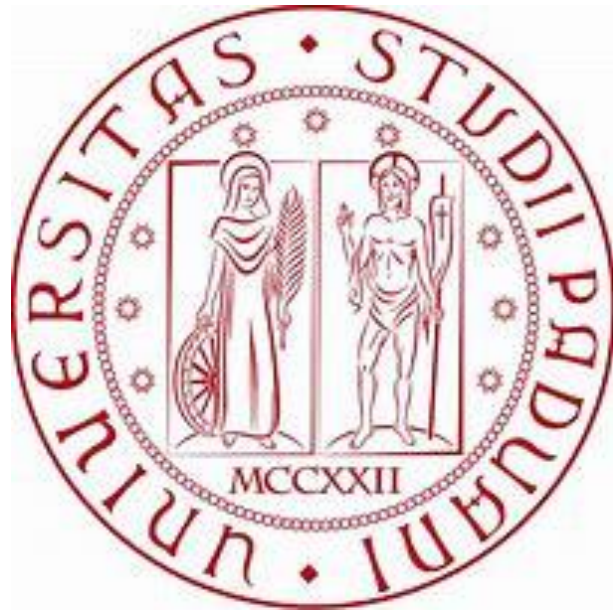


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA



FACOLTÀ DI INGEGNERIA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

**CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA
AEROSPAZIALE**

TESI DI LAUREA

**METODI NUMERICI PER LO STUDIO DI EFFETTI
AEROELASTICI SU UN'ALA**

Relatore: Prof. Mirco Zaccariotto

Laureando: Giulio De Pieri

Co-relatore: Prof. Ugo Galvanetto

ANNO ACCADEMICO 2019-2020

Indice

Introduzione	1
Capitolo 1 Aeroelasticità Statica	5
1.1 Sezione tipica	6
1.1.1 Divergenza	8
1.1.2 Metodo iterativo	12
1.1.3 Effetti sulle superfici di controllo	15
1.2 Ala flessibile incastrata ad un'estremità	19
1.3 Ala a freccia	27
Capitolo 2 Aeroelasticità Dinamica	37
2.1 Variazione istantanea dell'angolo di attacco	38
2.2 Risposta ad un moto armonico	39
2.3 Flutter	44
2.3.1 Metodo k	55
2.3.2 Metodo p-k	58
2.3.3 Teoria aerodinamica non stazionaria	61

2.3.4	Cambio di posizione degli assi	63
2.3.5	Ala flessibile	64
2.3.6	Flutter delle superfici di controllo	65
2.3.7	Flutter in regime transonico e supersonico	67
2.3.8	Non-linearità	71
2.3.9	Utilizzo delle coniche per determinare il flutter	72
Capitolo 3	Risposta Aeroelastica a Fenomeni di Turbolenza	75
3.1	Soluzione nel dominio del tempo	78
3.2	Soluzione nel dominio delle frequenze	82
3.2.1	Forma generale della soluzione	84
Capitolo 4	Modellazione di Problemi Aeroelastici	89
4.1	Modello strutturale	90
4.2	Modello aerodinamico	92
4.2.1	DLM e ZONA51	95
4.2.2	Metodo Mach Box	99
4.2.3	Strip Theory	101
4.2.4	Piston Theory	104
4.3	Accoppiamento strutturale/aerodinamico	106

4.3.1	Spline lineare	108
4.3.2	Spline superficiale	109
4.4	Analisi aeroelastica statica	110
4.5	Analisi di flutter	113
Capitolo 5	Esempi di Analisi Aeroelastiche	117
5.1	Variazione della velocità	117
5.1.1	Modello strutturale	118
5.1.2	Modello aerodinamico	119
5.1.3	Analisi e risultati	123
5.2	Effetto dell'angolo di freccia e rappr. beam-like	127
5.2.1	Modello strutturale	127
5.2.2	Modello beam-like	128
5.2.3	Modello aerodinamico	131
5.2.4	Analisi e risultati	132
5.3	Analisi di flutter	134
5.3.1	Modello strutturale	134
5.3.2	Modello aerodinamico	136
5.3.3	Analisi e risultati	142

Conclusioni	149
Appendice Teoria della Linea Portante di Prandtl	151
Fonti Bibliografiche	159

Introduzione

L'aeroelasticità si occupa dello studio di fenomeni dovuti all'interazione tra le forze aerodinamiche e le deformazioni elastiche che esse inducono nella struttura. Questo concetto può essere chiarito prendendo come esempio un'ala investita da una corrente d'aria: se l'ala è flessibile verrà deformata dal flusso in arrivo, ma così facendo varierà anche la sua superficie esposta alla corrente e quindi la forza aerodinamica esercitata su di essa, perciò per analizzare l'aerodinamica dell'ala è necessario considerare l'intero sistema aerodinamico e strutturale.

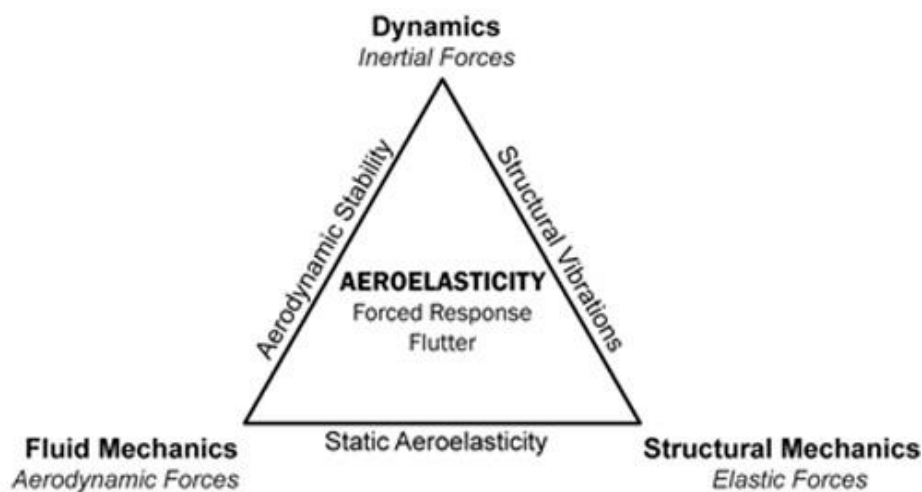


Figura I-1: Triangolo di Collar.

Si è soliti suddividere i fenomeni aeroelastici in due gruppi a seconda delle forze che entrano in gioco, come riportato nel Triangolo di Collar (figura I-1)¹; si avranno quindi:

¹ Immagine tratta da Rajput, M.S. (2013). *Evaluation of experimental forced response data of a turbine stage with respect to different stator blade damages*. Stockholm Royal Institute of Technology. Unpublished Manuscript.

La provenienza delle figure successive verrà indicata in didascalia con un numero identificativo della fonte bibliografica; per le immagini ricavate da internet la fonte trovata tramite la ricerca per immagini di Google verrà riportata in una nota a piè di pagina.

- Fenomeni di **aeroelasticità statica**, dove si considerano solo forze aerodinamiche ed elastiche escludendo quelle inerziali. Come si vedrà questi fenomeni includono una riduzione nell'efficienza delle superfici di controllo dell'ala che può portare addirittura all'inversione del loro funzionamento (detto *control reversal*); altro fenomeno potenzialmente disastroso è la divergenza, dove la resistenza a torsione dell'ala non è sufficiente a contrastare il momento dovuto al beccheggio e quindi si ha un aumento incontrollato dell'angolo di twist alare;
- Fenomeni di **aeroelasticità dinamica** che includono anche le forze inerziali, quindi gli effetti oscillatori delle interazioni aeroelastiche. L'instabilità più importante di questo tipo è il flutter, che riguarda due o più modi di vibrare ed insorge quando si ha un cattivo accoppiamento tra le forze. Il problema maggiore nel cercare di determinare l'insorgenza del flutter è dato dalla natura non statica di forze e momenti aerodinamici generati durante l'oscillazione del velivolo.

Nella progettazione di veicoli aerospaziali i fenomeni aeroelastici possono avere effetti molto differenti, che vanno dai meno gravi (semplici disturbi per passeggeri e pilota) passando per vibrazioni che riducono la vita a fatica del velivolo fino ai più catastrofici che portano alla rottura improvvisa della struttura. L'aeroelasticità ha un ruolo importante anche nelle turbomacchine, nelle turbine eoliche, nelle monoposto da corsa e addirittura negli strumenti musicali e nelle strutture civili (l'esempio più famoso è il crollo del ponte di Tacoma Narrows, avvenuto nel 1940 a causa del flutter). Risulta quindi evidente come lo studio e il controllo di questi effetti sia fondamentale per ottenere una struttura affidabile e ottimizzata.

Agli inizi dello sviluppo di aerodine gli effetti aeroelastici non vennero completamente riconosciuti e fino alla Prima Guerra Mondiale il design dei velivoli è rimasto basato soprattutto su analisi disaccoppiate, nonostante i fratelli Wright avessero investigato la perdita di spinta a causa della flessibilità delle eliche e un test di volo di Samuel Langley nel 1903 fosse fallito a causa di insufficiente rigidità torsionale dell'ala. Il primo caso documentato in cui si è stati in grado di modellare e risolvere un problema di flutter risale al 1916, con il bombardiere Handley-Page O/400. In ogni caso i fenomeni di divergenza torsionale rimasero uno dei principali driver di progettazione nei biplani fino agli anni Trenta, quando venne introdotto il rivestimento lavorante delle superfici alari.

Durante la Seconda Guerra Mondiale e in seguito, sia nei velivoli militari che da trasporto vi fu un aumento continuo del rapporto di snellezza (cioè il rapporto tra la lunghezza della semiala e il suo spessore alla radice) e del parametro di velocità ridotta ($\frac{U_{max}}{b_{3/4}\omega_{tors}}$). Ciò comportò l'aumento del rischio di flutter e i modelli aerodinamici divennero più complessi per fronteggiare l'aggiunta degli effetti di compressibilità dell'aria, iniziando anche a fare largo uso di gallerie del vento e, dagli anni Cinquanta in poi, di computer².

² Le fonti delle note storiche sono la [3] e la [14], riportate in bibliografia.

Capitolo 1

Aeroelasticità Statica

Nello studio dell'aeroelasticità statica le forze agenti e il moto sono indipendenti dal tempo, per cui solamente l'angolo di incidenza influisce sulla portanza e sul momento aerodinamico: questi carichi possono far flettere e torcere l'ala, andando a modificare l'incidenza e di conseguenza il flusso dell'aria attorno al profilo, cosa che a sua volta cambierà i carichi agenti e quindi la deformazione dell'ala; questo processo continua finché solitamente non si raggiunge una condizione di equilibrio. Le deformazioni dovute all'aeroelasticità statica sono importanti in quanto governano i carichi aerodinamici in condizioni di volo a regime permanente, la distribuzione della portanza, le forze di drag, l'efficienza delle superfici di controllo dell'ala e l'assetto dell'aeromobile.

Avendo eliminato le dipendenze dal tempo si possono eliminare le forze di inerzia dalle equazioni di equilibrio, quindi è molto più semplice modellare i fenomeni statici di quelli dinamici. Si possono incontrare due fenomeni critici di aeroelasticità statica, la divergenza e l'inversione delle superfici di controllo: La divergenza avviene quando i momenti dovuti alle forze aerodinamiche superano i momenti di ripristino dovuti alla rigidità della struttura, portando ad un fallimento della stessa; il tipo di divergenza più comune è quella legata alla torsione dell'ala. Le superfici di controllo invece vengono usate per manovrare il velivolo e la loro inversione si ha quando, superata una certa velocità, esse iniziano a funzionare in maniera contraria a quella di design. Nei

mezzi moderni la velocità di flutter è inferiore a quella di divergenza, quindi solitamente si raggiunge prima una condizione di instabilità dinamica che una di instabilità statica; tuttavia la velocità di divergenza è un parametro utile per determinare la rigidità generale della struttura ed è parte del processo di certificazione del velivolo.

1.1 Sezione tipica

I problemi aeroelastici vengono generalmente introdotti tramite una rappresentazione semplificata dell'ala. I carichi aerodinamici vengono espressi su singoli profili isolati: per ognuno di essi si considera un flusso bidimensionale e si applica la teoria dell'ala infinita. Questa prende il nome di Teoria delle Strisce (traduzione dell'inglese *Strip Theory*) e permette di introdurre un legame tra l'incidenza α , la portanza L e il momento aerodinamico M_A prodotti dal singolo profilo:

$$L = \frac{1}{2} \rho v^2 c C_L(\alpha) = qc C_L(\alpha) \quad (1.1)$$

$$M_A = \frac{1}{2} \rho v^2 c C_{M,AC}(\alpha) = qc C_{M,AC}(\alpha) \quad (1.2)$$

dove $q = \frac{1}{2} \rho v^2$ è la pressione dinamica, c è la corda (usata come lunghezza di riferimento per normalizzare i coefficienti) e $C_L, C_{M,AC}$ sono i coefficienti aerodinamici di portanza e di momento rispetto al centro aerodinamico. Da queste ipotesi si può ricondurre l'analisi aeroelastica dell'ala a quella di una generica sezione alare (fig. 1-1), dove il centro aerodinamico AC è il punto rispetto al quale il momento aerodinamico è costante al variare di α mentre

nel punto di intersezione tra l'asse elastico EA^3 e la sezione viene concentrata la rigidezza torsionale K_T . La distanza tra questi due punti è chiamata ec , con $0 < e < 1$.

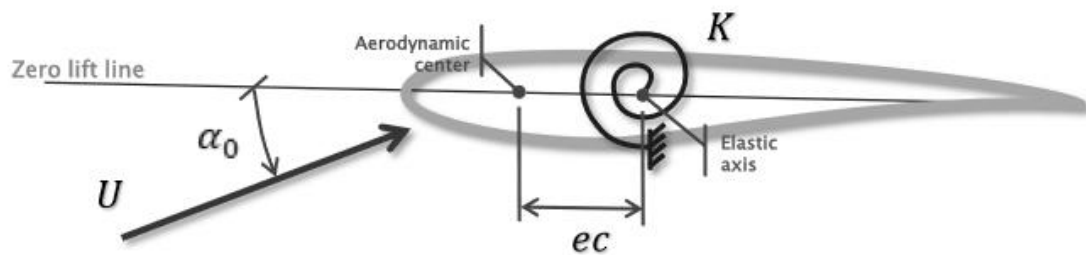


Figura 1-1: sezione tipica per lo studio dell'aeroelasticità statica. Tratta da [7].

Facendo l'ipotesi di piccole rotazioni è possibile ricorrere ad alcune approssimazioni:

- La portanza, applicata nel centro aerodinamico, è sempre perpendicolare alla corda;
- Si può trascurare la resistenza aerodinamica in quanto non contribuisce significativamente all'equilibrio della rotazione;
- La deformabilità flessionale non altera le forze in gioco ed è influente nella determinazione dell'equilibrio, quindi non viene considerata⁴.

Per esperienza⁵ si è notato che utilizzando come sezione tipica quella posta in prossimità del 70-75% dell'apertura di un'ala è possibile determinare alcune caratteristiche aeroelastiche fondamentali (quali la pressione dinamica di divergenza) con elevata accuratezza.

³ L'asse elastico è l'asse che congiunge i centri di taglio delle varie sezioni, cioè i punti in cui forze di taglio e momenti torcenti risultano disaccoppiati.

⁴ Questo non significa che l'ala non possa deformarsi a flessione.

⁵ Riportato in [4].

1.1.1 Divergenza

Se si considera il centro di massa coincidente con EA, scrivendo l'equazione di equilibrio dei momenti rispetto a questo punto per il singolo profilo descritto sopra sarà possibile ignorare la forza peso, ottenendo quindi:

$$ecL + M_A = M_T \quad (1.3)$$

Dove M_T è il momento dovuto alla rigidità torsionale del profilo. L'angolo di attacco può essere suddiviso in due contributi (cioè l'incidenza aerodinamica dell'ala rigida, α_0 , e la sua variazione dovuta alla torsione elastica, θ):

$$\alpha = \alpha_0 + \theta \quad (1.4)$$

Per cui le forze e i momenti agenti sul profilo (con spessore unitario) possono essere espressi come:

$$\begin{aligned} L &= qcC_L(\alpha_0 + \theta) \\ M_A &= qc^2C_{M,AC} \\ M_T &= K_T\theta \end{aligned} \quad (1.5)$$

Sostituendo queste formule in (1.3) si troverà un'equazione nell'incognita θ :

$$qec^2C_L(\alpha_0 + \theta) + qc^2C_{M,AC} = K_T\theta \quad (1.6)$$

Da questa è possibile ricavare la variazione di incidenza e di conseguenza la nuova posizione dell'ala:

$$\theta = \frac{qc^2(C_{M,AC} + eC_L\alpha_0)}{K_T - qec^2C_L} \quad (1.7)$$

Quando il centro aerodinamico si trova davanti all'asse elastico si ha $e > 0$; il denominatore si può annullare quando:

$$K_T - qec^2C_L = 0 \quad (1.8)$$

Riarrangiando i termini si ottiene l'espressione per la pressione dinamica di divergenza:

$$q_D = \frac{K_T}{ec^2C_L} \quad (1.9)$$

Da questo valore si può ricavare la velocità a cui si presenta la divergenza:

$$v_D = \sqrt{\frac{2K_T}{\rho_\infty ec^2C_L}} \quad (1.10)$$

Se invece il centro aerodinamico è dietro o coincidente all'asse elastico ($e \leq 0$) il denominatore dell'equazione (1.7) non si annulla e quindi non si presenta divergenza; generalmente però le strutture aerodinamiche ricadono nella categoria $e > 0$ (fanno eccezione gli elicotteri, nei quali si cerca di ottenere $e = 0$).

Si può osservare l'effetto della divergenza sull'incidenza e sulla portanza considerando, per semplicità, un profilo simmetrico ($C_{M,AC} = 0$). Dall'equazione (1.9) è possibile ricavare il valore di K_T , che inserito nell'equazione di θ porta a:

$$\theta = \frac{\alpha_0}{\frac{q_D}{q} - 1} \quad (1.11)$$

Come si è visto in (1.5), la portanza è proporzionale a $\alpha = \alpha_0 + \theta$, quindi il rapporto tra la variazione di portanza e quella che si avrebbe nel caso rigido risulta:

$$\frac{\Delta L}{L_{\text{rigido}}} = \frac{\theta}{\alpha_0} = \frac{\frac{q}{q_D}}{1 - \frac{q}{q_D}} \quad (1.12)$$

Quando $q \rightarrow q_D$ entrambi i valori tendono all'infinito, come si può notare in figura 1-2; in particolare il grafico del rapporto mostra come la portanza assuma inizialmente il valore che manterrebbe in caso di supporto rigido, per poi divergere rapidamente avvicinandosi alla pressione dinamica di divergenza. Tuttavia ci sono limitazioni nella validità di entrambe le espressioni, poiché la portanza smetterebbe di aumentare al raggiungimento delle condizioni di stallo e la struttura si romperebbe ad un certo valore di θ , non potendo sopportare una deformazione infinita.

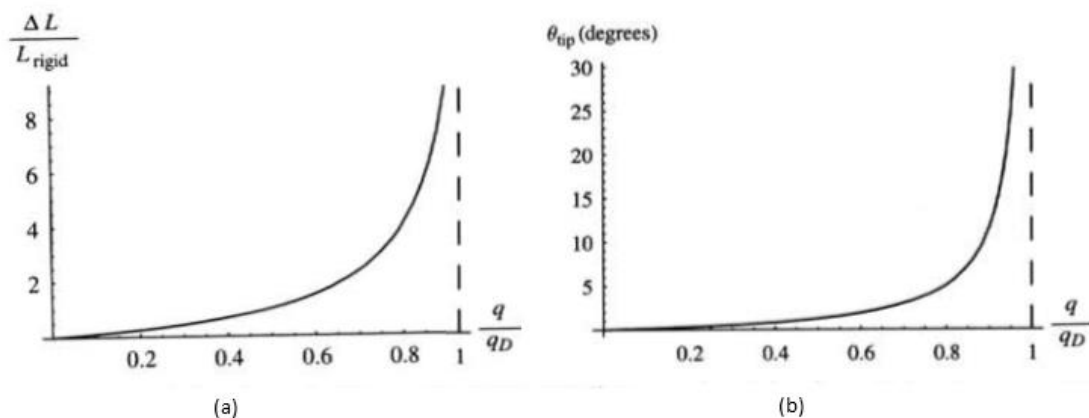


Figura 1-2: andamento in funzione del rapporto di pressione dinamica del rapporto delle portanze (a) e della variazione di incidenza (b). Tratta da [4].

Quando si è dentro i parametri di validità della teoria lineare è possibile invertire l'equazione di θ :

$$\frac{1}{\theta} = \frac{q_D}{\alpha_0} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_D} \right) \quad (1.13)$$

In questo modo risulta evidente la dipendenza di $\frac{1}{\theta}$ da $\frac{1}{q}$: riportandola in un grafico (fig. 1-3) si ottiene una retta passante per l'asse delle ascisse al valore $\frac{1}{q_D}$ e con pendenza $\frac{q_D}{\alpha_0}$; poiché è sufficiente conoscere solamente due punti della retta per trovarne l'andamento, questo metodo è utile per fornire una stima del valore di q_D estrapolando da dati presi a velocità molto inferiori di quella di divergenza, anche quando i parametri del modello non sono noti con precisione.

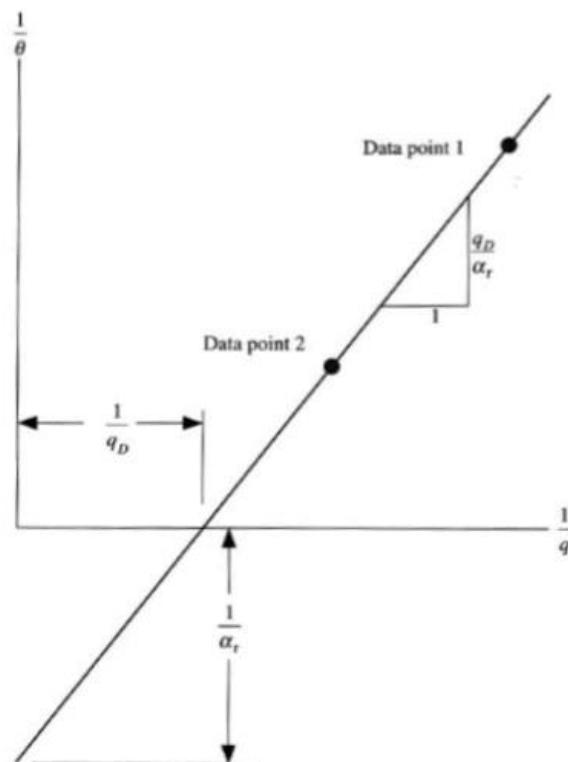


Figura 1-3: andamento di $\frac{1}{\theta}$ rispetto a $\frac{1}{q}$. Tratta da [4].

1.1.2 Metodo iterativo

Con questo modello è stato possibile calcolare immediatamente la risposta statica, ma con l'introduzione di modelli più complessi questo può diventare difficile da ottenere: per questo motivo si utilizzano metodi per risolvere il problema strutturale separatamente da quello aerodinamico. Uno di questi metodi è di tipo iterativo e prevede i seguenti passaggi:

1. Si suppone il velivolo rigido e si calcolano i carichi aerodinamici;
2. Si determina la torsione elastica dell'ala e quindi la sua nuova configurazione;
3. Si ricalcolano i carichi aerodinamici nella nuova configurazione;
4. Si ripete la procedura fino a convergenza.

Utilizzando la sezione tipica di figura 1-1 come riferimento, è possibile formalizzare il procedimento con la seguente formula:

$$\begin{cases} \theta^{(0)} = 0 \\ \theta^{(i+1)} = \frac{qec^2 C_L (\alpha_0 + \theta^{(i)}) + M_A}{K_T} \end{cases} \quad (1.14)$$

Per accertarsi che questo metodo converga alla soluzione esatta è possibile utilizzare due approcci differenti:

- **Equazione alle differenze.** Riordinando l'equazione per $\theta^{(i+1)}$ espressa in (1.14) si ottiene un'equazione alle differenze del primo ordine:

$$\theta^{(i+1)} - \frac{qec^2 C_L}{K_T} \theta^{(i)} = \frac{M_A + qec^2 C_L \alpha_0}{K_T} = \frac{M_A^{(0)}}{K_T} \quad (1.15)$$

Questa può essere trattata come un'equazione differenziale del tipo $\dot{x} + ax = b$ e quindi avrà soluzione data dalla somma di una soluzione particolare e di una soluzione generale dell'omogenea associata:

$$\begin{aligned} \theta^{(i+1)} - \frac{qec^2C_L}{K_T} \theta^{(i)} &= 0 && \text{omogenea} \\ \theta^{(i)} &= A\rho^i \quad \forall \rho, A && \text{generale} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Sostituendo è possibile ottenere un'equazione caratteristica nell'incognita ρ . La soluzione particolare è l'equazione di equilibrio (1.7), esprimibile come:

$$\theta_p = \frac{M_A^{(0)}}{K_T - qec^2C_L} \quad (1.17)$$

La soluzione dell'omogenea associata è:

$$\theta_o = A\rho^i \quad (1.18)$$

E la soluzione generale sarà data dalla somma di (1.17) e (1.18), per cui:

$$\theta^{(i)} = A \left(q \frac{ec^2C_L}{K_T} \right)^i + \frac{M_A^{(0)}}{K_T - qec^2C_L} \quad (1.19)$$

La costante A viene determinata tramite l'imposizione della condizione iniziale $\theta^{(0)} = 0$ e sostituendo il valore trovato in (1.19) si arriva a:

$$\theta^{(i)} = \frac{M_A^{(0)}}{K_T} \frac{1}{1 - q \frac{ec^2 C_L}{K_T}} \left(1 - \left(q \frac{ec^2 C_L}{K_T} \right)^i \right) \quad (1.20)$$

Per capire se il metodo converge o meno si considera il limite della soluzione per $i \rightarrow \infty$:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \theta^{(i)} = \frac{M_A^{(0)}}{K_T - qec^2 C_L} \quad se \quad \left| q \frac{ec^2 C_L}{K_T} \right| < 1 \quad (1.21)$$

Siccome la pressione dinamica è sempre positiva, o non ci sarebbe divergenza, è possibile eliminare il modulo dalla disuguaglianza. Poiché dalla (1.9) si ha il valore di q_D si può esprimere la condizione di convergenza come:

$$\frac{q}{q_D} < 1 \implies q < q_D \quad (1.22)$$

Allora l'iterazione converge alla soluzione di equilibrio aeroelastico solo se ci si trova al di sotto della pressione dinamica di divergenza: per $q > q_D$ la successione è divergente;

- **Sviluppo in serie.** Risolvendo la (1.14) per $\theta^{(i+1)}$ e sviluppando si trova la serie geometrica:

$$\theta^{(i)} = \frac{M_A^{(0)}}{K_T} \left(1 + q \frac{ec^2 C_L}{K_T} + \left(q \frac{ec^2 C_L}{K_T} \right)^2 + \dots + \left(q \frac{ec^2 C_L}{K_T} \right)^{(i-1)} \right) \quad (1.23)$$

Moltiplicando entrambi i membri di questa equazione per $1 - q \frac{ec^2 C_L}{K_T}$ e semplificando si ottiene nuovamente la (1.20), ma solamente se $\left| q \frac{ec^2 C_L}{K_T} \right| < 1$.

1.1.3 Effetti sulle superfici di controllo

Le superfici di controllo vengono utilizzate per modificare la linea media del profilo e quindi la sua portanza: in generale, per superfici poste sul bordo di uscita di un'ala, una deflessione verso il basso produce un aumento di portanza ma provoca anche l'insorgenza di un momento aerodinamico, inducendo una torsione dell'ala che fa calare l'angolo di incidenza e quindi la portanza (fig. 1-4).

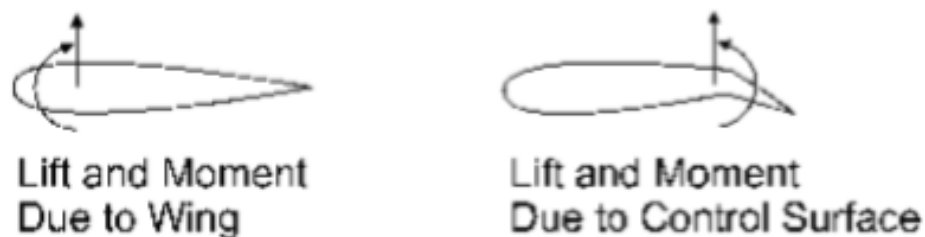


Figura 1-4: effetti di una superficie di controllo sui carichi aerodinamici. Tratta da [21].

Ci sono quindi due effetti contrastanti ma, poiché la rigidità strutturale non cambia con la velocità di volo al contrario delle forze aerodinamiche, esiste una velocità limite (detta velocità critica di inversione) tale per cui al di sopra di essa l'aumento di portanza indotto dalla deflessione viene annullato dalla deformazione elastica.

Si considera la sezione tipica di un'ala semplificata dotata di un alettone sul bordo di uscita (fig. 1-5): l'angolo β indica l'inclinazione assunta dall'alettone

mentre gli altri parametri sono gli stessi indicati anche nella figura 1-1. L'equilibrio dei momenti rispetto all'asse elastico è dato dall'equazione (1.3), ma quando si ha un angolo di deflessione non nullo sia il momento aerodinamico che la portanza variano. Considerando sia α che β angoli piccoli, si ottiene:

$$\begin{aligned} L &= qcC_L = qcC_L(\alpha_0 + \theta) + qcC_{L\beta}\beta \\ M_A &= qc^2 (C_{M,AC} + C_{M,AC\beta}\beta) \\ M_T &= K_T\theta \end{aligned} \quad (1.24)$$

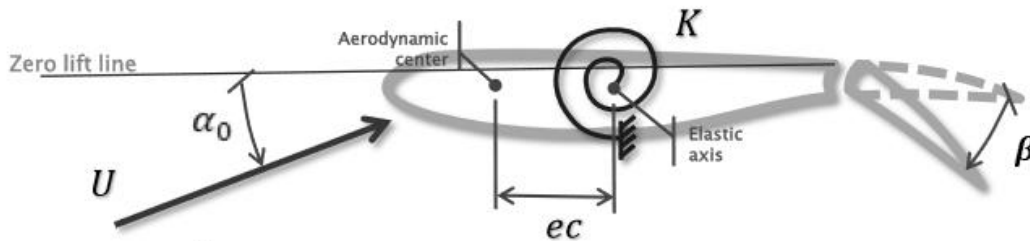


Figura 1-5: sezione tipica con superficie di controllo al bordo d'uscita. Tratta da [7].

Per semplicità poi si considera un profilo simmetrico, per cui $C_{M,AC} = 0$ (la trattazione non cambia, compare solo un termine in meno). L'equazione di equilibrio dei momenti quindi avrà come unica incognita θ , che sostituendo le (1.24) nella (1.3) e rimaneggiando i termini risulterà essere:

$$\theta = \frac{qc^2 [C_{M,AC\beta}\beta + e(C_L\alpha_0 + C_{L\beta}\beta)]}{K_T - qec^2C_L} \quad (1.25)$$

La variazione dell'angolo di incidenza è funzione dell'angolo di deflessione, per cui la portanza sarà:

$$L = qcC_L\alpha_0 + \frac{\frac{q}{q_D}}{1 - \frac{q}{q_D}} qcC_L\alpha_0 + \left(\frac{1 - \frac{q}{q_R}}{1 - \frac{q}{q_D}} \right) qcC_{L\beta}\beta \quad (1.26)$$

Essendo stato utilizzato un modello matematico lineare, vale la sovrapposizione degli effetti e questa equazione è stata suddivisa in tre termini per mostrare i vari contributi dati alla portanza: il primo termine è la portanza data dal moto rigido, il secondo indica il contributo dato dagli effetti elastici con $\beta = 0$ e il terzo rappresenta l'effetto della deflessione. In (1.26) compaiono due diverse pressioni dinamiche:

- La **pressione dinamica di divergenza**, già definita in (1.9);
- La **pressione dinamica di inversione**, trovata ponendo $\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0$ e con valore:

$$q_R = - \frac{K_T C_{L\beta}}{c^2 C_L C_{M,AC\beta}} \quad (1.27)$$

Da notare che $C_{M,AC\beta} < 0$.

Normalmente $q_R < q_D$. Per pressioni dinamiche superiori a q_R ma comunque inferiori a q_D , una deflessione positiva porta ad una diminuzione della portanza.

Considerando ad esempio $\beta > 0$ si ha che questo può aumentare la portanza, diminuirla oppure non cambiarla affatto. L'efficienza del comando dell'alettone può essere pensata come il rapporto tra le variazioni di portanza per un'ala elastica e una rigida in seguito ad una variazione unitaria dell'angolo di deflessione:

$$\eta = \frac{L_{\beta,el}}{L_{\beta,rig}} = \frac{1 - \frac{q}{q_R}}{1 - \frac{q}{q_D}} \quad (1.28)$$

L'andamento dell'efficienza è riportato nel grafico di figura 1-6 con in ascissa il rapporto $\frac{q}{q_D}$. In caso di ala rigida sia q_R che q_D tendono all'infinito e quindi l'efficienza è unitaria.

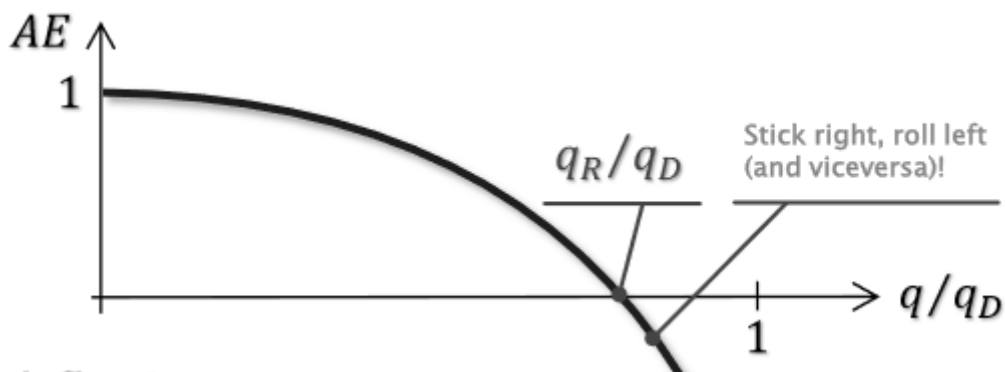


Figura 1-6: efficienza degli alettoni. Tratta da [7].

Si può considerare un caso estremo in cui $q_R \ll q_D$: qui l'inversione verrebbe raggiunta ad una velocità molto bassa e quindi gli alettoni funzionerebbero al contrario per un buon intervallo di velocità operativa dell'aeromobile. Tuttavia, un sistema di controllo di volo attivo può compensare facilmente a questo problema e si avrebbe il vantaggio di ottenere una portanza molto maggiore per una piccola variazione di β rispetto a quanta se ne avrebbe in regime di volo convenzionale, anche se di segno opposto (questo non rappresenta però un problema, visto che il concetto vale anche per una deflessione negativa). Un funzionamento di questo tipo può portare allo sviluppo di aerei ad alta manovrabilità.

1.2 Ala flessibile incastrata ad un'estremità

Un esempio più realistico di comportamento aeroelastico può essere esaminato considerando un'ala rettangolare fissata alla base, come quella di figura 1-7: la semiala ha lunghezza s , corda c , profilo simmetrico e nessuna torsione iniziale. L'asse elastico si trova ad una distanza ec dietro al centro aerodinamico (posto a un quarto della corda) e la rigidezza torsionale è GJ . Si assume infine che l'angolo di incastro iniziale θ_0 sia fisso.

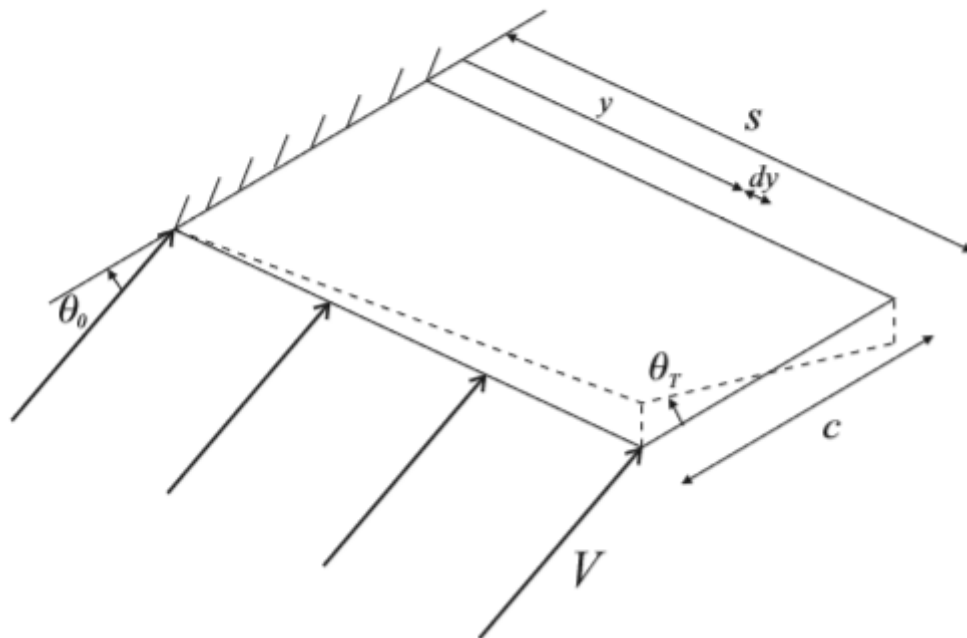


Figura 1-7: ala flessibile incastrata. Tratta da [21].

Per semplicità il comportamento a torsione dell'ala è caratterizzato dalla relazione lineare:

$$\theta = \frac{y}{s} \theta_T \quad (1.29)$$

Dove θ_T è la torsione all'estremità libera e y è la coordinata lungo l'ala, per cui la deformazione aumenta allontanandosi dalla base. La portanza viene applicata nel centro aerodinamico ed essendo il profilo dell'ala simmetrico il momento di pitch è nullo quando il flusso d'aria è parallelo all'ala. Utilizzando la teoria delle strisce la portanza per un elemento d'ala di spessore dy è:

$$dL = qca_w \left(\theta_0 + \frac{y}{s} \theta_T \right) dy \quad (1.30)$$

Il termine a_w indica la pendenza della curva del coefficiente di portanza dell'ala. Si nota che la portanza aumenta lungo l'ala; si può trovare il suo valore totale integrando lungo y :

$$L = \int_0^s dL dy = qca_w \left(s\theta_0 + \frac{s}{2} \theta_T \right) \quad (1.31)$$

Non essendoci alcun tipo di moto l'energia cinetica è nulla, mentre l'energia potenziale dipende dalla deformazione dovuta alla torsione:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^s GJ \left(\frac{d\theta}{dy} \right)^2 dy = \frac{GJ}{2s} \theta_T^2 \quad (1.32)$$

Si può determinare il lavoro svolto dalle forze aerodinamiche considerando per ogni elemento d'ala il momento dovuto alla portanza e moltiplicandolo per un incremento di torsione $\delta\theta = \frac{y}{s} \delta\theta_T$; questo viene poi integrato per tutta la lunghezza dell'ala:

$$\delta W = \int_0^s dL e c \delta\vartheta = qec^2 a_w \left(\frac{s\theta_0}{2} + \frac{s\theta_T}{3} \right) \delta\theta_T \quad (1.33)$$

Le equazioni di Lagrange per θ_T restituiscono:

$$\left(\frac{GJ}{s} - qec^2a_w \frac{s}{3}\right) \theta_T = qec^2a_w \frac{s\theta_0}{2} \quad (1.34)$$

Anche qui si nota che la rigidità strutturale viene ridotta dal termine aerodinamico; la torsione elastica dell'estremità libera dell'ala ricavata dalla (1.34) è:

$$\theta_T = \frac{3qec^2s^2a_w}{6GJ - 2qec^2s^2a_w} \theta_0 \quad (1.35)$$

La condizione di divergenza per l'ala viene raggiunta quando la torsione θ_T tende ad infinito, quindi è possibile calcolare q_w ponendo uguale a zero il denominatore della (1.35):

$$q_w = \frac{3GJ}{ec^2s^2a_w} \quad (1.36)$$

Grazie a questa formula si possono prendere degli accorgimenti per aumentare q_w ed evitare che si presenti divergenza all'interno dell'involucro di volo:

- La velocità di divergenza aumenta con l'aumentare della rigidità GJ e con il diminuire della distanza e tra il centro aerodinamico e l'asse elastico;
- Se $e = 0$ non c'è torsione dovuta al carico aerodinamico e non si presenta divergenza;
- Nel caso in cui l'asse elastico si trovi davanti all'asse dei centri aerodinamici il momento applicato diventa negativo, quindi la torsione dell'estremità libera è verso il basso e non ci può essere divergenza.

