1000$ realizzazioni indipendenti per le numerosità campionarie, e n , pari a 200, 500 e 1000. Il termine d'errore è stato generato a partire dalla distribuzione normale standard.

Abbiamo quindi aggiunto un outlier ad ogni serie simulata, supponendo che tale valore si manifestasse al centro della serie storica (quindi in $t=n/2$). Abbiamo considerato due diverse dimensioni dell'outlier: $c=5$ e $c=20$. Il caso di assenza di outlier corrisponde ovviamente a $c=20$.

In questo capitolo riportiamo i risultati per $n=1000$, mentre i risultati per $n=200$ e 500 sono riportati in Appendice. Per ogni modello e per ogni numerosità campionaria otteniamo $m=1000$ valori stimati per ogni parametro d'interesse (ω , α , β). Nelle tabelle che seguono (tabella 2.2, 2.3, 2.4, 2.5) per ogni parametro, riportiamo la mediana, la media la deviazione standard. Le figure (2.1, 2.2, 2.3, 2.10, 2.11, 2.12, 2.19, 2.20, 2.21, 2.28, 2.29, 2.30) riportano invece i grafici relativi alle stime della densità dei diversi parame-

tri per i diversi modelli sia in presenza che in assenza di outlier, mentre le figure (2.4-2.9, 2.13-2.18, 2.22-2.27, 2.31-2.36) riportano le frequenze di sovrastima sottostima dei diversi parametri nei vari casi considerati. Tutte le elaborazioni sono state condotte utilizzando l'ambiente di lavoro R e S-PLUS.

Tabella 2.1: valori usati per i vari parametri

	ω	α	β
M1	0.1	0.1	0.8
M2	0.3	0.2	0.5
M3	0.1	0.2	0.7
M4	0.3	0.1	0.6

2.1 Risultati relativi ai Level Shift

Si considerino innanzitutto i risultati ottenuti in presenza di outlier di tipo LS LO con lunghezza della serie 1000: ciò che emerge dalla tabella 2.2 è che il parametro ω per tutti 4 i casi tende a essere sottostimato ed avere minor variabilità quando $c=5$: ciò risulta piuttosto sorprendente, tuttavia in presenza di $c=20$ il comportamento è opposto. Per quanto riguarda il parametro β , questo presenta un comportamento analogo a ω , mentre, per quanto concerne il parametro α , all'aumentare delle dimensioni dell'outlier, aumentano sia la sovrastima che la variabilità di α .

Tabella 2.2: Valori ω, α, β LS LO, $n=1000$

		ω			α			β		
	Dim Outlier	Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std
M1	c=0	0.116	0.128	0.090	0.100	0.104	0.030	0.785	0.766	0.105
	c=5	0.052	0.571	0.021	0.193	0.200	0.049	0.797	0.789	0.052
	c=20	0.961	1.180	1.057	0.654	0.689	0.356	0.352	0.330	0.325
M2	c=0	0.293	0.383	0.313	0.115	0.117	0.043	0.547	0.433	0.429
	c=5	0.087	0.096	0.042	0.275	0.278	0.084	0.710	0.705	0.089
	c=20	0.850	1.259	1.112	0.742	0.718	0.365	0.251	0.305	0.321
M3	c=0	0.104	0.115	0.050	0.137	0.139	0.035	0.760	0.742	0.075
	c=5	0.065	0.067	0.0232	0.259	0.267	0.059	0.731	0.721	0.060
	c=20	0.658	1.091	1.137	0.733	0.709	0.341	0.262	0.318	0.316
M4	c=0	0.319	0.392	0.334	0.054	0.057	0.032	0.623	0.549	0.338
	c=5	0.059	0.066	0.031	0.182	0.193	0.0587	0.805	0.794	0.063
	c=20	0.885	1.113	0.899	0.673	0.690	0.354	0.302	0.326	0.326

Per quanto riguarda la stima della densità dei parametri si può notare che per quanto riguarda il parametro ω , figura 2.1, la presenza di un outlier moderato ($c=5$) comporta maggior concentrazione della distribuzione della densità, mentre se $c=20$ la distribuzione risulta molto più appiattita a causa dalla maggior variabilità. Per quanto riguarda il parametro α (figura 2.2) all'aumentare delle dimensioni dell'outlier, la distribuzione del parametro risulta meno concentrata e centrata attorno a valori uguali di quello vero. Infine per quanto riguarda β , figura 2.3 la presenza di un outlier di ampiezza moderata ($c=5$), per i casi 1 e 3 non sembra portare sostanziali mutamenti, mentre per i casi 2 e 4 comporta una maggior concentrazione attorno a valori un po' più elevati di quello vero. Invece con $c=20$ i risultati sono tendenzial-

mente analoghi per tutti e quattro i casi, ossia distribuzione più schiacciata a causa della maggior variabilità (si noti inoltre, che in tal caso la distribuzione di β sembrerebbe essere bimodale, con la prima moda sullo 0).

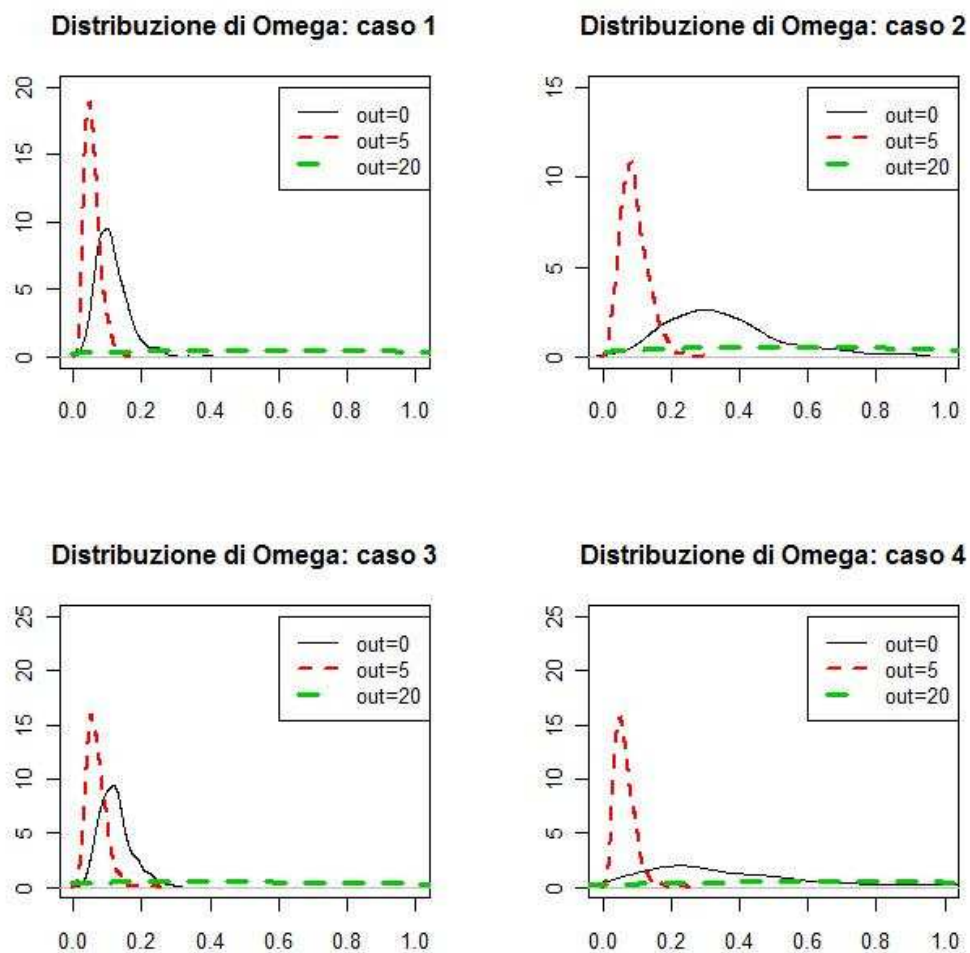
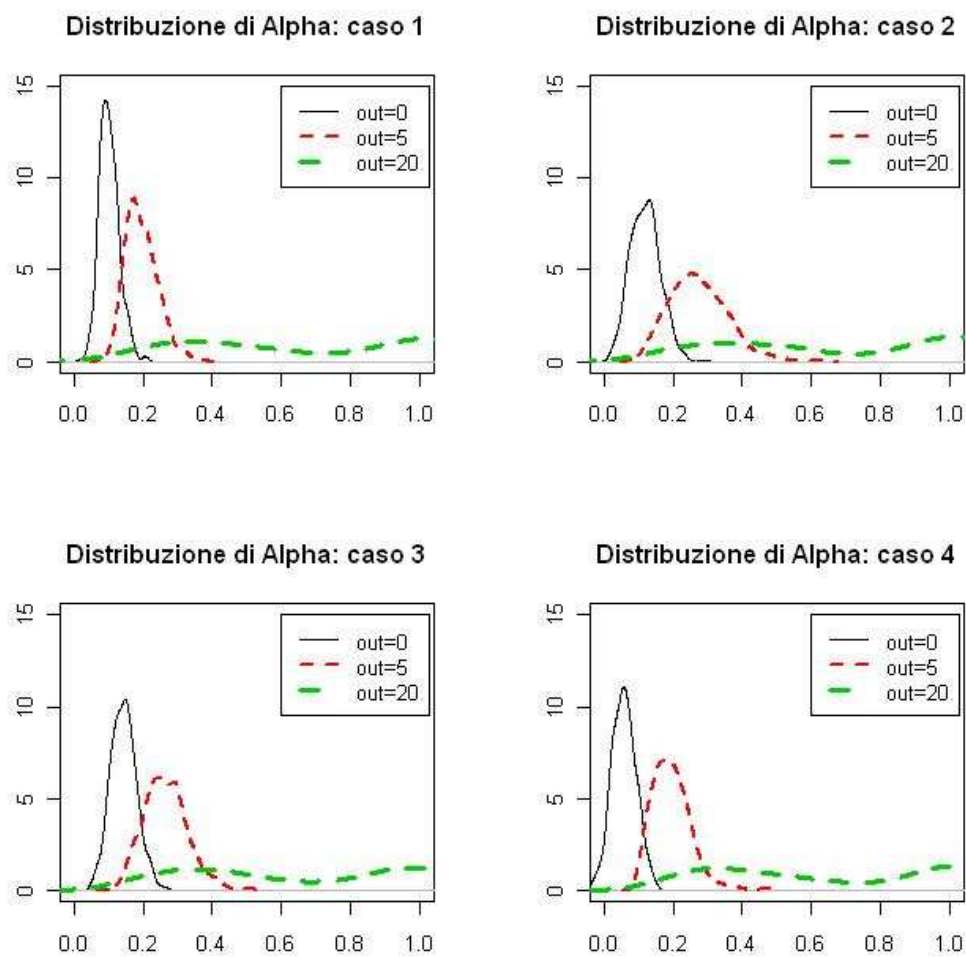


