



UNIVERSITA DEGLI STUDI DI PADOVA

Facoltà di Ingegneria

Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi  
Industriali



Tesi di laurea magistrale in

INGEGNERIA DELL'INNOVAZIONE DEL PRODOTTO

**Analisi teorica e numerica dello stato di tensione in solidi  
ortotropi intagliati**

Relatore:

Chiar.mo Prof. Michele Zappalorto

Correlatore :

Dr. Lucio Maragoni

Candidato:

Stefano Giaron 1104451

Anno Accademico 2019/2020

# Sommario

<b>INTRODUZIONE .....</b>	<b>3</b>
<b>1. TEORIA DELL'ELASTICITA' DEI MATERIALI.....</b>	<b>5</b>
1.1 <i>Equazioni indefinite di equilibrio ed equazioni di compatibilità.....</i>	<i>5</i>
1.2 <i>La funzione di Airy e il metodo di Kolosov-Muskhelishvili .....</i>	<i>7</i>
1.3 <i>Il legame tensioni – deformazioni nei materiali ortotropi.....</i>	<i>11</i>
<b>2. ANALISI.....</b>	<b>15</b>
2.1 <i>Descrizione delle analisi.....</i>	<i>15</i>
2.1.1 <i>Intaglio ad U e a V raccordato all'apice.....</i>	<i>15</i>
2.1.2 <i>Intaglio ad U e a V con foro all'apice .....</i>	<i>17</i>
2.1.3 <i>Foro ellittico.....</i>	<i>18</i>
2.1.4 <i>Foro quadrato raccordato.....</i>	<i>19</i>
2.1.5 <i>Materiali considerati .....</i>	<i>20</i>
2.1 <i>Modelli teorici per il caso isotropo .....</i>	<i>21</i>
2.2.1 <i>Intaglio ad U e a V raccordato all'apice.....</i>	<i>21</i>
2.2.2 <i>Intaglio ad U e a V con foro all'apice .....</i>	<i>23</i>
2.3 <i>Modello teorico per il caso ortotropo.....</i>	<i>26</i>
2.4 <i>Smoothing function per il caso ortotropo .....</i>	<i>29</i>
2.5 <i>Modelli agli elementi finiti.....</i>	<i>31</i>
<b>3. RISULTATI.....</b>	<b>35</b>
3.1 <i>Intagli a U e a V raccordati all'apice e forati all'apice.....</i>	<i>40</i>
3.2 <i>Confronto tra diversi angoli di apertura .....</i>	<i>69</i>
3.3 <i>Confronto tra materiali diversi.....</i>	<i>91</i>
3.4 <i>Criterio energetico.....</i>	<i>117</i>
3.4.1 <i>Trattazione analitica.....</i>	<i>118</i>
3.4.2 <i>Calcolo della ASED mediante analisi agli elementi finiti .....</i>	<i>120</i>
<b>4. CONCLUSIONI.....</b>	<b>136</b>
<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>137</b>



## INTRODUZIONE

La presente trattazione prende in analisi il comportamento meccanico dei materiali ortotropi, ovvero materiali con proprietà meccaniche diverse a seconda del loro orientamento nello spazio. Uno dei materiali più conosciuti caratterizzati da ortotropia è sicuramente il legno: esso ha infatti diverse proprietà meccaniche dipendenti dalla direzione in cui vengono considerate, in particolare a seconda che lo si analizzi lungo l'asse longitudinale parallelo alla fibra, oppure perpendicolare agli anelli o ancora tangente ad essi. Un altro esempio può essere fatto considerando un componente in acciaio, esso infatti ha un comportamento meccanico strettamente correlato al tipo di processo industriale di deformazione plastica che ha subito, la sua risposta elastica lungo la direzione di formatura non sarà la stessa di quella lungo una direzione ortogonale ad essa. Il suo carattere di ortotropia risulta comunque trascurabile per la maggior parte delle applicazioni ingegneristiche, portando, per semplicità, ad essere trattato come un materiale isotropo.

Già a partire dal secolo scorso, la meccanica della frattura lineare elastica, ovvero quel ramo della meccanica che analizza il comportamento meccanico di un materiale in presenza di difetti o discontinuità geometriche, ha sviluppato e ottimizzato numerose teorie per quanto concerne i materiali isotropi, con lo scopo di dare ai progettisti degli strumenti affidabili per prevedere la resistenza di componenti meccanici. L'estensione della meccanica della frattura ai materiali ortotropi ha uno sviluppo più recente, ed è un campo caratterizzato tuttora da un rapido sviluppo e da una forte innovazione. Oltre al legno o all'acciaio infatti, sono molti i materiali che presentano un comportamento meccanico dipendente dalla direzione con cui li si adopera, il crescente sviluppo di materiali compositi per applicazioni ingegneristiche avanzate, rende necessario un approfondimento sulla risposta alle sollecitazioni che questi manifestano.

Lo studio dunque ha lo scopo di approfondire l'affidabilità e il campo di validità degli strumenti teorici attualmente a disposizione per la caratterizzazione di un materiale ortotropo, sulla base delle nozioni teoriche fornite dalla meccanica della frattura per i materiali isotropi, già largamente studiati. A partire da geometrie opportunamente scelte, caratterizzate da alcune discontinuità geometriche elementari, vengono confrontati i risultati ottenuti da analisi agli elementi finiti e risultati ottenuti dai modelli teorici presenti in letteratura. Tali risultati sono espressi in grafici che permettono una rapida analisi circa l'affidabilità dei modelli, cercando, per quanto possibile, di sviluppare delle varianti per migliorarne l'affidabilità.



# 1. TEORIA DELL'ELASTICITA' DEI MATERIALI

## 1.1 Equazioni indefinite di equilibrio ed equazioni di compatibilità

Per poter analizzare lo stato tensionale di un corpo in seguito ad sistema di forze assegnate agenti su di esso serve innanzitutto definire le equazioni di equilibrio e compatibilità che ne governano il comportamento elastico. Mantenendo valida l'ipotesi di tensione piana in cui le tensioni al di fuori del piano  $x,y$  sono nulle, si consideri il corpo in figura 1, di dimensioni infinitesime  $h$  e  $k$ , a cui sono applicate le forze di volume  $X$  in direzione  $x$  e  $Y$  in direzione  $Y$ .

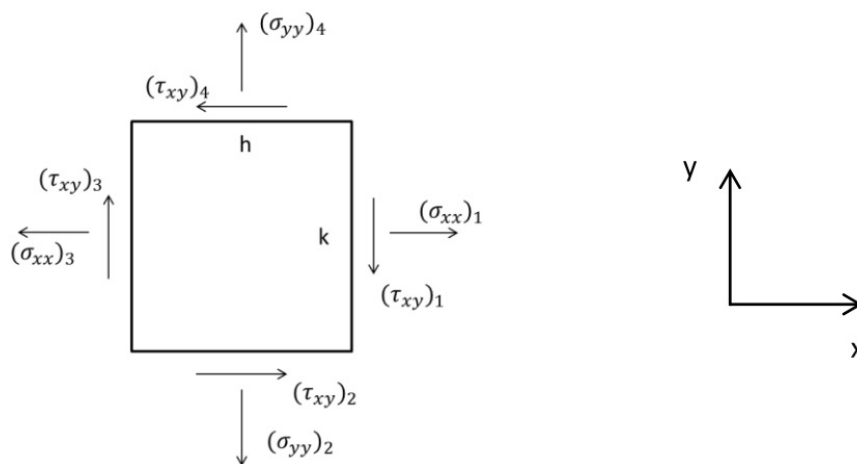


Figura 1

L'equilibrio lungo la direzione  $x$  può essere scritto come:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (1.1)$$

Analogamente l'equilibrio lungo la direzione  $y$  può essere scritto come:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y = 0 \quad (1.2)$$

Nel caso di forze di volume assenti le equazioni sopra possono essere riscritte più semplicemente come:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$$

(1.3)

Le equazioni (1.2) e (1.3) sono dette equazioni di equilibrio. Esse tuttavia non sono sufficienti a determinare lo stato tensionale di un corpo, in quanto le componenti tensionali sono 3 a fronte di sole 2 equazioni. A tal proposito viene introdotta una terza equazione detta equazione di compatibilità, definita come:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

(1.4)

## 1.2 *La funzione di Airy e il metodo di Kolosov-Muskhelishvili*

Un metodo matematico molto utilizzato per lo studio di problemi legati alla teoria dell'elasticità è basato sulla funzione di Airy. Considerando due generiche funzioni  $f(x,y)$  e  $g(x,y)$  tali per cui sia soddisfatta la relazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \quad (1.5)$$

Le condizioni di Cauchy-Schwarz assicurano l'esistenza di una funzione  $A(x,y)$  tale che:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\partial A}{\partial y} \\ g &= \frac{\partial A}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Allora, anche per l'equazione di equilibrio (1.11) esisterà una funzione  $A(x,y)$  tale per cui:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial A}{\partial y} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial A}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Analogamente per l'equazione di equilibrio (1.12) esisterà una funzione  $B(x,y)$  tale per cui:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \frac{\partial B}{\partial x} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial B}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Confrontando la seconda delle (1.16) con la seconda delle (1.17) è possibile scrivere:



$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y} \quad (1.9)$$

Allora esiste una funzione  $\Phi(x,y)$  tale per cui:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ B &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1.11)$$

La funzione  $\Phi(x,y)$  prende il nome di funzione di Airy (*Airy, 1863*). Considerando le leggi di Hooke in ipotesi di tensione piana:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}] \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} &= -\frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Nelle quali si possono sostituire le equazioni (1.11):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] \end{aligned}$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (1.13)$$

Sostituendo queste ultime nell'equazione di compatibilità (1.4):

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) \quad (1.14)$$

Riarrangiando e considerando ancora il teorema di Schwarz:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (1.15)$$

L'equazione (1.15) prende il nome di equazione bi-armonica ed è alla base di numerosi studi circa lo stato tensionale di un corpo. Un metodo per determinare l'andamento delle tensioni a partire dalla funzione di Airy è quello introdotto da Kolosov-Muskhelishvili basato sull'uso di funzioni complesse. L'equazione bi-armonica infatti può essere scritta come parte reale di un'opportuna funzione complessa olomorfa:

$$\nabla^2 \Phi = 4 \operatorname{Re}\{\psi'(z)\} = 2\psi'(z) + 2\bar{\psi}'(\bar{z}) \quad (1.16)$$

Tale funzione è continua e derivabile in un certo dominio di interesse, si può quindi scrivere la seguente relazione:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \{2\psi'(z) + 2\bar{\psi}'(\bar{z})\} \quad (1.17)$$

Integrando l'equazione (1.17) per ricavare la funzione di Airy in termini di funzioni complesse si perviene ad una forma del tipo:

$$\Phi = \frac{1}{2} \{z\psi(z) + z\bar{\psi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z})\} \quad (1.18)$$

Riprendendo quindi le equazioni (1.11) e sostituendo la funzione di Airy appena descritta:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2 \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2} \bar{z} \psi''(z) + \psi'(z) - \frac{1}{2} \chi''(z) \right\}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 2\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2}\bar{z}\psi''(z) + \psi'(z) + \frac{1}{2}\chi''(z)\right\} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -2\operatorname{Im}\{\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)\}\end{aligned}\tag{1.19}$$

Le equazioni (1.19) rappresentano la formulazione dello stato tensionale col metodo dei potenziali complessi in un dato sistema di riferimento cartesiano. Per lo studio dei casi pratici è spesso conveniente esprimere lo stato tensionale in riferimento ad un sistema di coordinate polari. Ripetendo il procedimento fatto finora è possibile quindi scrivere:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= 2\operatorname{Re}\{\psi'(z)\} + \operatorname{Re}\{e^{i2\theta}[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)]\} \\ \sigma_{rr} &= 2\operatorname{Re}\{\psi'(z)\} - \operatorname{Re}\{e^{i2\theta}[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)]\} \\ \tau_{xy} &= \operatorname{Im}\{e^{i2\theta}[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)]\}\end{aligned}\tag{1.20}$$

Le equazioni appena scritte permettono lo studio dello stato tensionale di un corpo in numerose applicazioni pratiche, sotto le ipotesi di tensione piana e di materiale isotropo.

### 1.3 Il legame tensioni – deformazioni nei materiali ortotropi

Partendo dal caso più generale di un componente anisotropo, esso è caratterizzato da diverse proprietà fisiche a seconda della direzione considerata. In particolare, il suo comportamento meccanico, ovvero la sua risposta elastica se soggetto ad uno sforzo, non sarà univoca e quindi non sarà univocamente descritta da un unico parametro, bensì da più parametri ognuno dei quali è legato ad una direzione ben precisa. Per un componente anisotropo dunque, il legame tensioni deformazioni può essere scritto come:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.21)$$

Oppure, in modo più compatto:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (1.22)$$

Dove  $[C]$  è la matrice di rigidezza ed è una matrice simmetrica. Essa può essere invertita:

$$\{\varepsilon\} = [C]^{-1}\{\sigma\} = [S]\{\sigma\} \quad (1.23)$$

Dove la matrice  $[S]$  è detta matrice di deformabilità ed è l'inversa della matrice di rigidezza  $[C]$ . Un materiale anisotropo, che non presenta alcuna condizione di simmetria, richiede la conoscenza di 21 costanti elastiche per poterlo caratterizzare. Un materiale ortotropo è una condizione intermedia tra l'anisotropia e l'isotropia e presenta 3 piani di simmetria elastica, la matrice di rigidezza diventa quindi:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{Simm} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

Il numero di costanti per caratterizzare il comportamento di un materiale ortotropo scende a 9. Adottando un'ipotesi di tensione piana il legame tensioni può essere espresso in forma più ridotta come:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.25)$$

Oppure invertendo la relazione:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.26)$$

La matrice di cedevolezza [S] può essere scritta in funzione delle proprietà ingegneristiche:

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ \frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Dove  $E_1$  ed  $E_2$  sono i moduli elastici lungo le direzioni principali di elasticità 1 e 2,  $G_{12}$  è il modulo di elasticità tangenziale e  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$  i coefficienti di Poisson. Va fatta un'ulteriore considerazione per la caratterizzazione di un materiale ortotropo, il suo comportamento elastico dipende dal sistema di riferimento usato per la valutazione dello stato di tensione e deformazione. Se tale sistema di riferimento coincide con le direzioni principali di elasticità 1 e 2 allora il comportamento è effettivamente ortotropo e la relazione (1.26) può essere convenientemente riscritta come:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.28)$$

In caso contrario il comportamento del materiale diviene apparentemente monoclinico e la matrice [C] (o [S]) è completamente popolata, con dei coefficienti aggiuntivi che si ricavano dai già presenti con delle apposite trasformazioni. Per lo studio dello stato

tensionale in un materiale ortotropo dunque, si sostituiscono le funzioni di Airy (1.11) nel sistema appena scritto, dal quale si ottiene in modo esplicito:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= S_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + S_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= S_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + S_{22} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \gamma_{xy} &= S_{66} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{1.29}$$

Sostituendo queste ultime nell'equazioni di compatibilità (1.4) si ottiene l'equazione bi-armonica modificata:

$$S_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + (2S_{12} + S_{66}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + S_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0\tag{1.30}$$

La cui equazione caratteristica associata è:

$$S_{11} \mu^4 + (2S_{12} + S_{66}) \mu^2 + S_{22} = 0\tag{1.31}$$

Che ammette due coppie di soluzioni complesse e coniugate:

$$\begin{aligned}\mu_{1,3} &= \pm i \beta_1 \\ \mu_{2,4} &= \pm i \beta_2\end{aligned}\tag{1.32}$$

Dove  $\beta_1$  e  $\beta_2$  sono coefficienti reali positivi. Con le supposizioni appena fatte è possibile scrivere il campo tensionale in coordinate polari come:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= 2\text{Re}\{(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^2 \Phi'(z_1) + (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^2 \Phi'(z_2)\} \\ \sigma_{rr} &= 2\text{Re}\{(\sin\theta - \mu_1 \cos\theta)^2 \Phi'(z_1) + (\sin\theta - \mu_2 \cos\theta)^2 \Phi'(z_2)\} \\ \tau_{r\theta} &= 2\text{Re}\{(\sin\theta - \mu_1 \cos\theta)(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta) \Phi'(z_1) \\ &\quad + (\sin\theta - \mu_2 \cos\theta)(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta) \Phi'(z_2)\}\end{aligned}\tag{1.33}$$

Dove  $z_1$  e  $z_2$  sono 2 variabili complesse definite come:

$$\begin{aligned}z_1 &= x + \mu_1 y = r \rho_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 &= x + \mu_2 y = r \rho_2 e^{i\theta_2}\end{aligned}\tag{1.34}$$

A partire dalle funzioni di Airy, quindi dalle stesse basi matematiche del capitolo precedente, si sono ricavate le equazioni per lo studio dello stato tensionale di un corpo, mantenendo l'ipotesi di tensione piana, ma considerando la condizione di ortotropia.

## 2. ANALISI

### 2.1 *Descrizione delle analisi*

Le analisi fatte per determinare l'andamento delle tensioni in un materiale ortotropo prendono in considerazione svariate geometrie ognuna delle quali ha diversi parametri geometrici per considerare l'effetto di ciascuno sul comportamento meccanico. In particolare vengono analizzate piastre di dimensione finita che presentano discontinuità geometriche con le seguenti forme:

- Intagli laterali simmetrici ad U con angolo di apertura nullo e a V raccordati all'apice con diversi angoli di apertura e raggi di raccordo.
- Intagli laterali simmetrici con foro all'apice ad U con angolo di apertura nullo e a V con diversi angoli di apertura, e diversi raggi di raccordo. Tale geometria prende il nome di key hole in quanto ricorda una serratura, è una geometria molto usata dalla scuola tedesca per lo studio della resistenza a fatica delle giunzioni saldate, riportata anche nella CNR 10011.
- Foro centrale con geometria ellittica e diversi valori del semiasse minore
- Foro centrale con geometria quadrata orientato a  $45^\circ$  rispetto agli assi della piastra e con diversi raggi di raccordo.

Per ogni geometria analizzata inoltre, vengono presi in considerazione diversi materiali, un materiale isotropo e due materiali ortotropi con caratteristiche opposte: uno con elevata rigidità lungo la direzione di carico, l'altro con elevata rigidità nella direzione ortogonale a quella di carico. Le analisi vengono fatte con il programma agli elementi finiti ANSYS, l'andamento delle tensioni ricavate dal FEM è quindi confrontato con il relativo modello teorico presente in letteratura per valutarne l'effettiva validità.

#### 2.1.1 *Intaglio ad U e a V raccordato all'apice*

La geometria considerata è costituita da una piastra di dimensioni finite con due intagli laterali ad U con angolo di apertura  $2\alpha = 0$  oppure a V con angoli di apertura  $2\alpha > 0^\circ$  con raggio di raccordo  $\rho$  all'apice. In figura 2 è rappresentata la geometria:



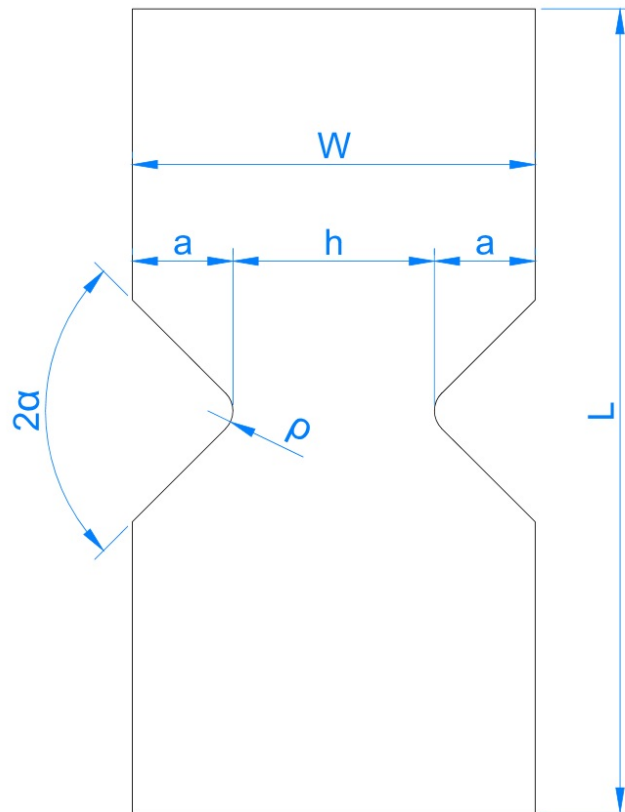


Figura 2 – Geometria con intaglio laterale ad U ( $2\alpha=0^\circ$ ) o V raccordato ( $2\alpha>0^\circ$ )

I parametri geometrici considerati per la geometria sono riassunti in tabella 1:

L [mm]	a [mm]	h/2 [mm]	W/2 [mm]	$\rho$ [mm]	$2\alpha$ [°]
160	10	30	40	0.25	0
					90
					135
				1	0
					90
					135
				2.5	0
					90
					135
440	10	100	110	0.25	0
					90
					135
				1	0
					90
					135
				2.5	0
					90
					135

Tabella 1

### 2.1.2 Intaglio ad U e a V con foro all'apice

La geometria considerata è costituita da una piastra di dimensioni finite con due intagli laterali ad U con angolo di apertura  $2\alpha = 0$  oppure a V con angoli di apertura  $2\alpha > 0^\circ$  forati all'apice con un foro di raggio  $\rho$ . In figura 3 è rappresentata la geometria:

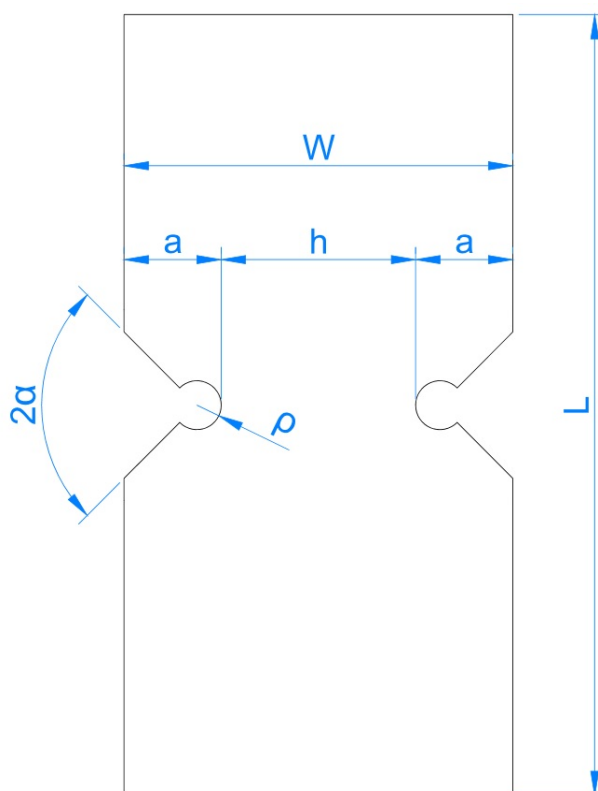


Figura 3 - Geometria con intaglio laterale forato ad U ( $2\alpha=0^\circ$ ) o V raccordato ( $2\alpha>0^\circ$ )

I parametri geometrici considerati per la geometria sono riassunti in tabella 2:

L [mm]	a [mm]	h/2 [mm]	W/2 [mm]	$\rho$ [mm]	$2\alpha$ [°]
160	10	30	40	0.25	0
					90
					135
				1	0
					90
					135
				2.5	0
					90
					135
440		100	110	0.25	0
					90
					135

				1	0
					90
					135
				2.5	0
					90
					135

Tabella 2

### 2.1.3 Foro ellittico

La geometria considerata è costituita da una piastra di dimensioni finite con foro ellittico centrale con semiasse maggiore pari ad  $a$  e semiasse minore pari a  $b$ . La relazione che lega i 2 semiassi vale:

$$\rho = \frac{b^2}{a} \quad (2.1)$$

Dove  $\rho$  è il raggio di curvatura all'apice del foro. Il semiasse  $b$  è scelto in modo tale da ottenere valori di  $a$  e  $\rho$  uguali alle analisi precedenti. In figura 4 è rappresentata la geometria:

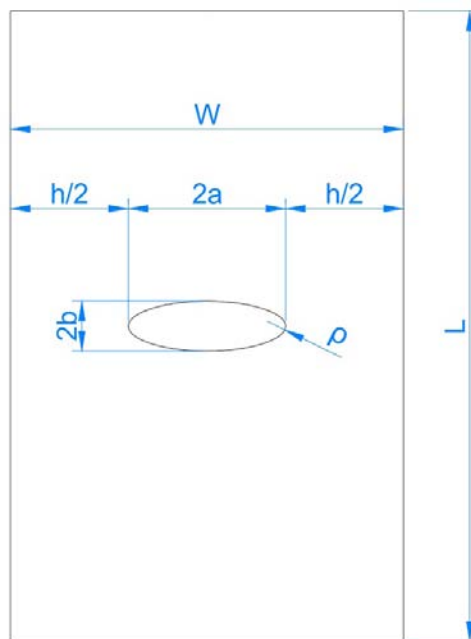


Figura 4 - Geometria con foro centrale ellittico

I parametri geometrici considerati per la geometria sono riassunti in tabella 3:

L [mm]	a [mm]	h/2 [mm]	W/2[mm]	b [mm]	$\rho$ [mm]	
100	10	15	25	1.58	0.25	
				3.16	1	
				5	2.5	
240		50	60	60	1.58	0.25
					3.16	1
					5	2.5

Tabella 3

### 2.1.4 Foro quadrato raccordato

La geometria considerata è costituita da una piastra di dimensioni finite con foro quadrato centrale ruotato di  $45^\circ$  rispetto agli assi della piastra. Il foro ha diagonale  $2a$  ed è raccordato ai vertici con raggio  $\rho$ . In figura 5 è rappresentata la geometria:

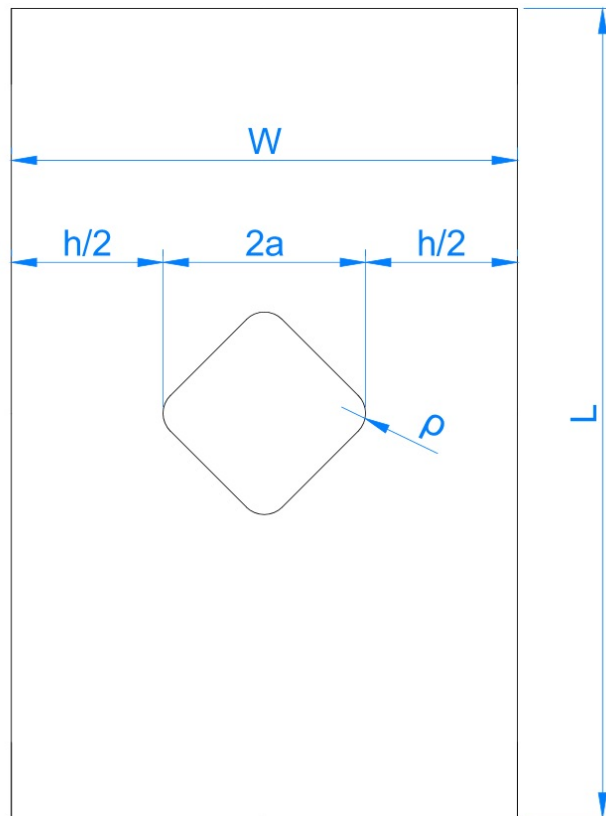


Figura 5 - Geometria con foro centrale quadrato

I parametri geometrici considerati per la geometria sono riassunti in tabella 4:

L [mm]	a [mm]	h/2 [mm]	W/2[mm]	$\rho$ [mm]	
100	10	15	25	0.25	
				1	
				2.5	
240		50	60	60	0.25
					1

				2.5
--	--	--	--	-----

Tabella 4

### 2.1.5 Materiali considerati

Per ciascuna geometria descritta viene confrontato il comportamento tra un materiale isotropo, e due materiali ortotropi con caratteristiche opposte:

- Materiale isotropo:  $E=160$  Gpa,  $G=61.54$  Gpa,  $\nu=0.3$
- Materiale ortotropo D1:  $E_x=10$  Gpa,  $E_y=160$  Gpa,  $G_{xy}=5$  Gpa,  $\nu_{xy}=0.018753$ . SI tratta di un tipico materiale laminato costituito da resina epossidica e fibra di carbonio, con le fibre parallele alla direzione di carico. Il materiale quindi avrà un'elevata rigidità.
- Materiale ortotropo D2:  $E_x=160$  Gpa,  $E_y=10$  Gpa,  $G_{xy}=5$  Gpa,  $\nu_{xy}=0.3$ . SI tratta di un tipico materiale laminato costituito da resina epossidica e fibra di carbonio, con le fibre ortogonali alla direzione di carico. Il materiale quindi avrà una bassa rigidità.

## 2.1 Modelli teorici per il caso isotropo

A partire dalle soluzioni delle equazioni di Airy descritte nel capitolo 1 è possibile sviluppare, mediante opportune funzioni a potenziale complesso, delle espressioni esplicite per determinare lo stato tensionale delle geometrie prese in esame. In presenza di una sollecitazione di solo modo I, oggetto dello studio del presente lavoro, vengono di seguito mostrati i passaggi analitici che portano a determinare le componenti tensionali in coordinate polari lungo la bisettrice geometrica dell'intaglio.

### 2.2.1 Intaglio ad U e a V raccordato all'apice

Il campo di tensione all'apice di un intaglio raccordato è stato studiato nel caso di materiale isotropo da Lazzarin e Tovo (1996), successivamente migliorata nel 2002 dagli stessi autori, sulla base della descrizione matematica del profilo dell'intaglio data da Neuber, che utilizza un sistema di coordinate curvilinee generato dalla trasformazione:

$$z = w^q = (u_0 + iv)^q \quad (2.2)$$

Dove  $z=x+iy$  e  $w=u+iv$  sono le variabili complesse nel piano fisico e nel piano trasformato, mentre  $q$  è un numero reale funzione dell'angolo di apertura  $2\alpha$ :

$$q = \frac{2\pi - 2\alpha}{\pi} \quad (2.3)$$

A seconda dei valori assunti da  $u_0$  e  $q$  si possono distinguere dei casi particolari:

- Se  $u_0=0$  si ha un intaglio a V con angolo di apertura generico
- Se  $u_0 \neq 0$  e  $q=2$  si ha un intaglio a profilo parabolico
- Se  $u_0 \neq 0$  e  $1 < q < 2$  si ottiene un profilo a iperbole

L'equazione (2.2) può essere riscritta come segue:

$$u = r^{\frac{1}{q}} \cos \frac{\theta}{q} \quad e \quad v = r^{\frac{1}{q}} \sin \frac{\theta}{q} \quad (2.4)$$

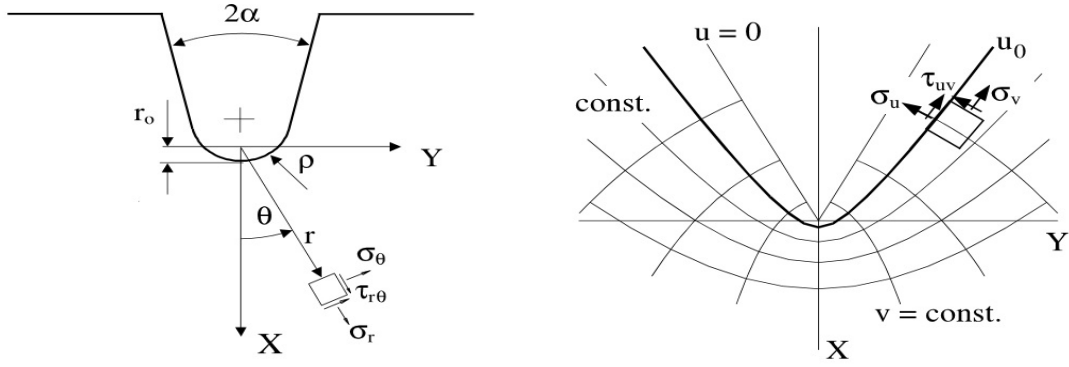


Figura 6 – Schema della mappatura di Neuber

Il sistema di coordinate curvilinee permette di descrivere intagli attraverso le curve caratterizzate dal valore  $u_0$  che intersecano l'asse delle X al valore  $r_0$ :

$$r_0 = \frac{\rho(q-1)}{q} \quad (2.5)$$

L'angolo compreso tra la coordinata radiale  $r$  e la direzione ortogonale al profilo dell'intaglio è pari a  $-\theta/q$ . Con riferimento alle eq. (1.28) la soluzione alle equazioni complesse si determina adottando i seguenti potenziali complessi:

$$\psi(z) = az^\lambda + dz^\mu \quad \text{e} \quad \chi'(z) = bz^\lambda + cz^\mu \quad (2.6)$$

Dove  $a, b, c, d$  sono coefficienti complessi, mentre  $\lambda$  e  $\mu$  sono esponenti reali. Sviluppando le equazioni e impostando le opportune condizioni al contorno si perviene alle seguenti equazioni che descrivono l'andamento dello stato tensionale:

$$\sigma_\theta = \lambda_1 r^{\lambda_1-1} a_1 \left[ (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1)\theta + \chi_{b1} (1 - \lambda_1) \cos(1 + \lambda_1)\theta + \frac{q}{4(q-1)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1-\lambda_1} (\chi_{d1} (1 + \mu_1) \cos(1 - \mu_1)\theta + \chi_{c1} \cos(1 + \mu_1)\theta) \right] \quad (2.7)$$

$$\sigma_r = \lambda_1 r^{\lambda_1-1} a_1 \left[ (3 - \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1)\theta + \chi_{b1} (1 - \lambda_1) (-\cos(1 + \lambda_1)\theta) + \frac{q}{4(q-1)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1-\lambda_1} (\chi_{d1} (3 - \mu_1) \cos(1 - \mu_1)\theta + \chi_{c1} (-\cos(1 + \mu_1)\theta)) \right]$$

(2.8)

$$\tau_{r\theta} = \lambda_1 r^{\lambda_1-1} a_1 \left[ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1) \theta + \chi_{b1} (1 - \lambda_1) \sin(1 + \lambda_1) \theta + \frac{q}{4(q-1)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1-\lambda_1} (\chi_{d1} (1 - \mu_1) \sin(1 - \mu_1) \theta + \chi_{c1} \sin(1 + \mu_1) \theta) \right] \quad (2.9)$$

L'equazione (2.7) relativa alla  $\sigma_\theta$  valutate lungo la bisettrice dell'intaglio per i diversi angoli di apertura considerati nelle analisi forniscono le seguenti relazioni:

- per  $2\alpha=0^\circ$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_{p,el}}{2\sqrt{2}} \rho^{0.5} [(x + 0.5\rho)^{-0.5} + 0.5\rho(x + 0.5\rho)^{-0.5}] \quad (2.10)$$

- per  $2\alpha = 90^\circ$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_{p,el}}{3.874} \rho^{0.4555} [1.2976(x + 0.3333\rho)^{-0.4555} + 0.3957\rho^{0.8894} (x + 0.3333\rho)^{-1.3449}] \quad (2.11)$$

- per  $2\alpha = 135^\circ$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_{p,el}}{4.94} \rho^{0.3264} [2.040(x + 0.20\rho)^{-0.3264} + 0.2091\rho^{0.8934} (x + 0.20\rho)^{-1.2198}] \quad (2.12)$$

### 2.2.2 Intaglio ad U e a V con foro all'apice

La soluzione alla geometria di un intaglio con foro centrato sull'apice è data da Zappalorto e Lazzarin (2011). Sempre con riferimento alle equazioni (1.28) e con la mappatura di Neuber, vengono adottati i seguenti potenziali per la determinazione del campo tensionale all'apice della discontinuità:

$$\begin{aligned} \psi(z) &= az^\lambda + bz^{-\lambda} \\ \chi'(z) &= cz^\lambda + dz^{-\lambda} + ez^{-\lambda-1} + fz^{-\lambda-2} \end{aligned} \quad (2.13)$$



Dove a,b,c,d ed f sono coefficienti complessi, mentre  $\lambda$  è un esponente reale.

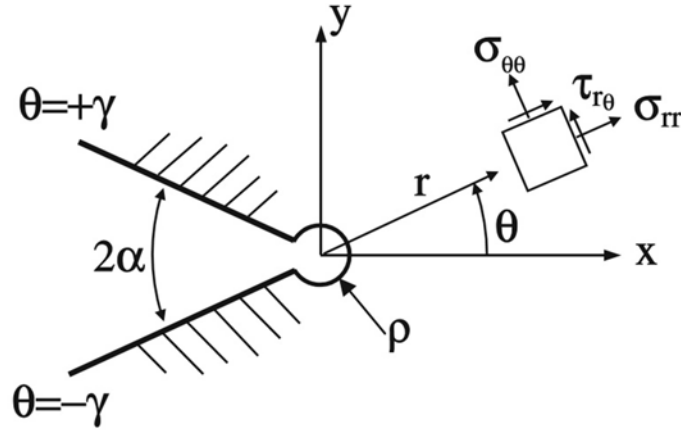


Figura 7 – Schema di intaglio con forma a key hole

Sviluppando le equazioni e impostando le opportune condizioni al contorno si perviene alle seguenti equazioni che descrivono l'andamento dello stato tensionale:

$$\sigma_{\theta} = A_1 r^{\lambda_1 - 1} \left\{ \cos(1 - \lambda_1)\theta \left[ (1 + \lambda_1) + \tilde{\psi}_{11}(\theta) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\lambda_1} + \tilde{\psi}_{12}(\theta) \tilde{\chi}_{11}(\theta) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\lambda_1 + 1} \right] + \Phi_1(\gamma) \cos(1 + \lambda_1)\theta \left[ 1 + (1 - \lambda_1) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\lambda_1} + (2 + \lambda_1) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2(\lambda_1 + 1)} \right] \right\} \quad (2.14)$$

$$\sigma_r = A_1 r^{\lambda_1 - 1} \left\{ \cos(1 - \lambda_1)\theta \left[ (3 - \lambda_1) + \tilde{\psi}_{11}(\theta) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\lambda_1} - \tilde{\psi}_{12}(\theta) \tilde{\chi}_{11}(\theta) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\lambda_1 + 1} \right] + \Phi_1(\gamma) \cos(1 + \lambda_1)\theta \left[ (3 + \lambda_1) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\lambda_1} - 1 - (2 + \lambda_1) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2(\lambda_1 + 1)} \right] \right\} \quad (2.15)$$

$$\tau_{r\theta} = A_1 r^{\lambda_1 - 1} \left\{ \sin(1 - \lambda_1)\theta \left[ (1 - \lambda_1) + \tilde{\psi}_{11}(\theta) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\lambda_1} + \tilde{\psi}_{12}(\theta) \tilde{\chi}_{12}(\theta) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\lambda_1 + 1} \right] + \Phi_1(\gamma) \sin(1 + \lambda_1)\theta \left[ (1 + \lambda_1) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\lambda_1} + 1 - (2 + \lambda_1) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2(\lambda_1 + 1)} \right] \right\} \quad (2.16)$$

L'equazione (2.14) relativa alla  $\sigma_{\theta}$  valutate lungo la bisettrice dell'intaglio per i diversi angoli di apertura considerati nelle analisi forniscono le seguenti relazioni:

- per  $2\alpha=0^\circ$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_{p,el}}{6} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{0.5} \left[ 2 + 1.25 \left(\frac{\rho}{r}\right) + 1.5\rho \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 + 1.25\rho \left(\frac{\rho}{r}\right)^3 \right] \quad (2.17)$$

- per  $2\alpha=90^\circ$

$$\sigma_\theta =$$

$$\frac{\sigma_{p,el}}{7.3551} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{0.4555} \left[ 2.3833 + 1.5116 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1.089} + 1.326 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2.089} + 2.13424 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{3.089} \right]$$

(2.18)

- per  $2\alpha=135^\circ$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_{p,el}}{9.4224} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{0.3264} \left[ 3.0292 + 1.9030 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1.3472} + 0.8659 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2.3472} + 3.6243 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{3.3472} \right]$$

(2.19)

### 2.3 Modello teorico per il caso ortotropo

Per le stesse geometrie con materiale ortotropo è possibile ricavare le equazioni che descrivono lo stato tensionale a partire dalle equazioni (1.33) utilizzando i seguenti potenziali complessi, considerando valide la descrizione matematica del profilo di intaglio data da Neuber:

$$\begin{aligned}\Phi'_1(z_1) &= Az_1^{\lambda-1} \\ \Phi'_2(z_2) &= Bz_2^{\lambda-1}\end{aligned}\tag{2.20}$$

Con A,B coefficienti reali mentre  $z_j$  variabili complesse definite come:

$$z_j = \xi_j + i\eta_j = r_j e^{i\theta_j}\tag{2.21}$$

Dove:

$$\xi_j = x' + r_0 \beta_j^t\tag{2.22}$$

$$\eta_j = y' \beta_j^t\tag{2.23}$$

$$r_j = \sqrt{\xi_j^2 + \eta_j^2}\tag{2.24}$$

$$\theta_j = \text{Arctg}(\xi_j + i\eta_j)\tag{2.25}$$

Sostituendo le equazioni (2.20) nelle equazioni (1.33) e applicando le corrette condizioni al contorno si ottengono le equazioni che descrivono l'andamento del campo tensionale:

$$\begin{aligned}\sigma_\theta = \frac{\sigma_{p,el}}{\tilde{A}} \left\{ \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{1-\lambda} [m_{11} \cos(1-\lambda)\theta_1 + m_{12} \sin(1-\lambda)\theta_1] \right. \\ \left. + \chi \left(\frac{r_0}{r_2}\right)^{1-\lambda} [m_{21} \cos(1-\lambda)\theta_2 + m_{22} \sin(1-\lambda)\theta_2] \right\}\end{aligned}\tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}\sigma_r = \frac{\sigma_{p,el}}{\tilde{A}} \left\{ \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{1-\lambda} [k_{11} \cos(1-\lambda)\theta_1 + k_{12} \sin(1-\lambda)\theta_1] \right. \\ \left. + \chi \left(\frac{r_0}{r_2}\right)^{1-\lambda} [k_{21} \cos(1-\lambda)\theta_2 + k_{22} \sin(1-\lambda)\theta_2] \right\}\end{aligned}\tag{2.27}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_{p,el}}{\tilde{A}} \left\{ \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^{1-\lambda} [n_{11} \cos(1-\lambda)\theta_1 + n_{12} \sin(1-\lambda)\theta_1] + \chi \left( \frac{r_0}{r_2} \right)^{1-\lambda} [n_{21} \cos(1-\lambda)\theta_2 + n_{22} \sin(1-\lambda)\theta_2] \right\} \quad (2.28)$$

Dove  $t$  è un parametro reale definito come:

$$t = \frac{2 - \frac{\ln(-\chi)}{\ln\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)}}{1 - \lambda} \quad (2.29)$$

Mentre  $\tilde{A}$  è definito come:

$$\tilde{A} = \beta_1^{t(\lambda-1)} + \chi \beta_2^{t(\lambda-1)} \quad (2.30)$$

Lungo la bisettrice della discontinuità geometrica è possibile esprimere l'equazione (2.26) relativa alla  $\sigma_\theta$  in modo semplificato come:

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_{p,el}}{\tilde{A}} \left\{ \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^{1-\lambda} + \chi \left( \frac{r_0}{r_2} \right)^{1-\lambda} \right\} \quad (2.31)$$

L'equazione scritta, considera sia il carattere di ortotropia tramite il parametro  $\tilde{A}$ , sia l'effetto dell'angolo di apertura dell'intaglio tramite i parametri  $\lambda$ ,  $\chi$ ,  $r_1$  e  $r_2$ . Essa infatti è valida per angoli di apertura che vanno da  $0^\circ$  a  $180^\circ$ . I parametri  $\beta_1$  e  $\beta_2$  descrivono il carattere di ortotropia del materiale e sono strettamente correlate alle costanti elastiche del materiale. In particolare è possibile definire il parametro  $\psi$  come:

$$\psi = \left( \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \right)^2 = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{E_y}{E_x} - 2\nu_{yx} + \frac{E_y}{G_{xy}}}} \quad (2.32)$$

Il parametro  $\psi$  considera le proprietà elastiche del materiale ed influenza direttamente l'andamento del campo tensionale all'apice di un intaglio. E' interessante notare come per un materiale isotropo  $\beta_1$  e  $\beta_2 \rightarrow 1$  e quindi  $\psi=0.25$ . Sulla base delle equazioni appena scritte, in un diagramma doppio logaritmico in cui viene rappresentata la coordinata normalizzata nelle ascisse e la tensione normalizzata nelle ordinate, è possibile individuare 3 zone distinte nell'andamento dello stato tensionale.

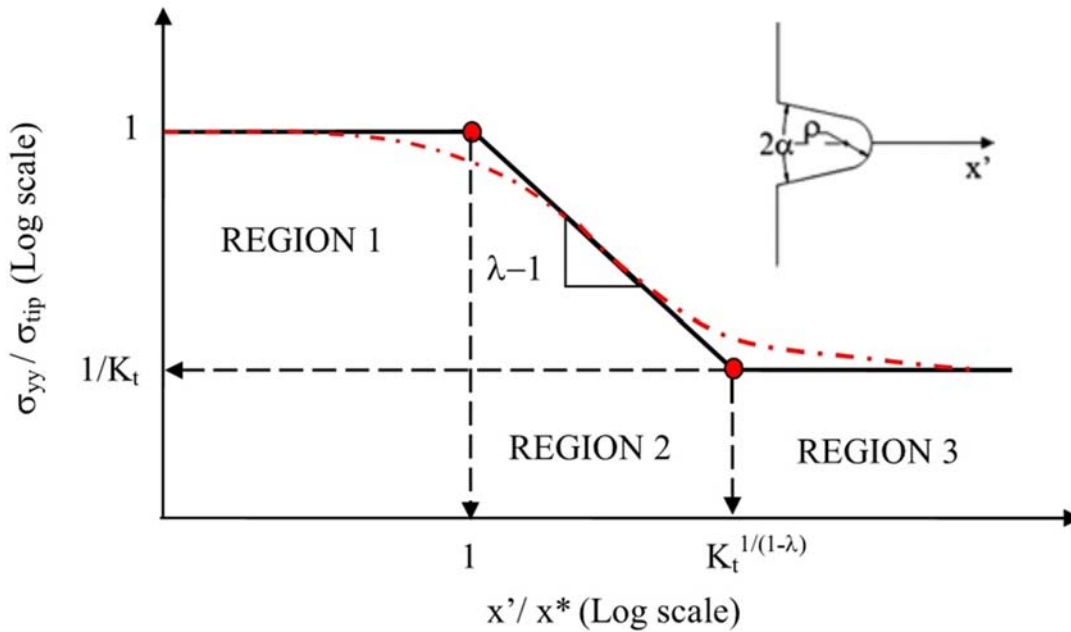


Figura 8 – Andamento tipico della tensione  $\sigma_y$  per un intaglio laterale

In particolare con riferimento all'andamento semplificato nella figura (8):

- una regione 1: in cui l'andamento della tensione uguagli approssimativamente la tensione di picco elastico
- una regione 2: ad una certa distanza dall'apice la tensione in cui la tensione normalizzata diminuisce progressivamente con una pendenza direttamente proporzionale a  $\lambda-1$ ,
- una regione 3: in cui il valore della tensione normalizzata si attesta intorno a  $1/k_t$

Una prima serie di analisi agli elementi finiti confrontata con i risultati forniti dall'equazione (2.31) mostra un'ottima corrispondenza dei dati nelle regioni 1 e 2, mentre nella regione 3 i dati si discostano, anche considerevolmente, da quelli ottenuti mediante analisi FEM.

## 2.4 Smoothing function per il caso ortotropo

Il modello teorico appena descritto per la tensione normale lungo la bisettrice dell'intaglio ha una validità locale. Con lo scopo di estendere la validità del modello appena descritto lungo l'intera bisettrice dell'intaglio vengono introdotte e valutate due funzioni dette 'smoothing function' del tipo:

$$r_1 \rightarrow f(r_1) \tag{2.33}$$

$$r_2 \rightarrow f(r_2) \tag{2.34}$$

L'equazione (2.31) diventerà quindi nella forma:

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_{p,el}}{\tilde{A}} \left\{ \left( \frac{r_0}{f(r_1)} \right)^{1-\lambda} + \chi \left( \frac{r_0}{f(r_2)} \right)^{1-\lambda} \right\} \tag{2.35}$$

Le funzioni  $f(r_1)$  e  $f(r_2)$  sono definite come:

$$f(r_j) = r_0 \beta_j^t + \frac{x'}{\left[ 1 + \left( \frac{x'}{k} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}}} \tag{2.36}$$

Dove il parametro  $k$  è un numero reale determinabile per via analitica quando il rapporto  $k/r_0$  è molto maggiore a  $\beta^t$  con l'equazione:

$$k = r_0 \left( \frac{1 + \chi}{\tilde{A}} k_{tg} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \tag{2.37}$$

Mentre, con una valenza più generale, per via numerica imponendo l'uguaglianza tra forza generata dalla tensione applicata alla sezione lorda e la forza generata dalla tensione quella che deriva dall'equazione (2.35) integrata lungo tutta la bisettrice. In formule:

$$\int_0^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta(f(r_j)) dr = \sigma_g \frac{W}{2} \tag{2.38}$$

La funzione introdotta è una funzione matematica di 'asymptotic matching' per estendere la validità della formulazione esistente a tutta la sezione della geometria. L'esponente  $n$  è un numero reale positivo che descrive un passaggio più o meno graduale tra la regione 2 e la regione 3. Esso viene assegnato a posteriori sulla base del tipo di materiale che si analizza. Per ognuna delle analisi fatte viene determinato il parametro  $k$  iterativamente che soddisfi la relazione (2.38) oppure mediante la relazione (2.37).

## 2.5 Modelli agli elementi finiti

Le geometrie descritte nel paragrafo 2.1 sono state analizzate con il software agli elementi finiti “ANSYS®”. Le geometrie con intaglio ad U e V raccordate o forate all’apice presentano due simmetrie: una lungo l’asse x l’altra lungo l’asse y, viene quindi modellato un quarto di figura per alleggerire il modello. Per l’analisi si utilizzano elementi solidi plane 183 a 8 nodi. Viene scelto di modellare i componenti con una mesh di tipo mapped molto fitta, realizzando elementi che in corrispondenza degli intagli abbiamo dimensione pari a circa  $\rho/100$ . Per ogni geometria vengono condotte 3 analisi per i 3 materiali descritti nel paragrafo 2.1.5, a cui viene applicata una tensione unitaria di trazione pari a 1 Mpa.