La portanza applicata su un elemento d'ala può essere ricavata sostituendo il valore di θ_T trovato nella (1.35) all'interno dell'equazione della portanza espressa in (1.30); integrando lungo tutta la semiala si ricava la portanza totale:

$$L = \int_0^s dL dy = q c s a_w \left[1 + \frac{3 \left(\frac{q}{q_w} \right)}{4 \left(1 - \frac{q}{q_w} \right)} \right] \theta_0 \quad (1.37)$$

Si considera ora la semiala di figura 1-8, simile a quella in figura 1-7 ma dotata di un alettone con angolo di deflessione β regolabile. Si assume nuovamente che l'ala possa deformarsi per torsione, la quale segue la legge lineare data da (1.29). Non si considerano gli effetti della fusoliera o del piano di coda: il velivolo si muove moto rigido, ad esclusione della torsione dell'ala (antisimmetrica nelle due semiali).

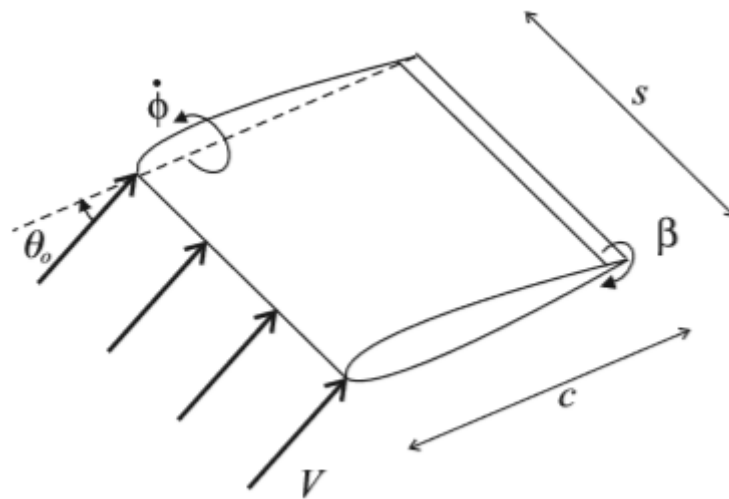


Figura 1-8: ala flessibile con superficie di controllo. Tratta da [21].

Nell'industria aeronautica i fenomeni di aeroelasticità statica vengono trattati principalmente in due modi, e cioè considerando un'ala con una velocità di rollio costante $\dot{\phi}$ applicata alla base o considerando invece un'ala priva di rollio: verranno affrontati entrambi i casi, iniziando da quello con rollio.

I coefficienti di portanza e di pitch (riferito all'asse elastico e positivo verso l'alto) sono:

$$\begin{aligned} C_L &= a_0 + a_w(\theta_0 + \theta) + a_c\beta \\ C_M &= b_0 + b_w(\theta_0 + \theta) + b_c\beta \end{aligned} \quad (1.38)$$

In queste formule $b_w = a_w e$, inoltre, per un profilo simmetrico $a_0 = b_0 = 0$. Come già visto, una deflessione verso il basso dell'alettone provoca un momento che riduce l'angolo di incidenza di $\frac{\dot{\Phi}y}{v}$, con v la velocità dell'aria. Per un elemento di spessore dy la portanza e il momento aerodinamico sono:

$$\begin{aligned} dL &= qc \left[a_w \left(\theta_0 + \frac{y}{s} \theta_T - \frac{\dot{\Phi}y}{v} \right) + a_c\beta \right] dy \\ dM &= qc^2 \left[b_w \left(\theta_0 + \frac{y}{s} \theta_T - \frac{\dot{\Phi}y}{v} \right) + b_c\beta \right] dy \end{aligned} \quad (1.39)$$

Il lavoro totale svolto da un incremento di $\delta\theta$ e $\delta\Phi$ è:

$$\delta W = \int_{ala} 2(dLy\delta\Phi + dM\delta\theta) \quad (1.40)$$

In cui è stato aggiunto un fattore due per bilanciamento. Le forze nelle coordinate generalizzate Φ e θ_T sono quindi:

$$\begin{aligned} Q_\Phi &= \frac{\partial(\delta W)}{\partial(\delta\Phi)} = 2qc \left[a_w \left(\frac{s^2}{3} \theta_T - \frac{\dot{\Phi}s^3}{3v} \right) + \frac{a_c\beta s^2}{2} \right] \\ Q_{\theta_T} &= \frac{\partial(\delta W)}{\partial(\delta\theta_T)} = 2qc^2 \left[b_w \left(\frac{s}{3} \theta_T - \frac{\dot{\Phi}s^2}{3v} \right) + \frac{b_c\beta s}{2} \right] \end{aligned} \quad (1.41)$$

Poiché il rollio dell'aeromobile è stabile i termini di energia cinetica associati alle due coordinate generalizzate non contribuiscono ai termini di inerzia delle equazioni di equilibrio. L'energia potenziale è espressa come in (1.32), quindi si può ricavare la relazione tra la velocità di rollio, la torsione dell'estremità libera e la deflessione dell'alettone mediante le equazioni di Lagrange; in forma matriciale e con le sostituzioni $\mu = \frac{3GJ}{qc^2s^2a_w}$ e $e = \frac{b_w}{a_w}$ queste equazioni risultano essere:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ e & (\mu - e) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{s\dot{\phi}}{v} \\ \theta_T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3a_c}{2a_w} \\ \frac{3b_c}{2a_w} \end{Bmatrix} \beta \quad (1.42)$$

Risolvendo queste equazioni si possono calcolare i rapporti $\frac{\dot{\phi}}{\beta}$ e $\frac{\theta_T}{\beta}$. Il primo consente di calcolare l'efficienza di comando in presenza di rollio (*Roll Effectiveness*) rapportandolo ad un'ala rigida (in cui $GI \rightarrow \infty \Rightarrow \mu \rightarrow \infty$):

$$\varepsilon = \frac{\left(\frac{\dot{\phi}}{\beta}\right)_{flex}}{\left(\frac{\dot{\phi}}{\beta}\right)_{rig}} = \frac{b_c + a_c(\mu - e)}{\mu a_c} \quad (1.43)$$

Da notare che $\mu, a_c > 0$ e $b_c < 0$. In figura 1-9 viene riportato il grafico di ε come funzione della velocità normalizzata rispetto alla velocità di inversione: l'efficienza parte dal valore unitario e cala all'aumentare della velocità, raggiungendo lo zero all'inversione e poi diventando sempre più negativa. Al raggiungimento della velocità di inversione $\frac{\dot{\phi}}{\beta} = 0$, il che significa che il numeratore della (1.43) si annulla; allora la pressione dinamica di inversione è data da:

$$q_{rev} = \frac{3GJa_c}{c^2 s^2 a_w (ea_c - b_c)} \quad (1.44)$$

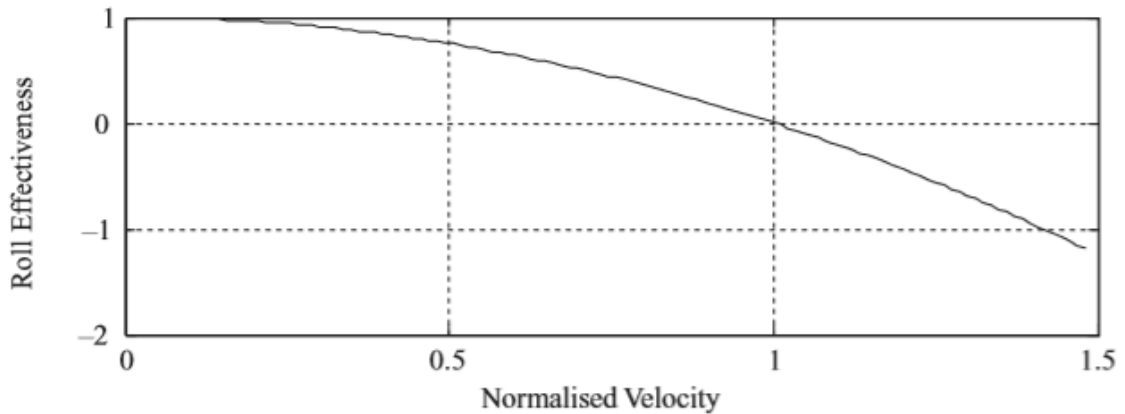


Figura 1-9: Roll Effectiveness. Tratta da [21].

All'inversione il momento di pitch dovuto all'angolo di attacco dell'ala viene annullato dal momento generato dall'inclinazione dell'alettone. Combinando le due equazioni precedenti si ha:

$$\varepsilon = 1 - \frac{q}{q_{rev}} \quad (1.45)$$

Infine, si possono confrontare la pressione dinamica di divergenza per l'ala (eq. (1.36)) e la pressione dinamica di inversione (eq. (1.44)):

$$\frac{q_w}{q_{rev}} = \frac{ea_c - b_c}{ea_c} \quad (1.46)$$

Essendo b_c sempre negativo, la velocità di inversione è sempre minore di quella di divergenza.

Ora si consideri lo stesso modello d'ala ma con un incastro alla base, quindi senza il rollio a velocità costante ($\dot{\phi} = \phi = 0$). Portanza e momento

aerodinamico hanno la stessa formulazione che in (1.39), ma senza il termine di rollio:

$$\begin{aligned} dL &= qc \left[a_w \left(\theta_0 + \frac{y}{s} \theta_T \right) + a_c \beta \right] dy \\ dM &= qc^2 \left[b_w \left(\theta_0 + \frac{y}{s} \theta_T \right) + b_c \beta \right] dy \end{aligned} \quad (1.47)$$

In questo caso il lavoro fatto dalla portanza è nullo, quindi la forza generalizzata sarà formata solo dal contributo del momento aerodinamico:

$$\delta W = \int_{ala} dM \delta \theta \quad (1.48)$$

$$Q_{\theta_T} = \frac{\partial(\delta W)}{\partial(\delta \theta_T)} = qc^2 s \left(\frac{b_w}{2} \theta_0 + \frac{b_w}{3} \theta_T + \frac{b_c}{2} \theta \right) \quad (1.49)$$

L'energia potenziale è la stessa espressa in (1.32), per cui l'equazione di Lagrange permette di calcolare la torsione θ_T :

$$\theta_T = \frac{qc^2 s^2}{2GJ(1 - q/q_w)} (b_w \theta_0 + b_c \beta) \quad (1.50)$$

Se per semplicità si considera $\theta_0 = 0$, la portanza totale agente sulla semiala viene calcolata sostituendo l'equazione precedente nella (1.47) ed integrando:

$$L_w = \int_{ala} \frac{dL}{dy} dy = qcs \left[\frac{qc^2 s^2 a_w}{4GJ(1 - q/q_w)} b_c + a_c \right] \beta \quad (1.51)$$

Allo stesso modo il momento flettente alla base causato dall'applicazione della rotazione dell'alettone è:

$$\int_0^s \frac{dL}{dy} y dy = qcs^2 \left[\frac{qc^2s^2a_w}{6GJ(1 - q/q_w)} b_c + \frac{a_c}{2} \right] \beta \quad (1.52)$$

Al raggiungimento della velocità di inversione questo momento si annulla, quindi ponendo la (1.52) uguale a zero è possibile calcolare la pressione dinamica corrispondente:

$$q_{rev} = \frac{q_w e a_c}{e a_c - b_c} \quad (1.53)$$

1.3 Ala a freccia

Finora è stata considerata un'ala dritta, cioè avente asse elastico perpendicolare al piano di simmetria del velivolo: in questo modo è stato possibile eguagliare la deformazione torsionale della struttura alla variazione dell'incidenza; in molti casi tuttavia l'asse elastico è inclinato di un angolo Λ , detto Angolo di Freccia (*Sweep Angle*), che può essere positivo (*sweepback*) o negativo (*sweepforward*), per ridurre il rapporto spessore-corda effettivo. La maggior parte dei velivoli è progettata con angoli di freccia positivi soprattutto per ragioni aerodinamiche, poiché in questo modo nel volo subsonico aumenta la velocità a cui si presentano le onde d'urto e si ritarda l'aumento di drag ad esse associato. Gli aerei supersonici hanno un angolo di freccia interno al cono di Mach, sempre per ridurre l'attrito. Si può ottenere lo stesso effetto di riduzione di drag con una configurazione *sweepforward*, ma pochi velivoli vengono costruiti in questo modo a causa dell'aumento dei fenomeni aeroelastici, in particolare diminuisce la velocità di divergenza.

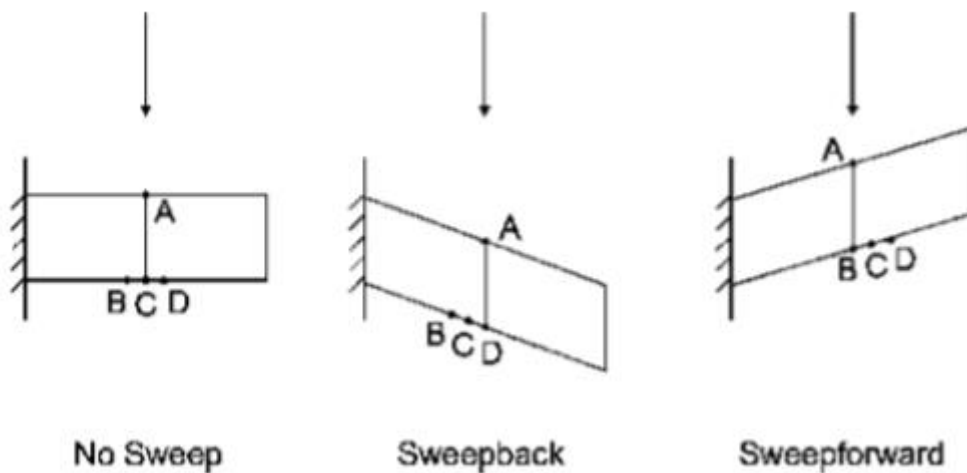


Figura 1-10: configurazioni possibili dell'ala al variare dell'angolo di freccia. Tratta da [21].

In figura 1-10 si hanno i tre possibili casi a seconda dell'angolo di freccia:

- Nel caso di **ala dritta** ($\Lambda = 0$) la sezione d'ala parallela alla direzione dell'aria è AC;
- Nel caso di **ala all'indietro** ($\Lambda > 0$) la nuova sezione è AD e l'angolo d'attacco effettivo si riduce, visto che il punto D si sposta verso l'alto più del punto A, quando sottoposto a flessione;
- Nel caso di **ala in avanti** ($\Lambda < 0$) la nuova sezione è AB e l'incidenza effettiva aumenta, visto che sotto flessione il punto B si sposta verso l'alto meno del punto A.

In figura 1-11 si può vedere l'effetto dell'angolo di freccia sulla pressione dinamica di divergenza: un Λ negativo rende la superficie più suscettibile alla divergenza, mentre un valore positivo (per il caso ideale preso in esame bastano 5° - 10°) può portare q_D all'infinito, eliminando l'instabilità.

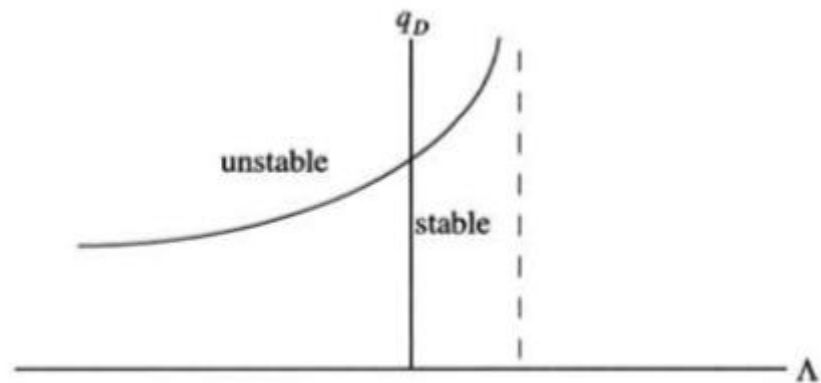


Figura 1-11: pressione dinamica di divergenza in funzione dell'angolo di freccia. Tratta da [15].

L'angolo di freccia influenza anche i carichi: in figura 1-12 ne viene riportata la distribuzione su di una superficie elastica in cui la portanza totale viene mantenuta costante modificando l'angolo di attacco α_r .

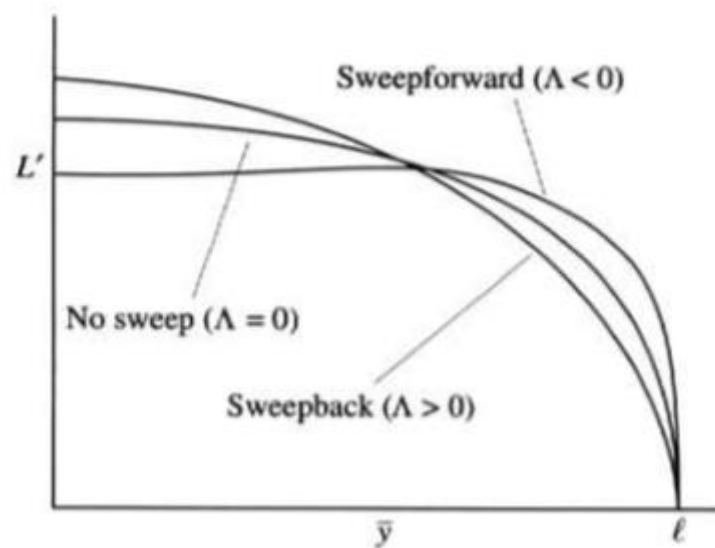


Figura 1-12: distribuzione di portanza al variare dell'angolo di freccia. Tratta da [15].

Per illustrare gli effetti sull'aeroelasticità di un angolo di freccia, si consideri l'ala di lunghezza l di figura 1-13: le reazioni aerodinamiche dipenderanno dall'angolo d'attacco misurato nella direzione del flusso d'aria:

$$\alpha = \alpha_r + \theta \quad (1.54)$$

Si introducono i versori $\hat{\mathbf{a}}_1$ e $\hat{\mathbf{a}}_2$ allineati rispettivamente all'asse y e alla direzione dell'ala; un altro set di versori, $\hat{\mathbf{b}}_1$ e $\hat{\mathbf{b}}_2$, viene ottenuto dal primo ruotandolo di un angolo Λ , in modo che siano rispettivamente parallelo e perpendicolare all'asse elastico (chiamato asse \bar{y}). Le relazioni tra i due set sono quindi:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_1 &= \cos(\Lambda) \hat{\mathbf{a}}_1 + \sin(\Lambda) \hat{\mathbf{a}}_2 \\ \hat{\mathbf{b}}_2 &= -\sin(\Lambda) \hat{\mathbf{a}}_1 + \cos(\Lambda) \hat{\mathbf{a}}_2 \end{aligned} \quad (1.55)$$

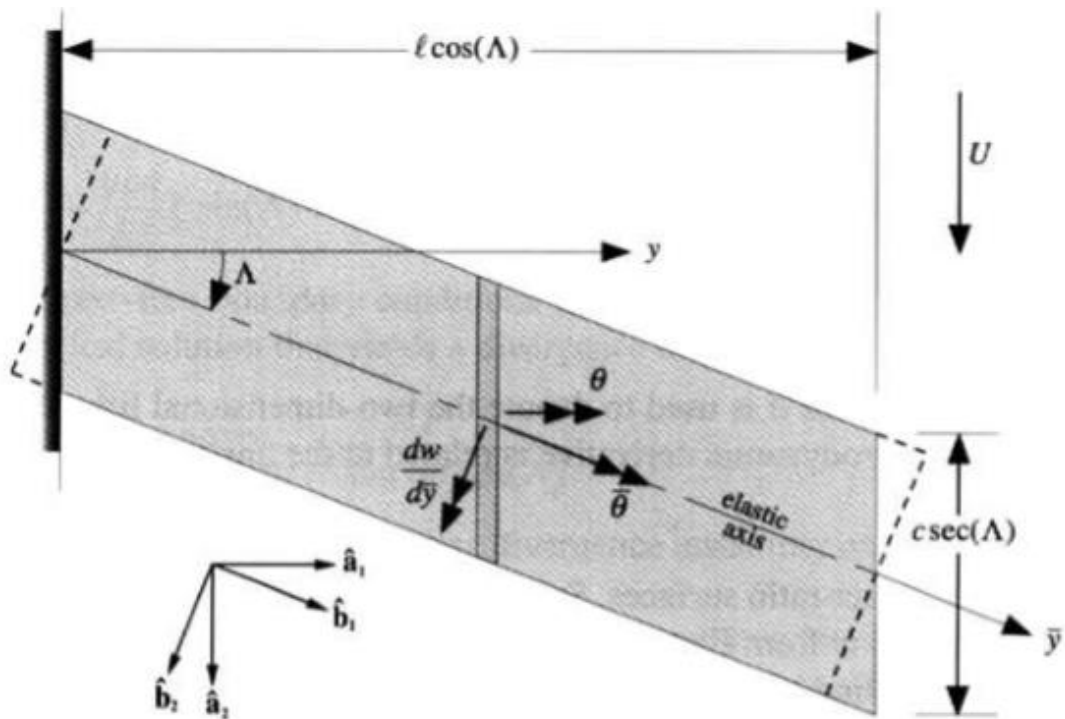


Figura 1-13: parametri geometrici di un'ala sweepback. Tratta da [15].

La rotazione totale di una sezione dell'ala causata dalla deformazione elastica può essere scritta come la combinazione della rotazione causata dalla torsione

$\bar{\theta}$ attorno a $\hat{\mathbf{b}}_1$ con la flessione $\frac{dw}{dy}$ attorno a $\hat{\mathbf{b}}_2$, dove w è positivo verso l'alto.

La componente di questa rotazione totale attorno a $\hat{\mathbf{a}}_1$ è:

$$\theta = \left(\bar{\theta} \hat{\mathbf{b}}_1 + \frac{dw}{dy} \hat{\mathbf{b}}_2 \right) \cdot \hat{\mathbf{a}}_1 = \bar{\theta} \cos(\Lambda) - \frac{dw}{dy} \sin(\Lambda) \quad (1.56)$$

Da questa relazione si può notare che, a causa della freccia, si ha un accoppiamento tra flessione e variazione di incidenza che varia le condizioni aerodinamiche al contorno, andando ad influire sulla risposta aeroelastica statica.

Per determinare la deviazione elastica totale sono necessarie due equazioni di equilibrio, una per il momento torsionale (come nel caso di ala dritta) e una per la forza associata alla flessione:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left(GJ \frac{d\bar{\theta}}{dy} \right) &= -qec\bar{\alpha} - qc^2 C_{M,AC} + Nmgd \\ \frac{d^2}{dy^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dy^2} \right) &= qc\bar{\alpha} - Nmg \end{aligned} \quad (1.57)$$

In queste equazioni $\bar{\alpha}$ indica la pendenza della curva bidimensionale della portanza per la superficie dell'ala a freccia; essa è legata al relativo coefficiente per l'ala dritta da:

$$\bar{\alpha} = \alpha \cos(\Lambda) \quad (1.58)$$

Sostituendo nelle (1.57) i valori di α , θ e di $\bar{\alpha}$ come espressi in (1.54), (1.56) e (1.58) rispettivamente e assumendo GJ , EI costanti, si possono trovare due equazioni accoppiate per torsione e flessione:

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}'' + \frac{qeca}{GJ} [\bar{\theta} \cos^2(\Lambda) - w' \sin(\Lambda) \cos(\Lambda)] = \\
- \frac{1}{GJ} [qeca\alpha_r \cos(\Lambda) + qc^2 C_{M,AC} - Nmgd] \\
\end{aligned} \tag{1.59}$$

$$\begin{aligned}
w'''' + \frac{qca}{EI} [w' \sin(\Lambda) \cos(\Lambda) - \bar{\theta} \cos^2(\Lambda)] = \\
\frac{1}{EI} [qcaa_r \cos(\Lambda) - Nmg] \\
\end{aligned}$$

Dove i segni di derivazione sono stati sostituiti dagli apici. Le condizioni al contorno da imporre sono incastro alla base e estremità opposta libera:

$$\bar{y} = 0 \begin{cases} \bar{\theta} = 0 \\ w = 0 \\ w' = 0 \end{cases} \tag{1.60}$$

$$\bar{y} = l \begin{cases} \bar{\theta}' = 0 \\ w'' = 0 \\ w''' = 0 \end{cases}$$

L'accoppiamento torsione-flessione è visibile nelle (1.59) grazie al termine con w nell'equazione della torsione e al termine $\bar{\theta}$ nell'equazione della flessione. Ci sono due casi particolari in cui l'accoppiamento scompare o può essere ignorato, rendendo possibile risolvere l'equazione analiticamente: il primo è il caso di ala dritta, il secondo si presenta quando $e = 0$. In questa seconda configurazione non si presenta divergenza torsionale e si può trovare una soluzione polinomiale per $\bar{\theta}$, da sostituire poi nell'equazione della flessione; così facendo si ricava un'equazione differenziale ordinaria del quarto ordine con incognita w che può essere risolta per la curvatura, anche se la soluzione risulta complicata, oppure per la condizione di divergenza limitandosi all'omogenea associata:

$$\zeta''' + \frac{qca}{EI} \zeta \sin(\Lambda) \cos(\Lambda) = 0 \quad (1.61)$$

Con le condizioni al contorno $\zeta(0) = \zeta'(l) = \zeta''(l) = 0$ questa equazione ha una soluzione analitica nota che porta alla pressione dinamica di divergenza:

$$q_D = -6.32970 \frac{EI}{acl^3 \sin(\Lambda) \cos(\Lambda)} \quad (1.62)$$

Il segno negativo sta ad indicare che questa instabilità si presenta solo nelle ali a freccia negativa, cioè con $\Lambda < 0$.

Esaminando le (1.59) si possono trovare due modi in cui l'angolo di freccia influenza il comportamento aeroelastico: il primo è tramite la perdita di efficienza aerodinamica, come si nota dalla comparsa di $\cos^2(\Lambda)$ nel secondo termine dell'equazione della torsione (questo effetto è indipendente dal segno di Λ); il secondo invece è l'influenza della pendenza della curvatura sull'angolo di attacco effettivo (come si vede in (1.56)) che porta all'accoppiamento torsione-flessione. Questo accoppiamento ha un effetto importante sia sulla divergenza che sulla distribuzione dei carichi.

Una risoluzione analitica delle (1.59) è molto complicata da ottenere; il modo più semplice consiste nel considerarne solo le omogenee associate e unirle poi in un'unica equazione nell'incognita $\theta = \bar{\theta} \cos(\Lambda) - w' \sin(\Lambda)$:

$$\theta''' + \frac{qeca}{GJ} \cos^2(\Lambda) \theta' + \frac{qca}{EI} \sin(\Lambda) \cos(\Lambda) \theta = 0 \quad (1.63)$$

Introducendo la coordinata assiale adimensionale $\eta = y/l$ e indicando con l'apice (') le derivate rispetto η , si può riscrivere questa equazione come:

$$\theta''' + \frac{qecal^2}{GJ} \cos^2(\Lambda) \theta' + \frac{qcal^3}{EI} \sin(\Lambda) \cos(\Lambda) \theta = 0 \quad (1.64)$$

Si possono derivare le condizioni al contorno dalle (1.60):

$$\theta(0) = \theta'(1) = \theta''(1) + \frac{qecal^2}{GJ} \cos^2(\Lambda) \theta(1) = 0 \quad (1.65)$$

Il comportamento della soluzione esatta è complesso, essendo composta da più parti, e non risulta di facile applicazione nemmeno in fase progettuale, per cui si utilizzano delle soluzioni approssimate; ad esempio è possibile approssimare una parte della soluzione analitica per il problema della divergenza flesso-torsionale. Definendo:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{qecal^2}{GJ} \cos^2(\Lambda) \\ \beta &= \frac{qcal^3}{EI} \sin(\Lambda) \cos(\Lambda) \end{aligned} \quad (1.66)$$

Si può rappresentare il limite di divergenza entro un certo intervallo in termini della retta:

$$\tau_D = \frac{\pi^2}{4} + \frac{3\pi^2}{76} \beta_D \quad (1.67)$$

In caso di rigidità a flessione infinita $\beta_D = 0$ e si trova la soluzione esatta per un caso di divergenza puramente torsionale. Nel caso di rigidità a torsione infinita $\tau_D = 0$ e si trova un valore di β_D molto vicino alla soluzione esatta per la divergenza flessionale. Per i casi intermedi l'errore è comunque molto piccolo. In figura 1-14 viene riportata con una linea tratteggiata la soluzione

approssimata trovata con (1.67) e con una linea continua quella reale, derivante da (1.64): queste soluzioni intorno all'origine sono quasi coincidenti.

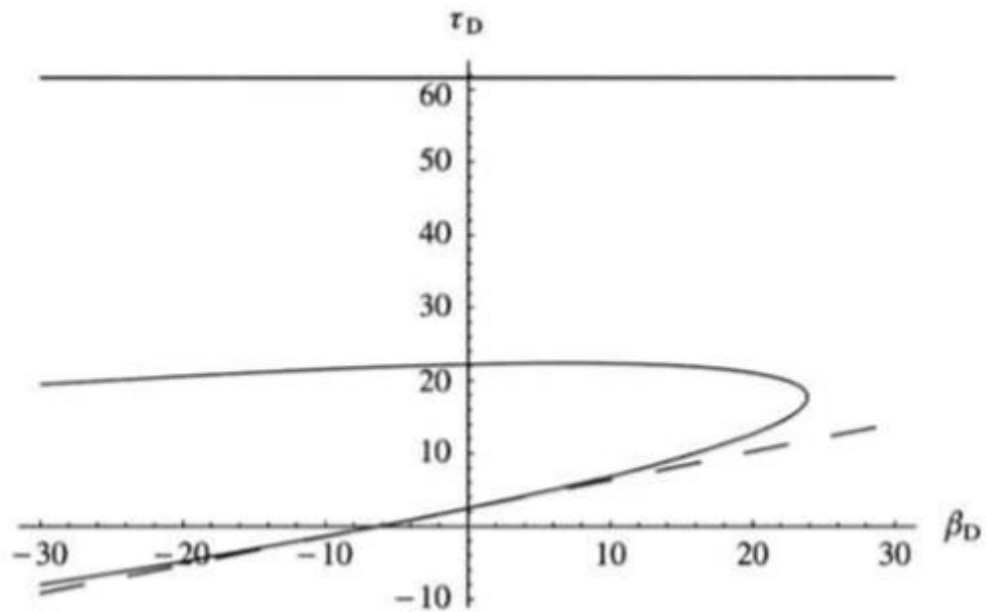


Figura 1-14: confronto tra la soluzione esatta (linea continua) e approssimata (linea tratteggiata) per l'accoppiamento torsione-flessione. Tratta da [15].

Capitolo 2

Aeroelasticità Dinamica

Finora sono stati trattati casi di aerodinamica stazionaria e in cui non sono comparse le forze di inerzia: queste semplificazioni sono accettabili quando si analizza la struttura dopo il raggiungimento dell'equilibrio, cioè quando non ci sono carichi inerziali o non cambiano le condizioni al contorno dell'aerodinamica; diversamente, se l'aeromobile è sottoposto a un generico moto di traslazione o di pitch (o entrambi) relativamente al flusso d'aria, allora le forze e i momenti variano nel tempo e il modello statico non è più sufficiente. Un'alternativa è applicare un approccio quasi-stazionario, assumendo che in ogni istante di tempo la struttura si comporti come farebbe se fosse sottoposta allo stesso tipo di moto ma in un regime permanente. Così facendo si suppone che non ci siano effetti dipendenti dalla frequenza, ma per lo studio del flutter o della risposta a raffiche di vento che colpiscono il velivolo diventa necessaria un'analisi non stazionaria in modo da valutare accuratamente la dipendenza dei carichi aerodinamici dal contenuto in frequenza dei moti dinamici.

Per capire gli effetti di una traslazione verticale o di un moto di pitch sui carichi e momenti aerodinamici occorre considerare una variazione istantanea dell'angolo di incidenza o del moto armonico del profilo: possono essere utilizzate rispettivamente la funzione di Wagner e la funzione di Theodorsen (utile per predire l'inizio del flutter e per l'analisi della risposta a turbolenza continua).

2.1 Variazione istantanea dell'angolo di attacco

Si considera un profilo alare di corda c investito da un flusso d'aria (non viscoso e incomprimibile) a velocità v con piccolo angolo di attacco iniziale α . Il profilo è poi sottoposto ad una variazione istantanea dell'angolo di attacco di $\Delta\alpha = \frac{\alpha}{2}$: se si fosse in regime quasi-stazionario la portanza aumenterebbe immediatamente del 50%, in realtà si ha un ritardo nel raggiungimento del valore finale dovuto al tempo impiegato dalla circolazione attorno al profilo per adattarsi alle nuove condizioni. Questo effetto è indipendente dalla lunghezza della corda o dalla velocità dell'aria perché viene espresso in termini di semi-corda (che è un parametro adimensionale).

Utilizzando un tempo adimensionale $\tau = \frac{2vt}{c} = \frac{vt}{b}$ (cioè il tempo che il flusso impiega per percorrere la semi-corda b della superficie aerodinamica) l'aumento di portanza per unità di lunghezza alare risulta essere:

$$\Delta L = \frac{1}{2} \rho v^2 c a_1 \Delta\alpha \Phi(\tau) = \frac{1}{2} \rho v c a_1 \omega \Phi(\tau) \quad (2.1)$$

Dove $w = v \sin(\Delta\alpha) \approx v\Delta\alpha$ è la variazione della componente normale della velocità sul profilo rispetto alla direzione del flusso, mentre $\Phi(\tau)$ è la funzione di Wagner, definita approssimativamente per il caso incomprimibile come:

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &= 0, & \tau &\leq 0 \\ \Phi(\tau) &= \frac{\tau + 2}{\tau + 4}, & \tau &> 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.2 Risposta ad un moto armonico

Per un generico moto di sollevamento e pitch di un profilo è possibile utilizzare la funzione di Wagner per calcolare la portanza tramite un integrale di convoluzione; tuttavia nei problemi di Flutter si ricorre raramente alle equazioni espresse nel dominio del tempo (utili invece per la risposta a raffiche di vento) e risulta di maggiore interesse studiare il moto ad una singola frequenza di oscillazione.

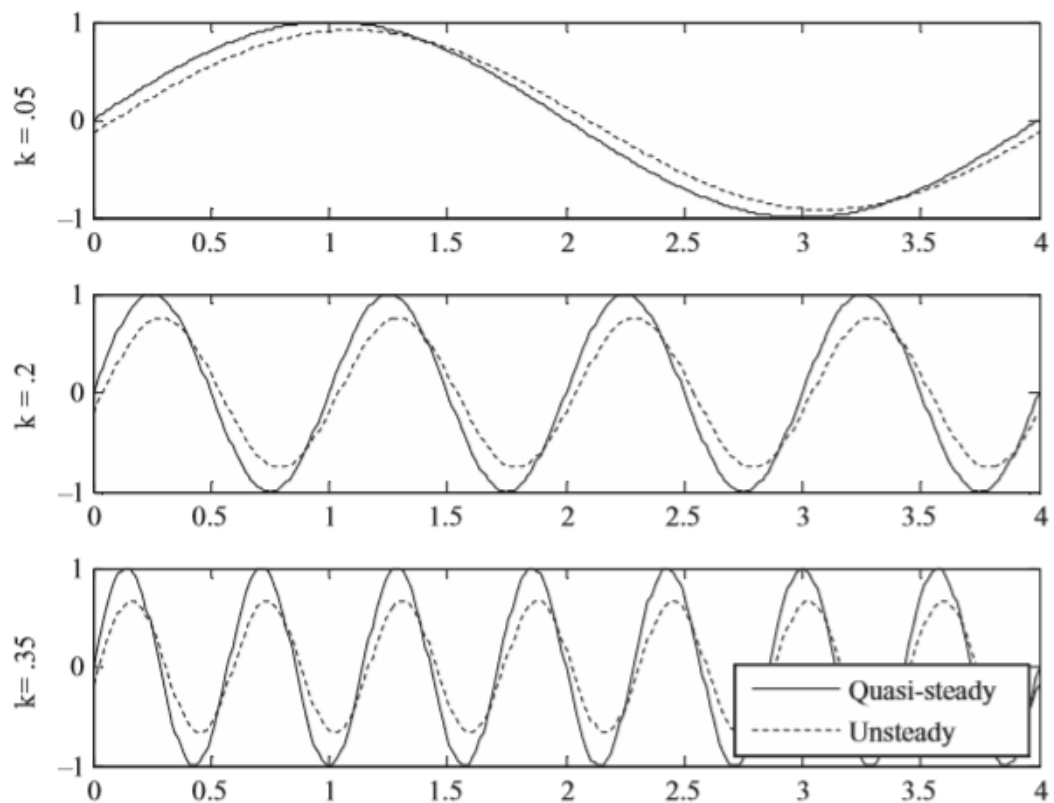


Figura 2-1: andamento della portanza al variare di k nel caso statico e in quello dinamico. Tratta da [15].

La figura 2-1 confronta l'andamento della portanza nel caso statico e in quello dinamico: rispetto alla soluzione statica si può notare una riduzione di ampiezza e l'introduzione di uno sfasamento tra il moto del profilo e le forze. Queste caratteristiche vengono espresse in funzione di un parametro adimensionale molto utilizzato nelle analisi dinamiche, la frequenza ridotta:

$$k = \frac{\omega b}{v} = \frac{\omega c}{2v} = \frac{v}{v} \quad (2.3)$$

Dove $v = \frac{\omega c}{2}$ è chiamato parametro di frequenza. La frequenza ridotta è un parametro utile per capire quando è fattibile utilizzare un'approssimazione statica: se $k \ll 1$ (indicativamente $k < 0.1$) l'approssimazione è valida.

La funzione di Theodorsen viene utilizzata per modellare le variazioni in ampiezza e fase delle forze aerodinamiche per differenti valori della frequenza ridotta; la funzione si comporta come la trasformata di Fourier della funzione di Wagner e viene espressa come:

$$C(k) = F(k) + iG(k) \quad (2.4)$$

In figura 2-2 viene riportato il suo andamento: in regime permanente ($k = 0$) la funzione di Theodorsen è reale ed unitaria, cioè $F = 1, G = 0$; quando la frequenza ridotta cresce si ha un aumento in modulo della parte immaginaria e un calo di quella reale, mentre al limite per $k \rightarrow \infty$ si hanno $F \rightarrow 0.5, G \rightarrow 0$ ma solitamente k ha un valore massimo intorno all'unità. Quando una funzione armonica viene moltiplicata per $C(k)$ la sua ampiezza si riduce e viene introdotto uno sfasamento, che aumenta fino al raggiungimento di $k = 0.3$ per poi tornare a diminuire.

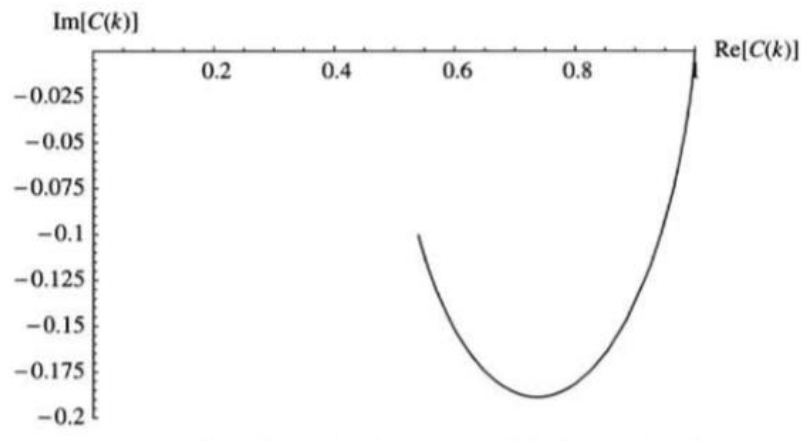


Figura 2-2: funzione di Theodorsen. Tratta da [15].

Il flusso attorno ad un profilo sottoposto ad oscillazione armonica può essere suddiviso in due parti:

- **Termini circolatori:** termini di portanza e momento causati dalla vorticità nel flusso e legati alla funzione di Theodorsen;
- **Termini non-circolatori:** forze di “inerzia apparente” la cui presenza non dipende dalla vorticità, ad esempio i momenti e le forze di reazione che si hanno quando una massa d’aria accelera insieme al profilo. Questi termini sono di minore importanza per il flutter dell’ala a bassi valori di k , ma all’aumentare della frequenza ridotta diventano rilevanti nel flutter delle superfici di controllo.