Figura 2.1: Stima della densità di ω in presenza di outlier del tipo LS LO

Figura 2.2: Stima della densità di α in presenza di outlier del tipo LS LO

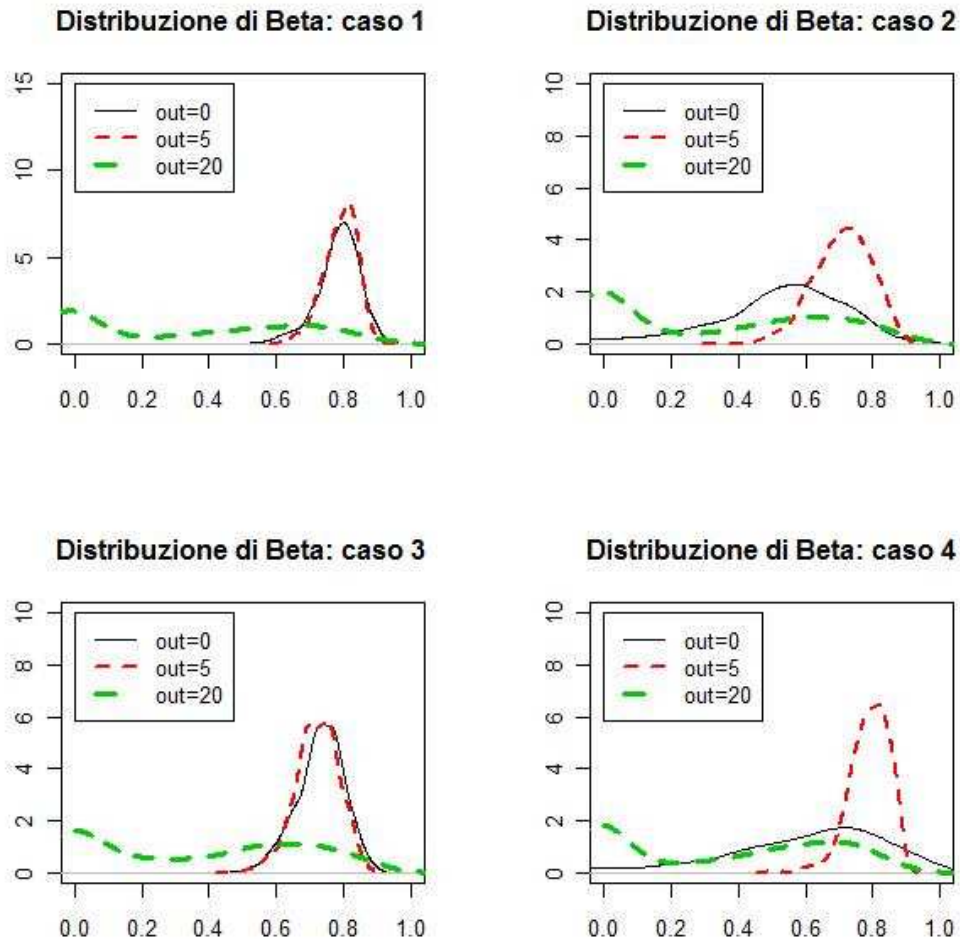


Figura 2.3: Stima della densità di β in presenza di outlier del tipo LS LO

Le figure 2.4 e 2.5 relative alla distorsione dei parametri confermano ciò che in precedenza si era intuito. Quando $c=5$, ω in quasi tutte le repliche del processo viene sottostimato, mentre con $c=20$ l'effetto è opposto, ossia il parametro ω viene sovrastimato la maggior parte delle volte. Relativamente al parametro α , le figure 2.6 e 2.7 evidenziano una preponderante tendenza alla sovrastima sia con $c=5$, sia con $c=20$ per tutti i casi considerati. Infine, per quel che riguarda il parametro β la figura 2.8 evidenzia una tendenziale sovrastima nei casi 2 e 4 (che presentano un β minore, vedi tab 2.1), mentre nei casi 1-3 non vi è una netta tendenza; quando $c=20$, figura 2.9, prevalgono i casi in cui β viene sottostimato anche se, tale tendenza è meno marcata per i casi 2 e 4.

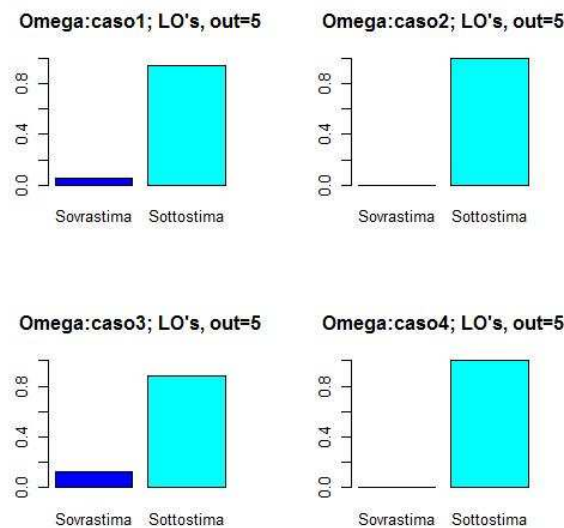
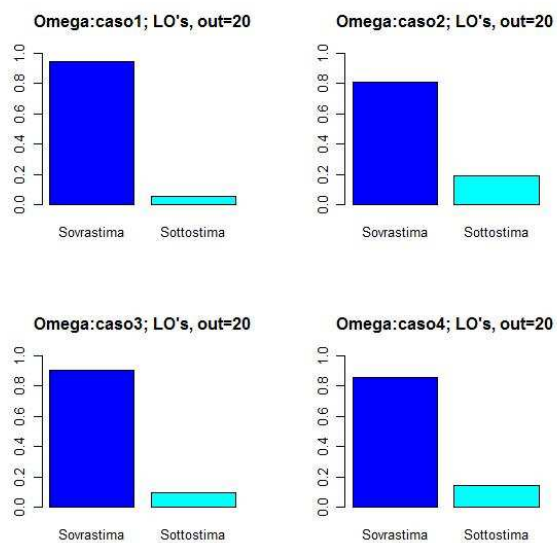
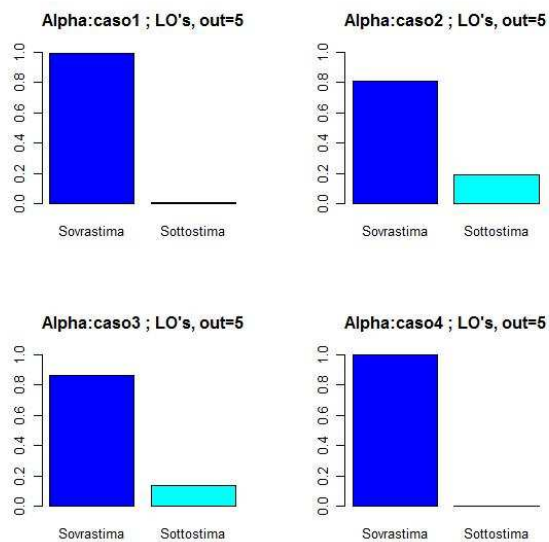
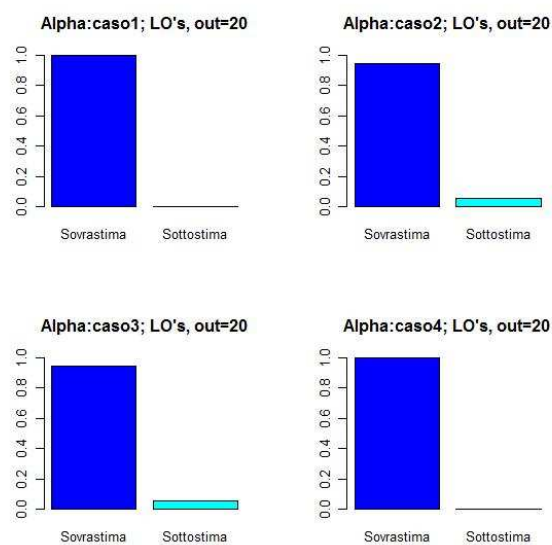
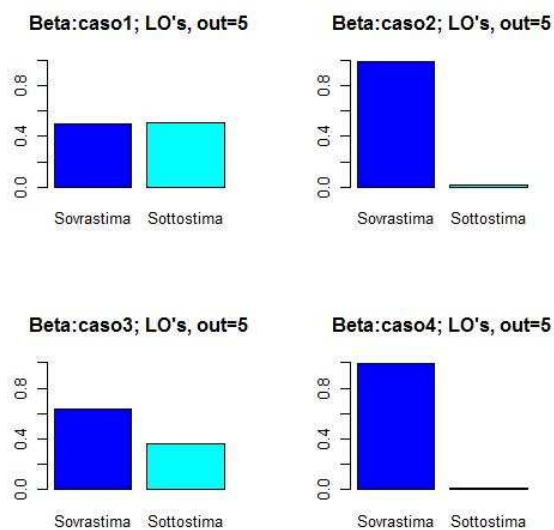


Figura 2.4: Distorsione di ω in presenza di outlier $c=5$ del tipo LS LO

Figura 2.5: Distorsione di ω in presenza di outlier $c=20$ del tipo LS LOFigura 2.6: Distorsione di α in presenza di outlier $c=5$ del tipo LS LO

Figura 2.7: Distorsione di α in presenza di outlier $c=20$ del tipo LS LOFigura 2.8: Distorsione di β in presenza di outlier $c=5$ del tipo LS LO

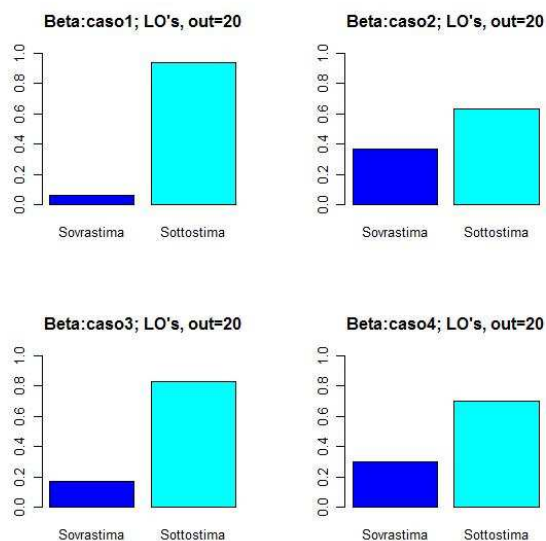


Figura 2.9: Distorsione di β in presenza di outlier $c=20$ del tipo LS LO

Ricapitolando brevemente i risultati sulla stima dei parametri ottenuti con outlier del tipo LS LO:

		M1	M2	M3	M4
ω	$c=5$	sottostima	sottostima	sottostima	sottostima
	$c=20$	sovrastima	sovrastima	sovrastima	sovrastima
α	$c=5$	sovrastima	sovrastima	sovrastima	sovrastima
	$c=20$	sovrastima	sovrastima	sovrastima	sovrastima
β	$c=5$	sotto/sovra	sovrastima	sotto/sovra	sovrastima
	$c=20$	sottostima	sotto/sovra	sottostima	sotto/sovra

Consideriamo ora il caso in cui l'outlier non influisca solo sul livello della serie, ma anche sulla volatilità (LS-VO). Si nota subito dalla tabella 2.3 che, relativamente al parametro ω , è presente la stessa tendenza riscontrata nella tabella 2.2: sottostima e riduzione di variabilità per $c=20$, anche se la deviazione standard per $c=20$ risulta più contenuta. Relativamente al parametro α riscontriamo una distorsione positiva, mentre se $c=20$ sia la mediana che la deviazione standard risultano notevolmente maggiori. Riguardo il parametro β , abbiamo lo stesso andamento tendenziale di ω seppur con minor scostamenti.