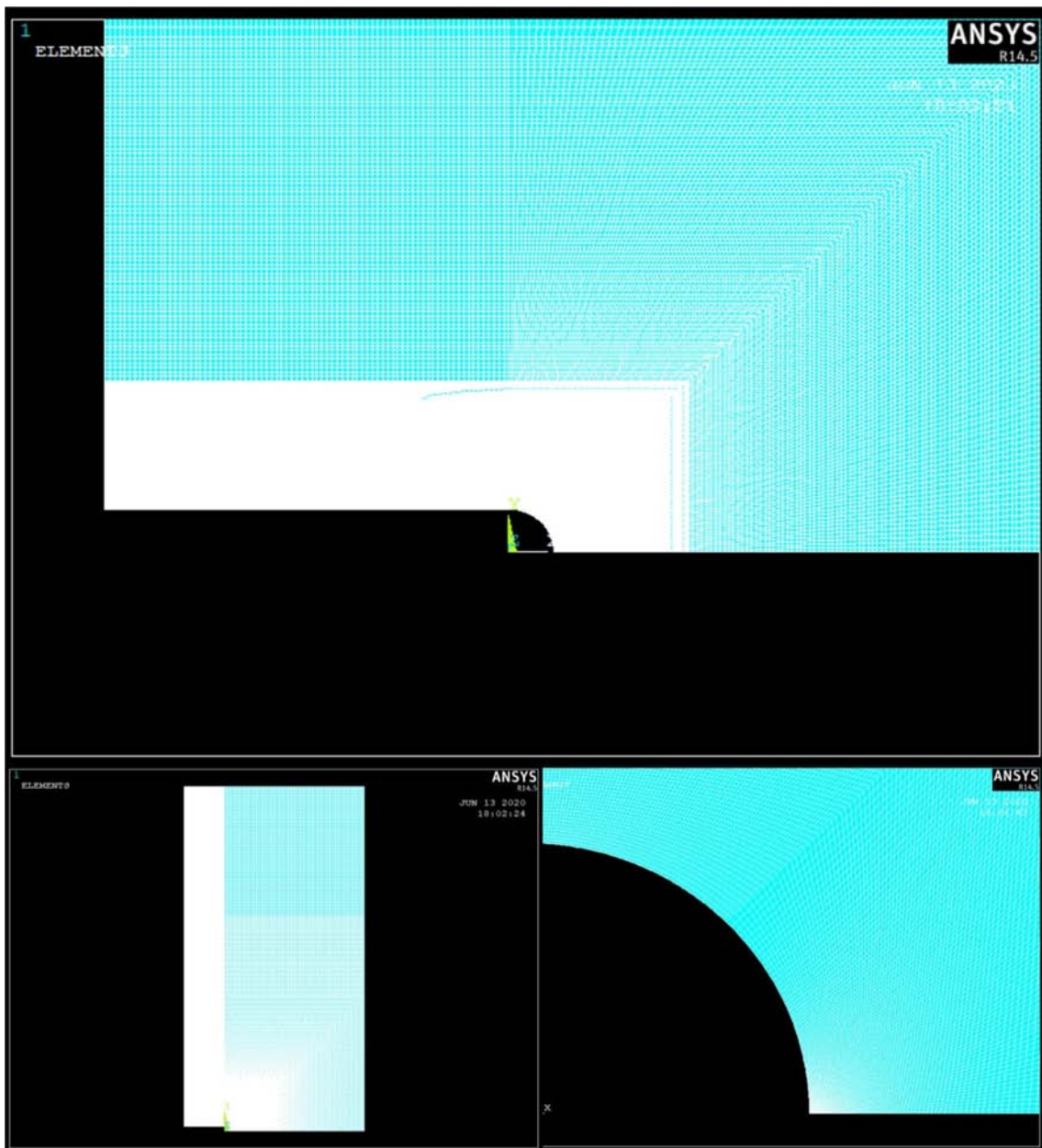


Figura 9 – Modello agli elementi finiti della geometria con intaglio laterale ad U con  $h/2 = 30$  mm,  $a = 10$  mm,  $\rho = 1$  mm,  $2\alpha = 0^\circ$



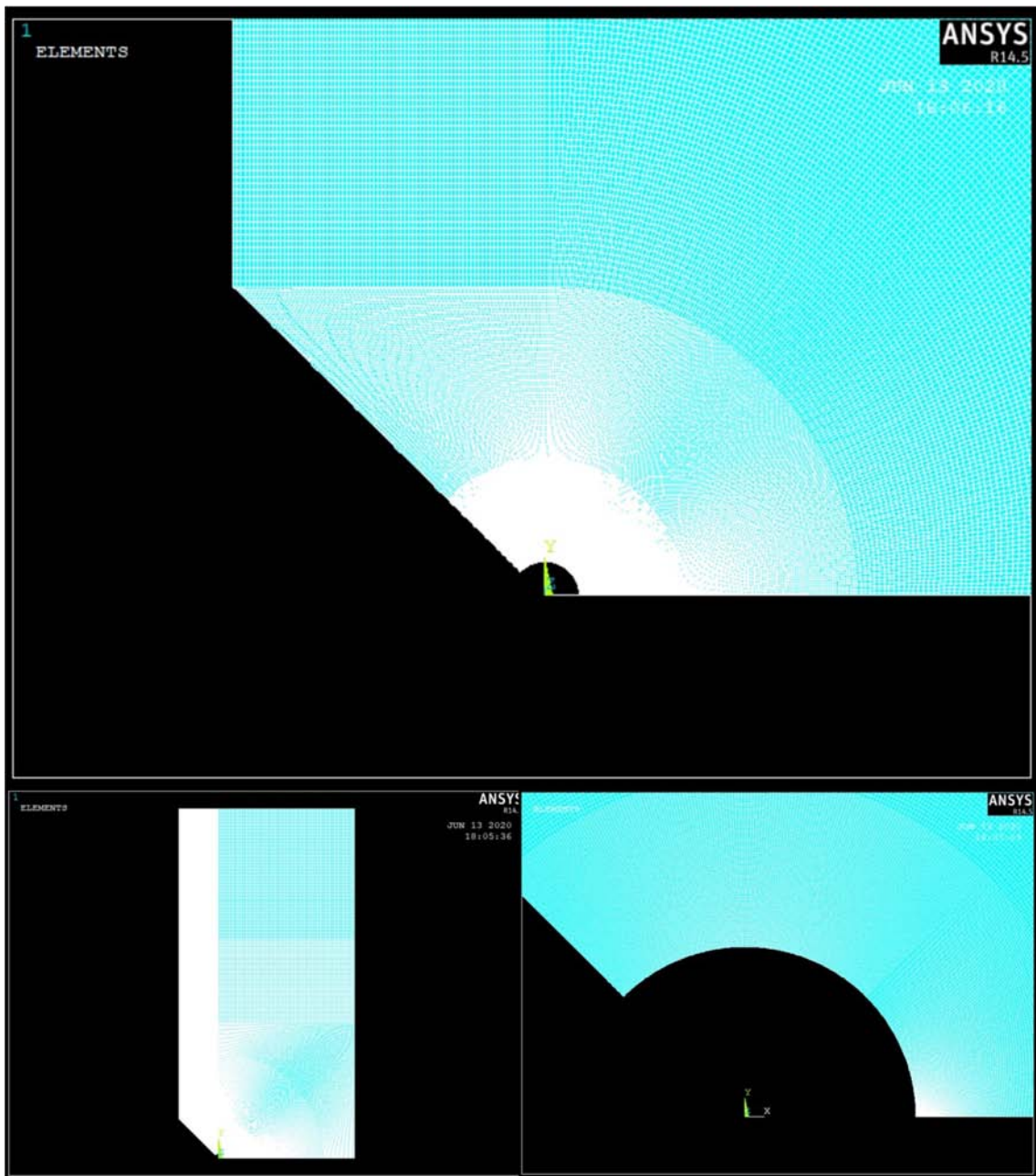


Figura 10 - Modello agli elementi finiti della geometria con intaglio laterale ad a key hole con  $h/2 = 30$  mm,  $a=10$  mm,  $\rho=1$  mm,  $2\alpha=90^\circ$

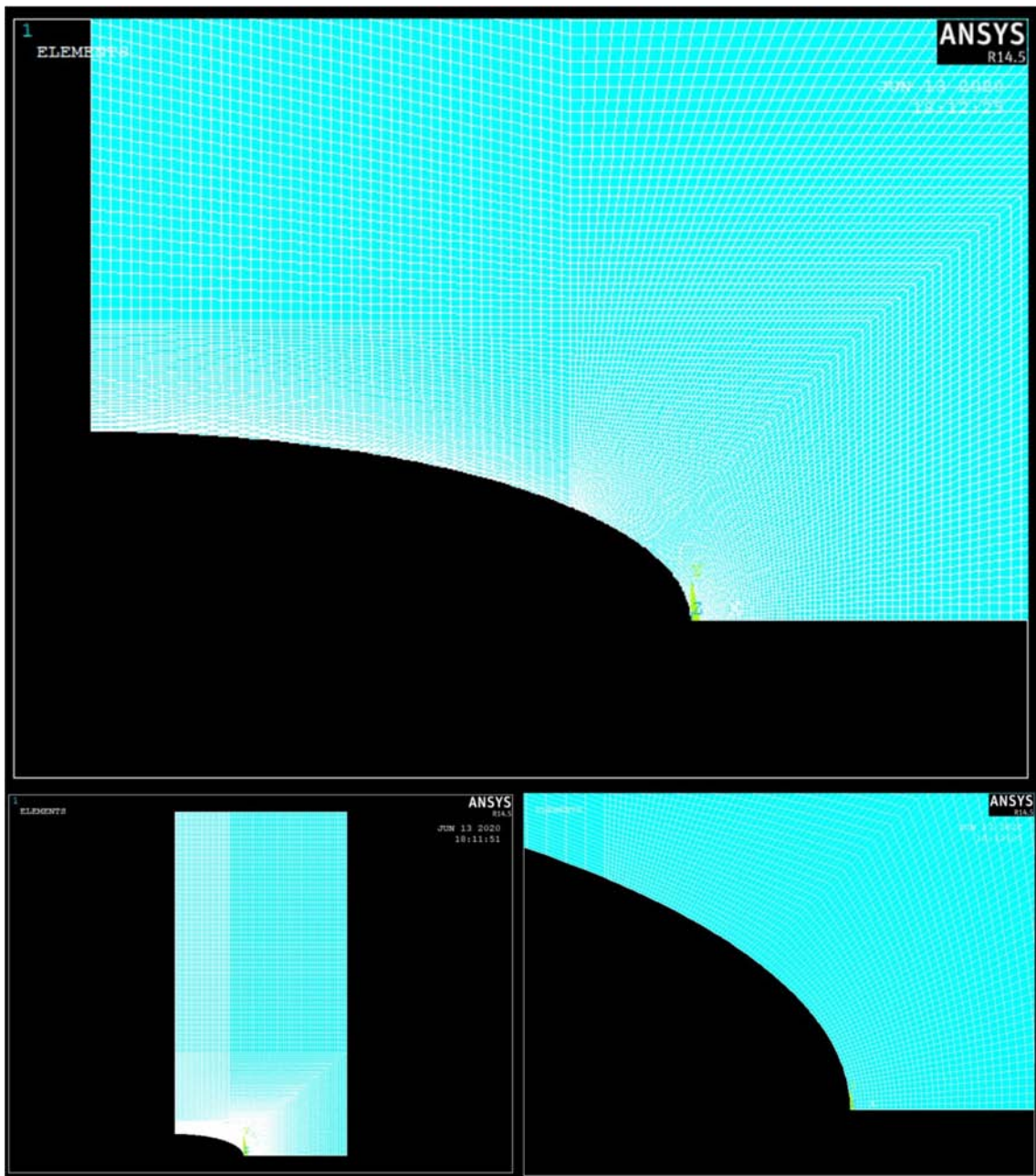


Figura 11 - Modello agli elementi finiti della geometria con foro centrale ellittico con  $h/2 = 15$  mm,  $a = 10$  mm,  $b = 3.16$  mm

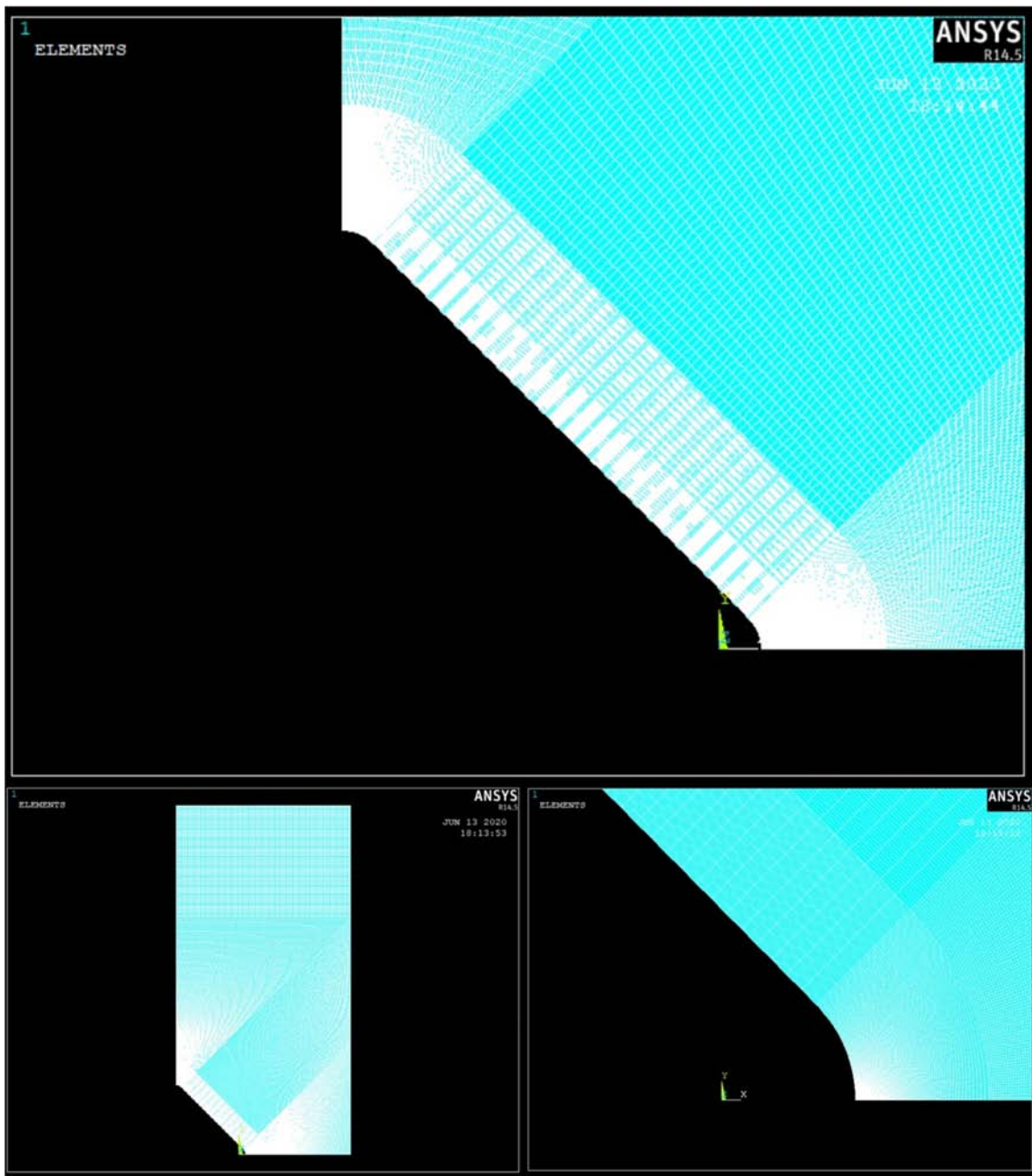


Figura 12 - Modello agli elementi finiti della geometria con foro centrale quadrato con  $h/2 = 15$  mm,  $a = 10$  mm,  $\rho = 1$  mm,  $2\alpha = 90^\circ$

### 3. RISULTATI

I dati ottenuti da ogni analisi sono riassunti in diagrammi doppio logaritmici in cui è rappresentato il rapporto tra la tensione risultante e la tensione di picco elastico  $\sigma_\theta / \sigma_{p,el}$  nelle ordinate e la distanza dall'apice dell'intaglio normalizzata  $x/\rho$  nelle ascisse. Vengono generati dei diagrammi che confrontano diverse geometrie o diversi materiali in modo da valutare l'influenza di singoli parametri sull'andamento dello stato tensionale. Per ognuna delle geometrie o materiali considerati inoltre vengono confrontati i dati ottenuti dal FEM con i valori delle equazioni pertinenti descritte nel precedente capitolo, in modo da confrontare l'affidabilità dei modelli e delle assunzioni fatte. Di seguito sono riassunti in tabelle i valori usati nei parametri che concorrono a ricavare l'equazione (2.34), ovvero  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $t$ ,  $\lambda$ ,  $\chi$ , quindi i seguenti risultati:

- $\sigma_{p,el}$ : tensione di picco elastico ricavata dall'analisi FEM,
- $K_{int}$ : valore del parametro k ricavato numericamente dalla (2.38)
- $K_{2,37}$ : valore del parametro k ricavato numericamente dalla (2.37)
- n: valore dell'esponente dopo una correzione a posteriori sulla base dell'andamento dei dati FEM.

Nelle tabelle seguenti inoltre è evidenziato quale valore dei due valori di k descritti nel capitolo precedente è stato preso in considerazione per descrivere meglio l'andamento delle tensioni. Va sottolineato che in alcuni casi la ricerca numerica di k usando l'equazione (2.38) non ha prodotto risultati coerenti. Infine un'ulteriore precisazione va fatta in merito al parametro t, in alcuni casi (evidenziati nelle tabelle) si sono ottenuti risultati molto migliori forzando il valore di  $t=2$  al posto di quello ricavato dall'equazione (2.29).

U, V notch													
h	$\rho$	$2\alpha$	M.	$\beta_1$	$\beta_2$	t	$\lambda$	$\chi$	$\sigma_{p,el}$	$K_{int}$	$K_{2,37}$	n	
[mm]	[mm]	[°]	-	-	-	-	-	-	Mpa	-	-	-	
30	0,25	0	IS	1,00	1,00	2,00	0,50	-0,98	15,37	9,86	9,06	2,0	
			D1	0,18	1,39	2,00	0,50	-0,13	48,61	8,10	7,49	1,5	
			D2	0,72	5,56	2,00	0,50	-0,13	12,26	7,42	7,62	2,0	
		90	IS	1,00	1,00	1,77	0,54	-0,98	14,36	10,86	11,1	3,0	
			D1	0,18	1,39	1,88	0,51	-0,11	47,74	7,09	7,11	1,5	
			D2	0,72	5,56	2,00	0,59	-0,06	10,33	10,22	11,91	3,0	
	135	IS	1,00	1,00	2,00	0,67	-0,97	9,362	18,20	18,99	2,0		
		D1	0,18	1,39	1,69	0,55	-0,08	42,51	10,10	9,15	1,5		
		D2	0,72	5,56	2,00	0,73	-0,03	6,55	17,50	22,645	3,0		
		1	0	IS	1,00	1,00	2,00	0,50	-0,98	7,99	9,78	9,8	3,0
				D1	0,18	1,39	2,00	0,50	-0,13	24,76	8,76	7,78	1,5
				D2	0,72	5,56	2,00	0,50	-0,13	6,43	8,43	8,4	2,0
90	IS	1,00	1,00	1,77	0,54	-0,98	7,754	10,92	11,49	3,0			
	D1	0,18	1,39	1,88	0,51	-0,11	24,5	7,42	7,32	1,5			

100	2,5	135	D2	0,72	5,56	1,55	0,59	-0,06	5,951	13,65	14,42	3,0
			IS	1,00	1,00	2,00	0,67	-0,97	5,979	18,70	19,24	3,0
			D1	0,18	1,39	1,69	0,55	-0,08	23,01	10,72	9,48	1,5
			D2	0,72	5,56	2,00	0,73	-0,03	4,497	17,26	22,95	3,0
		0	IS	1,00	1,00	2,00	0,50	-0,98	5,296	11,30	10,76	2,0
			D1	0,18	1,39	2,00	0,50	-0,13	15,92	9,42	8,03	1,5
			D2	0,72	5,56	2,00	0,50	-0,13	4,321	9,28	9,47	2,0
			IS	1,00	1,00	1,77	0,54	-0,98	5,232	11,20	12,11	3,0
		90	D1	0,18	1,39	1,88	0,51	-0,11	15,89	9,35	7,58	1,2
			D2	0,72	5,56	1,55	0,59	-0,06	4,18	13,12	15,12	3,0
			IS	1,00	1,00	2,00	0,67	-0,97	4,455	18,05	19,52	3,0
			D1	0,18	1,39	1,69	0,55	-0,08	15,26	10,83	9,6	1,5
	135	D2	0,72	5,56	2,00	0,73	-0,03	3,513	15,20	23,3	4,0	
		IS	1,00	1,00	2,00	0,50	-0,98	15,43	10,09	9,14	1,5	
		D1	0,18	1,39	2,00	0,50	-0,13	44,09	6,18	6,16	1,5	
		D2	0,72	5,56	2,00	0,50	-0,13	12,25	8,31	7,61	1,5	
	0,25	90	IS	1,00	1,00	1,77	0,54	-0,98	14,41	11,72	11,205	2,0
			D1	0,18	1,39	1,88	0,51	-0,11	43,32	5,74	5,83	1,5
			D2	0,72	5,56	1,55	0,59	-0,06	10,31	14,05	13,946	3,0
			IS	1,00	1,00	2,00	0,67	-0,97	9,39	19,57	19,19	3,0
		135	D1	0,18	1,39	1,69	0,55	-0,08	38,54	7,38	7,377	1,5
			D2	0,72	5,56	2,00	0,73	-0,03	6,47	22,71	21,61	2,0
			IS	1,00	1,00	2,00	0,50	-0,98	8,019	11,26	9,88	1,5
			D1	0,18	1,39	2,00	0,50	-0,13	22,47	6,54	6,4	1,5
0		D2	0,72	5,56	2,00	0,50	-0,13	6,425	9,57	8,38	1,5	
		IS	1,00	1,00	1,77	0,54	-0,98	7,786	12,13	11,59	2,0	
		D1	0,18	1,39	1,88	0,51	-0,11	22,23	5,96	6	1,5	
		D2	0,72	5,56	1,55	0,59	-0,06	5,94	15,14	14,35	2,0	
90	IS	1,00	1,00	2,00	0,67	-0,97	6	19,75	19,45	3,0		
	D1	0,18	1,39	1,69	0,55	-0,08	20,86	7,69	7,64	1,5		
	D2	0,72	5,56	2,00	0,73	-0,03	4,438	22,95	21,88	2,0		
	IS	1,00	1,00	2,00	0,50	-0,98	5,32	11,97	10,85	2,0		
2,5	0	D1	0,18	1,39	2,00	0,50	-0,13	14,44	6,92	6,61	1,5	
		D2	0,72	5,56	2,00	0,50	-0,13	4,317	10,24	9,46	2,0	
		IS	1,00	1,00	1,77	0,54	-0,98	5,25	12,77	12,22	2,0	
		D1	0,18	1,39	1,88	0,51	-0,11	14,41	6,26	6,21	1,5	
	90	D2	0,72	5,56	1,55	0,59	-0,06	4,17	15,57	15,03	2,0	
		IS	1,00	1,00	2,00	0,67	-0,97	4,47	21,53	19,73	2,0	
		D1	0,18	1,39	1,69	0,55	-0,08	13,83	7,80	7,73	1,5	
		D2	0,72	5,56	2,00	0,73	-0,03	3,47	23,24	22,169	2,0	

Tabella 5

Key hole notch												
h	$\rho$	$2\alpha$	M.	$\beta_1$	$\beta_2$	t	$\lambda$	$\chi$	$\sigma_{p,el}$	$K_{int}$	$K_{25}$	n
[mm]	[mm]	[°]	-	-	-	-	-	-	Mpa	-	-	-
30	0,25	0	IS	1,00	1,00	2,00	0,50	-0,98	15,42	8,85	9,12	3,0
			D1	0,18	1,39	2,00	0,50	-0,13	48,35	8,1	7,41	1,5
			D2	0,72	5,56	2,00	0,50	-0,13	12,35	7,42	7,74	2,0
		90	IS	1,00	1,00	1,77	0,54	-0,98	15,03	13,8	12,27	3,0
			D1	0,18	1,39	1,88	0,51	-0,11	48,48	7,52	7,34	1,5
			D2	0,72	5,56	1,55	0,59	-0,06	11,26	190	17,308	3,0
		135	IS	1,00	1,00	1,49	0,67	-0,97	11,85		48,14	1,5
			D1	0,18	1,39	1,69	0,55	-0,08	46,05	15,67	10,92	1,5
			D2	0,72	5,56	1,31	0,73	-0,03	8,419		72,52	1,5
	1	0	IS	1,00	1,00	2,00	0,50	-0,98	8,007	9,86	9,85	3,0
			D1	0,18	1,39	2,00	0,50	-0,13	24,79	8,94	7,8	1,5
			D2	0,72	5,56	2,00	0,50	-0,13	6,459	8,56	8,47	2,0
		90	IS	1,00	1,00	1,77	0,54	-0,98	7,97	12,49	12,20	3,0
			D1	0,18	1,39	1,88	0,51	-0,11	24,76	7,73	7,48	1,5
			D2	0,72	5,56	1,55	0,59	-0,06	6,336	20,2	16,83	4,0
		135	IS	1,00	1,00	1,49	0,67	-0,97	7,368		44,96	1,5
			D1	0,18	1,39	1,69	0,55	-0,08	24,51	15,18	10,90	1,5
			D2	0,72	5,56	1,31	0,73	-0,03	5,637		67,06	1,5
	2,5	0	IS	1,00	1,00	2,00	0,50	-0,98	5,299	11,14	10,77	3,0
			D1	0,18	1,39	2,00	0,50	-0,13	15,93	9,44	8,04	1,5
			D2	0,72	5,56	2,00	0,50	-0,13	4,324	9,31	9,49	2,0
		90	IS	1,00	1,00	1,77	0,54	-0,98	5,295	13,95	12,43	2,0
			D1	0,18	1,39	1,88	0,51	-0,11	15,85	7,83	7,54	1,5
			D2	0,72	5,56	1,55	0,59	-0,06	4,319	20,3	16,38	2,0
135		IS	1,00	1,00	1,49	0,67	-0,97	5,234		39,43	1,5	
		D1	0,18	1,39	1,69	0,55	-0,08	15,91	13,48	10,52	1,5	
		D2	0,72	5,56	1,31	0,73	-0,03	4,205		57,50	1,5	
100	0,25	0	IS	1,00	1,00	2,00	0,50	-0,98	15,48	10,17	9,20	1,5
			D1	0,18	1,39	2,00	0,50	-0,13	43,86	6,11	6,10	1,5
			D2	0,72	5,56	2,00	0,50	-0,13	12,34	8,45	7,72	1,5
		90	IS	1,00	1,00	2,00	0,54	-0,98	15,09	11,85	11,25	2,0
			D1	0,18	1,39	1,88	0,51	-0,11	43,98	5,95	6,02	1,5
			D2	0,72	5,56	2,00	0,59	-0,06	11,24	16,16	14,67	2,0
		135	IS	1,00	1,00	2,00	0,67	-0,97	11,89	550	39,50	1,5
			D1	0,18	1,39	1,69	0,55	-0,08	41,76	9,21	8,80	1,5
			D2	0,72	5,56	2,00	0,73	-0,03	8,32		54,34	1,5
	1	0	IS	1,00	1,00	2,00	0,50	-0,98	8,04	11,34	9,93	1,5
			D1	0,18	1,39	2,00	0,50	-0,13	22,5	6,57	6,42	1,5
			D2	0,72	5,56	2,00	0,50	-0,13	6,452	9,67	8,45	1,5
		90	IS	1,00	1,00	1,77	0,54	-0,98	8,003	13,14	12,32	2,0
			D1	0,18	1,39	1,88	0,51	-0,11	22,46	6,11	6,13	1,5
			D2	0,72	5,56	1,55	0,59	-0,06	6,328	16,9	16,77	2,0
		135	IS	1,00	1,00	2,00	0,67	-0,97	7,397	77,6	36,91	3,0
			D1	0,18	1,39	1,69	0,55	-0,08	22,24	9,18	8,80	1,5
			D2	0,72	5,56	2,00	0,73	-0,03	5,592		50,87	3,0
	2,5	0	IS	1,00	1,00	2,00	0,50	-0,98	5,32	11,97	10,86	2,0

			D1	0,18	1,39	2,00	0,50	-0,13	14,45	6,93	6,62	1,5
			D2	0,72	5,56	2,00	0,50	-0,13	4,32	10,25	9,47	2,0
			IS	1,00	1,00	1,77	0,54	-0,98	5,32	13,28	12,54	2,0
		90	D1	0,18	1,39	1,88	0,51	-0,11	14,38	6,23	6,18	1,5
			D2	0,72	5,56	1,55	0,59	-0,06	4,32	17,56	16,34	2,0
			IS	1,00	1,00	2,00	0,67	-0,97	5,26	59,3	32,39	2,0
		135	D1	0,18	1,39	1,69	0,55	-0,08	14,43	8,77	8,49	1,5
			D2	0,72	5,56	2,00	0,73	-0,03	4,19	280	44,33	2,0

Tabella 6

Elliptic hole												
h	$\rho$	b	M.	$\beta_1$	$\beta_2$	t	$\lambda$	$\chi$	$\sigma_{p,el}$	$K_{int}$	$K_{25}$	n
[mm]	[mm]	[°]	-	-	-	-	-	-	Mpa	-	-	-
15	0,25	1,58	IS	1,00	1,00	2,00	0,50	-0,98	15,37	9,86	9,07	1,50
			D1	0,18	1,39	2,00	0,50	-0,13	51,80	10,60	8,50	1,50
			D2	0,72	5,56	2,00	0,50	-0,13	12,16	7,22	7,50	1,50
	1	3,16	IS	1,00	1,00	2,00	0,54	-0,98	8,38	17,80	10,79	1,50
			D1	0,18	1,39	2,00	0,51	-0,11	25,85	10,50	8,47	1,50
			D2	0,72	5,56	2,00	0,59	-0,06	6,83	12,78	9,47	1,50
	2,5	5	IS	1,00	1,00	2,00	0,67	-0,97	5,85	25,20	13,13	1,50
			D1	0,18	1,39	2,00	0,55	-0,08	17,92	17,10	10,18	1,50
			D2	0,72	5,56	2,00	0,73	-0,03	4,93	23,30	12,35	1,50
50	0,25	1,58	IS	1,00	1,00	2,00	0,50	-0,98	13,92	7,75	7,43	1,50
			D1	0,18	1,39	2,00	0,50	-0,13	42,51	5,66	5,73	1,50
			D2	0,72	5,56	2,00	0,50	-0,13	11,12	6,58	6,27	1,50
	1	3,16	IS	1,00	1,00	2,00	0,54	-0,98	7,49	9,43	8,60	1,50
			D1	0,18	1,39	2,00	0,51	-0,11	21,02	5,59	5,60	1,50
			D2	0,72	5,56	2,00	0,59	-0,06	6,09	8,37	7,52	1,50
	2,5	5	IS	1,00	1,00	2,00	0,67	-0,97	5,12	10,87	10,08	2,00
			D1	0,18	1,39	2,00	0,55	-0,08	14,40	6,87	6,57	1,50
			D2	0,72	5,56	2,00	0,73	-0,03	4,25	9,84	9,16	2,00

Tabella 7

Square hole												
h	$\rho$	$2\alpha$	M.	$\beta_1$	$\beta_2$	t	$\lambda$	$\chi$	$\sigma_{p,el}$	$K_{int}$	$K_{25}$	n
[mm]	[mm]	[°]	-	-	-	-	-	-	Mpa	-	-	-
15	0,25	90	IS	1,00	1,00	2,00	0,54	-0,98	16,61	43,40	13,88	1,5
			D1	0,18	1,39	1,88	0,51	-0,11	56,23	14,95	9,92	1,5
			D2	0,72	5,56	2,00	0,59	-0,06	12,82		23,80	3,0
	1	90	IS	1,00	1,00	2,00	0,54	-0,98	9,05	54,00	14,64	1,5
			D1	0,18	1,39	1,88	0,51	-0,11	28,87	16,00	10,23	1,5
			D2	0,72	5,56	2,00	0,59	-0,06	7,45		21,36	1,5
	2,5	90	IS	1,00	1,00	2,00	0,54	-0,98	6,19	106,0	17,5	1,5

			D1	0,18	1,39	1,88	0,51	-0,11	18,75	17,70	10,61	1,5
			D2	0,72	5,56	2,00	0,59	-0,06	5,32		23,3255	2,0
50	0,25	90	IS	1,00	1,00	1,77	0,54	-0,98	14,4	11,70	11,17	2,0
			D1	0,18	1,39	1,88	0,51	-0,11	44,27	6,04	6,1	1,5
			D2	0,72	5,56	1,549	0,59	-0,06	10,68	16,79	15,20	2,0
	1	90	IS	1,00	1,00	1,77	0,54	-0,98	7,8	12,19	11,63	2,0
			D1	0,18	1,39	1,88	0,51	-0,11	22,68	6,26	6,26	1,5
			D2	0,72	5,56	1,55	0,59	-0,06	6,16	17,18	15,70	2,0
	2,5	90	IS	1,00	1,00	1,77	0,54	-0,98	5,28	12,98	12,34	2,0
			D1	0,18	1,39	1,88	0,51	-0,11	14,67	6,53	6,44	1,5
			D2	0,72	5,56	1,55	0,59	-0,06	4,34	17,92	16,54	2,0

Tabella 8



### 3.1 Intagli a U e a V raccordati all'apice e forati all'apice

Di seguito sono riportati i grafici che confrontano le geometrie caratterizzate da intagli laterali con raccordo all'apice e geometrie con intagli laterali forati all'apice a parità di materiale considerato e di altri parametri geometrici. Ciò permette di valutare la l'eventuale differenza sull'andamento delle tensioni tra geometrie con intagli ad U o V raccordati e geometrie con intagli a key hole. Nei grafici sono poi rappresentate le equazioni teoriche descritte nel capitolo 2, il confronto da una prima indicazione sull'accuratezza dell'equazione (2.35) con la correzione mediante smoothing function.