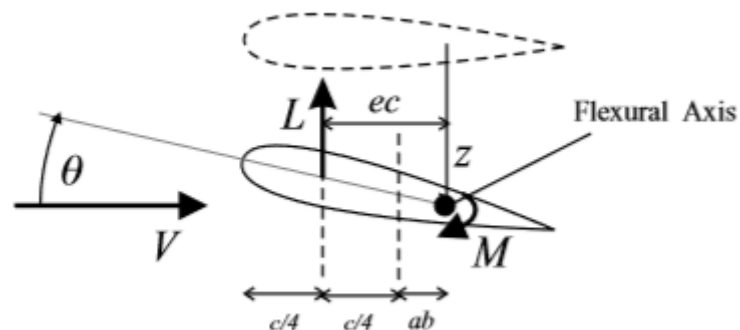


Figura 2-3: profilo simmetrico sottoposto a moti armonici lungo z e di pitch. Tratta da [21].

Si considera un profilo simmetrico ($C_{M,AC} = 0$) di corda c , con asse elastico situato ad una distanza $ab = a \frac{c}{2}$ dal suo punto medio (figura 2-3); il profilo è sottoposto ad un moto armonico di traslazione ($z = z_0 e^{i\omega t}$, positivo verso il basso) e ad uno di pitch ($\theta = \theta_0 e^{i\omega t}$, positivo se antiorario). La portanza e il momento rispetto all'asse elastico e considerando profondità unitaria sono:

$$\begin{aligned} L &= \pi \rho b^2 [\ddot{z} + v\dot{\theta} - ba\ddot{\theta}] + 2\pi \rho v b C(k) \left[\dot{z} + v\theta + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} \right] \\ M &= \pi \rho b^2 \left[ba\ddot{z} - vb \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} - b^2 \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\theta} \right] + \\ &+ 2\pi \rho v b^2 \left(a + \frac{1}{2} \right) C(k) \left[z + v\theta + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

La prima parte di ogni espressione descrive i termini non-circolatori mentre la seconda parte contiene i termini circolatori che dipendono dalla funzione di Theodorsen $C(k)$. Sostituendo le espressioni di z e θ per passare al dominio delle frequenze e la funzione di Theodorsen in forma complessa queste equazioni possono essere riscritte come:

$$\begin{aligned} L &= \rho v^2 b \left[(L_z + ikL_{\dot{z}}) \frac{z_0}{b} + (L_\theta + ikL_{\dot{\theta}}) \theta_0 \right] e^{i\omega t} \\ M &= \rho v^2 b^2 \left[(M_z + ikM_{\dot{z}}) \frac{z_0}{b} + (M_\theta + ikM_{\dot{\theta}}) \theta_0 \right] e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.6)$$

I termini L_z, M_θ rappresentano le derivate dei coefficienti di portanza e momento rispetto agli spostamenti e velocità normalizzati, quindi essi valgono:

$$L_z = \frac{\partial C_L}{\partial \left(\frac{z}{b} \right)}, \quad L_{\dot{z}} = \frac{\partial C_L}{\partial \left(\frac{\dot{z}}{v} \right)}, \quad L_\theta = \frac{\partial C_L}{\partial \left(\frac{\dot{\theta} c}{v} \right)}, \quad ecc \dots \quad (2.7)$$

Le (2.6) possono essere riarrangiate in forma matriciale ricordando la definizione di k dalla (2.3) e che $z_0 = ze^{-i\omega t} = \frac{\dot{z}}{i\omega} e^{-i\omega t}$, $\theta_0 = \theta e^{-i\omega t} = \frac{\dot{\theta}}{i\omega} e^{-i\omega t}$.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} L \\ M \end{Bmatrix} &= \rho v \begin{bmatrix} bL_{\dot{z}} & b^2L_{\dot{\theta}} \\ b^2M_{\dot{z}} & b^3M_{\dot{\theta}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \rho v^2 \begin{bmatrix} L_z & bL_{\theta} \\ bM_z & b^2M_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ \theta \end{Bmatrix} = \\ &= \rho v \mathbf{B} \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \rho v^2 \mathbf{C} \begin{Bmatrix} z \\ \theta \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nella (2.8) un termine è proporzionale alle velocità e uno agli spostamenti, quindi le forze aerodinamiche agenti su un profilo sottoposto a moto armonico si comportano in modo simile allo smorzamento e alla rigidezza di una struttura: per questo motivo le matrici \mathbf{B} e \mathbf{C} sono chiamate rispettivamente matrice di smorzamento e di rigidezza aerodinamiche. Una differenza fondamentale rispetto alle matrici strutturali è che quelle aerodinamiche non sono simmetriche e questo favorisce l'insorgenza del flutter; inoltre, smorzamento e rigidezza dipendono dalle condizioni di volo, incluso il numero di Mach.

Quando vengono applicate a sistemi aeroelastici le forze aerodinamiche vengono considerate insieme alle equazioni strutturali e questo porta ad equazioni del moto che in forma classica vengono scritte in questo modo:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + (\rho v \mathbf{B} + \mathbf{D})\dot{\mathbf{q}} + (\rho v^2 \mathbf{C} + \mathbf{E})\mathbf{q} = 0 \quad (2.9)$$

Le matrici \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{E} sono rispettivamente le matrici di inerzia strutturale, smorzamento aerodinamico, rigidezza aerodinamica, smorzamento strutturale e rigidezza strutturale, mentre \mathbf{q} è il vettore delle coordinate

generalizzate (solitamente sono coordinate modali). È importante notare che **B** e **C** valgono solamente per la frequenza ridotta a cui vengono calcolate.

L'equazione (2.9) è di estrema importanza in quanto descrive le interazioni tra la struttura flessibile e le forze aerodinamiche.

2.3 Flutter

Il flutter descrive le oscillazioni autosostenute derivanti dall'interazione fluido-struttura: queste oscillazioni in certe condizioni possono aumentare in maniera incontrollata e perciò si definisce il Punto di Flutter come il limite oltre il quale delle oscillazioni prima smorzate iniziano a crescere in ampiezza. In figura 2-4 si può vedere che l'insieme di questi punti individuati a differenti altitudini forma un confine tra la zona ad oscillazioni smorzate e quella in cui ci si può aspettare un fallimento strutturale: per questo motivo la determinazione di questa curva è molto importante in fase di certificazione e occorre dimostrare come essa sia almeno del 15% più grande dell'involuppo di volo dell'aeromobile.

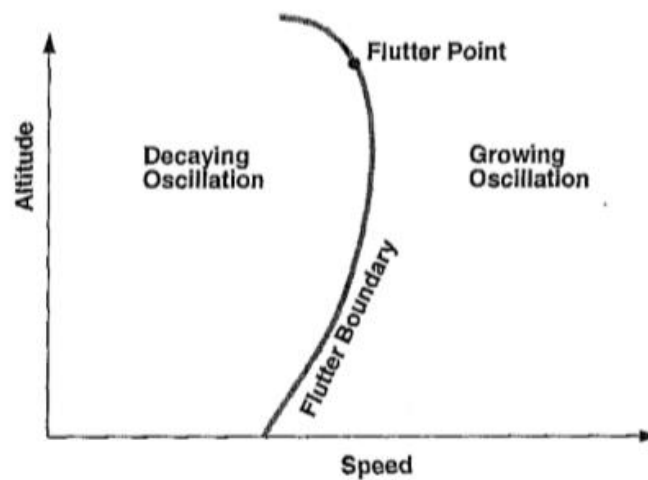


Figura 2-4: curva di flutter. Tratta da [16].

Il fatto che il punto di flutter sia una transizione tra oscillazione smorzata e oscillazione crescente implica che la risposta in questo punto abbia ampiezza costante: questo è molto utile nelle tecniche di analisi perché rende la determinazione del punto di flutter molto più semplice rispetto a calcolare la risposta generale ad una certa configurazione.

Esistono vari tipi di flutter ma il più comune è il flutter delle superfici portanti, che può portare più facilmente ad un fallimento catastrofico della struttura. Quando invece il flusso si separa dalle superfici si ha flutter di stallo e le equazioni utilizzate per descriverlo diventano non-lineari.

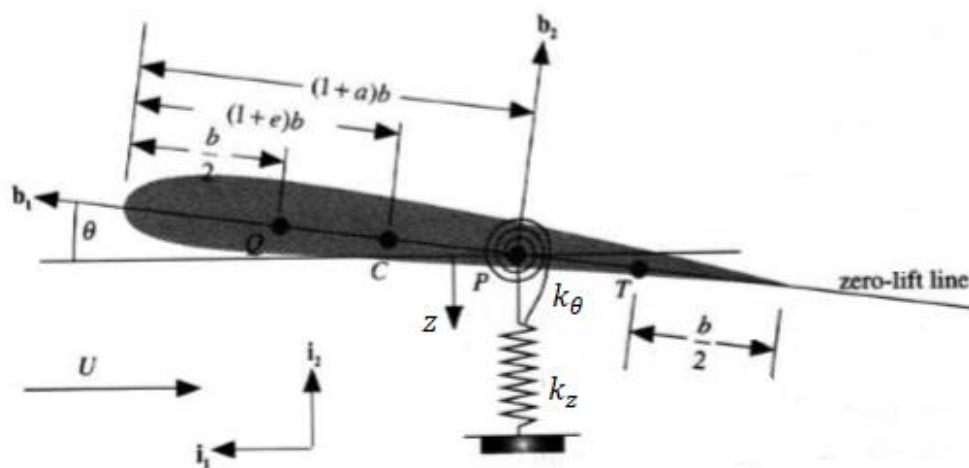


Figura 2-5: parametri per l'analisi flutter. Tratta da [15].

Per eseguire un'analisi di flutter per un sistema aeroelastico lineare si considera la sezione tipica di figura 2-5: i parametri adimensionali a, e (entrambi compresi tra -1 e 1) indicano rispettivamente la posizione dell'asse elastico (indicato in figura con la lettera P) e del centro di massa (lettera C). Solitamente nelle equazioni del moto compare lo scostamento del centro di massa dall'asse elastico al posto di e : viene indicato con $x_\theta = e - a$ e viene adimensionalizzato tramite la semi-corda b . k_z e k_θ sono le rigidezze delle molle che limitano traslazione e rotazione del profilo. Si hanno un sistema di

coordinate (\hat{i}_1, \hat{i}_2) fisso e uno (\hat{b}_1, \hat{b}_2) solidale al profilo. La velocità del centro di massa è data da:

$$\mathbf{v}_C = -\dot{z}\hat{i}_2 + b\dot{\theta}(a - e)\hat{b}_2 \quad (2.10)$$

In questo modo, definendo I_C il momento di inerzia rispetto a C e assumendo θ piccolo, è possibile scrivere l'energia cinetica:

$$K = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 + 2bx_\theta\dot{z}\dot{\theta}) + \frac{1}{2}I_P\dot{\theta}^2 \quad (2.11)$$

Dove $I_P = I_C + mb^2\theta^2$ è il momento di inerzia rispetto al centro elastico. L'energia potenziale del sistema è:

$$U = \frac{1}{2}k_z z^2 + \frac{1}{2}k_\theta \theta^2 \quad (2.12)$$

Le forze generalizzate associate ai due gradi di libertà z (positivo verso il basso) e θ possono essere derivate dal lavoro svolto da portanza e momento di pitch attraverso uno spostamento virtuale del punto Q (cioè il quarto di corda) e una rotazione virtuale del modello:

$$\begin{aligned} \text{spostamento: } \delta\mathbf{p}_Q &= -\delta z\hat{i}_2 + b\delta\theta\left(\frac{1}{2} + a\right)\hat{b}_2 \\ \text{rotazione: } &\delta\theta\hat{b}_3 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Il lavoro virtuale delle forze aerodinamiche diventa:

$$\overline{\delta W} = L \left[-\delta z + b\delta\theta \left(\frac{1}{2} + a \right) \right] + M_{\frac{1}{4}}\delta\theta \quad (2.14)$$

Da questa equazione si ricavano le forze generalizzate:

$$\begin{aligned} Q_z &= -L \\ Q_\theta &= M_{\frac{1}{4}} + b \left(\frac{1}{2} + a \right) L \end{aligned} \quad (2.15)$$

Utilizzando le equazioni di Lagrange si trovano le due equazioni del moto:

$$\begin{aligned} m(\ddot{z} + bx_\theta\ddot{\theta}) + k_z z &= -L \\ I_P\ddot{\theta} + mbx_\theta\ddot{z} + k_\theta\theta &= M_{\frac{1}{4}} + b \left(\frac{1}{2} + a \right) L \end{aligned} \quad (2.16)$$

Le (2.16) possono essere riscritte in forma matriciale, operando però prima alcune sostituzioni: essendo un profilo sottile e simmetrico i coefficienti di portanza e di momento valgono rispettivamente $C_L = 2\pi$ e $C_{M_{\frac{1}{4}}} = 0$; si introducono inoltre le frequenze naturali a velocità nulla:

$$\omega_z = \sqrt{\frac{k_z}{m}}, \quad \omega_\theta = \sqrt{\frac{k_\theta}{I_P}} \quad (2.17)$$

Allora si arriva alla forma matriciale:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} mb^2 & mb^2x_\theta \\ mb^2x_\theta & I_P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} mb^2\omega_z^2 & 2\pi\rho b^2v^2 \\ 0 & I_P\omega_\theta^2 - 2\left(\frac{1}{2} + a\right)\pi\rho b^2v^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ \theta \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Il problema può essere ulteriormente semplificato scrivendo le variabili in forma esponenziale $z = z_0 e^{p\omega_\theta t}$ e $\theta = \theta_0 e^{p\omega_\theta t}$, dove p è un numero

complesso adimensionale dato dal rapporto tra il parametro di frequenza v e la frequenza naturale ω_θ : questo metodo prende il nome di Metodo p . Si introducono anche le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{I_P}{mb^2} \\ \sigma &= \frac{\omega_z}{\omega_\theta} \\ \mu &= \frac{m}{\rho\pi b^2} \\ V &= \frac{v}{b\omega_\theta} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Qui r indica il raggio di inerzia dell'ala rispetto al punto P, σ è il rapporto tra le frequenze naturali, μ è il rapporto di massa che riflette l'importanza relativa tra la massa del modello e quella dell'aria influenzata dal modello e V è la velocità del flusso indisturbato adimensionalizzata, chiamata anche velocità ridotta. Grazie a queste sostituzioni la (2.18) viene riscritta come:

$$\begin{bmatrix} p^2 + \sigma^2 & p^2 x_\theta + \frac{2V^2}{\mu} \\ p^2 x_\theta & p^2 r^2 + r^2 - \frac{2V^2}{\mu} \left(\frac{1}{2} + a \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{z_0}{b} \\ \theta_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Affinché esista una soluzione non banale, il determinante della matrice deve annullarsi: questo porta ad un polinomio di quarto grado nell'incognita p , detto Equazione Caratteristica, le cui radici sono due paia di numeri complessi coniugati:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\Gamma_1 \pm i\Omega_1}{\omega_\theta} \\ p_2 &= \frac{\Gamma_2 \pm i\Omega_2}{\omega_\theta} \end{aligned} \quad (2.21)$$

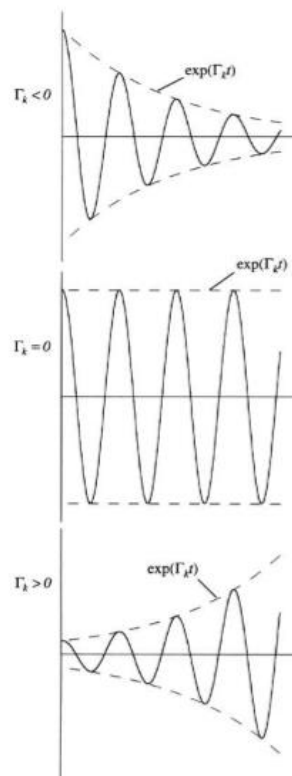


Figura 2-6: risposta dinamica al variare di Γ_k , con $\Omega_k \neq 0$. Tratta da [15].

La natura della risposta dinamica ad una qualunque condizione iniziale specificata dipende dal segno della parte reale Γ_k : in figura 2-6 è riportato il comportamento tipico per una parte reale positiva, negativa e nulla, nel caso in cui $\Omega_k \neq 0$ (altrimenti non si avrebbe moto armonico). $\Gamma_k < 0$ viene chiamato anche Smorzamento Modale del modo k-esimo, mentre Ω_k è detta Frequenza Modale. Si può notare che $\Gamma_k < 0$ implica oscillazioni convergenti e quindi un moto dinamicamente stabile, mentre $\Gamma_k > 0$ indica oscillazioni divergenti e moto dinamicamente instabile, cioè presenza di flutter: allora il caso $\Gamma_k = 0$ è il limite oltre il quale si entra in condizioni di flutter. Le equazioni del moto espresse in questa maniera permettono anche di calcolare la soluzione per problemi di aeroelasticità statica ponendo $\Omega_k = 0$: nella tabella 1 vengono riportati tutti i tipi di moto possibile.

Tabella 1: moti possibili al variare di p .

Γ_k	Ω_k	Tipo di moto	Stabilità
<0	$\neq 0$	Oscillazioni convergenti	Stabile
=0	$\neq 0$	Armonica semplice	Limite di stabilità
>0	$\neq 0$	Oscillazioni divergenti	Instabile
<0	= 0	Convergenza continua	Stabile
=0	= 0	Indipendente dal tempo	Limite di stabilità
>0	= 0	Divergenza continua	Instabile

Prendendo in considerazione le radici complesse in funzione di V e utilizzando la tabella è possibile ricavare V_F come il valore minimo che restituisca come moto un'oscillazione divergente; da qui la velocità di flutter si ricava da $v_F = V_F b \omega_\theta$. La velocità di divergenza invece si trova ponendo $p = 0$ nella (2.20) e risolvendo di nuovo per V :

$$v_D = r b \omega_\theta \sqrt{\frac{\mu}{1 + 2a}} \quad (2.22)$$

In figura 2-7 vengono riportati i grafici delle parti immaginaria e reale rispetto V nella configurazione $a = -1/5$, $e = -1/10$, $\mu = 20$, $r^2 = 6/25$ e $\sigma = 2/5$ (con questi parametri si trova $u_D = 2.828 b \omega_\theta$). Osservando il grafico della frequenza modale Ω_k si nota che quando il parametro di velocità è nullo i modi torsionale e flessionale sono separati, rispettivamente intorno all'unità e a σ : si ha un leggero accoppiamento dovuto all'elemento diagonale non nullo

x_θ in (2.20); all'aumentare di V l'accoppiamento cresce e le frequenze si avvicinano fino a raggiungere la coalescenza al punto di flutter, dove le radici diventano coppie di complessi coniugati. Nell'esempio qui riportato si hanno $V_F = 1.843$ e $\frac{\Omega_F}{\omega_\theta} = 0.5568$. Per quanto riguarda Γ invece essa è nulla fino alla condizione di flutter, poi la parte reale di una radice diventa positiva e quella dell'altra negativa.

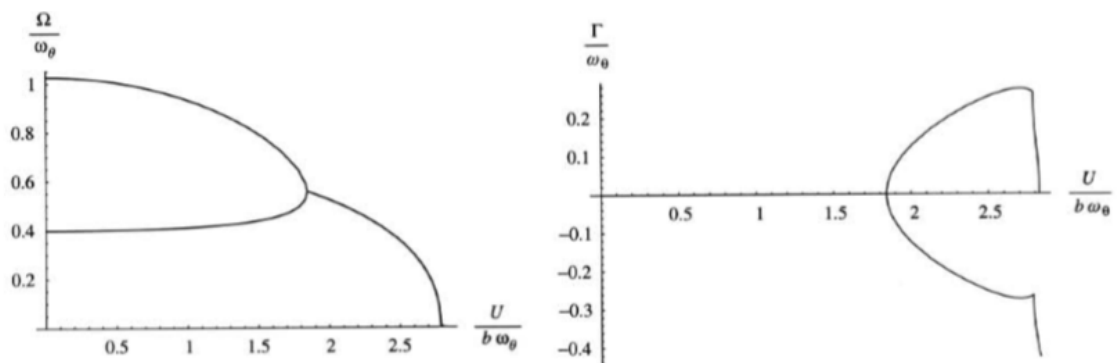


Figura 2-7: frequenza modale e smorzamento in funzione della velocità ridotta ($a = -1/5$, $e = -1/10$, $\mu = 20$, $r^2 = 6/25$, $\sigma = 2/5$). Tratta da [15].

Il metodo esposto qui sopra permette di individuare alcune caratteristiche tipiche del flutter, come il fatto che $V_F < V_D$ e che si ha coalescenza avvicinandosi a questa condizione, come accade spesso, ma non permette di determinare con precisione la velocità di flutter. Il motivo principale di ciò è la teoria aerodinamica utilizzata, che non ha considerato le instabilità del flusso: queste possono essere causate dal fatto che il vettore del flusso non è fissato nello spazio (a causa del moto instabile dell'ala relativamente all'aria) o dai vortici che si formano al bordo d'uscita del profilo e che applicano un effetto di downwash sul profilo stesso. Lo sviluppo di una teoria aerodinamica con instabilità non è semplice ma può essere reso più facile se si assume a priori un moto armonico semplice: poiché questa assunzione non può essere fatta nel metodo p si ricorre ad un tipo di analisi detta "classica", che permette di

calcolare la velocità e la frequenza di flutter ma non i valori di smorzamento e frequenza modali al di fuori di questa condizione.

Come descritto per mezzo della tabella 1 il limite di instabilità corrisponde ad una condizione per cui uno dei modi del moto ha una dipendenza dal tempo rappresentabile con un'armonica semplice. Questo implica che tutti i modi del moto sono convergenti (e quindi stabili) per velocità minori a quella di flutter. Il metodo di analisi classico si basa sulla risoluzione delle equazioni generalizzate del moto già descritte ma presumendo un moto armonico e cercando le condizioni che lo rendono possibile. La traslazione e rotazione del profilo sono allora:

$$\begin{aligned} z &= z_0 e^{i\omega t} \\ \theta &= \theta_0 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.23)$$

I due moti hanno la stessa pulsazione ω ma non sono necessariamente in fase e si può tenere conto di questo rappresentando θ_0 con un numero reale e z_0 con un numero immaginario. Per il calcolo dei carichi aerodinamici è sufficiente utilizzare la teoria aerodinamica lineare, visto che il moto oscillatorio della superficie portante è piccolo in ampiezza, quindi anche la portanza L e il momento aerodinamico rispetto all'asse elastico $M = M_{\frac{1}{4}} + b \left(\frac{1}{2} + a \right) L$ saranno armoniche semplici con pulsazione ω :

$$\begin{aligned} L(t) &= L_0 e^{i\omega t} \\ M(t) &= M_0 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Le ampiezze di questi carichi aerodinamici possono essere espresse come funzioni lineari complesse delle ampiezze dei due moti, per cui:

$$\begin{aligned} L_0 &= -\pi\rho_\infty b^3 \omega^2 \left[l_z(k, M_\infty) \frac{z_0}{b} + l_\theta(k, M_\infty) \theta_0 \right] \\ M_0 &= \pi\rho_\infty b^4 \omega^2 \left[m_z(k, M_\infty) \frac{z_0}{b} + m_\theta(k, M_\infty) \theta_0 \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Nelle parentesi quadre compaiono quattro funzioni complesse che rappresentano i coefficienti adimensionali per la portanza e il momento risultanti dai moti di pitch e plunge. Questi coefficienti sono generalmente funzione della frequenza ridotta e del numero di Mach, rispettivamente $k = \frac{\omega b}{v}$ e $M_\infty = \frac{v}{c_\infty}$; la dipendenza dal numero di Mach evidenzia gli effetti della comprimibilità del flusso, mentre il parametro k è una misura della non stabilità del flusso e per aeromobili convenzionali ha valore compreso tra zero e uno. La velocità a cui si presenta il flutter corrisponde ad una determinata coppia di valori di k e M_∞ e può essere trovata con un metodo iterativo. Per un sistema a due gradi di libertà come quello di figura 2-5 le equazioni del moto sono le (2.16); sostituendovi le (2.23), (2.24) e (2.25) scritte qui sopra si arriva ad avere un paio di equazioni lineari algebriche per z_0 e θ_0 :

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{m}{\pi\rho_\infty b^2} \left[1 - \left(\frac{\omega_z}{\omega} \right)^2 \right] + l_z(k, M_\infty) \right\} \frac{z_0}{b} + \left[\frac{m x_\theta}{\pi\rho_\infty b^2} + l_\theta(k, M_\infty) \right] \theta_0 &= 0 \\ \left[\frac{m x_\theta}{\pi\rho_\infty b^2} + m_z(k, M_\infty) \right] \frac{z_0}{b} + \left\{ \frac{I_p}{\pi\rho_\infty b^4} \left[1 - \left(\frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 \right] + m_\theta(k, M_\infty) \right\} \theta_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Inserendovi i parametri μ , r e σ definiti precedentemente nella (2.19) queste equazioni possono essere semplificate e riscritte in forma matriciale. Presumendo noti i parametri di configurazione m , e , a , I_p , ω_z , ω_θ e b allora il moto e le condizioni di volo sono descritti dalle incognite z_0 , θ_0 , ω , ρ_∞ , M_∞ e k ; essendo le equazioni lineari ed omogenee in $\frac{z_0}{b}$ e θ_0 il determinante dei loro

coefficienti deve annullarsi per consentire l'esistenza di una soluzione non banale del moto:

$$\begin{vmatrix} \mu \left[1 - \sigma^2 \left(\frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 \right] + l_z & \mu x_\theta + l_\theta \\ \mu x_\theta + m_z & \mu r^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 \right] + m_\theta \end{vmatrix} = 0 \quad (2.27)$$

L'espansione di questo determinante porta ad un polinomio di secondo grado nell'incognita $\left(\frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2$. Nella (2.27) compaiono quattro incognite: $\frac{\omega_\theta}{\omega}$, μ , M_∞ e k : poiché i coefficienti aerodinamici sono funzioni complesse anche il determinante lo è, quindi ponendo sia la parte reale che quella immaginaria uguali a zero si hanno due equazioni e rimangono solamente due incognite da specificare. Per farlo è possibile seguire questo metodo iterativo:

1. Si specifica un'altitudine in modo da fissare il parametro $\mu = \frac{m}{\rho \pi b^2}$;
2. Si ipotizza un valore iniziale del numero di Mach, ad esempio $M_\infty = 0$;
3. Si sceglie un intervallo di valori per k , ad esempio $0.001 \leq k \leq 1$;
4. Per ogni valore di k e con il Mach ipotizzato si calcolano i coefficienti aerodinamici;
5. Si risolve la (2.27) per ogni valore di k . In generale le radici saranno complesse, la parte reale sarà un'approssimazione di $\left(\frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2$ e la parte immaginaria sarà collegata allo smorzamento del modo di quella frequenza;
6. Si interpola per trovare il valore di k per cui la parte immaginaria di una delle radici sia zero. Sarà possibile trovare anche la parte reale di quella radice e quindi il valore di ω ;

7. Si determinano $v = \frac{b\omega}{k}$ e $M_\infty = \frac{v}{c_\infty}$;
8. Si ripetono gli step 3-7 con l'ultimo valore di Mach trovato finché non si trovano valori convergenti di M_∞ , v_F e k_F per il flutter al valore μ fissato;
9. Si ripete l'intera procedura a diversi valori di μ per determinare il limite di flutter. In questo modo diventa possibile plottare questo limite in termini ad esempio di altitudine rispetto M_∞ , v_F o k_F .

Come già detto, il metodo classico non permette di valutare lo smorzamento modale e la frequenza al di fuori del punto di flutter. In ambito ingegneristico è però importante conoscere anche il margine di stabilità in condizioni di volo vicine al flutter e capire il meccanismo fisico che causa l'instabilità, in modo da poter proporre modifiche nel design che attenuino o eliminino il problema. Quando è necessario utilizzare una teoria aerodinamica non stazionaria con assunzione di moto armonico semplice è possibile ricorrere a dei metodi alternativi all'analisi classica.

2.3.1 Metodo k

Questo metodo si basa sull'introduzione nelle (2.16) di una forza di smorzamento proporzionale allo spostamento ma in fase con la velocità:

$$\begin{aligned}
 m(\ddot{z} + bx_\theta\ddot{\theta}) + k_z z &= -L + D_z \\
 I_p\ddot{\theta} + mbx_\theta\ddot{z} + k_\theta\theta &= M_{\frac{1}{4}} + b\left(\frac{1}{2} + a\right)L + D_\theta
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

I termini dissipativi sono i seguenti:

$$\begin{aligned} D_z &= D_{z,0} e^{i\omega t} = -i g_z m \omega_z^2 z_0 e^{i\omega t} \\ D_\theta &= D_{\theta,0} e^{i\omega t} = -i g_\theta I_P \omega_\theta^2 \theta_0 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Allora le (2.28), sostituendovi i parametri espressi nelle (2.19) come fatto anche per l'analisi classica, diventano:

$$\begin{aligned} \left\{ \mu \left[1 - \left(\frac{\omega_z}{\omega} \right)^2 (1 + i g_z) \right] + l_z \right\} \frac{z_0}{b} + (\mu x_\theta + l_\theta) \theta_0 &= 0 \\ (\mu x_\theta + m_z) \frac{z_0}{b} + \left\{ \mu r^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 (1 + i g_\theta) \right] + m_\theta \right\} \theta_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

I coefficienti di smorzamento g_z e g_θ hanno valori compresi tra 0.01 e 0.05 a seconda della configurazione strutturale. Inizialmente questi venivano specificati a priori per migliorare l'accuratezza del risultato, ma successivamente si è iniziato a trattare anch'essi come incognite (in questo caso vengono tolti i pedici); scrivendo $\sigma = \frac{\omega_z}{\omega_\theta}$ e introducendo il termine:

$$Z = \left(\frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 (1 + i g) \quad (2.31)$$

Si possono riscrivere le (2.30) in forma matriciale. Di nuovo affinché la soluzione sia non banale il determinante della matrice deve annullarsi, cioè:

$$\begin{vmatrix} \mu(1 - \sigma^2 Z) + l_z & \mu x_\theta + l_\theta \\ \mu x_\theta + m_z & \mu r^2(1 - Z) + m_\theta \end{vmatrix} = 0 \quad (2.32)$$

L'equazione caratteristica risultante è un polinomio di grado due nell'incognita Z , che avrà soluzioni:

$$Z_{1,2} = \left(\frac{\omega_\theta}{\omega_{1,2}} \right)^2 + (1 + i g_{1,2}) \quad (2.33)$$

La strategia per risolvere l'equazione (2.32) è la stessa illustrata per la (2.27), con la differenza principale che i risultati numerici consistono in due coppie di numeri reali. (ω_1, g_1) e (ω_2, g_2) , che possono essere plottati in relazione alla velocità espressa come $\frac{v}{b\omega_\theta}$ o come "velocità ridotta", $\frac{1}{k}$. I valori numerici di g_i trovati per ogni k rappresentano lo smorzamento richiesto per avere un moto armonico semplice di pulsazione ω_i . Questo smorzamento strutturale è artificiale in quanto non esiste realmente ed è stato introdotto solo per ottenere il moto desiderato.

I grafici del coefficiente di smorzamento rispetto alla velocità dell'aria indicano i margini di stabilità in vicinanza del limite di flutter, dove $g = 0$. Questi grafici insieme a quelli della pulsazione rispetto alla velocità forniscono un'indicazione del meccanismo fisico che porta all'instabilità. I valori di ω lungo l'asse delle ordinate ($v = 0$) corrispondono ai modi accoppiati del sistema dinamico strutturale originario; all'aumentare della velocità l'andamento individuale o l'interazione tra le radici può indicare se avviene trasferimento di energia tra i modi e osservando questi fenomeni è possibile capire come ritardare l'instabilità.

In figura 2-8 viene riportato un confronto tra il metodo p e il metodo k : si può notare che il secondo predice in modo errato l'accoppiamento modale e soprattutto è il modo sbagliato a diventare instabile (il secondo invece del primo). L'unico risultato valido è la velocità di flutter a $g = 0$.

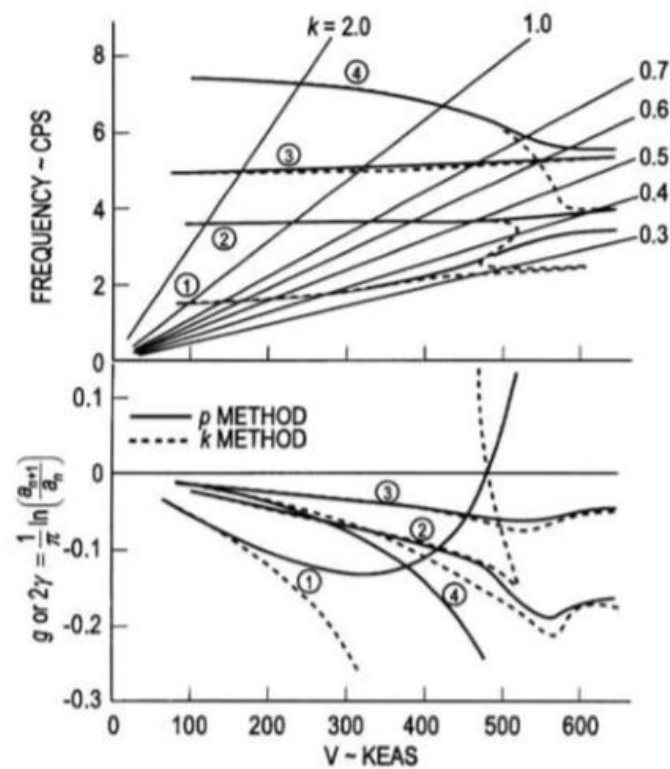


Figura 2-8: confronto tra i metodi p (linea continua) e k (linea tratteggiata). Tratta da [15].

2.3.2 Metodo p-k

Il metodo k presenta vantaggi notevoli rispetto al metodo p ma a livello matematico è formulato impropriamente: imporre un moto armonico semplice con l'aggiunta di uno smorzamento artificiale fa sì che per condizioni diverse dal caso $g = 0$ le frequenze e smorzamenti trovati non rappresentano correttamente il sistema, quindi modifiche nel progetto dettate da questi valori possono portare al fallimento della struttura. Un'alternativa è utilizzare una combinazione dei due metodi, richiamando la forma matriciale delle equazioni del moto espresse in (2.20) e qui riportate per comodità:

$$\begin{bmatrix} p^2 + \sigma^2 & p^2 x_\theta + \frac{2V^2}{\mu} \\ p^2 x_\theta & p^2 r^2 + r^2 - \frac{2V^2}{\mu} \left(\frac{1}{2} + a \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{z_0}{b} \\ \theta_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

Una soluzione non banale richiede che il determinante della matrice sia non nullo:

$$\begin{vmatrix} p^2 + \sigma^2 & p^2 x_\theta + \frac{2V^2}{\mu} \\ p^2 x_\theta & p^2 r^2 + r^2 - \frac{2V^2}{\mu} \left(\frac{1}{2} + a \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.35)$$

L'applicazione del metodo k consiste nel sostituire $p = ik$ nella formulazione precedente, trascurando la parte reale (cioè lo smorzamento) e trovando:

$$\begin{vmatrix} -k^2 + \sigma^2 & -k^2 x_\theta + \frac{2V^2}{\mu} \\ -k^2 x_\theta & -k^2 r^2 + r^2 - \frac{2V^2}{\mu} \left(\frac{1}{2} + a \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.36)$$

Specificata un'altitudine la (2.36) può essere risolta per V a determinati valori di k : il parametro di velocità va poi sostituito nella (2.35) per calcolare $p = \delta + ig$ e il processo si ripete finché la sua parte immaginaria g non rimarrà praticamente invariata. Il valore di g trovato indica lo smorzamento strutturale richiesto per sostenere un moto armonico semplice. Questo metodo fornisce una buona approssimazione quando si hanno piccoli smorzamenti, come nel caso di aeromobili. Un altro aspetto positivo del metodo $p - k$ è che rispetto al metodo p (dove venivano fissate altitudine e velocità) e rispetto al metodo k (dove venivano preselezionate combinazioni di k e dell'altitudine) qui la

velocità dell'aria viene considerata incognita e il metodo iterativo permette di incorporare meglio gli effetti della comprimibilità del fluido.

In figura 2-9 viene riportato un confronto tra il metodo p e il metodo $p - k$: i due metodi portano approssimativamente agli stessi risultati, con il vantaggio del $p - k$ di poter simulare i carichi aerodinamici formulati per moti armonici.

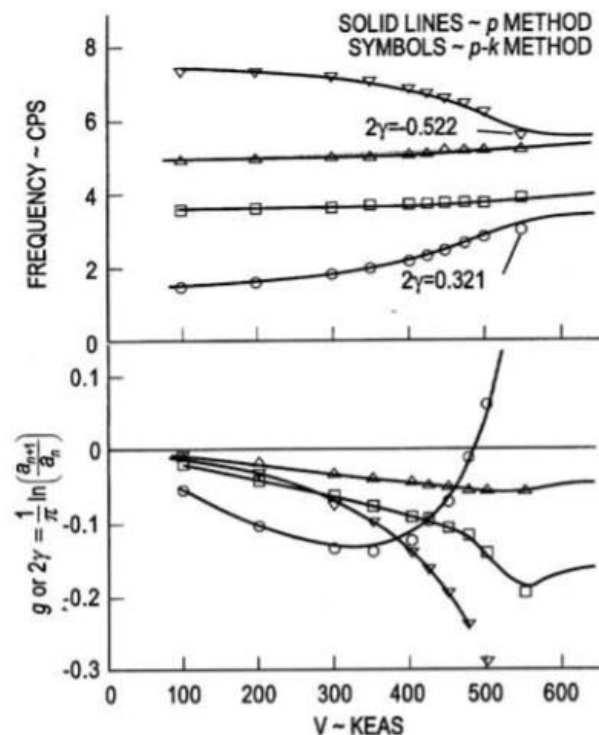


Figura 2-9: confronto tra il metodo p (linee continue) e il metodo $p - k$ (simboli). Tratta da [15].

È utile anche confrontare i metodi k e $p - k$: in figura 2-10 sono riportate le differenti conclusioni riguardanti gli accoppiamenti modali. Un altro vantaggio del metodo $p - k$ è il costo computazionale inferiore, poiché non richiede numerose simulazioni al computer svolte a densità costante per far combaciare il numero di Mach con la velocità dell'aria e l'altitudine.

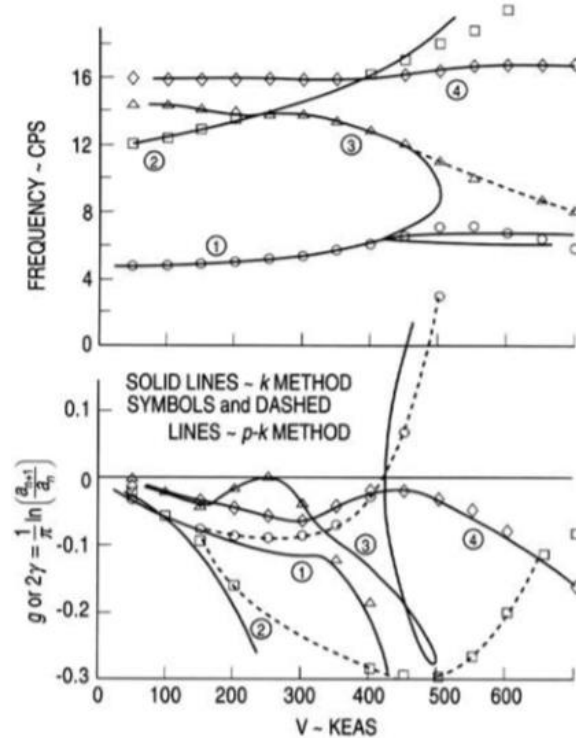


Figura 2-10: metodi k (linea continua) e $p-k$ (linea tratteggiata e simboli) confrontati. Tratta da [15].

2.3.3 Teoria aerodinamica non stazionaria

Se si vogliono inserire gli effetti dei termini non circolatori occorre ricordare che questi fanno variare la direzione della corrente lungo la corda a causa del flusso indotto; è possibile tuttavia utilizzare un angolo effettivo di attacco che per un moto armonico semplice dalla teoria di Theodorsen è definito come:

$$\alpha = C(k) \left[\theta + \frac{\dot{z}}{v} + \frac{b}{v} \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} \right] \quad (2.37)$$

Con $C(k)$ funzione di Theodorsen definita in (2.4). L'angolo α corrisponde a quello misurato a tre quarti della lunghezza della corda considerando un valore medio del flusso indotto. Nell'aerodinamica stazionaria l'angolo di attacco è θ , ma qui α è in funzione di θ , $\dot{\theta}$, \dot{z} e k e a causa di queste dipendenze e del

comportamento di $C(k)$ ci saranno variazioni in ampiezza e fase della portanza e del momento di pitch: in particolare la funzione di Theodorsen fa sì che la portanza in regime non stazionario sia minore di quella stazionaria e introduce uno sfasamento tra l'oscillazione di θ e quelle di portanza e momento.