Tabella 2.3: Valori ω, α, β LS VO, n=1000

	Dim Outlier	ω			α			β		
		Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std
M1	c=0	0.116	0.128	0.09	0.100	0.104	0.030	0.785	0.766	0.105
	c=5	0.033	0.034	0.009	0.180	0.181	0.025	0.829	0.828	0.022
	c=20	0.198	0.208	0.116	0.298	0.334	0.137	0.747	0.731	0.079
M2	c=0	0.293	0.383	0.313	0.115	0.117	0.043	0.547	0.433	0.429
	c=5	0.055	0.058	0.020	0.236	0.244	0.052	0.769	0.767	0.046
	c=20	0.240	0.268	0.141	0.370	0.437	0.197	0.676	0.650	0.117
M3	c=0	0.104	0.115	0.050	0.137	0.139	0.035	0.760	0.742	0.075
	c=5	0.041	0.043	0.015	0.267	0.270	0.043	0.759	0.757	0.034
	c=20	0.176	0.216	0.156	0.416	0.453	0.171	0.675	0.664	0.083
M4	c=0	0.319	0.392	0.334	0.054	0.057	0.032	0.623	0.549	0.338
	c=5	0.040	0.041	0.014	0.167	0.172	0.033	0.834	0.829	0.032
	c=20	0.237	0.264	0.135	0.338	0.387	0.169	0.689	0.670	0.110

Per ciò che riguarda la stima della densità dei parametri si può notare, come per il caso precedente, che in presenza di un outlier moderato ($c=5$), la distribuzione di ω , figura 2.10, risulta concentrata al di sotto del vero valore del parametro, mentre quando $c=20$ la distribuzione è molto più dispersa. Per quanto riguarda il parametro α , figura 2.29, l'effetto dell'outlier moderato $c=5$, sembra provocare uno spostamento in avanti della distribuzione, non modificandone tuttavia la forma e l'ampiezza, mentre quando $c=20$, la distribuzione, oltre allo spostamento in avanti presenta la consueta dispersione.

Infine relativamente al parametro β , figura 2.30, se $c=5$ la distribuzione dello stimatore presenta una maggior concentrazione attorno a valori più ele-

vati di quelli veri, mentre quando $c=20$, sorprendentemente, non si verificano cambiamenti notevoli rispetto al caso in cui non sono presenti outlier.

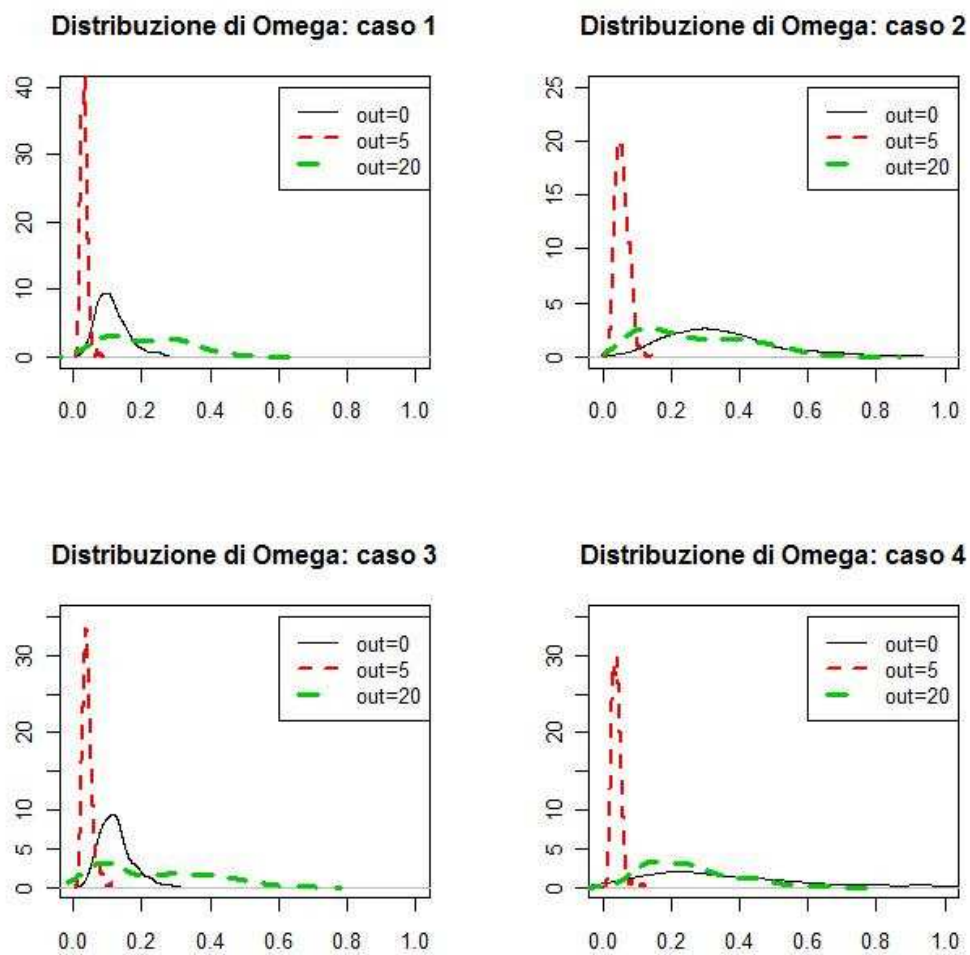
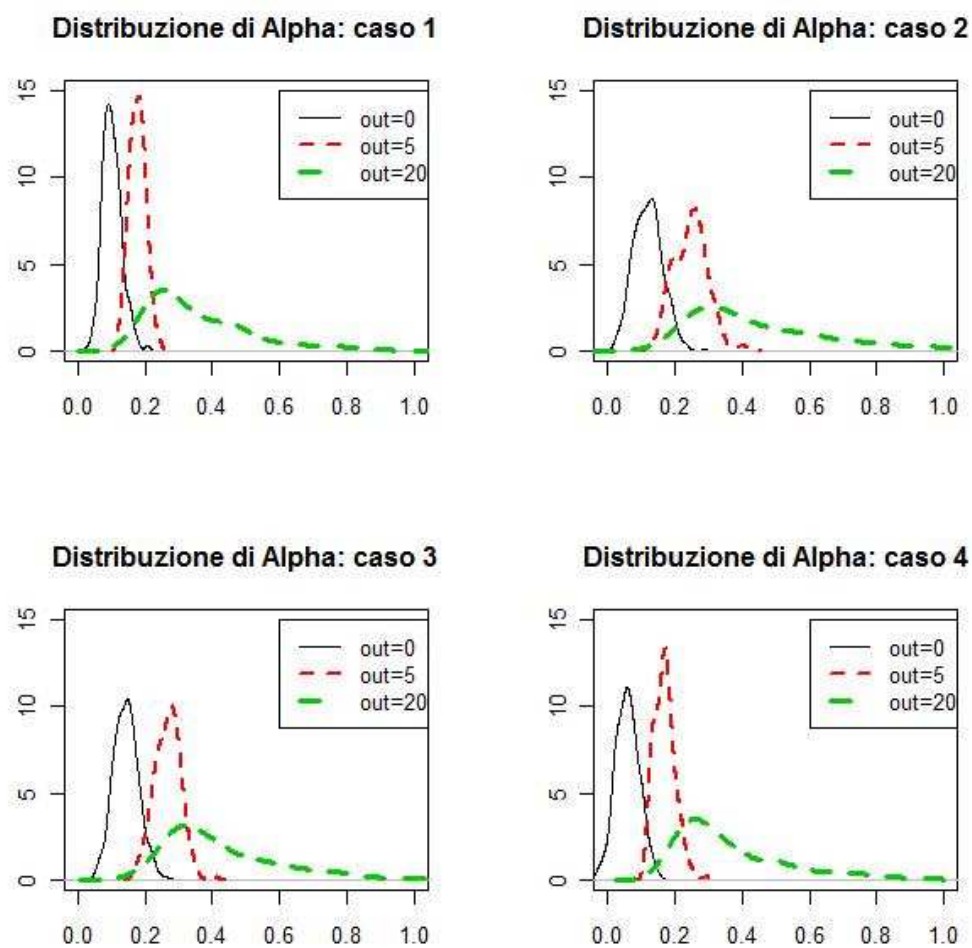


Figura 2.10: Stima della densità di ω in presenza di outlier del tipo LS VO

Figura 2.11: Stima della densità di α in presenza di outlier del tipo LS VO

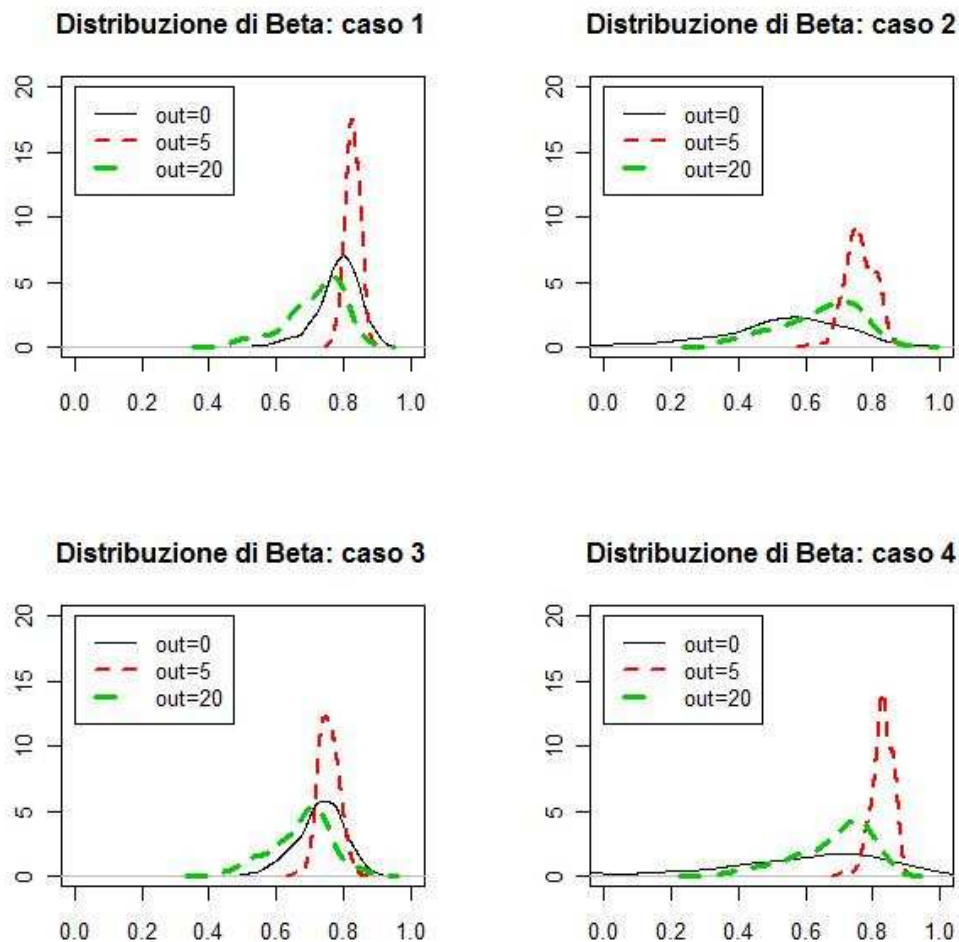


Figura 2.12: Stima della densità di β in presenza di outlier del tipo LS VO

Se si osserva la proporzione di volte in cui il nostro parametro viene sovrastimato/sottostimato rispetto al suo vero valore figure:2.13-2.18, si nota che quando $c=5$, ω (figure 2.13, 2.14) in tutte le replicazioni del processo viene sottostimato, tuttavia se $c=20$ per i casi 1 e 3 c'è una tendenziale sovrastima, per i casi 2 e 4 abbiamo risultati opposti anche se meno evidenti. Relativamente al parametro α le figure 2.15 e 2.16 evidenziano una preponderante tendenza alla sovrastima per tutti i casi considerati sia se $c=5$ sia se $c=20$;

infine per quanto riguarda β (figure:2.17,2.18) se $c=5$ nella quasi totalità dei casi c'è una tendenza alla sovrastima, mentre se $c=20$ il parametro tende ad essere sottostimato per i casi 1 e 3, sovrastimato per i casi 2 e 4.