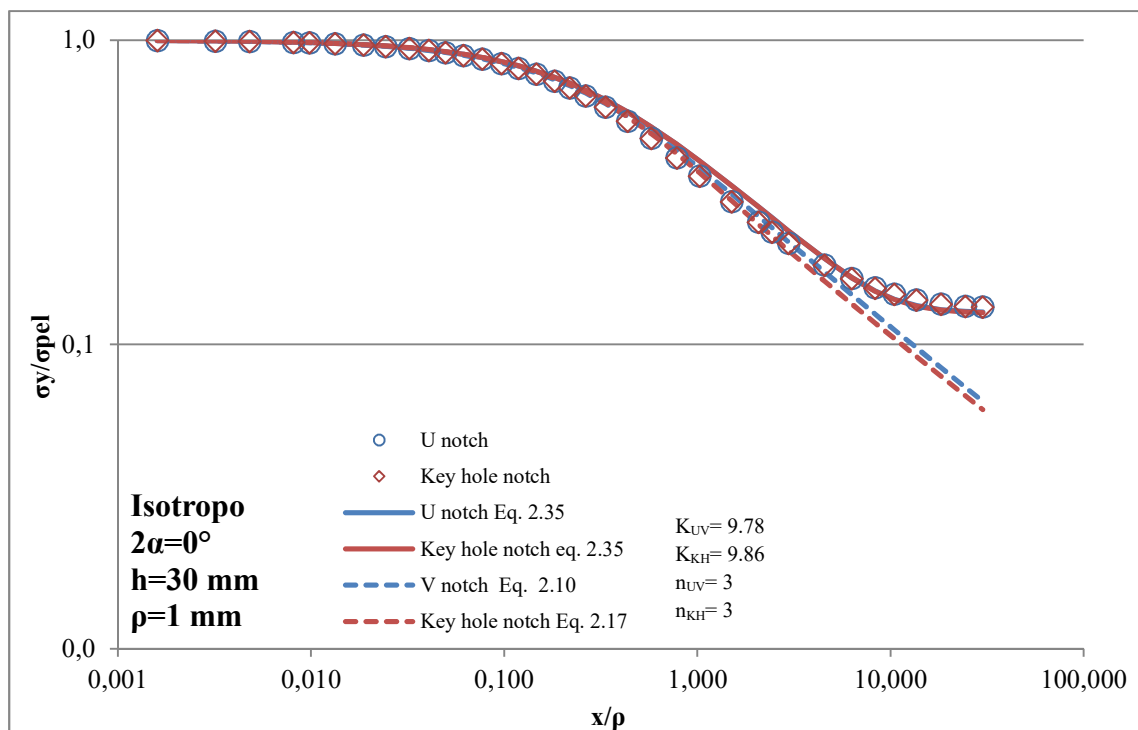


Figura 13 – Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

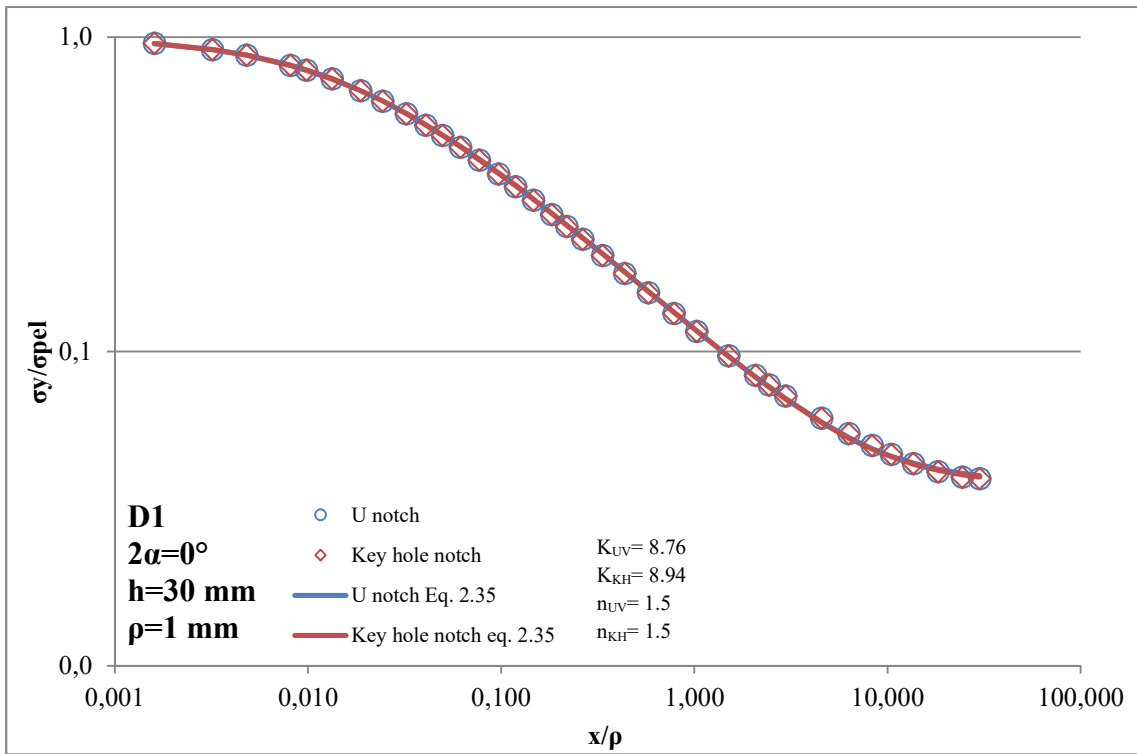


Figura 14– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

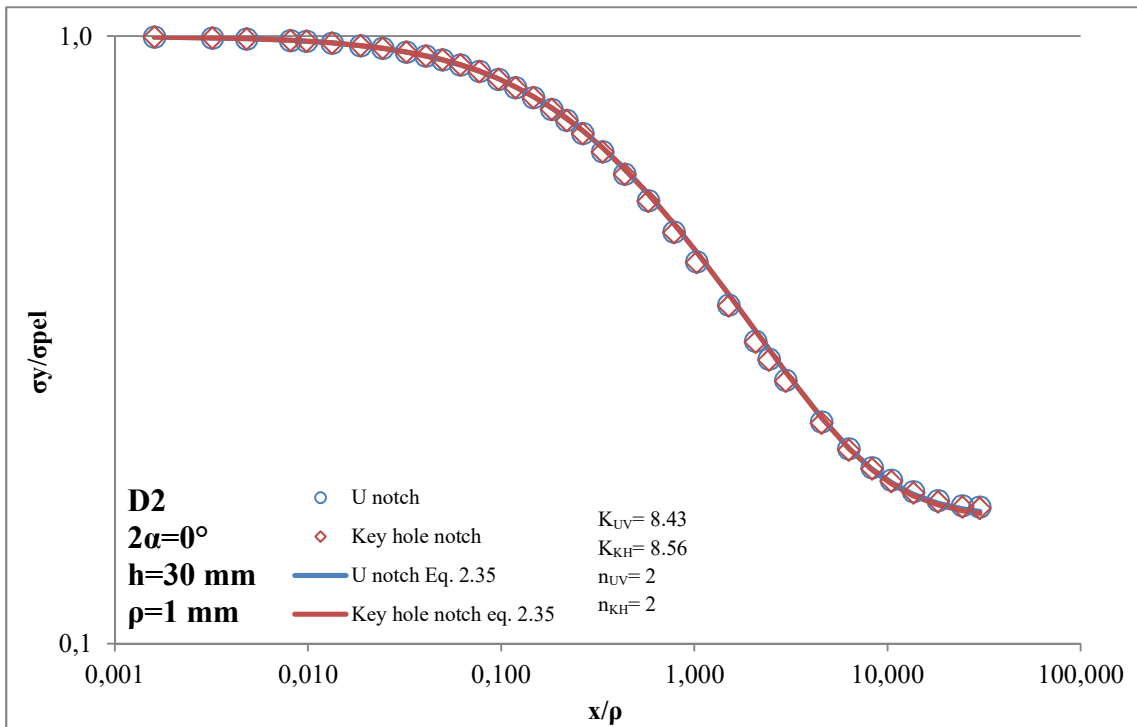


Figura 15– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

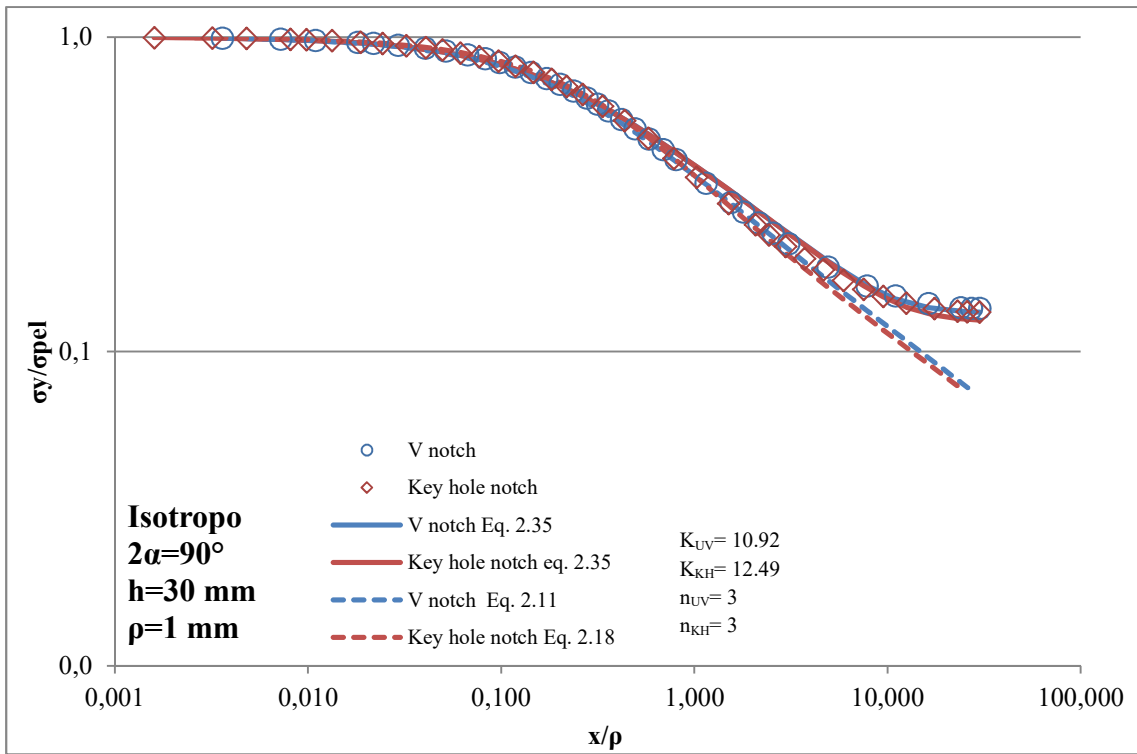


Figura 16– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

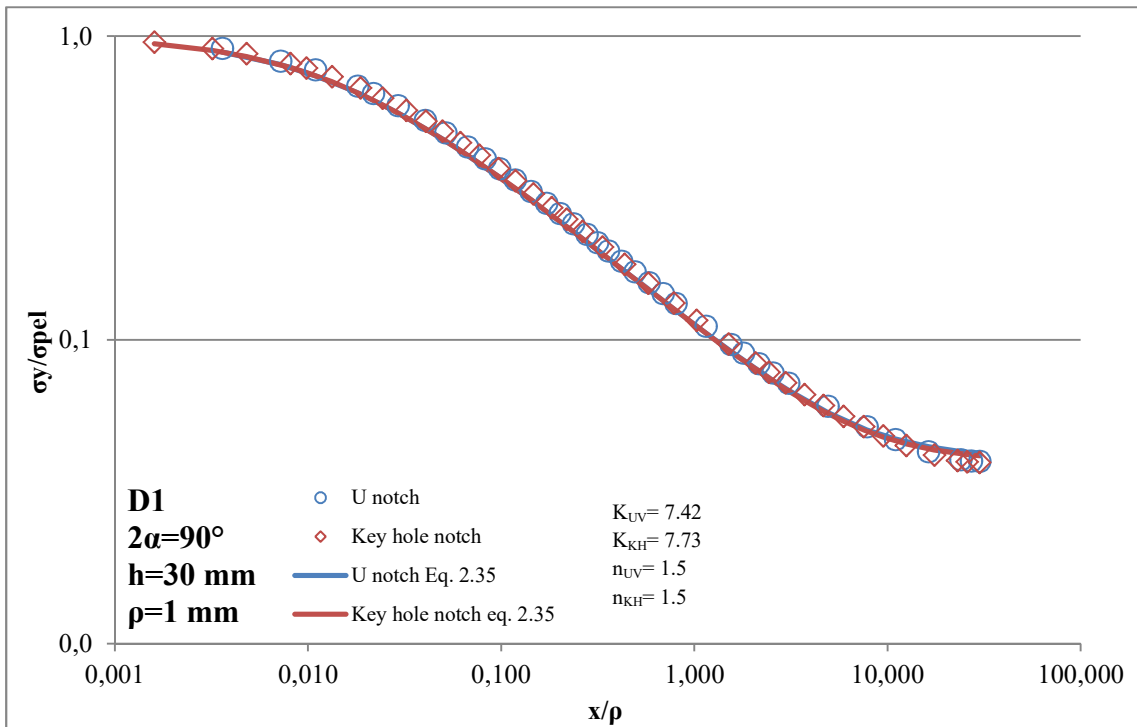


Figura 17– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

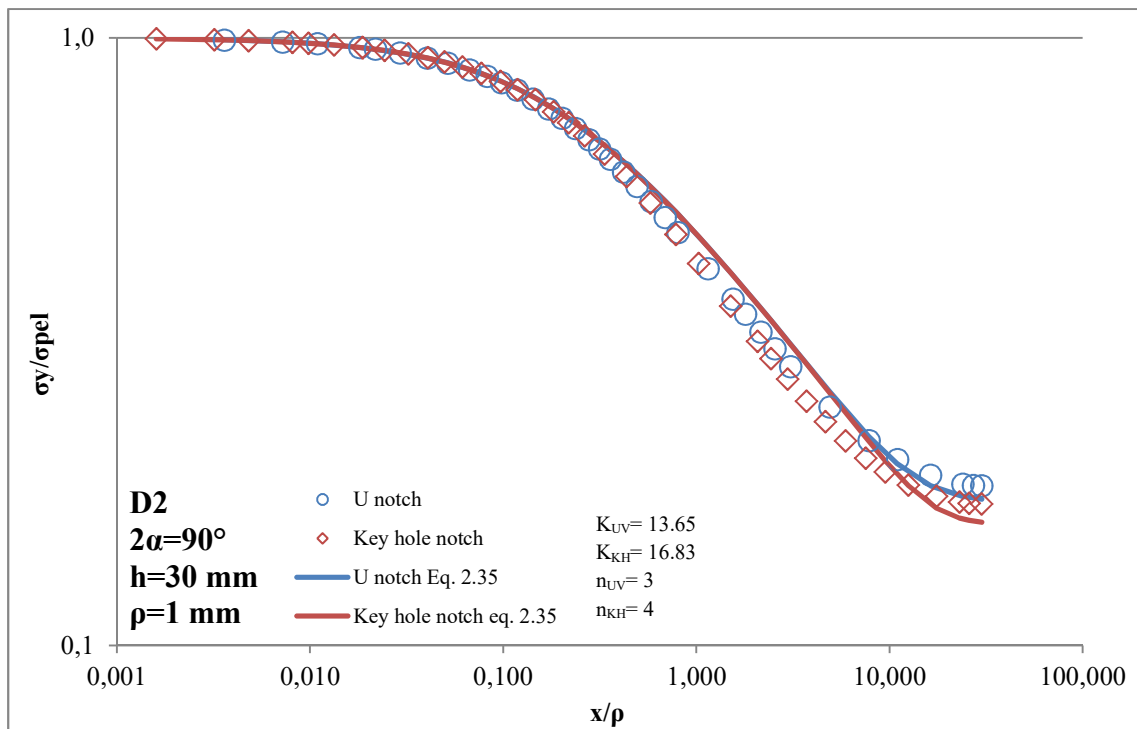


Figura 18– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

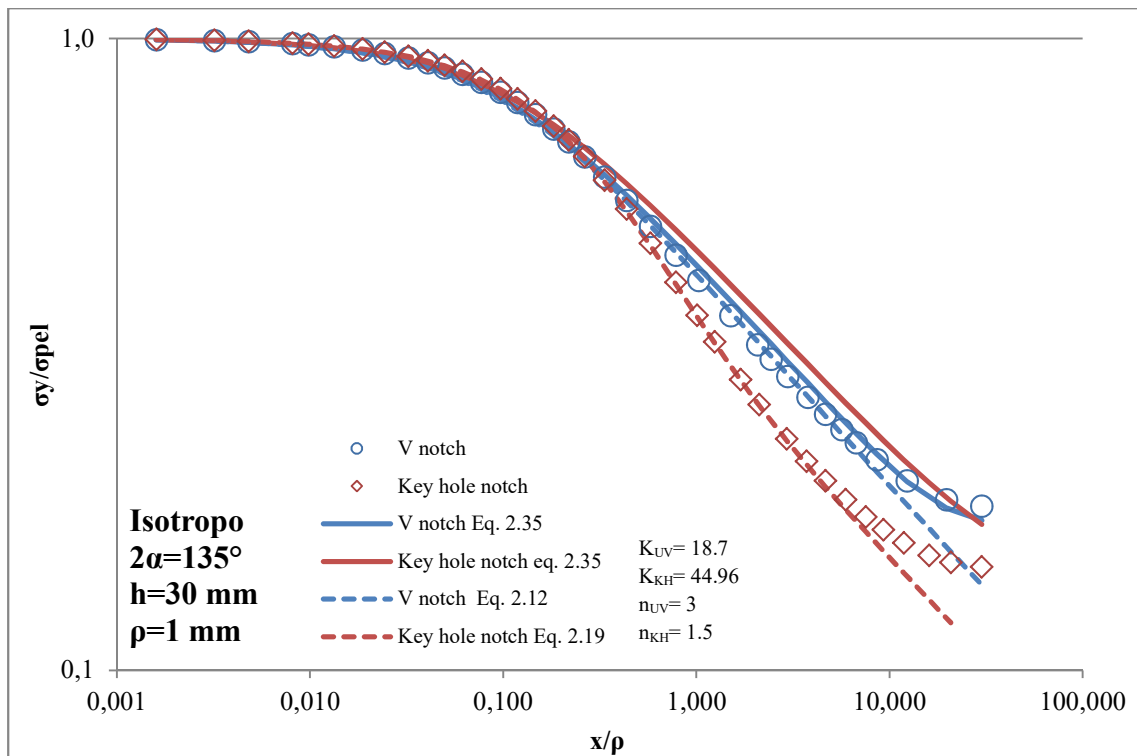


Figura 19– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

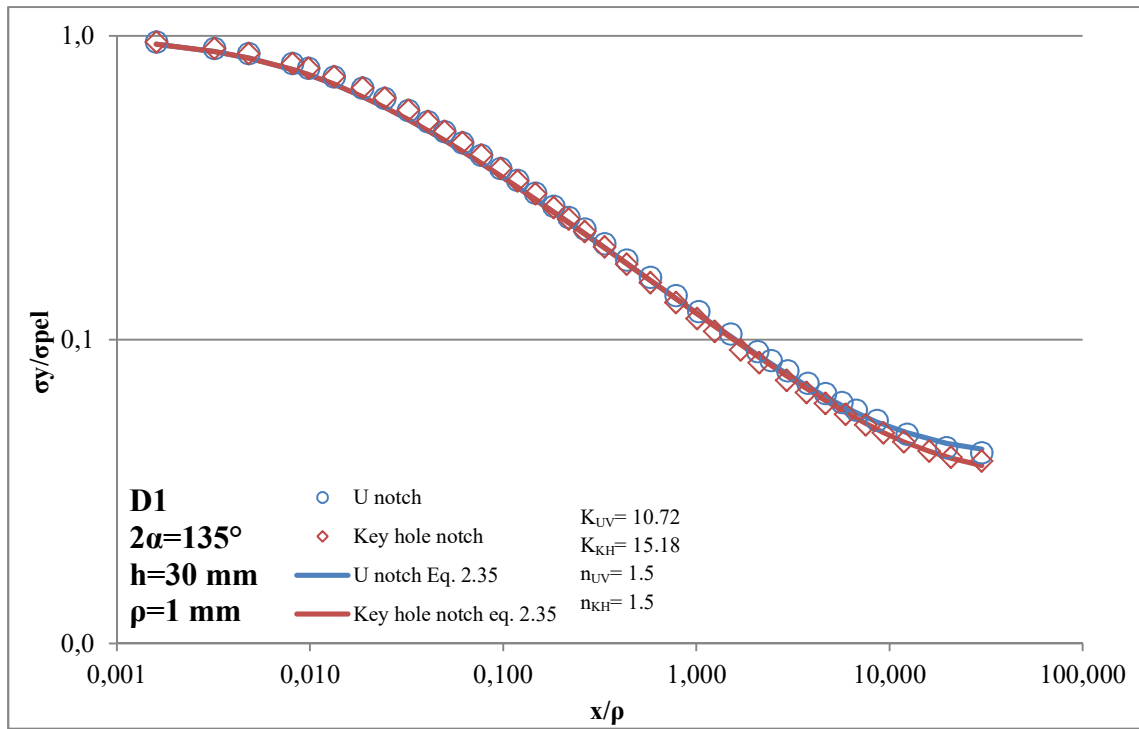


Figura 20– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

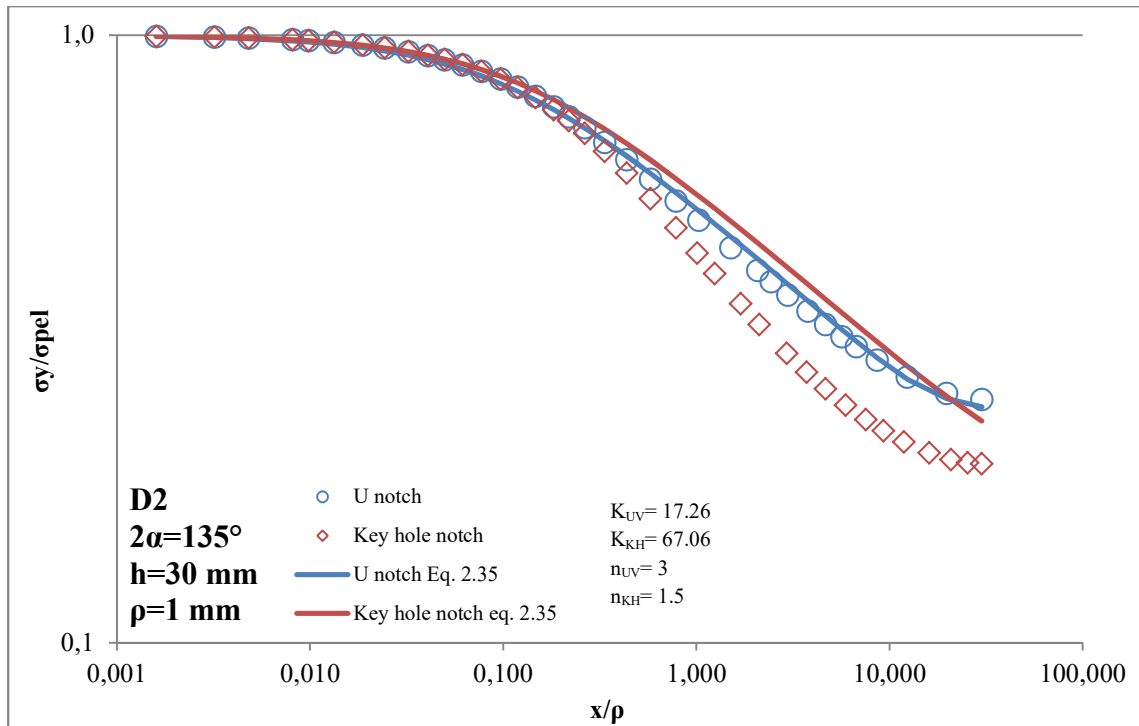


Figura 21– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

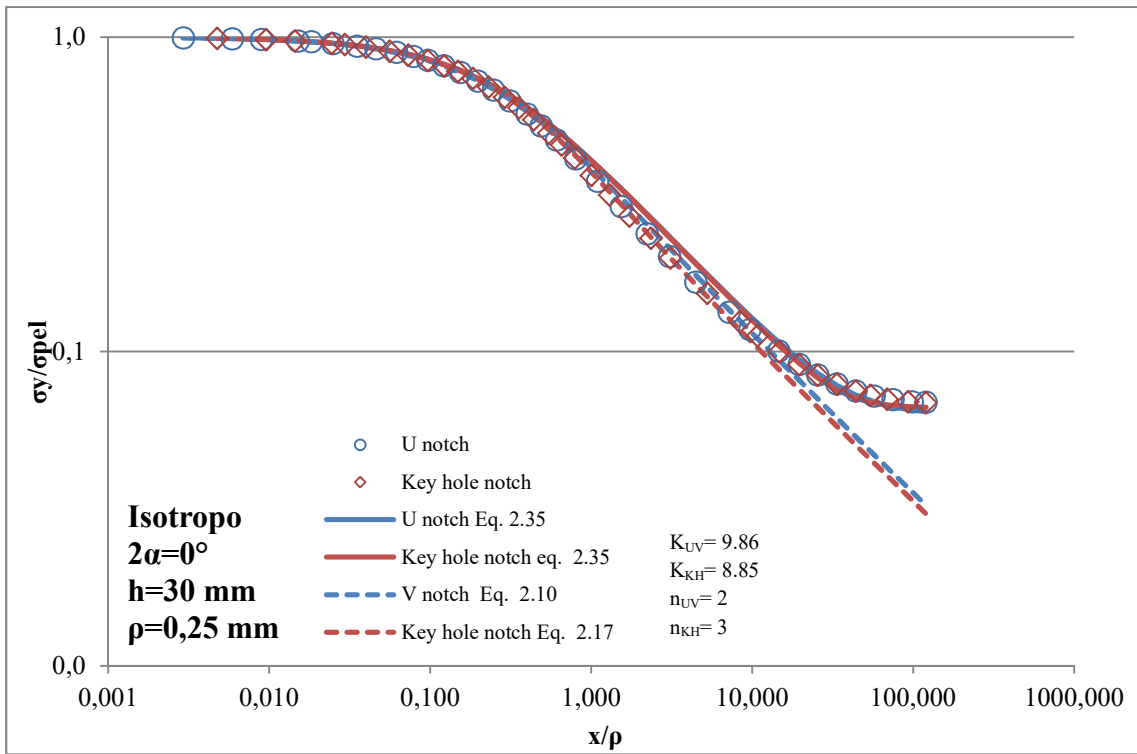


Figura 22– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

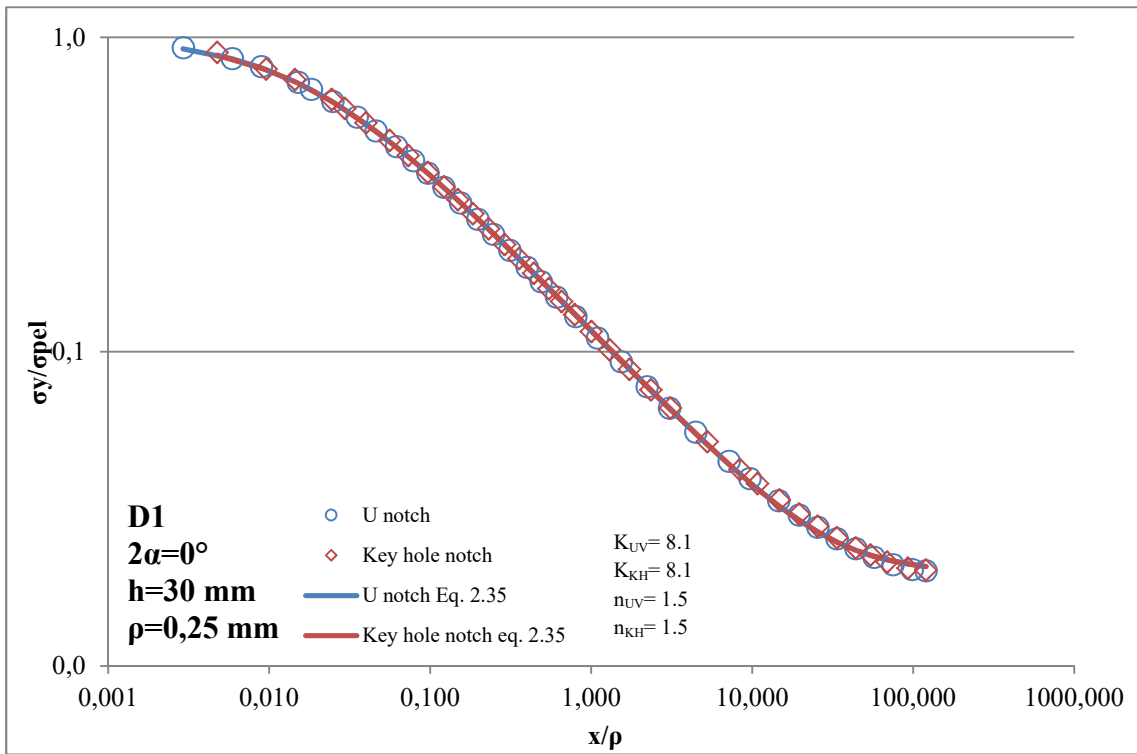


Figura 23– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

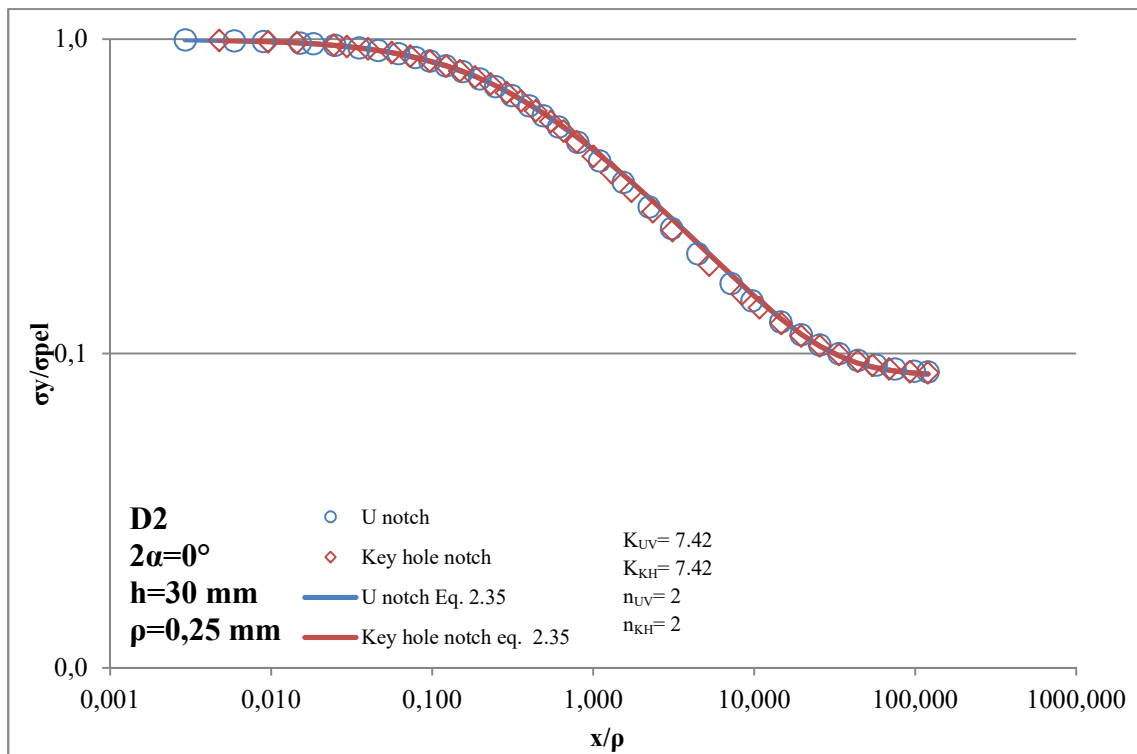


Figura 24– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

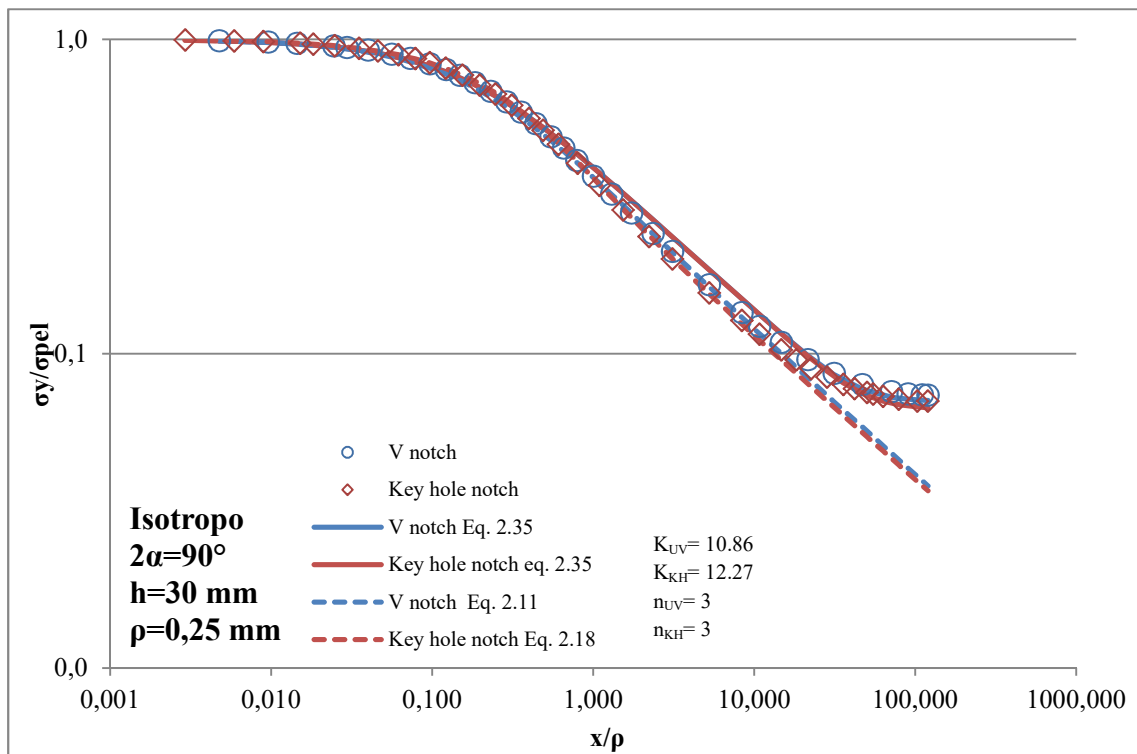


Figura 25– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

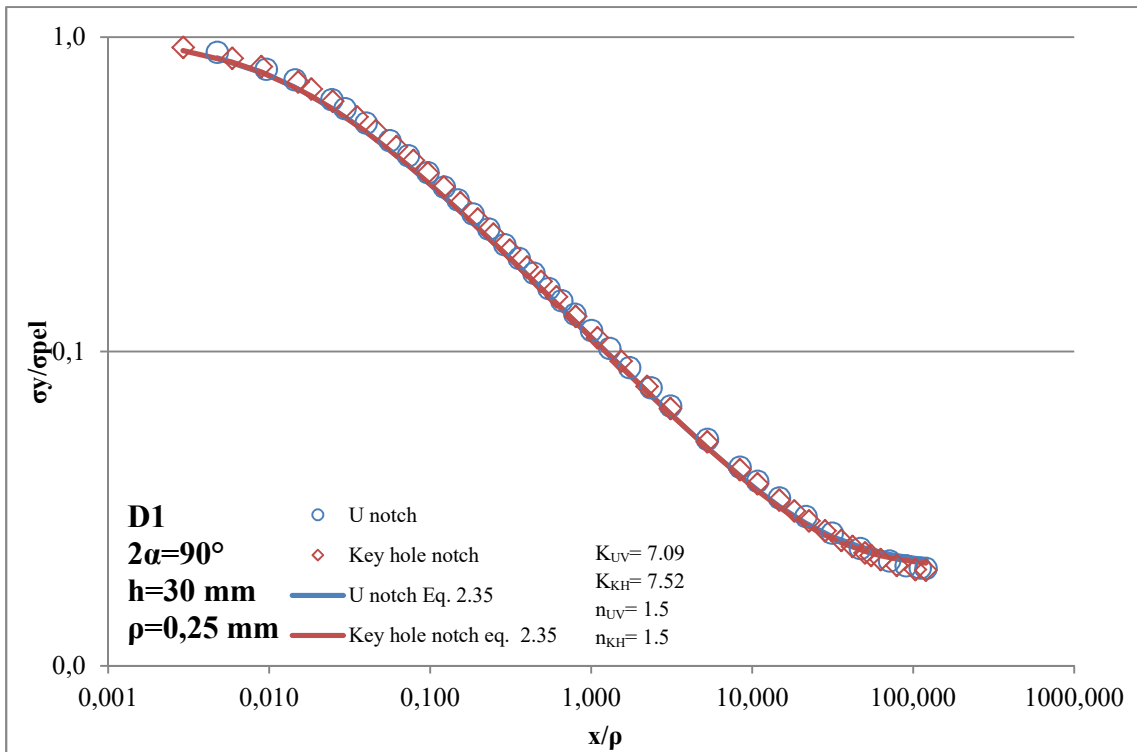


Figura 26– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

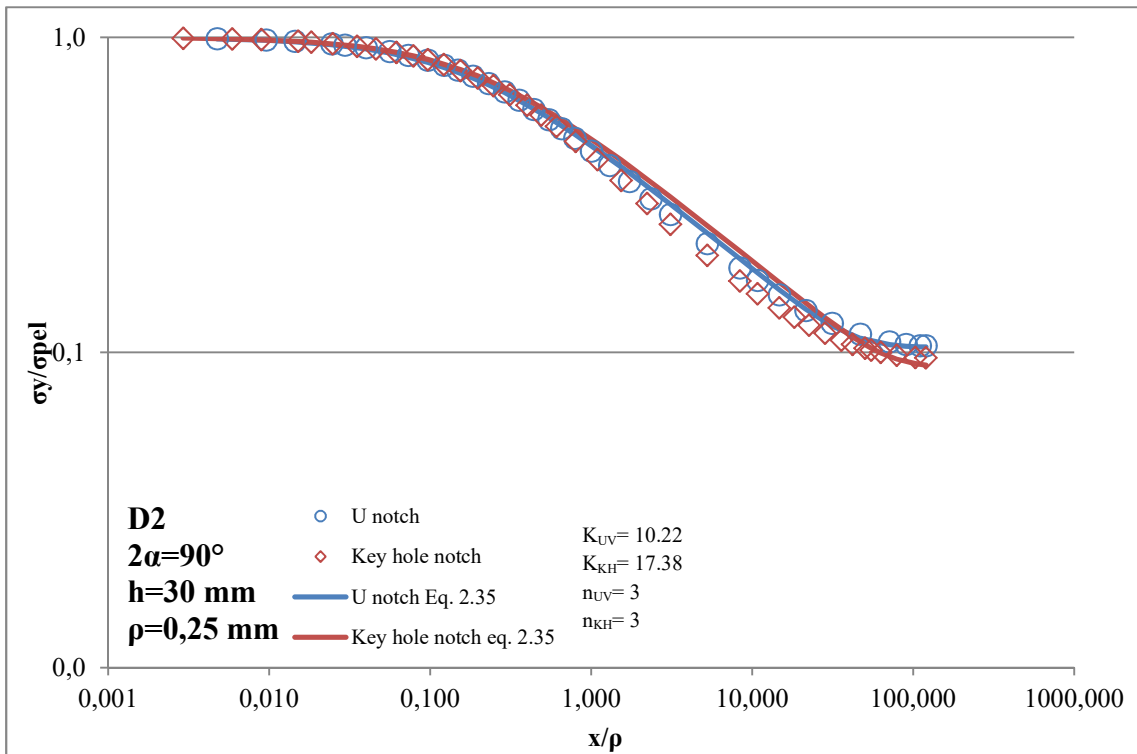


Figura 27– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$



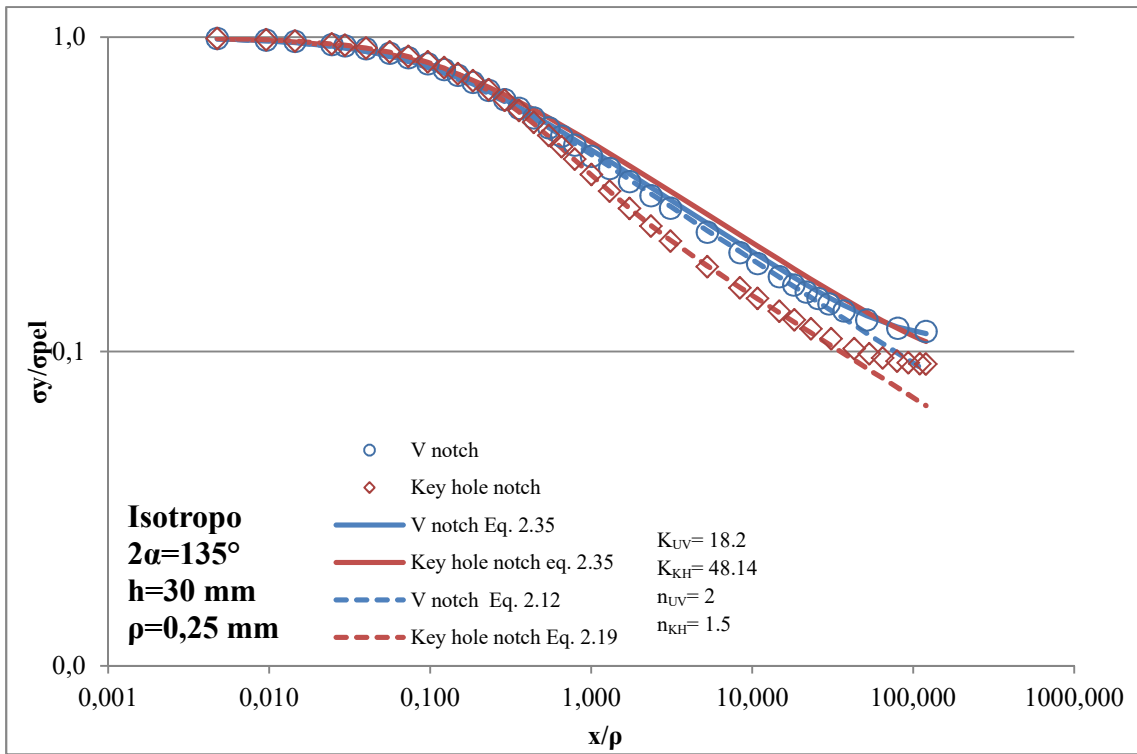


Figura 28– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

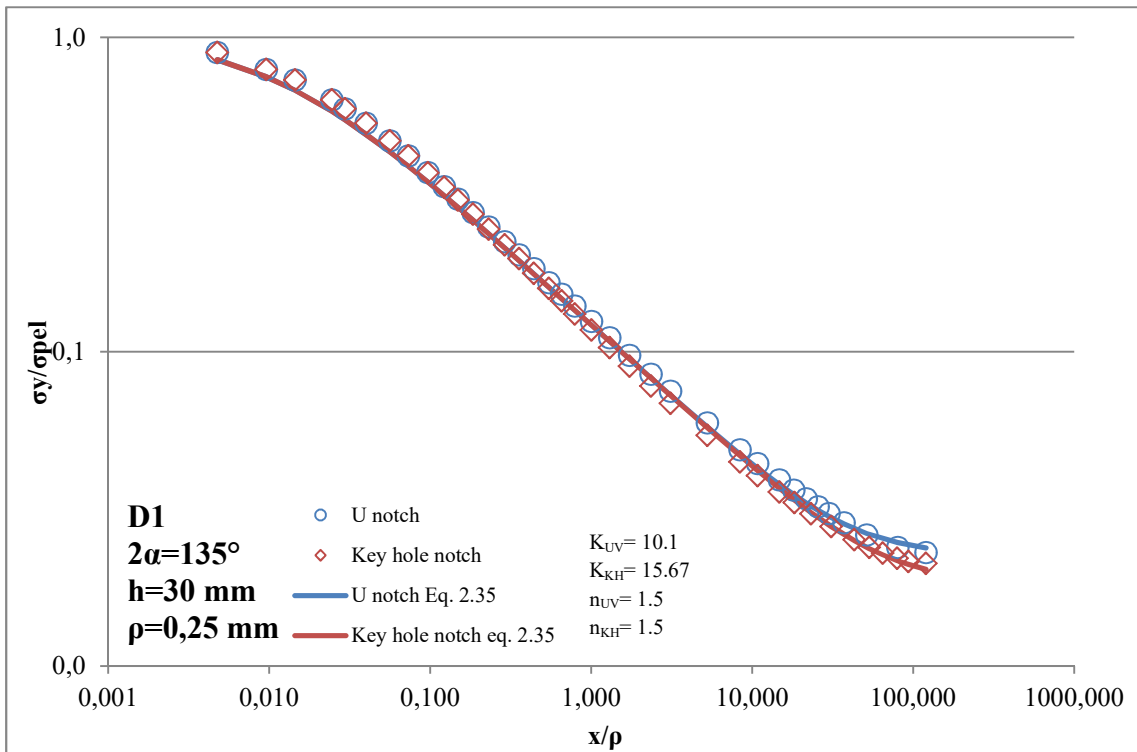


Figura 29– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

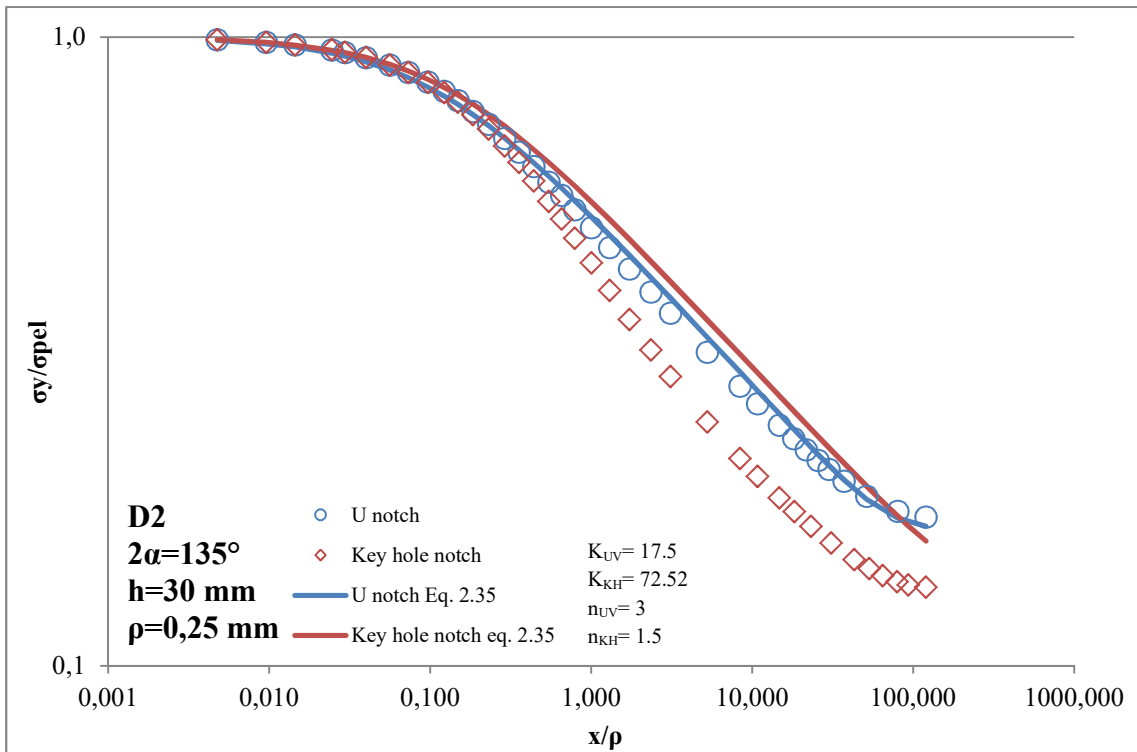


Figura 30– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

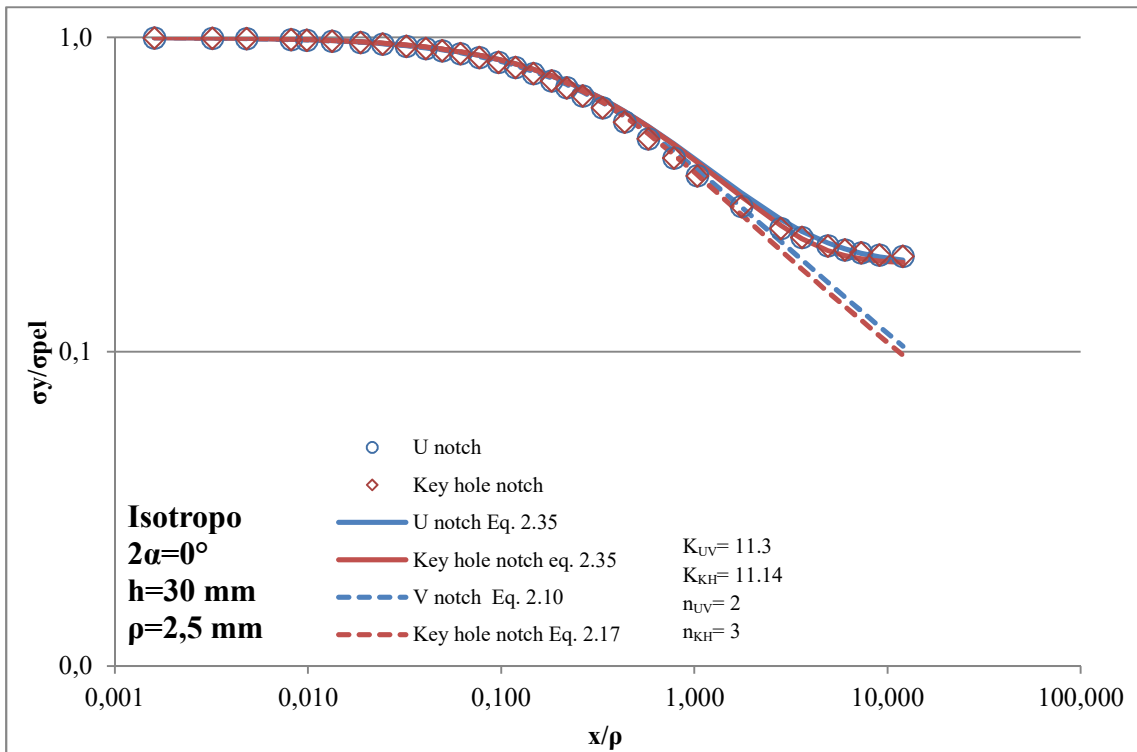


Figura 31– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

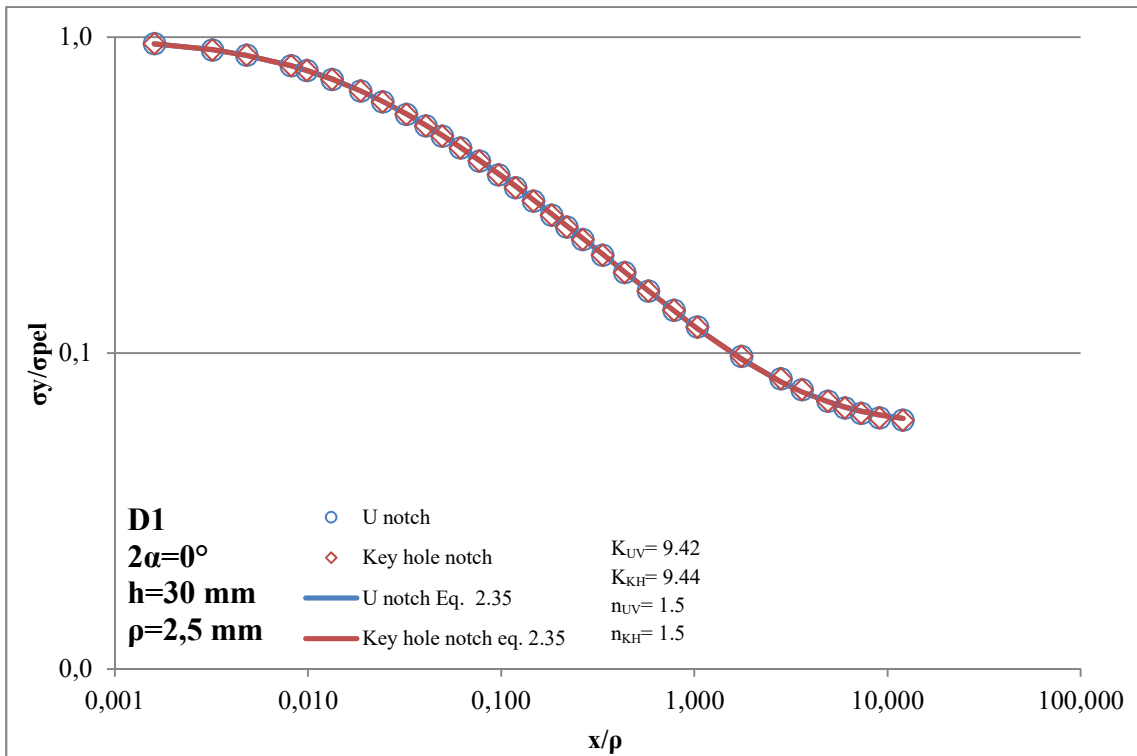


Figura 32– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

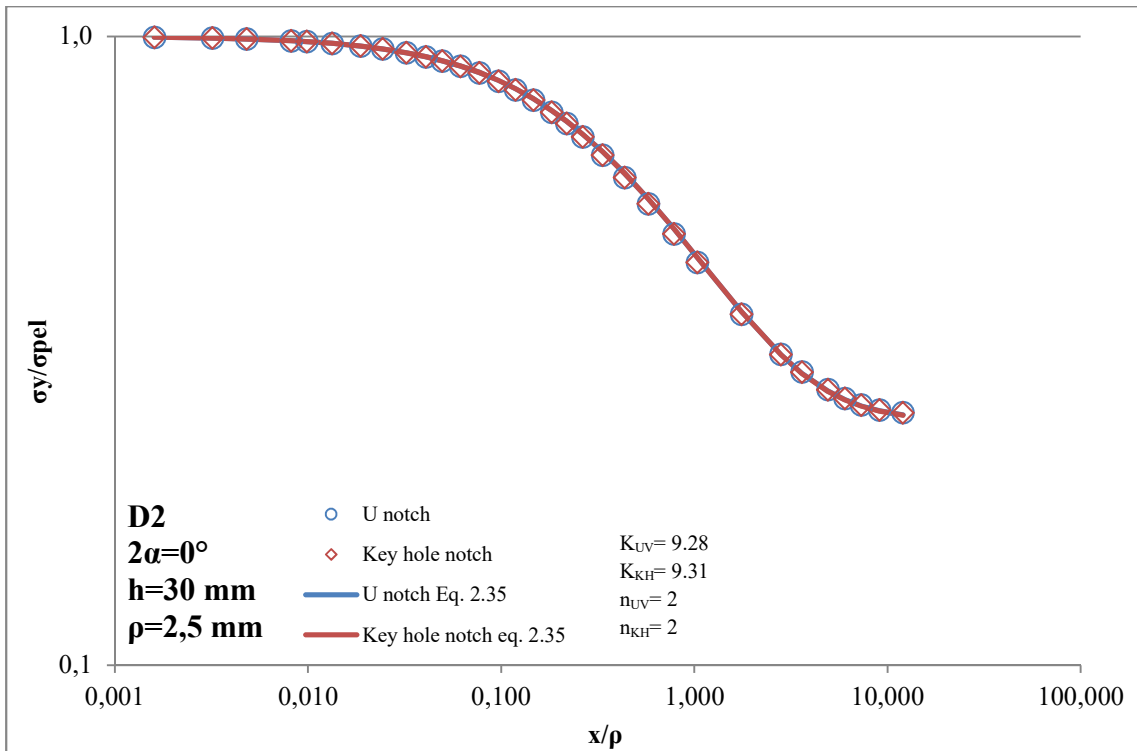


Figura 33– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

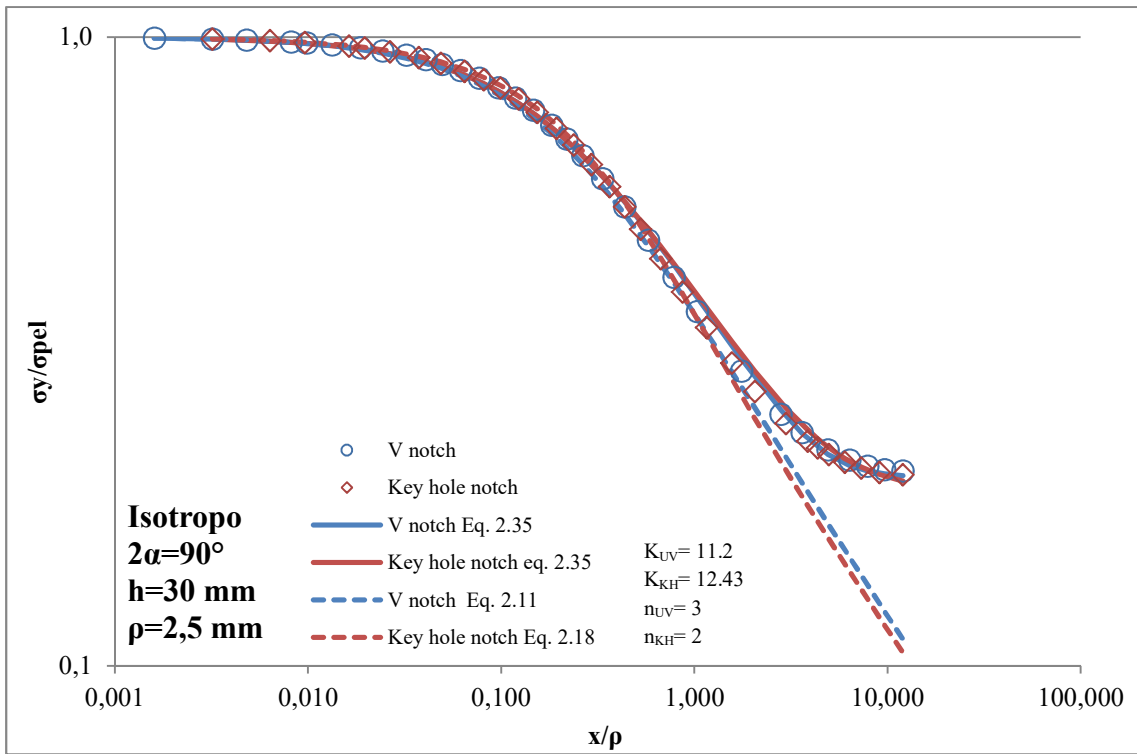


Figura 34– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

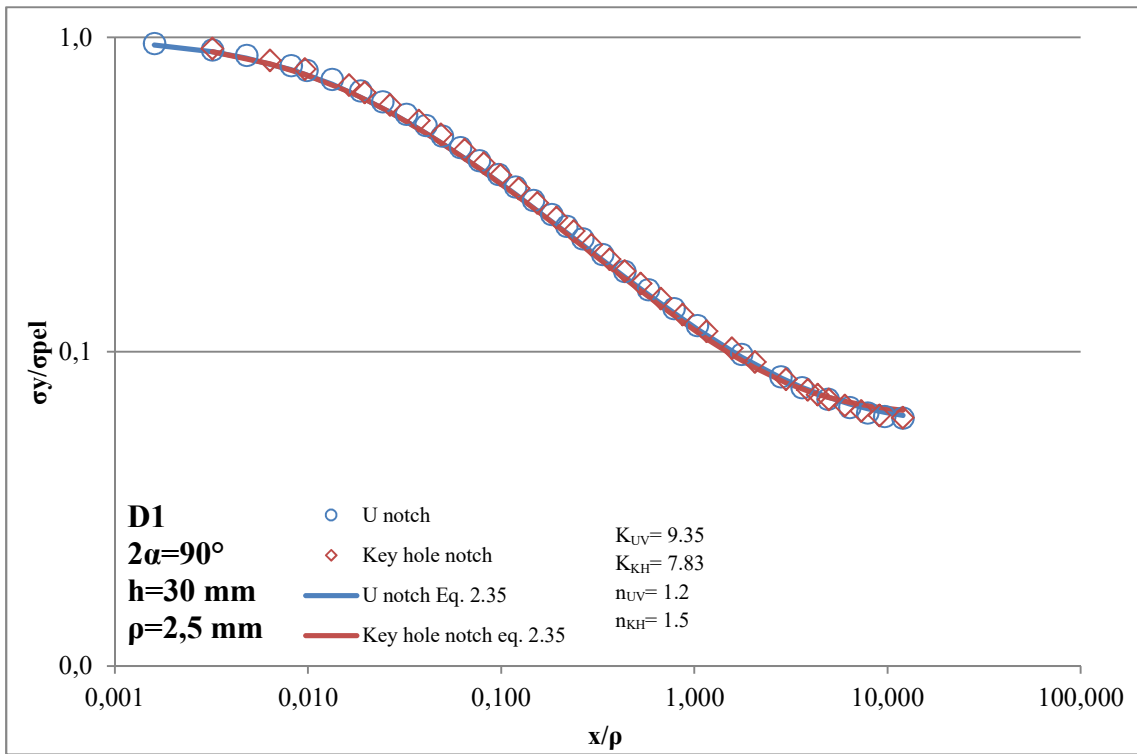


Figura 35– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

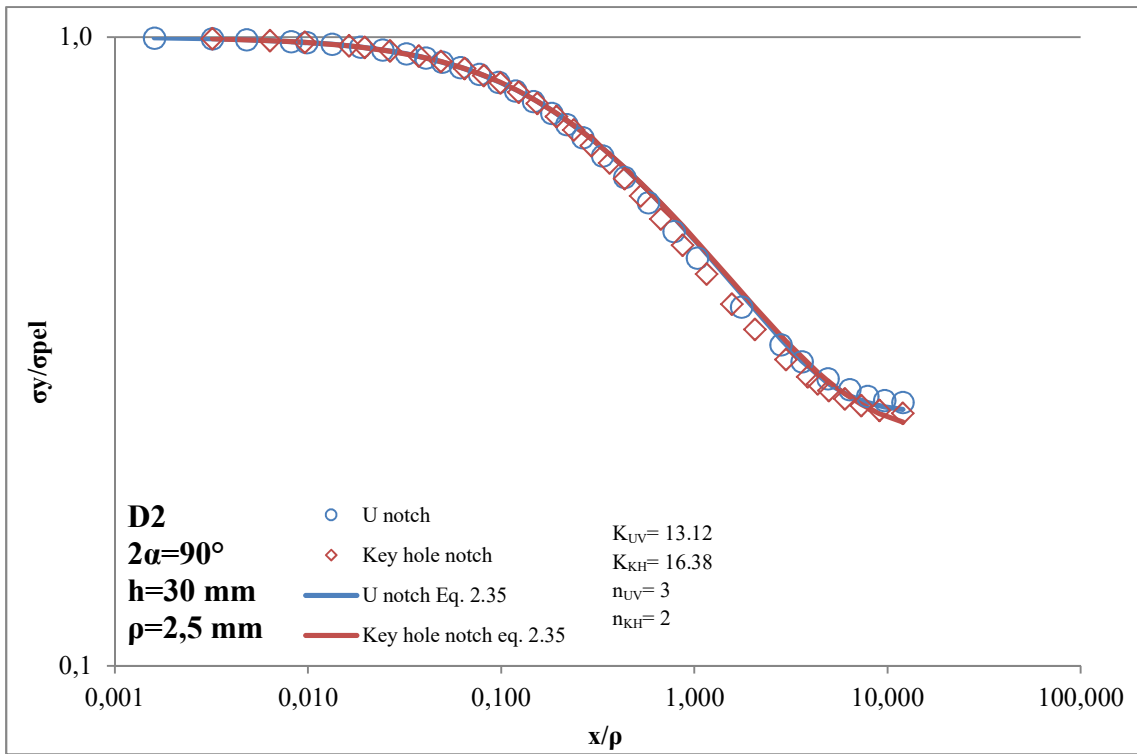


Figura 36– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

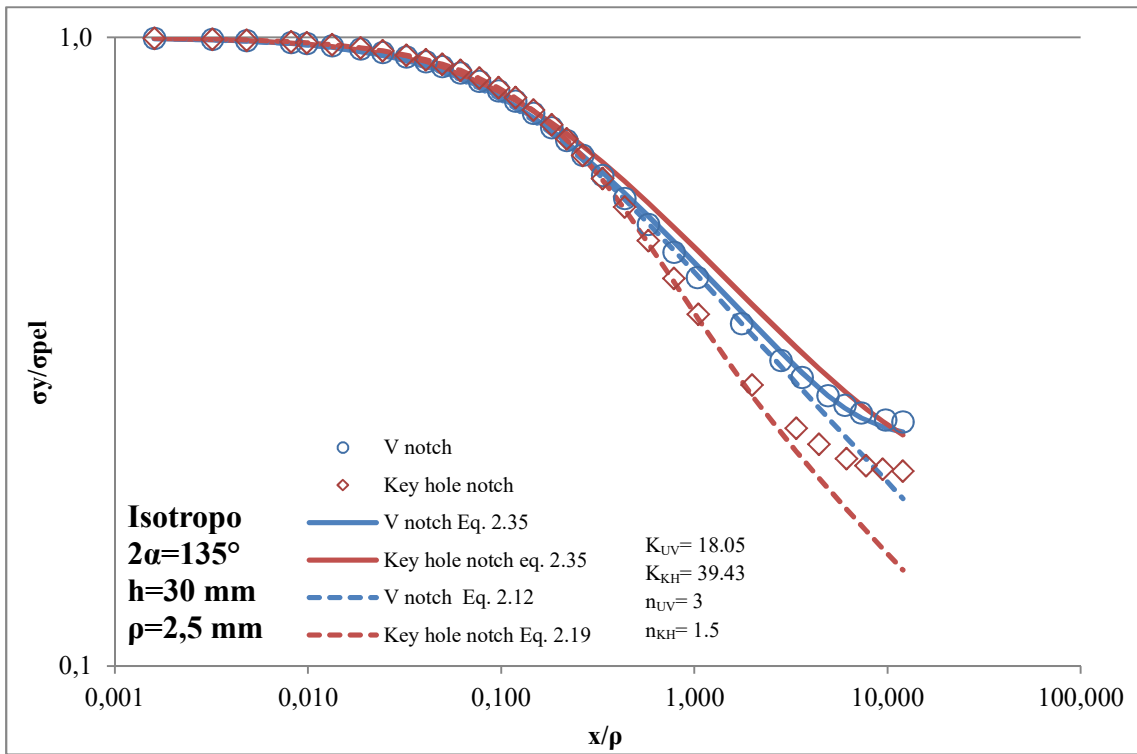


Figura 37– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

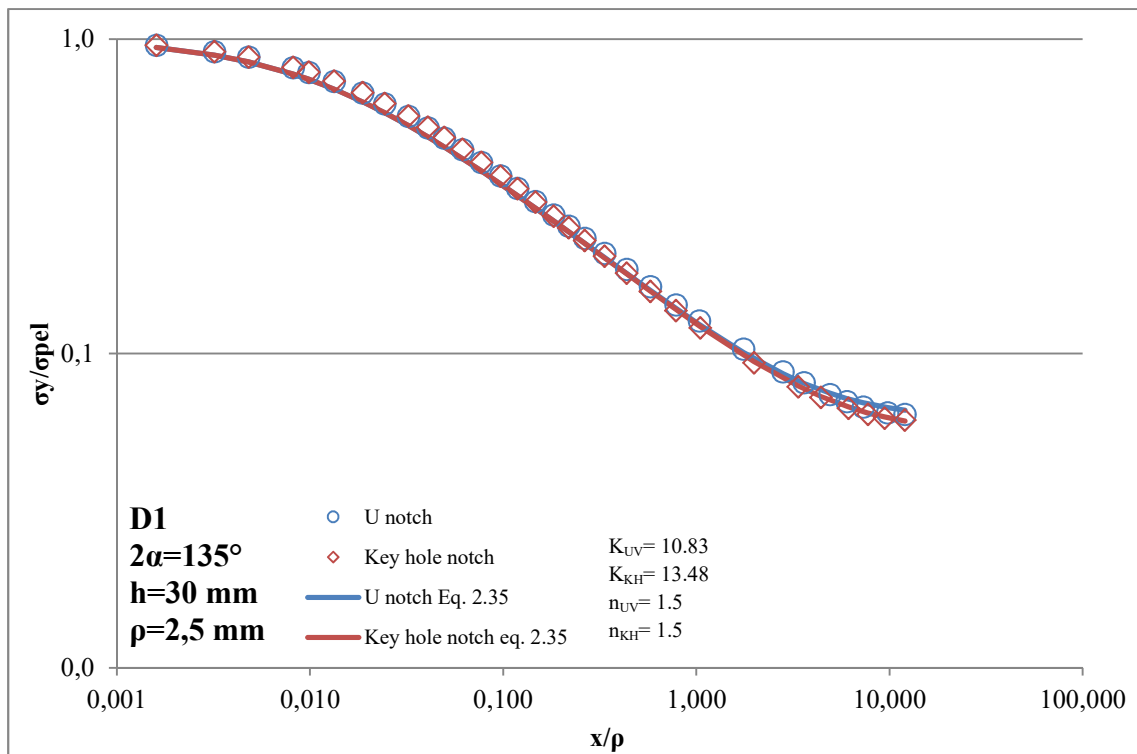


Figura 38– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

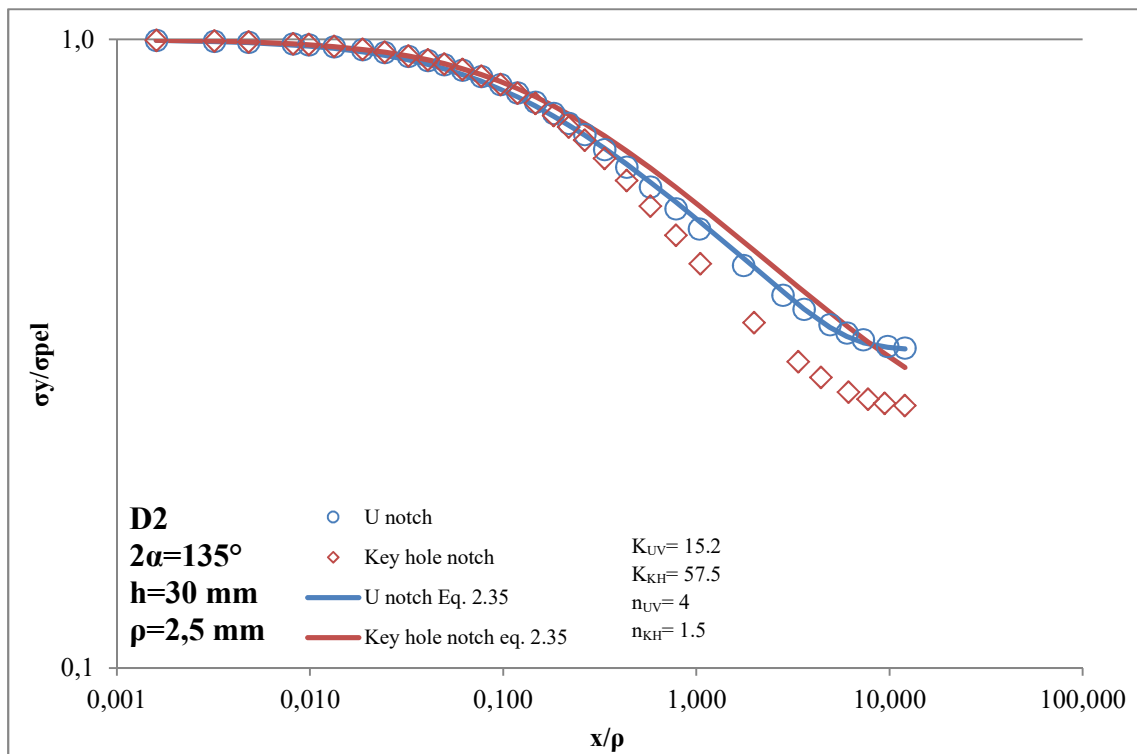


Figura 39– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