Utilizzando gli stessi dati di figura 2-7 è stato possibile fare un confronto tra i regimi: in figura 2-11 viene riportata la frequenza in funzione di V per un metodo p in regime non stazionario (linea continua) e uno in regime stazionario (linea tratteggiata); si ottengono $V_F = 2.165$ e $\frac{\Omega_F}{\omega_\theta} = 0.6545$. Questi valori si avvicinano a quelli misurati precedentemente, inoltre la teoria non stazionaria produce radici complesse per ogni $V \neq 0$, per cui si ha smorzamento modale in tutti i modi al di sotto della velocità di flutter.

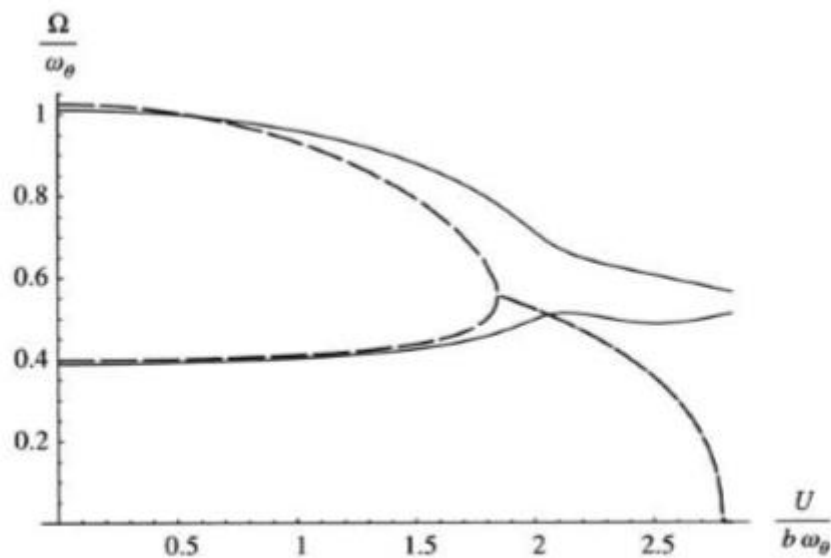


Figura 2-11: frequenza modale in regime non stazionario (linea continua) e stazionario (linea tratteggiata) con il metodo p . Tratta da [15].

2.3.4 Cambio di posizione degli assi

La posizione dell'asse elastico e del centro di massa dei profili influisce sulla velocità di flutter ed è molto importante a livello di design per far sì che questa instabilità non si trovi all'interno dell'involucro di volo. In figura 2-12 si può vedere come la velocità di flutter aumenta se, mantenendo l'asse elastico fisso, si sposta quello dei centri di massa in avanti oppure se, mantenendo l'asse dei centri di massa fisso, si sposta l'asse elastico verso il centro aerodinamico. Da notare però che se entrambi gli assi vengono allineati al centro aerodinamico al quarto di corda vi può comunque essere flutter a causa dei termini di smorzamento in regime non stazionario.

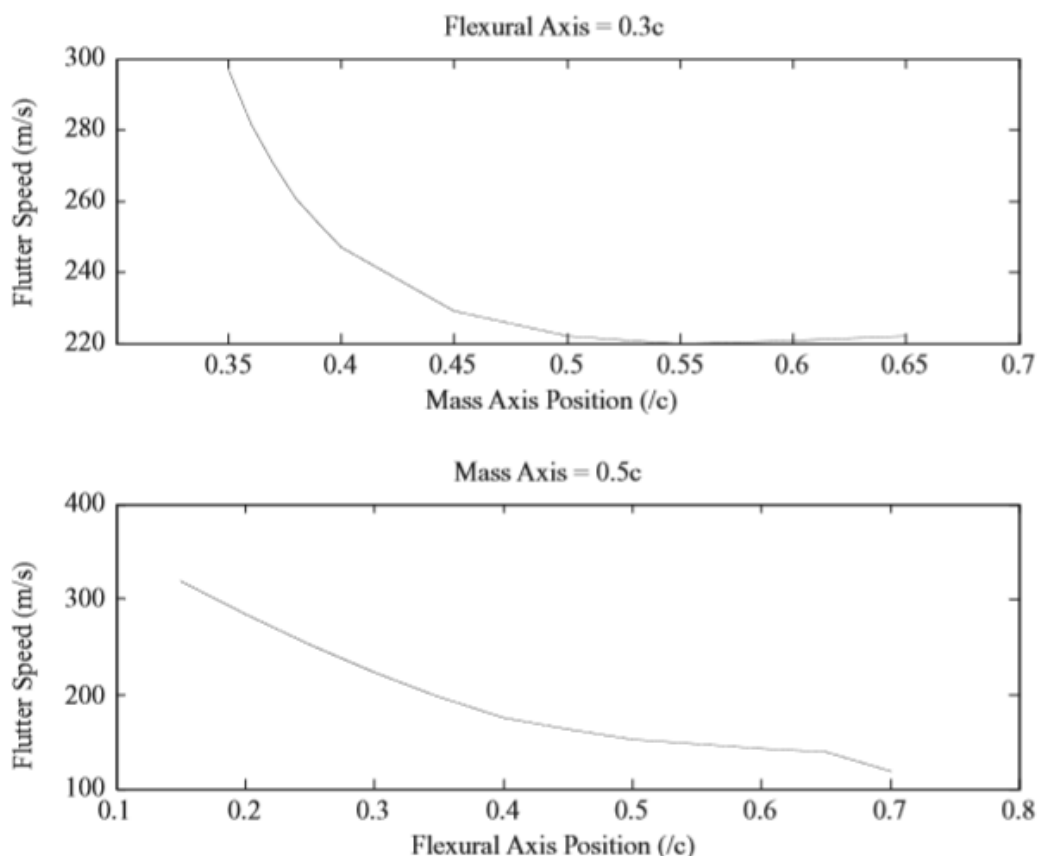


Figura 2-12: velocità di flutter al variare della posizione degli assi. Tratta da [21].

2.3.5 Ala flessibile

Si considera un'ala rettangolare flessibile come quella in figura 2-13 ma sostituendo alle molle una rigidezza flessionale EI e una torsionale GJ e trascurando momentaneamente la superficie di controllo. La deviazione di un punto qualsiasi (x,y) sull'ala può essere scritta come:

$$z = y^2 q_1 + y(x - x_f) q_2 \quad (2.38)$$

Dove q_1, q_2 sono coordinate generalizzate. Per ogni striscia elementare d'ala la deflessione è data da $q_1 y^2$ e l'angolo di torsione da $q_2 y$. Determinando l'energia potenziale, quella cinetica e il lavoro incrementale è possibile arrivare alle equazioni del moto nella stessa forma delle (2.9) e trovare poi i grafici per lo smorzamento e la pulsazione in funzione della velocità. Il modello può essere migliorato introducendo più termini nella definizione della deflessione, ad esempio per due modi flessionali e due torsionali essa potrebbe essere modellata come:

$$z = y^2 q_1 + y^3 q_2 + y(x - x_f) q_3 + y^2(x - x_f) q_4 \quad (2.39)$$

Più termini vengono inclusi e più è accurato il risultato.

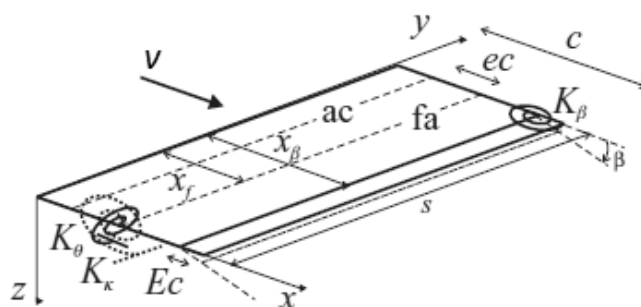


Figura 2-13: ala flessibile con superficie di controllo. Tratta da [21].

2.3.6 Flutter delle superfici di controllo

Il flutter delle superfici di controllo generalmente si presenta più frequentemente di quello classico, portando spesso alla loro perdita. Anche in questo caso normalmente il meccanismo di flutter avviene a causa dell'interazione di due modi.

Per illustrare alcune caratteristiche di questa instabilità si considera il modello in figura 2-13, stavolta includendo anche la superficie di controllo: si hanno tre gradi di libertà (la traslazione verso il basso, qui chiamato κ , oltre alla torsione θ e alla deflessione β della superficie di controllo). L'alettone è collegato al resto dell'ala da una molla di rigidità torsionale K_β e per approssimare il regime non stazionario si aggiungono ai momenti i termini $M_{\dot{\theta}}$ e $M_{\dot{\beta}}$.

Lo spostamento verticale (positivo verso il basso) è dato da:

$$z = y\kappa + (x - x_f)\theta + [x - x_\beta]\beta \quad (2.40)$$

La funzione tra parentesi quadre è la funzione di Heaviside, definita da:

$$\begin{cases} [X] = 0 & \text{se } X < 0 \\ [X] = X & \text{se } X \geq 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

L'energia cinetica del sistema risulta essere:

$$\begin{aligned} T = & \frac{m}{2} \int_0^s \int_0^{x_\beta} \{y\dot{\kappa} + (x - x_f)\dot{\theta}\}^2 dx dy \\ & + \frac{m}{2} \int_0^s \int_{x_\beta}^c \{y\dot{\kappa} + (x - x_f)\dot{\theta} + \\ & + (x - x_\beta)\dot{\beta}\}^2 dx dy \end{aligned} \quad (2.42)$$

È possibile poi calcolare l'energia potenziale:

$$U = \frac{1}{2}K_{\kappa}\kappa^2 + \frac{1}{2}K_{\theta}\theta^2 + \frac{1}{2}K_{\beta}\beta^2 \quad (2.43)$$

Il lavoro incrementale svolto dai carichi aerodinamici è:

$$\delta W = - \int_0^s dLy\delta\kappa + \int_0^s dM_{fa}\delta\theta + \int_0^s dM_{ha}\delta\beta \quad (2.44)$$

Dove M_{fa} e M_{ha} sono i momenti aerodinamici calcolati rispetto all'asse elastico e alla cerniera tra ala e alettone. I carichi che compaiono nella (2.24) vengono espressi con le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} dL &= \frac{1}{2}\rho v^2 \left[a_w \left(\theta + \frac{y\dot{\kappa}}{v} \right) + a_c \beta \right] \\ dM_{fa} &= \frac{1}{2}\rho v^2 \left[b_w \left(\theta + \frac{y\dot{\kappa}}{v} \right) + b_c \beta + M_{\theta} \frac{\dot{\theta}c}{4v} \right] \\ dM_{ha} &= \frac{1}{2}\rho v^2 \left[c_w \left(\theta + \frac{y\dot{\kappa}}{v} \right) + c_c \beta + M_{\beta} \frac{\dot{\beta}c}{4v} \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

In queste formulazioni sono stati utilizzati diversi coefficienti:

$$\begin{aligned} a_w &= 2\pi, & a_c &= 2[\cos^{-1}(1 - 2E) + 2\sqrt{E(1 - E)}], \\ b_w &= eca_w, & b_c &= -2(1 - E)\sqrt{E(1 - E)}, \\ c_w &= -\frac{T_{12}}{2}, & c_c &= -\frac{T_{12}T_{10}}{2\pi}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} T_{10} &= \sqrt{1 - d^2} + \cos^{-1} d, & T_{12} &= \sqrt{1 - d^2}(2 + d) + \cos^{-1} d (2d + 1), \\ d &= \frac{2x_b}{c} - 1, & Ec &= c - x_b \end{aligned}$$

Infine tramite le equazioni di Lagrange si possono scrivere le equazioni aeroelastiche in forma matriciale. Il comportamento a flutter di questo sistema dipende dall'interazione dei tre moti di flap, pitch e controllo della rotazione. La figura 2-14 mostra che il flutter avviene a causa dell'interazione tra il modo

di flap e quello di controllo della rotazione; può tuttavia avvenire anche per l'accoppiamento tra pitch e controllo, e se si utilizza una rigidità di controllo superiore avviene anche per flap-pitch.

L'approccio più comune per eliminare il flutter delle superfici di controllo prevede l'aggiunta di massa a queste superfici in modo da cambiarne le caratteristiche inerziali; un'alternativa consiste nell'aumentare la rigidità del controllo.

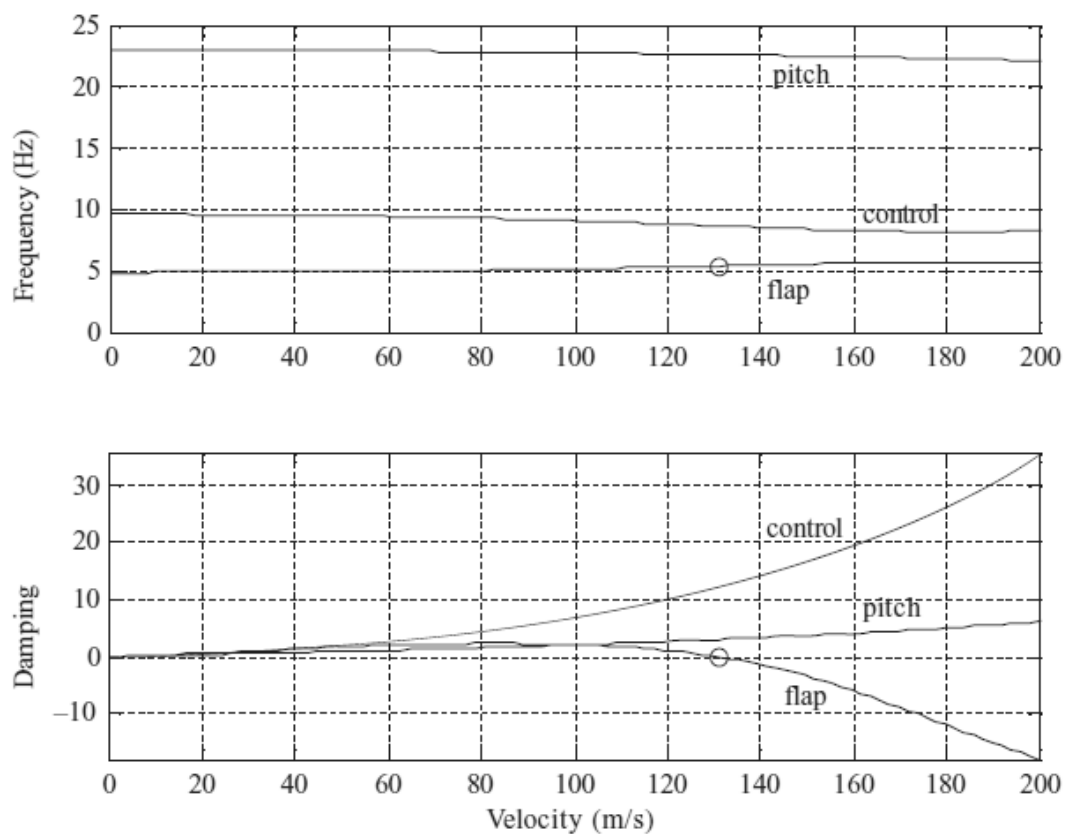


Figura 2-14: andamento della frequenza e dello smorzamento per un'ala con superficie di controllo. Tratta da [21].

2.3.7 Flutter in regime transonico e supersonico

In regime transonico la velocità di flutter cala drasticamente: in questo caso i limiti di flutter non possono essere calcolati con accuratezza utilizzando un metodo aerodinamico lineare, ma occorrono tecniche di modellazione aerodinamica (Eulero o Navier-Stokes) da accoppiare ad un modello strutturale.

I velivoli operanti in regime supersonico tendono ad avere ali a delta, in quanto consentono prestazioni maggiori a velocità elevate; per questo motivo conviene utilizzare modelli aerodinamici più avanzati come il metodo Mach Box. Un fenomeno che si presenta solo a velocità supersoniche è il Panel Flutter, caratterizzato da un moto instabile fuori dal piano di un pannello dell'ala che può causare vibrazioni indesiderate e problematiche di fatica del materiale. Inoltre nel volo supersonico i pannelli sono anche soggetti a riscaldamento superficiale dovuto al flusso d'aria e questo tende a causare dilatazione con conseguenti tensioni di compressione.

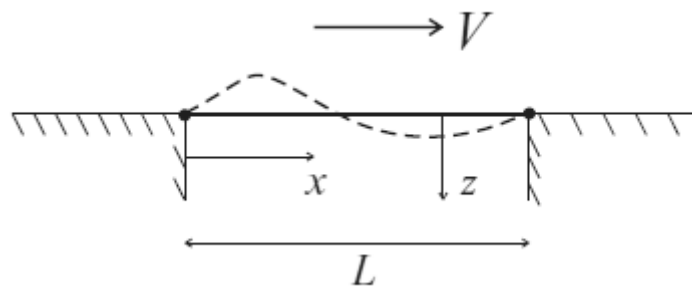


Figura 2-15: pannello flessibile in regime transonico. Tratta da [21].

Per illustrare il meccanismo del flutter di pannello si analizza il pannello di figura 2-15, di lunghezza L , ampiezza h , massa per unità di lunghezza μ e rigidità flessionale EI . Il pannello è appoggiato alle estremità ma libero lungo i lati paralleli alla direzione della corrente. Si immagina che vi sia un flusso d'aria di

velocità V , numero di Mach M e densità ρ ; lo spostamento fuori dal piano viene definito come:

$$z(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) q_1(t) + \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) q_2(t) \quad (2.47)$$

La pressione agente sull'elemento in seguito allo spostamento z viene definita per mezzo della Piston Theory, utile per la modellazione aerodinamica in campo supersonico:

$$P = \frac{\rho V^2}{M} \frac{dz}{dx} = \frac{\rho V^2}{M} \left[\frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) q_1 + \frac{2\pi}{L} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) q_2 \right] \quad (2.48)$$

Dove è stato trascurato il termine di velocità del pannello, che avrebbe aggiunto lo smorzamento aerodinamico. Di nuovo si definiscono energia cinetica, energia potenziale e lavoro incrementale svolto dalle forze aerodinamiche:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L \mu \left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \dot{q}_1 + \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \dot{q}_2 \right)^2 dx \\ U &= \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(-\frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) q_1 - \frac{4\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) q_2 \right)^2 dx \\ \delta W &= \int_0^L \frac{\rho V^2}{M} \left(\frac{\pi}{L} q_1 \cos\frac{\pi x}{L} + \frac{2\pi}{L} q_2 \cos\frac{2\pi x}{L} \right) \left(\delta q_1 \sin\frac{\pi x}{L} + \delta q_2 \sin\frac{2\pi x}{L} \right) h dx \end{aligned} \quad (2.49)$$

Da qui si possono scrivere le equazioni di Lagrange in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mu L}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\mu L}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{EI\pi^4}{2L^3} & -\frac{4\rho V^2 h}{3M} \\ \frac{4\rho V^2 h}{3M} & \frac{8EI\pi^4}{L^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

La (2.50) è nella forma di un sistema vibrante senza smorzamento. Si può notare che la matrice di rigidezza è simmetrica.

Assumendo una soluzione $q_i = q_{0,i} \sin(\omega t)$ permette di riscrivere il sistema accorpando le due matrici in una il cui determinante deve annullarsi affinché si abbia una soluzione non banale:

$$\begin{vmatrix} (-\omega^2 + A) & -B \\ B & (-\omega^2 + 16A) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.51)$$

Con $A = \frac{EI\pi^4}{\mu L^4}$ e $B = \frac{8\rho V^2 h}{3M\mu L}$. Risolvendo questa equazione nell'incognita ω^2 si trova un'espressione per le pulsazioni a cui possono presentarsi oscillazioni non smorzate:

$$\omega^2 = \frac{17A}{2} \pm \frac{\sqrt{289A^2 - 4(16A^2 + B^2)}}{2} \quad (2.52)$$

Si raggiunge la condizione critica quando le due soluzioni coincidono:

$$\begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{17A}{2}} \\ 225A^2 - 4B^2 = 0 \end{cases} \implies V_{crit} = \sqrt{\frac{45\pi^4 MEI}{16\rho L^3 h}} \quad (2.53)$$

2.3.8 Non-linearità

Nella trattazione precedente è stata fatta sempre l'assunzione di modelli aerodinamici lineari: piccoli spostamenti, forze linearmente proporzionali alle relative risposte e sistemi di controllo che rispondono linearmente con l'ampiezza. Nella realtà nei sistemi aeroelastici possono presentarsi tre tipi di non-linearità:

- **Strutturale:** principalmente sono effetti dovuti alla rigidità non uniforme, in figura 2-16 vengono riportate le risposte agli spostamenti in tre diversi tipi di rigidità non-lineare;
- **Aerodinamica:** avvengono soprattutto in regime di volo transonico, quando sono presenti onde d'urto sull'ala o sulle superfici di controllo e la loro posizione cambia in risposta al moto della struttura. Un altro tipo di non-linearità aerodinamica è lo Stall Flutter, un'oscillazione torsionale ad un grado di libertà legata alla separazione del flusso in una parte della superficie;
- **Di controllo:** includono situazioni in cui la superficie di controllo non risponde come richiesto, limitando la deflessione o variandola troppo lentamente.

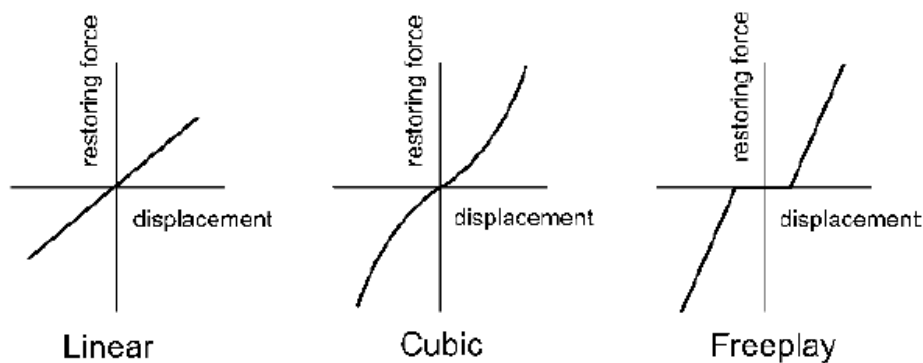


Figura 2-16: non-linearità strutturali. Tratta da [21].

La principale forma di risposta non-lineare è costituita dalle LCO (*Limit Cycle Oscillations*), che possono essere considerate come un flutter limitato (figura 2-17): se si considera un sistema aeroelastico che includa una rigidità di tipo cubica come quella mostrata in figura 2-16 si avrà che ad una certa velocità si presenterà il flutter e quindi un moto instabile; tuttavia al crescere della deformazione aumenterà anche la rigidità e il moto risulterà limitato.

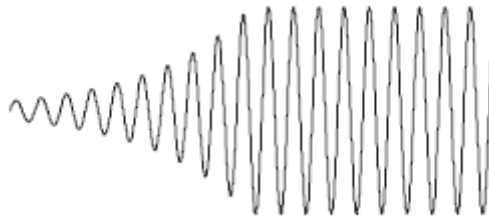


Figura 2-17: Limit Cycle Oscillation. Tratta da [21].

2.3.9 Utilizzo delle coniche per determinare il flutter

Per studiare l'insorgenza del flutter si può utilizzare un metodo grafico basato sull'equazione del moto (2.9) privata della matrice di smorzamento strutturale

D:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} + \rho v \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + (\rho v^2 \mathbf{C} + \mathbf{E})\mathbf{q} = 0 \quad (2.54)$$

Assumendo $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 e^{i\omega t}$ la soluzione non banale per la condizione di flutter è definita da:

$$|-\mathbf{A}\omega^2 + i\omega\rho v \mathbf{B} + \rho v^2 \mathbf{C} + \mathbf{E}| = 0 \quad (2.55)$$

Espandendo il determinante di questa matrice si trova un polinomio caratteristico formato da una parte immaginaria ed una reale. Entrambe le

parti devono annullarsi affinché la (2.55) sia verificata; quella reale permette di trovare una relazione quadratica tra la pulsazione ω^2 e la velocità v^2 :

$$r_1\omega^4 + r_2v^2\omega^2 + r_3v^4 + r_4\omega^2 + r_5v^6 + r_6 = 0 \quad (2.56)$$

Dove gli r_i sono i coefficienti derivanti dall'espansione delle matrici. La parte immaginaria invece sarà una relazione lineare:

$$s_1\omega^2 + s_2v^2 + s_3 = 0 \quad (2.57)$$

Dove gli s_i sono nuovamente coefficienti derivati dalla (2.55). In figura 2-18 vengono riportate sia la conica derivante da (2.56) che la retta formata da (2.57): l'intersezione tra le curve indica il punto di flutter (individuabile anche sostituendo un'equazione all'interno dell'altra), quindi se non si incrociano il sistema non raggiunge mai le condizioni di flutter. È possibile determinare anche la velocità di divergenza, cercando il punto in cui la conica intercetta l'asse $\omega = 0$.

Questo approccio è utile per identificare velocemente il flutter, ma non è adatto all'analisi di sistemi di ordine maggiore di due.

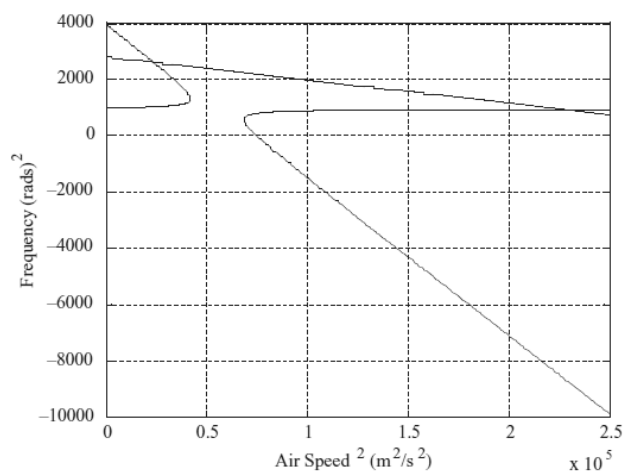


Figura 2-18: coniche del flutter. Tratta da [21].

Capitolo 3

Risposta Aeroelastica a Fenomeni di Turbolenza

Nonostante sia necessario assicurare che le instabilità aeroelastiche come divergenza e flutter avvengano al di fuori dell'involuppo di volo, vi sono anche problemi di design legati a fenomeni che avvengono lontano dai limiti di instabilità, i più importanti dei quali puntano al raggiungimento di una risposta dinamica con le caratteristiche desiderate. I problemi di risposta dinamica sono più complessi e generici di quelli di instabilità dinamica, in quanto con essi non è più possibile assumere già una risposta armonica non smorzata, e comprendono turbolenze di vario tipo e gravità che possono essere suddivise in due gruppi principali:

- **Raffiche discrete:** è un evento discreto incontrato dall'aeromobile. La velocità della raffica varia in modo deterministico, spesso con una forma a 1-coseno;
- **Turbolenza continua:** la velocità della raffica varia in maniera casuale.

In figura 3-1 si può vedere la differenza tra i due: le raffiche discrete possono essere risolte nel dominio del tempo mentre un problema di turbolenza continua richiede una soluzione nel dominio delle frequenze tramite un metodo PSD (Power Spectral Density).

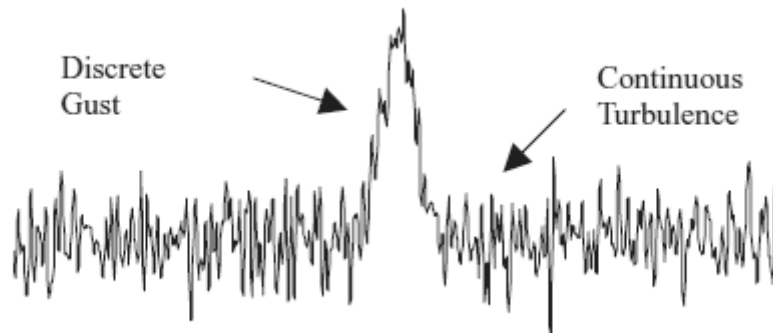


Figura 3-1: distinzione tra una raffica discreta e una turbolenza continua. Tratta da [21].

La maggior parte dei sistemi aeroelastici può essere definita tramite un'equazione matriciale del tipo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\rho v^2 \mathbf{A} + \mathbf{E} \quad (3.1)$$

Dove \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{K} sono rispettivamente le matrici di massa, di smorzamento strutturale e di rigidità, \mathbf{A} sono le forze aerodinamiche, \mathbf{q} il vettore delle coordinate generalizzate ed \mathbf{E} indica eventuali forze meccaniche esterne (come lo sloshing del propellente). Se l'interazione aerodinamica tra l'eccitazione e la configurazione di risposta è piccola \mathbf{A} può essere suddivisa in una componente legata all'eccitazione e una legata alla risposta, permettendo l'utilizzo di tecniche di analisi semplificate. L'esempio più comune in cui viene operata questa separazione è l'assunzione di raffica congelata, dove la raffica consiste di una distribuzione verticale di velocità fissata nello spazio e costante durante il passaggio dell'ala.

Per stabilire dei criteri di risposta minima si usano però solitamente delle raffiche a gradino o a 1-coseno. La prima si ha quando il velivolo entra in un campo di velocità uniforme del tipo:

$$w_g(x_g) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_g < 0 \\ w_{g,0} & \text{se } x_g \geq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Le grandezze di riferimento sono riportate in figura 3-2(a). La forma a 1-coseno (figura 3-2(b)) è più precisa ed è correntemente la più utilizzata per simulare raffiche discrete; la sua variazione spaziale è data da:

$$w_g(x_g) = \frac{w_{g,0}}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x_g}{L_g} \right), \quad 0 \leq x_g \leq L_g \quad (3.3)$$

L_g è la lunghezza della raffica, grazie alla quale viene definito anche il gradiente della raffica $H = \frac{1}{2} L_g$. La velocità $w_{g,0}$ di design varia a seconda dell'altitudine, della velocità e di L_g .

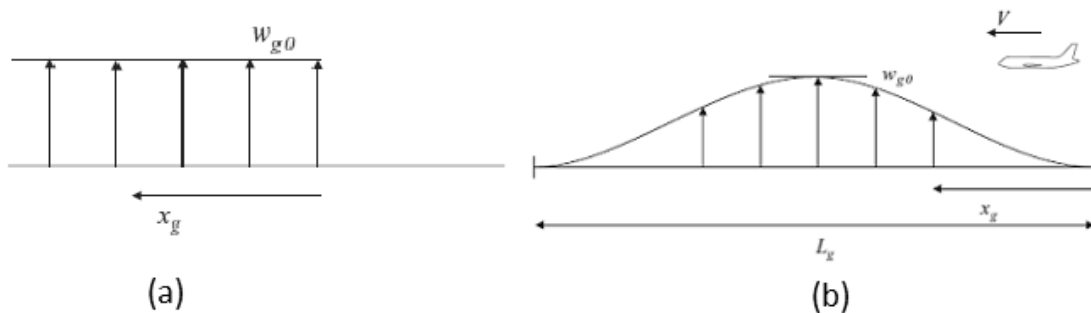


Figura 3-2: raffica a gradino (a) e raffica a 1-coseno (b). Tratta da [21].

Per calcolare la risposta del velivolo è necessario convertire la (3.3) da un'equazione spaziale ad una nel dominio temporale: si considera allora un aereo che all'istante $t = 0$ e a $x_g = 0$ viene colpito da una raffica di forma 1-coseno. Se esso viaggia a velocità v costante allora sostituendo $x_g = vt$ la (3.3) può essere scritta in forma temporale come:

$$w_g(t) = \frac{w_{g,0}}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi v}{L_g} t \right) \quad (3.4)$$

È possibile calcolare la risposta ad una serie di differenti valori di L_g in modo da trovare quella che porta al valore massimo per ogni tipologia di carico interno (taglio alla base dell'ala, torsione e flessione).

Per la trattazione di turbolenze random risulta più utile trasformare le equazioni dal dominio del tempo a quello della frequenza, calcolando poi la risposta utilizzando le PSD (*Power Spectral Densities*) dell'input e dell'output.

3.1 Soluzione nel dominio del tempo

La (3.1) può essere riscritta in forma generale come:

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{q}} + D\dot{\mathbf{q}} + K\mathbf{q} + \rho v \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} * \Phi + \rho v^2 \mathbf{C}\mathbf{q} * \Phi = \\ = \rho v \mathbf{R}_{g,W} w_g(t) * \Psi + \rho v \mathbf{R}_{g,T} w_g \left[t - \frac{l}{v} \right] * \Psi \end{aligned} \quad (3.5)$$

\mathbf{B} e \mathbf{C} sono matrici aerodinamiche dipendenti dalla risposta del sistema, $\mathbf{R}_{g,W}$ e $\mathbf{R}_{g,T}$ sono le matrici aerodinamiche dipendenti dalla raffica di vento (rispettivamente per l'ala e per la coda) e \mathbf{q} è la coordinata generalizzata. La presenza di questi termini porterebbe a considerare il sistema in regime permanente: così facendo si assume che il velivolo sia entrato istantaneamente nel campo della raffica e che la variazione dell'angolo di incidenza dovuta alla raffica e alla risposta ad essa abbia modificato le forze aerodinamiche senza alcun ritardo temporale (quindi si assume regime quasi-permanente); in realtà questi fenomeni richiedono un certo tempo per svilupparsi appieno e per questo motivo viene fatta la convoluzione delle matrici aerodinamiche con la funzione di Wagner Φ e quella di Kussner Ψ ⁶.

⁶ La funzione di Kussner $\Psi(\tau)$ rappresenta il fatto che le forze aerodinamiche collegate alla raffica aumentano un po' alla volta, mentre la funzione di Wagner $\Phi(\tau)$ rappresenta il fatto che le forze

Come esempio è possibile studiare la risposta dell'aereo rigido di figura 3-3: poiché viene incluso il ritardo di ingresso nella raffica della coda rispetto all'ala il sistema ha due gradi di libertà (traslazione verticale z_c e pitch θ dovuto al fatto che la portanza dell'ala varia prima di quella della coda). Inizialmente l'aereo vola in condizioni di trim, per cui le forze dovute al vento verranno aggiunte ai carichi presenti in regime permanente. Per semplicità viene utilizzata aerodinamica quasi-statica al posto di quella non permanente.

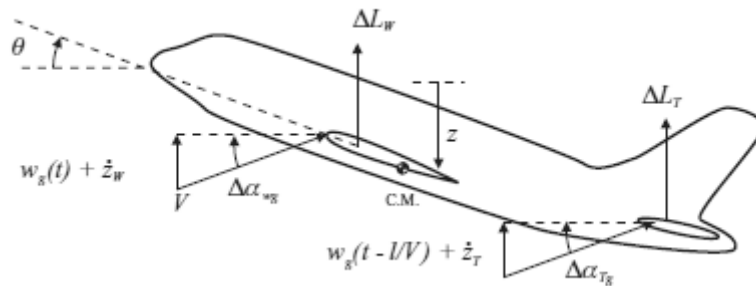


Figura 3-3: aereo in moto di pitch e lungo z . Tratta da [21].

La traslazione verticale dell'ala e del piano di coda rispetto al centro aerodinamico risulta essere:

$$\dot{z}_W = \dot{z}_c - l_W \dot{\theta} \quad (3.6)$$

$$\dot{z}_T = \dot{z}_c + l_T \dot{\theta}$$

L'aumento di incidenza delle due superfici portanti è quindi dato da:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{W_g} &= \frac{w_g(t) + \dot{z}_W}{v} + \theta \\ \Delta\alpha_{T_g} &= \frac{w_g\left(t - \frac{l}{v}\right) + \dot{z}_T}{v} + \theta \end{aligned} \quad (3.7)$$

aerodinamiche dipendenti dalla risposta richiedono del tempo per svilupparsi. Il parametro di tempo adimensionale $\tau = \frac{2v}{c} t$ può essere interpretato come la distanza percorsa dal profilo in rapporto alla lunghezza della semicorda.

Con w_g l'effetto di downwash dovuto alla raffica. Grazie a queste espressioni è possibile scrivere gli incrementi di portanza come:

$$\begin{aligned}\Delta L_W &= \frac{1}{2} \rho v^2 S_W a_W \left[\frac{w_g(t) + \dot{z}_c - l_W \dot{\theta}}{v} + \theta \right] \\ \Delta L_T &= \frac{1}{2} \rho v^2 S_T a_T \left[\frac{w_g\left(t - \frac{l}{v}\right) + \dot{z}_c - l_T \dot{\theta}}{v} + \theta \right]\end{aligned}\quad (3.8)$$

Con S_i la superficie e $a_i = \frac{dC_{L,i}}{d\alpha_i}$. A questo punto si ottengono le equazioni del moto effettuando l'equilibrio di forze e momenti:

$$\begin{aligned}m\ddot{z}_c &= -\Delta L_W - \Delta L_T \\ I_y \ddot{\theta} &= \Delta L_W l_W - \Delta L_T l_T\end{aligned}\quad (3.9)$$

Infine, sostituendo le (3.8) nelle (3.9) e riscrivendo in forma matriciale si arriva ad una forma simile alla (3.5): infatti i coefficienti di $w_g(t)$ e $w_g\left(t - \frac{l}{v}\right)$ entreranno nelle matrici $\mathbf{R}_{g,W}$ e $\mathbf{R}_{g,T}$, i coefficienti di \dot{z}_c e $\dot{\theta}$ formeranno la matrice \mathbf{B} mentre i coefficienti di z_c e θ andranno a comporre la matrice \mathbf{C} . Avendo considerato un regime quasi-statico i prodotti di convoluzione non compaiono; anche le matrici \mathbf{D} e \mathbf{K} , visto che si trascura lo smorzamento e si suppone il corpo rigido.

In figura 3-4 è riportata la risposta di un velivolo ad una raffica di forma 1-coseno di lunghezza 400 metri, mentre in figura 3-5 si può vedere la differenza nella risposta tra il modello ad un grado di libertà (quindi con ingresso istantaneo dell'intero aereo nel campo del vento) e il modello precedentemente esposto, con traslazione e beccheggio: a causa dell'assenza degli effetti di pitch il modello ad un grado di libertà raggiunge un'altitudine maggiore (non c'è il momento contrario che tende a dirigere verso il basso la

parte frontale dell'aereo), mentre le accelerazioni risultano simili ma con picchi smorzati quando si considera solo lo spostamento verticale.

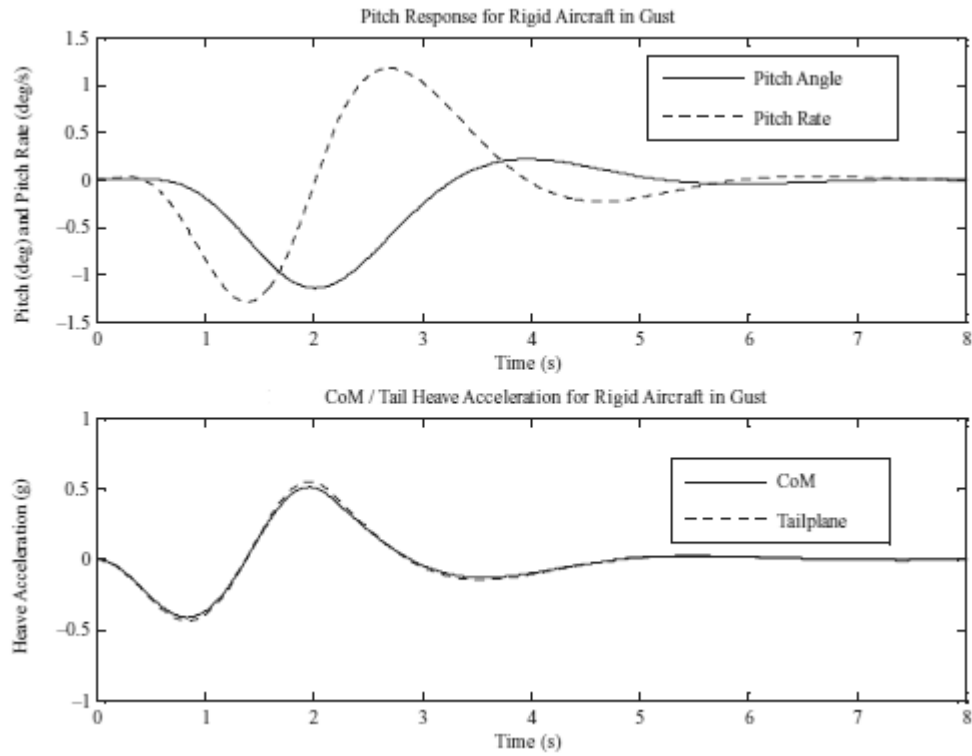


Figura 3-4: risposta ad una raffica 1-coseno di lunghezza 400 m. Tratta da [21].