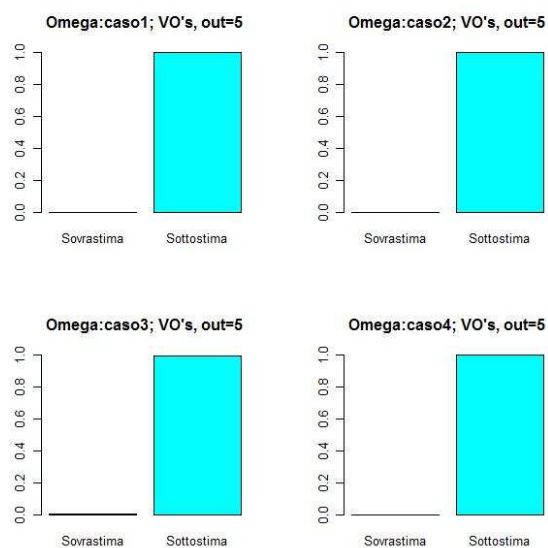


Figura 2.13: Distorsione di ω in presenza di outlier $c=5$ del tipo LS VO

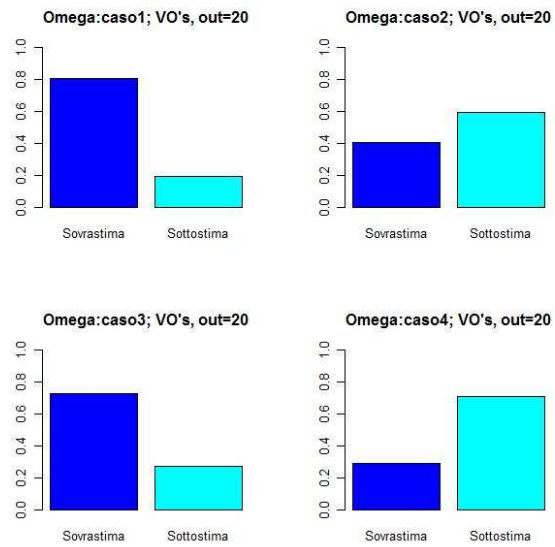


Figura 2.14: Distorsione di ω in presenza di outlier $c=20$ del tipo LS VO

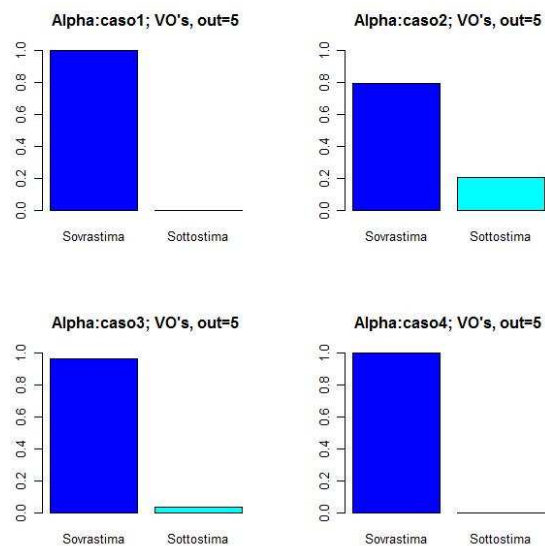
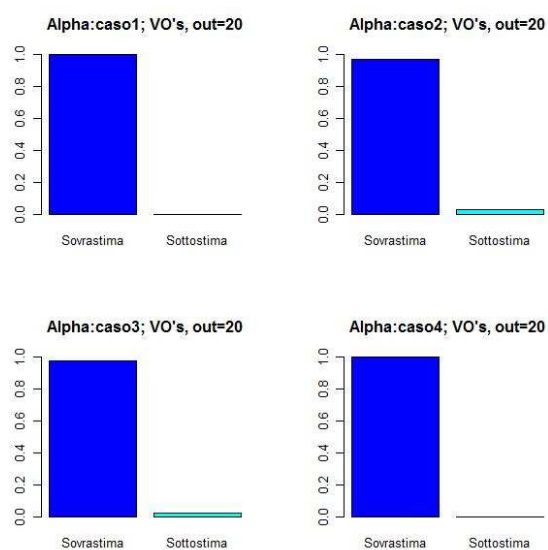
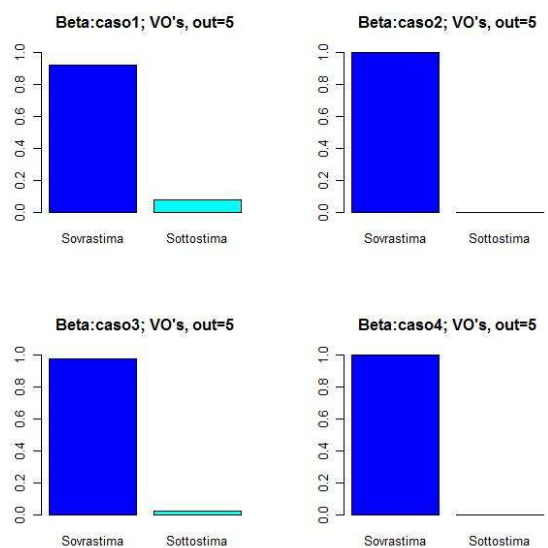


Figura 2.15: Distorsione di α in presenza di outlier $c=5$ del tipo LS VO

Figura 2.16: Distorsione di α in presenza di outlier $c=20$ del tipo LS VOFigura 2.17: Distorsione di β in presenza di outlier $c=5$ del tipo LS VO

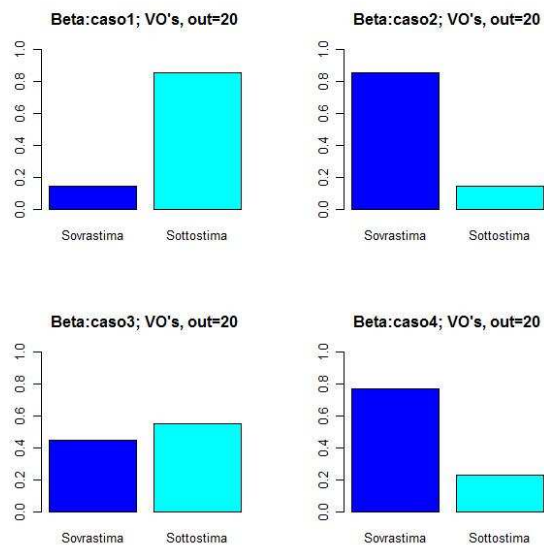


Figura 2.18: Distorsione di β in presenza di outlier $c=20$ del tipo LS VO

Ricapitolando brevemente i risultati sulla stima sei parametri ottenuti con outlier del tipo LS VO:

		M1	M2	M3	M4
ω	$c=5$	sottostima	sottostima	sottostima	sottostima
	$c=20$	sovrastima	sotto/sovra	sovrastima	sottostima
α	$c=5$	sovrastima	sovrastima	sovrastima	sovrastima
	$c=20$	sovrastima	sovrastima	sovrastima	sovrastima
β	$c=5$	sovrastima	sovrastima	sovrastima	sovrastima
	$c=20$	sottostima	sovrastima	sotto/sovra	sovrastima

2.2 Risultati relativi ai Temporary Change

Consideriamo ora il caso in cui la serie sia affetta da outlier del tipo Temporary Change, TC, descritto nel paragrafo 1.4.

Come prima, consideriamo dapprima i risultati ottenuti in presenza di outlier TC-LO e successivamente i risultati ottenuti con outlier TC-VO.

Per quanto concerne gli effetti di outlier TC LO, osservando la tabella 2.4 notiamo, riguardo al parametro ω , che all'aumentare delle dimensioni dell'outlier sia il valore mediano sia quello medio crescono notevolmente, mentre la deviazione standard non varia in maniera considerevole quando $c=5$, ma aumenta sensibilmente se $c=20$.

Relativamente al parametro α , si noti che in tutti e 4 i casi considerati vi è un leggero incremento in termini di media, mediana e deviazione standard all'aumentare di c , anche se gli effetti appaiono molto più contenuti se confrontati con il caso LS LO, tabella2.1.

Infine, per quanto riguarda β , si osservi che la maggior dimensione dell'outlier fa diminuire vistosamente sia il valore mediano sia la media, mentre la variabilità, come di consueto, aumenta.

Tabella 2.4: Valori ω, α, β TC LO, $n=1000$

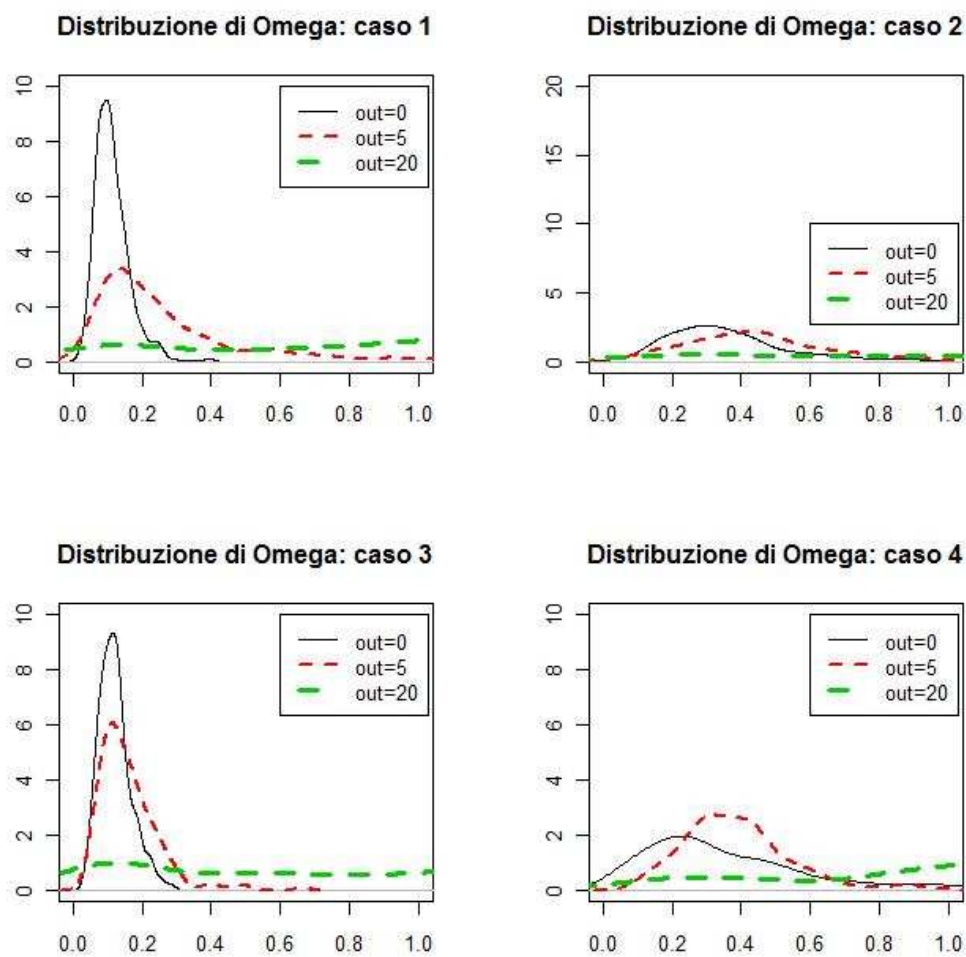
	Dim Outlier	ω			α			β		
		Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std
M1	c=0	0.116	0.128	0.090	0.100	0.104	0.030	0.785	0.766	0.105
	c=5	0.201	0.274	0.234	0.097	0.097	0.032	0.713	0.637	0.251
	c=20	0.859	0.795	0.519	0.126	0.184	0.138	0.080	0.236	0.383
M2	c=0	0.293	0.383	0.313	0.115	0.117	0.043	0.547	0.433	0.429
	c=5	0.431	0.459	0.226	0.136	0.138	0.043	0.437	0.417	0.232
	c=20	1.064	1.005	0.583	0.145	0.189	0.115	0.206	0.286	0.312
M3	c=0	0.104	0.115	0.050	0.137	0.139	0.035	0.760	0.742	0.075
	c=5	0.147	0.162	0.087	0.165	0.166	0.044	0.698	0.676	0.113
	c=20	0.533	0.556	0.413	0.205	0.273	0.184	0.330	0.358	0.318
M4	c=0	0.319	0.392	0.334	0.054	0.056	0.032	0.623	0.549	0.338
	c=5	0.431	0.502	0.327	0.095	0.096	0.037	0.490	0.423	0.318
	c=20	0.988	0.904	0.459	0.122	0.179	0.129	0.001	0.160	0.329

Dalla figura 2:19 notiamo relativamente al parametro ω , se $c=5$, la distribuzione per i casi 1 e 3 risulta meno concentrata, per i casi 2 e 4 appare

spostata in avanti senza sostanziali mutamenti per forma e ampiezza; se $c=20$ la distribuzione è molto più dispersa.