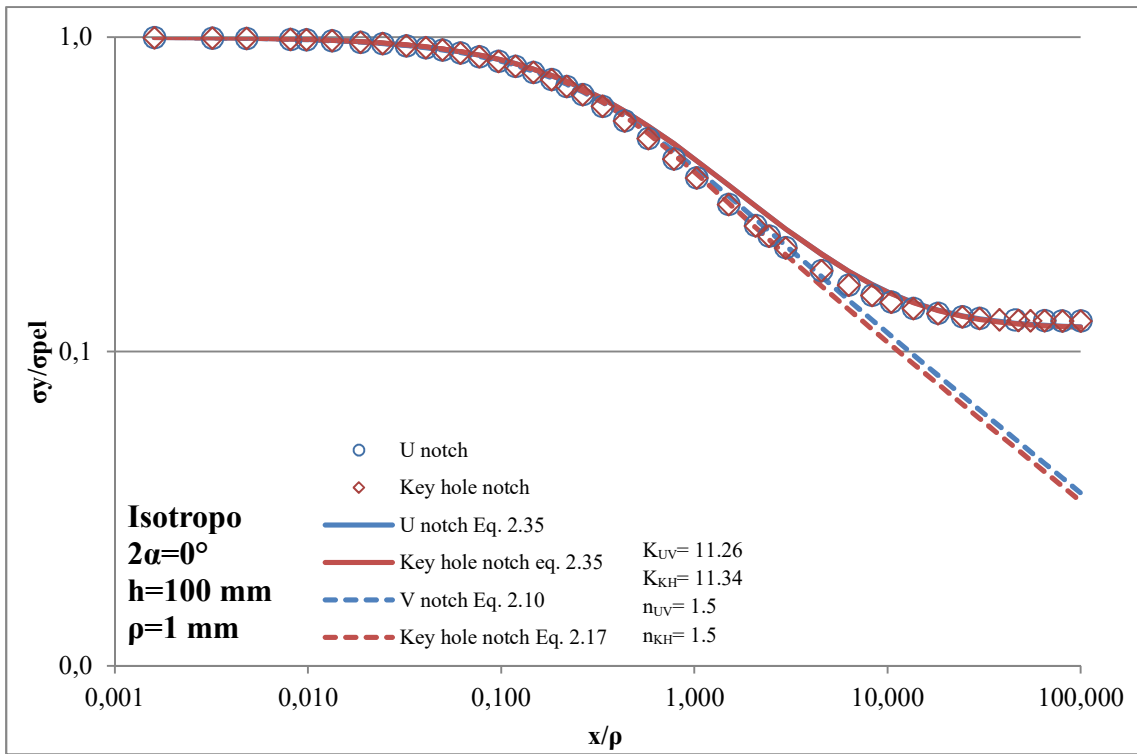


Figura 40– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

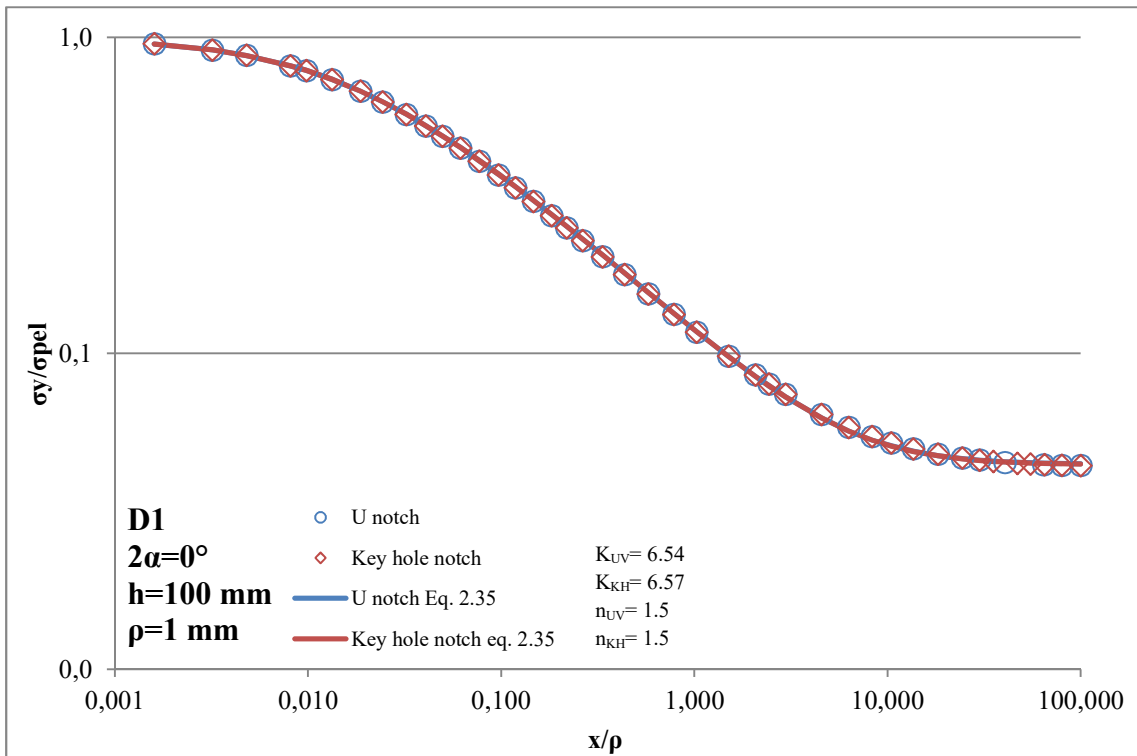


Figura 41– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

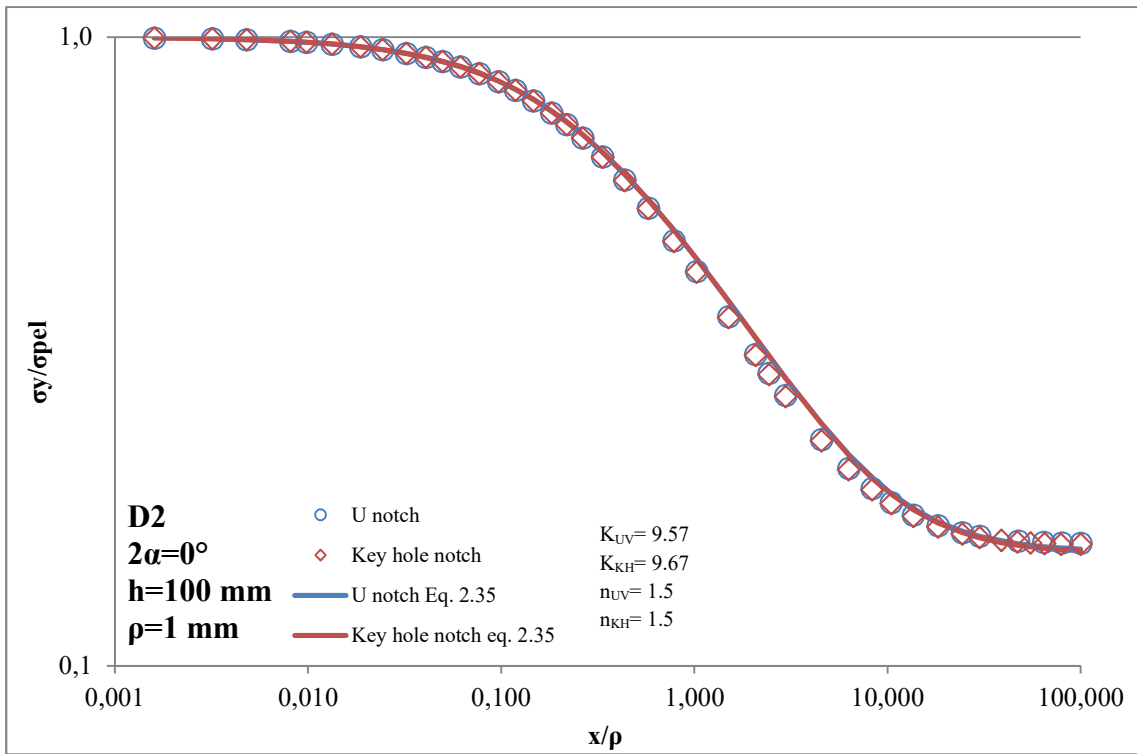


Figura 42– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

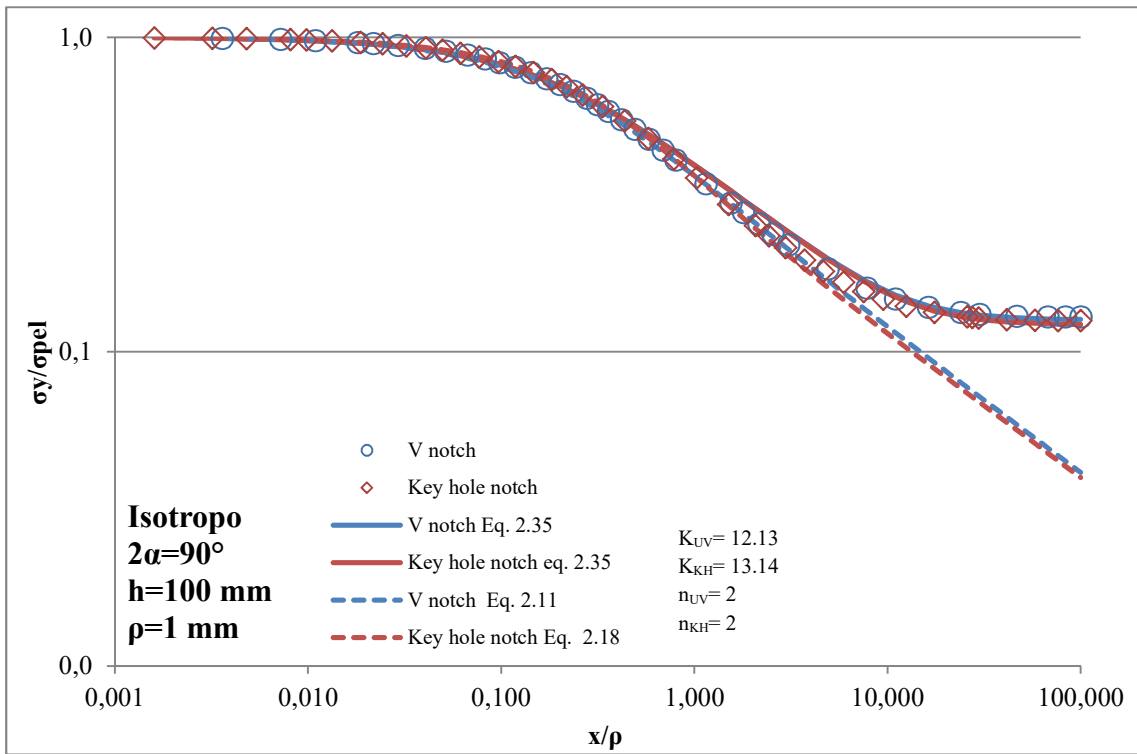


Figura 43– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$



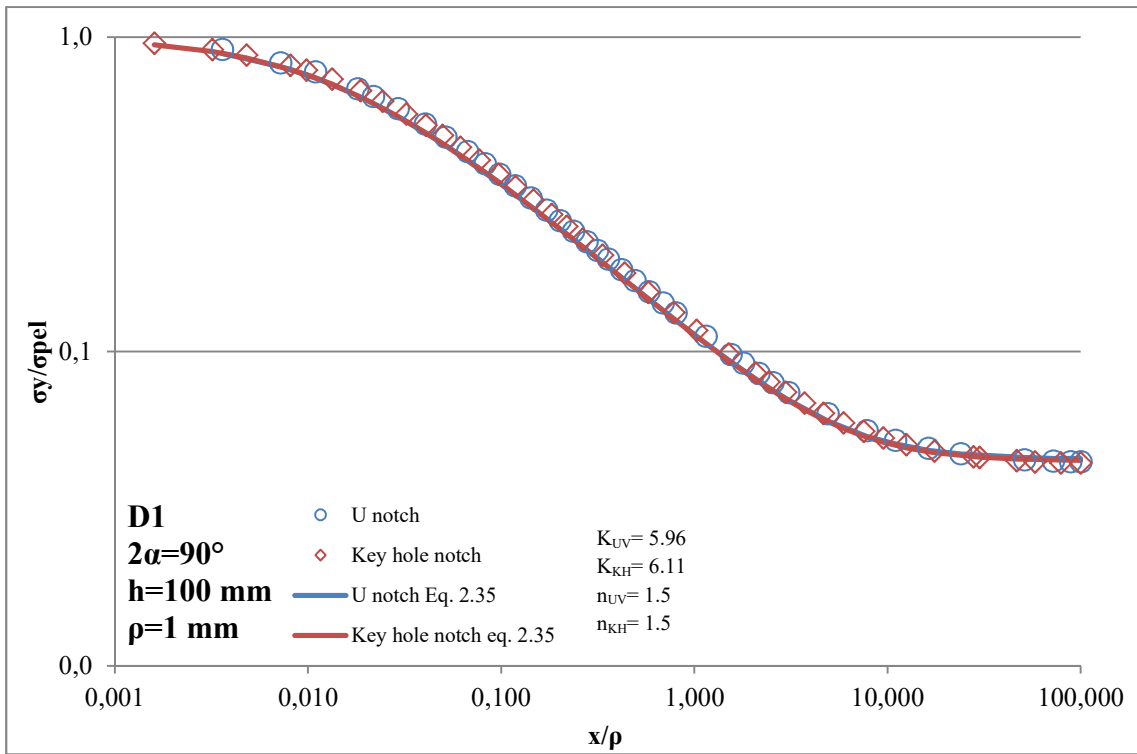


Figura 44– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

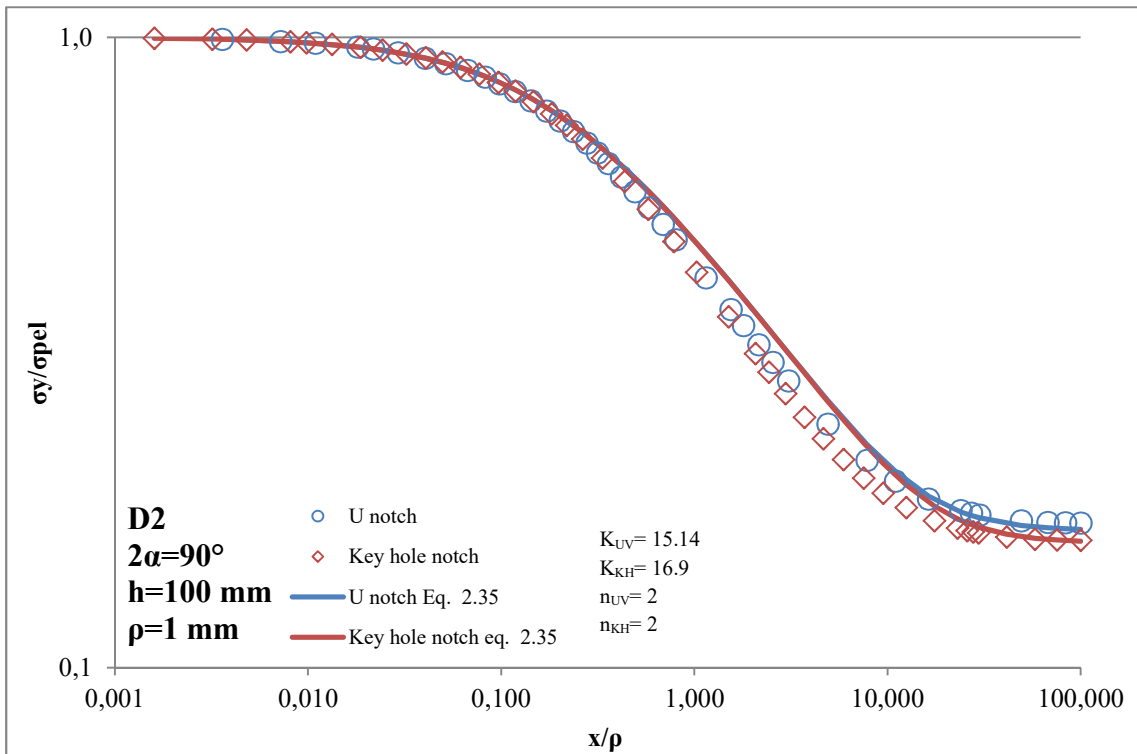


Figura 45– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

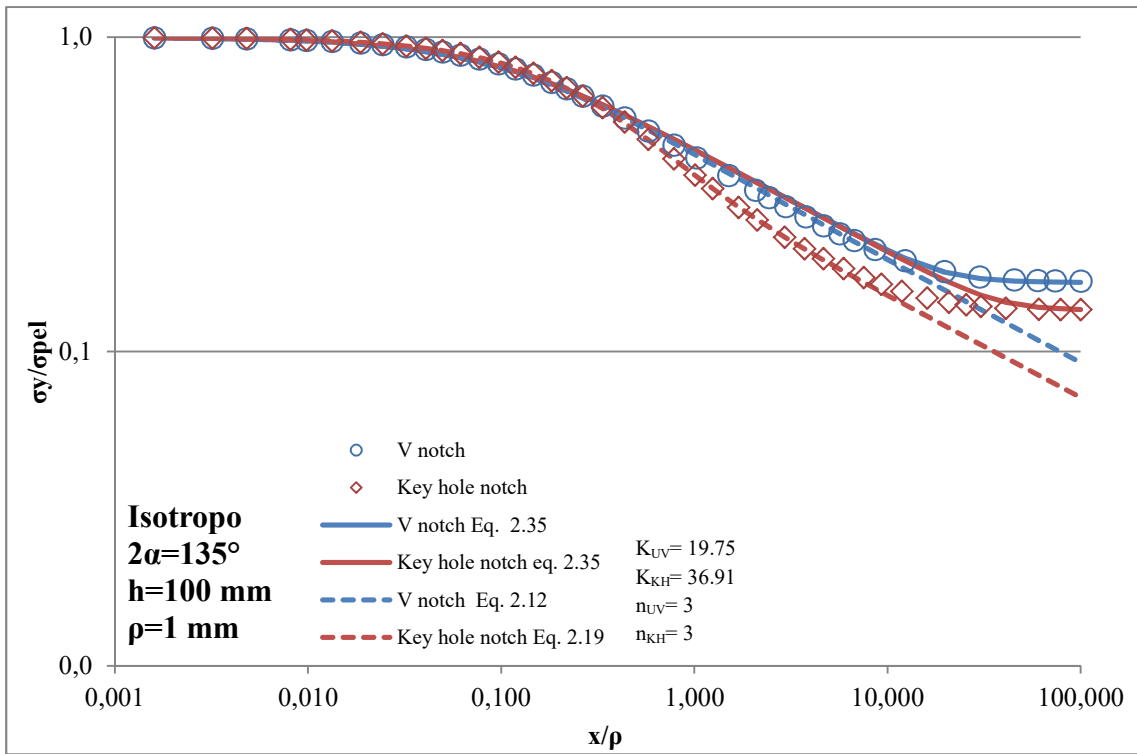


Figura 46– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

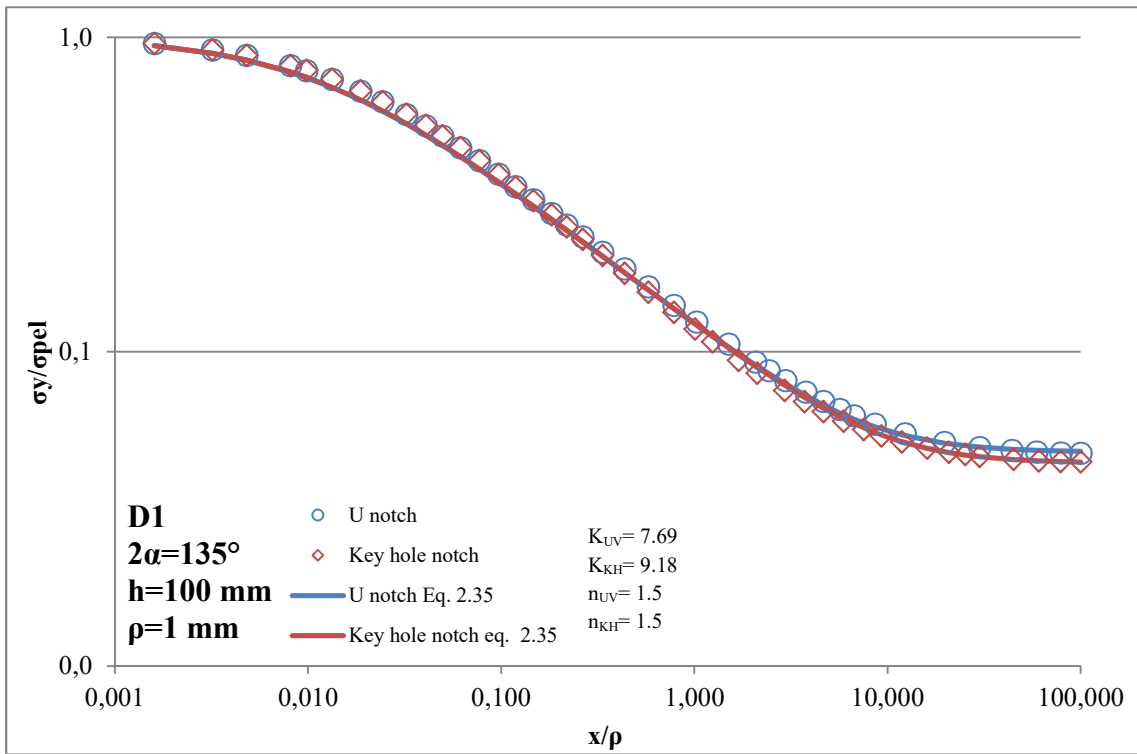


Figura 47– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

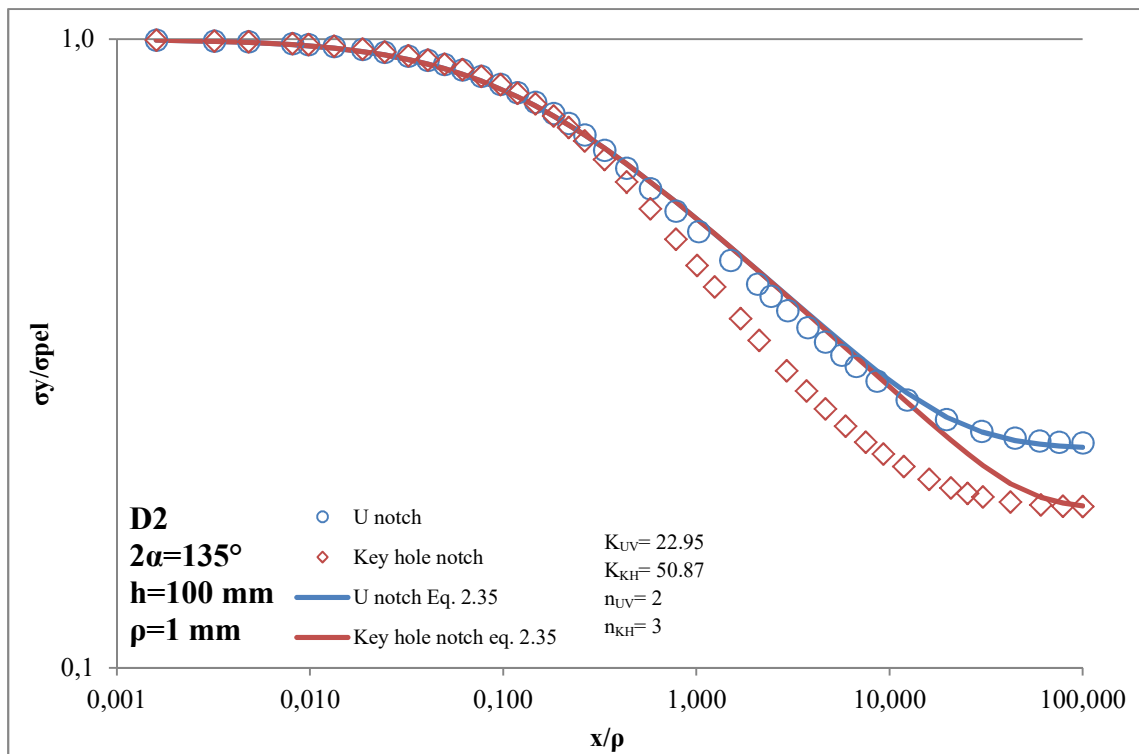


Figura 48– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

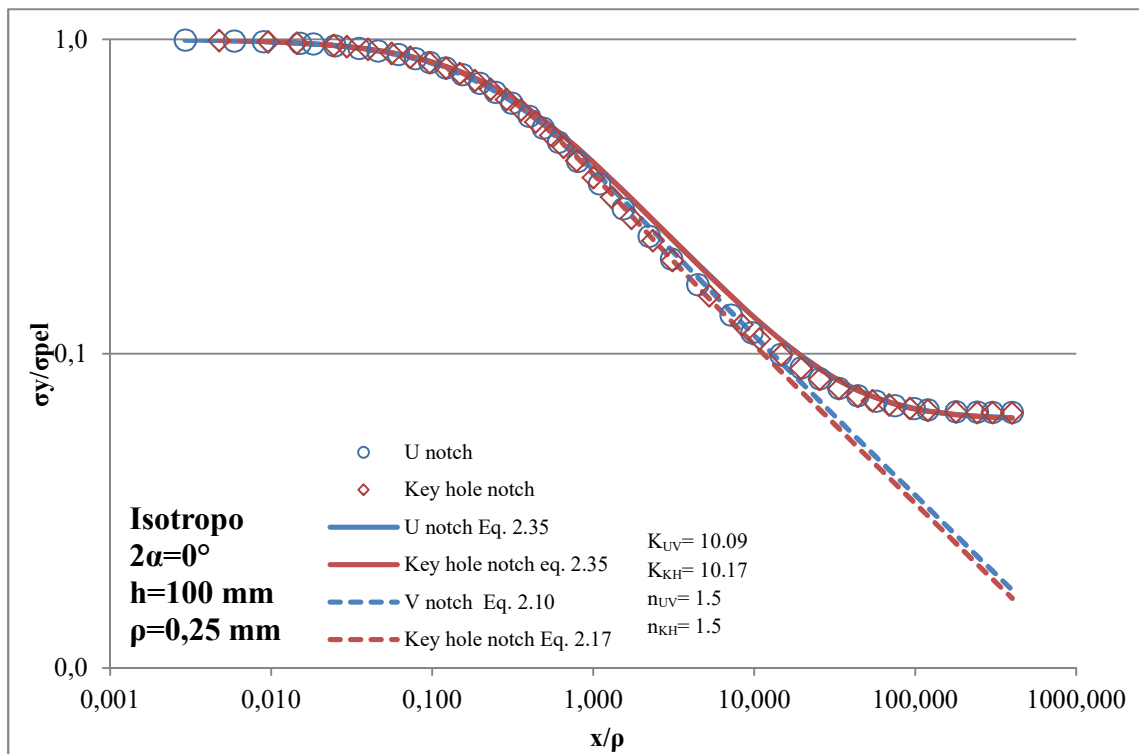


Figura 49– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

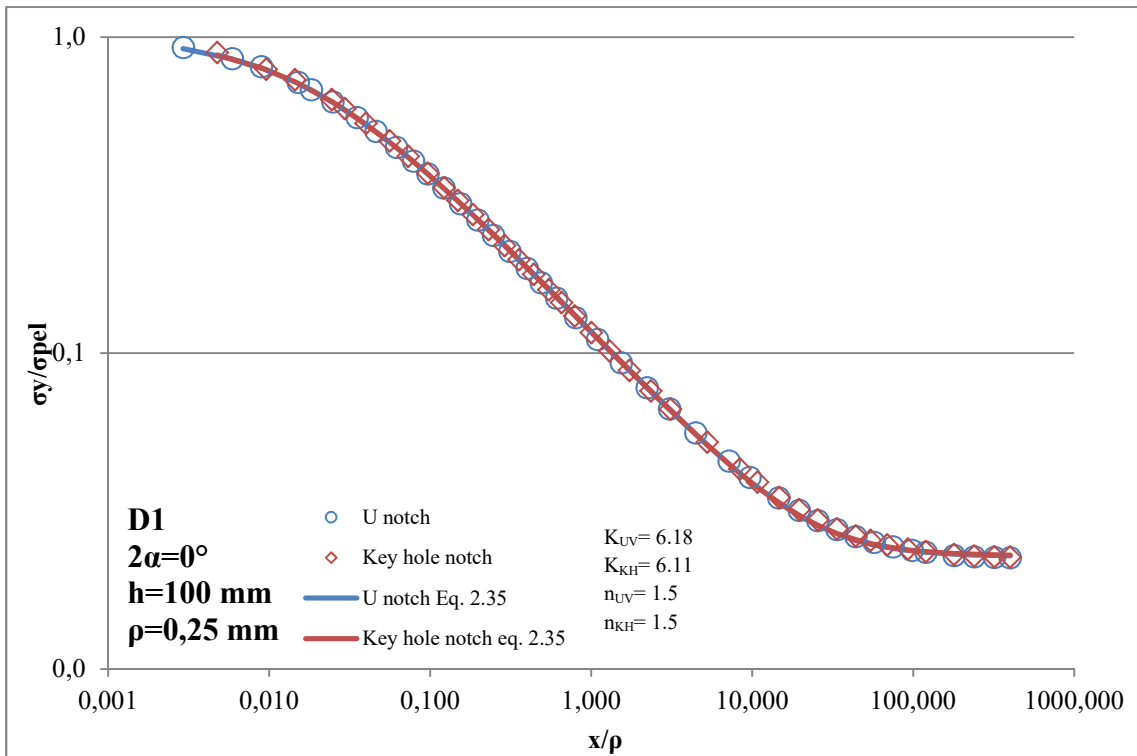


Figura 50– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

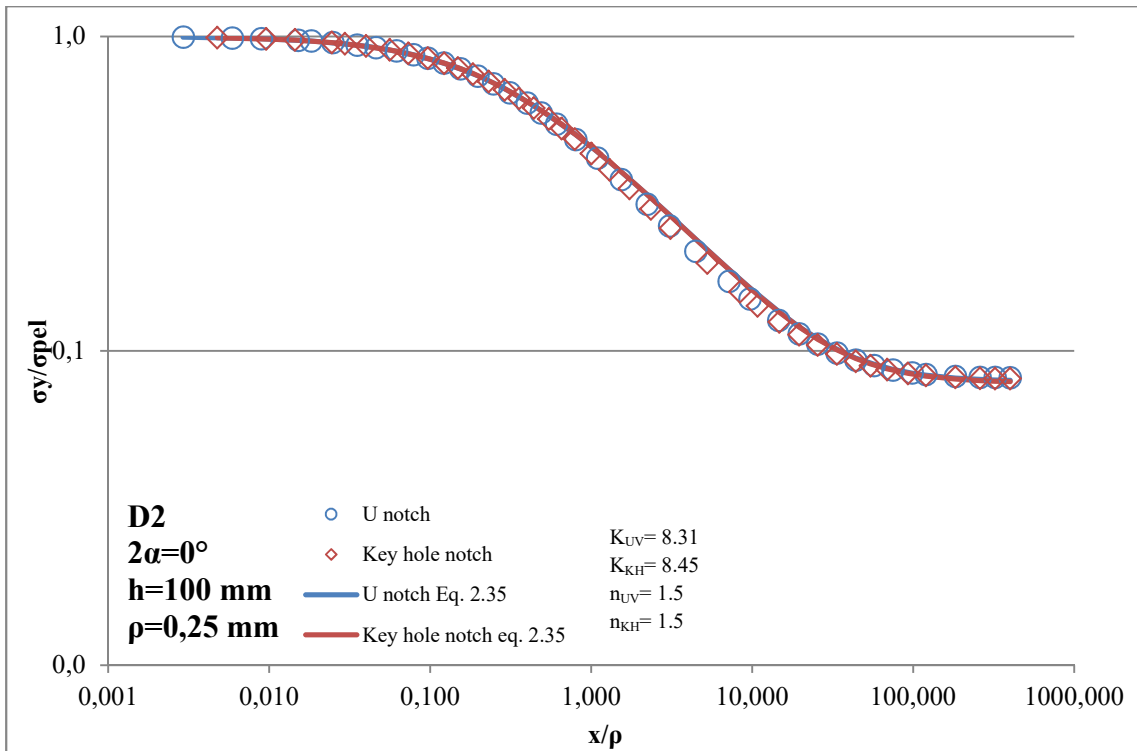


Figura 51– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

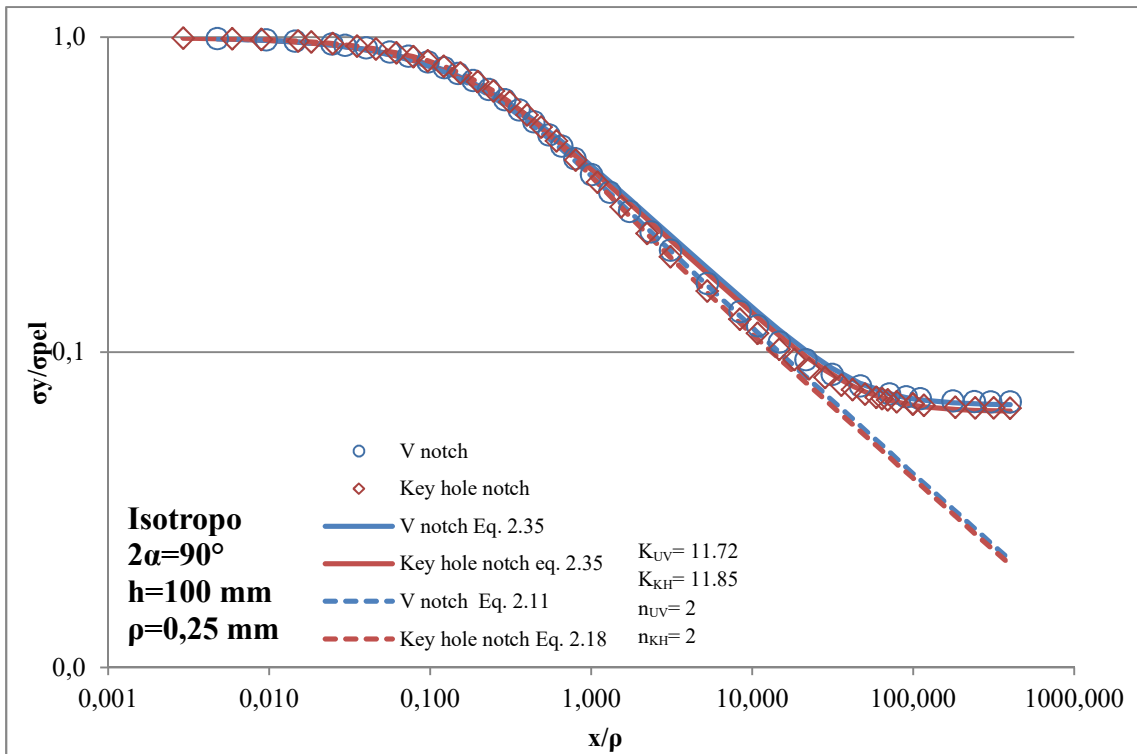


Figura 52– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

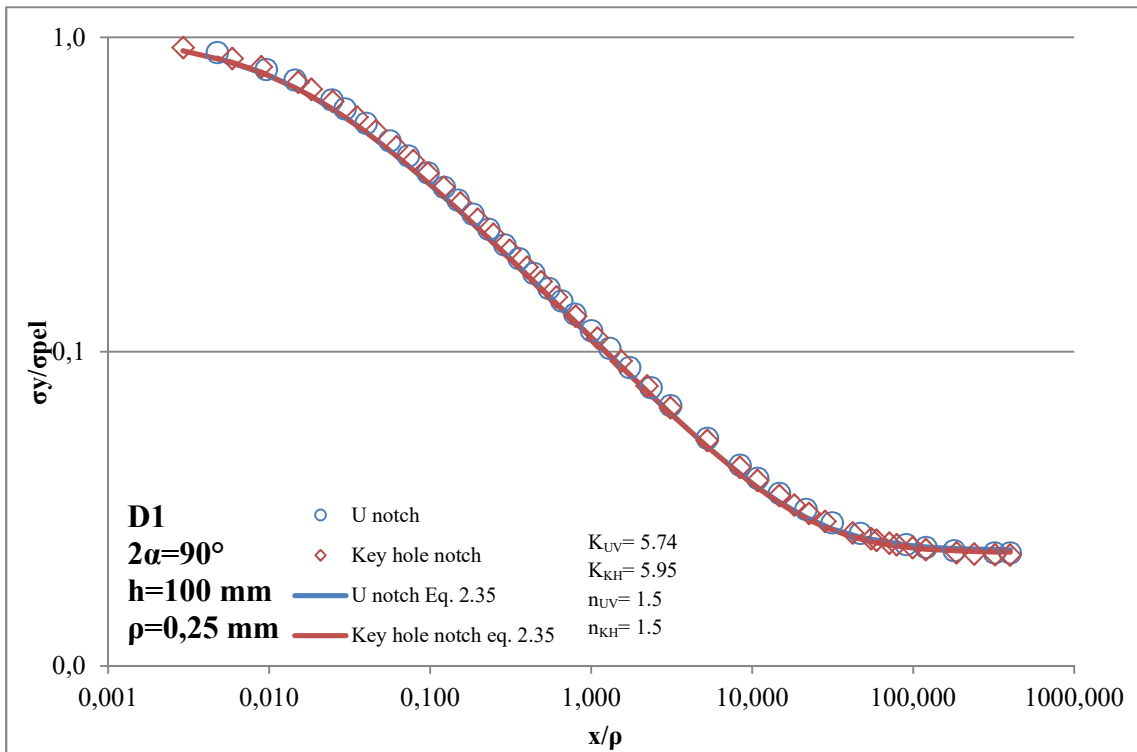


Figura 53– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

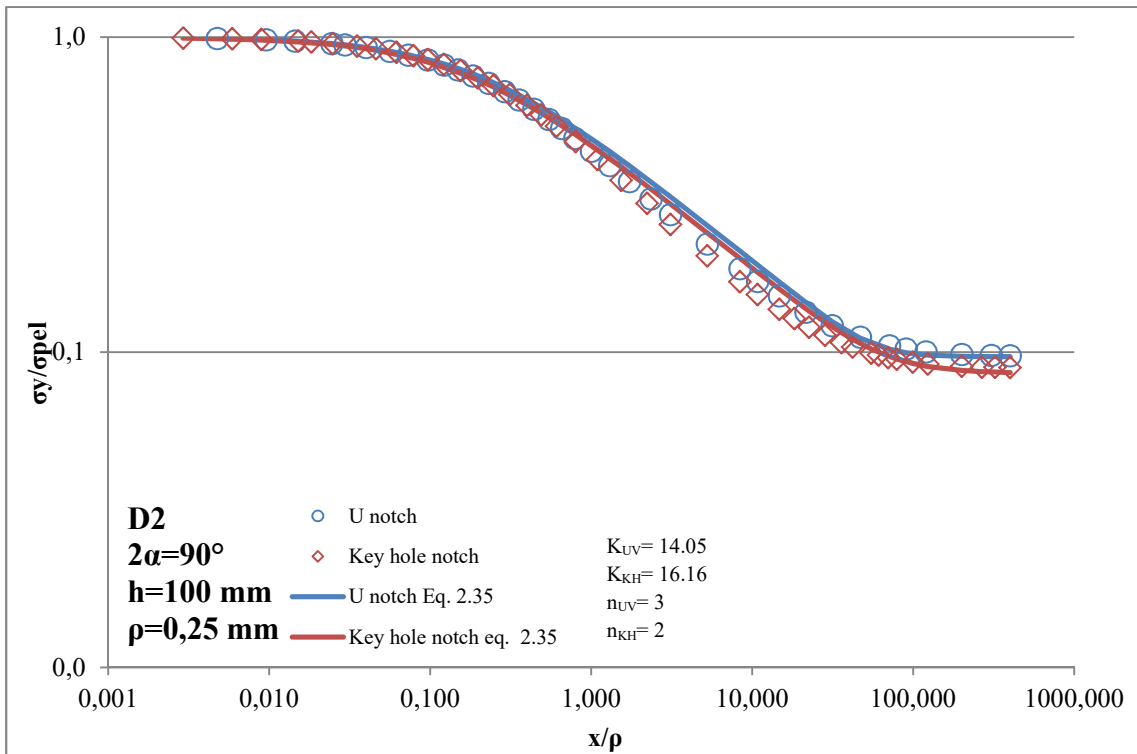


Figura 54– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

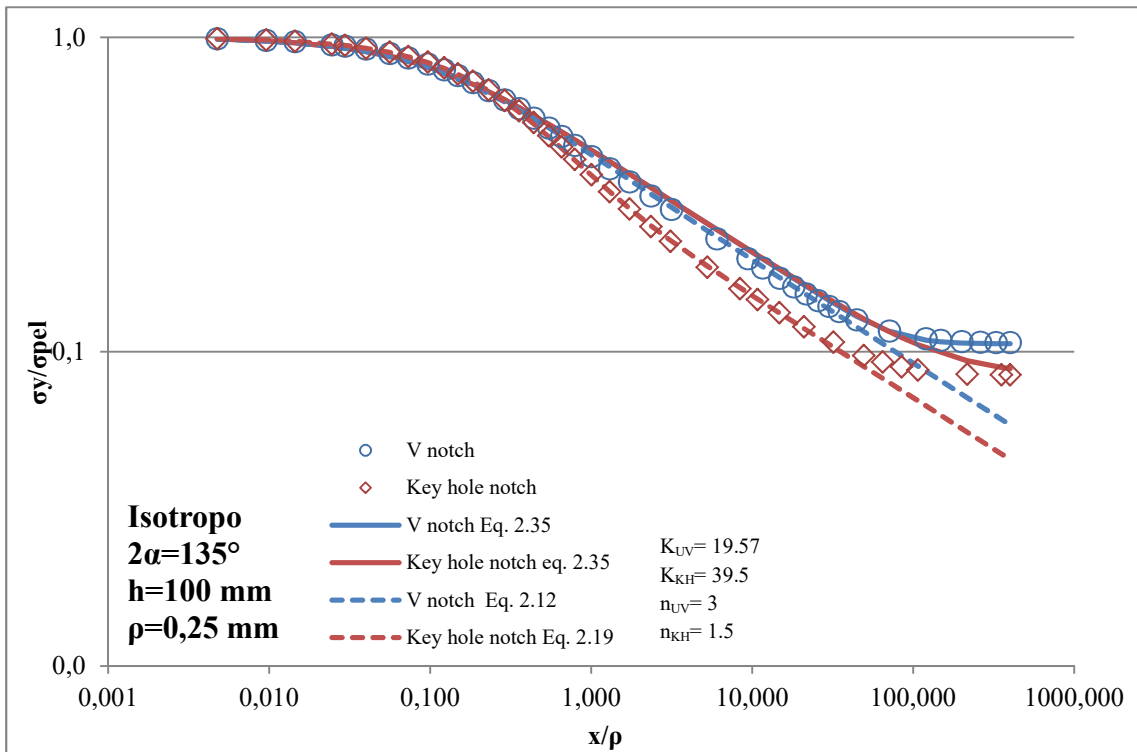


Figura 55– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

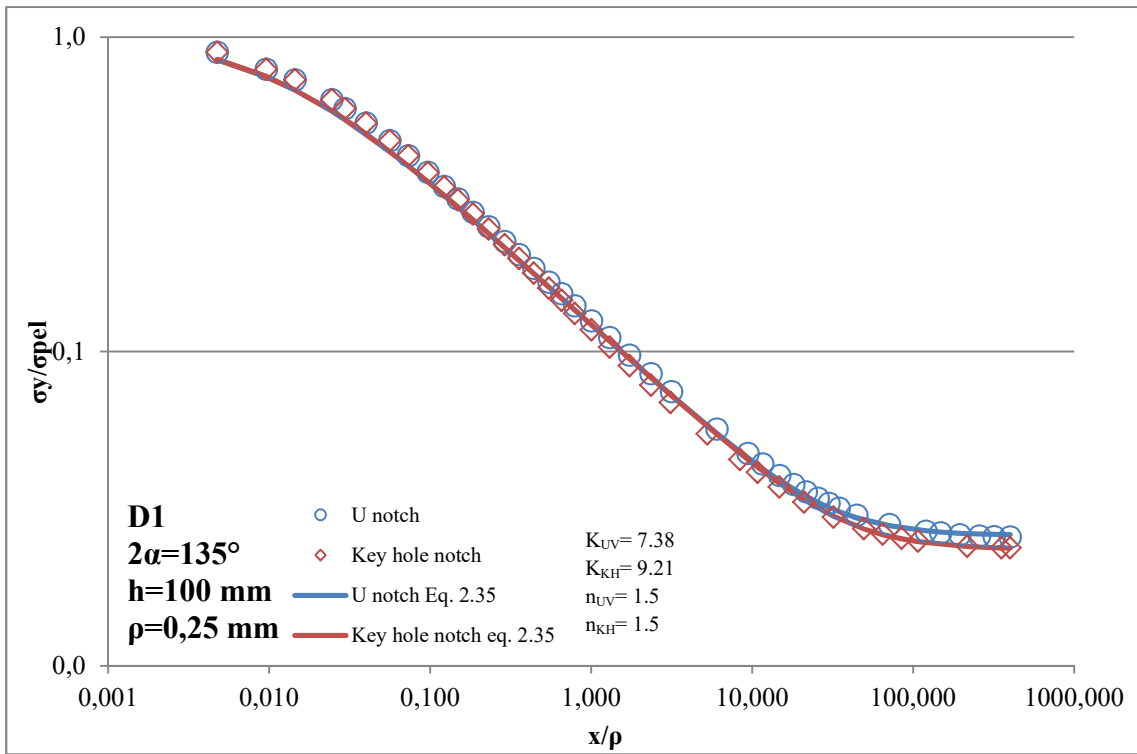


Figura 56– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

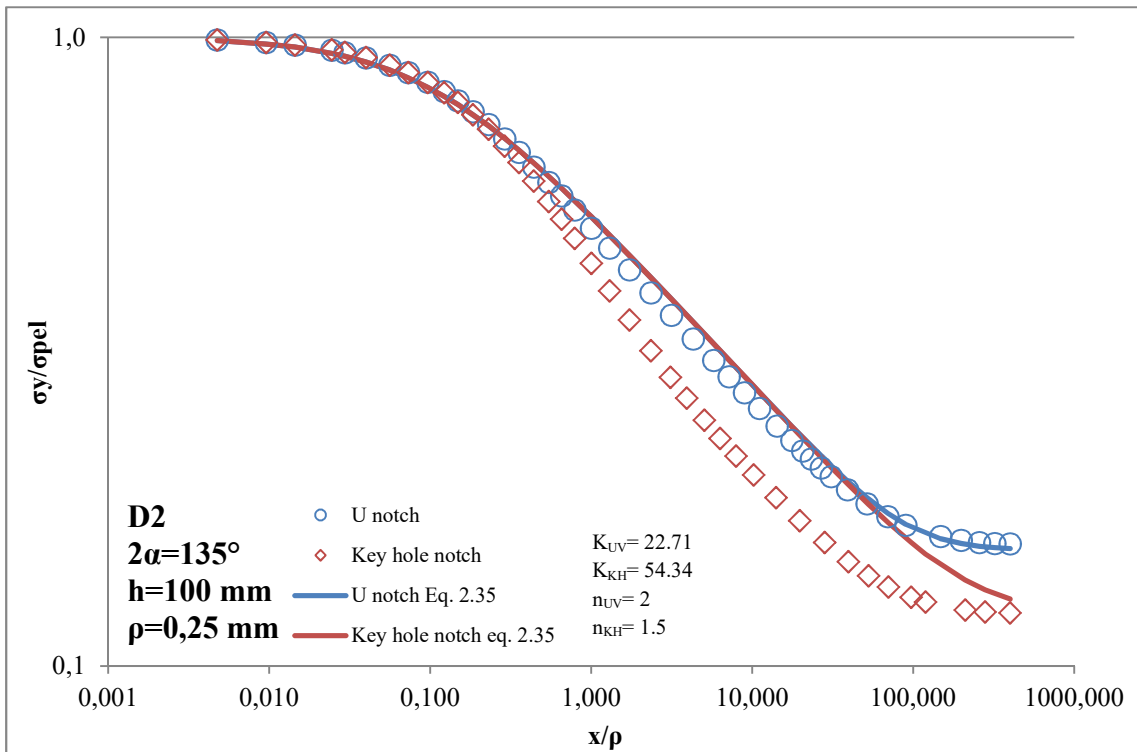


Figura 57– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

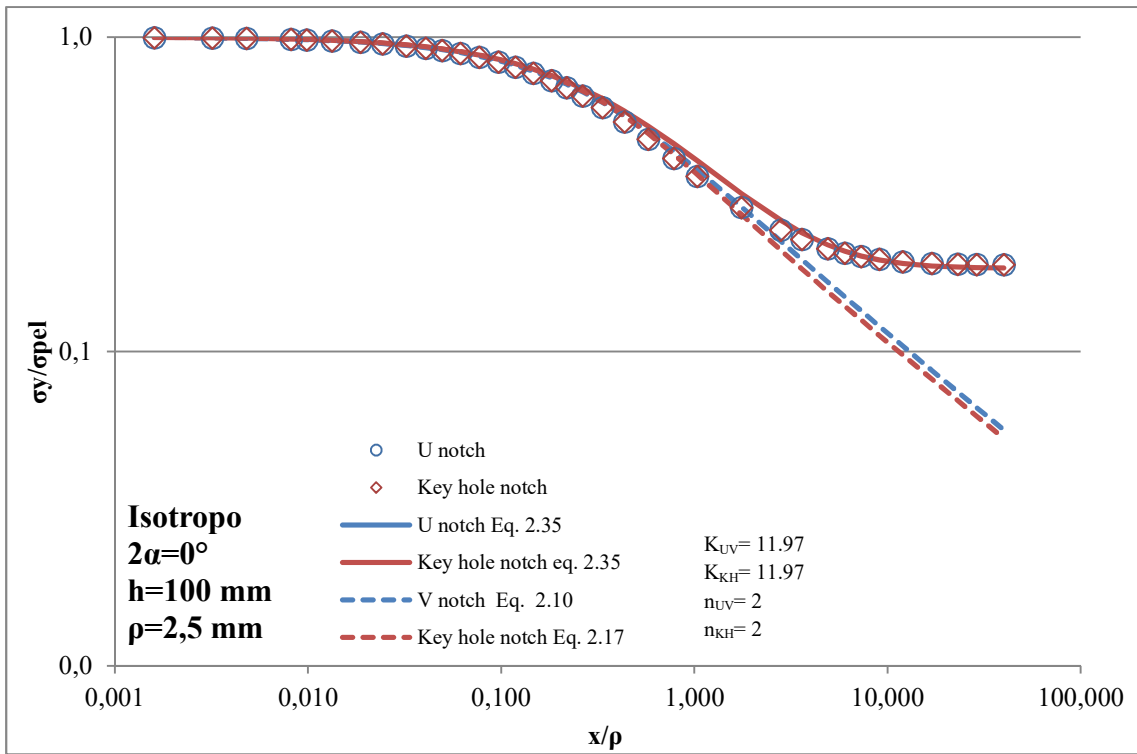


Figura 58– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

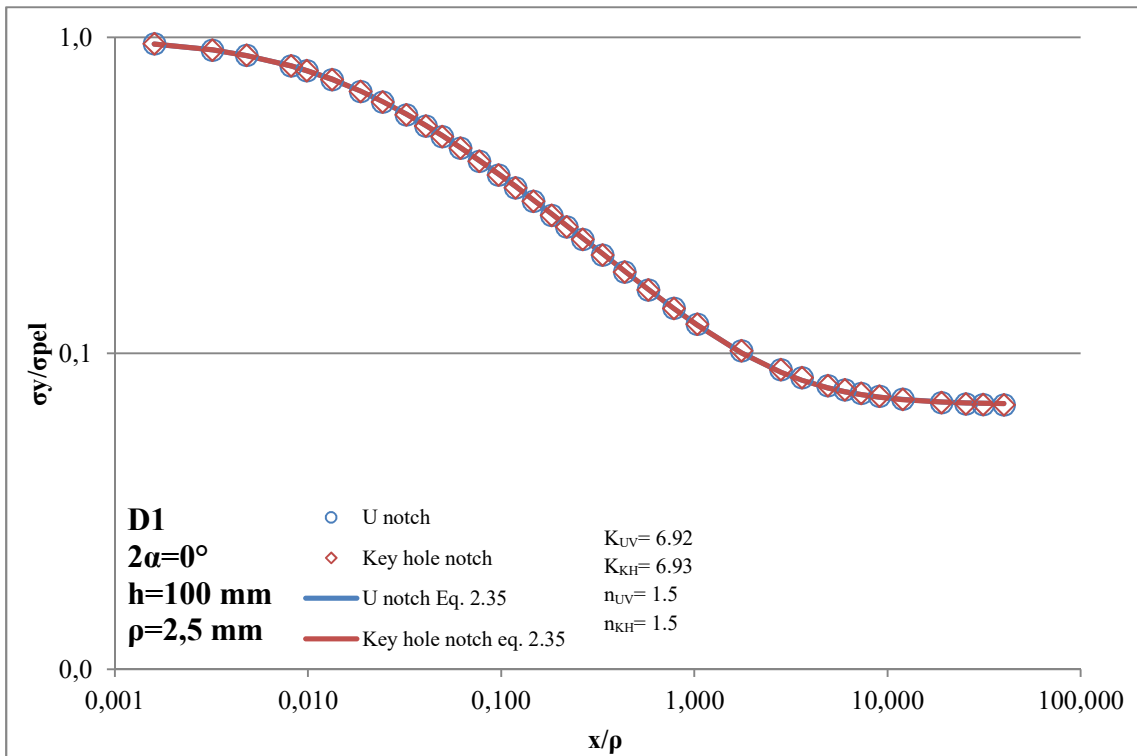


Figura 59– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$



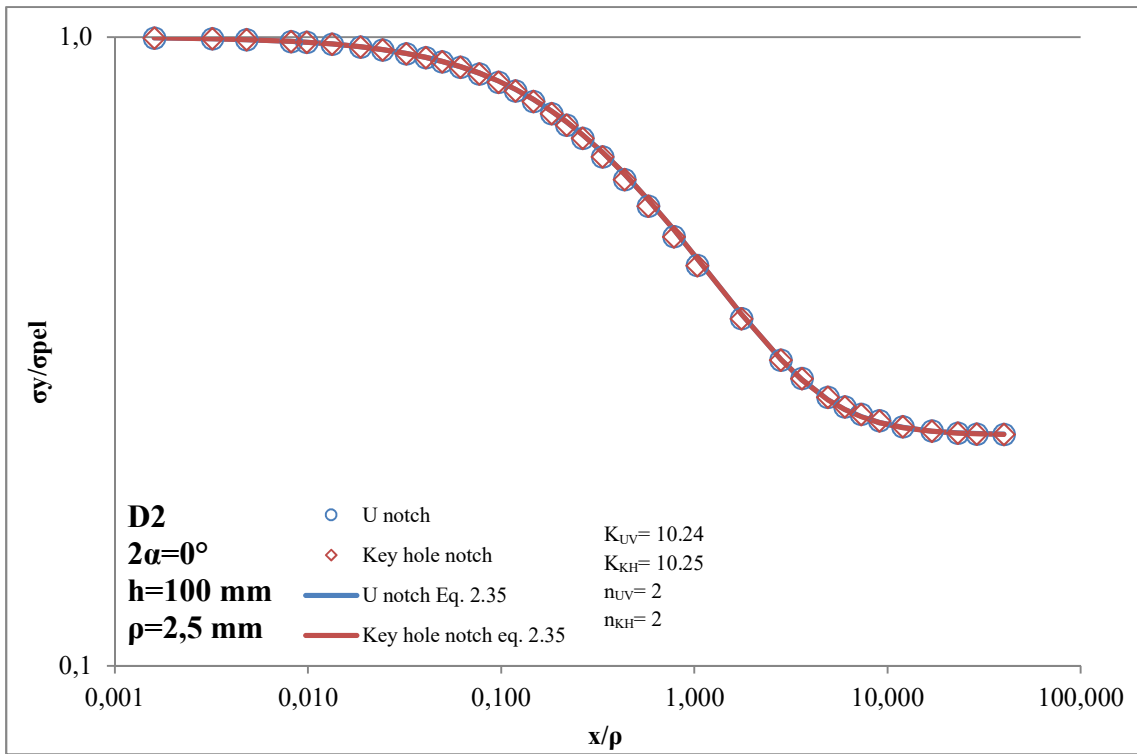


Figura 60– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

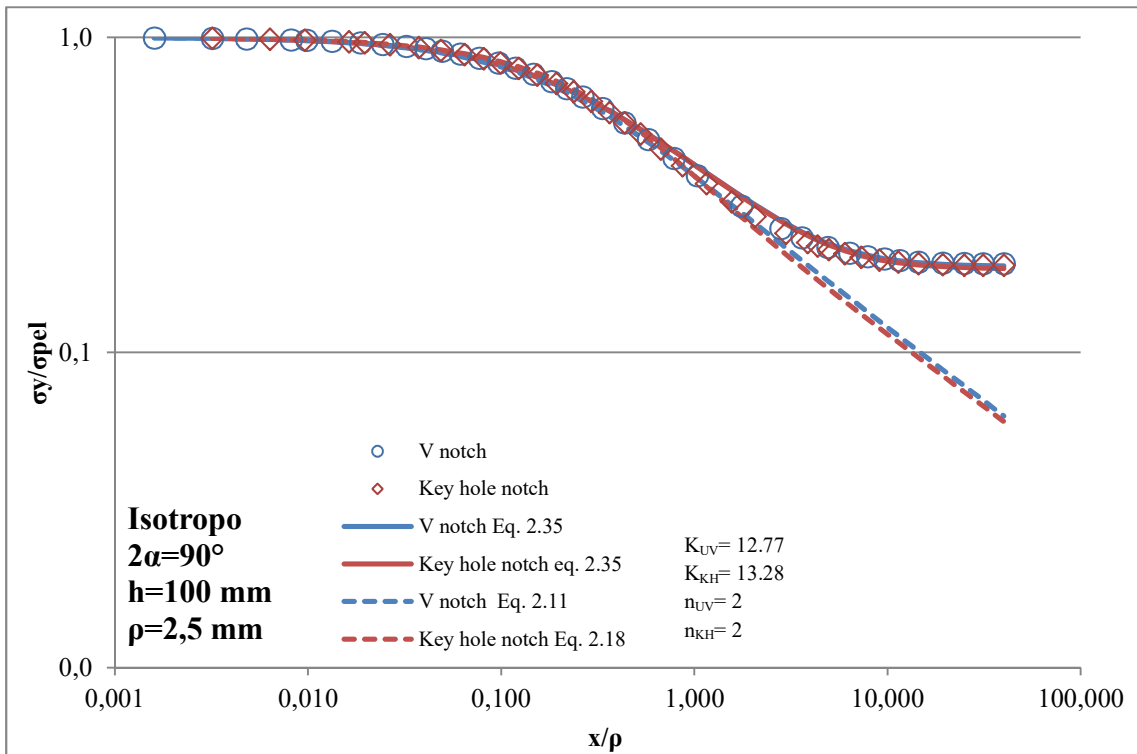


Figura 61– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

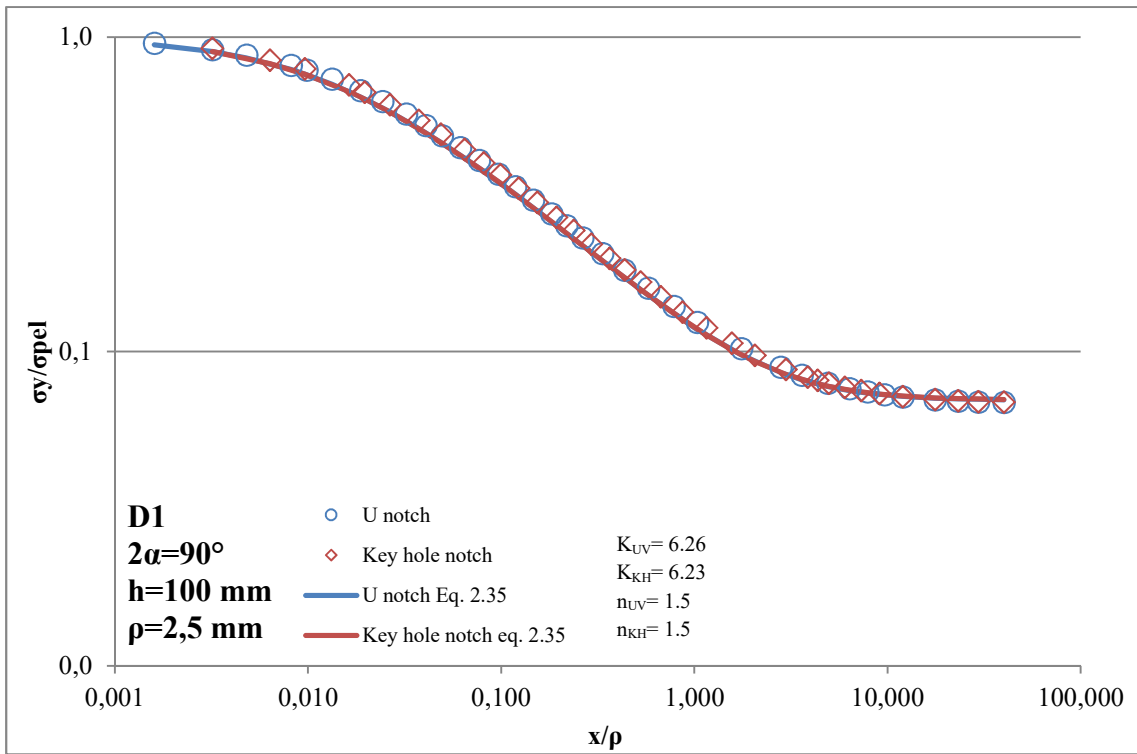


Figura 62– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

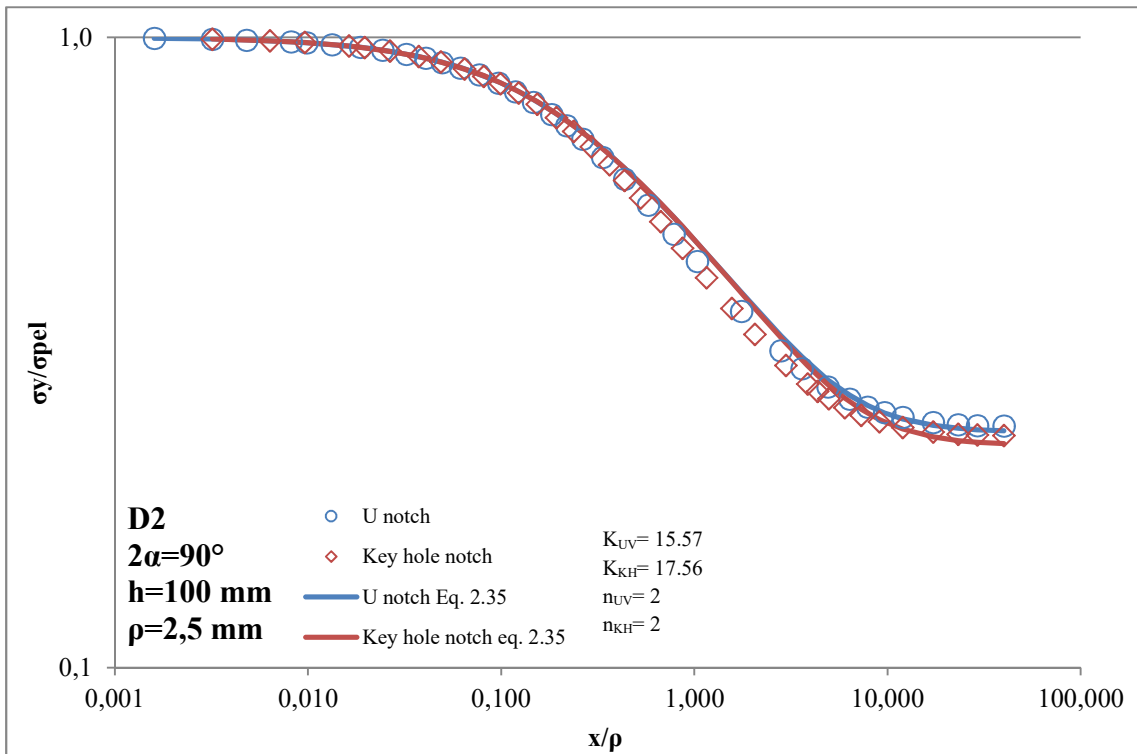


Figura 63– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

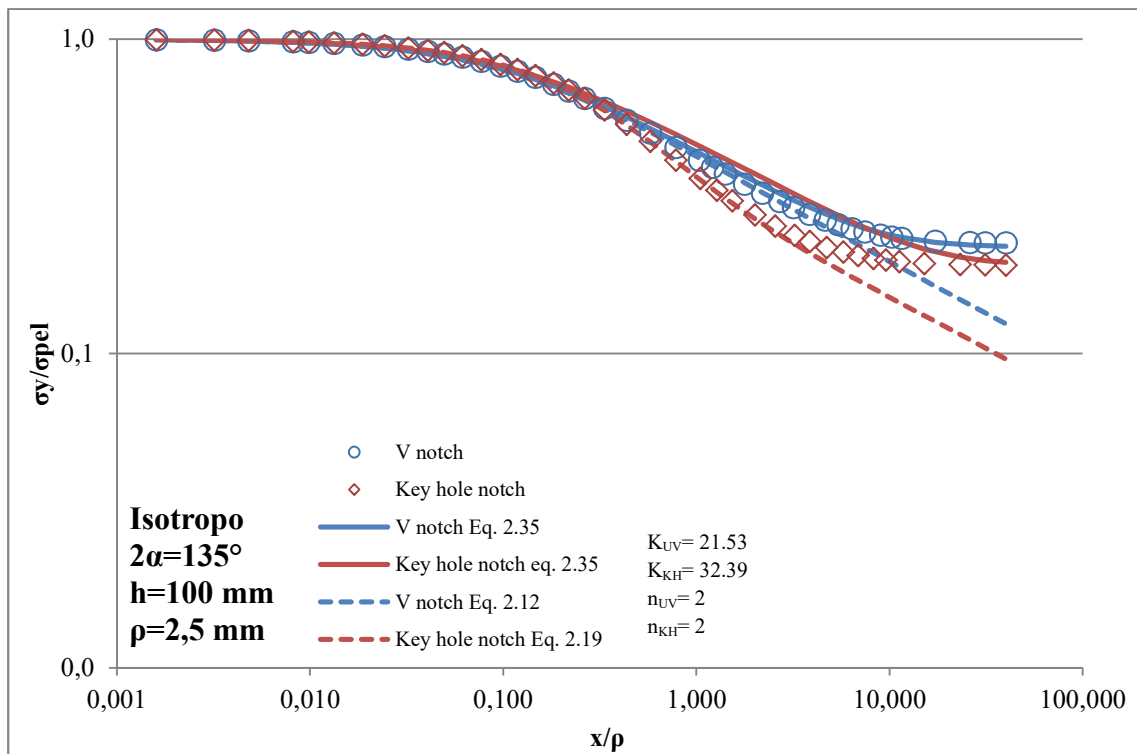


Figura 64– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

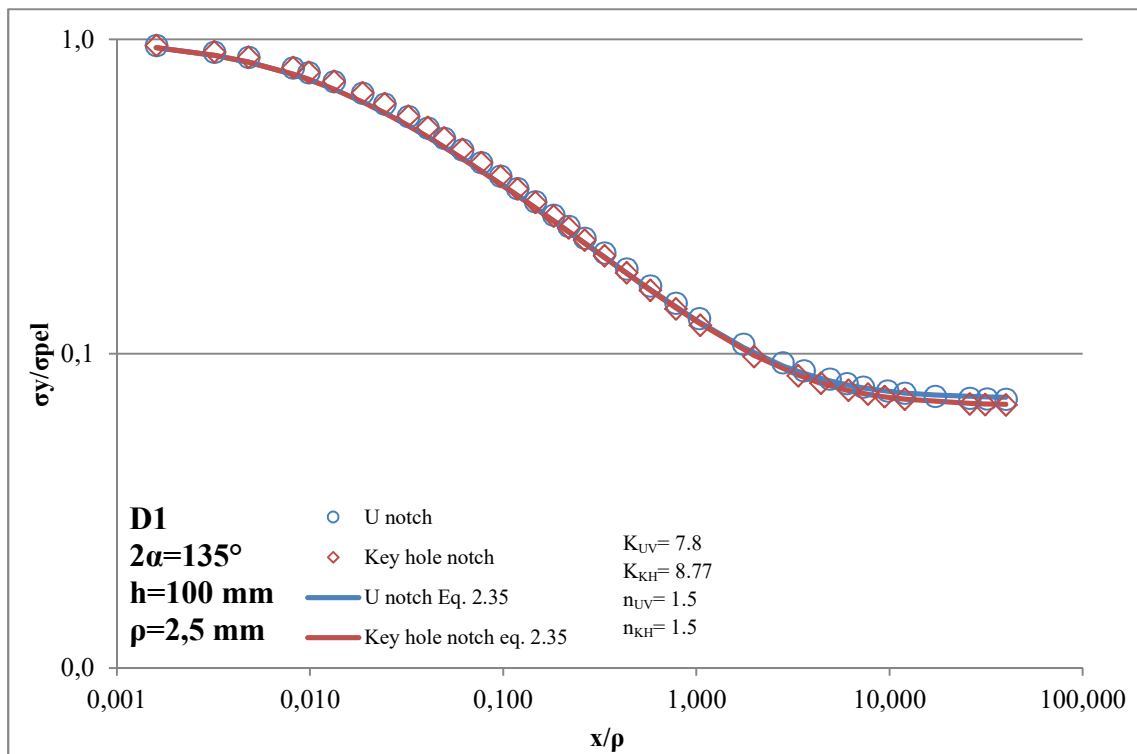


Figura 65– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

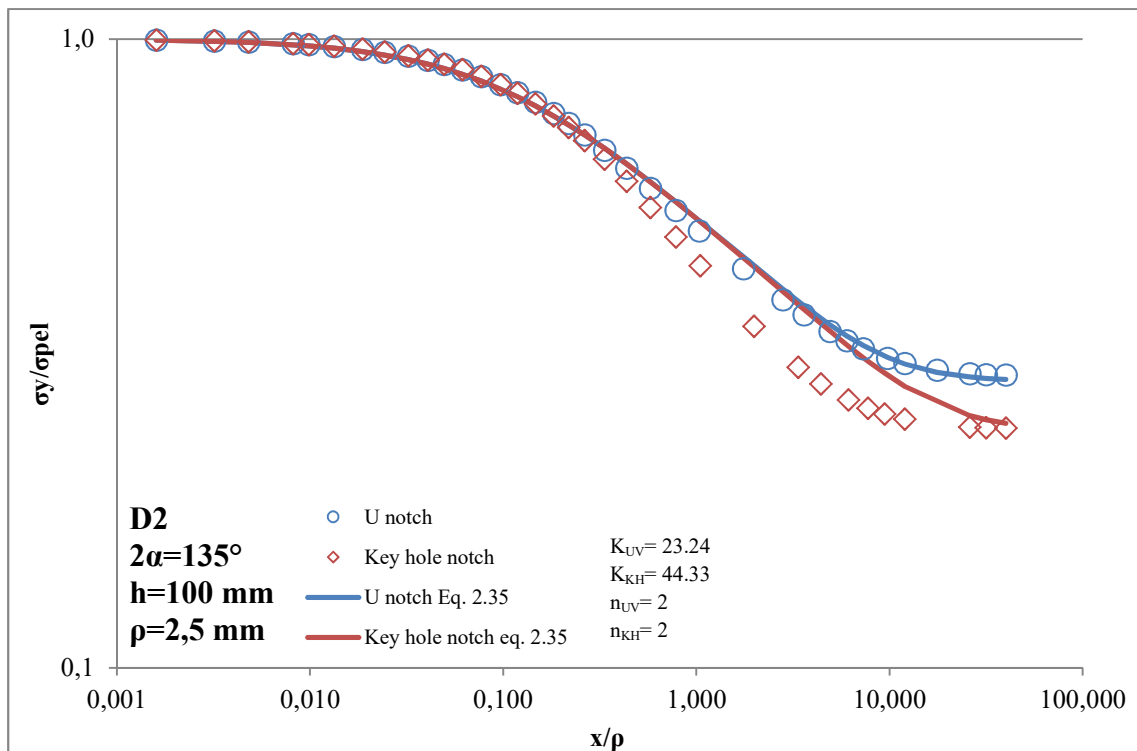