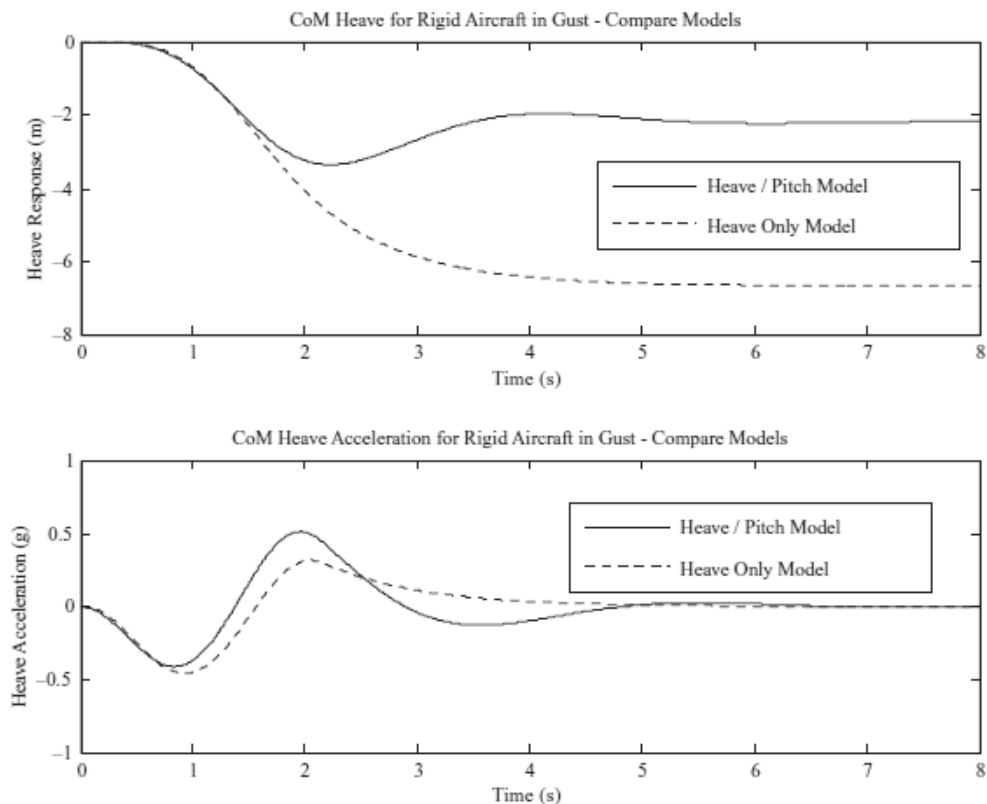


Figura 3-5: confronto tra i modelli ad uno e due gradi di libertà. Tratta da [21].

3.2 Soluzione nel dominio delle frequenze

La trattazione di turbolenze continue di tipo random spesso richiede di eseguire i calcoli nel dominio delle frequenze tramite le PSD; questo richiede la linearizzazione di qualsiasi non linearità presente (ad esempio quelle dovute ai sistemi di controllo di volo), portando ad una approssimazione dei risultati.

Supponendo che la raffica arrivi perpendicolarmente alla direzione di volo, la turbolenza viene assunta con distribuzione gaussiana e viene rappresentata tramite una PSD definita da:

$$\Phi_{gg}(\Omega) = \sigma_g^2 \frac{L}{\pi} \frac{1 + \left(\frac{8}{3}\right) (1.339\Omega L)^2}{[1 + (1.339\Omega L)^2]^{\frac{11}{6}}} \quad (3.10)$$

Dove $\Omega = \frac{\omega}{v}$ (misurata in *rad/m* o *m/s²*), σ_g è la rms (root mean square, l'area sottesa alla PSD, misurata in *m/s TAS*), L è la lunghezza caratteristica della turbolenza (tipicamente 762 m) e v è la velocità di volo (sempre in *m/s TAS*⁷). Questa formula, dovuta a Von Karman, risulta compatibile con le osservazioni sperimentali.

Per eseguire un'analisi PSD occorre definire un moto armonico per la raffica di vento; se ne considera allora uno di ampiezza $w_{g,0}$ e pulsazione $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda_g}$, riportato in figura 3-6 e definito da:

$$\omega_g(t) = \omega_{g,0} e^{i\omega t} \quad (3.11)$$

Per includere il ritardo di penetrazione della coda occorre introdurre un ritardo di fase, tale per cui in coda all'aereo si avrà:

$$\omega_g\left(t - \frac{l}{v}\right) = \omega_{g,0} e^{i\omega t - \frac{\omega l}{v}} \quad (3.12)$$

Data la PSD della turbolenza definita in (3.10) è possibile trovare quella di una generica componente r della risposta utilizzando la funzione di risposta in frequenza $H_{rg}(\omega)$:

⁷ La velocità dell'aria può essere misurata in condizioni TAS (True Air Speed) o EAS (Equivalent Air Speed): nel primo caso si utilizza il valore misurato all'altitudine in cui ci si trova, mentre il valore equivalente è la velocità al livello del mare che consente di calcolare la stessa pressione dinamica che si avrebbe ad una certa quota. Risulta quindi:

$$q = \frac{1}{2} \rho v_{TAS}^2 = \frac{1}{2} \rho_0 v_{EAS}^2$$

Il pedice 0 nella seconda formulazione indica che la densità utilizzata è quella al livello del mare.

$$\Phi_{rr}(\Omega) = |H_{rg}(\omega)|^2 \Phi_{gg}(\Omega) \quad (3.13)$$

Allora il valore medio della risposta σ_r è dato dalla radice quadrata dell'area sottesa alla curva Φ_{rr} :

$$\sigma_r = \sqrt{\int_0^{\omega_{max}} \Phi_{rr}(\omega) d\omega} \quad (3.14)$$

con ω_{max} la pulsazione massima per cui vengono generati i dati della PSD.

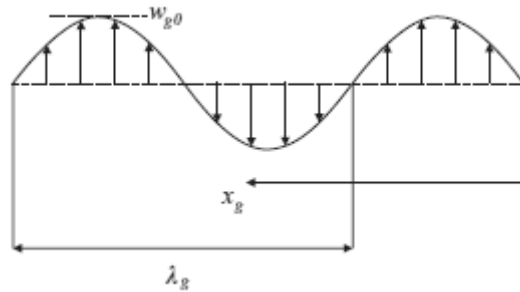


Figura 3-6: raffica con moto armonico. Tratta da [21].

3.2.1 Forma generale della soluzione

Prendendo in considerazione un moto armonico il vettore di risposta generalizzato è assunto essere:

$$\mathbf{q}(t) = \tilde{\mathbf{q}} e^{i\omega t} \quad (3.15)$$

L'apice \sim indica una quantità complessa (quindi un valore che include informazioni riguardanti la fase). La risposta allora può essere scritta come:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}} = & [-\omega^2 \mathbf{A} + i\omega\rho v \mathbf{B} + (\mathbf{E} + \rho v^2 \mathbf{C})]^{-1} \left\{ \rho v \mathbf{R}_W \right. \\ & \left. + \rho v \mathbf{R}_T e^{\left(-\frac{i\omega l}{v}\right)} \right\} \varphi\left(\frac{\omega C}{2v}\right) \omega_{g,0} \end{aligned} \quad (3.16)$$

In questa equazione si può notare la presenza di un termine di fase esponenziale $e^{\left(-\frac{i\omega l}{v}\right)}$ per includere il ritardo di penetrazione della coda. Compare inoltre la funzione di Sears $\varphi(k)$, l'equivalente per le frequenze della funzione di Kussner $\Psi(\tau)$ per il tempo e quindi legata all'aerodinamica dipendente dalla raffica; l'equivalente della funzione di Wagner, cioè la funzione di Theodorsen $C(k)$, è stato ommesso per semplificare la formulazione, ma andrebbe a moltiplicare le matrici aerodinamiche al primo membro, se utilizzato. Questa equazione può essere riscritta facendo comparire il vettore delle funzioni di risposta in frequenza (o FRF) e collegando così più risposte generalizzate alla velocità della raffica in determinate condizioni di volo:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{H}_{qg}(\omega) \omega_{g,0} \quad (3.17)$$

La risposta generalizzata può ora essere trasformata nell'accelerazione fisica $\tilde{\mathbf{z}}_{acc}$ a diverse posizioni del velivolo:

$$\tilde{\mathbf{z}}_{acc} = -\omega^2 \mathbf{T}_{zq} \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{H}_{zaccg} \omega_{g,0} \quad (3.18)$$

dove la matrice di trasformazione \mathbf{T}_{zq} include i valori degli spostamenti di corpo rigido e flessionali alla posizione desiderata.

Ricorrendo allo stesso esempio di prima è possibile studiare il comportamento di un aeromobile rigido a due gradi di libertà, heave e pitch; di nuovo verrà considerato un'aerodinamica in regime quasi-statico.

Con un input armonico, le (3.15) possono essere riscritte in questo modo:

$$\begin{aligned} z_c &= \tilde{z}_c e^{i\omega t} \\ \theta &= \tilde{\theta} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Utilizzando le equazioni (3.11) e (3.12) e passando alla forma matriciale si può isolare a primo membro il vettore $\tilde{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \tilde{z}_c \\ \tilde{\theta} \end{Bmatrix}$, ottenendo:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}} &= \left[-\omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} -Z_{\dot{z}} & -Z_q \\ -M_{\dot{z}} & -M_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -Z_\alpha \\ 0 & -M_\alpha \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{Bmatrix} Z_{g,W} \\ M_{g,W} \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{Bmatrix} Z_{g,T} \\ M_{g,T} \end{Bmatrix} e^{-\frac{\omega l}{v}} w_{g,0} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Questa equazione viene anche scritta $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{H}_{qg} w_{g,0}$, in cui \mathbf{H}_{qg} è il vettore delle FRF tra le due risposte generalizzate e la velocità della raffica. L'accelerazione della coda si ricava moltiplicando per ω^2 , per cui:

$$\tilde{z}_{T,acc} = -\omega^2 \{1 \quad l_T\} \mathbf{H}_{qg} w_{g,0} = H_{T,acc} w_{g,0} \quad (3.21)$$

In figura 3-7 viene riportata la FRF (al quadrato) del rapporto tra l'accelerazione del centro di massa dell'aereo rigido (utilizzato anche per l'esempio nel dominio del tempo) e la velocità della raffica, in funzione della frequenza; insieme viene riportata anche la PSD dell'accelerazione corrispondente. In figura 3-8, infine, si ha un confronto della PSD dell'accelerazione tra il modello a due gradi di libertà e quello con solo moto di innalzamento: si nota che le differenze maggiori si hanno sotto i 0.3 Hz, valore a cui si presenta il picco di accelerazione presente nel grafico di figura 3-7.

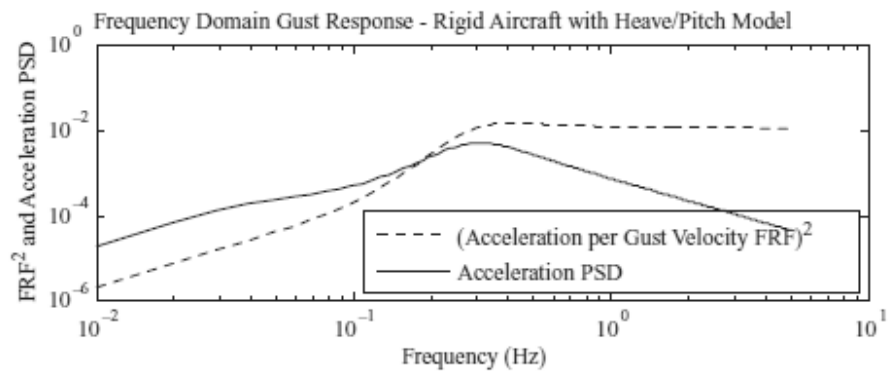


Figura 3-7: Frequency Response Function e PSD dell'accelerazione del centro di massa di un aereo rigido. Tratta da [21].

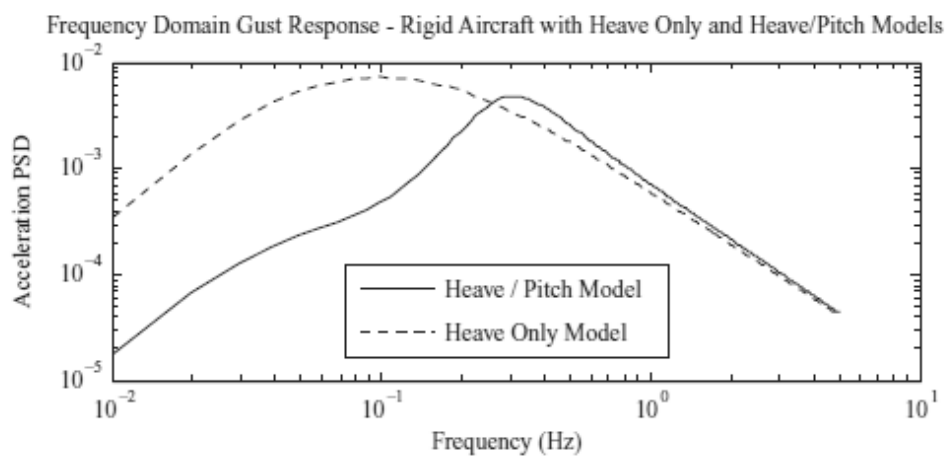


Figura 3-8: confronto della PSD dell'accelerazione per i modelli ad uno e due gradi di libertà. Tratta da [21].

Capitolo 4

Modellazione di Problemi Aeroelastici

In questo capitolo si presenta una spiegazione su come utilizzare il software MSC Nastran come solutore e il pacchetto Flightloads per MSC Patran come pre- e post-processore per studiare il comportamento aeroelastico di una struttura tramite un'analisi agli elementi finiti. Mediante Patran vengono realizzati due modelli, uno strutturale e uno aerodinamico, che comunicano tra di loro per mezzo di un metodo di interpolazione basato sulle spline (figura 4-1); dopo aver selezionato l'analisi da effettuare, viene creato un file in formato *.bdf* contenente tutte le informazioni riguardanti il modello sotto forma di *bulk data entries* e tramite questo file il solutore Nastran svolge l'analisi richiesta e compila un file in formato *.f06* contenente tutti i risultati. È possibile leggere l'*f06* oppure accedervi da Patran per visualizzare i dati ottenuti.

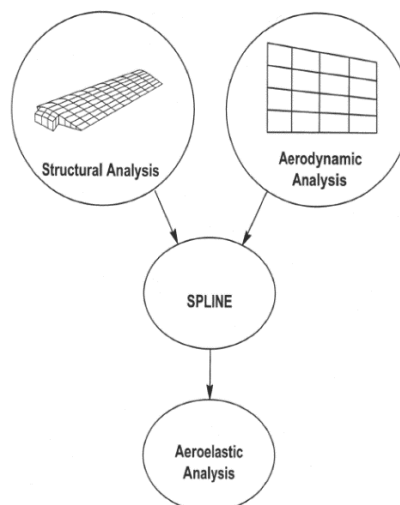


Figura 4-1: schema di modellazione aeroelastica con il pacchetto Flightloads per MSC Patran. Tratta da [26].

4.1 Modello strutturale

Questo modello deve essere in grado di rappresentare il comportamento del velivolo nell'intervallo di frequenze di interesse (normalmente 0-40 Hz per i grossi aerei commerciali e 0-60 Hz per quelli più piccoli). È possibile realizzare una struttura composta solamente di elementi monodimensionali di tipo trave (chiamata in inglese rappresentazione *beam-like*): essi vengono disposti lungo degli assi usati come riferimento per una certa parte di struttura, ad esempio l'asse flessionale, e ad ognuno vengono date le proprietà di rigidità rappresentative della parte di modello che sostituiscono. In figura 4-2 è riportato un esempio riguardante la semi-ala di un Airbus.

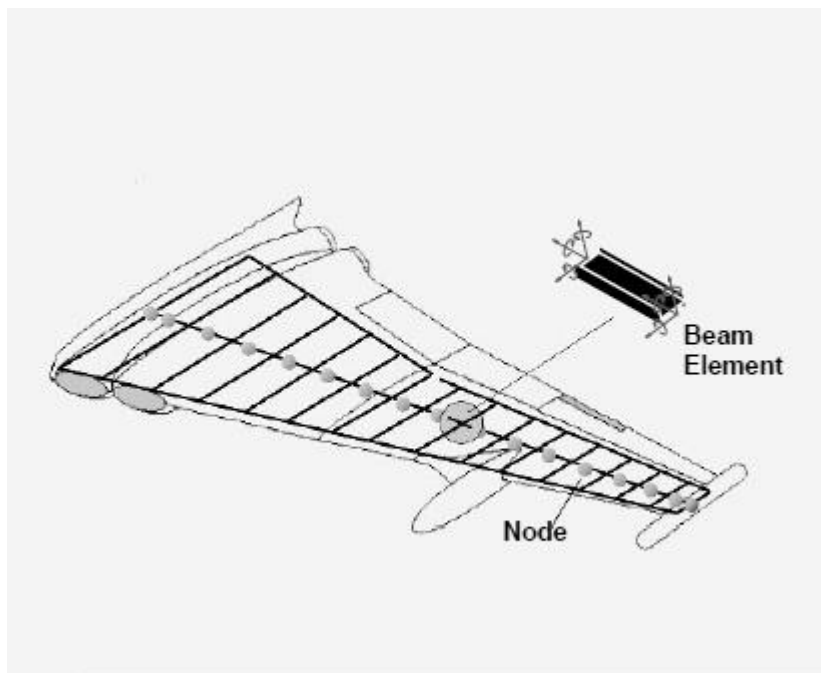


Figura 4-2: rappresentazione di una semi-ala con un modello beam-like. Tratta da [21].

Il problema principale di questa rappresentazione è l'inaccuratezza della distribuzione di rigidità: questo la rende adatta per un velivolo durante le prime fasi di design, quando la struttura dettagliata non è ancora stata definita e si possono usare dati derivanti da aerei precedenti, ma non nelle fasi più

avanzate; un'alternativa è la rappresentazione detta *box-like* che ricorre anche ad elementi bidimensionali. La scelta di quale tipo di elemento utilizzare dipende dalla decisione di includere o meno le deformazioni locali nell'analisi: se si considerano solo flessione e torsione dell'intera struttura allora la pelle e gli elementi di irrigidimento possono solamente trasportare carichi nel loro piano, mentre con il caso locale anch'essi possono deformarsi. Un modello in cui vengono considerate solo deformazioni complessive viene meglio rappresentato con elementi monodimensionali di tipo *bar* e bidimensionali di tipo *membrane*, mentre un modello che tiene conto anche delle deformazioni locali è compatibile con elementi *beam* e *shell*⁸.

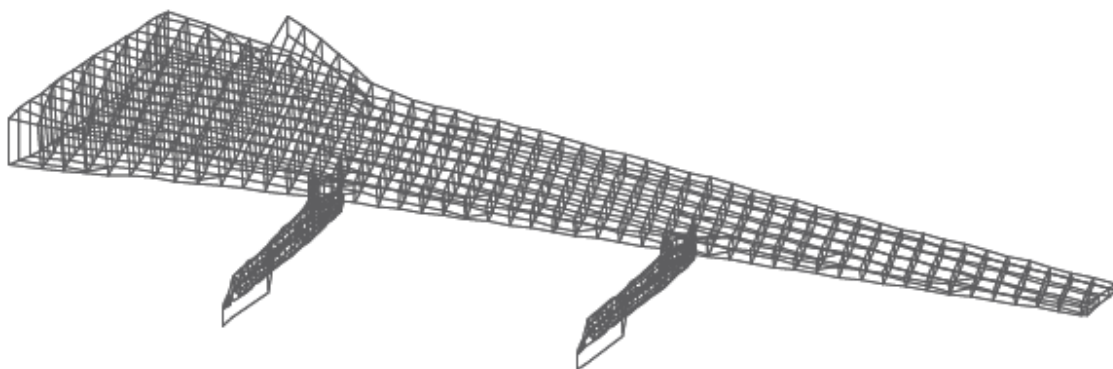


Figura 4-3: semi-ala realizzata con un modello *box-like*. Tratta da [21].

In figura 4-3 si può vedere una semi-ala modellata con una rappresentazione *box-like*. Da notare che in questo modo si ottiene un buon livello di dettaglio per quanto riguarda la massa strutturale, mentre volendo tener conto anche di propellente, payload ed altre fonti di massa non strutturale, diventa

⁸ Nei modelli con elementi finiti, l'elemento monodimensionale *bar* (asta o barra) è adatto a trasmettere solamente carichi assiali e per questo viene solitamente utilizzato nelle strutture reticolari; l'elemento monodimensionale *beam* (trave) può trasmettere ai nodi a cui è connesso qualunque tipologia di sollecitazione. Gli elementi bidimensionali invece possono essere di tipo *membrane* (membrana) se vi sono solamente carichi nel piano dell'elemento, o di tipo *shell* (guscio) che ha sia rigidità flessionale che membranale e trasmette quindi anche torsioni e flessioni.

necessario aggiungere questi pesi sotto forma di masse concentrate, posizionate accuratamente su alcuni nodi del modello.

4.2 Modello aerodinamico

Come la controparte strutturale, anche l'analisi aerodinamica si basa su un approccio con elementi finiti, la cui forma dipenderà dai requisiti del metodo utilizzato; questi elementi devono formare un reticolo regolare sulla superficie, non necessariamente coincidente con quello strutturale. Il modello aerodinamico utilizza un sistema di coordinate cartesiane xyz in cui ogni elemento nella configurazione indeformata deve avere due lati paralleli alla direzione del flusso d'aria che per convenzione è parallelo all'asse \hat{x} .

Le teorie aerodinamiche implementate in MSC Nastran si basano sull'assunzione di piccoli spostamenti e moto lineare-sinusoidale. Le teorie più utilizzate sono:

- Metodo del Reticolo di Doublet (Doublet-Lattice Method, o DLM), utilizzato in campo subsonico sia con le sole superfici portanti che con l'aggiunta di slender bodies a simulare la presenza di altre superfici, come la fusoliera;
- ZONA51, un metodo per le sole superfici portanti supersoniche;
- Metodo Mach Box;
- Strip Theory;
- Piston Theory.

I metodi più utilizzati sono i primi due, in entrambi i punti aerodinamici utilizzati nell'analisi sono collocati al centro dei rispettivi elementi, mentre si

trovano a un quarto di corda dell'elemento nei metodi Piston Theory e Strip Theory e si trovano in un punto specificato dall'utente per il metodo Mach Box. Tutti questi metodi condividono la stessa struttura matriciale in cui tre equazioni vengono usate per definire un set di coefficienti aerodinamici partendo da un parametro chiave, la frequenza ridotta:

$$k = \frac{\omega \bar{c}}{2v} \quad (4.1)$$

Con $\omega = 2\pi f$ la pulsazione angolare, \bar{c} una corda di riferimento (normalmente la corda media dell'ala), v la velocità media del flusso e f la frequenza. Grazie alla frequenza ridotta si può definire la matrice aerodinamica $\mathbf{A}(M, k)$ che lega la pressione all'effetto di downwash sull'elemento j-esimo w_j :

$$\{w_j\} = [A_{j,j}] \left\{ \frac{p_j}{\bar{q}} \right\} \quad (4.2)$$

In questa equazione p_j è la pressione sull'elemento j-esimo e \bar{q} è la pressione aerodinamica. La seconda equazione lega il downwash agli spostamenti u nel k-esimo punto aerodinamico:

$$\{w_j\} = [D_{j,k}^1 + ikD_{j,k}^2] \{u_k\} + \{w_j^g\} \quad (4.3)$$

Dove $D_{j,k}^1$ e $D_{j,k}^2$ sono rispettivamente la parte reale e immaginaria della matrice (adimensionale) di differenziazione e w_j^g è il downwash statico che può derivare dalla presenza di un angolo di incidenza iniziale del flusso. Infine, integrando le pressioni con la matrice di integrazione $S_{k,j}$ è possibile ottenere le forze e i momenti aerodinamici agenti sul k-esimo punto, F_k :

$$\{F_k\} = [S_{k,j}] \{p_j\} \quad (4.4)$$

Unendo le matrici delle equazioni (4.2), (4.3) e (4.4) si trova la matrice dei coefficienti aerodinamici:

$$[Q_{kk}] = [S_{k,j}][A_{j,j}]^{-1}[D_{j,k}^1 + ikD_{j,k}^2] \quad (4.5)$$

Tutti i metodi aerodinamici menzionati precedentemente calcolano le matrici S , D^1 e D^2 a certi valori di Mach e frequenza ridotta definiti dall'utente; il DLM e l'AREA 51 calcolano poi A mentre gli altri metodi trovano direttamente la sua inversa.

In Patran le superfici aerodinamiche vengono modellate seguendo i principi definiti dal modello utilizzato; esse vengono poi identificate con un numero e un comando CAERO_ che permette a Nastran di riconoscere il metodo richiesto nell'analisi. I comandi relativi alle varie teorie elencate sopra sono riportati nella tabella 2.

Tabella 2: elenco dei metodi disponibili in Flightloads. Vengono riportati anche i comandi relativi e gli intervalli di validità.

Metodo	Comando CAERO_	Mach di validità
DLM	CAERO1	$M < 0.9$
DLM - corpi di interferenza	CAERO2	$M < 0.9$
ZONA51	CAERO1	$1.1 < M < 3$
Mach Box	CAERO3	$1.1 < M < 3$
Strip Theory	CAERO4	
Piston Theory	CAERO5	$2.5 < M < 7$

4.2.1 DLM e ZONA51

Il DLM viene usato in regime subsonico mentre il metodo ZONA51 è il suo equivalente in regime supersonico e si basano entrambi sulla teoria della linea portante di Prandtl e sull'equazione linearizzata del potenziale:

$$\nabla^2 \Phi - M_\infty^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{a_\infty^2} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2v_\infty \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} \right] = 0 \quad (4.6)$$

Il pedice ∞ indica che le grandezze utilizzate sono considerate nelle condizioni di flusso indisturbato, Φ è il potenziale di velocità del flusso e ∇ l'operatore di Laplace; le variazioni di flusso vengono assunte armoniche e di ampiezza ridotta. In caso di flusso permanente incomprimibile questa equazione si riduce a $\nabla^2 \Phi = 0$ e si parla di reticolo di vortici (Vortex Lattice Method, o VLM).

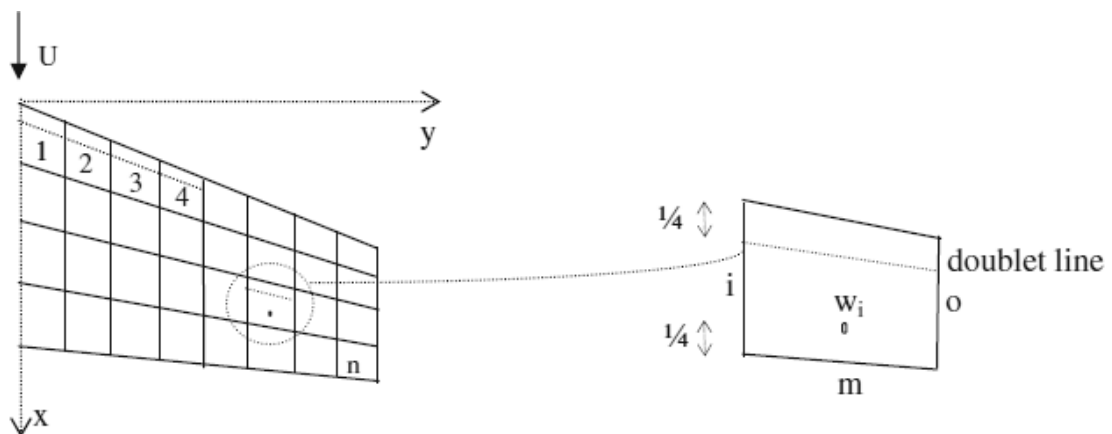


Figura 4-4: mesh aerodinamica realizzata tramite il metodo del reticolo di doublet. Tratta da [14].

Le superfici portanti vengono divise in una serie di elementi trapezoidali (o "box") con due lati paralleli alla direzione del flusso: per ogni elemento una linea di doublet viene posta al quarto di corda per rappresentare le pressioni (ignote) mentre le condizioni di downwash⁹ (note) vengono specificate in un punto di controllo posto a metà dei tre quarti di corda per il DLM e al 95 % di

⁹ Il downwash è il cambio di direzione del flusso a causa dell'azione aerodinamica dell'ala.

essa per ZONA51, come mostrato rispettivamente in figura 4-4 e figura 4-5. In questo modo viene soddisfatta la condizione di Kutta¹⁰.

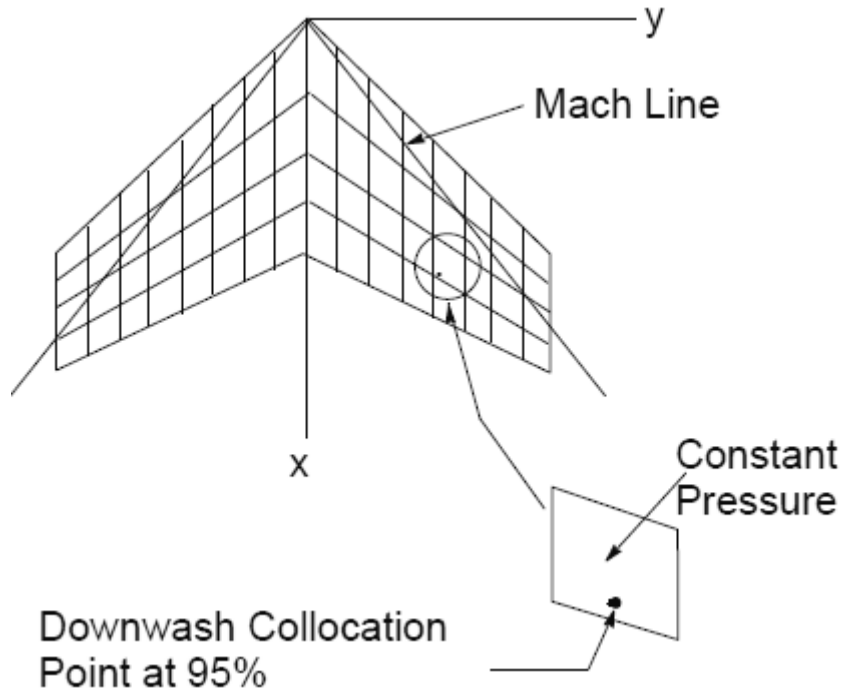


Figura 4-5: mesh aerodinamica realizzata con il metodo zona51. Tratta da [26].

Gli effetti dello spessore del profilo vengono ignorati, ma possono essere inclusi utilizzando dei fattori di correzione. Il metodo DLM inoltre supporta la simmetria sia rispetto al piano xy che rispetto al piano xz, mentre con ZONA51 è disponibile solo la simmetria xz.

Considerando un pannello formato da n box, il downwash agente nel punto di controllo del pannello i -esimo è dato da:

$$w_i = \sum_{j=1}^n w_{i,j} = \sum_{j=1}^n D_{i,j} \bar{p}_j \quad (4.7)$$

¹⁰ La condizione di Kutta richiede che la velocità dell'aria in coda ad un profilo alare sia uguale sull'estradosso e sull'intradosso.

Con $w_{i,j}$ il downwash sul pannello i dovuto al pannello j -esimo e \bar{p}_j il coefficiente di pressione della j -esima box, che quando moltiplicato per \bar{q} permette di ricavare la pressione ai tre quarti di corda dell'elemento. La matrice $[D]$ è definita da:

$$[D] = [A]^{-1} = \frac{\pi}{8} \left[\Delta x_j \cos \lambda_j \int_{l_j} K d\mu \right] \quad (4.8)$$

In questa formula $d\mu$ è un tratto infinitesimo della linea di doublet lunga l_j mentre Δx_j e λ_j sono rispettivamente la corda e l'angolo di freccia dell'elemento j . K è la funzione subsonica del Kernel, dipendente dallo spostamento della box, dal numero di Mach, dalla velocità del flusso e dalla pulsazione angolare ω .

Nastran utilizza una versione di queste equazioni che permette di correggere il downwash includendo gli effetti del camber, di un angolo di incidenza iniziale o di altre modifiche all'aerodinamica del profilo. Il vettore $\{w_j\}$ può essere modificato come segue:

$$\{w_j\}^{ex} = [A_{j,j}] \left\{ \frac{p_j}{\bar{q}} \right\}^{ex} \quad (4.9)$$

$$\{w_j\} = \{w_j\}^{th} + \{w_j\}^{ex} \quad (4.10)$$

Gli apici *th* e *ex* indicano rispettivamente valori teorici e sperimentali, mentre il pedice j indica la box considerata. $\{p_j\}^{ex}$ è la distribuzione di pressione effettiva misurata ad un angolo di attacco di riferimento, mentre $[A_{j,j}]$ è la matrice dei coefficienti aerodinamici (AIC). L'equazione (4.9) è l'equivalente della (4.2) applicata ai metodi DLM e ZONA51. Tramite l'equazione (4.10) i vettori normali agli elementi aerodinamici di una superficie portante vengono

riorientati utilizzando una matrice che elenca gli angoli di attacco locali di ogni box.

Mentre per le ali si ricorre a superfici portanti suddivise in box, nei problemi subsonici per rappresentare le caratteristiche di portanza di tutti gli altri corpi si ricorre ad elementi chiamati *body* definiti grazie alla Slender Body Theory sviluppata da Giesing, Kalman e Rodden¹¹. Questi elementi vengono divisi in due gruppi:

- **Elementi “slender”** utilizzati per rappresentare le forze derivanti dal moto del corpo stesso;
- **Elementi di interferenza** utilizzati per rappresentare l’interferenza tra i corpi e i pannelli nello stesso gruppo.

Un corpo viene rappresentato da uno slender body contenuto in un interference body: il primo crea il downwash dovuto al moto mentre il secondo rappresenta la superficie su cui viene imposta la condizione al contorno di tangenzialità del flusso, in modo da riprodurre gli effetti di interferenza. Gli elementi body possono muoversi in direzione verticale (\hat{z}) o laterale (\hat{y}), separatamente o contemporaneamente.

Il concetto fondamentale della Slender Body Theory è la sovrapposizione di singolarità e delle loro immagini. Ci sono due tipi di singolarità: le “forze” (utilizzate nelle superfici portanti e concentrate al quarto di corda delle box) e i “doublet” (utilizzati negli elementi di interferenza); gli elementi slender utilizzano sia forze che doublet.

¹¹ Giesing, J.P., Kalman, T.P. & Rodden, W.P., “*Subsonic Unsteady Aerodynamics for General Configurations; Part II, Vol. 1, - Application of the Doublet-Lattice Method and the Method of Images to Lifting-Surface/Body Interference*”, Air Force Flight Dynamics Laboratory Report No. AFFDL-TR-71-5, Part II, Vol. 1, April 1972.

Il numero di elementi da utilizzare dipende dal numero di Mach (M) e può essere determinato con un metodo iterativo tramite le seguenti formule:

$$NBOX = Int \left[\frac{x_{max}}{\left(\frac{y_{max}\beta}{NBS - 0.5} \right)} + 0.999 \right] \quad (4.11)$$

$$NSB = Int \left[\frac{y_{max}\beta}{\left(\frac{x_{max}}{NBOX0 + 0.5} \right)} + 0.5 \right] \quad (4.12)$$

$NBOX$ è il numero di Mach box in direzione del flusso (minimo sette), NSB è il numero di elementi nella direzione dello span, x_{max} e y_{max} sono la corda e l'apertura alare massime, $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$ e $NBOX0$ il numero iniziale di box definito. *Int* sta ad indicare che si considera un numero intero.

L'algoritmo per il metodo Mach Box permette all'utente di definire un valore iniziale di $NBOX0$ (inferiore a 50) e lo riduce fino al numero intero più vicino che permette di avere gli elementi più esterni con un lato coincidente con y_{max} . A questo punto il programma controlla che gli elementi che si trovano solo parzialmente sulla superficie portante più quelli a cavallo del bordo di uscita siano inferiori a 500 (con massimo 50 Mach box lungo tutta l'apertura alare) e che su ogni superficie di controllo ci siano meno di 200 elementi: se è così, la griglia viene utilizzata per completare l'analisi, altrimenti si riduce $NBOX0$ di uno e si ripete il procedimento. Il numero minimo raccomandabile di elementi è 80. Un esempio di griglia applicata ad un'ala supersonica è presentato in figura 4-7.

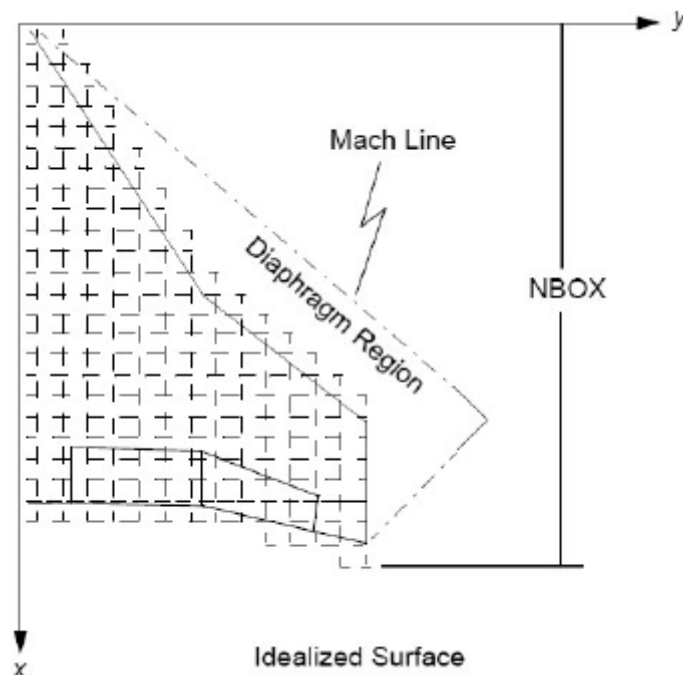


Figura 4.7: suddivisione di una superficie aerodinamica con le Mach box. Tratta da [26].

Diversamente dai metodi precedenti con il Mach Box la matrice $[A_{j,j}]$ utilizzata nell'equazione (4.2) non viene mai calcolata perché il downwash degli elementi non viene mai collegato alla pressione, bensì ai potenziali di velocità, aggirando così gli errori associati alla differenziazione del potenziale, necessaria ad ottenere le pressioni. Le forze aerodinamiche generalizzate vengono poi calcolate integrando per parti il potenziale.

L'accuratezza del metodo Mach Box dipende dalla bontà della teoria supersonica lineare, generalmente assunta valida per Mach compresi tra 1.2 e 3, e dal numero di elementi utilizzati.

4.2.3 Strip Theory

La Teoria delle Strisce (Strip Theory in inglese) può essere applicata ad un moto subsonico o supersonico per calcolare forze a regime non permanente su ali con elevato rapporto d'aspetto, sebbene sia meno accurata delle teorie

precedenti. Ogni striscia è aerodinamicamente disaccoppiata dalle altre e sia l'ala che le eventuali superfici di controllo vengono considerate rigide nella direzione della corda.

In figura 4-8 c'è un esempio in pianta dell'ala: ogni striscia ha due gradi di libertà (T_3, R_2) ai quali in presenza di una superficie di controllo si aggiunge R_3 , espresso come rotazione relativa all'inclinazione dell'ala. L'utente definisce i due vertici del bordo d'attacco e della corda, assunta in direzione del flusso; il resto della geometria (suddivisione in box, posizione della linea cardine) viene data in funzione di queste grandezze.

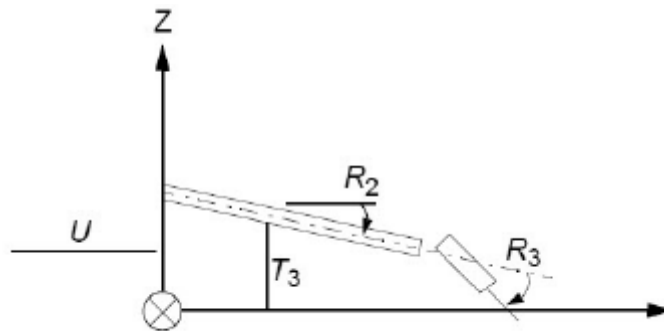


Figura 4-8: vista laterale di un'ala con tre gradi di libertà. Tratta da [29].

Ricordando la funzione di Theodorsen $C(k) = F(k) + iG(k)$ con $k = \frac{\omega b}{v}$ la frequenza ridotta locale e b la semicorda della striscia, l'utente può scegliere se utilizzare $F(k)$ e $G(k)$ nella loro formulazione esatta o con la forma approssimata:

$$F(k) = \sum_{n=0}^N \frac{b_n}{1 + \left(\frac{\beta_n}{k}\right)^2} \quad (4.13)$$

$$G(k) = \sum_{n=0}^N \frac{b_n \left(\frac{\beta_n}{k}\right)}{1 + \left(\frac{\beta_n}{k}\right)^2} \quad (4.14)$$

Con $\beta_0 = 0$. La scelta dei parametri b_n e β_n è lasciata all'utente. Con queste opzioni è possibile aggiustare la Teoria delle Strisce per tenere conto degli effetti di comprimibilità, dell'ala finita o della presenza di un angolo di freccia.