Se consideriamo il parametro α figura 2.20, in presenza di un outlier moderato $c=5$, la distribuzione non presenta sostanziali scostamenti in tutti e 4 i casi, mentre in presenza di outlier di dimensione $c=20$ risulta meno concentrata con asimmetria destra.

Infine, relativamente al parametro β , quando $c=5$ per i casi 1 e 3 la distribuzione risulta meno concentrata con asimmetria destra, per i casi 2 e 4 appare spostata in avanti senza sostanziali mutamenti per forma e ampiezza. Quando $c=20$, la distribuzione è più schiacciata.

Figura 2.19: Stima della densità di ω in presenza di outlier del tipo TC LO

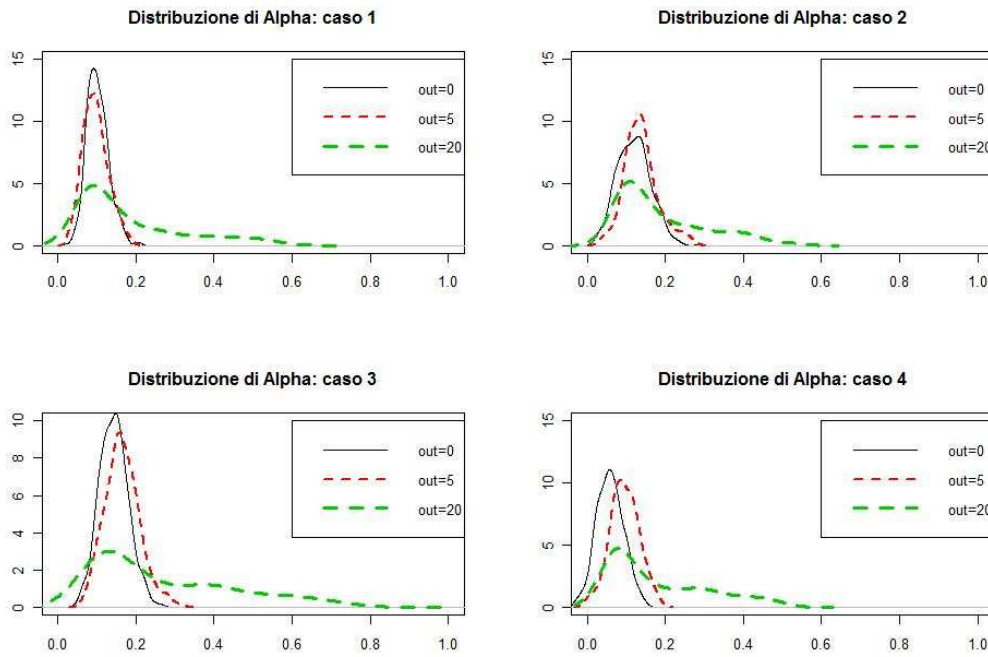
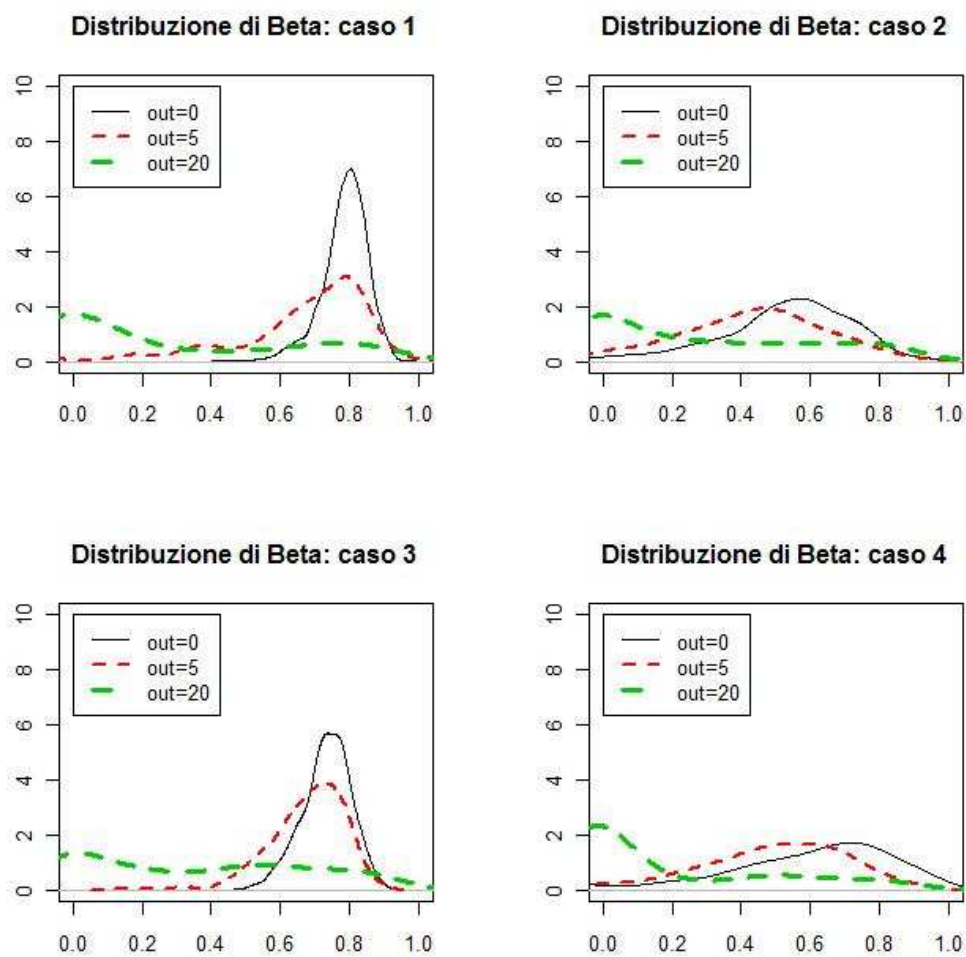


Figura 2.20: Stima della densità di α in presenza di outlier del tipo TC LO

Figura 2.21: Stima della densità di β in presenza di outlier del tipo TC LO

Le figure 2.22 e 2.23 relative alla distorsione dei parametri, confermano i risultati ottenuti in precedenza: infatti, il parametro ω viene sovrastimato sia quando $c=5$ sia quando $c=20$ per tutti i modelli considerati. Se consideriamo α , quando $c=5$ per i casi 1 e 3 notiamo una evidente sottostima mentre per i casi 2 e 4 si presentano risultati evidenti in una direzione, comportamento che si verifica quando $c=20$ per tutti i casi. Per quel che riguarda il parametro β quando $c=5$ c'è una tendenza alla sottostima del parametro anche se meno marcata se confrontata quando $c=20$.

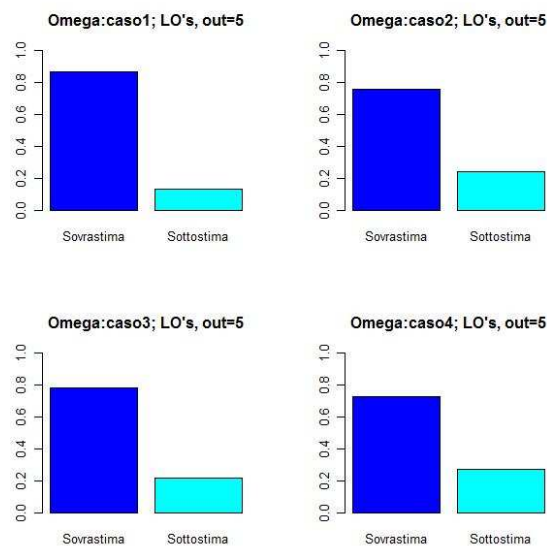
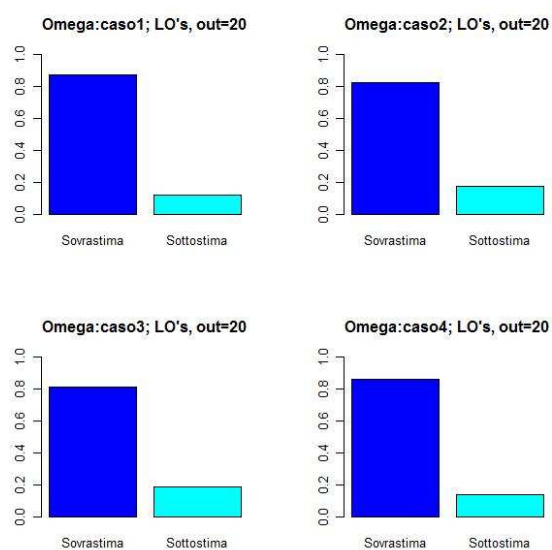
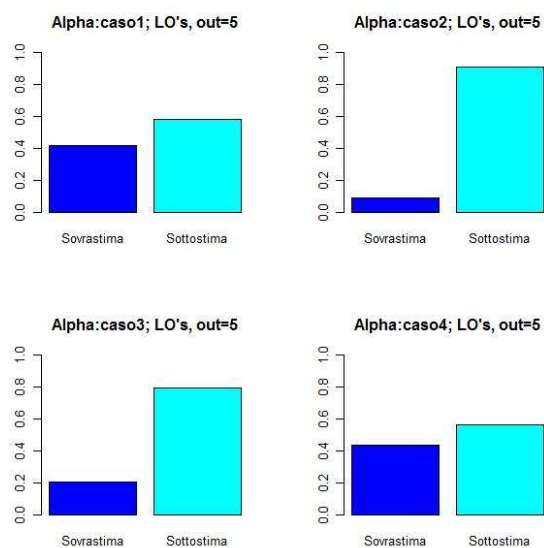
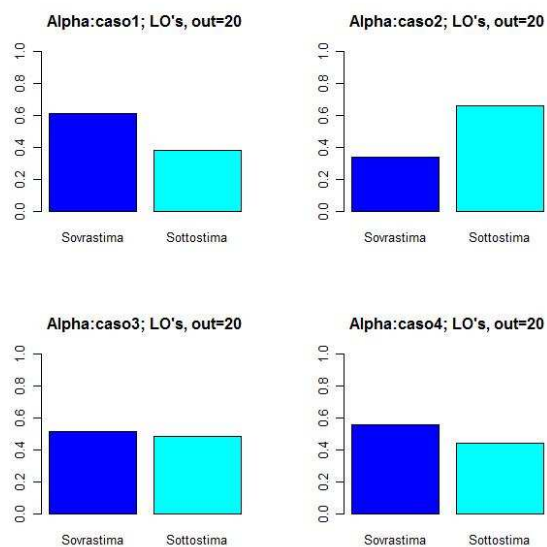
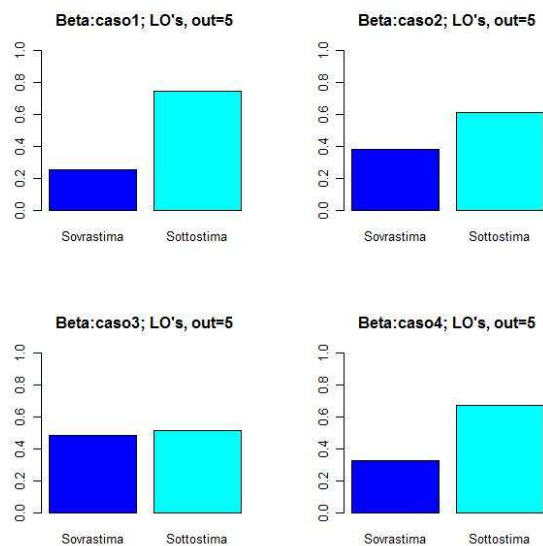