Figura 66– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

Una prima analisi dei diagrammi permette di osservare l'andamento tipico descritto nella figura (8), si possono infatti individuare le 3 regioni in cui la tensione varia da un valore prossimo a quello di picco elastico nella regione 1, diminuisce progressivamente nella regione 2 fino a portarsi ad un valore prossimo a quello della tensione applicata nella regione 3. Per le 2 geometrie considerate si osserva che l'andamento delle tensioni è sostanzialmente identico per angoli di apertura di  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , mentre inizia a diversificarsi aumentando l'angolo di apertura a  $135^\circ$ , la differenza è maggiormente amplificata nel caso di materiali con  $\psi \geq 0.25$ . Per  $H=100$  l'andamento delle tensioni rimane sostanzialmente invariato, si osserva solamente che il passaggio tra la regione 2 e la regione 3 è traslato leggermente in avanti. Le equazioni teoriche rappresentate nei diagrammi per i casi con materiale isotropo sono molto accurate fino alla regione 2, mentre non considerano affatto la transizione tra la regione 2 e 3, proseguendo con una pendenza tipica della regione 2. Un risultato migliore si ottiene con l'equazione (2.35), la quale descrive, in modo più o meno accurato, anche la transizione che si verifica tra la regione 2 e 3. In particolare si nota che l'equazione è molto accurata per il caso con intaglio laterale ad U o a V raccordato, per questa geometria infatti i risultati sono ottimi, indipendentemente dal tipo di materiale e dall'angolo di apertura. Per quanto già detto sopra, essendo l'andamento delle tensioni in alcuni casi sovrapposto tra le geometrie in esame, l'equazione interpreta bene i dati anche nella geometria a con intaglio a key hole nei casi in cui l'andamento delle tensioni è sovrapposto con l'andamento della geometria ad U o V raccordato, mentre tende a scostarsi dal FEM per

angoli di apertura elevati e materiali con  $\psi \geq 0.25$ . Un'ulteriore considerazione va fatta in merito al parametro  $K$ , i valori risultanti dall'integrazione della (2.38) sono molto vicini nei casi in cui le 2 geometrie hanno un andamento delle tensioni uguali, mentre tendono a differire, in alcuni casi anche di un ordine di grandezza, nelle geometrie con intaglio a key hole in cui l'equazione non riesce a descrivere correttamente l'andamento delle tensioni.

### 3.2 Confronto tra diversi angoli di apertura

Di seguito sono riportati i grafici che confrontano i diversi angoli di apertura analizzati ( $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$ ), a parità di materiale considerato e di altri parametri geometrici. Ciò permette di valutare l'influenza dell'angolo di apertura sull'andamento delle tensioni, sia per quanto riguarda geometrie con intagli ad U o V raccordati, sia su geometrie con intagli a key hole.