Un esempio di Teoria delle Strisce applicata ad una semi-ala è riportato in figura 4-9.

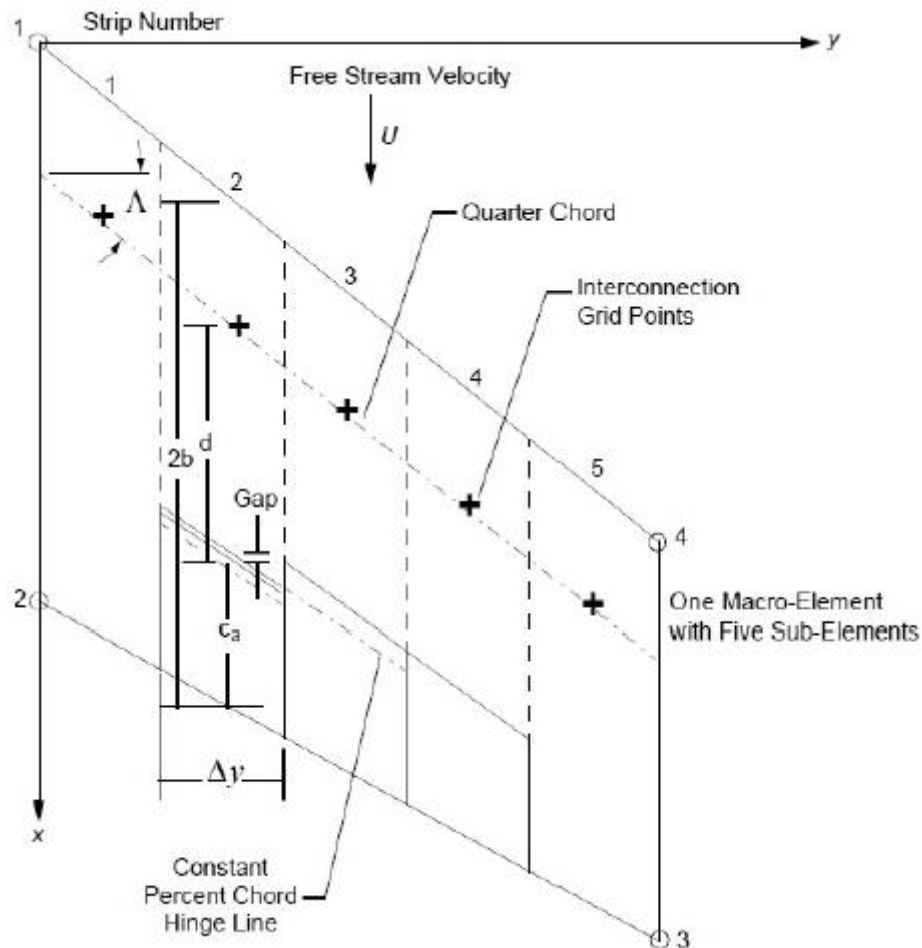


Figura 4-9: applicazione della teoria delle strisce ad una semi-ala. Tratta da [29].

4.2.4 Piston Theory

In Nastran la Piston Theory è una forma di teoria delle strisce e parte quindi dalle stesse considerazioni rigidità in direzione della corda: si basa sull'osservazione che per profili sottili ad alto numero di Mach e piccoli angoli di incidenza i gradienti e le componenti di velocità perpendicolari alla direzione del flusso indisturbato sono molto maggiori di quelli in direzione parallela ad esso, per cui si possono trascurare i contributi di pressione derivanti dalle perturbazioni parallele alla corrente. Allora è possibile fare un'analogia con il moto di un pistone, dividendo il flusso in lastre cilindriche di fluido (adiacenti ma indipendenti l'una dall'altra) che colpiscono il profilo perpendicolarmente alla corrente indisturbata (figura 4-10); la superficie dell'ala si comporta da pistone in quanto sposta il fluido all'interno del cilindro.

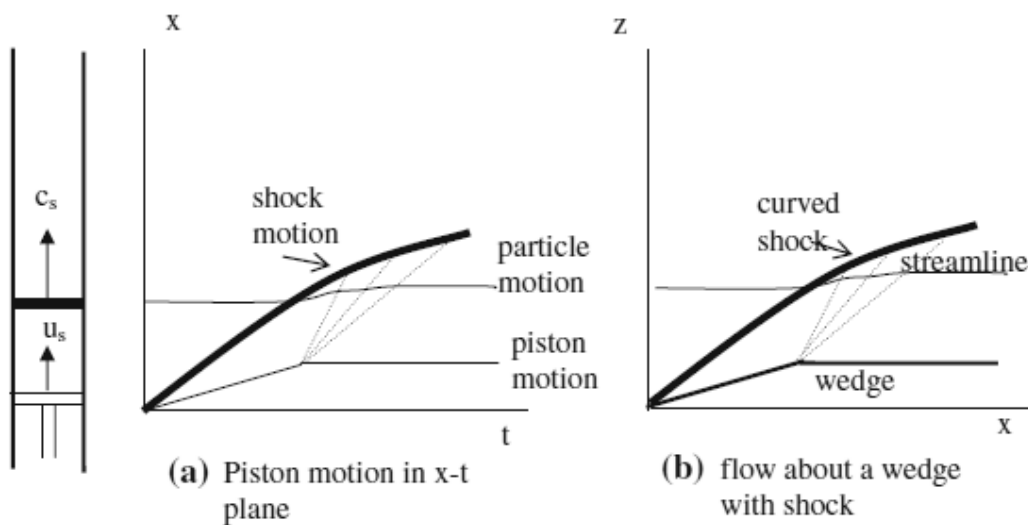


Figura 4-10: analogie tra il moto di un pistone in un fluido e il flusso su un cuneo. Tratta da [14].

Grazie a questa analogia il rapporto tra la pressione superficiale e quella indisturbata viene ottenuto utilizzando la formula per un pistone che si muove a velocità costante generando onde isoentropiche di compressione:

$$\frac{p}{p_{\infty}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{w}{a_{\infty}}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \quad (4.15)$$

Dove a_{∞} è la velocità del suono nelle condizioni di flusso indisturbato, w è la velocità in direzione verticale e γ è il coefficiente di dilatazione adiabatico del gas, definito come il rapporto tra il calore specifico a pressione costante e quello a volume costante. La (4.15) è valida solo se il flusso è isoentropico e questo è possibile solo nel caso di piccole perturbazioni.

Data la variazione di inclinazione del flusso (θ) è possibile approssimare la velocità w come:

$$w \cong v\theta = a_{\infty}M\theta \quad (4.16)$$

Questa equazione può essere riscritta in questo modo:

$$M_{\tau} = \frac{w}{a_{\infty}} \cong M\theta \quad (4.17)$$

M_{τ} viene detto “parametro di somiglianza ipersonica” ed è indicativo della validità della Piston Theory in quanto deve essere minore di uno affinché essa possa essere utilizzata. Espandendo il secondo membro dell’equazione (4.15) in una serie fino al terzo ordine di $\frac{w}{a_{\infty}}$ si ha:

$$\frac{p}{p_{\infty}} \cong 1 + \gamma \frac{w}{a_{\infty}} + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{4} \left(\frac{w}{a_{\infty}}\right)^2 + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{12} \left(\frac{w}{a_{\infty}}\right)^3 \quad (4.18)$$

L’equazione (4.18) può essere applicata nel range $0 < M_{\tau} < 0.6$; è possibile utilizzare un’approssimazione al secondo ordine quando $0 < M_{\tau} < 0.3$,

mentre se $0 < M_\tau < 0.15$ si può ricorrere all'approccio lineare considerando solo la prima potenza di $\frac{w}{a_\infty}$.

Un'altra restrizione per la Piston Theory riguarda la frequenza ridotta, infatti deve valere:

$$(kM)^2 \gg 1 \quad (4.19)$$

Questa condizione può essere rispettata anche in flussi subsonici, tuttavia la principale applicazione di questo metodo è per moti ipersonici. Confrontando i risultati teorici con prove sperimentali è stata confermata la validità della Piston Theory di terzo ordine (quindi con l'intera equazione (4.18) per Mach compresi tra 2.5 e 7.0.

I parametri geometrici richiesti all'utente sono gli stessi della teoria delle strisce con l'aggiunta dell'angolo di attacco iniziale e dello spessore del profilo: il primo tende a spostare il centro aerodinamico oltre il punto medio della corda, mentre il secondo tende a portarlo davanti ad essa ed aiuta ad ottenere valori teorici più vicini a quelli sperimentali. Assumendo angolo di attacco nullo è possibile effettuare una stima conservativa delle condizioni di flutter.

4.3 Accoppiamento strutturale/aerodinamico

La griglia strutturale e quella aerodinamica vengono connesse tramite interpolazione, permettendo la selezione indipendente di elementi da entrambi i modelli nel modo più adatto possibile al metodo di analisi scelto. L'interpolazione viene detta anche *Splining* e in Patran sono disponibili vari metodi tra cui scegliere:

- Spline Lineare, da utilizzare quando gli elementi strutturali sono monodimensionali;
- Spline Superficiale, utilizzata con piastre;
- Spline per corpo rigido che si basa solo sui moti rigidi;
- Spline definita dall'utente in Patran o tramite un sistema client-server.

In generale, le spline lineari vengono utilizzate nei modelli beam-like, mentre quando i nodi strutturali sono distribuiti in un'area più ampia è consigliabile ricorrere alle spline superficiali. È possibile suddividere un corpo o un pannello in più parti ed usare più spline (anche combinazioni di spline diverse) in un unico modello. Ogni box o elemento aerodinamico solitamente può fare riferimento ad un'unica spline mentre questa limitazione non esiste per gli elementi strutturali; ogni grado di libertà aerodinamico non legato ad una spline viene considerato fisso e non trasmette forze alla struttura.

I problemi aeroelastici vengono risolti utilizzando i gradi di libertà strutturali, che vengono resi le variabili indipendenti mentre quelli aerodinamici le variabili dipendenti. Vengono richieste due trasformazioni: l'interpolazione dalla deviazione strutturale $\{u_g\}$ a quella aerodinamica $\{u_k\}$ e la relazione tra le forze aerodinamiche e quelle che agiscono sulla struttura. Il passaggio da una deviazione all'altra viene fatto tramite una matrice di interpolazione $[G_{k,g}]$ tale per cui:

$$\{u_k\} = [G_{k,g}]\{u_g\} \quad (4.20)$$

La trasformazione tra i sistemi di forze invece deriva dalla necessità che essi siano strutturalmente equivalenti piuttosto che staticamente equivalenti, in quanto solo con l'equivalenza strutturale il modello si deforma allo stesso

modo con entrambi i sistemi. I lavori virtuali quindi devono coincidere, per cui la seconda relazione può essere espressa come:

$$\{\delta u_k\}^T \{F_k\} = \{\delta u_g\}^T \{F_g\} \quad (4.21)$$

Sostituendo la (4.20) nella (4.21) e riarrangiando i termini si trova:

$$\{\delta u_g\}^T \left([G_{k,g}]^T \{F_k\} - \{F_g\} \right) = 0 \quad (4.22)$$

Poiché lo spostamento virtuale è arbitrario, dall'equazione precedente è possibile ricavare la relazione tra i sistemi di forze:

$$\{F_g\} = [G_{k,g}]^T \{F_k\} \quad (4.23)$$

Le equazioni (4.20) e (4.23) sono necessarie per completare la formulazione di problemi aeroelastici in cui le griglie strutturale e aerodinamica non coincidono e devono quindi essere connesse tramite interpolazione. Si nota che è sufficiente conoscere $[G_{k,g}]$ per risolvere entrambe le equazioni, tuttavia Nastran permette anche di utilizzare due matrici di interpolazione separate per forze e spostamenti, usando lo stesso algoritmo di soluzione ma permettendo di indicare punti differenti per le spline: questo può tornare utile nel caso i nodi utili per identificare lo spostamento strutturale non siano adatti per gli spostamenti aerodinamici, o viceversa.

4.3.1 Spline lineare

La spline lineare viene indicata in Patran con le entry SPLINE2 o SPLINE5 (identiche matematicamente, cambia solamente il modo in cui viene dato l'input di dati): essa viene derivata dall'equazione per una trave di lunghezza infinita e richiede la definizione di un proprio sistema di riferimento con asse y

parallelo al proprio asse, come si può vedere in figura 4-11, e non necessariamente allineato al sistema aerodinamico. Questo tipo di spline può flettersi rispetto al proprio asse x e torcersi rispetto al proprio asse y .

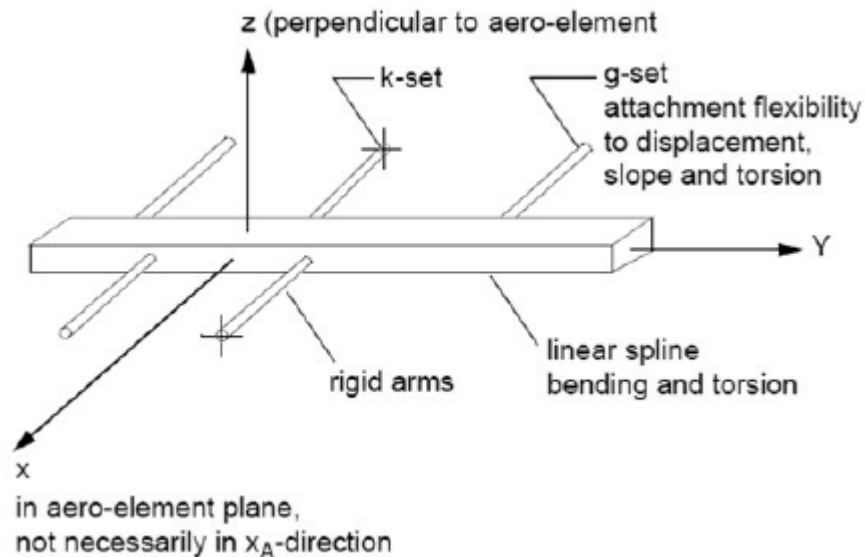


Figura 4-11: spline lineare. Tratta da [29].

L'accuratezza della spline lineare aumenta quando la regione di interpolazione diminuisce, quindi è consigliabile utilizzare più spline per ogni superficie; inoltre per evitare singolarità nella matrice di interpolazione occorre evitare di selezionare punti strutturali con la stessa proiezione sulla superficie aerodinamica.

4.3.2 Spline superficiale

Questa spline viene definita tramite le entry SPLINE1 o SPLINE4 (cambia solamente come viene fornito l'input) e viene usata per interpolare un insieme di box aerodinamiche trapezoidali su una griglia strutturale (in figura 4-12 un esempio di spline superficiale con il suo sistema di coordinate, parallelo al sistema aerodinamico).

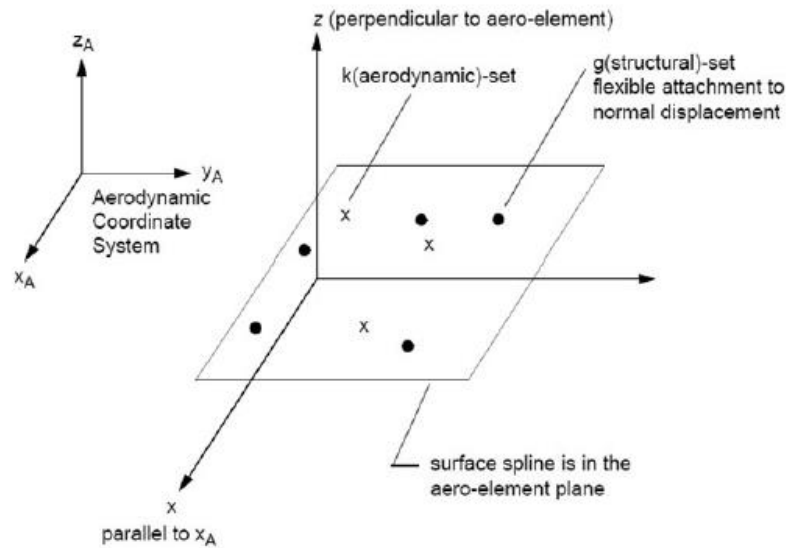


Figura 4-12: spline superficiale. Tratta da [29].

I quattro tipi possibili di spline superficiale utilizzabili in Flightloads sono i seguenti:

- Infinite Plate Spline, è il metodo classico basato sulla teoria della piastra infinita;
- Thin Plate Spline, permette di considerare maggiormente i punti al di fuori del piano della spline;
- Finite Plate Spline, usa un metodo per superfici finite con piastre quadrilaterali;
- Radial Interpolation Spline.

4.4 Analisi aeroelastica statica

Per effettuare un'analisi aeroelastica statica in MSC Nastran l'equazione (4.3) per il downwash viene implementata nel modo seguente:

$$\{w_j\} = [D_{j,k}]\{u_k\} + [D_{j,x}]\{u_x\} + \{w_j^g\} \quad (4.24)$$

$\{w_j\}$ è il vettore contenente i gradi di libertà aerodinamici (come l'angolo di attacco), $[D_{j,k}]$ è il termine $D_{j,k}^1$ definito in (4.3) ($D_{j,k}^2$ non viene utilizzato nelle analisi quasi-statiche) e $[D_{j,x}]$ e $\{u_x\}$ sono rispettivamente la matrice di differenziazione e il vettore degli spostamenti di eventuali punti aerodinamici aggiuntivi usati per descrivere la deflessione delle superfici di controllo o moti rigidi d'insieme.

Dall'equazione (4.2) si trovano le pressioni aerodinamiche teoriche:

$$\{p_j\} = \bar{q}[A_{j,j}]^{-1}\{w_j\} \quad (4.25)$$

L'equazione delle forze aerodinamiche (4.4) invece, tenendo conto anche delle precedenti, può essere riscritta come:

$$\{F_k\} = \bar{q}[W_{k,k}][S_{k,j}][A_{j,j}]^{-1}\{w_j\} + \bar{q}[S_{k,j}]\left\{\frac{p_j^{ex}}{\bar{q}}\right\} \quad (4.26)$$

I termini della (4.26) sono già stati definiti, ad esclusione di $[W_{k,k}]$ e $\left\{\frac{p_j^{ex}}{\bar{q}}\right\}$: la prima è una matrice di fattori di correzione empirici utilizzata per aggiustare i carichi aerodinamici e farli concordare con i dati sperimentali al variare dell'incidenza; il secondo è un vettore di coefficienti di pressione sperimentali definito per ogni box ad alcuni valori di riferimento dell'incidenza.

Le forze aerodinamiche vengono trasferite alla struttura con le matrici di interpolazione definite in (4.20) e (4.23); queste vengono ridotte al set di punti scelto per l'analisi strutturale (indicato con il pedice a) e utilizzate per formare la matrice dei coefficienti di influenza aerodinamici, $[Q_{a,a}]$, che fornisce le forze dovute alle deformazioni strutturali dei nodi:

$$[Q_{a,a}] = [G_{k,a}]^T [W_{k,k}] [S_{k,j}] [A_{j,j}]^{-1} [D_{j,k}] [G_{k,a}] \quad (4.27)$$

Si ha poi una seconda matrice che fornisce le forze ai nodi strutturali dovute ad una deflessione unitaria dei punti aerodinamici extra (indicati con il pedice x)¹²:

$$[Q_{a,x}] = [G_{k,a}]^T [W_{k,k}] [S_{k,j}] [A_{j,j}]^{-1} [D_{j,x}] \quad (4.28)$$

Definendo poi la matrice di rigidezza strutturale $[K_{a,a}]$, la matrice di massa strutturale $[M_{a,a}]$ e il vettore $\{P_a\}$ dei carichi applicati (che possono essere ad esempio meccanici, termici, inerziali o anche pressioni aerodinamiche fornite in input dall'utente), è possibile scrivere le equazioni complete del moto per i punti nel set a in forma matriciale:

$$[K_{a,a} - \bar{q}Q_{a,a}]\{u_a\} + [M_{a,a}]\{\ddot{u}_a\} = \bar{q}[Q_{a,x}]\{u_x\} + \{P_a\} \quad (4.29)$$

La (4.29) fornisce il set di equazioni base utilizzato nelle analisi di aeroelasticità statica. È possibile includere i moti rigidi per rappresentare le caratteristiche di volo libero di un aeromobile: per fare ciò è necessario che l'utente identifichi un numero di gradi di libertà di riferimento pari al numero di moti rigidi definiti. L'equazione (4.29) viene quindi riscritta per distinguere i gradi di libertà supportati (indicati con il pedice r) da quelli non supportati (indicati con il pedice l):

$$\begin{bmatrix} K_{l,l}^a & K_{l,r}^a \\ K_{r,l}^a & K_{r,r}^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_l \\ u_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{l,l} & M_{l,r} \\ M_{r,l} & M_{r,r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_l \\ \ddot{u}_r \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{l,x}^a \\ K_{r,x}^a \end{bmatrix} \{u_x\} + \begin{Bmatrix} P_l \\ P_r \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

¹² Sono quindi stati definiti quattro set di punti finora: il set g comprende tutti i nodi strutturali, il set a include solo quelli utilizzati nell'interpolazione, il set k riunisce tutti i punti aerodinamici delle superfici portanti mentre il set x viene usato per i punti aerodinamici aggiuntivi usati per migliorare la definizione delle superfici di controllo.

Nella (4.30) sono state utilizzate le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned} [K_{a,a}^a] &= [K_{a,a} - \bar{q}Q_{a,a}] \\ [K_{a,x}^a] &= -\bar{q}[Q_{a,x}] \end{aligned} \quad (4.31)$$

L'analisi aeroelastica statica viene identificata in Nastran tramite il modulo SOL 144: nel caso di analisi lineare i carichi aerodinamici vengono calcolati per mezzo di uno dei metodi definiti precedentemente e vengono poi trasferiti con le spline al modello strutturale, dove con un metodo agli elementi finiti si calcolano gli spostamenti; questi vengono poi ritrasferiti alla mesh aerodinamica e i carichi aerodinamici vengono calcolati nuovamente. Il processo continua finché non viene soddisfatto l'equilibrio della (4.29).

Si possono ricavare le velocità di divergenza risolvendo un problema agli autovalori che può essere estratto dall'equazione (4.30):

$$[K_{l,l}^a]\{u_l\} = 0 \quad (4.32)$$

Ricordando la sostituzione fatta in (4.31), si arriva a:

$$[K_{l,l} - \lambda Q_{l,l}]\{u_l\} = 0 \quad (4.33)$$

Gli autovalori $\lambda = \bar{q}_D$ sono le pressioni dinamiche di divergenza: solo i valori positivi hanno un significato fisico e il valore più basso di \bar{q}_D è la pressione di divergenza critica.

4.5 Analisi di flutter

L'equazione del moto per un'analisi aeroelastica di flutter richiede l'utilizzo di coordinate modali $\{u_m\} = \{\bar{u}_m\}e^{pt}$:

$$[\widehat{M}_{a,a}]\{\ddot{u}_m\} + [\widehat{D}_{a,a}]\{\dot{u}_m\} + [\widehat{K}_{a,a}]\{u_m\} = \{Q_A\} \quad (4.34)$$

Dove $[\widehat{M}_{a,a}]$, $[\widehat{D}_{a,a}]$ e $[\widehat{K}_{a,a}]$ sono rispettivamente le matrici modali di massa, smorzamento e rigidità, mentre $\{Q_A\}$ è la matrice delle forze aerodinamiche generalizzate. In Nastran al posto di $\{Q_A\}$ viene derivata una matrice dei coefficienti di forza generalizzati $[Q_{h,h}]$ tale per cui:

$$\{Q_A\} = \bar{q}[Q_{h,h}]\{u_m\} \quad (4.35)$$

$[Q_{h,h}]$ è una matrice complessa funzione del numero di Mach e della frequenza ridotta del moto armonico; poiché il suo calcolo è molto dispendioso dal punto di vista computazionale, Nastran la ricava per certe coppie di valori (M, k) definiti dall'utente, per poi interpolarla a tutti i valori di k usati nell'analisi.

Il modulo per l'analisi flutter di Nastran è la SOL 145 e sono disponibili tre metodi: K, KE e PK. Nel metodo K vengono valutati autovalori e autovettori del sistema per i valori di frequenza ridotta definiti dall'utente. La matrice $\{Q_A\}$ viene espressa come "massa aerodinamica" e viene aggiunta a $[\widehat{M}_{a,a}]$; l'equazione base che viene implementata in Nastran è la seguente:

$$\left[\left[\left(\frac{2k}{\bar{c}} \right)^2 [\widehat{M}_{a,a}] + \left(\frac{\rho}{2} \right) [Q_{h,h}] \right] \left(\frac{-v^2}{1 + ig} \right) + \left(\frac{2k}{\bar{c}} \right) [\widehat{D}_{a,a}] \frac{iv}{\sqrt{1 + ig}} + [\widehat{K}_{a,a}] \right] \{u_m\} = 0 \quad (4.36)$$

Dove \bar{c} è la corda di riferimento e ρ la densità dell'aria. L'autovalore risulta essere:

$$p = \frac{iv}{\sqrt{1+ig}} \quad (4.37)$$

Il solutore stima quindi la velocità v , lo smorzamento g e la frequenza alle frequenze ridotte richieste:

$$\begin{aligned}
 p^2 &= a + ib \\
 v &= \sqrt{\frac{-(a^2 + b^2)}{a}} \\
 g &= -\frac{b}{a} \\
 f &= \frac{kv}{\pi c}
 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Dalla (4.38) si nota che non è possibile stimare questi valori quando p^2 ha parte reale positiva.

Il metodo KE è simile al precedente ma in esso il termine di smorzamento modale $[\widehat{D}_{a,a}]$ viene rimosso dalla (4.36) e la soluzione fornisce soltanto gli autovalori e non gli autovettori del sistema; facendo queste semplificazioni è possibile però ottenere un metodo più efficiente in termini di costo computazionale, che permette l'individuazione di un maggior numero di punti nella curva di flutter.

Il metodo PK invece calcola gli autovalori e gli autovettori per i valori di velocità definiti dall'utente, anziché per le frequenze ridotte. Le parti reale e immaginaria di $[Q_{h,h}]$ vengono separate e aggiunte rispettivamente a $[\widehat{D}_{a,a}]$ e $[\widehat{K}_{a,a}]$ come smorzamento e rigidità modali aerodinamici, risultando in un'equazione nell'autovalore complesso p e nella frequenza ridotta k . L'equazione fondamentale per l'analisi di flutter con questo metodo è la seguente:

$$\left[[\hat{M}_{a,a}]p^2 + \left([\hat{D}_{a,a}] - \frac{1}{4} \frac{\rho \bar{c} v [Q_{h,h}]^I}{k} \right) p + \right. \\ \left. + \left([\hat{K}_{h,h}] - \bar{q} [Q_{h,h}]^R \right) \right] \{u_m\} = 0 \quad (4.39)$$

Gli apici I, R indicano le parti immaginaria e reale di $[Q_{h,h}]$. Tutte le matrici presenti in questa equazione sono reali e calcolando gli autovalori $p = \omega(\gamma \pm i)$ (con $\gamma = \frac{g}{2}$) è possibile stimare frequenza e smorzamento del sistema:

$$\omega = \text{Im}(p) \\ g = 2\gamma = 2 \frac{\text{Re}(p)}{\text{Im}(p)} \quad (4.40)$$

La soluzione procede analizzando un modo di flutter e una velocità alla volta: a velocità nulla i modi di flutter coincidono con quelli strutturali, quindi il valore iniziale di k viene calcolato utilizzando la frequenza naturale (in radianti) del modo strutturale corrispondente; si assume $p_1 = \pm \omega i$ completamente immaginaria. Si risolve poi l'equazione (4.39) finché p non converge, a questo punto si incrementa la velocità e si ripete il procedimento. Dopo aver coperto tutto l'intervallo di velocità richiesto si passa al modo di flutter successivo: al termine di questo processo tutti i valori di ω e g vengono tabulati e riportati in grafico in funzione della velocità, permettendo di individuare i punti di flutter quando il coefficiente di smorzamento critico diventa positivo.

Con questo metodo si ottengono risultati solo alle velocità di interesse dell'utente e le stime di smorzamento risultano più accurate rispetto ai metodi precedenti.

Capitolo 5

Esempi di Analisi Aeroelastiche

In questo capitolo verranno eseguite delle analisi di aeroelasticità statica (SOL 144) e flutter (SOL 145) utilizzando i metodi sopra descritti. Verrà usato MSC Patran con il pacchetto Flightloads come pre- e post- processore mentre il motore di calcolo utilizzato sarà MSC Nastran. L'analisi statica sarà eseguita per ottenere i valori di divergenza su due differenti semiali incastrate alla base: la prima per analizzare gli effetti sui risultati di una variazione di velocità; la seconda per valutare gli effetti dell'angolo di freccia e confrontare la pressione dinamica di divergenza ottenuta con quella di un equivalente modello beam-like. Infine il metodo PK verrà applicato al modello semplificato di un aereo da turismo per ricavare le condizioni di flutter.

5.1 Variazione della velocità

Questa analisi è stata effettuata su un'ala rastremata con un vincolo di incastro alla base: grazie alla possibilità presente in Nastran di definire dei piani di simmetria il modello è stato ridotto ad una semiala, riducendo i tempi di calcolo necessari.

5.1.1 Modello strutturale

Il modello completo viene riportato in figura 5-1: si tratta di un'ala rastremata di lunghezza 18 m con un angolo di freccia di 32° e profilo NACA 23015; la corda alla base è parallela all'asse x ed è lunga 6 m , mentre all'estremità libera si è ridotta a 1.5 m .

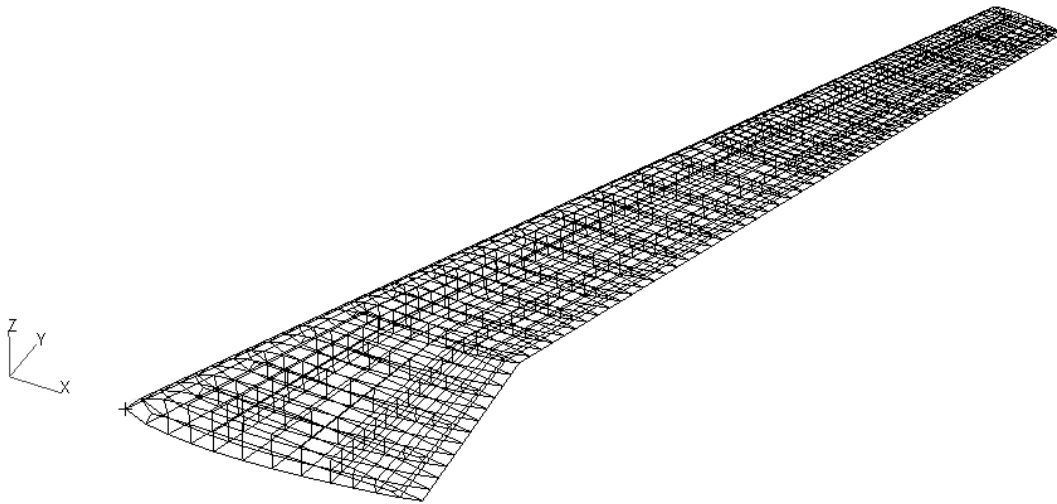


Figura 5-1: modello strutturale della semi-ala con mesh applicata.

All'interno dell'ala vengono poste 19 centine e due file di longheroni al 30% e al 70% della corda, in modo da irrigidire la struttura.

Per le superfici create è stata utilizzata una proprietà di tipo *shell*, indicata nel file output di Patran con il codice PSHELL; per la sua definizione vengono richiesti all'utente le proprietà meccaniche del materiale utilizzato e di un sistema di riferimento per orientarlo (in questo caso alluminio AA 7075, che essendo isotropo è indipendente dall'orientamento), oltre che lo spessore delle superfici. Questi valori vengono riportati nella tabella 3:

Tabella 3: valori utilizzati nel modello.

Proprietà del materiale	$E = 70 \text{ GPa}$
	$\nu = 0.33$
	$G = 26.3 \text{ GPa}$
	$\rho = 2810 \text{ kg/m}^3$
Spessori	$t_{skin} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
	$t_{rib} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
	$t_{spar} = 1.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

La struttura è stata infine meshata con una griglia di elementi quadrangolari (indicati con la entry CQUAD4 nel file bdf) e vincolata con un incastro su tutti i nodi appartenenti alla sezione di base.

5.1.2 Modello aerodinamico

L'ala è stata suddivisa nelle sei regioni indicate in figura 5-2, ognuna rappresentata da una superficie portante realizzata indicandone i vertici nell'ordine richiesto dal programma. Poiché si è utilizzato il metodo del reticolo di vortici, ogni superficie è stata suddivisa in elementi quadrangolari con due lati paralleli all'asse x : al fine di migliorare l'accuratezza dell'analisi è consigliabile mantenere un rapporto d'aspetto degli elementi inferiore a tre in un moto subsonico, per cui dove necessario essi sono stati modificati per rispettare questo requisito.

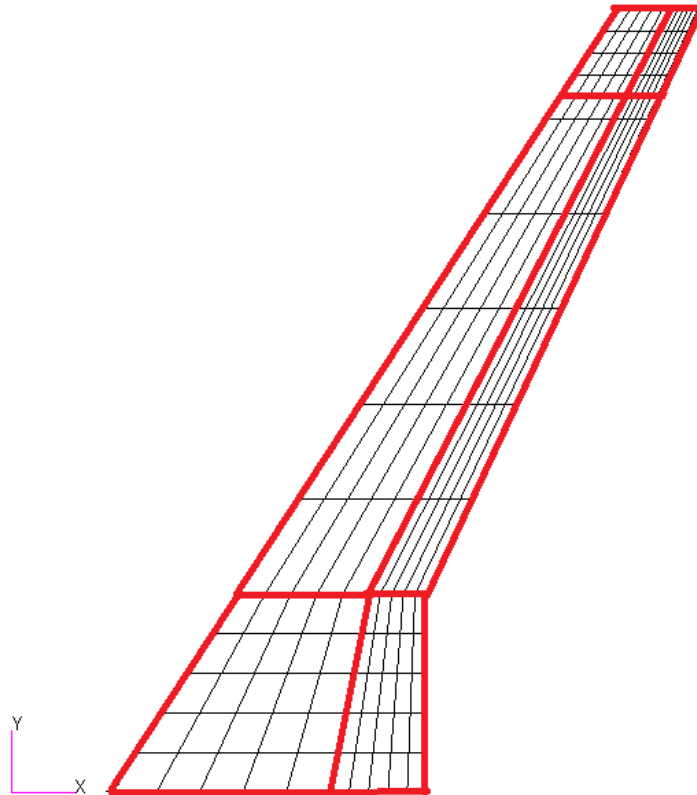


Figura 5-2: suddivisione in superfici aerodinamiche del modello.

Nel file di output in formato *.bdf* una superficie portante viene indicata mediante due entry, PAERO e CAERO¹³, aventi la seguente struttura:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PAERO1	PID	B1	B2	B3	B4	B5	B6		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CAERO1	EID	PID	CP	NSPAN	NCHORD	LSPAN	LCHORD	IGID	
	X1	Y1	Z1	X12	X4	Y4	Z4	Z43	

¹³ Poiché si utilizza il DLM, queste entry saranno PAERO1 e CAERO1, come indicato nella tabella 2.

PAERO1 permette di associare dei corpi (definiti tramite Slender Body Theory) alla superficie CAERO1: l'entry PID viene sostituita da un numero identificativo della proprietà mentre gli ingressi Bi dai numeri identificativi dei corpi; qualora non fossero presenti, le colonne rimarranno vuote.

La superficie portante viene identificata da un numero contenuto nella cella EID. In colonna tre viene richiamata la PAERO1 associata, mentre nei campi successivi vengono definite le caratteristiche geometriche della superficie:

- CP indica il sistema di coordinate da utilizzare per identificare i punti 1 e 4;
- NSPAN e NCHORD indicano il numero di box lungo lo span e la corda della superficie;
- LSPAN e LCHORD richiamano due entry di tipo AEFACCT contenenti una lista di punti per la suddivisione della superficie lungo lo span e lungo la corda. Questi field vengono usati solo se i due precedenti sono nulli o lasciati vuoti;
- IGID indica il gruppo di interferenza a cui appartiene la superficie: elementi appartenenti a gruppi differenti non sono accoppiati;
- X1, Y1, Z1, X4, Y4 e Z4 sono le posizioni dei punti 1 e 4 secondo il sistema di coordinate definito in CP;
- X12 e X43 indicano la lunghezza delle due corde di estremità.

Una volta definiti tutti questi fattori, è stata creata una spline superficiale (quindi con entry SPLINE4) per ogni superficie, associandola ai nodi strutturali della relativa regione dell'ala e facendo attenzione affinché non si sovrapponevano nel piano medio. Nel bdf gli elementi aerodinamici della

spline vengono raggruppati in una entry AELIST, mentre quelli strutturali in una di tipo SET1. L'entry SPLINE4 è invece così definita:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
SPLINE4	EID	CAERO	AELIST		SETG	DZ	METH	USAGE	
	NELEM	MELEM	FTYPE	RCORE					

La definizione dei campi è la seguente:

- EID è il numero di identificazione della spline;
- CAERO contiene il primo elemento della superficie portante a cui la spline si riferisce;
- AELIST e SETG richiamano le entry relative;
- DZ è un parametro proprio delle spline superficiali che indica la flessibilità dell'interpolazione: se $DZ = 0$ (valore consigliato e adottato nell'analisi) la spline passerà attraverso tutti i punti nella configurazione deformata, mentre se $DZ > 0$ essa viene collegata a tali punti attraverso delle molle di rigidità proporzionale al valore definito nel campo, producendo un'interpolazione più regolare che non necessariamente passerà attraverso alcuno dei punti;
- METH è il metodo di splining utilizzato: IPS per la piastra infinita, TPS per quella sottile, FPS per la piastra finita e RIS se si ricorre ad un'interpolazione lineare. Nell'analisi effettuata in questo campo è stato scelto il metodo IPS;
- Nel campo USAGE viene riportata la decisione dell'utente riguardo alla necessità di utilizzare o meno spline diverse per forze e spostamenti, come spiegato nel paragrafo 4.3: se la spline è utilizzata per trasferire solo forze o spostamenti, qui comparirà la scritta FORCE o DISP.

Nell'applicazione di un'analisi SOL 144 per la semiala è sufficiente utilizzare una spline per entrambe le interpolazioni, quindi in questo campo si troverà l'entry BOTH;

- NELEM e MELEM compaiono solo utilizzando il metodo FPS;
- FTYPE e RCORE compaiono solo utilizzando il metodo RIS.

Infine è stata definita una pressione di riferimento $\rho_{ref} = 1.226 \text{ kg/m}^3$, pari a quella a livello del mare.

5.1.3 Analisi e risultati

Sono stati creati più subcase variando al loro interno il numero di Mach e la pressione dinamica $q = \frac{1}{2} \rho v^2$, come riportato nella tabella 4:

Tabella 4: pressione dinamica al variare del numero di Mach.

Mach	Pressione dinamica $[\text{kg}/\text{m}^2]$
0.3	6521
0.4	11593
0.5	18114
0.6	26084
0.7	35503.3
0.8	46371.6
0.9	58689

In ogni subcase è stato imposto un angolo di attacco di 5°. Tutti questi parametri vengono riportati nel bdf nella entry TRIM: è possibile aggiungere

anche eventuali inclinazioni delle superfici di controllo e velocità di roll, pitch e yaw, ma non sono stati utilizzati in questa analisi.

Inviando a Nastran il bdf ottenuto con l'analisi precedente non sarebbe possibile valutare la pressione dinamica di divergenza del modello: è necessario infatti aggiungere manualmente la richiesta di questo valore, inserendo nella Case Control di ogni subcase le seguenti righe:

DIVERG = n

CMETHOD = n

Questi comandi richiamano l'utilizzo di una entry DIVERG e una EIGC identificate dal numero n e contenenti i parametri di divergenza e quelli per l'estrazione degli autovalori complessi necessari all'analisi. Le due entry si presentano in questo modo:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
DIVERG	SID	NROOT	M1	M2	M3	M4	-etc.-		

SID è un numero identificativo del set (corrispondente al valore inserito al posto di "n" nel comando DIVERG precedente), NROOT indica il numero di radici di divergenza richieste in output (per questa analisi ne vengono richieste cinque) e Mi sono i numeri di Mach a cui viene studiata la divergenza.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EIGC	SID	METHOD	NORM	G	C	E	ND0		

Anche qui SID ha lo stesso valore inserito in CMETHOD; per gli altri campi invece:

- METHOD contiene il metodo utilizzato per l'estrazione degli autovalori (qui è stato utilizzato il metodo di Lanczos complesso, indicato con CLAN);
- NORM è il metodo di normalizzazione degli autovettori. È stato lasciato il valore di default, cioè MAX, per cui la parte reale della componente con valore assoluto maggiore viene normalizzata ad uno mentre la sua parte immaginaria viene posta nulla;
- G, C non vengono utilizzati quando NORM=MAX, mentre E è il criterio di convergenza (già definito con la scelta di CLAN);
- NDO è il numero di radici desiderato (posto uguale a cinque in questa analisi).