Figura 2.22: Distorsione di ω in presenza di outlier $c=5$ del tipo TC LO

Figura 2.23: Distorsione di ω in presenza di outlier $c=20$ del tipo TC LOFigura 2.24: Distorsione di α in presenza di outlier $c=5$ del tipo TC LO

Figura 2.25: Distorsione di α in presenza di outlier $c=20$ del tipo TC LOFigura 2.26: Distorsione di β in presenza di outlier $c=5$ del tipo TC LO

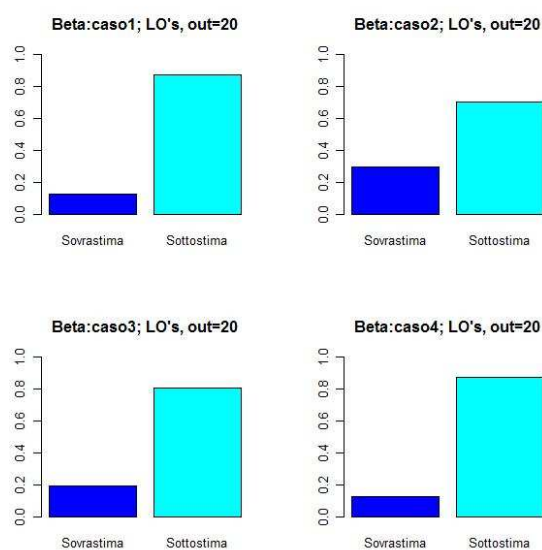


Figura 2.27: Distorsione di β in presenza di outlier $c=20$ del tipo TC LO

Ricapitolando brevemente i risultati sulla stima dei parametri ottenuti con outlier del tipo TC LO:

		M1	M2	M3	M4
ω	$c=5$	sovrastima	sovrastima	sovrastima	sovrastima
	$c=20$	sovrastima	sovrastima	sovrastima	sovrastima
α	$c=5$	sotto/sovra	sottostima	sottostima	sotto/sovra
	$c=20$	sotto/sovra	sotto/sovra	sotto/sovra	sotto/sovra
β	$c=5$	sottostima	sotto/sovra	sotto/sovra	sottostima
	$c=20$	sottostima	sottostima	sottostima	sottostima

ora i risultati ottenuti con outlier di tipo TC-VO. Si nota dalla tabella 2.5 che relativamente al parametro ω , all'aumentare delle dimensioni dell'outlier abbiamo un aumento sia della media sia della mediana, tuttavia la deviazione standard diminuisce quando $c=5$ mentre aumenta quando $c=20$.

Se consideriamo il parametro α , la maggior dimensione dell'outlier fa aumentare il valore mediano, quello medio e la variabilità, anche se quando $c=5$ gli effetti sono più contenuti se confrontati con i risultati ottenuti quando $c=20$.

Infine, per quanto riguarda il parametro β , in tutti e quattro i casi considerati, quando $c=5$ abbiamo una riduzione di media mediana e deviazione standard; quando $c=20$ i primi due indici diminuiscono mentre la variabilità aumenta.

Tabella 2.5: Valori ω, α, β TC VO n=1000

	Dim Outlier	ω			α			β		
		Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std
M1	c=0	0.116	0.128	0.090	0.100	0.104	0.030	0.785	0.766	0.105
	c=5	0.130	0.134	0.058	0.117	0.119	0.029	0.754	0.745	0.072
	c=20	0.202	0.252	0.191	0.167	0.248	0.213	0.723	0.662	0.211
M2	c=0	0.293	0.383	0.313	0.115	0.117	0.043	0.547	0.433	0.429
	c=5	0.331	0.337	0.093	0.216	0.215	0.044	0.461	0.463	0.109
	c=20	0.469	0.502	0.292	0.278	0.338	0.227	0.412	0.409	0.226
M3	c=0	0.104	0.115	0.050	0.137	0.139	0.035	0.760	0.742	0.075
	c=5	0.114	0.122	0.042	0.213	0.212	0.042	0.678	0.675	0.062
	c=20	0.199	0.231	0.188	0.257	0.369	0.306	0.652	0.609	0.211
M4	c=0	0.319	0.392	0.334	0.054	0.056	0.032	0.623	0.549	0.338
	c=5	0.369	0.396	0.181	0.127	0.127	0.035	0.506	0.490	0.190
	c=20	0.537	0.529	0.284	0.186	0.236	0.171	0.492	0.448	0.236

Se consideriamo la distribuzione della stima di densità, per quanto riguarda il parametro ω , figura 2.28, la presenza dell'outlier moderato $c=5$, per i casi 1 e 3 non comporta scostamenti della distribuzione; per i casi 2 e 4 ne comporta maggior concentrazione attorno al vero valore del parametro. In presenza dell'outlier di dimensioni maggiori, $c=20$, la distribuzione appare molto più appiattita. Per quel che riguarda il parametro α , figura 2.29, quando $c=5$ la distribuzione presenta uno spostamento in avanti, anche se risulta più marcato per i casi 2, 3, 4. Quando $c=20$ riscontriamo la consueta dispersione. Infine, per quanto riguarda il parametro β , quando $c=5$ si verifica uno spostamento verso sinistra della distribuzione per tutti e quattro i casi, anche se risulta più concentrata per i casi 1 e 3; se $c=20$ la distribuzione risulta meno concentrata e più appiattita.

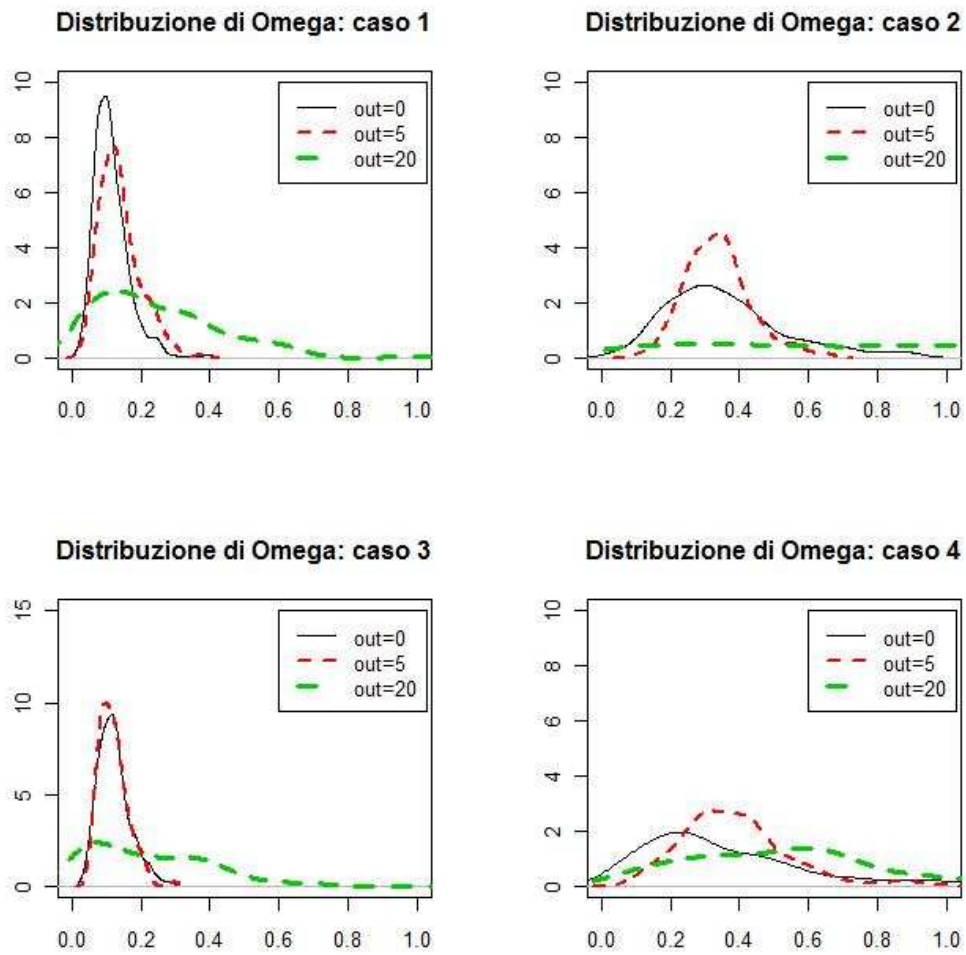
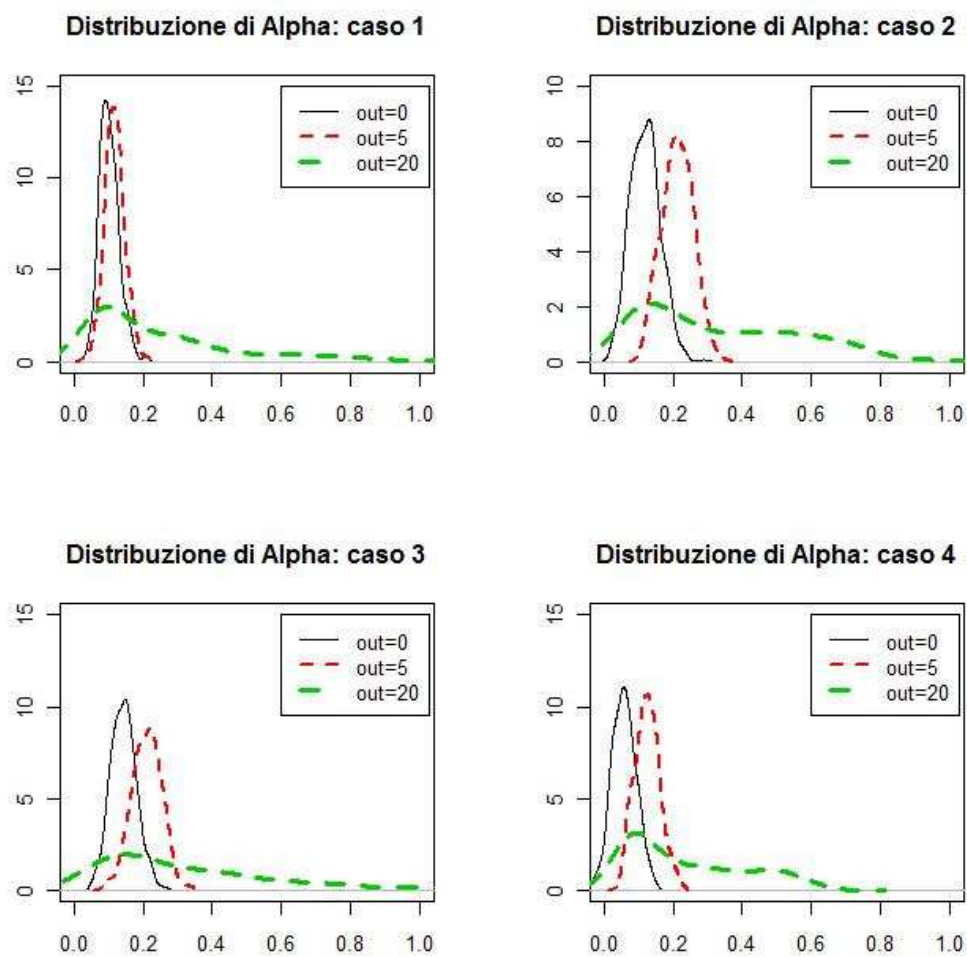