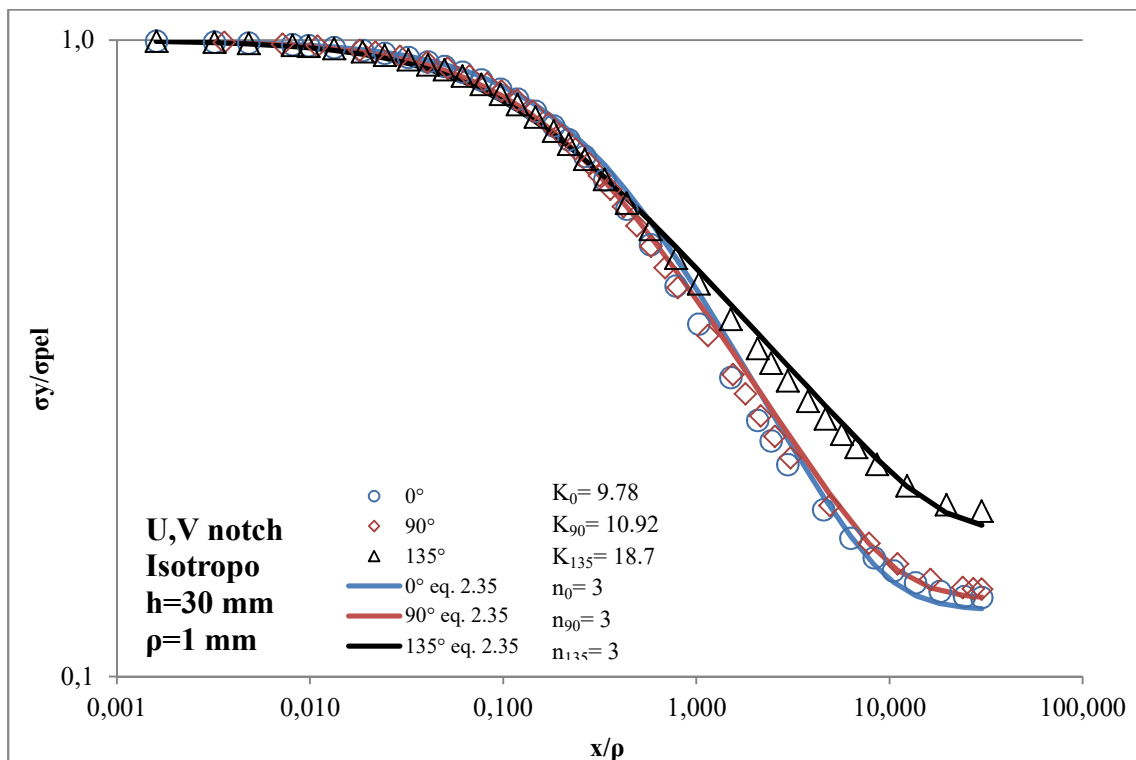


Figura 67– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

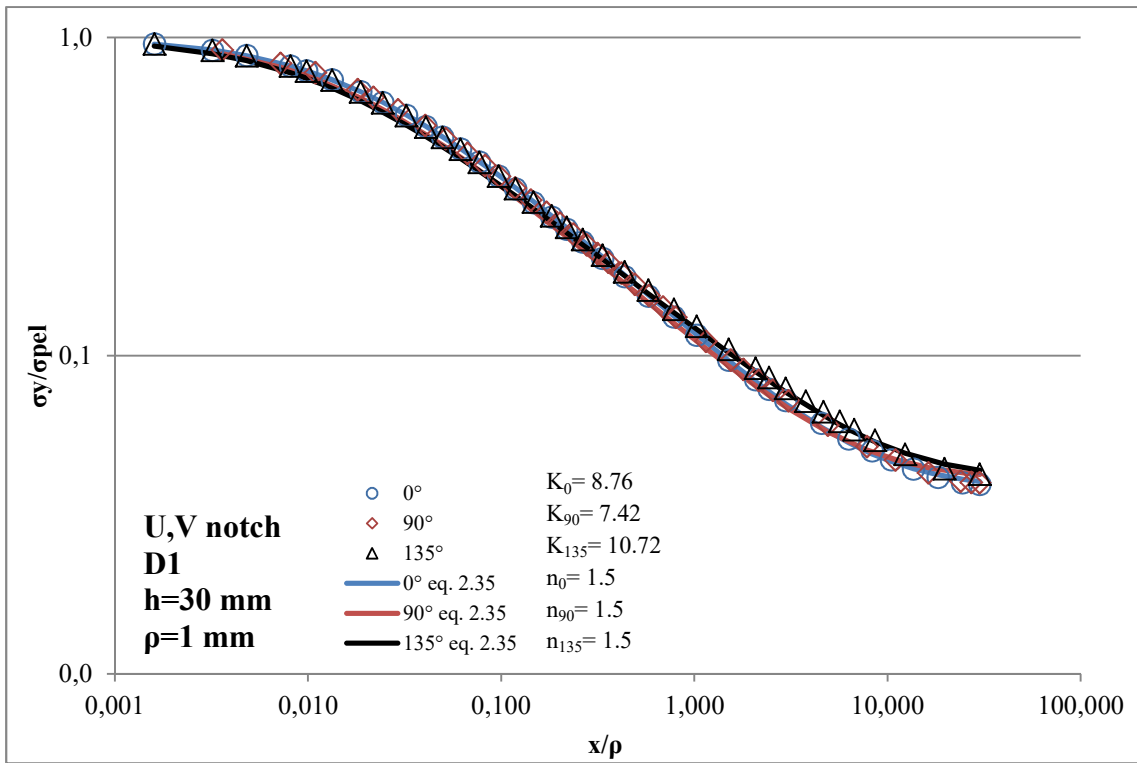


Figura 68– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

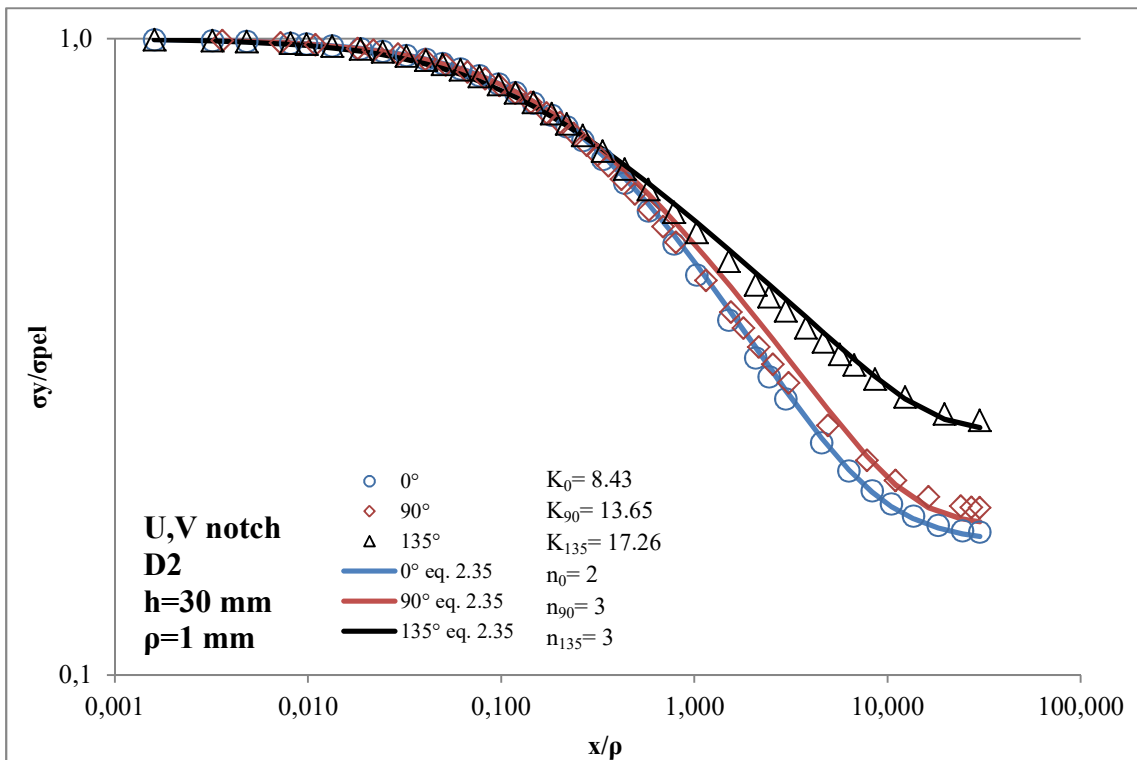


Figura 69– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

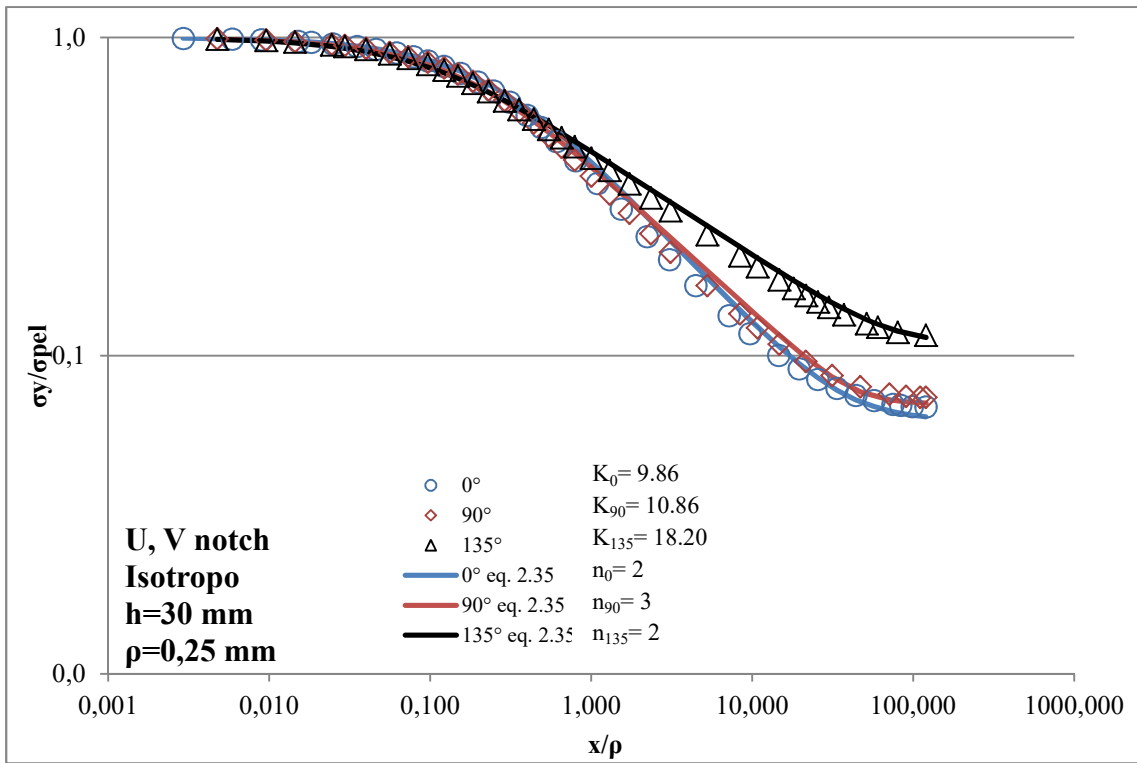


Figura 70– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

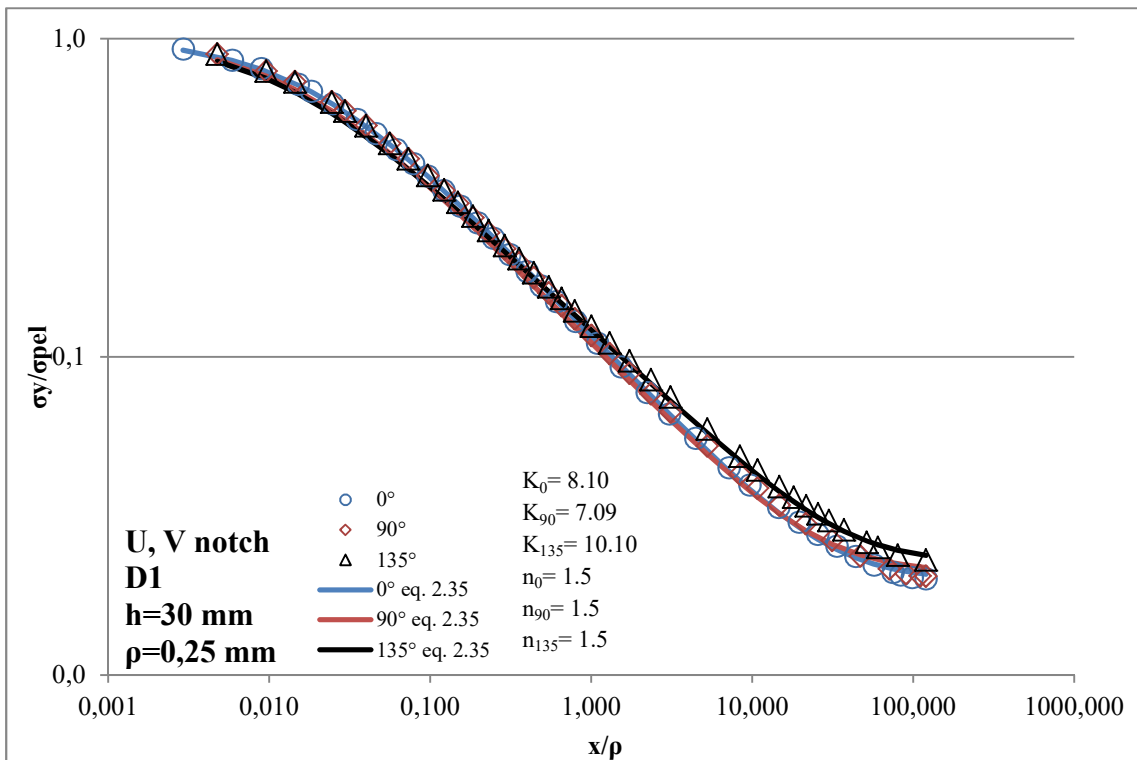


Figura 71– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$



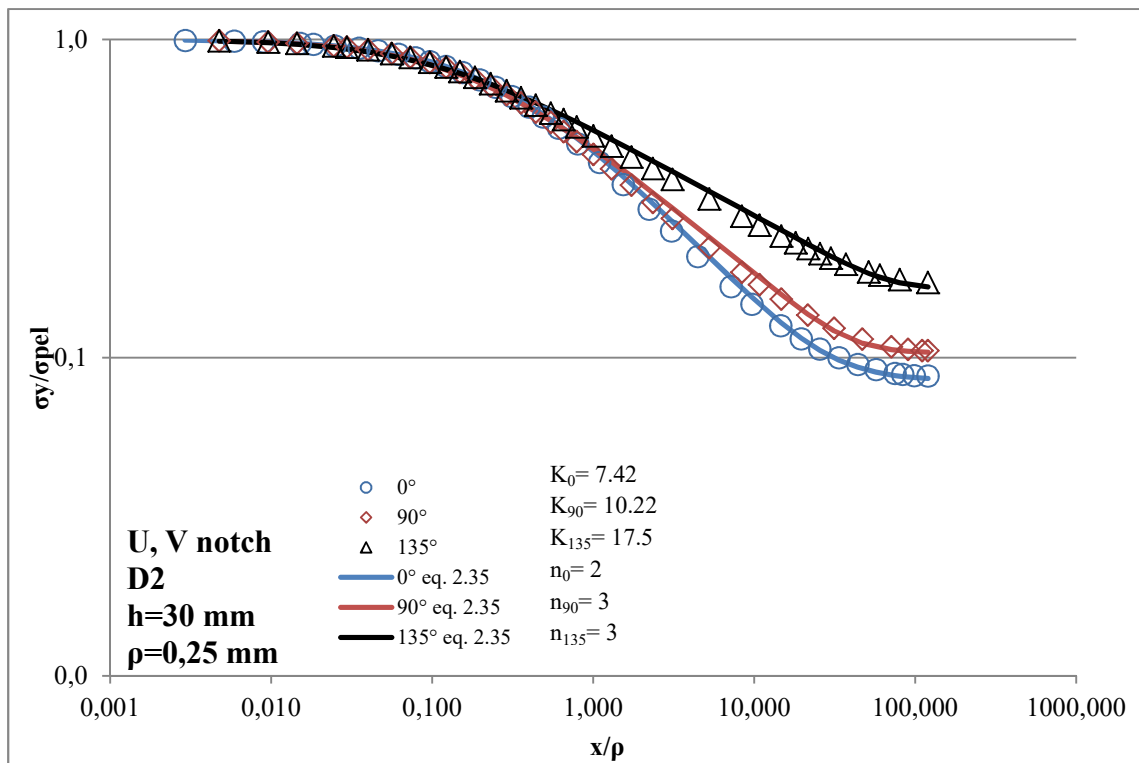


Figura 72– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

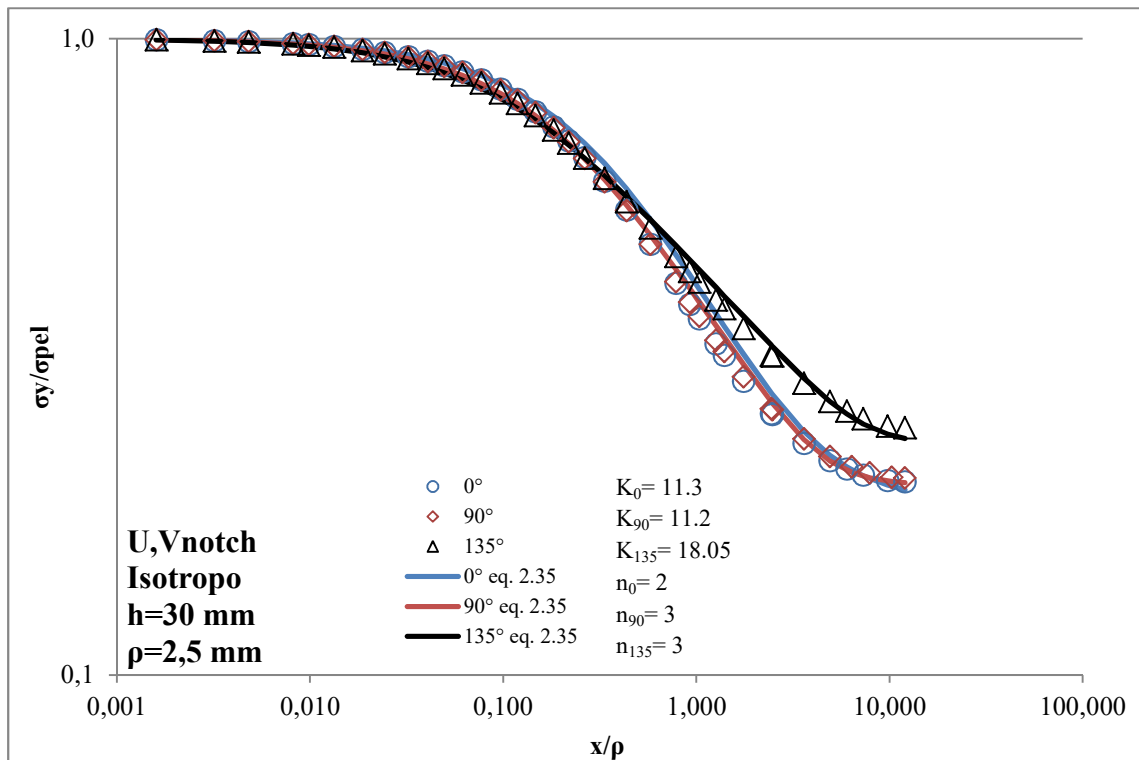


Figura 73– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

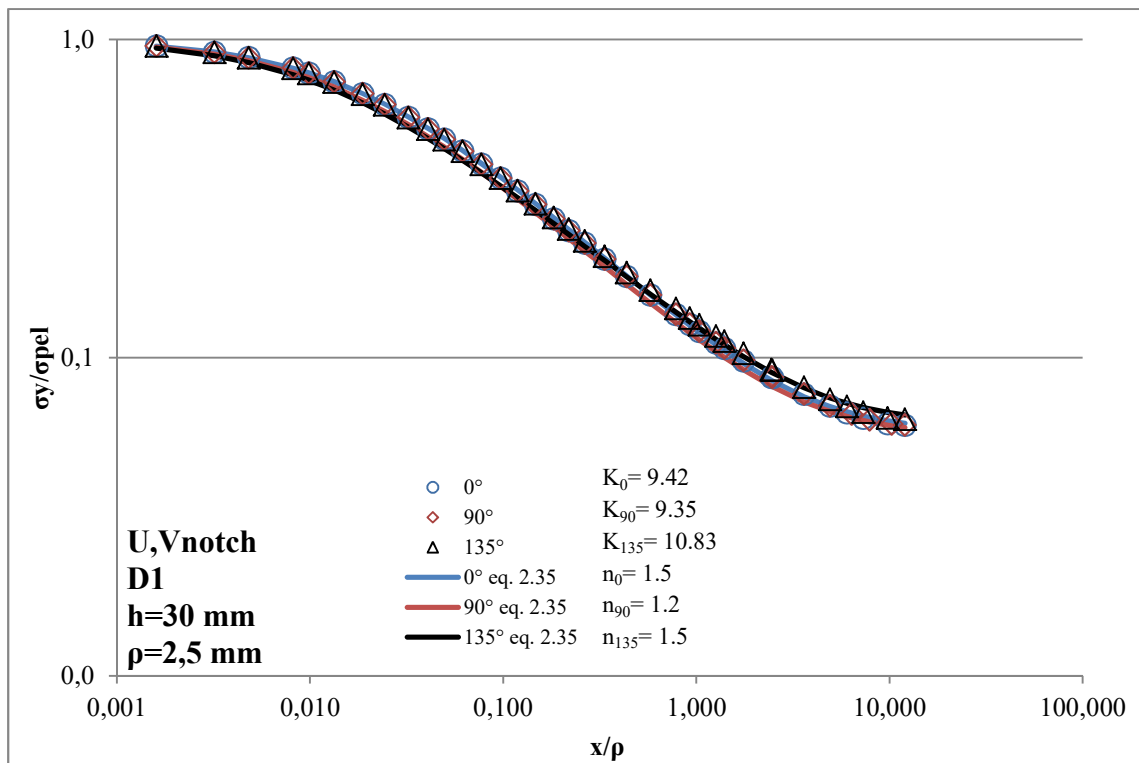


Figura 74– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

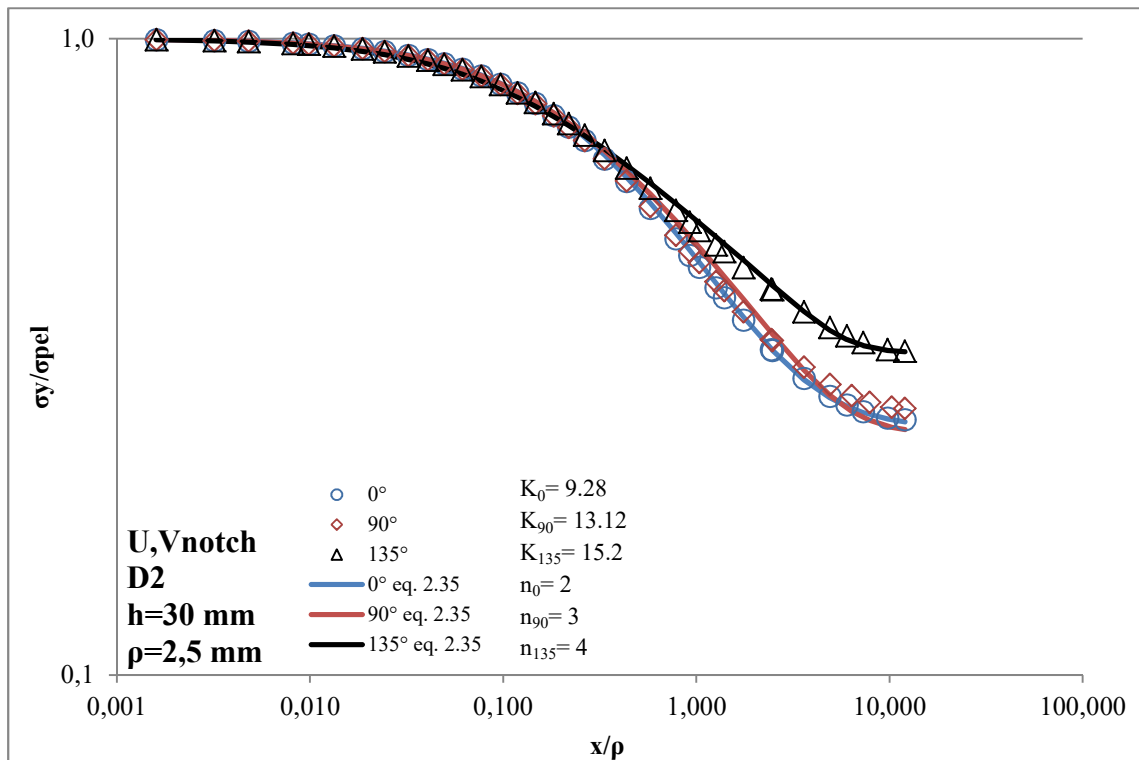


Figura 75– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

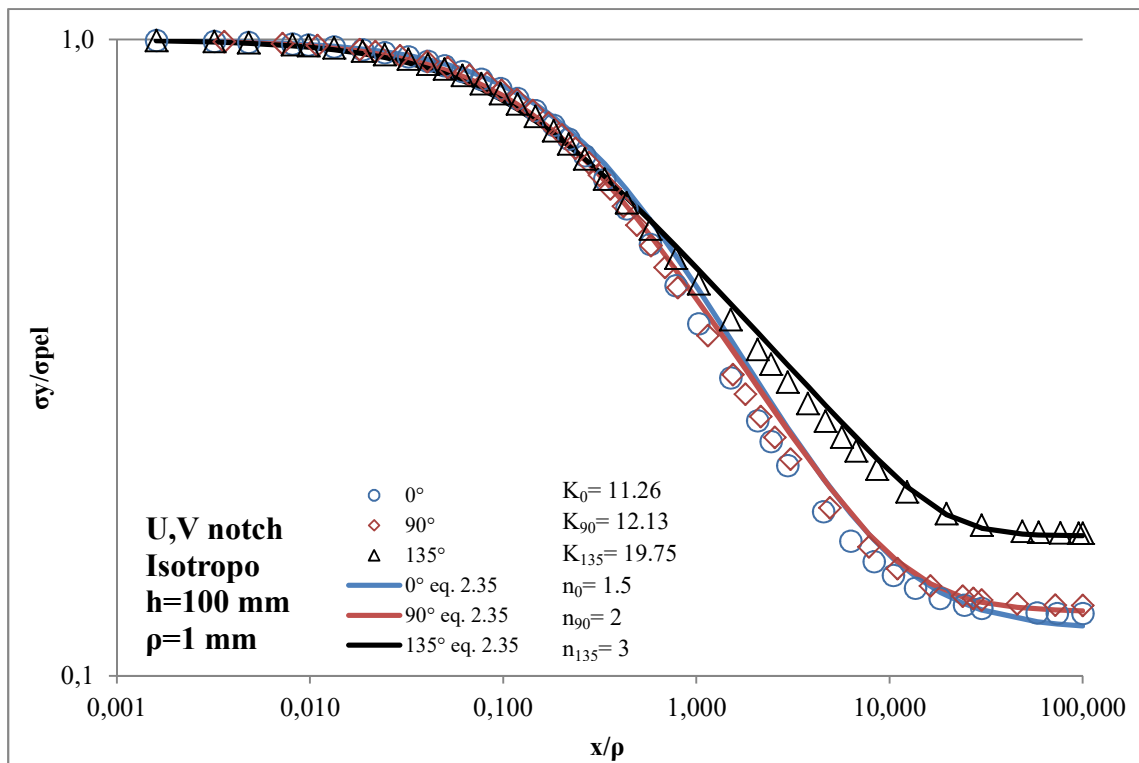


Figura 76– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

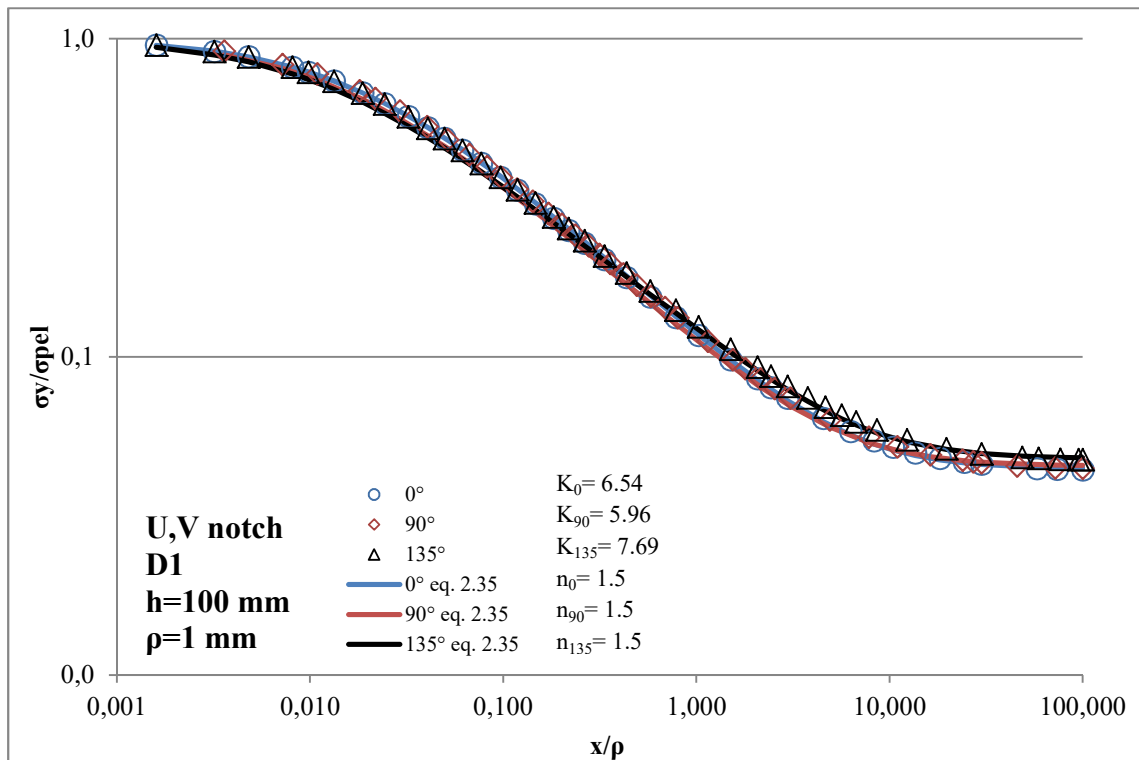


Figura 77– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

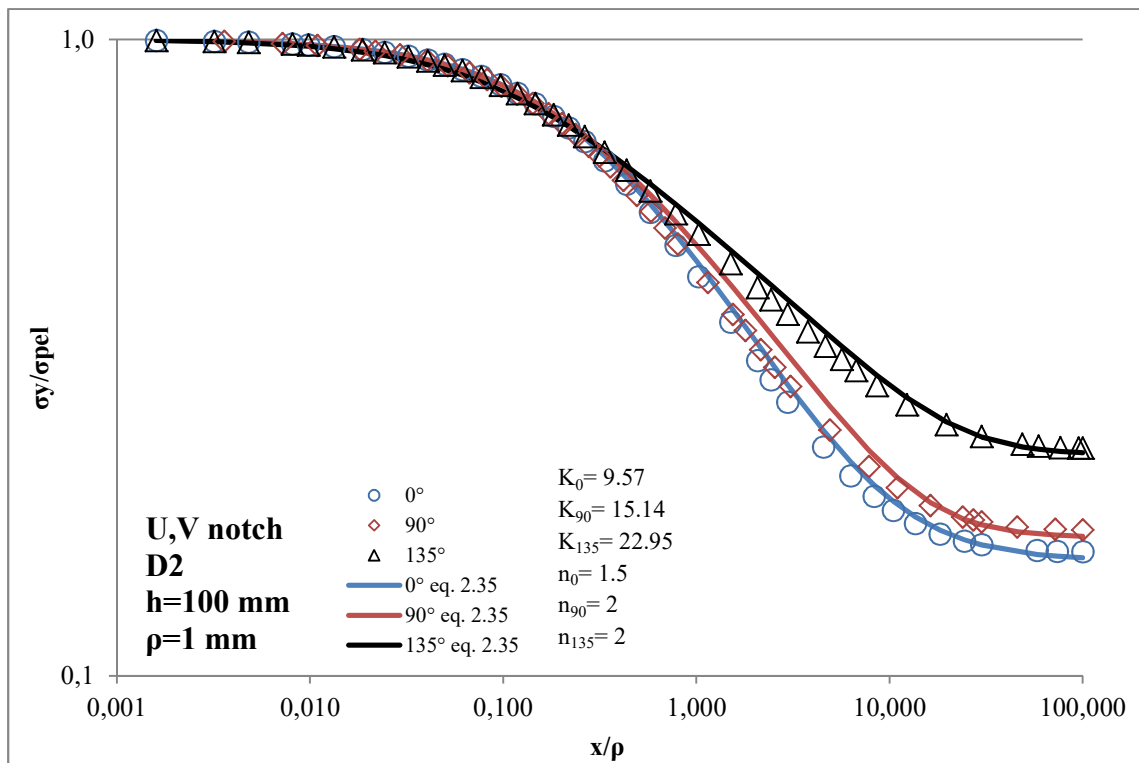


Figura 78– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

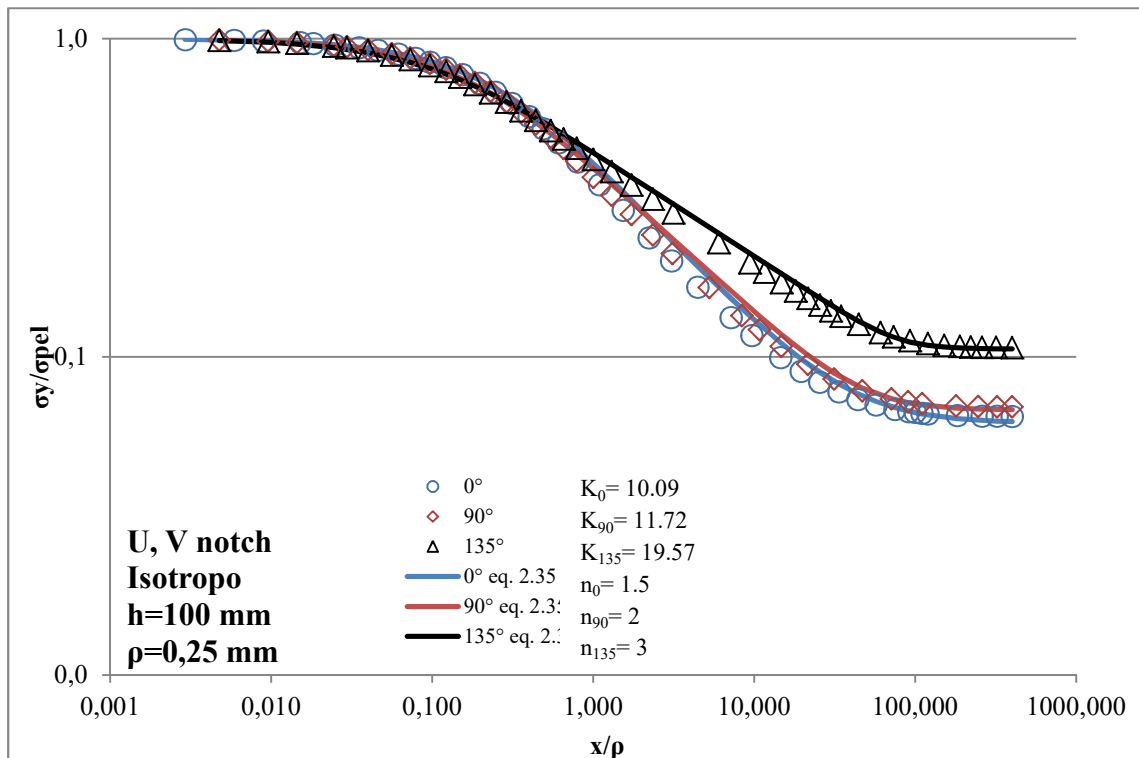


Figura 79– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

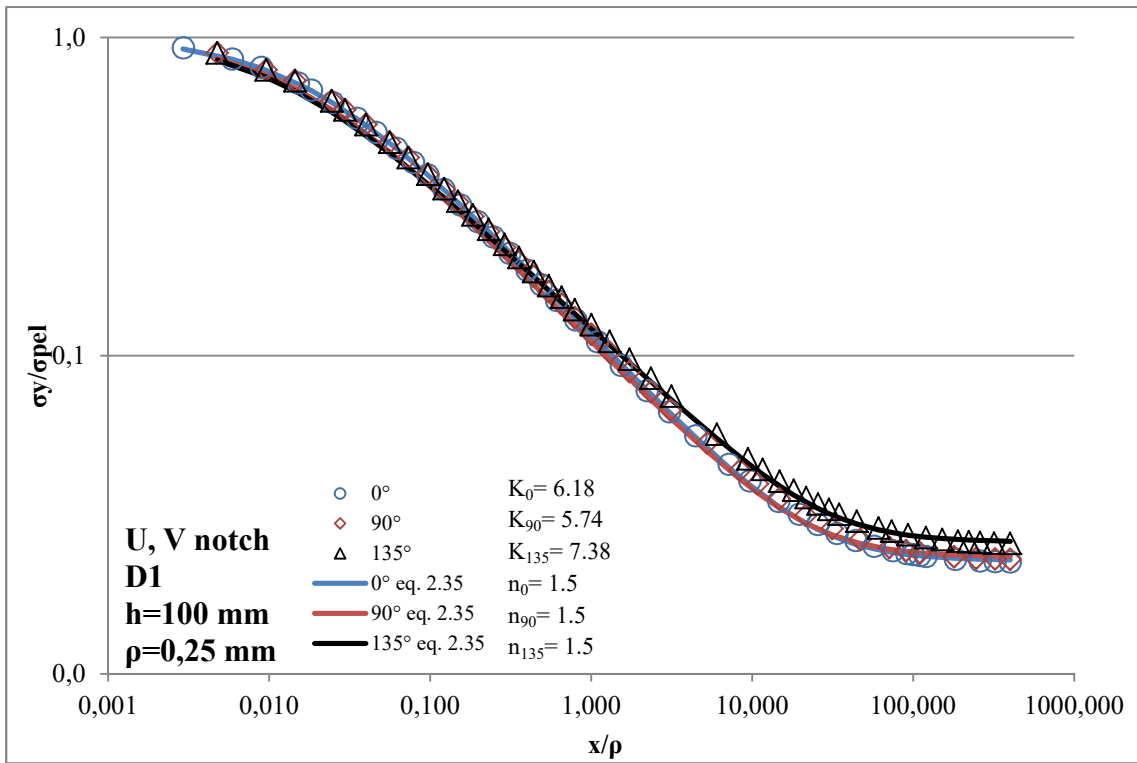


Figura 80– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

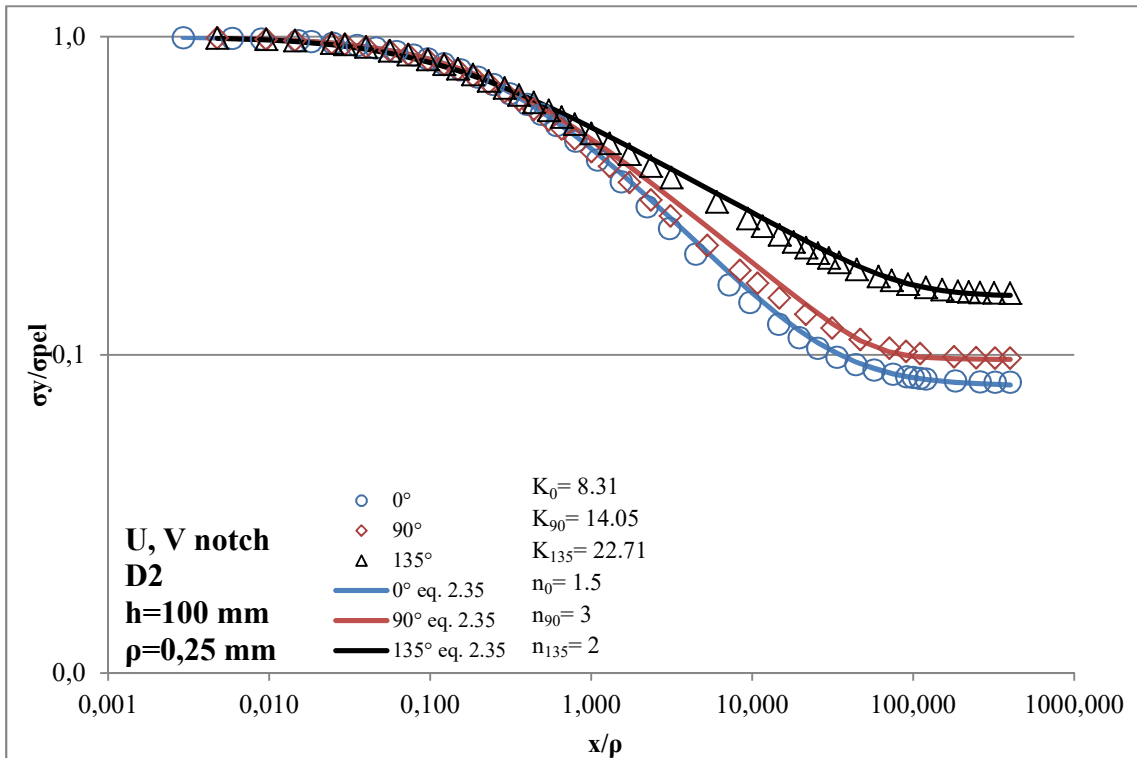


Figura 81– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

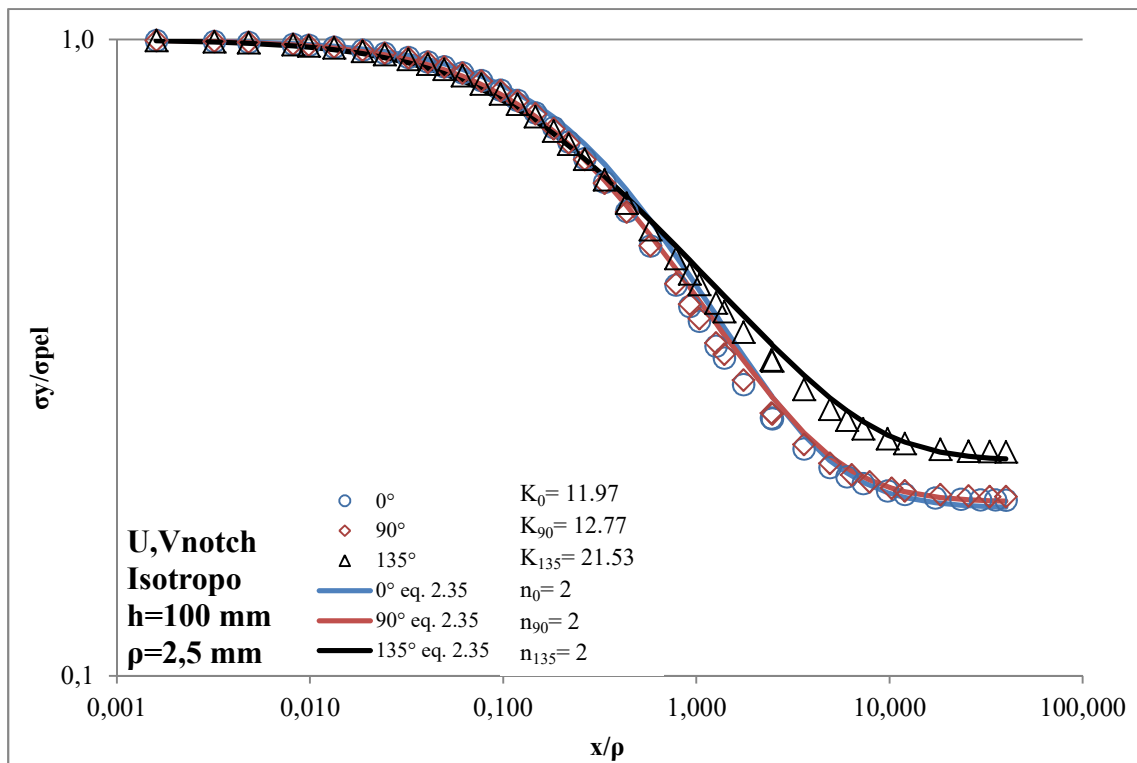


Figura 82– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

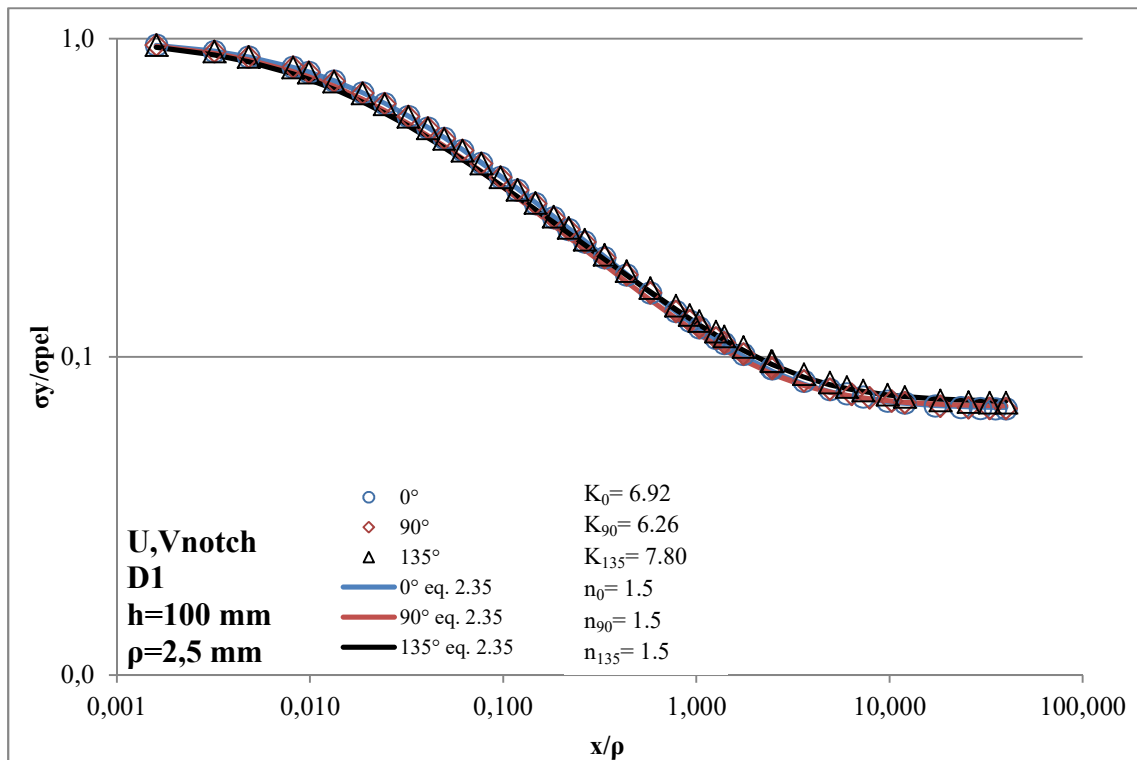


Figura 83– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

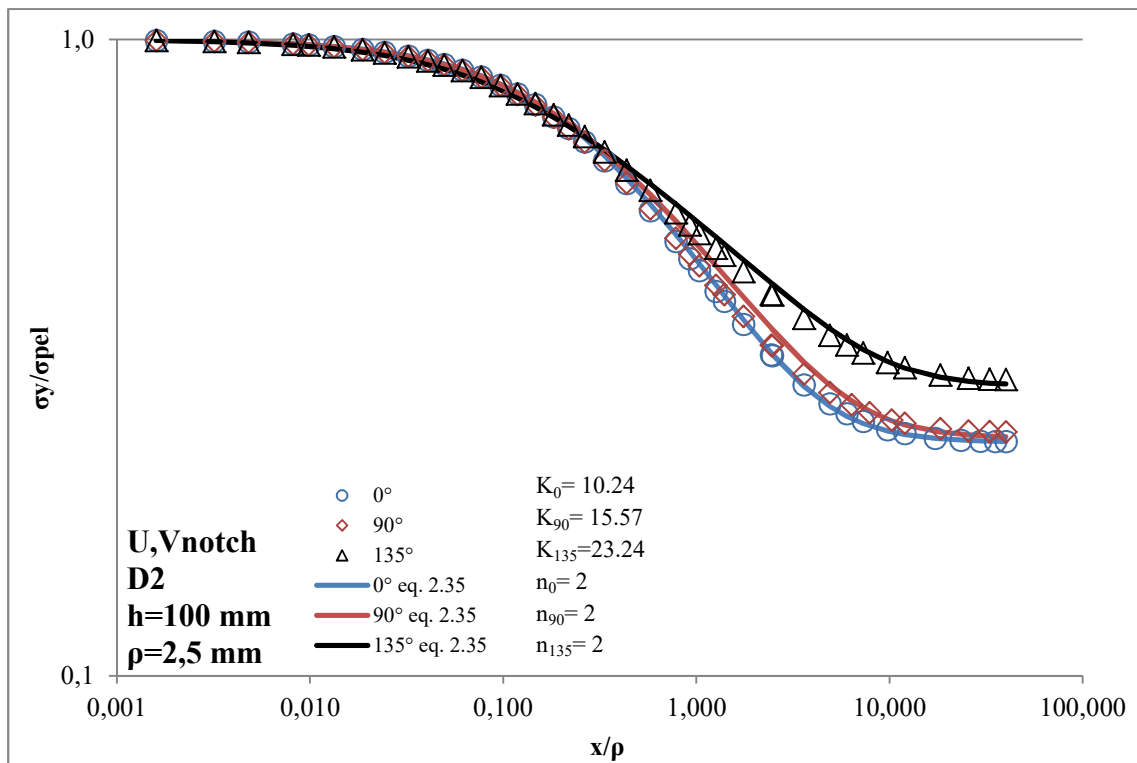


Figura 84– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

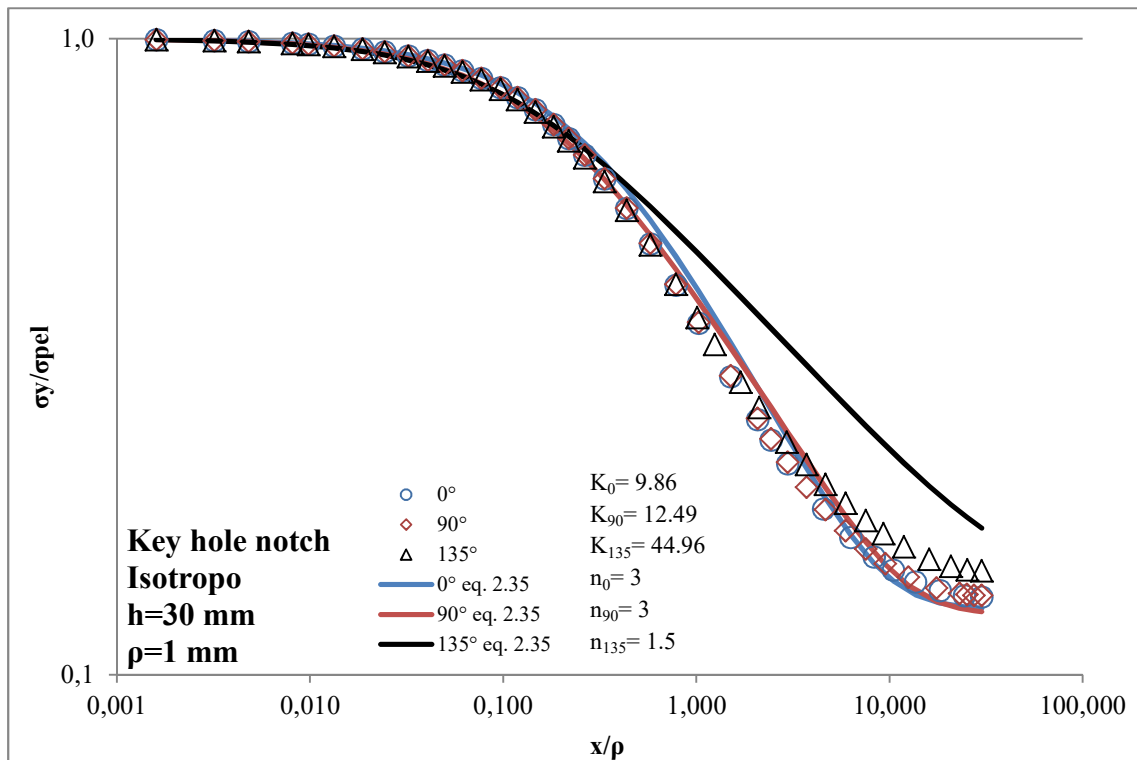


Figura 85– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

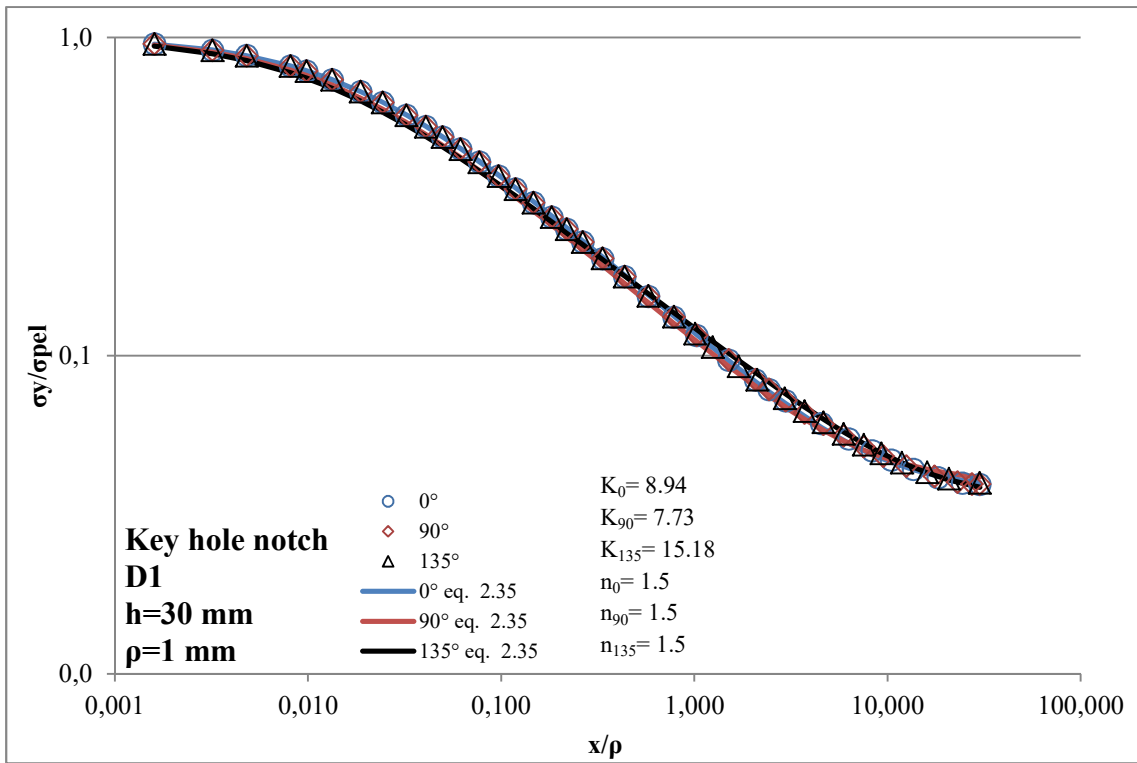


Figura 86– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

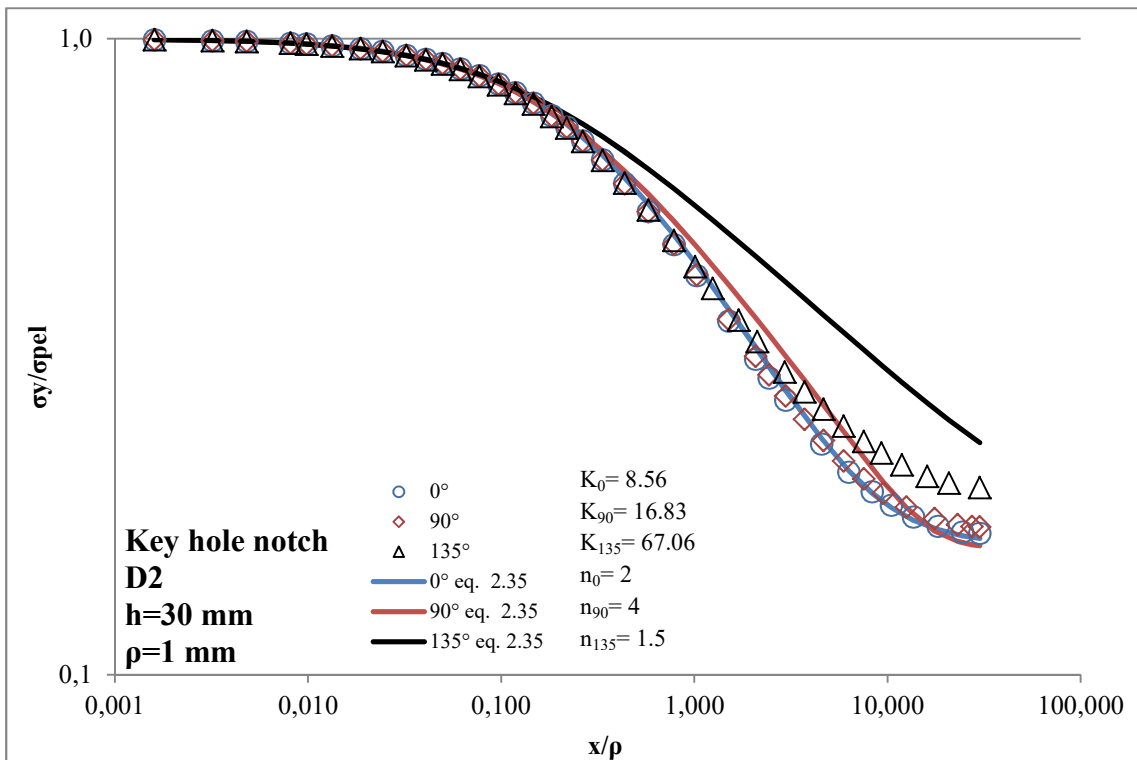


Figura 87– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$



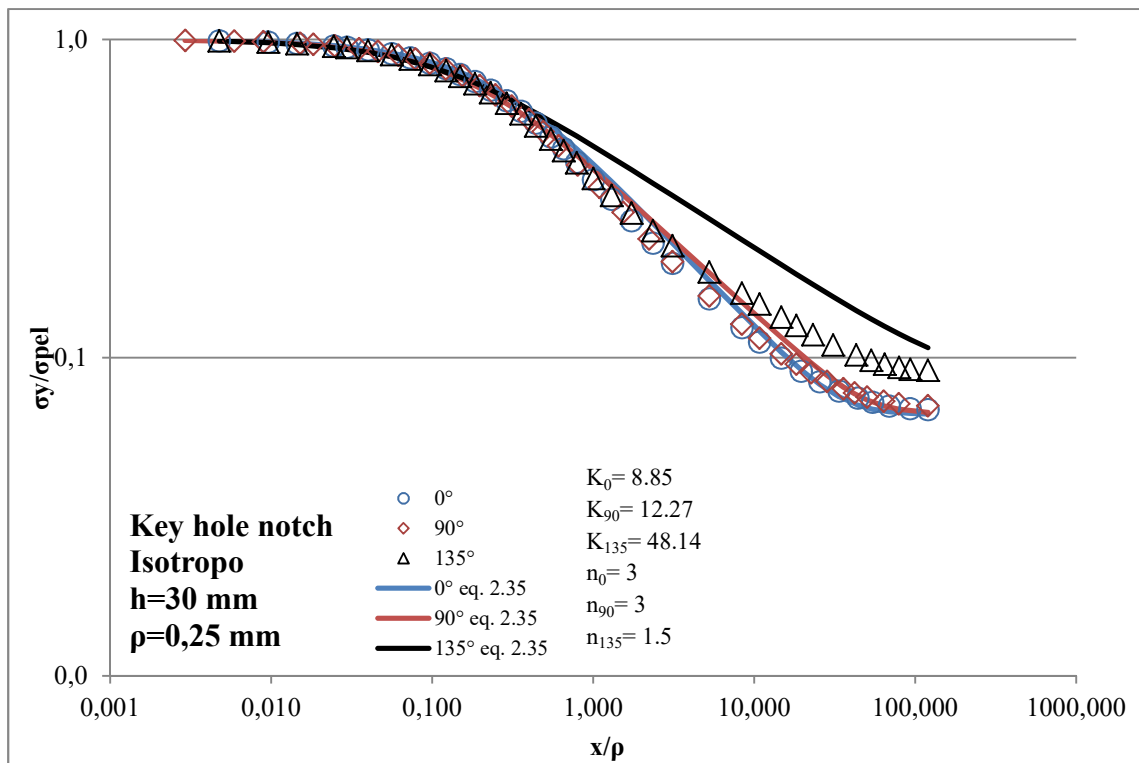


Figura 88– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

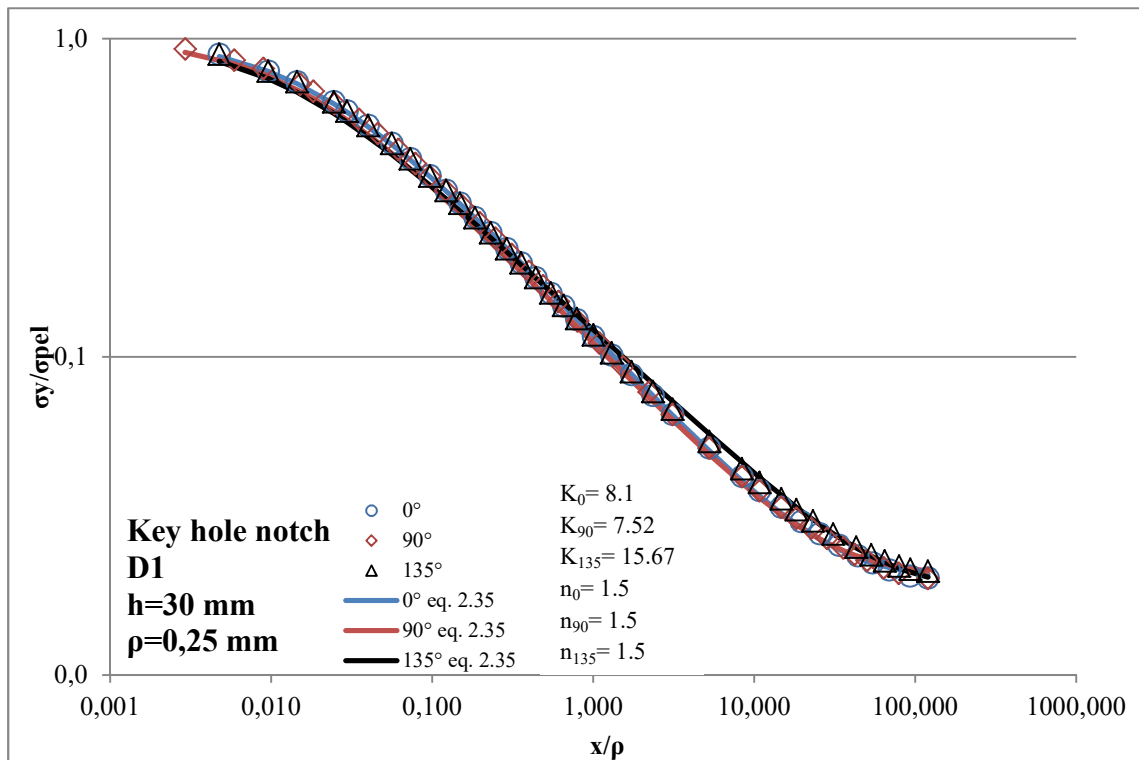


Figura 89– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

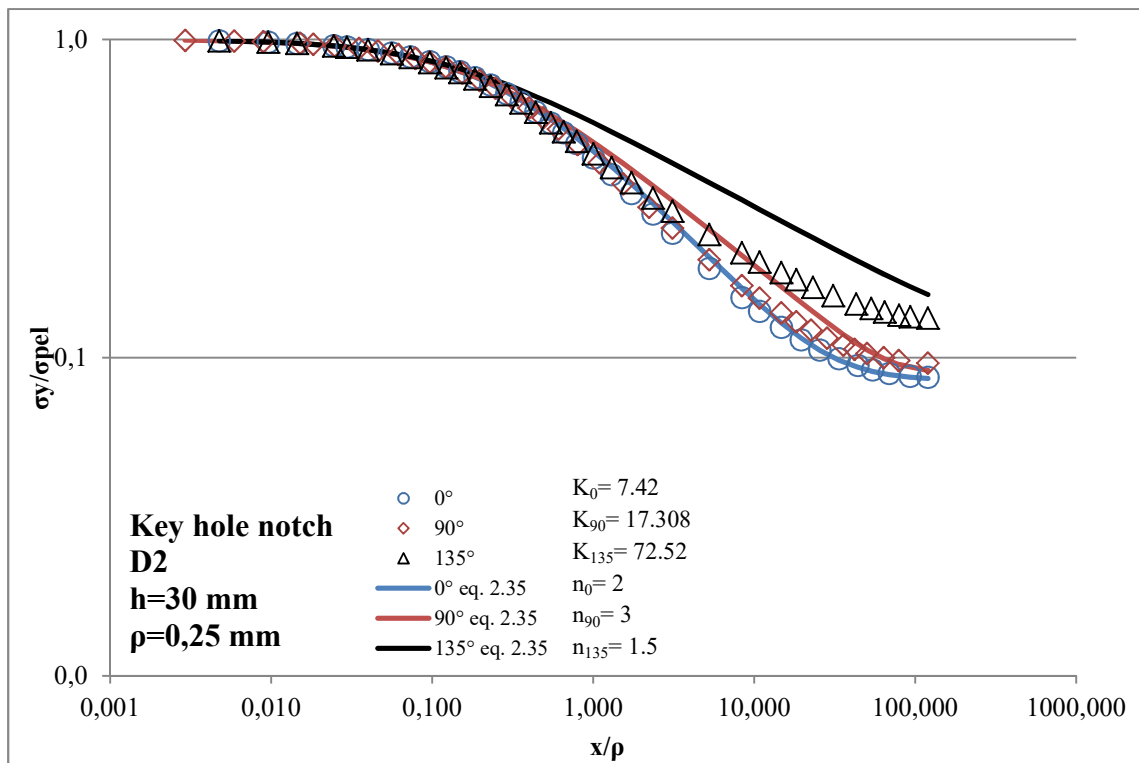


Figura 90– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

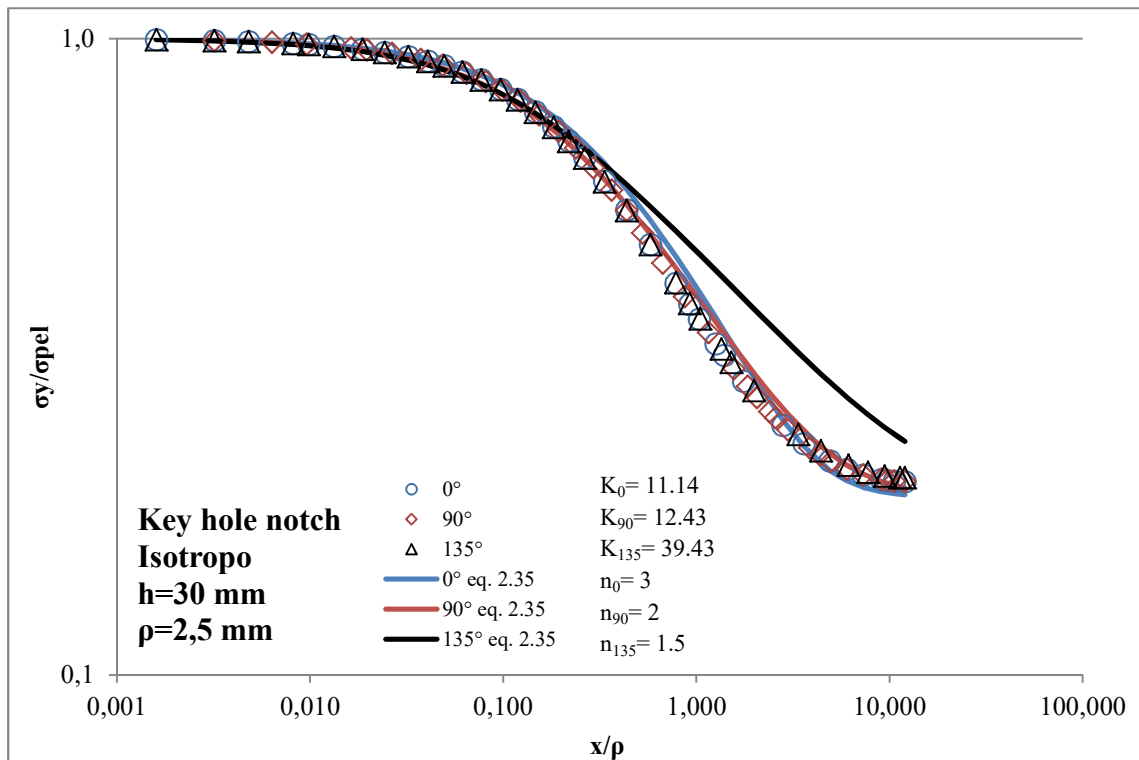


Figura 91– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

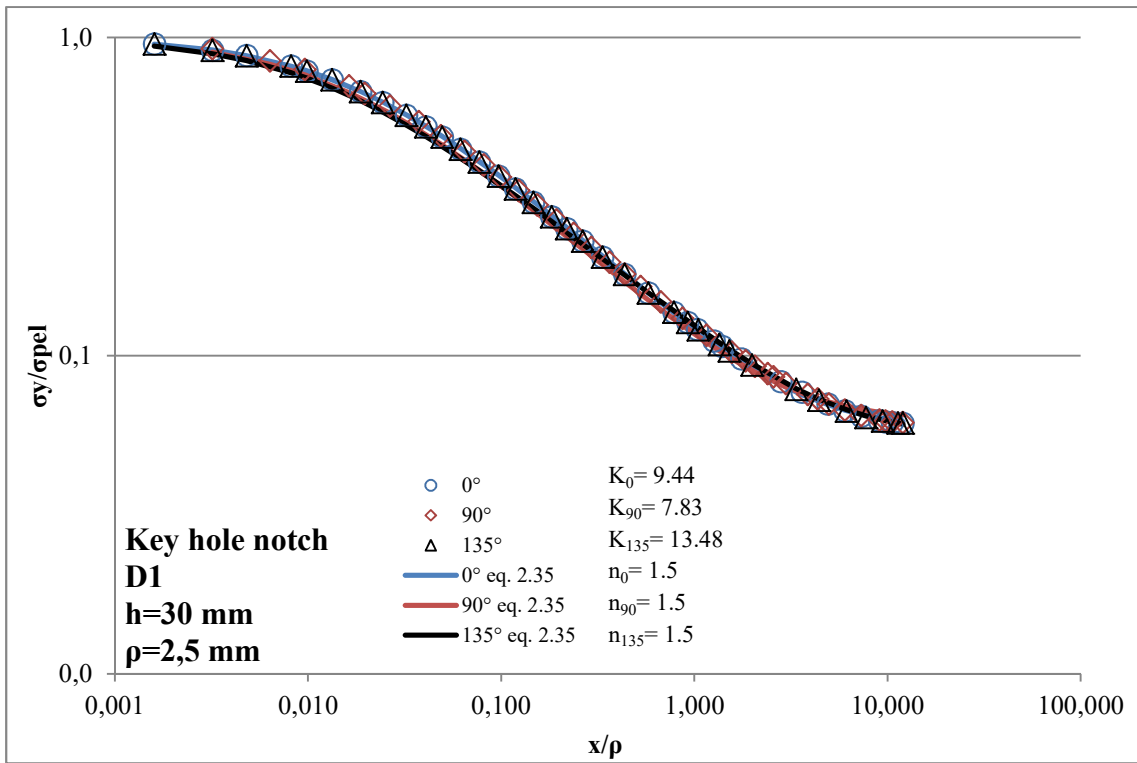


Figura 92– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

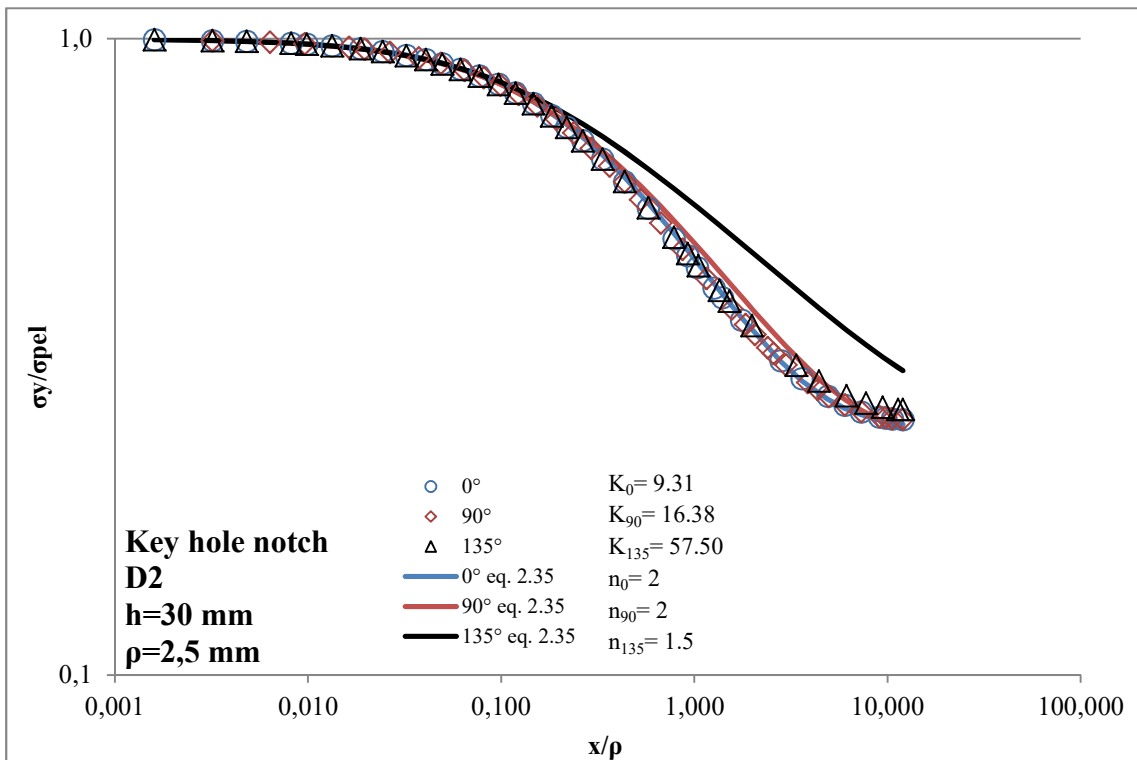


Figura 93– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

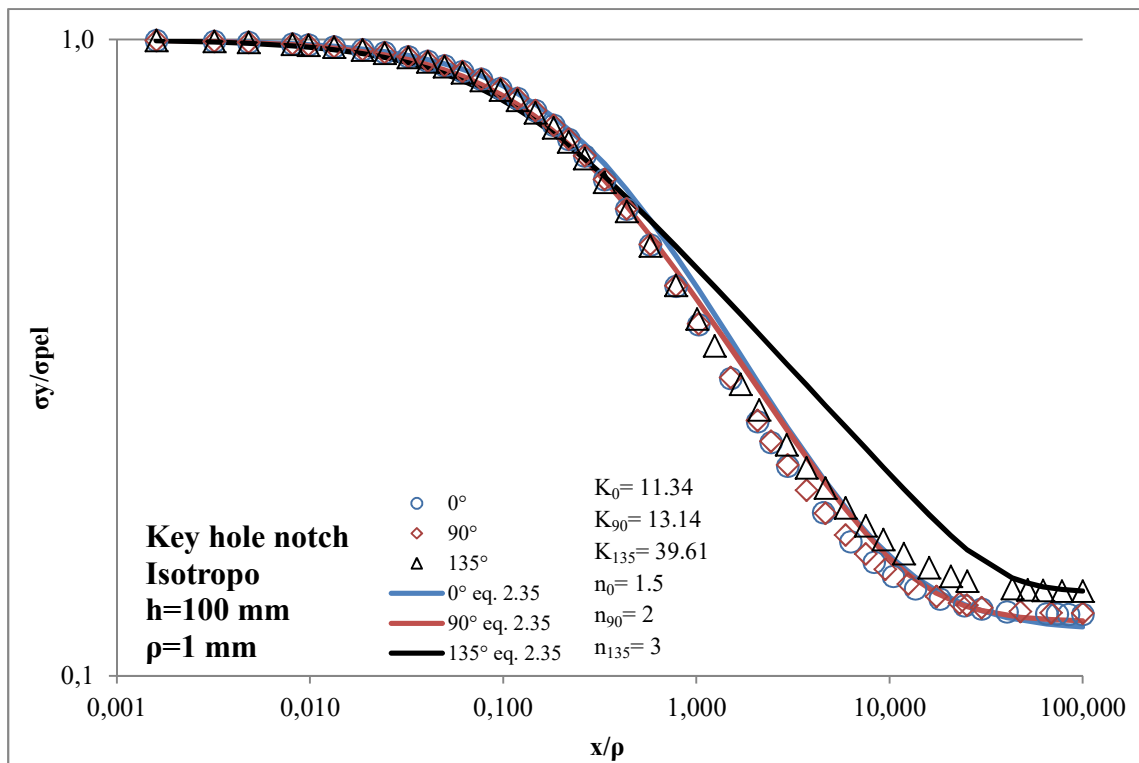


Figura 94– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

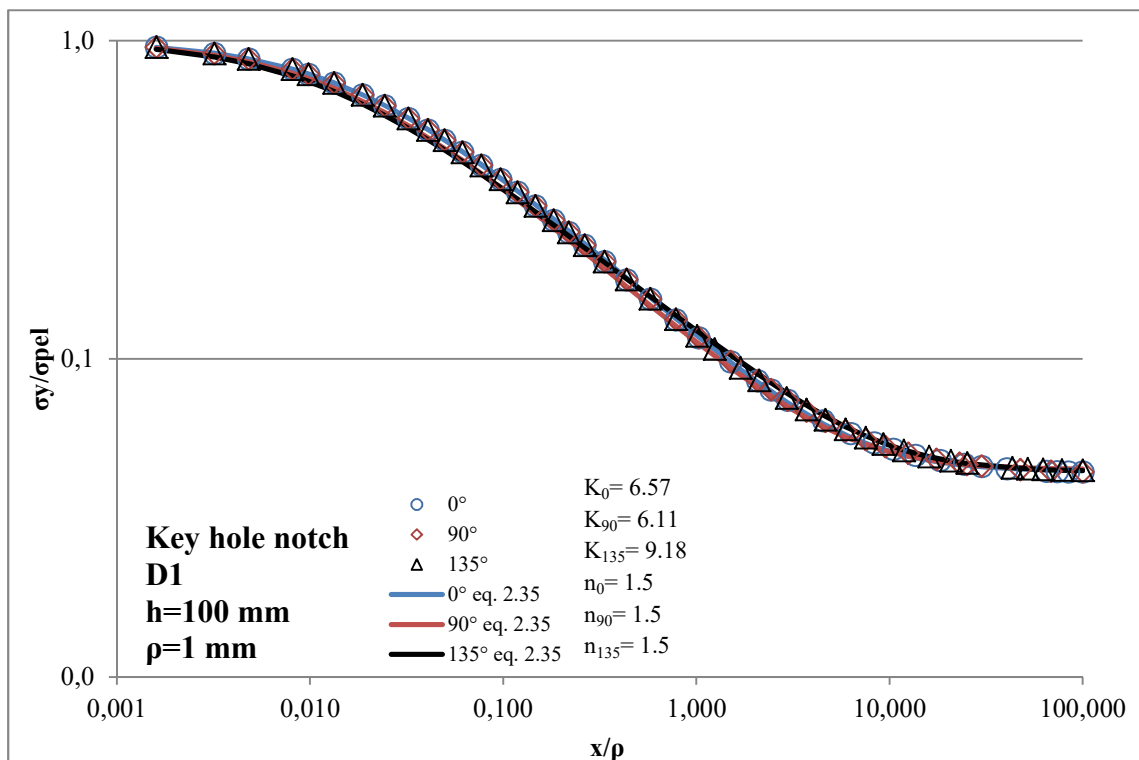


Figura 95– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

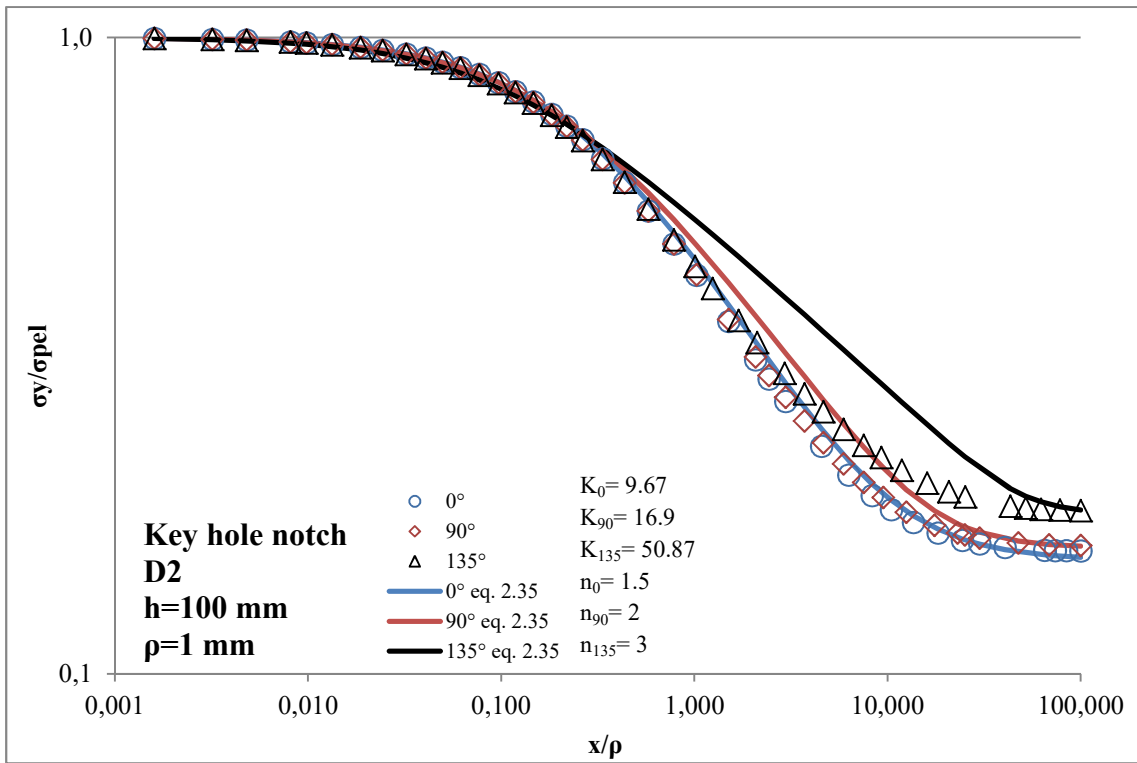


Figura 96– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

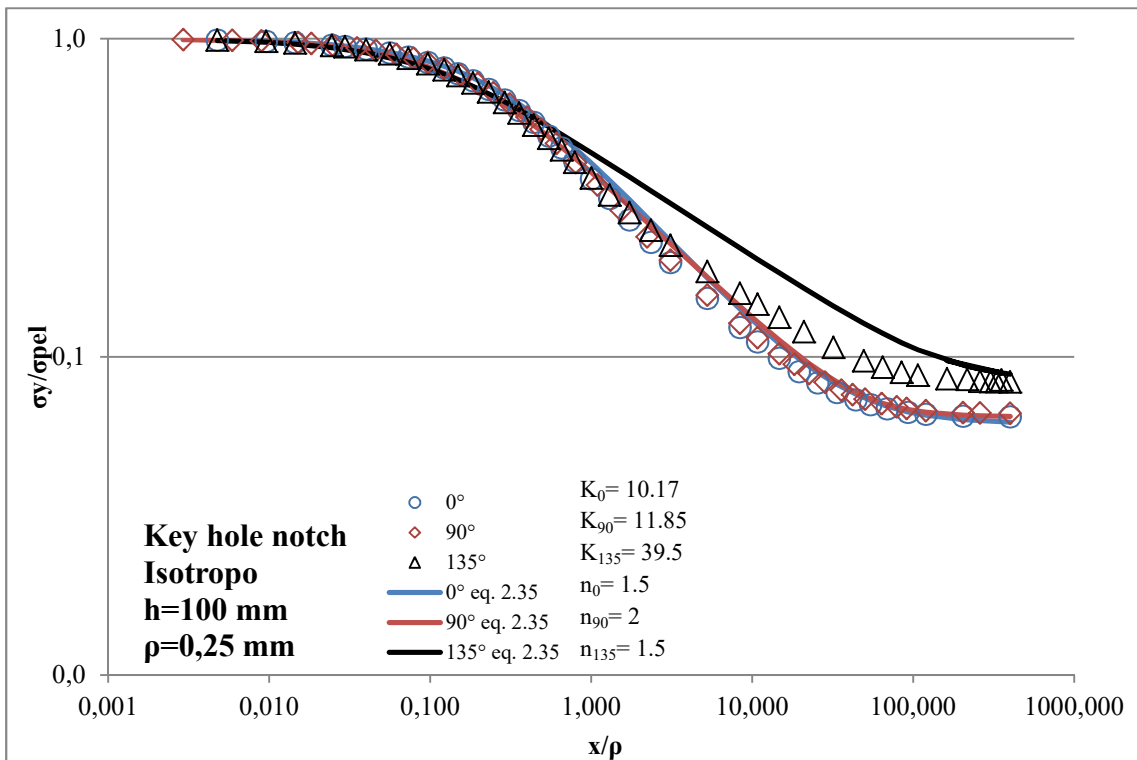


Figura 97– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