A questo punto è possibile utilizzare il solutore Nastran ed ottenere in un file .f06 le forze e pressioni sugli elementi aerodinamici, oltre alle radici richieste della pressione dinamica di divergenza: di queste ultime va considerata solo quella minore.

In figura 5-3 viene riportato l'andamento della pressione dinamica di divergenza (linea tratteggiata) e della pressione aerodinamica (linea continua) al variare del numero di Mach. Si può notare che la pressione aerodinamica supera quella di divergenza intorno a $M = 0.6$: l'intersezione tra le due curve avviene a $M = 0.624$, dando una velocità di divergenza $v_{div} = 214.5 \text{ m/s}$.

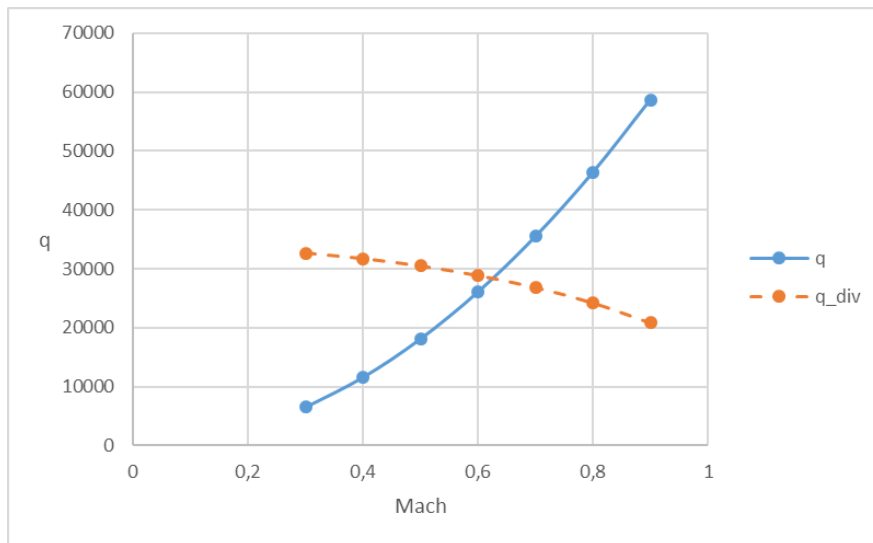


Figura 5-3: confronto tra la pressione dinamica di divergenza e quella ambientale.

In figura 5-4 invece viene riportata la deformazione dell'ala causata dal flusso d'aria incontrato.

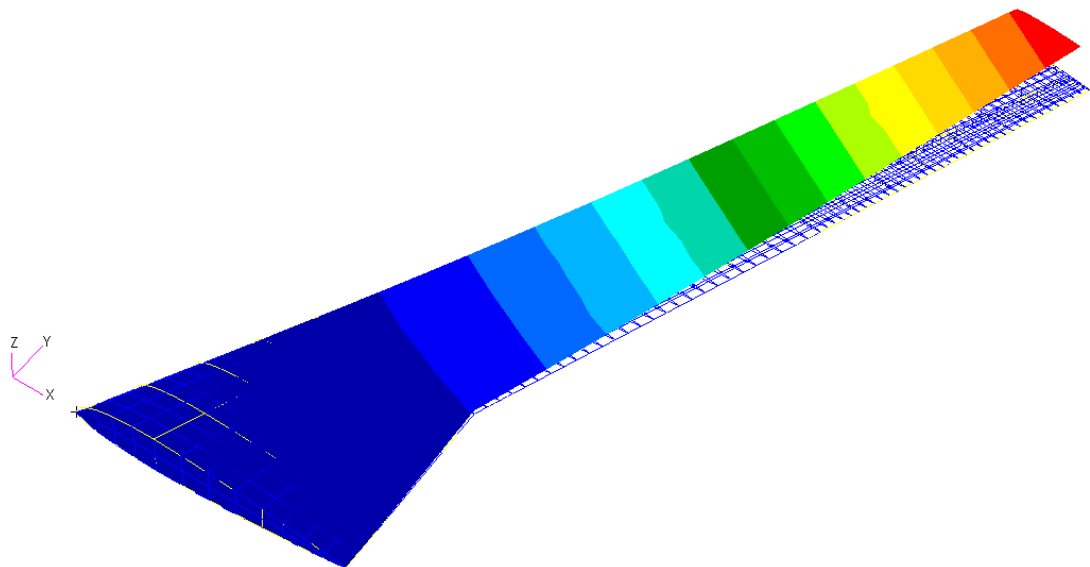


Figura 5-4: deformazione dell'ala dovuta alla corrente d'aria a Mach 0.5.

5.2 Effetto dell'angolo di freccia e rappresentazione beam-like

In questa seconda analisi un'ala non rastremata con profilo NACA 0012 viene sottoposta ad una SOL 144 in modo da valutare la variazione della pressione dinamica di divergenza a differenti angoli di freccia. Viene inoltre illustrata una tecnica per realizzare un modello semplificato della struttura utilizzando elementi monodimensionali.

5.2.1 Modello strutturale

È stato scelto un profilo NACA 0012 con corda $c = 1.575 \text{ m}$ in quanto la simmetria permette di semplificare l'individuazione del centro di taglio, utile per la realizzazione del modello beam-like. Lo span completo dell'ala è di 12 m ma si è scelto nuovamente di modellare solamente la semi-ala in modo da ridurre i tempi di analisi. In figura 5-5 si può vedere il modello ultimato: l'origine del sistema di riferimento si trova al quarto di corda della sezione di base, in modo che sia sovrapposta all'asse elastico della struttura. L'interno della semi-ala è irrigidito da due file di longheroni e quindici centine con le stesse proprietà del modello precedente.

Ulteriori versioni di questa struttura sono state realizzate aggiungendo un angolo di freccia $\Lambda = \pm 10^\circ$: la lunghezza della semi-ala è stata aumentata in modo da mantenere la stessa proiezione lungo l'asse y .

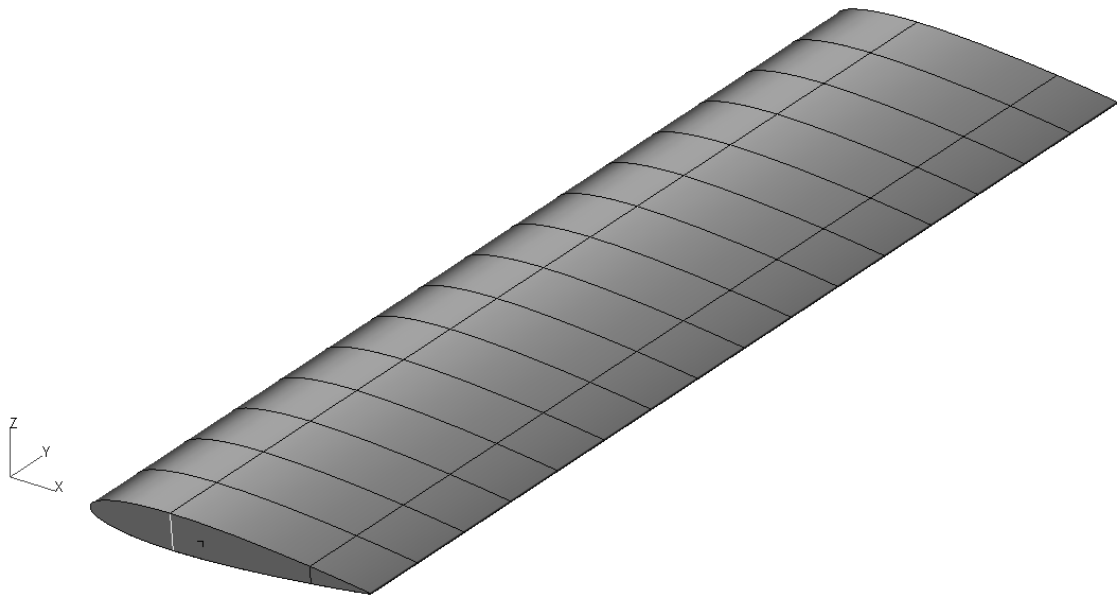


Figura 5-5: modello strutturale della semi-ala dritta.

5.2.2 Modello beam-like

Il processo di realizzazione di un modello beam-like si basa sull'estrazione delle proprietà di rigidità della struttura principale e sulla loro applicazione ad un set di travi, posizionate lungo l'asse elastico della semi-ala in modo da evitare accoppiamenti tra le forze di taglio e i momenti torsionali. L'asse elastico è il luogo dei centri di taglio del modello e grazie alla simmetria del profilo scelto è possibile stabilire che essi si trovano all'incirca al quarto di corda di ogni sezione, quindi lungo l'asse y .

Grazie al tool di Patran "Mass Properties" si calcolano la massa e il tensore di inerzia del modello tridimensionale: delle masse concentrate vengono poi posizionate sui nodi delle travi in modo da far combaciare queste proprietà. Le masse concentrate in Patran sono elementi definiti con il comando CONM2:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CONM2	EID	G	CID	M	X1	X2	X3		
	I11	I21	I22	I31	I32	I33			

Come al solito il campo EID contiene un numero intero identificativo dell'elemento, mentre G indica il punto in cui viene applicata la massa e CID il sistema di riferimento utilizzato. M è il valore di massa concentrata, le entry Xi indicano l'offset tra il punto e il baricentro nel sistema di coordinate utilizzato e Iij sono le componenti del tensore di inerzia misurate rispetto al centro di massa.

A causa delle approssimazioni introdotte occorre verificare che il modello ridotto reagisca alle sollecitazioni come farebbe quello completo: per questo motivo vengono effettuate una serie di analisi statiche lineari (indicate in Nastran come SOL 101) e modali (SOL 103) in modo da poter effettuare delle correzioni se necessario.

Le SOL 101 consistono nell'applicare un carico unitario alla sommità libera della trave e nel punto equivalente dell'ala, valutando l'errore negli spostamenti che esso causa: viene effettuata una prima analisi per la flessione utilizzando un carico diretto lungo l'asse z, poi una per la torsione con un momento lungo l'asse y. L'analisi modale invece consente di confrontare i modi di vibrare delle due strutture, di particolare interesse per il caso in esame sono il primo modo flessionale ($f_{b,w} = 4.97 \text{ Hz}$) e il primo torsionale ($f_{t,w} = 34.66 \text{ Hz}$), individuati grazie al modello dell'ala.

Una volta eseguite le analisi occorre stabilire un metodo che permetta di migliorare i risultati ottenuti, tuttavia introdurre delle modifiche per rendere più attendibili i risultati statici porta ad un errore maggiore nei risultati dinamici; poiché, come visto in §4.4, la velocità di divergenza viene calcolata

risolvendo un problema agli autovalori, in questo risulta più importante che i valori della SOL 103 combacino.

Siccome le proprietà di massa sono già equivalenti, si è deciso di applicare un metodo iterativo sulle proprietà di rigidità. Dall'f06 vengono estratti il primo modo flessionale e il primo torsionale della trave, rispettivamente $f_{b,b}$ e $f_{t,b}$, che vengono confrontati con quelli del modello completo per trovare l'errore ε :

$$\begin{aligned}\varepsilon_b &= 1 - \frac{f_{b,b}}{f_{b,w}} \\ \varepsilon_t &= 1 - \frac{f_{t,b}}{f_{t,w}}\end{aligned}\quad (5.1)$$

Dagli errori è possibile ricavare i nuovi valori dei moduli di Young e di taglio:

$$\begin{aligned}E_{new} &= (1 + \varepsilon_b)^2 E_{old} \\ G_{new} &= (1 + \varepsilon_t)^2 G_{old}\end{aligned}\quad (5.2)$$

I valori iniziali di $E = 70 \text{ GPa}$ e $G = 26.3 \text{ GPa}$ sono quelli utilizzati anche per il modello tridimensionale, mentre dopo un paio di interazioni si è giunti ai nuovi valori $E_{new} = 42.7 \text{ GPa}$ e $G_{new} = 20.92 \text{ GPa}$. Gli errori sulle misurazioni effettuate sono riportati in tabella 5 (il pedice $_3$ indica una traslazione lungo z mentre $_5$ indica una rotazione attorno all'asse y).

Tabella 5: confronto tra i risultati delle SOL 101 e 103 per i due modelli.

	Modello 3D	Modello 1D	Errore %
$u_3 [m]$	8.8e-6	9.5e-6	7.95%
$u_5 [m]$	5.64e-7	7e-7	24.1%
$f_{l,b} [Hz]$	4.970	4.779	3.84%
$f_{l,t} [Hz]$	34.66	34.2586	1.16%

5.2.3 Modello aerodinamico

Per il modello aerodinamico la semi-ala è stata suddivisa in quattro superfici portanti con lo stesso numero di elementi, creando la configurazione riportata in figura 5-6. Le superfici sono le stesse sia per la struttura tridimensionale che per la trave e anche i parametri del moto sono gli stessi (angolo d'attacco di 5° per generare portanza, densità dell'aria $\rho = 1.226 \text{ kg/m}^3$); cambia il metodo di interpolazione, poiché nel modello monodimensionale non è possibile utilizzare le spline superficiali e si ricorre a quelle lineari, utilizzandone una per ogni superficie. Nel bdf ogni spline viene identificata dalla entry SPLINE5:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
SPLINE5	SID	CAERO	AELIST		SETG	DZ	DTOR	CID	
	DTHX	DTHY		USAGE	METH		FTYPE	RCORE	

I campi sono simili a quelli della spline superficiale usata nei modelli tridimensionali. Le novità principali sono:

- DTOR è il rapporto $\frac{EI}{GJ}$ per la flessione nel piano zy . Per questa analisi è stato lasciato il valore di default, 1.0;
- CID è il sistema di coordinate che definisce l'asse y e i piani xy e yz della spline;
- DTHX e DTHY indicano la flessibilità di eventuali elementi attaccati alla trave ad una rotazione attorno a x e a y rispettivamente;
- USAGE è lo stesso campo definito precedentemente, anche qui è stato impostato su BOTH;
- METH è il metodo utilizzato, a differenza della spline superficiale questa volta è possibile scegliere tra BEAM (il valore di default) o RIS (per una

spline ad interpolazione radiale). Per questa analisi questo campo è stato impostato su BEAM.

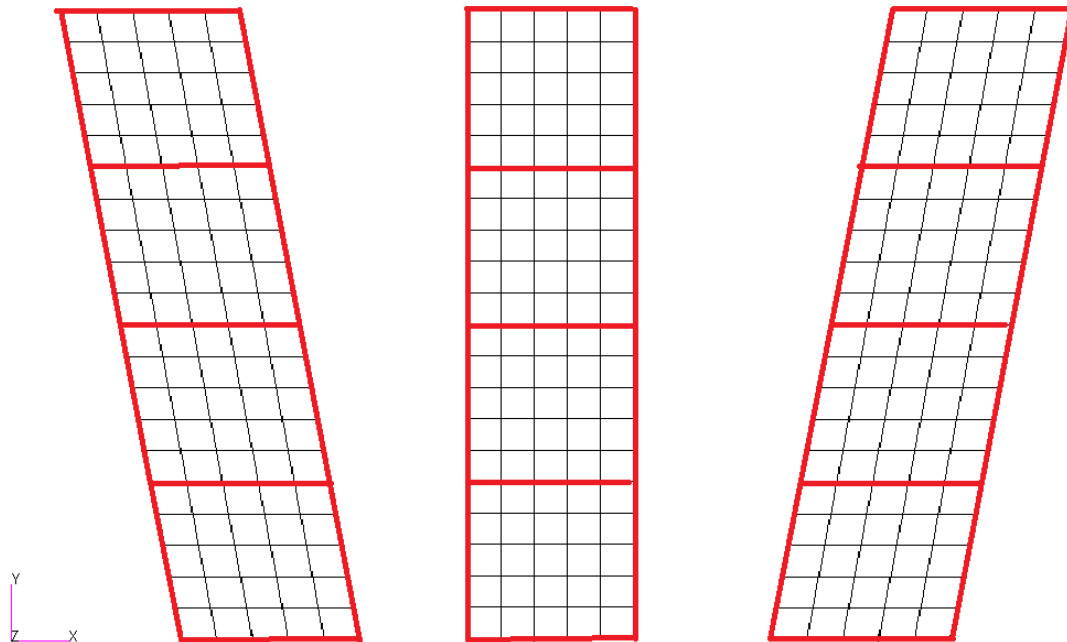


Figura 5-6: suddivisione del modello aerodinamico in superfici portanti per le tre configurazioni della semi-ala. Poiché il flusso segue la direzione x , la semi-ala a sinistra è sweepforward e quella destra è sweepback.

5.2.4 Analisi e risultati

L'analisi è una SOL 144 analoga a quella svolta nel modello precedente: ne viene eseguita una per ogni modello a Mach 0.5, confrontando gli effetti dell'angolo di freccia sulla pressione dinamica di divergenza; vengono inoltre paragonati il modello beam-like e quello con $\Lambda = 0^\circ$. I risultati vengono riportati nella tabella 6.

Tabella 6: confronto tra i risultati dei vari modelli.

Modello	$q_{div} \left[\frac{kg}{m_s^2} \right]$	$v_{div} \left[\frac{m}{s} \right]$
Ala dritta ($\Lambda = 0^\circ$)	$5.18 \cdot 10^4$	290.69
Ala sweepback ($\Lambda = 10^\circ$)	$6.45 \cdot 10^4$	324.37
Ala sweepforward ($\Lambda = -10^\circ$)	$4.48 \cdot 10^4$	270.34
Beam-like ($\Lambda = 0^\circ$)	$4.63 \cdot 10^4$	274.82

Come ci si aspettava da quanto detto in §1.3 un angolo di freccia negativo porta a raggiungere prima la condizione di instabilità, mentre un angolo di freccia positivo la ritarda. Il modello beam-like permette di ridurre i tempi di calcolo e risulta inoltre abbastanza accurato, essendoci un errore del 5.5% sulla velocità di divergenza. Nelle figure 5-7 e 5-8 vengono riportate le deformazioni per l'ala dritta e per la trave causate dalla corrente d'aria: la deformazione massima della trave è $2.61 \cdot 10^{-2} m$, mentre per il modello tridimensionale si ottiene $2.66 \cdot 10^{-2} m$.

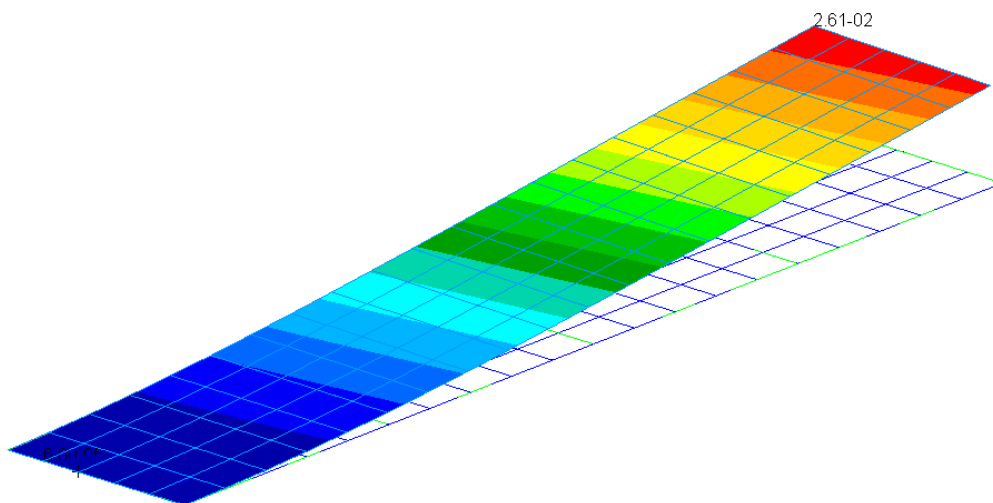


Figura 5-7: configurazione deformata della mesh aerodinamica della trave.

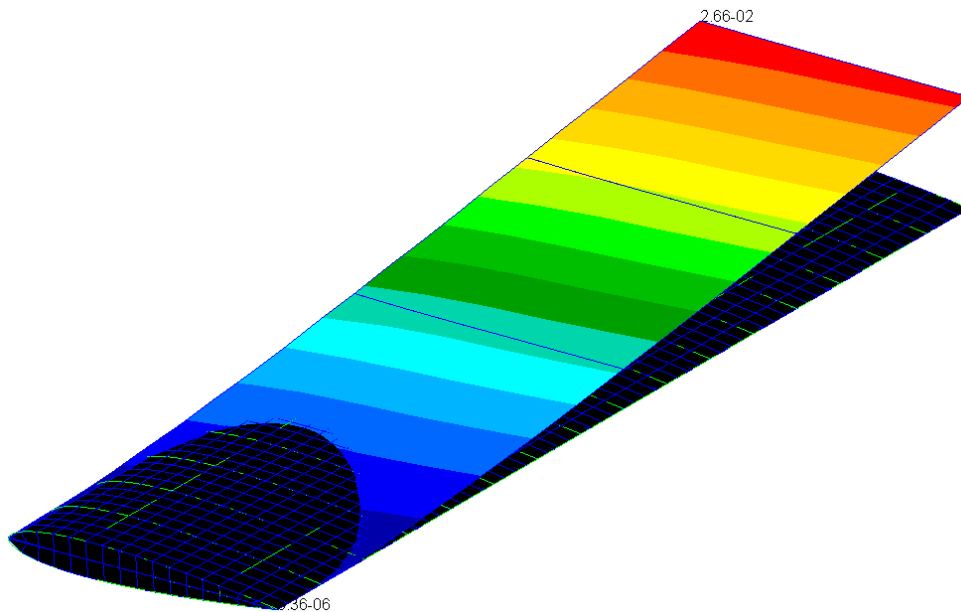


Figura 5-8: configurazione deformata della mesh aerodinamica dell'ala dritta.

5.3 Analisi di flutter

Per questa analisi si utilizza un modello completo di un aereo leggero da turismo, in modo da dimostrare l'applicazione della Slender Body Theory alla mesh aerodinamica: per ridurre i tempi di calcolo solamente l'ala e la coda sono modellate tridimensionalmente, mentre la fusoliera è stata realizzata con elementi trave.

5.3.1 Modello strutturale

Le caratteristiche dell'ala e del piano di coda sono riportate nella tabella 7:

Tabella 7: caratteristiche geometriche del modello.

	Ala	Coda Orizzontale	Coda Verticale
Profilo	NACA 65 ₂ – 415	NACA 0012	NACA 0010
Span	9 m	3 m	1.121 m
c_r	1.7 m	0.762 m	1 m
c_t	1.575 m	0.762 m	0.4547 m

Sia per l'ala che per il piano di coda verticale sono state create due file di longheroni interni, mentre per il piano di coda orizzontale ne è stata posta solamente una al 50% della corda; ognuna di queste strutture è stata ulteriormente irrigidita per mezzo di centine.

La fusoliera è costituita da una trave con sezione tubolare di diametro variabile in modo da riprodurre una geometria più realistica; la decisione di rappresentare in questo modo il corpo del velivolo è basata sulla riduzione del costo computazionale totale dell'analisi e sul fatto che le superfici non portanti in Flightloads vengono simulate creando una linea di doublet circondata da un corpo di interferenza: modellando anche la fusoliera con elementi monodimensionali migliora l'interazione tra i due modelli tramite spline lineari.

Dopo aver creato la geometria e assegnato le proprietà (shell alle superfici e beam alla trave), è stata applicata alla struttura una mesh di elementi di tipo CQUAD4 e CBEAM. Per vincolare l'ala e la coda alla fusoliera si è ricorso ad elementi di tipo RBE2, che permettono di definire un corpo rigido indicando un nodo indipendente e un numero arbitrario di nodi dipendenti da esso. In

figura 5-9 si può vedere il modello finale. Non sono stati posti ulteriori vincoli, lasciando la struttura in condizioni di volo libero.

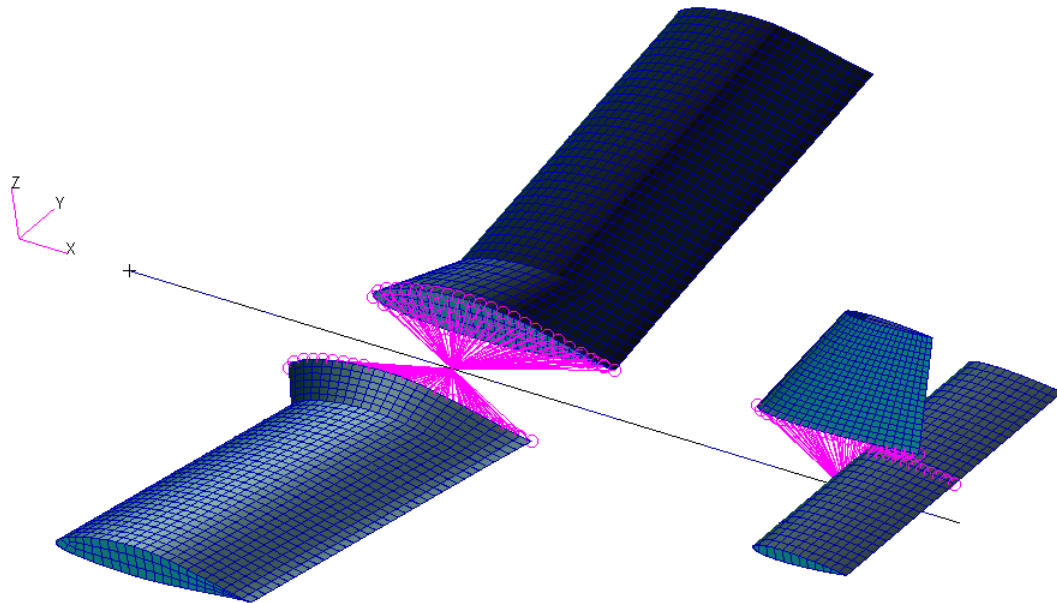


Figura 5-9: modello strutturale completo con connessioni tra i profili e la fusoliera.

5.3.2 Modello aerodinamico

L'analisi aeroelastica viene eseguita in regime subsonico, per cui si ricorre nuovamente al DLM. Le superfici portanti sono state generate come in precedenza, suddividendo ogni semiala in tre parti e mantenendo un'unica superficie per il piano di coda verticale. Un discorso a parte va fatto per la coda orizzontale, che come si può vedere in figura 5-10 è stata suddivisa in due superfici non più collegate tra loro come nel modello strutturale: poiché la Slender Body Theory in Flightloads richiede un corpo di interferenza a diametro costante, creare una superficie portante continua avrebbe portato alla compenetrazione indesiderata degli elementi aerodinamici; il compromesso scelto per evitare questa situazione è stato di modellare con

minore precisione la coda e mantenere un corpo di interferenza dello spessore corretto. Un altro requisito del Metodo del Reticolo di Vortici è che gli elementi di una superficie aerodinamica non terminino a cavallo degli elementi di un'altra superficie: nonostante qui sembri presentarsi una situazione del genere, in realtà la superficie della coda si trova ad una quota superiore all'ala, per cui l'esecuzione della SOL 145 non porterà errori.

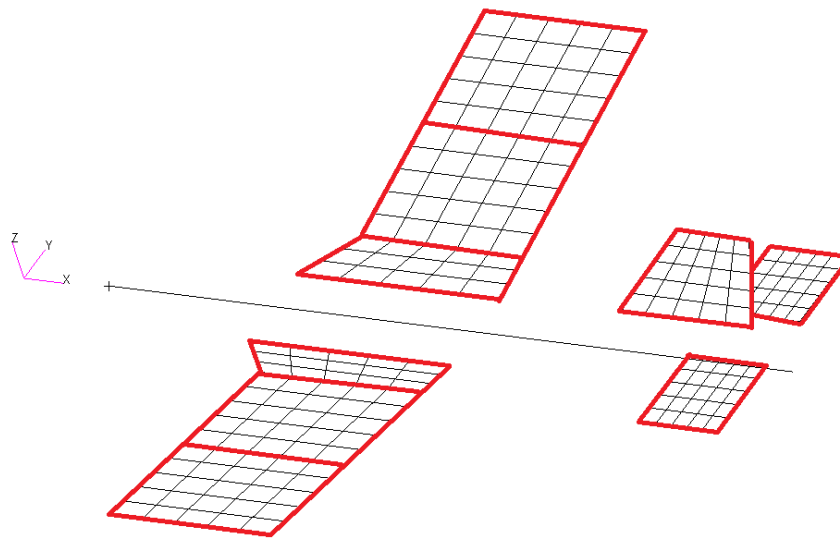


Figura 5-10: modello aerodinamico con suddivisione delle superfici portanti.

Nel realizzare la rappresentazione aerodinamica della fusoliera sono stati creati tre slender body: uno per la parte di trave anteriore all'ala, una intermedia di lunghezza coincidente con la corda alla base dell'ala e una posteriore ad essa. Per ogni corpo è stato necessario definire due proprietà, riportate nel bdf tramite due entry AEFAC: la semi-ampiezza dello slender body e una serie di angoli theta per identificare dei punti su di esso e sul corpo di interferenza. I requisiti per questi punti sono che non cadano nell'intersezione tra corpo e superficie portante e che vi siano possibilmente due punti equidistanti da tale intersezione: per questo motivo è stata scelta la sequenza di angoli 38.6° , 45° , 135° , 141.4° , 218.6° , 321.4° . Il primo slender body ha diametro variabile, partendo da 0.2 m ed aumentando linearmente

fino a 0.914 m, equivalente alla distanza tra le due semi-ali; il secondo slender body mantiene è cilindrico, mentre il terzo riparte dal diametro di 0.914 m per scendere fino a 0.652 m. Il corpo di interferenza assume automaticamente il valore di ampiezza massima per tutta la sua lunghezza: nella figura 5-11 si possono vedere entrambi i corpi.

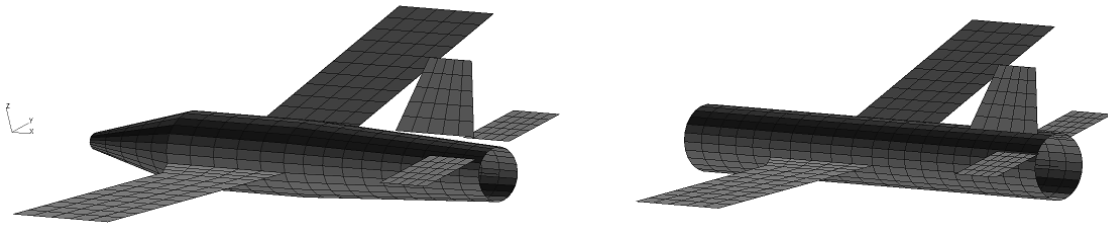


Figura 5-11: modello aerodinamico con slender body (a sinistra) e con corpo di interferenza (a destra).

Nel bdf le proprietà dei corpi aerodinamici vengono definite nella entry PAERO2:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PAERO2	PID	ORIENT	WIDTH	AR	LRSB	LRIB	LTH1	LTH2	
	THI1	THN2	THI2	THN2	THI3	THN3			

I campi vengono così definiti:

- PID è il numero del primo elemento aerodinamico del corpo, utilizzato anche come numero identificativo della proprietà;
- ORIENT indica il tipo di moto permesso al corpo. È possibile scegliere tra Z, Y e ZY, a seconda che vi sia solamente traslazione rispetto ad uno degli assi o ad entrambi. Per questa analisi il corpo è libero di muoversi solamente lungo l'asse z;

- WIDTH contiene la semi-ampiezza dello slender body e del tubo di interferenza (in questo caso 0.457);
- AR è il rapporto d'aspetto del tubo di interferenza;
- LRSB e LRIB richiamano due entry AEFACT contenenti una lista di semi-ampiezze dello slender body e del corpo di interferenza. In questa analisi LRSB richiama la lista definita precedentemente, mentre il campo LRIB è lasciato vuoto in quanto il tubo di interferenza è a spessore costante e viene utilizzato il valore WIDTH;
- LTH1 richiama la entry AEFACT contenente la lista di angoli theta definita precedentemente. Il campo LTH2 permette di definire anche una seconda serie di angoli, ma in questo caso rimane inutilizzato;
- THli e THNi mostrano il primo e l'ultimo elemento del corpo ad utilizzare LTH1; i restanti elementi utilizzano LTH2 quando disponibile.

Questa proprietà è seguita da una CAERO2, che definisce la geometria del corpo:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CAERO2	EID	PID	CP	NSB	NINT	LSB	LINT	IGID	
	X1	Y1	Z1	X12					

- EID è il numero del primo elemento aerodinamico del corpo, utilizzato anche come numero identificativo della entry;

- PID richiama la proprietà PAERO2 associata. Normalmente i campi 2 e 3 coincidono;
- CP è il sistema di coordinate per identificare il primo punto del corpo;
- NSB, NINT, LSB e LINT indicano il numero di elementi dello slender body e del tubo di interferenza. Se i primi due campi contengono un valore diverso da zero, allora i corpi vengono suddivisi in elementi di eguale lunghezza e i campi seguenti sono inutilizzati; se invece NSB e NINT sono nulli o lasciati vuoti, allora in LSB e LINT vengono richiamate due entry AEFACCT contenenti una lista di punti per la suddivisione dei corpi. Per l'analisi effettuata i due slender body più corti contengono cinque elementi mentre quello più lungo ne contiene il doppio;
- IGID è l'identificativo del gruppo di interferenza: se degli elementi aerodinamici appartengono a gruppi differenti, allora essi sono considerati disaccoppiati;
- X1, Y1 e Z1 sono le coordinate del primo punto del corpo mentre X12 è la sua lunghezza in direzione \hat{x} .

I metodi disponibili per l'analisi di flutter richiedono la definizione di coppie di valori (M, k) , che vengono inseriti nel bdf tramite le entry MKAERO1 o MKAERO2: la differenza tra le due è che mentre nella prima vengono elencati prima tutti i Mach e poi tutte le frequenze ridotte da utilizzare, nella seconda i valori vengono riportati a coppie (M_1, k_1, M_2, k_2) , fino all'esaurimento dei dati). Per questo modello è stata lasciata l'opzione di default scelta da Patran, cioè MKAERO2. È possibile definire più Mach in una singola entry, ma poiché Nastran effettua l'analisi utilizzando solamente il valore di velocità più basso tra quelli indicati si è preferito creare più MKAERO2, ognuna con Mach costante. Qui sotto viene riportato come esempio il set (M, k) per $M = 0.5$:

MKAERO2	.5	7.997334	.5	20.50012	.5	33.00291	.5	45.50569
MKAERO2	.5	58.00848	.5	70.51127	.5	83.01406	.5	95.51685
MKAERO2	.5	108.0195	.5	120.5224				

Le frequenze ridotte possono essere inserite manualmente oppure essere calcolate dal programma basandosi sui valori di frequenza e velocità forniti dall'utente. In particolare, per questa analisi i valori di k sopra esposti sono stati calcolati inserendo una velocità minima di 10 m/s e massima di 50 m/s , mentre per le frequenze è stata lanciata un'analisi modale (SOL 103) e sono state prese quelle corrispondenti alla prima flessione e alla prima torsione dell'ala, cioè $f_F = f_{min} = 27.67 \text{ Hz}$ e $f_T = f_{max} = 83.19 \text{ Hz}$. La configurazione del modello corrispondente ai modi di vibrare citati è riportata nelle figure 5-12 e 5-13.

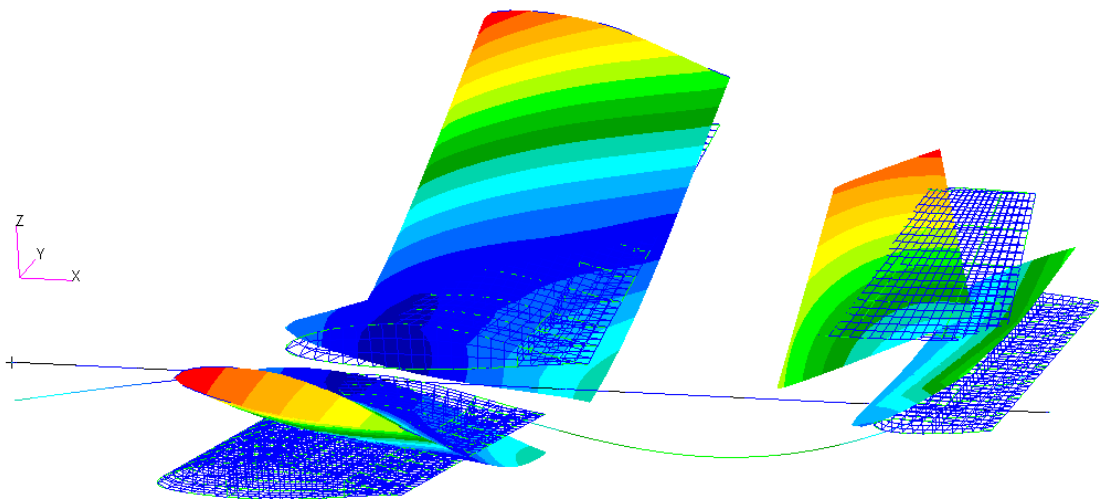


Figura 5-12: primo modo flessionale, corrispondente ad una frequenza $f_F = 27.67 \text{ Hz}$.

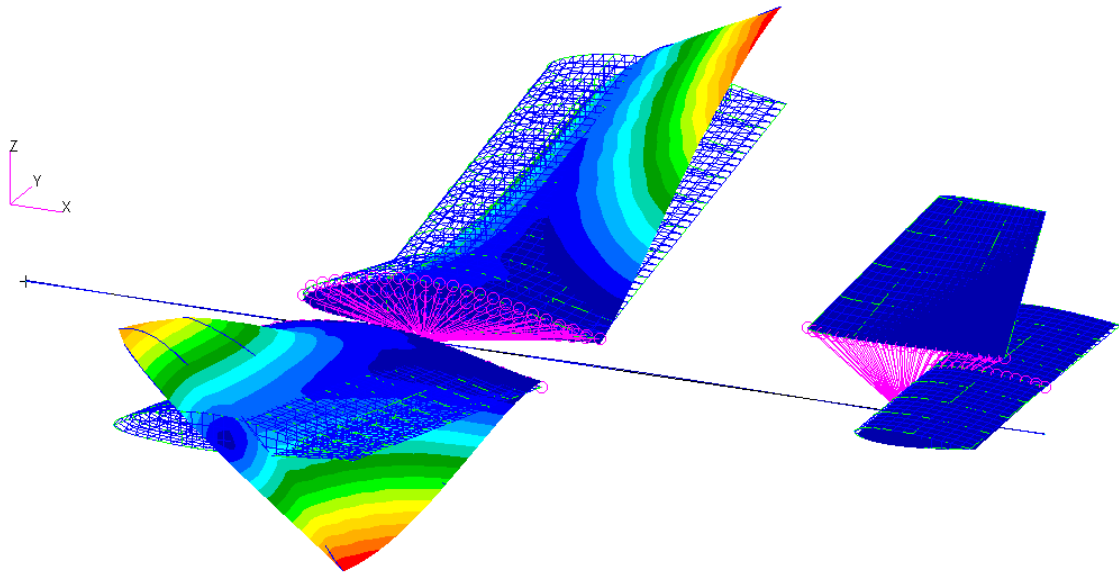


Figura 5-13: primo modo torsionale, corrispondente ad una frequenza $f_T = 83.19$ Hz.

5.3.3 Analisi e risultati

Sono stati creati due subcase, ciascuno con assegnato un set (M, k) analogo a quello presentato nel paragrafo precedente e un set di velocità ridotte di undici valori nell'intervallo 10:50 m/s . Sono poi stati definiti due rapporti di densità: uno unitario per il primo subcase (per simulare l'analisi al livello del mare) e uno pari a 0.62 per il secondo (per simulare un'analisi a circa 4400 m , posta essere la quota operativa dell'aereo modellato). Nel bdf vi sarà una entry FLFACT per ognuno dei parametri definiti finora, contenente tutti i valori assegnati. La entry FLUTTER invece definisce l'analisi da effettuare:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
FLUTTER	SID	METHOD	DENS	MACH	RFREQ/ VEL	IMETH	NVALUE/ OMAX	EPS	

Ogni campo ha il seguente significato:

- SID è l'identificativo dell'entry FLUTTER;

- METHOD è il metodo utilizzato, in questo caso PK;
- DENS richiama la FLFACT contenente il rapporto di densità;
- MACH richiama la FLFACT contenente il numero di Mach;
- RFREQ/VEL richiama una FLFACT diversa a seconda del metodo utilizzato: i metodi K e KE richiedono in input una tabella con i valori di frequenza ridotta da utilizzare nell'analisi, mentre il metodo PK utilizza il set di velocità definito precedentemente;
- IMETH è il metodo di interpolazione della matrice aerodinamica. Viene utilizzata un'interpolazione lineare per cui questo campo richiede il valore L nel caso di metodo K o KE mentre viene lasciato vuoto nel caso di metodo PK;
- NVALUE/OMAX viene lasciato vuoto;
- EPS è il parametro di convergenza per la frequenza ridotta. Questo campo compare solo quando si seleziona il metodo PK e viene lasciato al suo valore di default 0.001.