Figura 2.28: Stima della densità di ω in presenza di outlier del tipo TC VO

Figura 2.29: Stima della densità di α in presenza di outlier del tipo TC VO

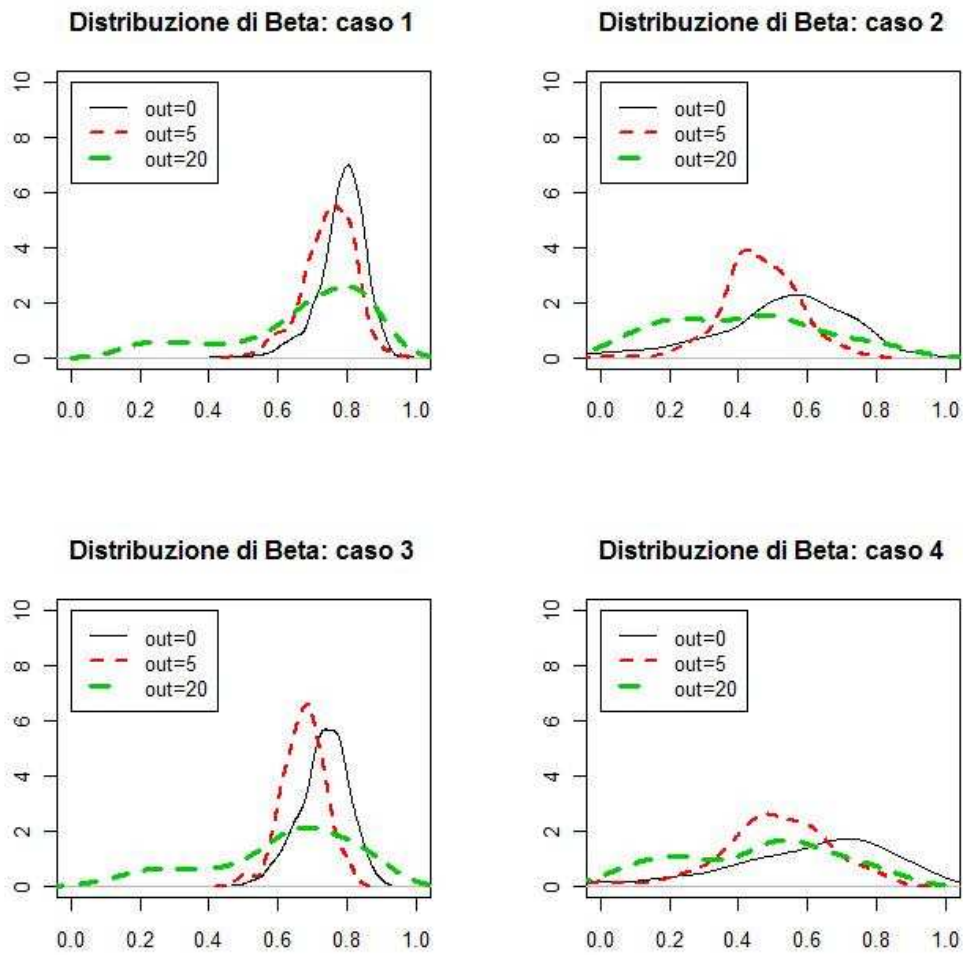


Figura 2.30: Stima della densità di β in presenza di outlier del tipo TC VO

Per quel che riguarda le frequenze di sottostima, sovrastima dei diversi parametri nei vari casi considerati, notiamo che per quel che riguarda i parametri ω e α sia se $c=5$ sia se $c=20$ per tutti i casi considerati c'è una tendenza alla sovrastima, mentre se consideriamo β la tendenza è opposta: forte sottostima del parametro sia se $c=5$ sia se $c=20$.

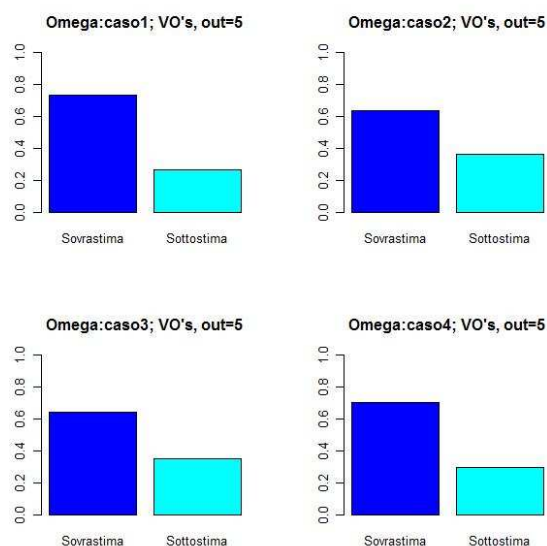


Figura 2.31: Distorsione di ω in presenza di outlier $c=5$ del tipo TC VO

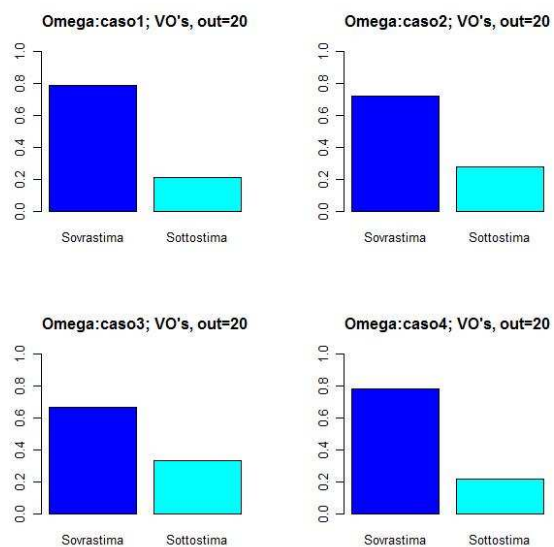


Figura 2.32: Distorsione di ω in presenza di outlier $c=20$ del tipo TC VO

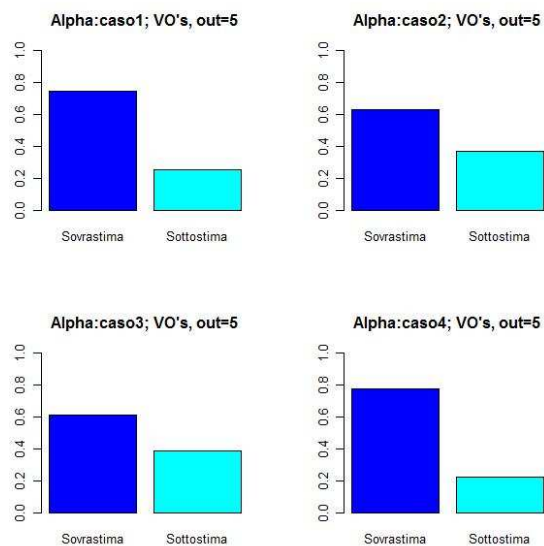
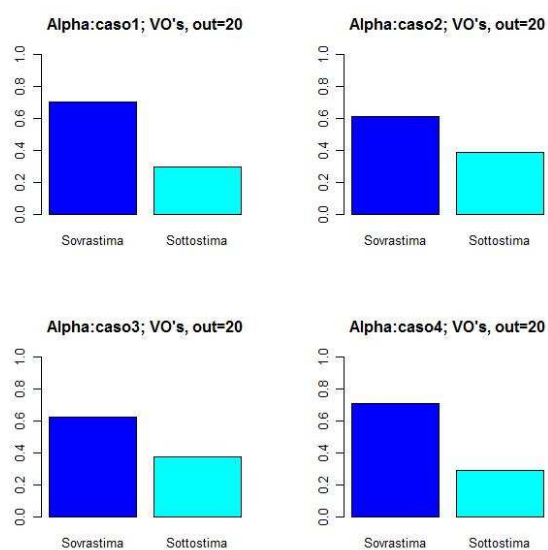
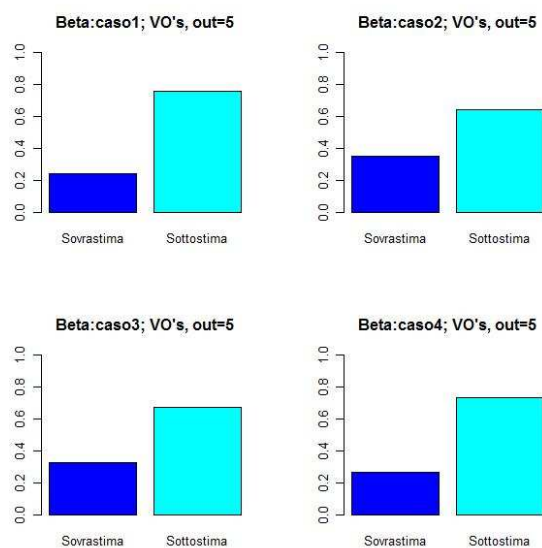


Figura 2.33: Distorsione di α in presenza di outlier $c=5$ del tipo TC VO

Figura 2.34: Distorsione di α in presenza di outlier $c=20$ del tipo TC VOFigura 2.35: Distorsione di β in presenza di outlier $c=5$ del tipo TC VO

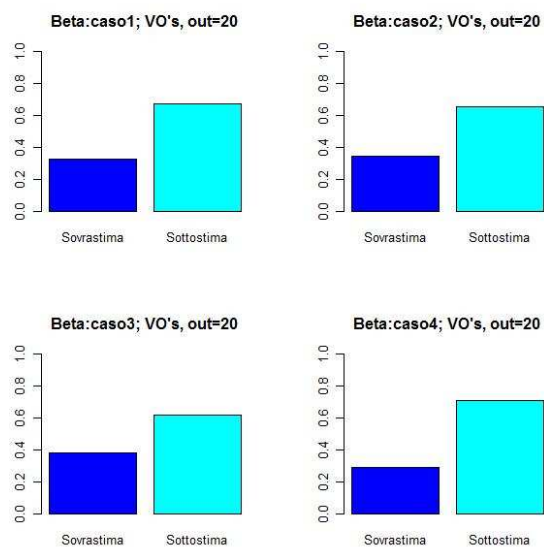


Figura 2.36: Distorsione di β in presenza di outlier $c=20$ del tipo TC VO

Ricapitolando brevemente i risultati sulla stima dei parametri ottenuti con outlier del tipo TC VO:

		M1	M2	M3	M4
ω	$c=5$	sovrastima	sovrastima	sovrastima	sovrastima
	$c=20$	sovrastima	sovrastima	sovrastima	sovrastima
α	$c=5$	sovrastima	sovrastima	sovrastima	sovrastima
	$c=20$	sovrastima	sovrastima	sovrastima	sovrastima
β	$c=5$	sottostima	sottostima	sottostima	sottostima
	$c=20$	sottostima	sottostima	sottostima	sottostima

Conclusioni

I risultati dell'esperimento Monte Carlo descritto nel capitolo precedente, evidenziano come sia molto importante scoprire se la serie d'interesse contiene o meno valori anomali.

Non considerare la presenza di valori anomali potrebbe portare, infatti, a pesanti distorsioni nelle stime dei parametri, in particolare quando nella serie è presente un outlier di tipo LO.

Sembra inoltre, che ciò che comporta maggior distorsione nella stima dei parametri sia la diversa tipologia dell'outlier e/o una sua diversa dimensione, piuttosto che un diverso valore del vero valore del parametro di partenza, a parità di altre condizioni.

Infine, se consideriamo i risultati in Appendice, notiamo, com'era prevedibile, che al diminuire della numerosità campionaria, gli effetti degli outlier risultano di maggior impatto, anche se, tendenzialmente i risultati non variano.

Appendice

In questa ultima parte son riportati in tabelle i risultati ottenuti considerando come lunghezza della serie, $n=200$ e $n=500$.