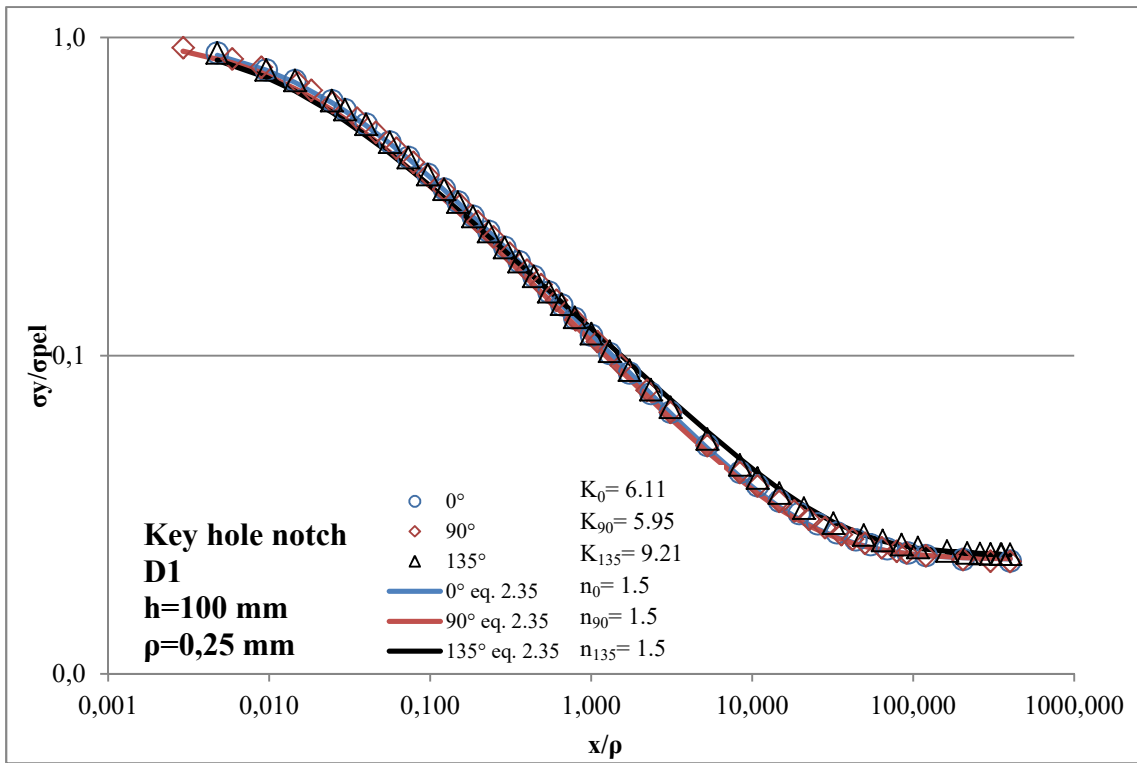


Figura 98– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

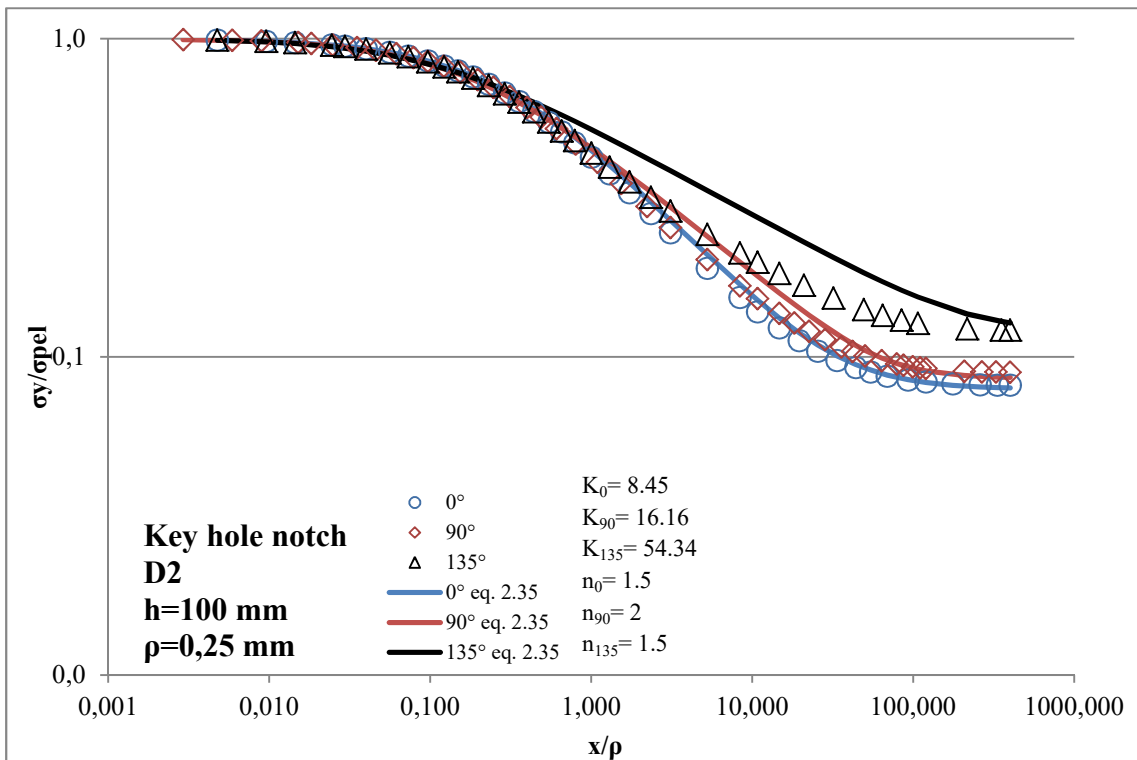


Figura 99– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

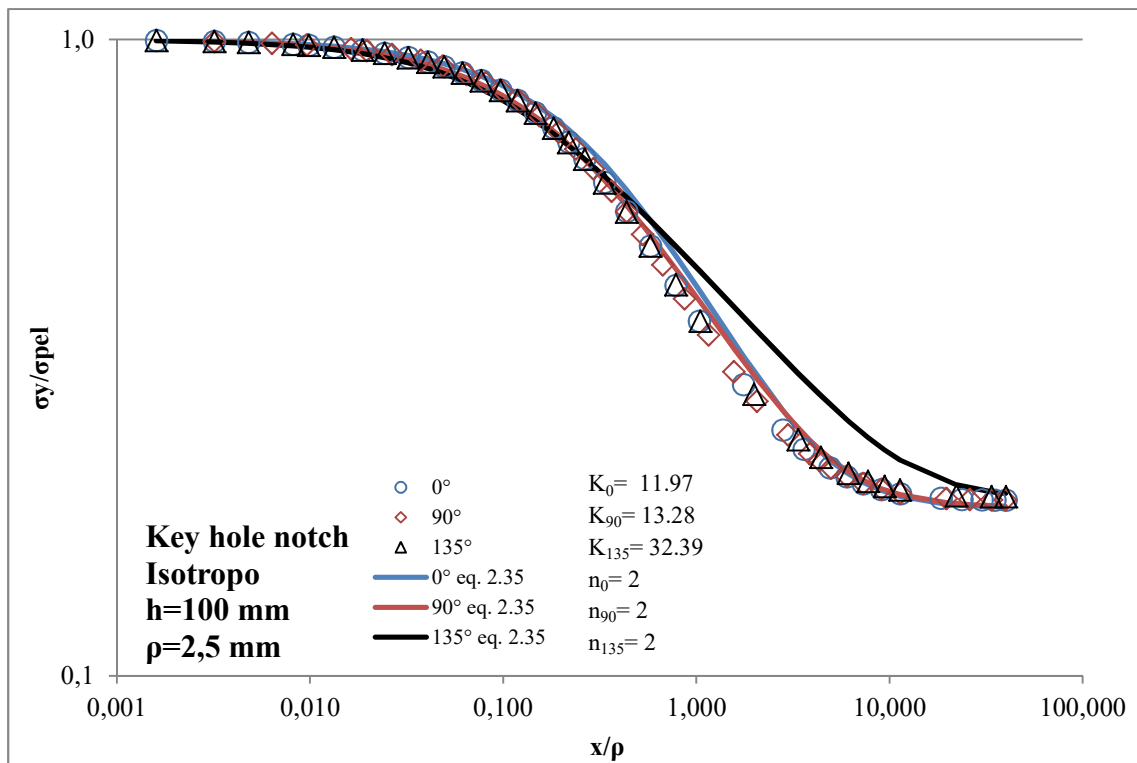


Figura 100– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

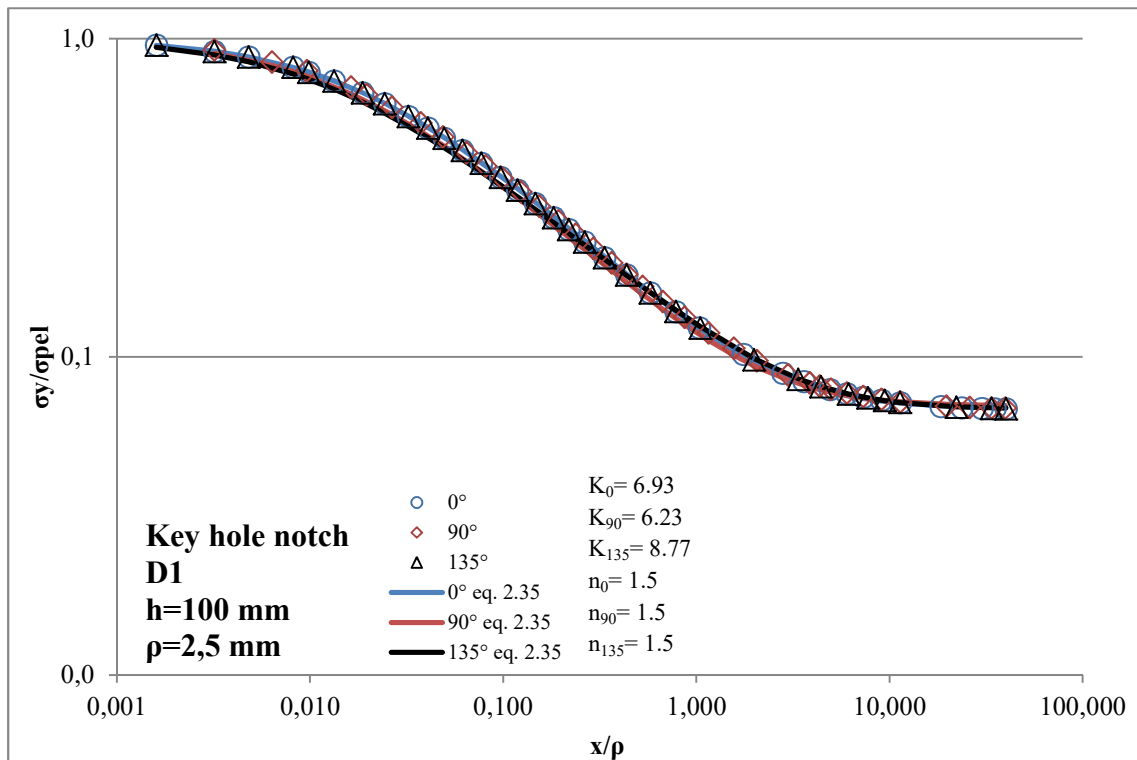


Figura 101– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

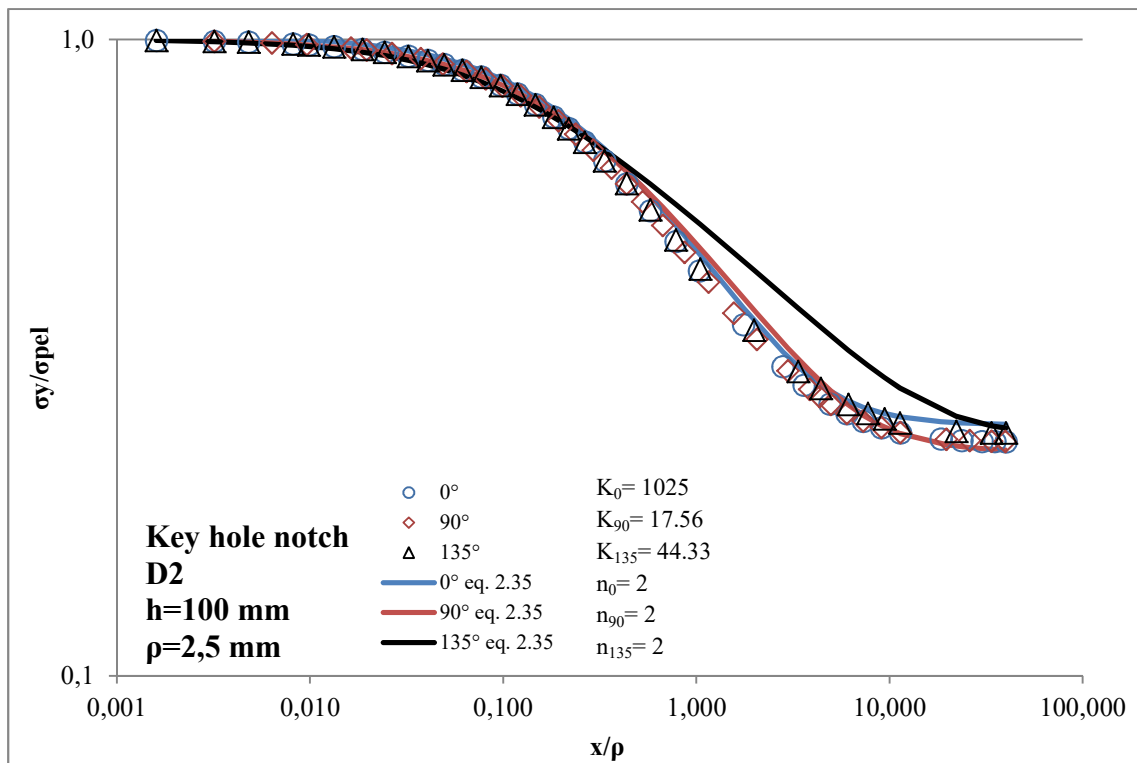


Figura 102– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

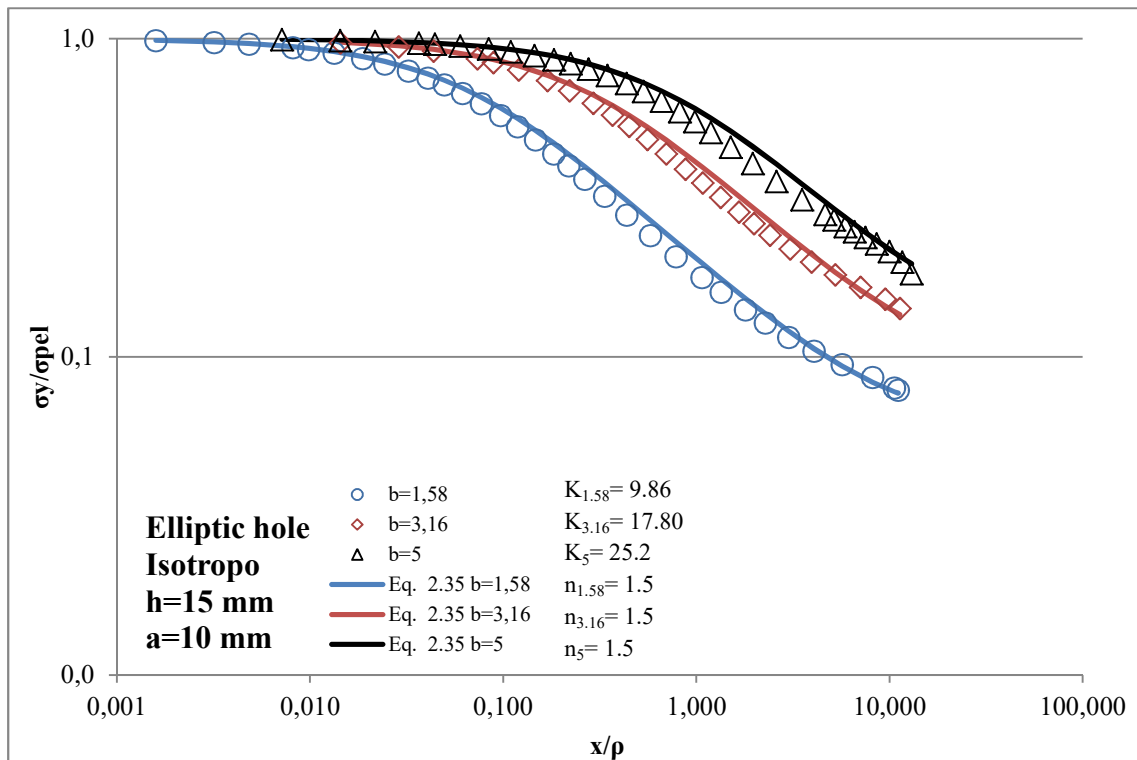


Figura 103– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$



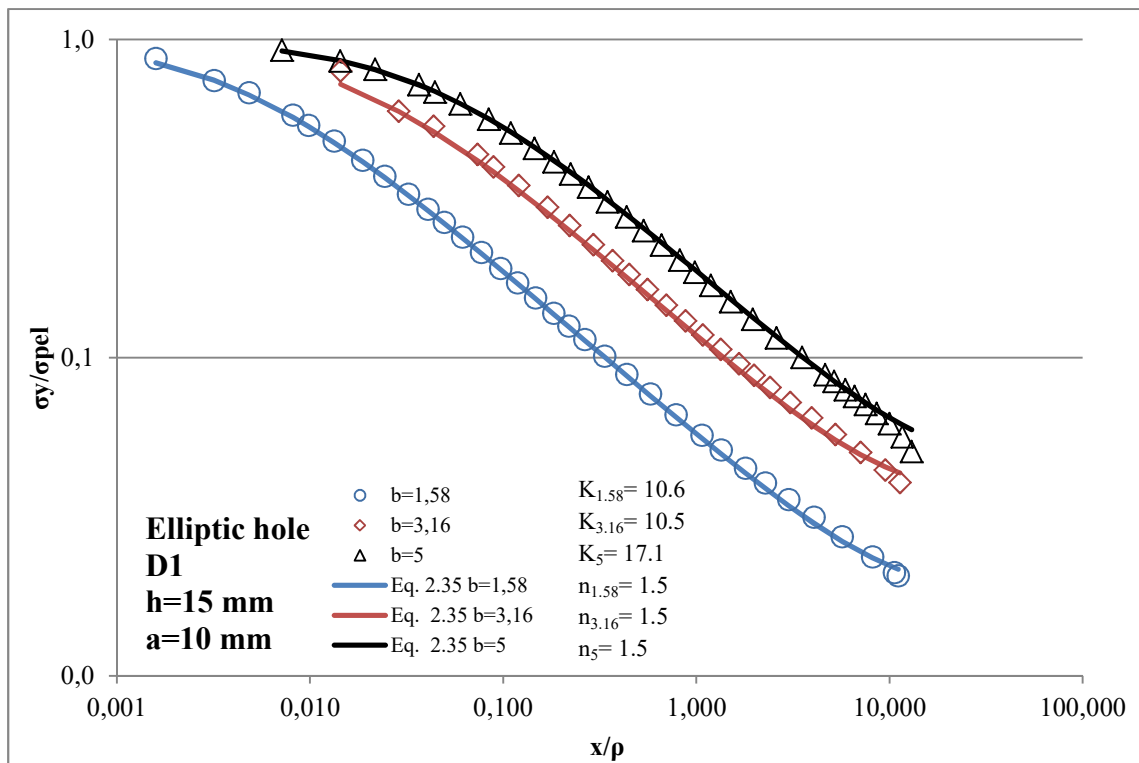


Figura 104– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

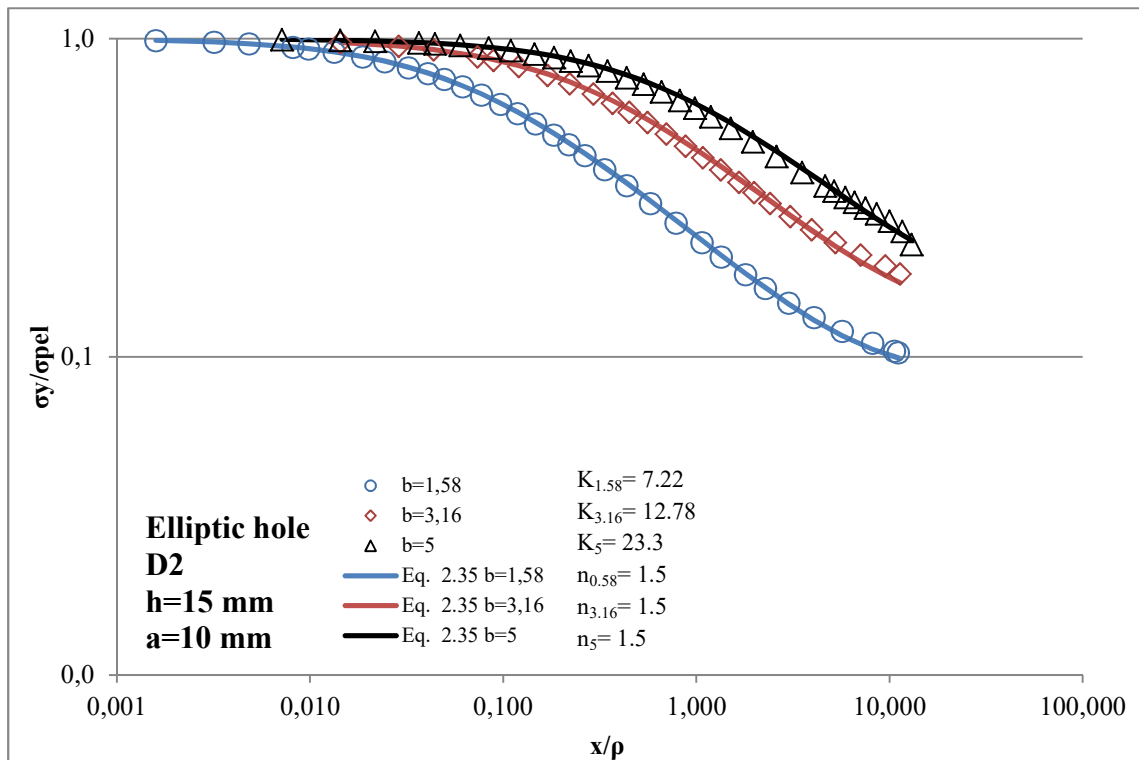


Figura 105– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

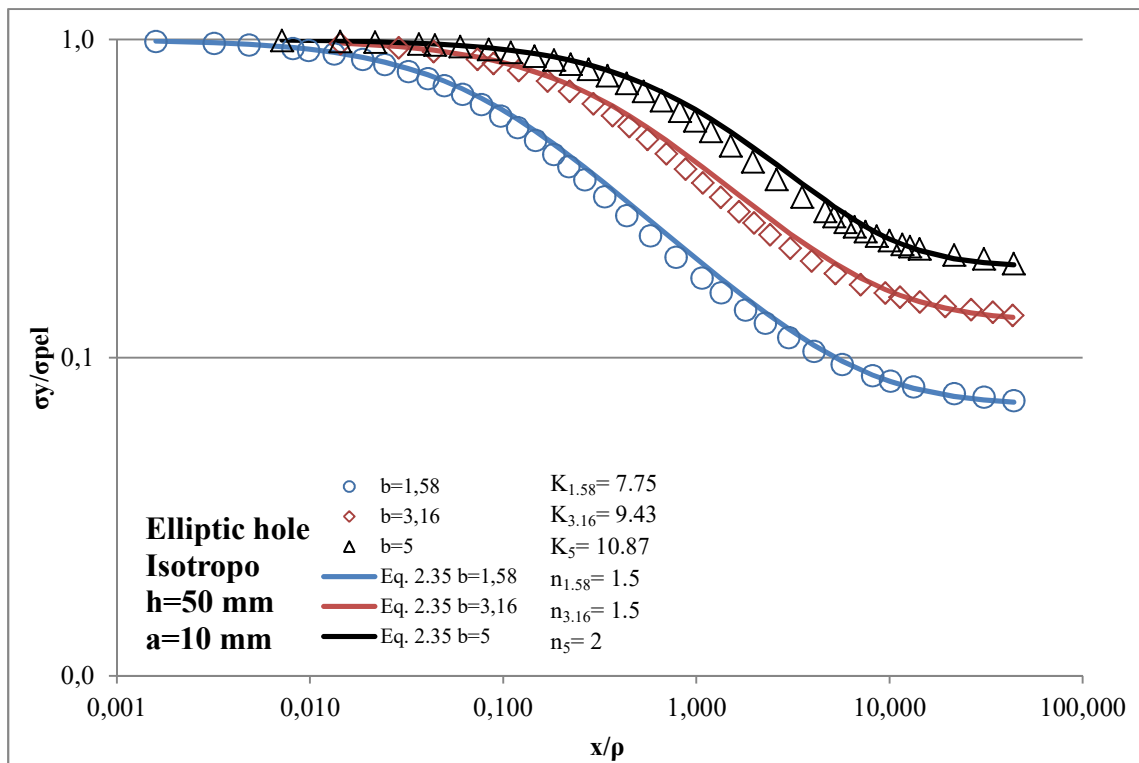


Figura 106– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

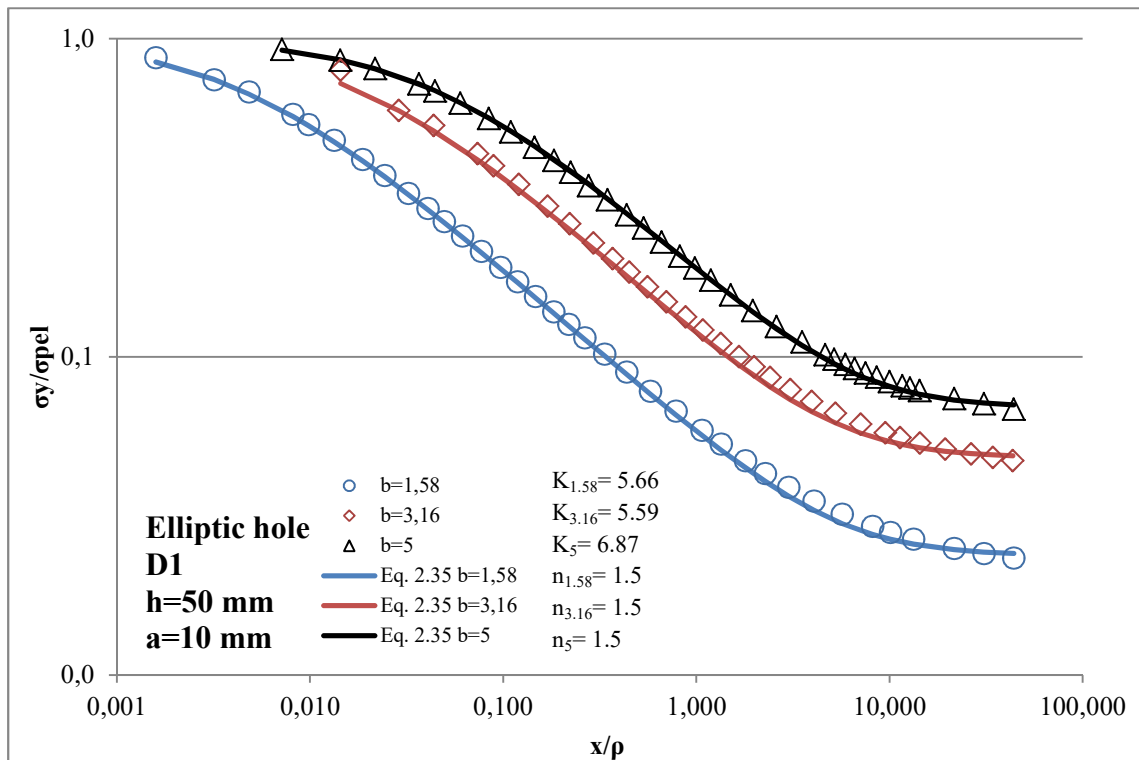


Figura 107– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

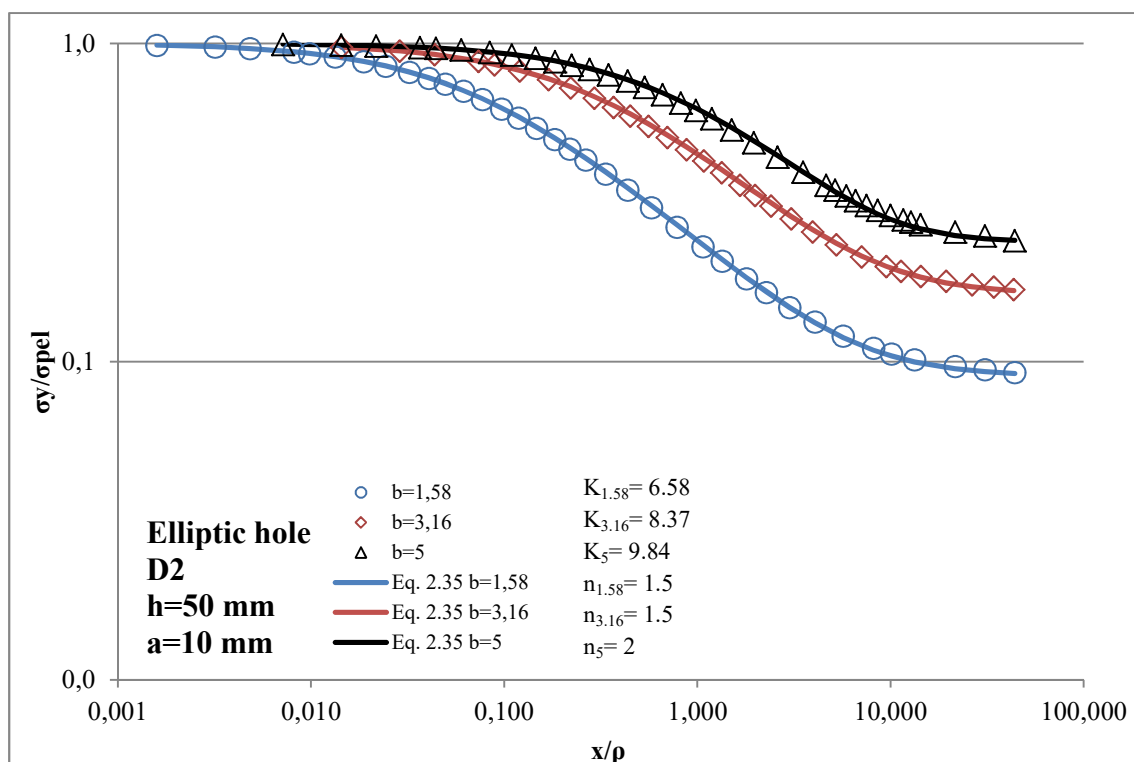


Figura 108– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

Da una prima osservazione dei diagrammi è possibile notare che l'andamento del campo di tensione per geometrie con diversi angoli di apertura è in alcuni casi molto simile. In particolare si può affermare che l'angolo di apertura ha effetti trascurabili per materiali con  $\psi < 0.25$  mentre ha una certa influenza per  $\psi \geq 0.25$ , in modo anche sostanziale, ma sempre a partire dalla regione 2. Osservando infatti, si può identificare un valore comune a tutti i casi considerati pari  $0.3 \cdot x/\rho$ , a partire dal quale l'angolo di apertura influenza o meno il campo tensionale. In queste condizioni, l'influenza dell'angolo di apertura è più sostanziale nella geometria con intaglio ad U o a V raccordato, mentre è meno marcata nella geometria con intaglio a key hole. Nel primo caso infatti l'equazione 2.35 è molto accurata, come visto nel paragrafo precedente, mentre nella geometria con intaglio a key hole la minor sensibilità all'angolo di apertura porta a delle deviazioni dell'equazione 2.35 rispetto al FEM. Osservando i grafici relativi di geometria con foro ellittico, in cui sono confrontati i diversi semiassi minori presi in considerazione, si nota che i campi di tensione corrispondenti sono molto distinti tra di loro. Nei diagrammi inoltre è rappresentata l'eq. 2.35 valida per un angolo di apertura nullo, con il relativo raggio di raccordo in accordo alla (2.1). Nella geometria con foro ellittico il tipico andamento descritto in figura(8) è meno evidente e la transizione del campo di tensione dalla zona alterata dall'intaglio a quella dove l'effetto di intaglio si annulla è molto meno marcata. Anche in questo caso tuttavia il modello teorico sviluppato da ottimi risultati.

### 3.3 Confronto tra materiali diversi

Vengono infine riportati, a parità di tutte le dimensioni geometriche, i grafici che confrontano i tre materiali analizzati (Isotropo, D1 e D2). Tali grafici, molto significativi, permettono una valutazione immediata circa l'effettivo comportamento tra due materiali ortotropi con caratteristiche elastiche opposte e un materiale isotropo.