L'f06 con i risultati di questa analisi contiene una lista dei modi di vibrare del sistema con le loro frequenze: per ogni modo viene poi riportato un riassunto degli smorzamenti e frequenze alle velocità ridotte indicate. In figura 5-14 si può vedere come appare il primo modo di vibrare, corrispondente ad una frequenza di 8.13 Hz, per Mach 0.5.

FLUTTER SUMMARY						
POINT =	1	CONFIGURATION = AEROSG2D	XY-SYMMETRY = ASYMMETRIC	XZ-SYMMETRY = ASYMMETRIC		
		MACH NUMBER = 0.5000	DENSITY RATIO = 1.0000E+00	METHOD = PK		
KFREQ	1./KFREQ	VELOCITY	DAMPING	FREQUENCY	COMPLEX	EIGENVALUE
11.7728	8.4941269E-02	1.000000E+01	-1.0492128E-04	8.1292455E+00	-2.6795612E-03	5.1077556E+01
8.4091	1.1891944E-01	1.400000E+01	-1.4820995E-04	8.1291318E+00	-3.7850480E-03	5.1076842E+01
6.5403	1.5289910E-01	1.800000E+01	-1.9032658E-04	8.1289894E+00	-4.8605551E-03	5.1075947E+01
5.3510	1.8688075E-01	2.200000E+01	-2.3148796E-04	8.1288123E+00	-5.9116046E-03	5.1074834E+01
4.5277	2.2086481E-01	2.600000E+01	-2.7160346E-04	8.1286011E+00	-6.9358707E-03	5.1073507E+01
3.9239	2.5485168E-01	3.000000E+01	-3.1056110E-04	8.1283566E+00	-7.9304836E-03	5.1071971E+01
3.4621	2.8884175E-01	3.400000E+01	-3.4824982E-04	8.1280794E+00	-8.8925991E-03	5.1070229E+01
3.0976	3.2283540E-01	3.800000E+01	-3.8456819E-04	8.1277705E+00	-9.8196195E-03	5.1068288E+01
2.8024	3.5683299E-01	4.200000E+01	-4.1942828E-04	8.1274307E+00	-1.0709294E-02	5.1066153E+01
2.5586	3.9083487E-01	4.600000E+01	-4.5275756E-04	8.1270609E+00	-1.1559767E-02	5.1063830E+01
2.3538	4.2484136E-01	5.000000E+01	-4.8449962E-04	8.1266621E+00	-1.2369596E-02	5.1061324E+01

Figura 5-14: risultati ottenuti con una SOL 145 per il primo modo di vibrare del sistema.

Per capire se si presenta un punto di flutter è necessario guardare i valori del coefficiente di smorzamento G (elencati in tabella nella colonna DAMPING): qualora essi passassero da negativi a positivi vorrebbe dire che l'oscillazione diventa divergente e il moto instabile, come spiegato in §2.3.

Utilizzando come esempio esplicativo l'analisi a Mach 0.5, in figura 5-15 viene riportata la variazione del coefficiente G in funzione della velocità ridotta V^{14} per il primo modo flessionale, il primo torsionale e per quello a cui effettivamente si presenta flutter.

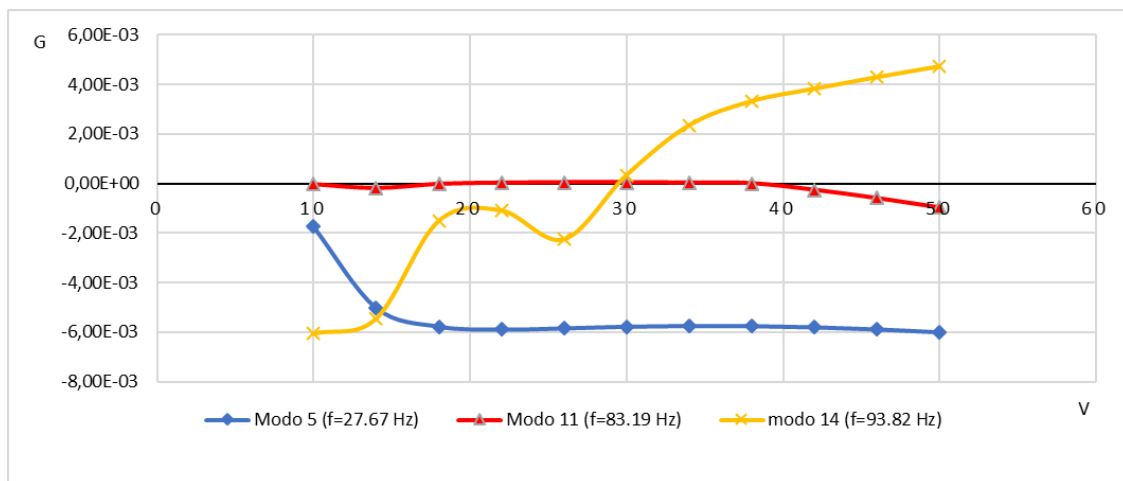


Figura 5-15: curve V-G per tre modi di vibrare, ottenute con il metodo p-k a Mach 0.5 slm.

¹⁴ Si ricorda che la velocità ridotta, introdotta in §2.3, è un parametro adimensionale definito dalla formula $V = \frac{v}{b\omega\theta}$.

Nell'intervallo di velocità considerato il modo corrispondente alla frequenza 93.82 Hz passa da una condizione di stabilità ad una di instabilità per $V_F = 29.5$, dimostrando la presenza di flutter. Risultati simili si ottengono a 4400 m di altitudine (figura 5-16).

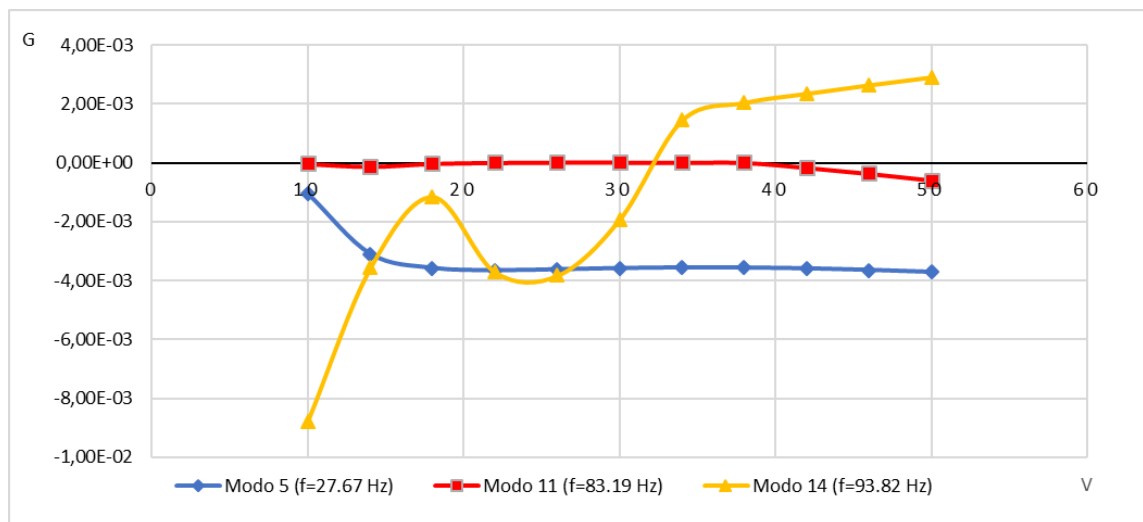


Figura 5-16: curve V-G per tre modi di vibrare, ottenute con il metodo p-k a Mach 0.5 e 4400 m slm.

Salendo di quota la velocità di flutter aumenta a $V_F = 32.3$ ritardando l'arrivo dell'instabilità, come visto anche in figura 2-4.

La SOL 145 viene eseguita per più valori di Mach, da 0.3 a 0.9, in modo da confrontare i risultati. Mentre per Mach 0.3 non si osserva flutter nell'intervallo di velocità considerato, da Mach 0.4 a 0.6 il coefficiente di smorzamento diventa positivo in corrispondenza del quattordicesimo modo di vibrare e in figura 5-17 si possono vedere le rispettive curve nello stesso grafico.

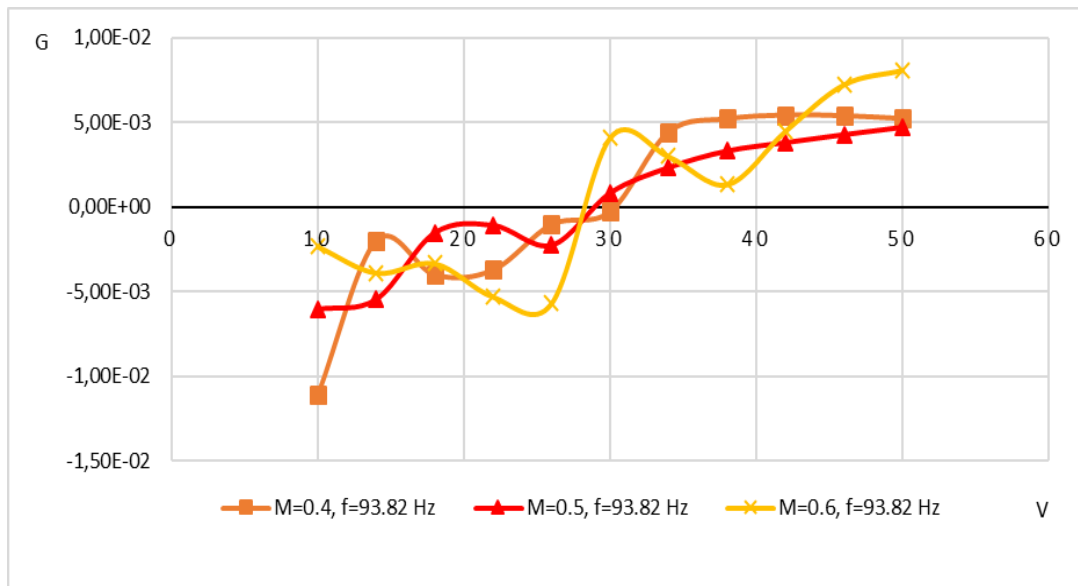


Figura 5-17: andamento del coefficiente di smorzamento del quattordicesimo modo di vibrare per tre diversi valori del numero di Mach.

Aumentando il numero di Mach a 0.7 è il quindicesimo modo ($f = 99.38 \text{ Hz}$) a presentare flutter, mentre da 0.8 a 0.9 è sufficiente una frequenza di 47.94 Hz (modo 8) per incorrere in oscillazioni instabili. Questi valori vengono riportati in figura 5-18.

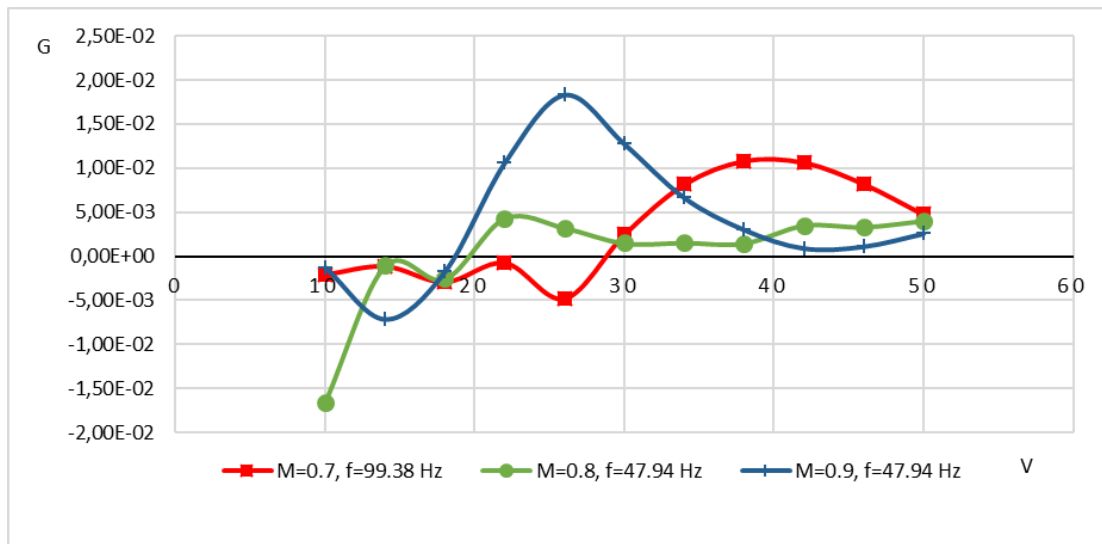


Figura 5-18: andamento del coefficiente di smorzamento a valori differenti del Mach. Da notare che a $M=0.7$ il flutter si presenta ad una frequenza differente rispetto alle altre curve.

Nelle figure precedenti si può notare che all'aumentare del numero di Mach la velocità ridotta a cui si raggiunge il punto di flutter cala. Grazie all'analisi modale svolta in precedenza è possibile identificare il tipo di flutter che si verifica: dalle figure 5-19 e 5-20 si vede infatti che per l'ottavo modo di vibrare l'ala incorre in una deformazione prevalentemente flessionale, mentre per il quattordicesimo si ha deformazione prevalentemente torsionale.

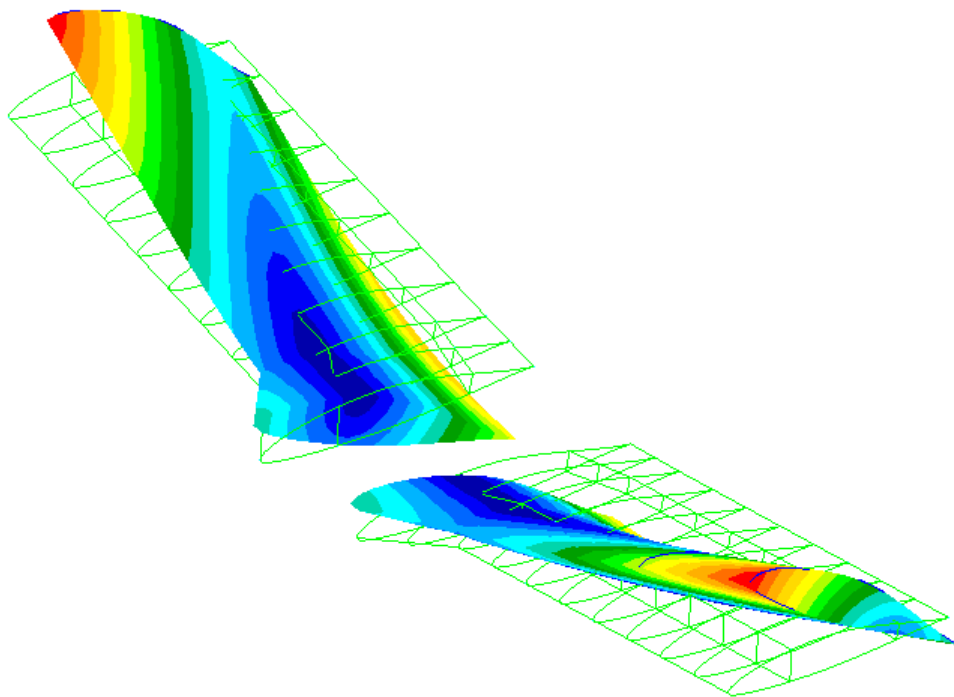


Figura 5-19: modo 8 ($f=47.84$ Hz) per l'ala.

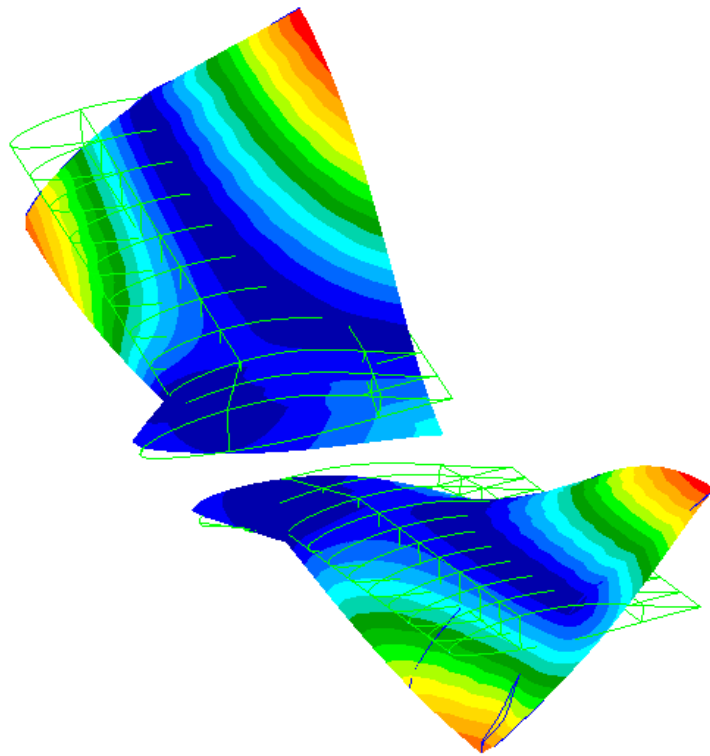


Figura 5-20: modo 14 ($f=93.82$) per l'ala.

Conclusioni

In aeronautica più che in altri campi dell'ingegneria i fenomeni aeroelastici costituiscono un problema ricorrente: infatti, divergenza e flutter sono più comuni nelle strutture flessibili e con alti rapporti d'aspetto, come ad esempio le ali negli aerei o le pale degli elicotteri. Si è visto come una velocità molto elevata può portare ad una torsione sempre maggiore della struttura oppure ad una oscillazione incontrollata, provocando il fallimento dei componenti, o anche ad una perdita di efficienza delle superfici di controllo fino all'inversione del loro funzionamento. Poiché aumentare la rigidità al fine di contrastare il fenomeno significherebbe anche massa maggiore, e quindi un aumento dei costi e dei consumi, diventa necessario studiare attentamente l'aeroelasticità in modo da predire accuratamente i limiti di volo. Sono state quindi presentate delle tecniche di modellazione sia strutturali che aerodinamiche e un metodo di interazione tra i due modelli basato su spline lineari o superficiali: grazie a metodi numerici come il reticolo di doublet, la Piston Theory o la teoria delle strisce è possibile calcolare i carichi aerodinamici da trasferire alla struttura, dove con un'analisi agli elementi finiti vengono calcolati gli spostamenti da applicare alla mesh aerodinamica per calcolare la sua nuova configurazione deformata. Così facendo diventa possibile studiare la risposta del sistema già nelle fasi preliminari di design dei velivoli, in modo da poter ottimizzare la struttura e proteggerla dall'insorgenza di fenomeni aeroelastici incontrollati.

Appendice

Teoria della Linea Portante di Prandtl

Questa teoria parte dalla premessa che un filamento di vortici di intensità Γ fisso nello spazio ed immerso in un flusso d'aria genererà una portanza $L' = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma$ (dal teorema di Kutta-Joukowski), per cui esso può essere utilizzato per determinare le proprietà aerodinamiche di un'ala finita. Tuttavia, per il teorema di Helmholtz¹⁵ un filamento vorticoso non può terminare nel flusso e quindi dovrà per forza continuare alle estremità dell'ala formando un ferro di cavallo, come mostrato in figura A-1 per un'ala di apertura alare b .

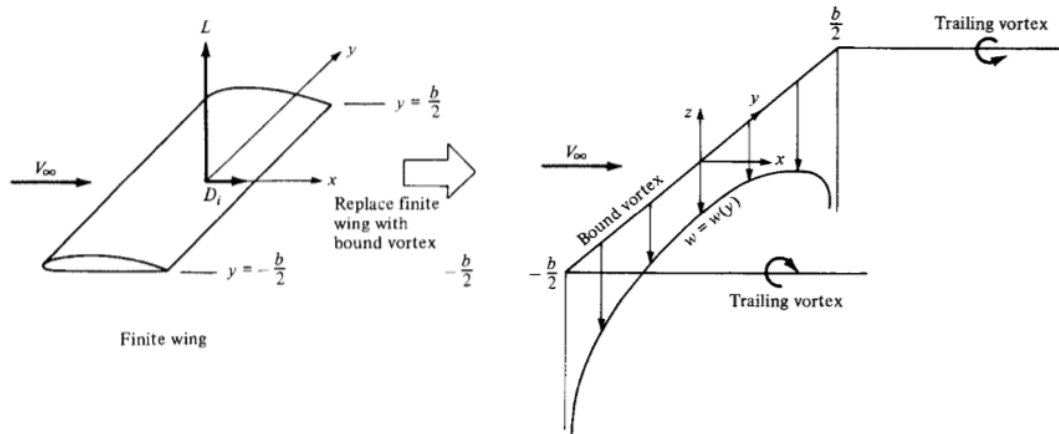


Figura A-1: passaggio da un'ala di lunghezza finita a un filamento di vortici disposto a ferro di cavallo. Tratta da [1].

Il sistema di riferimento è posizionato al centro del filamento e dalla disposizione degli assi risulta che i vortici di coda inducono una velocità

¹⁵ Il teorema di Helmholtz stabilisce che:

1. L'intensità di un filamento vorticoso è costante lungo la sua lunghezza;
2. Un filamento vorticoso non può terminare in un fluido, ma deve continuare fino ai suoi confini (che possono essere anche $\pm\infty$) o formare un percorso chiuso.

negativa sul segmento principale (che al contrario non induce alcuna velocità su sé stesso); la velocità indotta totale (o downwash) sarà:

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{b}{(b/2)^2 - y^2} \quad (\text{A.1})$$

Da questa formula si nota che quando y si avvicina a $\pm \frac{b}{2}$ il downwash tende ad infinito, per cui un singolo filamento a ferro di cavallo non simula realisticamente un'ala finita: per questo motivo si sovrappongono più filamenti, ognuno di lunghezza differente ma distribuiti lungo una stessa linea, chiamata Linea Portante. Un esempio con tre filamenti è riportato in figura A-2: dal punto A al punto F agisce il filamento di intensità $d\Gamma_1$, da B a E si aggiunge a questo un filamento $d\Gamma_2$ e nel tratto centrale C-D compare anche $d\Gamma_3$, per cui la circuitazione Γ varia lungo la linea. Rispetto al caso precedente, inoltre, con questa configurazione compaiono una serie di vortici di coda distribuiti per tutta l'apertura alare la cui intensità equivale alla variazione di circuitazione sulla linea portante.

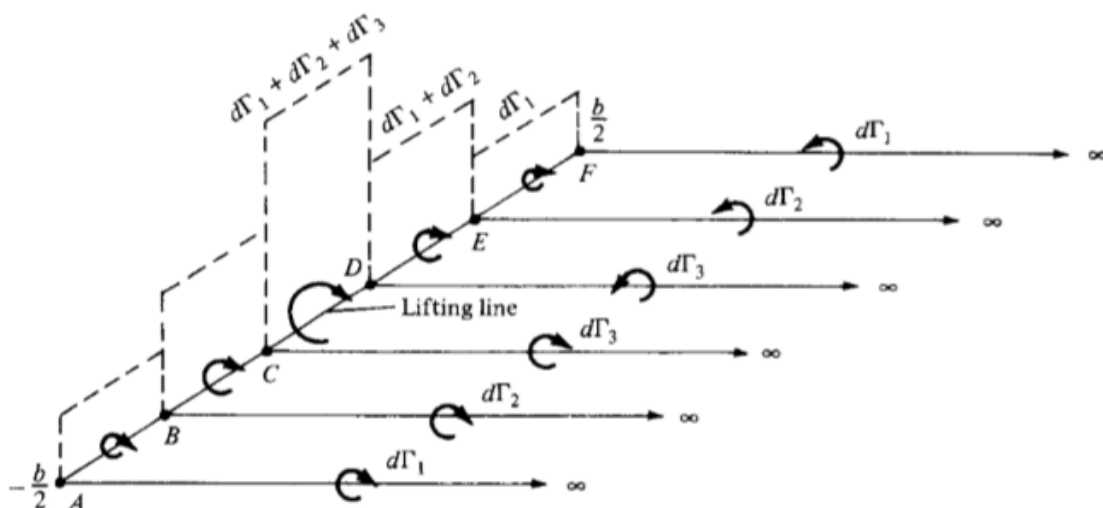


Figura A-2: sovrapposizione di tre filamenti di vortici a intensità diversa. Tratta da [1].

Nella teoria di Prandtl vengono sovrapposti una serie infinita di filamenti a ferro di cavallo, ognuno di intensità infinitesima $d\Gamma$, in modo da formare una distribuzione continua $\Gamma = \Gamma(y)$ che assume valore Γ_0 all'origine (figura A-3); a valle della linea portante i vortici di coda formeranno una superficie continua parallela alla direzione del flusso e di intensità totale nulla, essendo formata da coppie di vortici diretti in direzioni opposte.

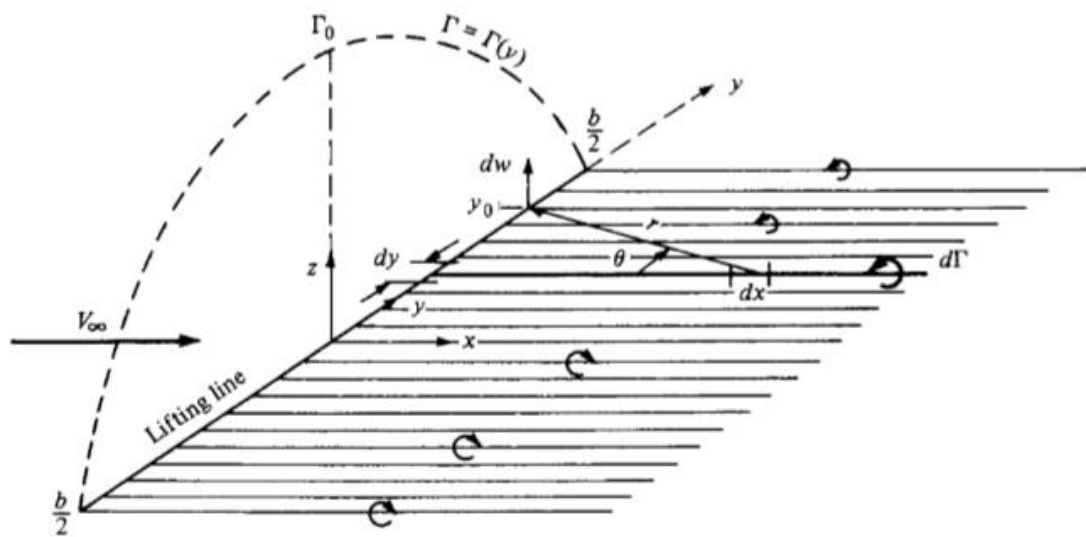


Figura A-3: linea portante di Prandtl. Tratta da [1].

Se si considera un elemento infinitesimo dy di linea portante centrato nel punto di coordinata y , si ha che la circuitazione al suo centro è $\Gamma(y)$ e la sua variazione è $d\Gamma = \left(\frac{d\Gamma}{dy}\right) dy$, equivalente all'intensità del vortice di coda che ha inizio in y . Suddividendo questo filamento di coda in segmenti dx , ognuno di questi indurrà una velocità in un generico punto y_0 della linea portante di valore e direzione dati dalla legge di Biot-Savart¹⁶, per cui la velocità indotta dall'intero filamento sarà:

¹⁶ Dato un filamento vorticoso di intensità Γ , la velocità che un segmento $d\mathbf{l}$ di linea induce in un generico punto P a distanza \mathbf{r} dal segmento è data dalla legge di Biot-Savart:

$$d\mathbf{w} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

$$dw = -\frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right) dy}{4\pi(y_0 - y)} \quad (\text{A.2})$$

Dalla figura A-3 si vede che $\frac{d\Gamma}{dy}$ è negativo mentre dw è positivo, quindi nella (A.2) è stato aggiunto un segno negativo per far tornare il risultato. Per ottenere il downwash totale in y_0 bisogna sommare i contributi di ogni singolo filamento, il che equivale ad integrare la (A.2) da $-\frac{b}{2}$ a $+\frac{b}{2}$:

$$w(y_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right) dy}{(y_0 - y)} \quad (\text{A.3})$$

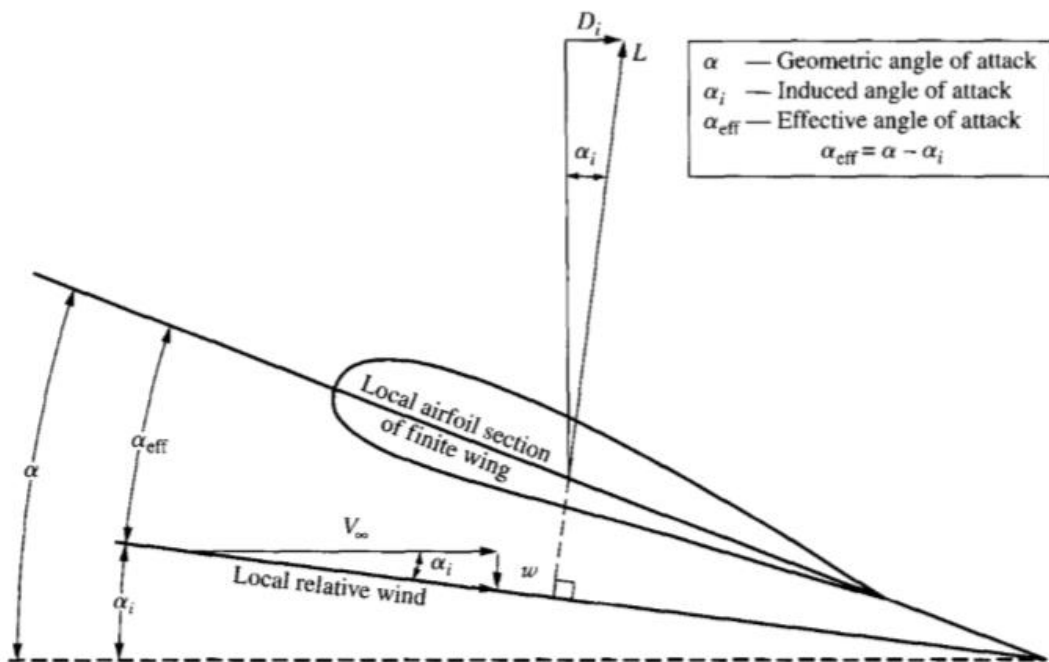


Figura 5-4: angolo di attacco geometrico, effettivo e indotto per un profilo alare. Tratta da [1].

In questo modo è possibile legare il downwash in un qualsiasi punto della linea all'intensità di tutti i vortici di coda, ma rimane da determinare il valore di Γ : per farlo torna utile definire gli angoli d'attacco del profilo. Si considera una sezione dell'ala come quella riportata in figura A-4: l'angolo d'attacco

geometrico α è dato dalla somma dell'angolo effettivo α_{eff} e di quello indotto dal downwash α_i ; poiché in generale $w \ll V_\infty$ si può utilizzare l'ipotesi di piccoli angoli e definire $\alpha_i(y) = -\frac{w(y)}{V_\infty}$. Allora in y_0 si avrà:

$$\alpha_i(y_0) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right) dy}{(y_0 - y)} \quad (A.4)$$

Poiché la circuitazione varia lungo la linea, lo farà anche α_i e di conseguenza l'angolo effettivo d'attacco varierà a sua volta. α_{eff} è legato al coefficiente di portanza per la sezione in y_0 dalla relazione:

$$c_l = a_0 [\alpha_{eff}(y_0) - \alpha_{L=0}] \quad (A.5)$$

Dove a_0 è la pendenza della curva di portanza per la sezione considerata e $\alpha_{L=0}$ è l'angolo di attacco a cui la portanza risulta nulla, considerato noto. Facendo l'ipotesi di profili sottili si può sostituire $a_0 = 2\pi$. Eguagliando l'equazione della portanza $L' = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c(y_0) c_l$ e il teorema di Kutta-Joukowski $L' = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y_0)$ si può ricavare c_l e quindi α_{eff} in funzione della circuitazione:

$$\alpha_{eff} = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0} \quad (A.6)$$

Sostituendo (A.4) e (A.6) nella formulazione dell'angolo geometrico si ottiene l'equazione fondamentale della teoria della linea portante di Prandtl, ossia:

$$\alpha(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0} + \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right) dy}{(y_0 - y)} \quad (A.7)$$

Per un'ala finita di geometria e angolo d'attacco noti e colpita da un flusso d'aria di velocità nota, l'unica incognita nella (A.7) è la circuitazione Γ : calcolata

questa si ottiene anche la portanza del profilo, e quindi la portanza totale integrando L' lungo tutta l'apertura alare.

La teoria classica di Prandtl risulta accurata per ali dritte con alto rapporto d'aspetto, mentre per ali d'altro tipo occorre utilizzare un modello più preciso, in cui una serie di linee portanti parallele viene disposta sul piano dell'ala lungo l'asse x , a formare una lamina di vortici (figura A-5): l'intensità del vortice per unità di lunghezza in direzione x viene indicata con γ e varia sia lungo y , come per la linea singola, che lungo x , visto che ogni filamento avrà intensità diversa; ogni linea ha inoltre due vortici di coda associati creando una lamina di intensità δ , anch'essa variabile in entrambe le direzioni. A valle dell'ala non ci sono più linee portanti, per cui l'intensità dei vortici di coda è $\delta_w(y)$ corrispondente al valore assunto nel piano di coda.

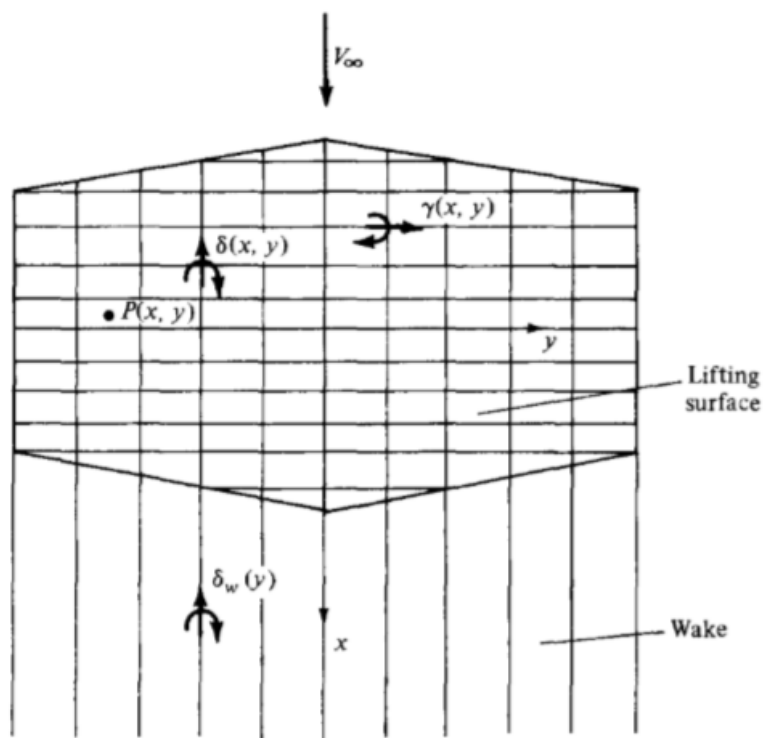


Figura A-5: sovrapposizione di più linee portanti per formare una superficie. Tratta da [1].

Le due lamine di intensità $\gamma(x, y)$ e $\delta(x, y)$ sovrapposte formano la superficie portante e in un qualunque suo punto il downwash $w(x, y)$ sarà dato da un'equazione simile alla (A.3) ma calcolata su un integrale superficiale contenente i vortici di entrambe le lamine, oltre al contributo di $\delta_w(y)$. Il problema principale diventa calcolare le due intensità, ma il metodo del reticolo di vortici (o analogamente, il DLM) permette di trovare facilmente una soluzione numerica, suddividendo la superficie in un numero finito n di pannelli: ognuno di questi contiene al quarto di corda un filamento di intensità Γ_n costante ma diverso di elemento in elemento. Prendendo un punto di controllo in ogni pannello e applicandovi la legge di Biot-Savart e la condizione di tangenzialità del flusso alla superficie, si ottiene un sistema di equazioni algebriche che risolto fornisce il valore dei vari Γ_n .

Fonti Bibliografiche

In questa sezione vengono riportate in ordine alfabetico per autore tutte le fonti utilizzate per la stesura dei capitoli precedenti. I manuali chiudono la lista.

1. Anderson (Jr.), J.D. (2010). *Fundamentals of Aerodynamics, Fifth Edition*. New York: McGraw-Hill Education;
2. Bindolino, G., Mantegazza, P., & Masarati, P. (2000). *Aeroelasticità applicata*. Politecnico di Milano. Unpublished Manuscript;
3. Bisplinghoff, R.L., Ashley, H., & Halfman, R.L. (1996). *Aeroelasticity*. New York: Dover Publications;
4. Bisplinghoff, R.L., & Ashley, H. (2005). *Principles of aeroelasticity*. New York: Dover Publications;
5. Blair, M. (1992). *A compilation of the mathematics leading to the doublet lattice method*. Unpublished Manuscript;
6. Bottasso, C.L., & Cacciola, S. (2014). *Aeroelasticity -Introduction*. Technische Universität München. Power Point;
7. Bottasso, C.L., & Cacciola, S. (2015). *Static Aeroelasticity*. Technische Universität München. Power Point;
8. Bottasso, C.L., & Cacciola, S. (2015). *Dynamic Aeroelasticity*. Technische Universität München. Power Point;

9. Chetan Kumar, D.S., & Shivaprakash, S. (2018). *Flutter Analysis of Typical Aircraft Wing using Doublet Lattice Method*. International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology Marzo 2018, Volume 6, Issue III;
10. Dowell, E.H. (2015). *A Modern Course in Aeroelasticity, 5th Revised and Enlarged Edition*. Berlin: Springer-Verlag;
11. Ewins, D.J. (2009). *Modal Testing: Theory, Practice and Application, 2nd Edition*. Chichester: John Wiley & Sons;
12. Fung, Y.C. (1995). *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*. New York: Dover Publications;
13. Galvanetto, U. (2017). *Costruzioni e strutture aerospaziali 2*. Appunti dalle lezioni del corso.
14. Gülçat, Ü. (2011). *Fundamentals of Modern Unsteady Aerodynamics*. Berlin: Springer-Verlag;
15. Hodges, D.H., & Pierce, G.A. (2002). *Introduction to structural dynamics and aeroelasticity*. Cambridge: Cambridge University Press;
16. Hulshoff, S.J. *AE4-930 Aeroelasticity*. Delft University of Technology. Unpublished Manuscript;
17. Luchini, P., & Quadrio, M. (2001). *Aerodinamica*. Politecnico di Milano. Unpublished Manuscript;
18. Megson, T.H.G. (2013). *Aircraft Structures for Engineering Students, Fifth Edition*. Oxford: Butterworth-Heinemann;
19. Weisshaar, T.A. (1995). *Aircraft Aeroelastic Design and Analysis*. Purdue University. Unpublished Manuscript;

20. Weisshaar, T.A. (2010). *Static and Dynamic Aeroelasticity*. Chichester: John Wiley & Sons;
21. Wright, J.R., & Cooper, J.E. (2007). *Introduction to aircraft aeroelasticity and loads*. Chichester: John Wiley & Sons;
22. Xing Ouyang, Xiongqing Yu, & Yu Wang (2014). *Flutter analysis for wing structure using finite element modeling with equivalent stiffness*. JVE International Ltd. Journal of Vibroengineering. Maggio 2014, Volume 16, Issue 3;
23. Zaccariotto, M. (2016). *Laboratorio di strutture aerospaziali- Appunti dalle lezioni*. Unpublished Manuscript;
24. MSC Software (2004). *Nastran Reference Manual*;
25. MSC Software (2006). *MSC.Flightloads and Dynamics User's Guide*;
26. MSC Software (2013). *Aeroelasticity using MSC Nastran: NAS111 Course Notes*;
27. MSC Software (2014). *MSC Nastran 2014 Quick Reference Guide*;
28. MSC Software (2018). *Patran Reference Manual- Part 3: Finite Element Modeling*;
29. MSC Software (2018). *MSC Nastran 2018 Aeroelastic Analysis User's Guide*;