Tabella 2.6: Valori ω, α, β LS LO's, $n=200$

	Dim Outlier	ω			α			β		
		Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std
caso1	out=0	0.149	0.266	0.343	0.104	0.108	0.074	0.731	0.615	0.374
	out=5	0.208	0.232	0.132	0.383	0.416	0.163	0.602	0.570	0.162
	out=20	8.007	7.209	4.443	1.027	1.082	0.408	-0.053	0.029	0.195
caso2	out=0	0.343	0.439	0.403	0.107	0.120	0.099	0.539	0.443	0.434
	out=5	0.235	0.269	0.141	0.447	0.480	0.178	0.530	0.508	0.171
	out=20	8.441	7.373	4.432	1.032	1.116	0.421	-0.064	0.013	0.188
caso3	out=0	0.128	0.198	0.221	0.137	0.143	0.082	0.721	0.643	0.277
	out=5	0.190	0.224	0.141	0.422	0.452	0.173	0.578	0.550	0.164
	out=20	8.477	7.499	4.673	1.037	1.139	0.439	-0.065	0.007	0.173
caso4	out=0	0.284	0.463	0.482	0.053	0.056	0.083	0.631	0.479	0.505
	out=5	0.220	0.255	0.134	0.396	0.423	0.161	0.585	0.560	0.161
	out=20	7.706	6.887	4.313	1.025	1.098	0.414	-0.042	0.030	0.188

Tabella 2.7: Valori ω, α, β LS VO's, $n=200$

	Dim Outlier	ω			α			β		
		Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std
caso1	out=0	0.419	0.266	0.343	0.104	0.108	0.074	0.731	0.615	0.374
	out=5	0.102	0.116	0.066	0.335	0.343	0.072	0.714	0.706	0.055
	out=20	1.679	1.448	0.817	0.559	0.838	0.621	0.574	0.526	0.135
caso2	out=0	0.343	0.439	0.403	0.107	0.120	0.099	0.534	0.443	0.434
	out=5	0.055	0.058	0.018	0.244	0.248	0.050	0.767	0.763	0.045
	out=20	2.039	1.752	0.983	0.642	0.918	0.628	0.492	0.456	0.137
caso3	out=0	0.128	0.198	0.221	0.137	0.143	0.082	0.721	0.643	0.277
	out=5	0.103	0.123	0.007	0.423	0.434	0.101	0.653	0.648	0.066
	out=20	1.847	1.526	0.977	0.668	0.964	0.638	0.533	0.491	0.132
caso4	out=0	0.284	0.463	0.482	0.053	0.056	0.083	0.631	0.479	0.505
	out=5	0.140	0.148	0.064	0.345	0.352	0.088	0.675	0.675	0.041
	out=20	1.892	1.681	0.685	0.568	0.819	0.565	0.522	0.476	0.146

Tabella 2.8: Valori ω, α, β LS LO, n=500

	Dim Outlier	ω			α			β		
		Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std
caso1	out=0	0.117	0.153	0.153	0.100	0.104	0.043	0.778	0.738	0.176
	out=5	0.091	0.099	0.052	0.247	0.264	0.083	0.741	0.723	0.087
	out=20	2.486	2.907	2.213	0.941	0.853	0.324	0.001	0.189	0.272
caso2	out=0	0.319	0.385	0.282	0.112	0.118	0.063	0.554	0.492	0.314
	out=5	0.123	0.135	0.061	0.319	0.332	0.106	0.663	0.650	0.110
	out=20	2.224	2.783	2.264	0.960	0.880	0.352	0.001	0.188	0.277
caso3	out=0	0.112	0.141	0.117	0.140	0.143	0.055	0.739	0.707	0.153
	out=5	0.091	0.103	0.054	0.313	0.323	0.095	0.677	0.666	0.097
	out=20	2.764	3.140	2.561	0.964	0.884	0.336	0.004	0.176	0.278
caso4	out=0	0.336	0.474	0.434	0.053	0.058	0.053	0.602	0.463	0.450
	out=5	0.103	0.117	0.057	0.257	0.273	0.088	0.726	0.710	0.094
	out=20	2.740	2.989	2.218	0.909	0.814	0.334	0.029	0.216	0.287

Tabella 2.9: Valori ω, α, β LS VO, n=500

	Dim Outlier	ω			α			β		
		Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std
caso1	out=0	0.117	0.153	0.153	0.100	0.104	0.043	0.778	0.738	0.176
	out=5	2.740	2.989	2.218	0.909	0.814	0.334	0.029	0.216	0.287
	out=20	0.515	0.482	0.264	0.383	0.476	0.232	0.684	0.656	0.094
caso2	out=0	0.319	0.385	0.282	0.112	0.118	0.063	0.554	0.492	0.314
	out=5	0.079	0.083	0.031	0.299	0.302	0.067	0.721	0.719	0.057
	out=20	0.516	0.546	0.335	0.485	0.612	0.318	0.599	0.567	0.132
caso3	out=0	0.112	0.141	0.117	0.140	0.143	0.055	0.739	0.707	0.153
	out=5	0.053	0.061	0.029	0.314	0.318	0.057	0.723	0.722	0.044
	out=20	0.541	0.495	0.339	0.480	0.617	0.335	0.629	0.601	0.109
caso4	out=0	0.336	0.474	0.434	0.053	0.058	0.053	0.602	0.463	0.450
	out=5	0.068	0.072	0.026	0.226	0.232	0.050	0.778	0.774	0.045
	out=20	0.514	0.557	0.284	0.439	0.566	0.302	0.620	0.576	0.142

Tabella 2.10: Valori ω, α, β TC LO, n=200

	Dim Outlier	ω			α			β		
		Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std
caso1	out=0	0.149	0.266	0.343	0.104	0.108	0.074	0.731	0.615	0.374
	out=5	0.691	0.766	0.549	0.158	0.178	0.089	0.175	0.171	0.463
	out=20	0.527	0.665	0.476	0.166	0.174	0.087	0.374	0.283	0.403
caso2	out=0	0.343	0.439	0.403	0.107	0.120	0.099	0.534	0.443	0.434
	out=5	0.770	0.806	0.482	0.186	0.203	0.095	0.084	0.112	0.411
	out=20	2.937	2.401	1.612	0.203	0.531	0.540	0.020	0.016	0.322
caso3	out=0	0.128	0.198	0.221	0.137	0.143	0.082	0.721	0.743	0.277
	out=5	0.444	0.547	0.436	0.202	0.221	0.101	0.383	0.285	0.420
	out=20	2.546	1.855	1.372	0.210	0.805	0.904	0.020	0.038	0.251
caso4	out=0	0.284	0.463	0.482	0.053	0.056	0.083	0.631	0.479	0.505
	out=5	0.527	0.664	0.476	0.166	0.174	0.088	0.374	0.283	0.403
	out=20	2.764	2.211	1.348	0.159	0.591	0.691	0.030	0.029	0.262

Tabella 2.11: Valori ω, α, β TC VO, n=200

	Dim Outlier	ω			α			β		
		Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std
caso1	out=0	0.149	0.266	0.343	0.104	0.108	0.074	0.731	0.615	0.374
	out=5	0.221	0.356	0.343	0.181	0.200	0.100	0.621	0.531	0.307
	out=20	0.940	0.977	0.724	0.281	0.776	0.912	0.558	0.487	0.230
caso2	out=0	0.343	0.439	0.403	0.107	0.120	0.099	0.534	0.443	0.434
	out=5	0.427	0.506	0.328	0.258	0.274	0.133	0.377	0.323	0.305
	out=20	1.179	1.346	1.119	0.405	0.946	0.998	0.273	0.254	0.269
caso3	out=0	0.128	0.198	0.221	0.137	0.143	0.082	0.721	0.743	0.277
	out=5	0.189	0.233	0.188	0.258	0.276	0.116	0.589	0.563	0.198
	out=20	0.973	0.997	0.830	0.357	0.876	1.028	0.530	0.468	0.228
caso4	out=0	0.284	0.463	0.482	0.053	0.056	0.083	0.631	0.479	0.505
	out=5	0.557	0.651	0.411	0.202	0.214	0.103	0.329	0.258	0.356
	out=20	1.379	1.506	1.117	0.290	0.821	0.873	0.250	0.240	0.262

Tabella 2.12: Valori ω, α, β TC LO, n=500

	Dim Outlier	ω			α			β		
		Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std
caso1	out=0	0.117	0.153	0.153	0.100	0.104	0.043	0.778	0.738	0.176
	out=5	0.342	0.444	0.360	0.117	0.124	0.050	0.550	0.454	0.363
	out=20	1.191	1.193	0.824	0.157	0.305	0.274	0.003	0.115	0.410
caso2	out=0	0.319	0.385	0.282	0.112	0.118	0.063	0.554	0.492	0.314
	out=5	0.518	0.576	0.331	0.152	0.160	0.062	0.341	0.299	0.327
	out=20	1.266	1.300	0.893	0.197	0.291	0.226	0.010	0.187	0.358
caso3	out=0	0.112	0.141	0.117	0.140	0.143	0.055	0.739	0.707	0.153
	out=5	0.200	0.258	0.203	0.170	0.177	0.064	0.631	0.575	0.232
	out=20	0.796	0.921	0.690	0.281	0.429	0.398	0.006	0.188	0.323
caso4	out=0	0.336	0.474	0.434	0.053	0.058	0.053	0.602	0.463	0.450
	out=5	0.450	0.551	0.376	0.119	0.121	0.050	0.464	0.374	0.358
	out=20	1.328	1.226	0.771	0.142	0.285	0.255	0.006	0.080	0.372

Tabella 2.13: Valori ω, α, β TC VO, n=500

	Dim Outlier	ω			α			β		
		Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std	Mediana	Media	Dev std
caso1	out=0	0.117	0.153	0.153	0.100	0.104	0.043	0.778	0.738	0.176
	out=5	0.153	0.185	0.139	0.134	0.140	0.048	0.729	0.696	0.157
	out=20	0.689	0.612	0.271	0.259	0.401	0.384	0.689	0.612	0.228
caso2	out=0	0.319	0.385	0.282	0.112	0.118	0.063	0.554	0.492	0.314
	out=5	0.362	0.383	0.166	0.230	0.234	0.072	0.438	0.420	0.178
	out=20	0.596	0.692	0.512	0.323	0.497	0.425	0.378	0.359	0.262
caso3	out=0	0.112	0.141	0.117	0.140	0.143	0.055	0.739	0.707	0.153
	out=5	0.123	0.136	0.063	0.221	0.227	0.067	0.667	0.656	0.097
	out=20	0.323	0.375	0.312	0.306	0.538	0.530	0.599	0.551	0.223
caso4	out=0	0.336	0.474	0.434	0.053	0.058	0.053	0.602	0.463	0.450
	out=5	0.453	0.501	0.299	0.148	0.151	0.061	0.434	0.391	0.295
	out=20	0.670	0.712	0.488	0.273	0.413	0.362	0.429	0.379	0.275

Bibliografia

- [1] Trivez a Catalan (2008), Effects of level shift and temporary changes on the estimation of GARCH models
- [2] Franses e Van Dick, Outlier detection in the GARCH(1,1) model, Econometric Institute report number 155
- [3] Doornick e Ooms (2005), Outlier detection in GARCH models, Discussion Paper TI, 05-092/4, Tinbergen Institute.
- [4] Verhoeven e McAleer(2000), Modelling Outliers and extreme Observations for ARMA-GARCH processes.
- [5] Engle, R.F. (1982) Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*
- [6] Bollerslev, (1986) Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity
- [7] Zainol Zahari Zaharim Sopian, Additive Outliers (AO) and Innovative Outliers (IO) in GARCH (1, 1) Processes
- [8] Tsay, Analysis of financial time series
- [9] Gallo e Pacini, Metodi quantitativi per i mercati finanziari
- [10] Iacus e Masarotto, Laboratorio di statistica con R
- [11] Wurth, Chalabi, Luksan Parameter Estimation of ARMA Models with GARCH/APARCH Errors An R and SPlus Software Implementation