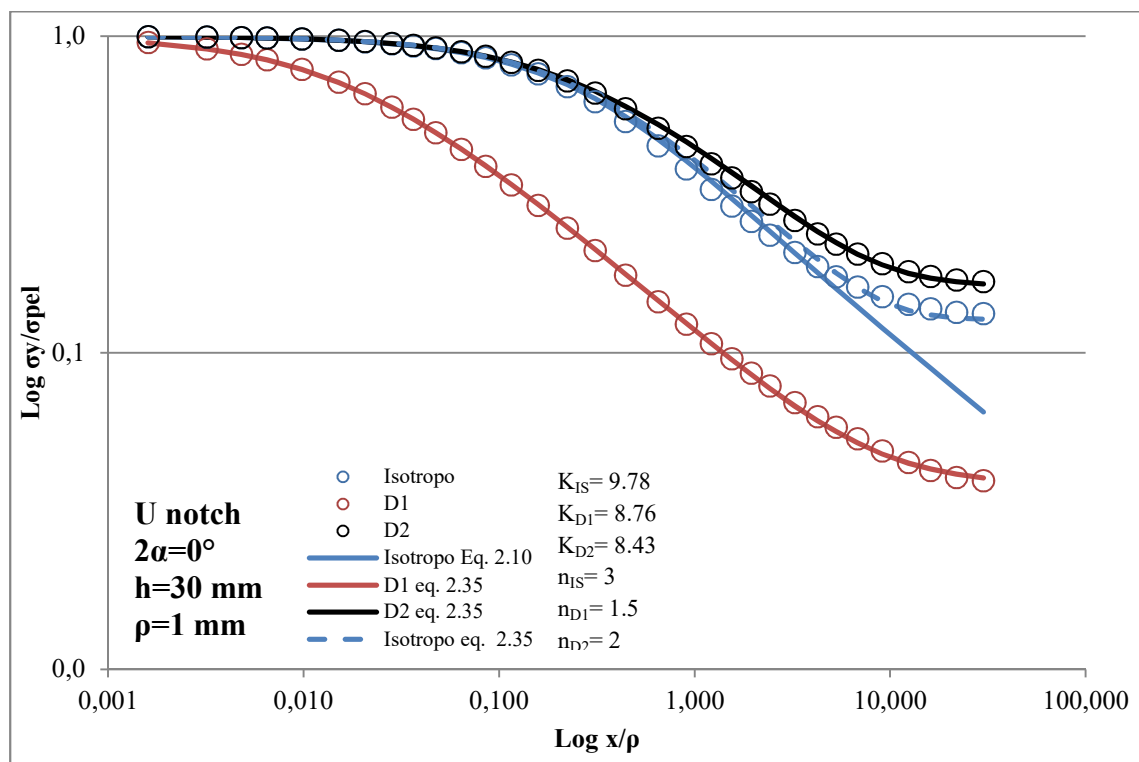


Figura 109– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

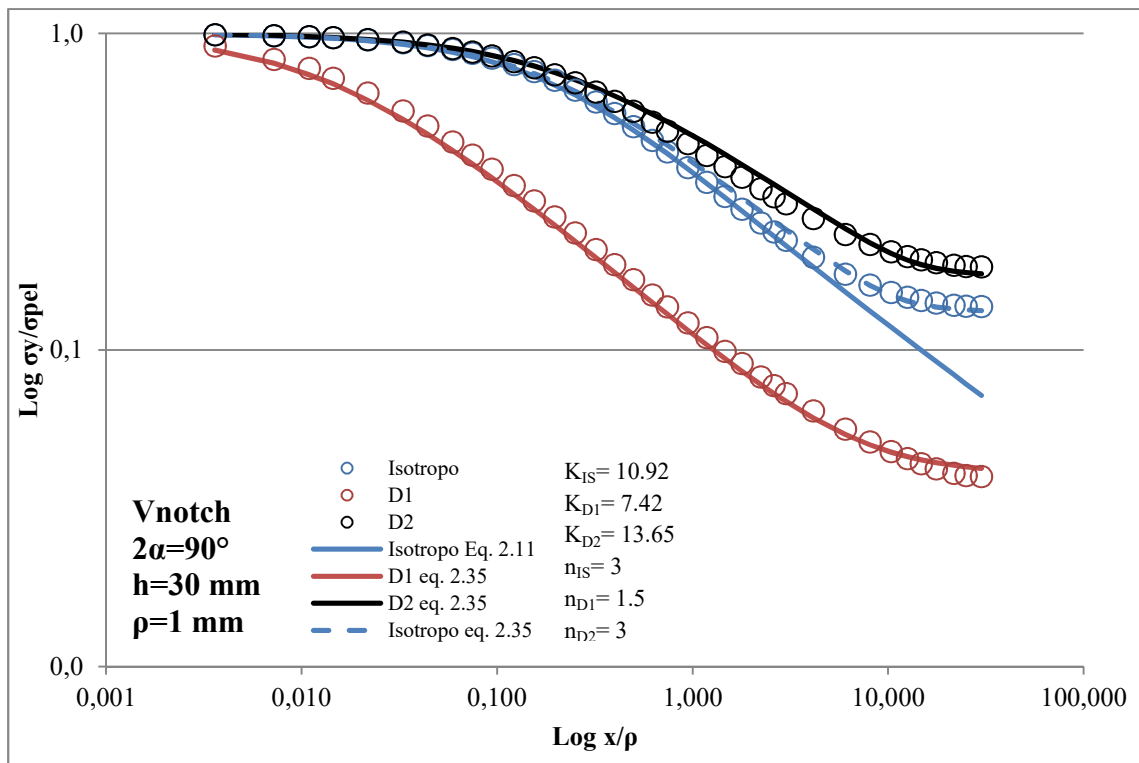


Figura 110– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

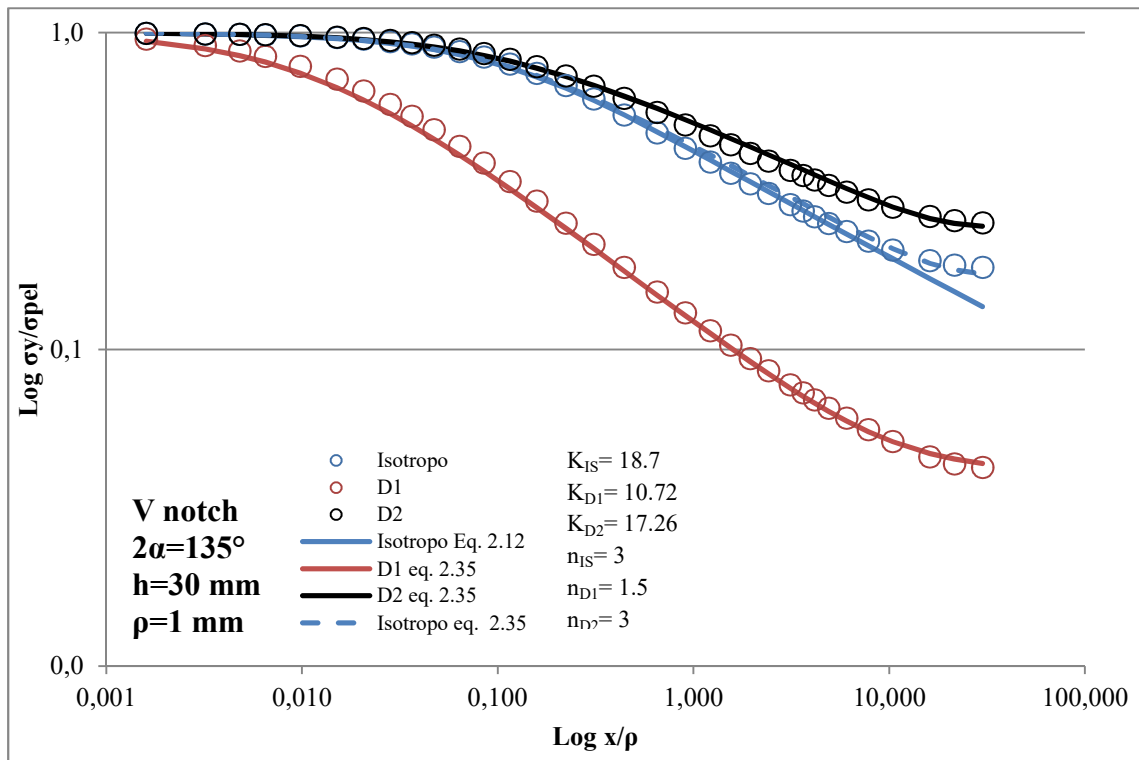


Figura 111– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

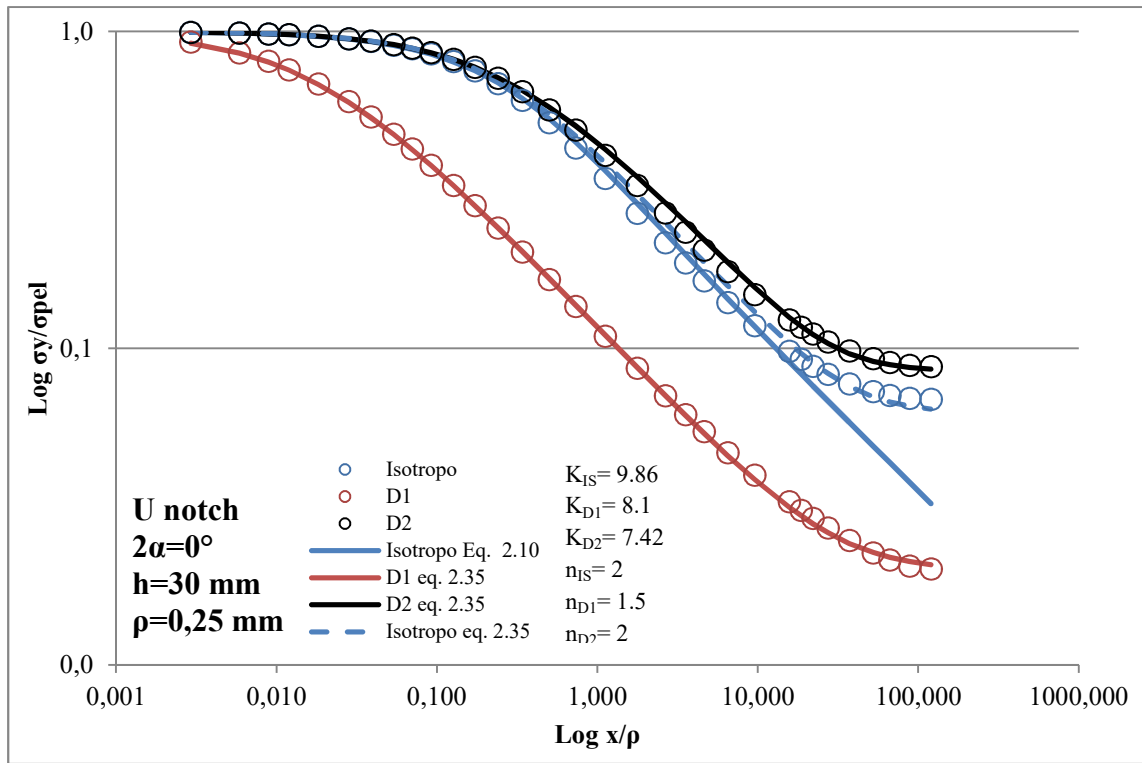


Figura 112– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

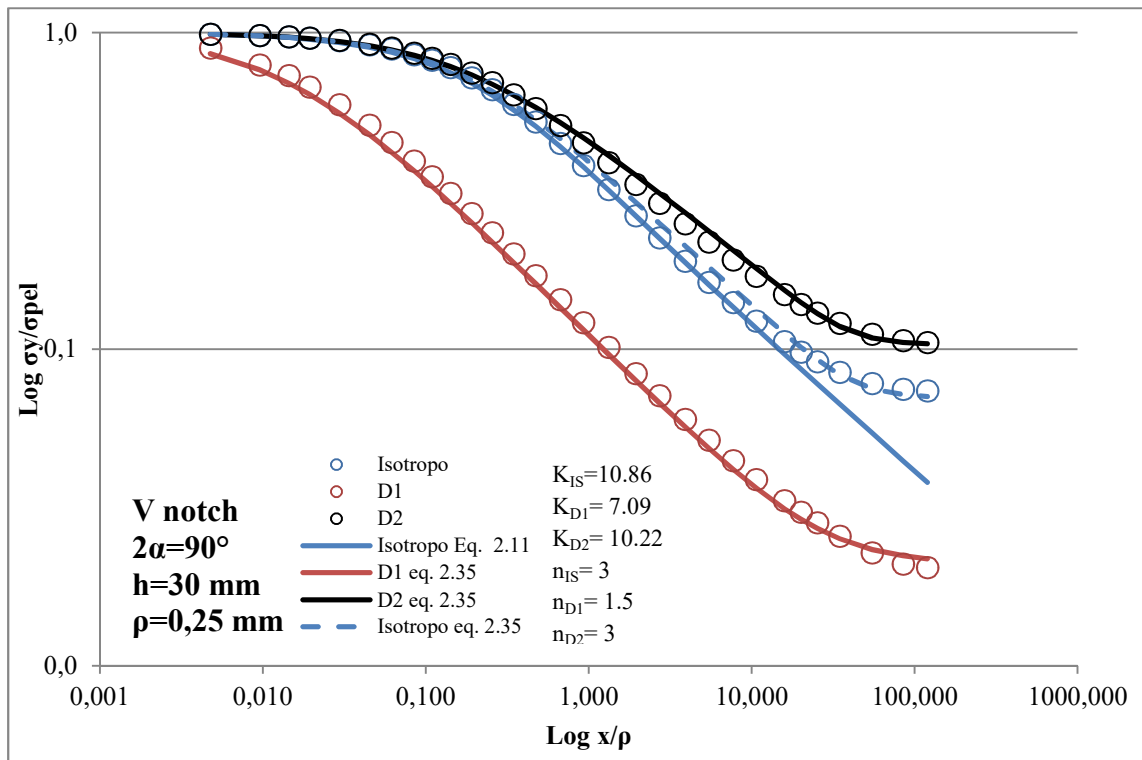


Figura 113– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

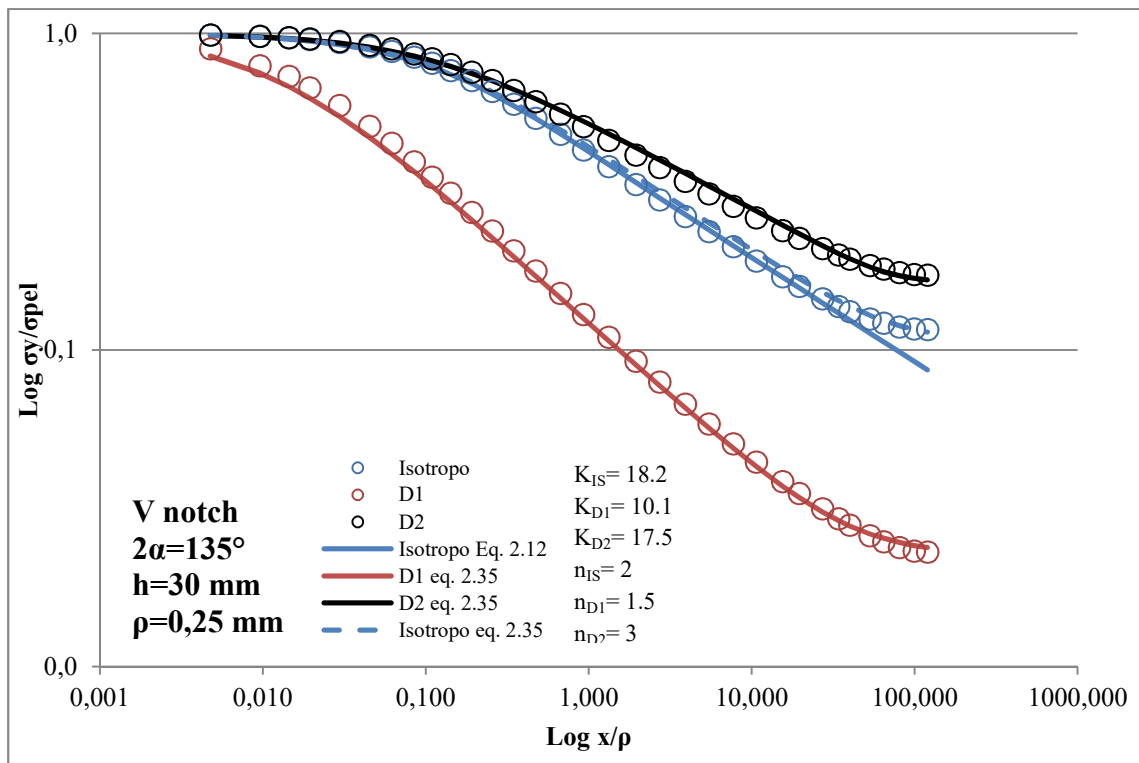


Figura 114– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

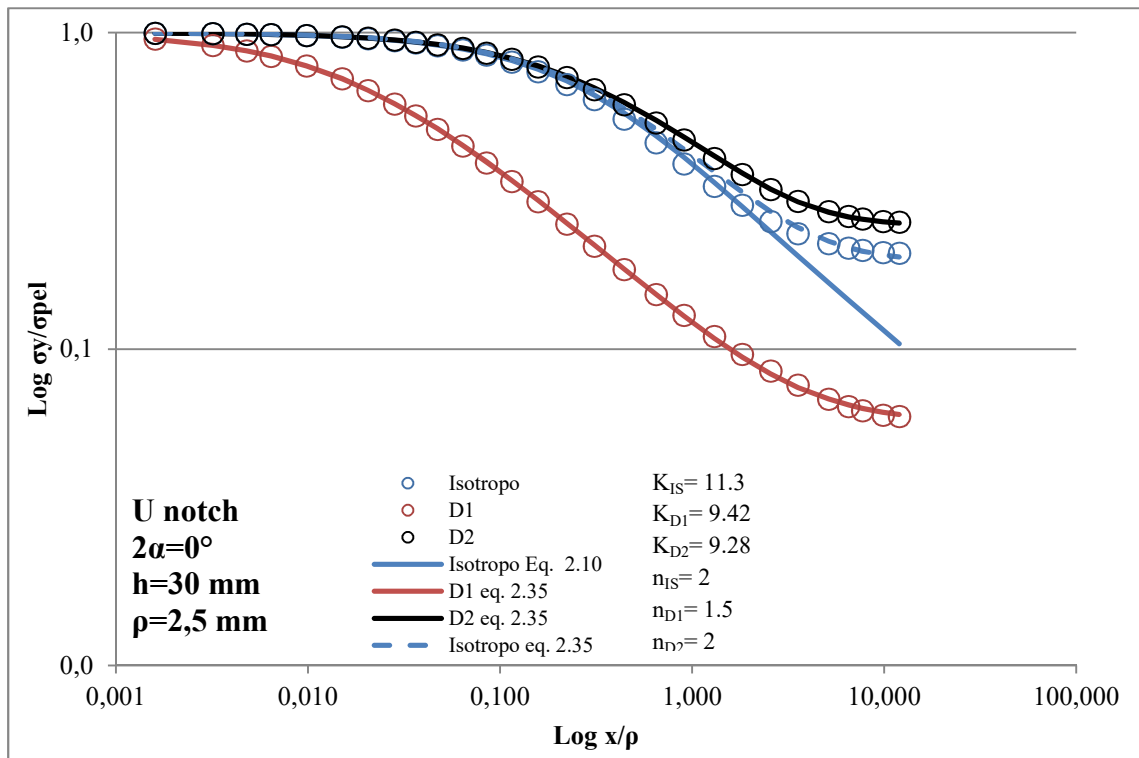


Figura 115– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

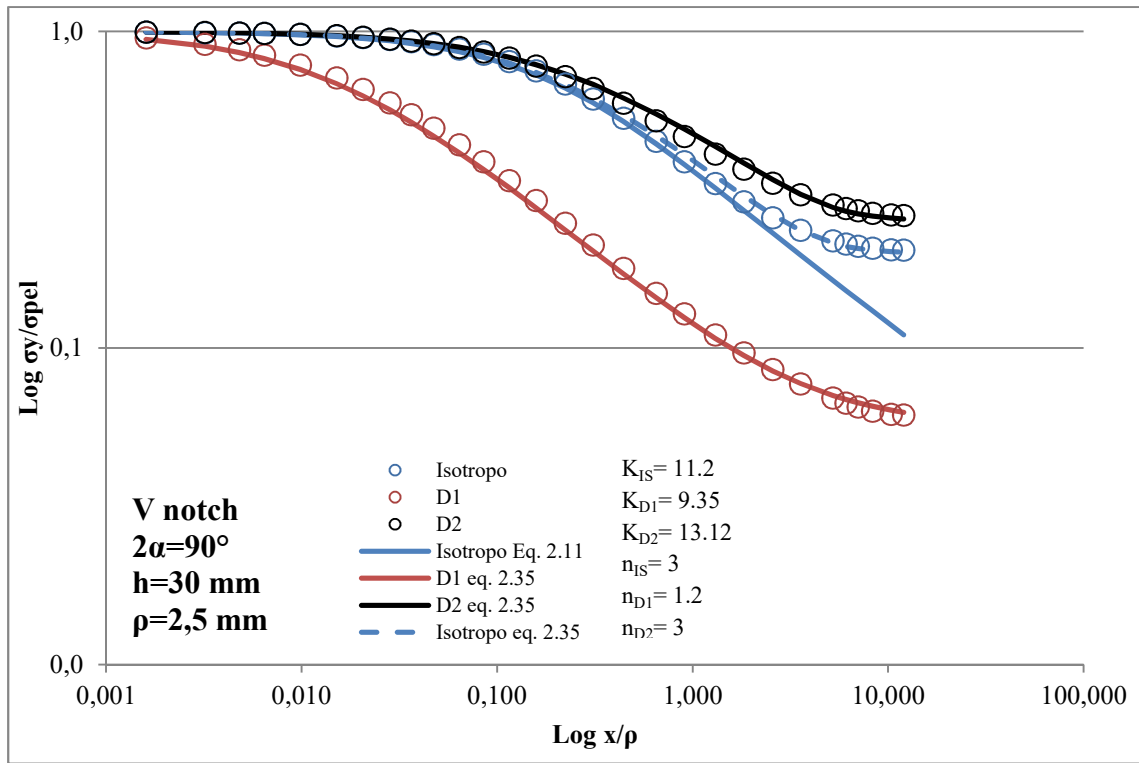


Figura 116– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

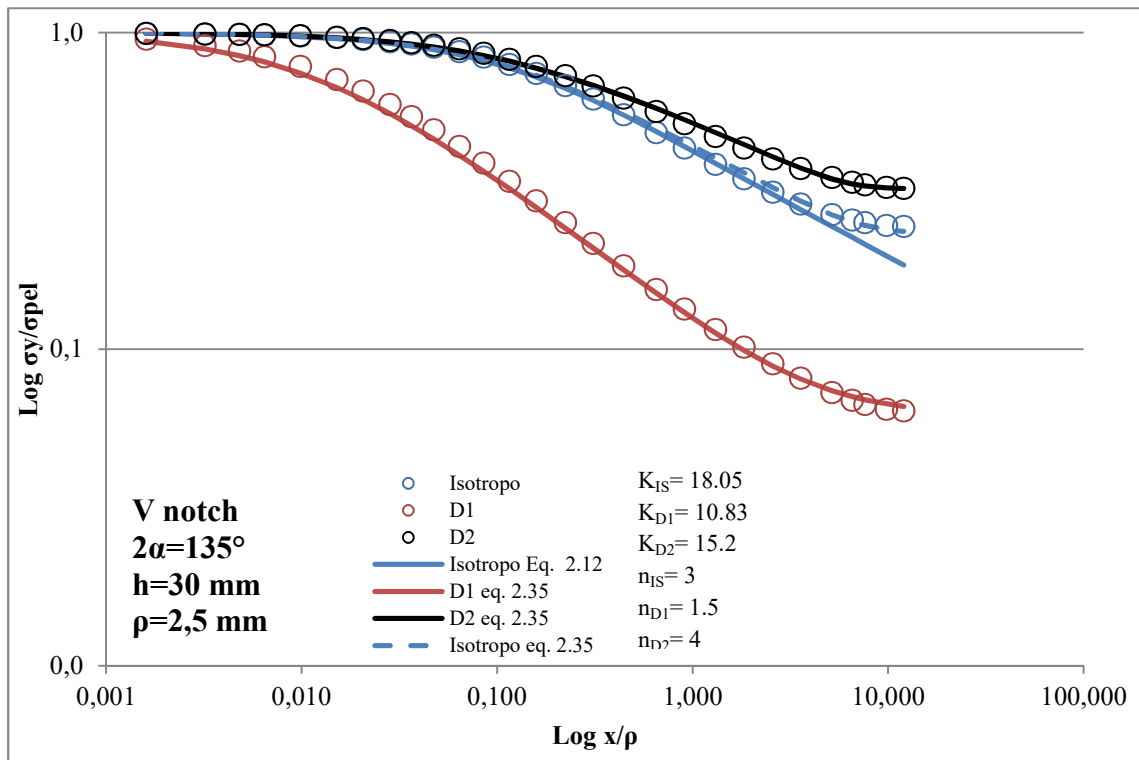


Figura 117– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$



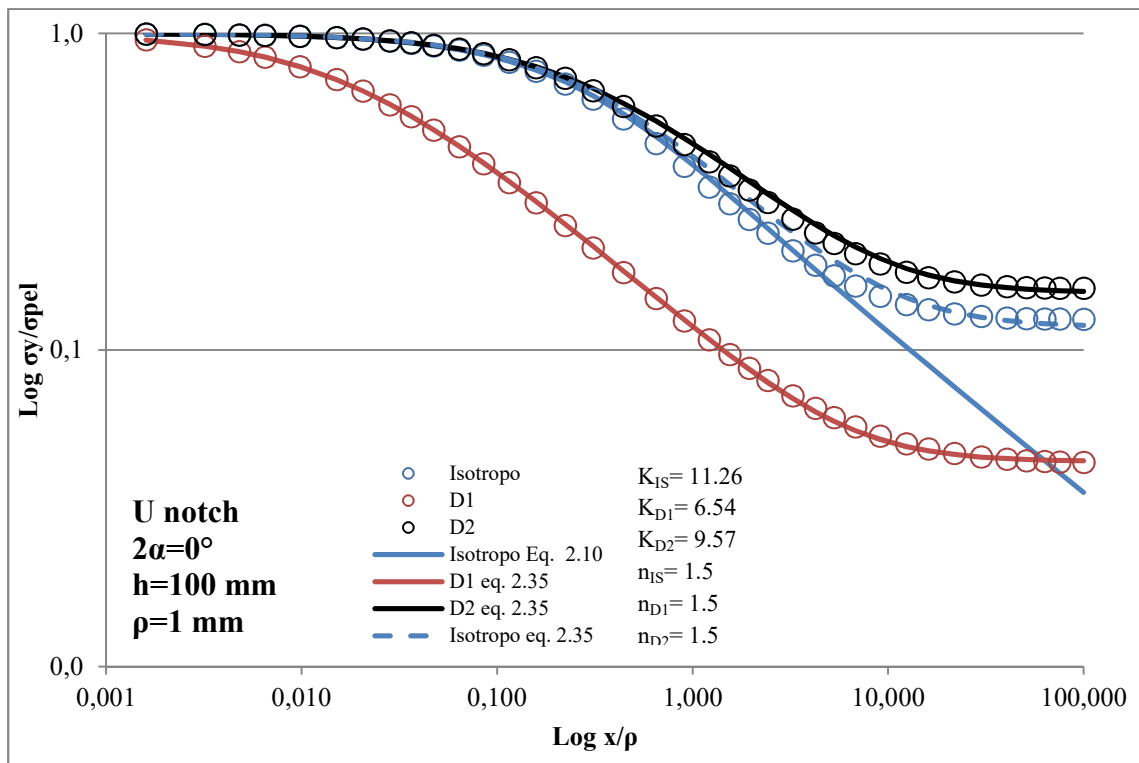


Figura 118– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

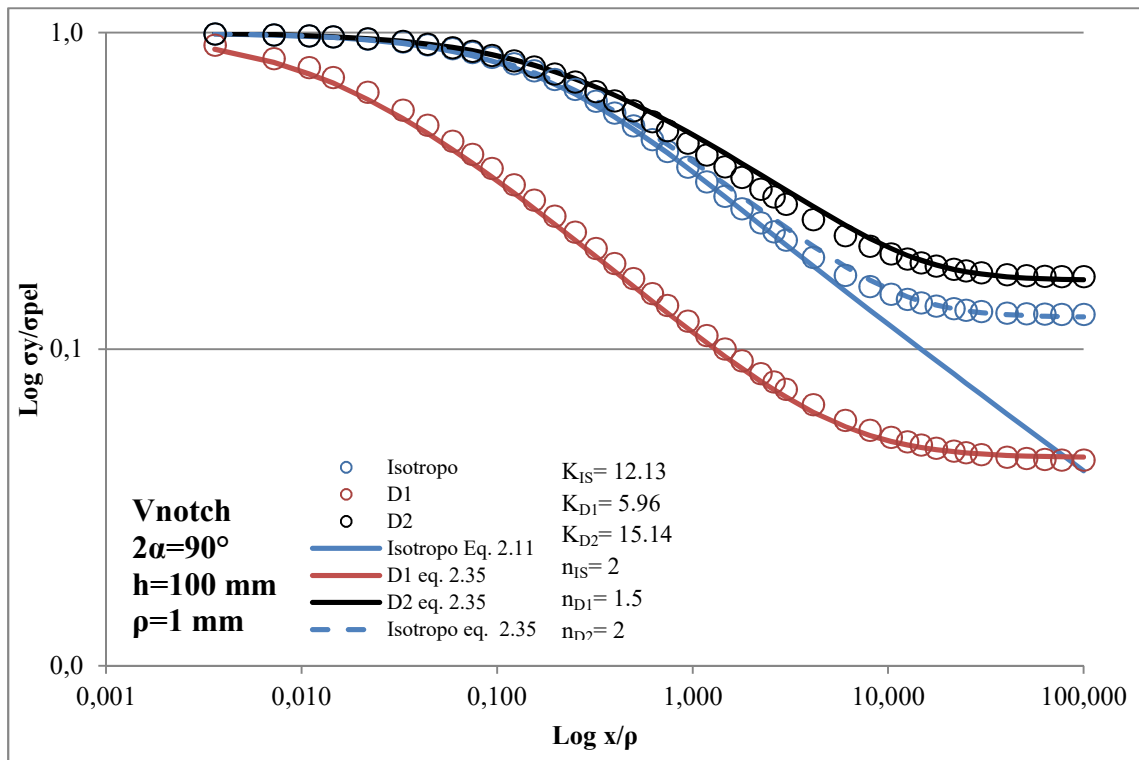


Figura 119– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

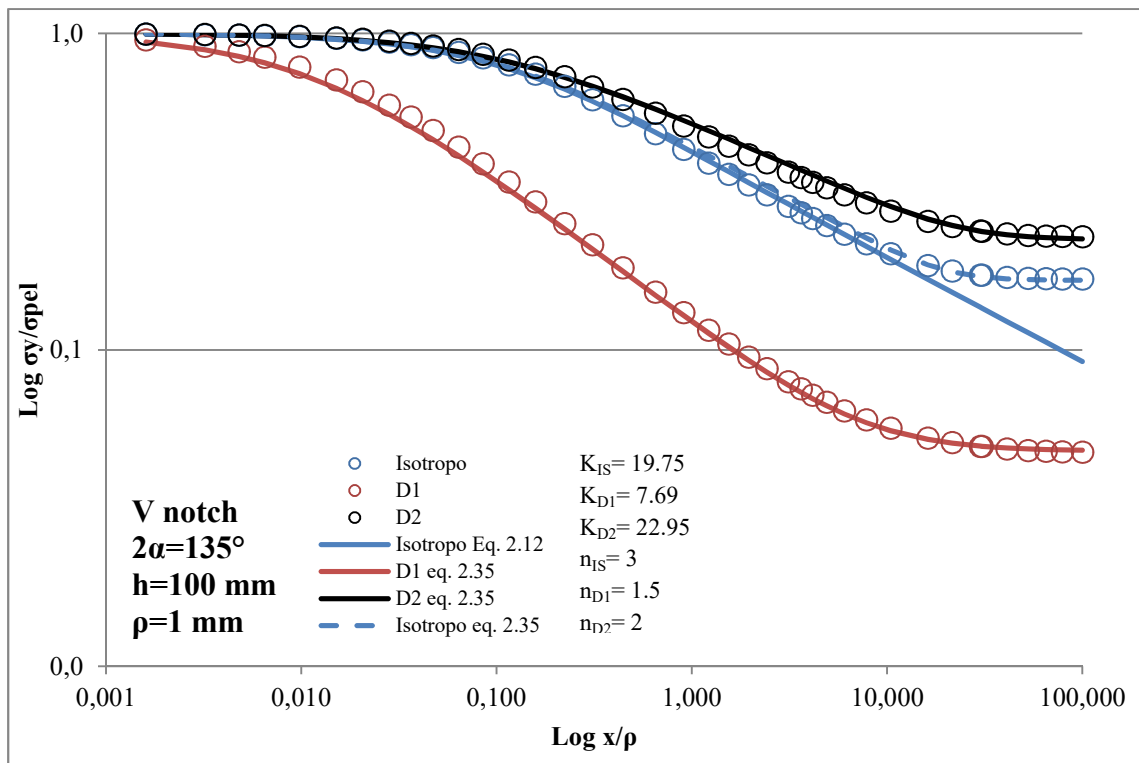


Figura 120– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

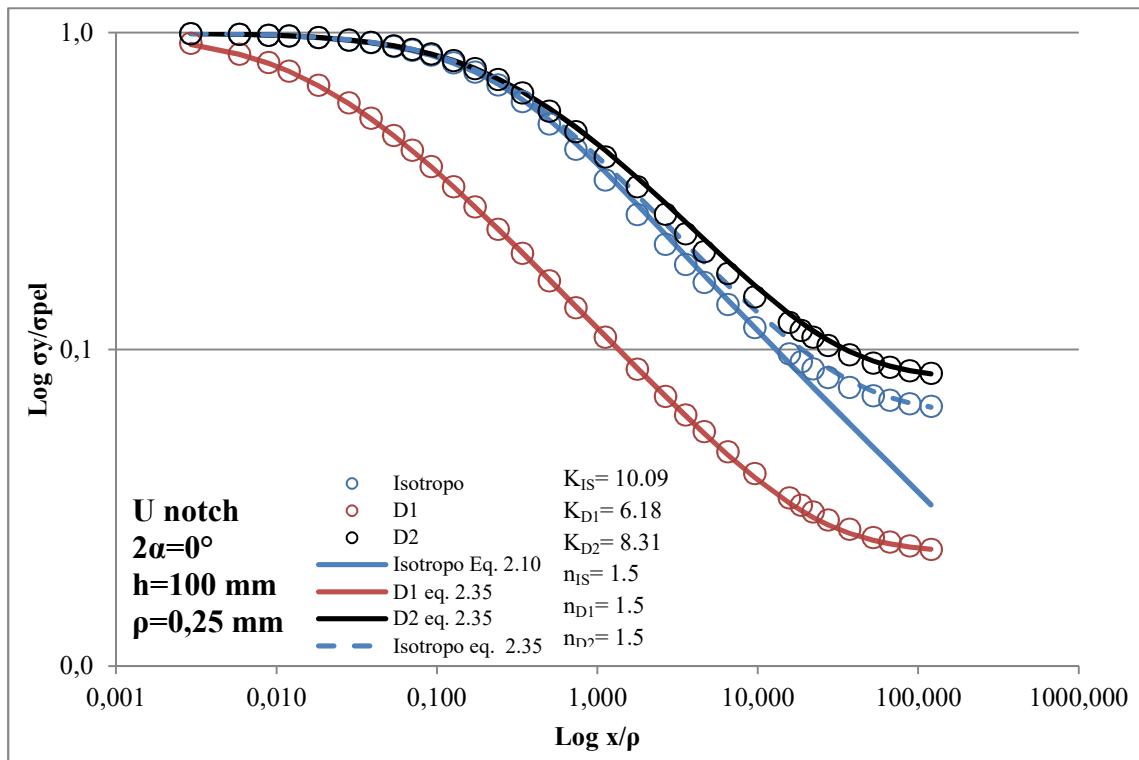


Figura 121– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

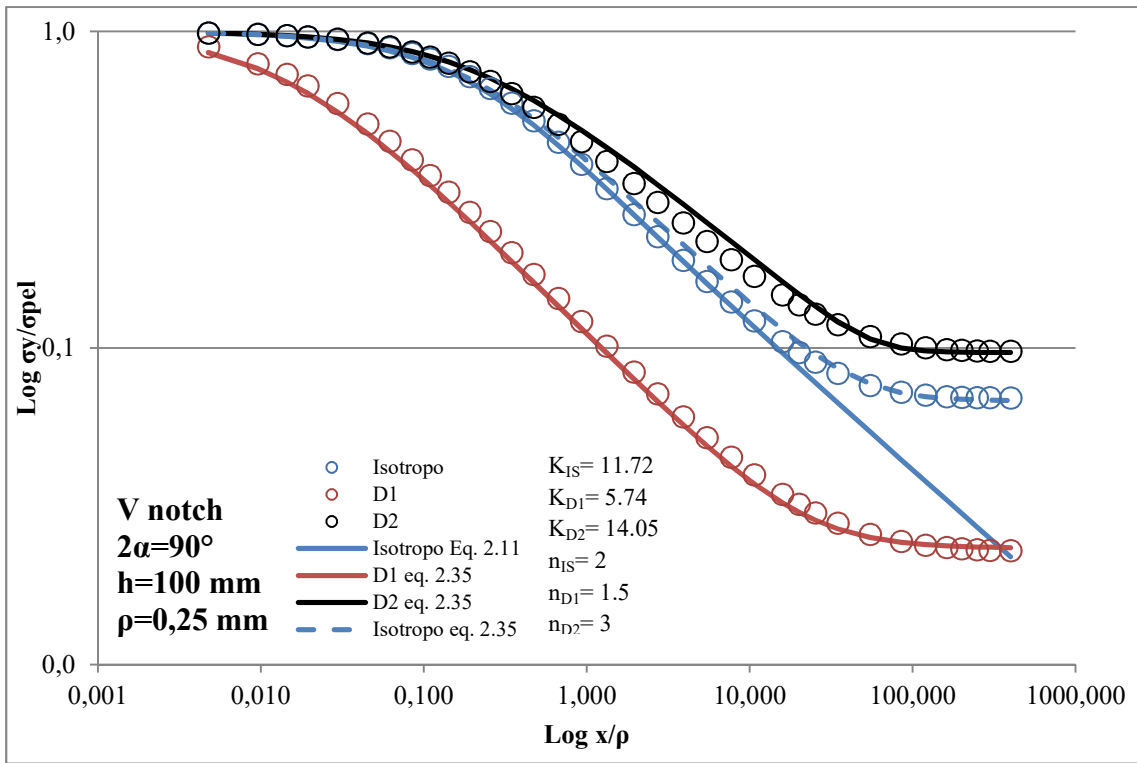


Figura 122– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

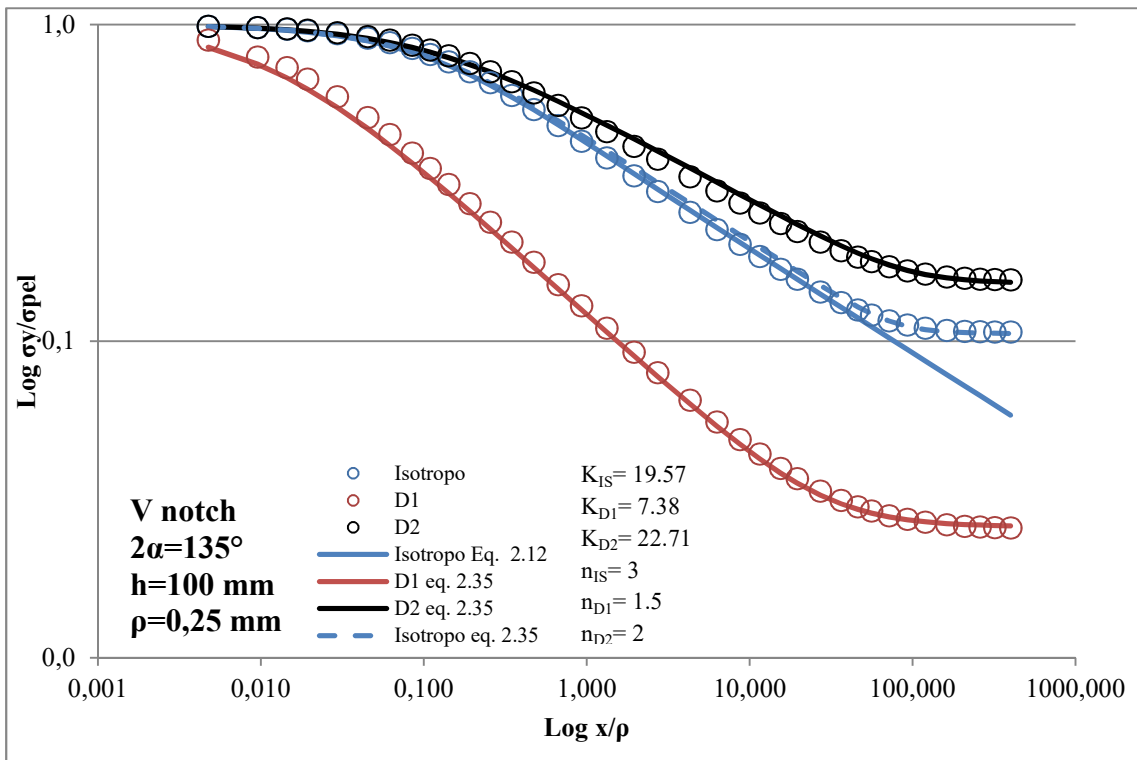


Figura 123– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

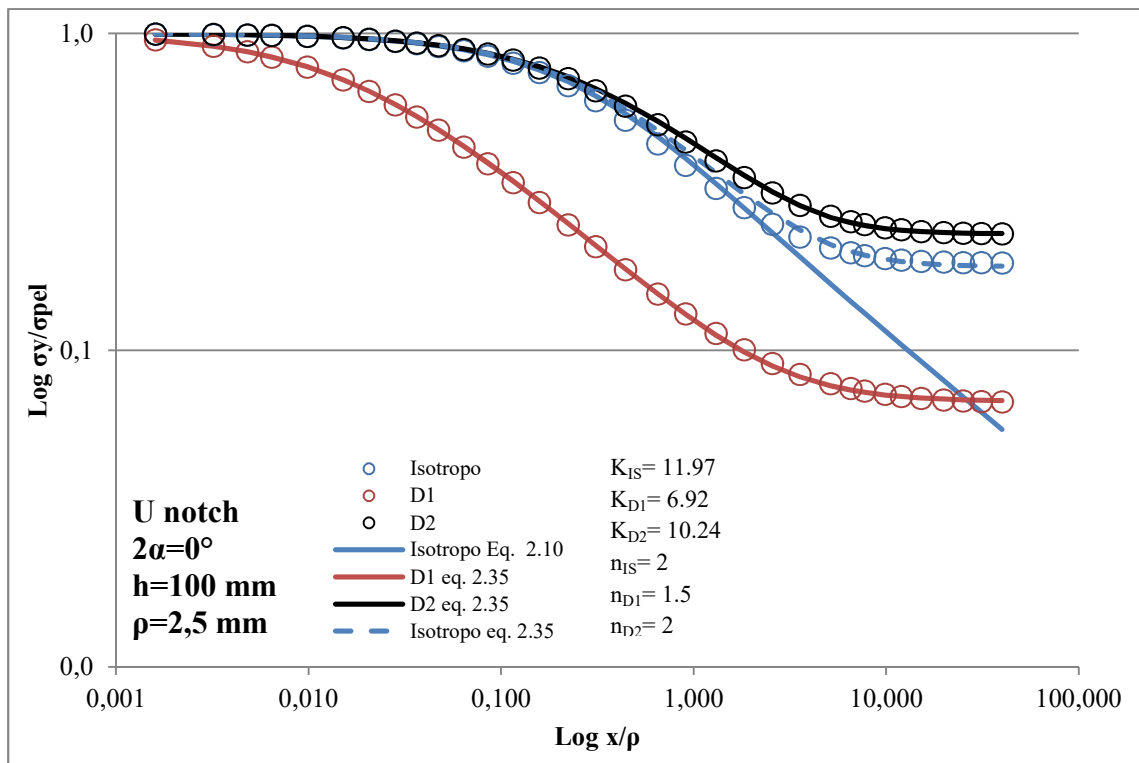


Figura 124– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

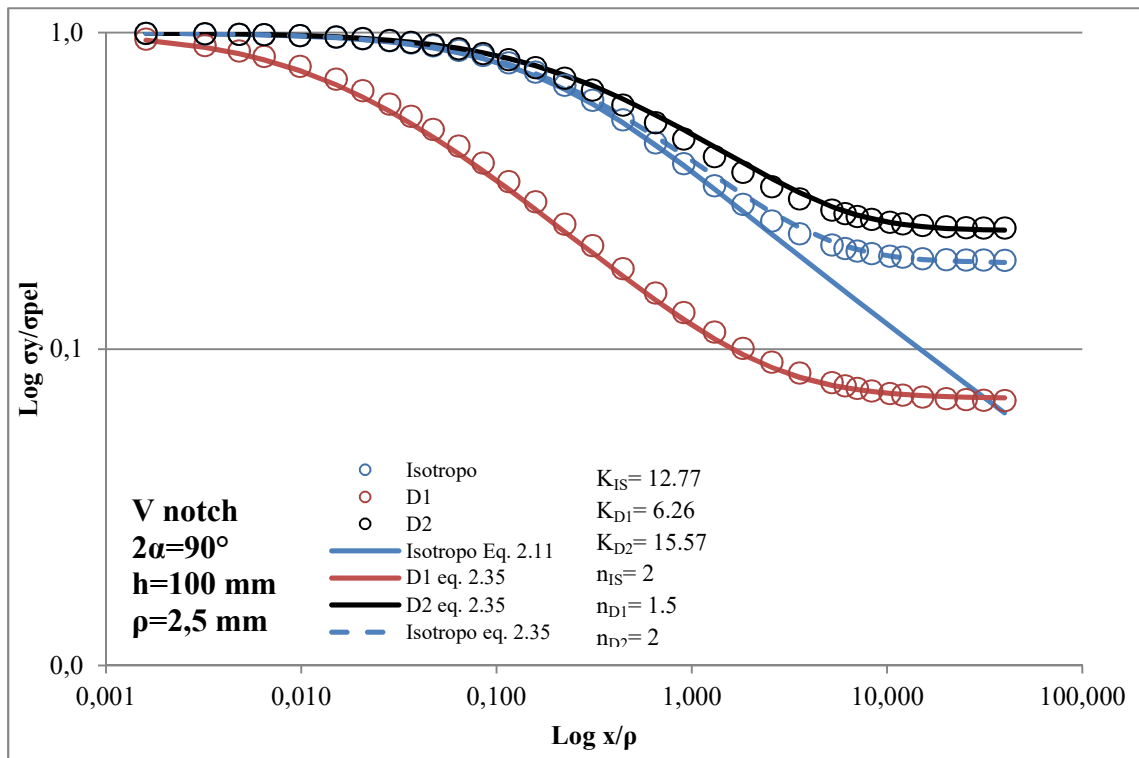


Figura 125– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

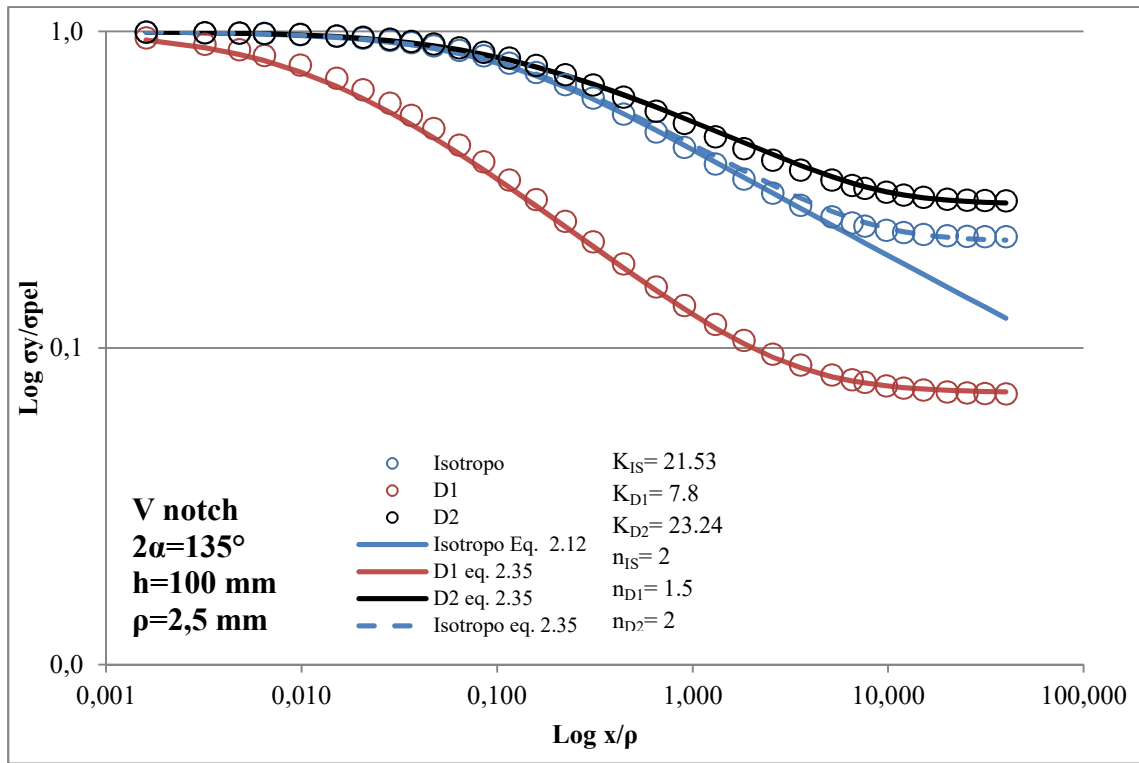


Figura 126– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

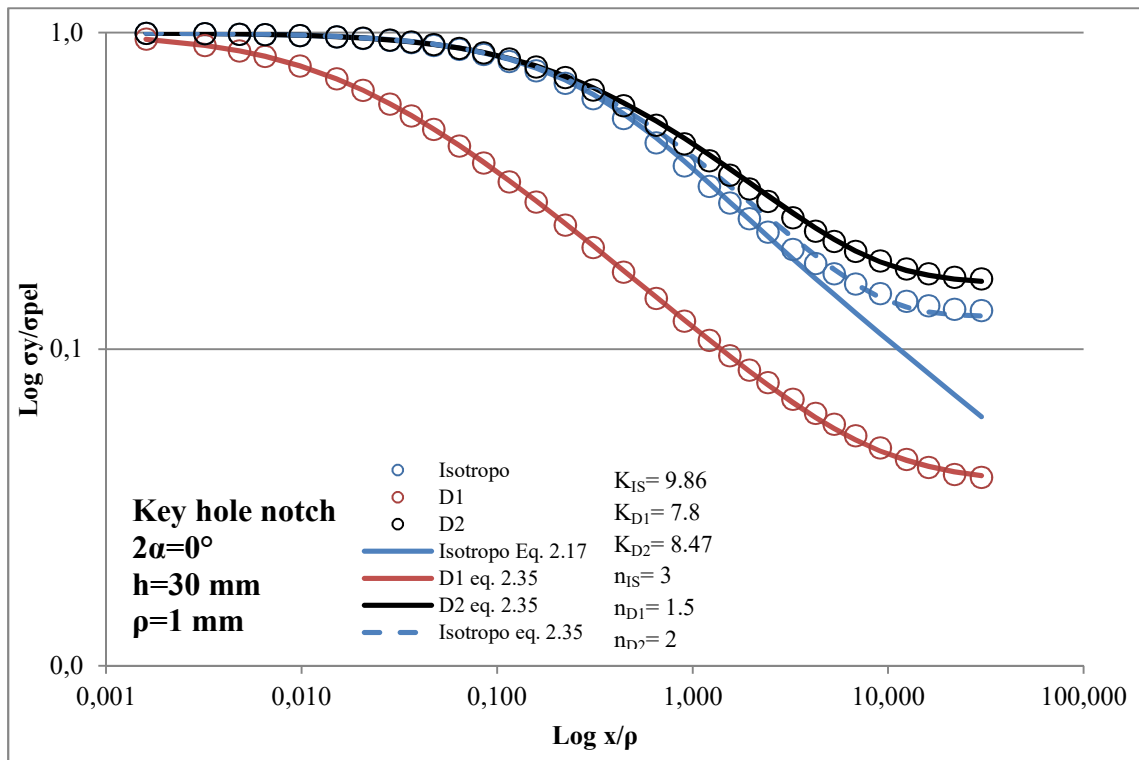


Figura 127– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

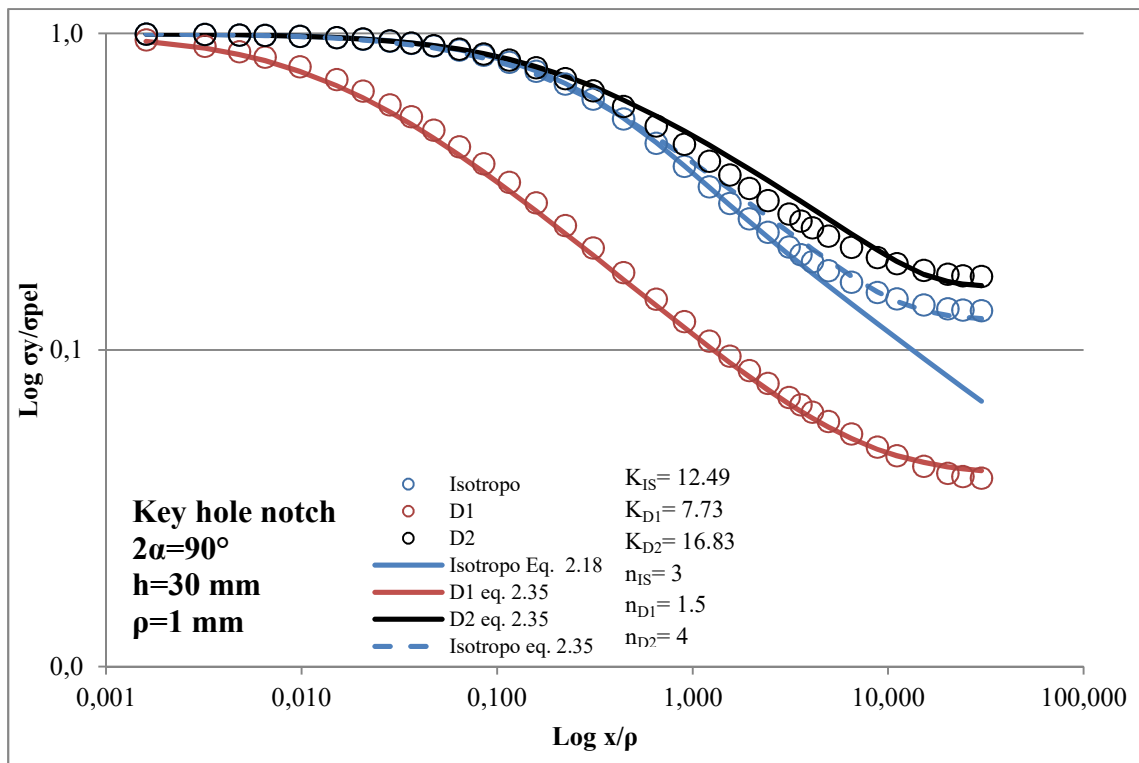


Figura 128– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

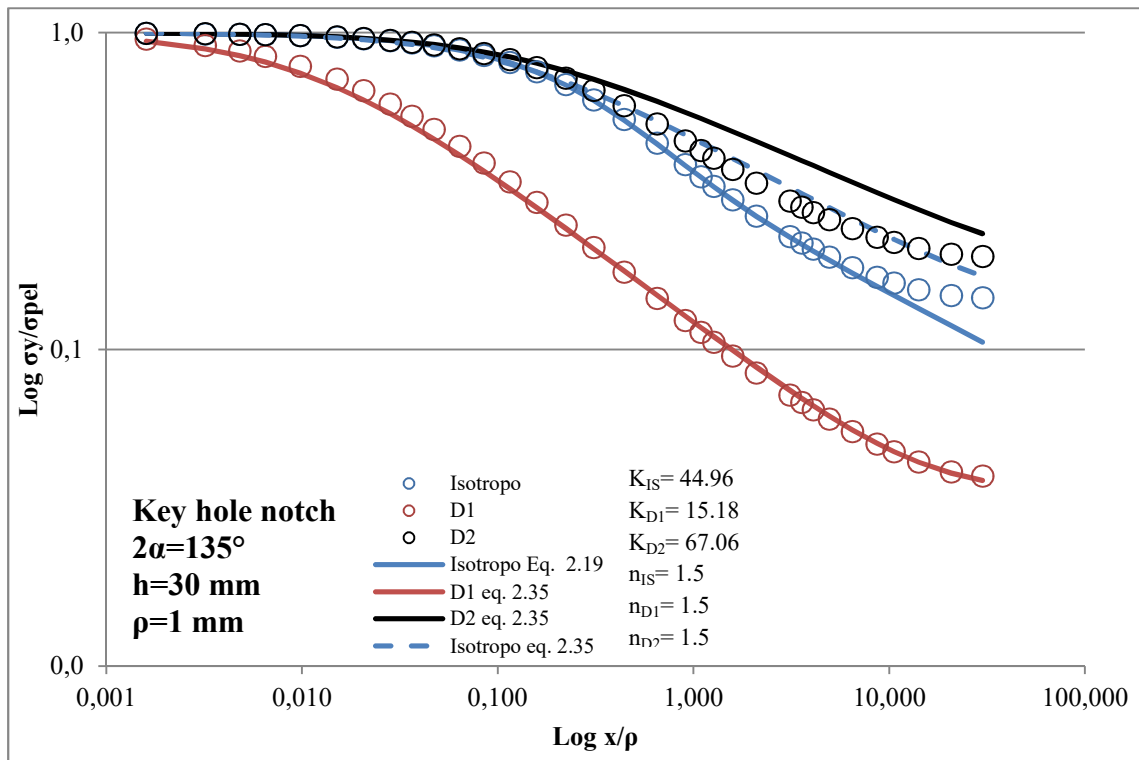


Figura 129– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

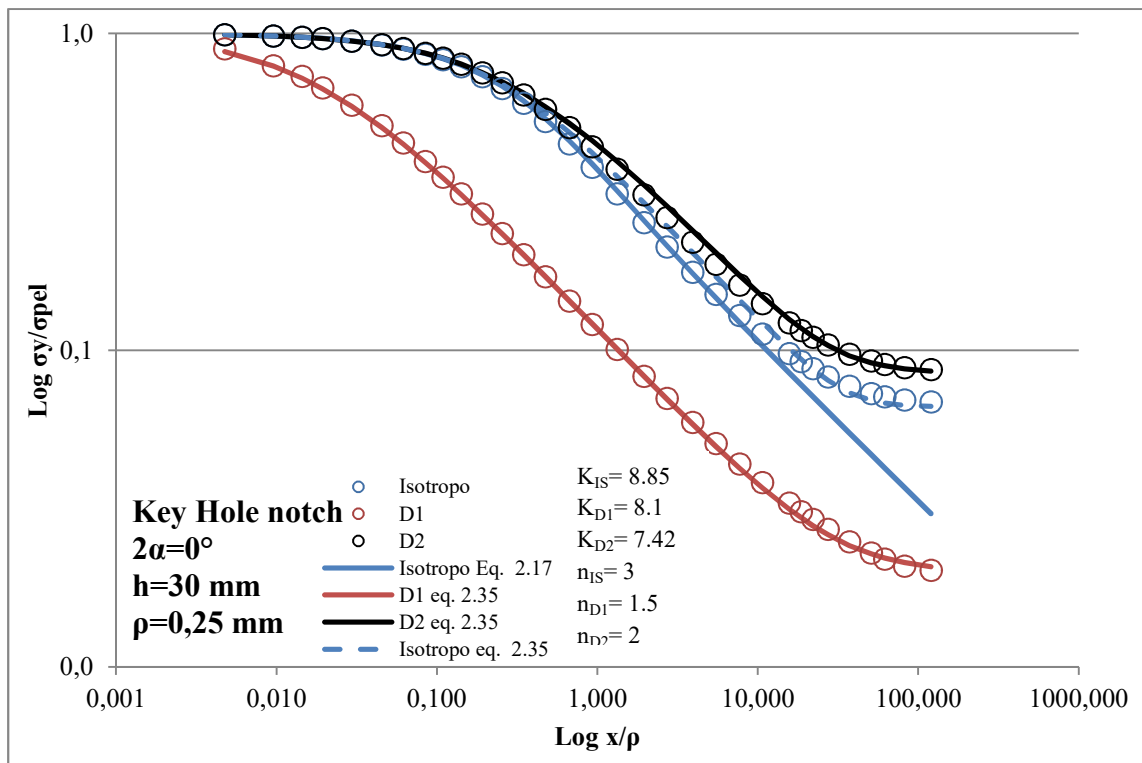


Figura 130– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

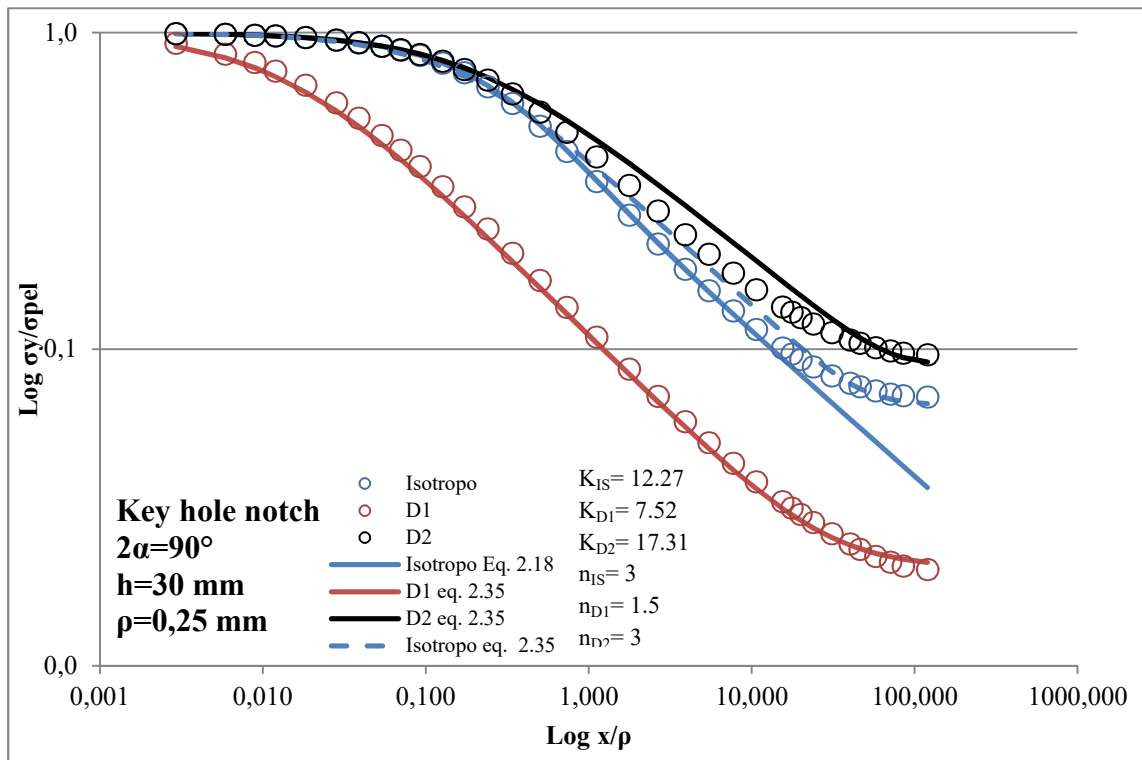


Figura 131– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

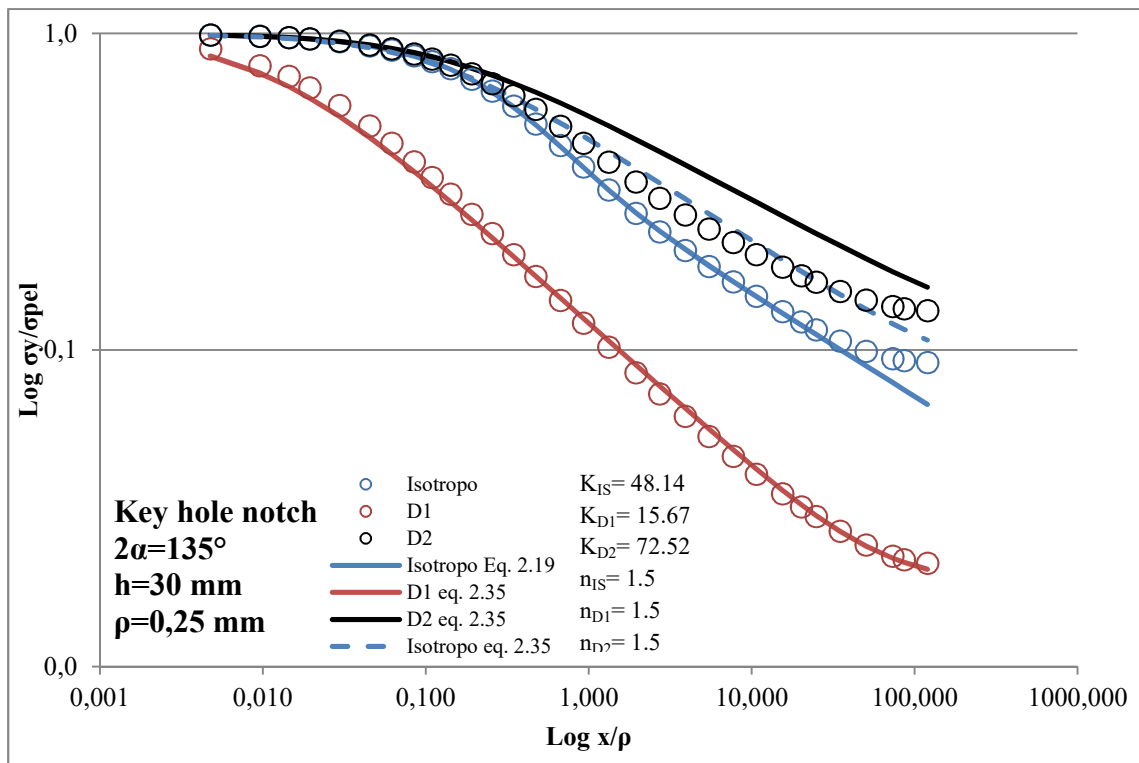


Figura 132– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

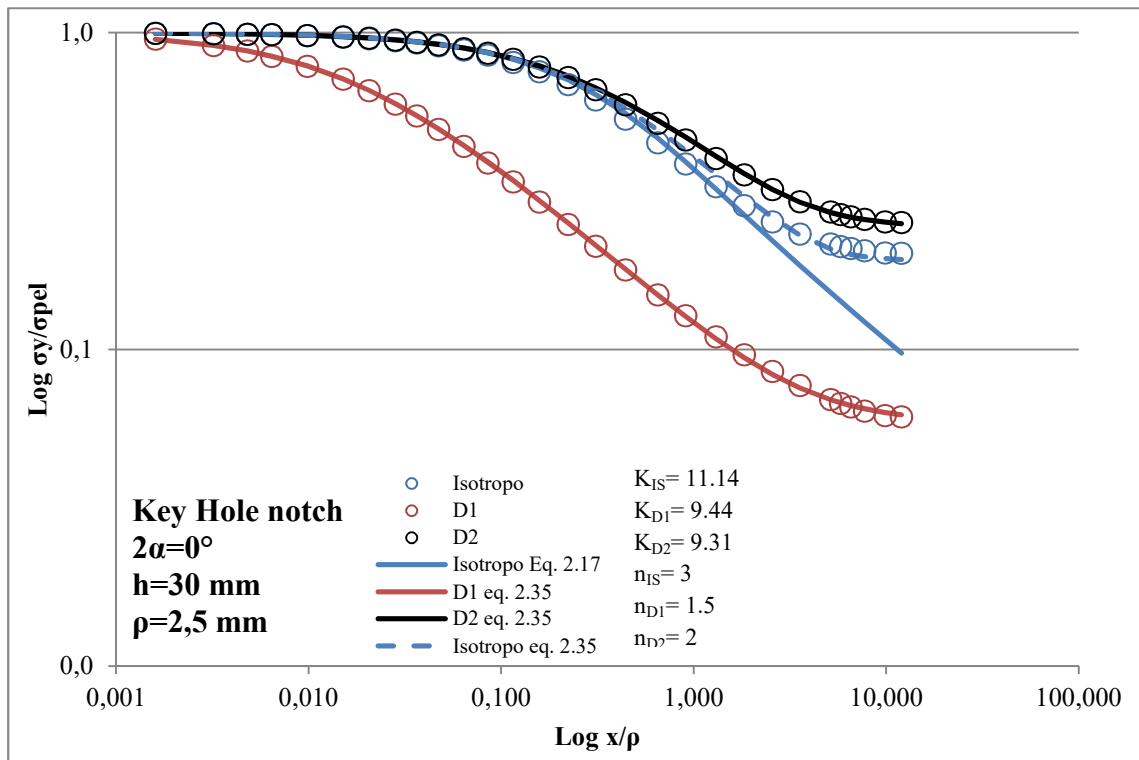


Figura 133– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$



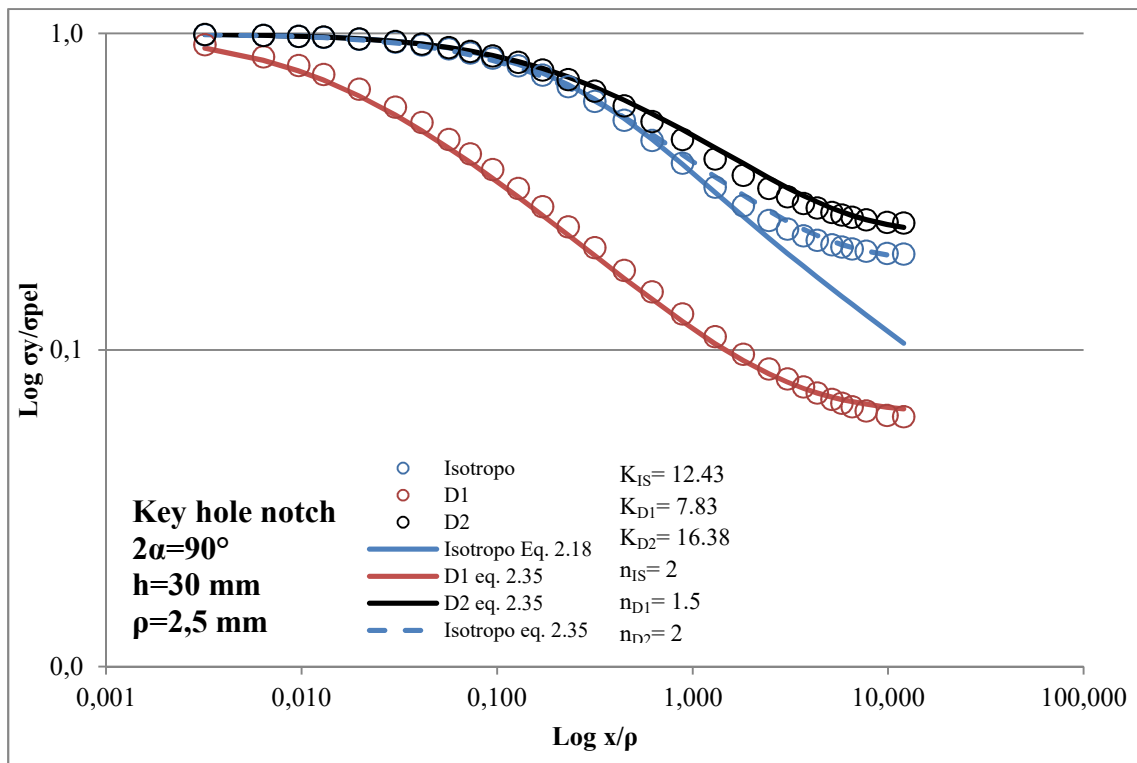


Figura 134– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

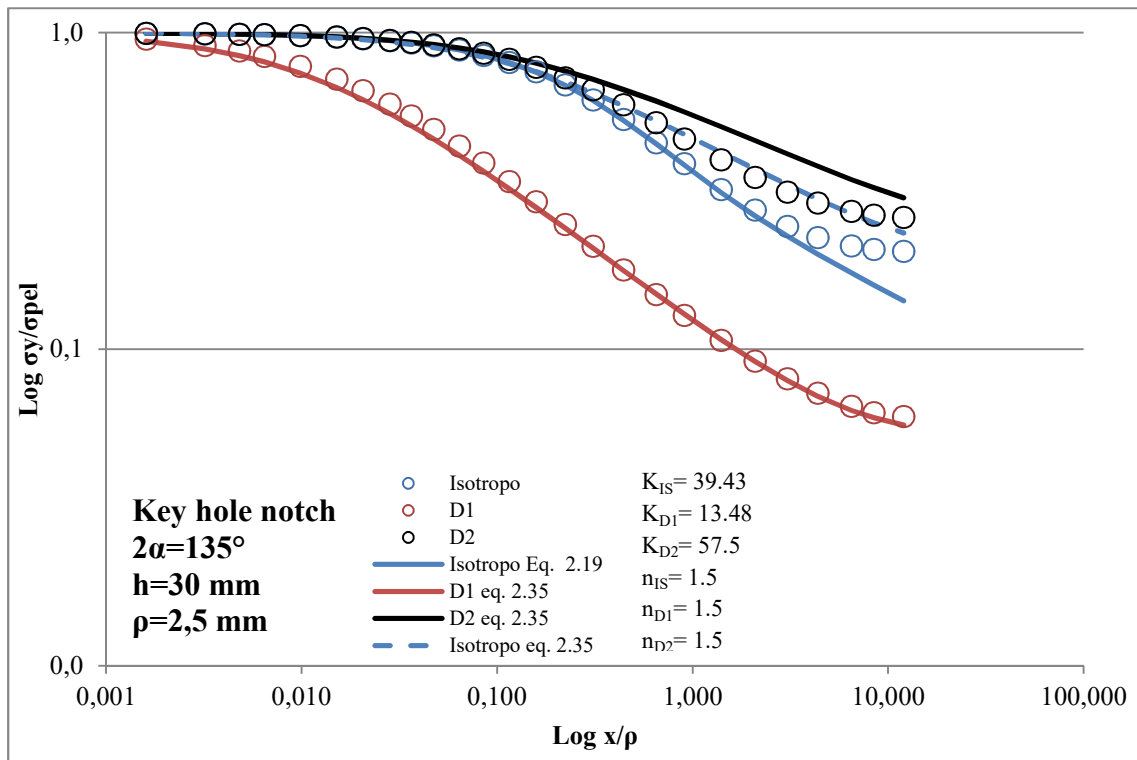


Figura 135– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

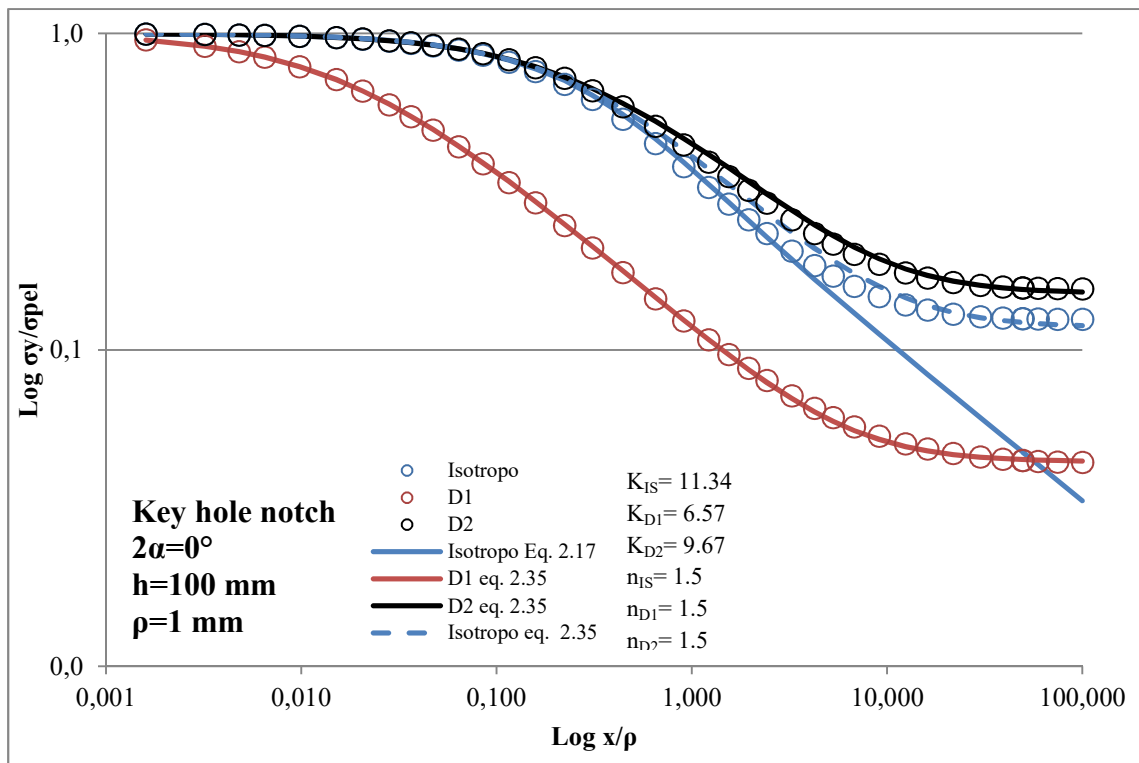


Figura 136– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

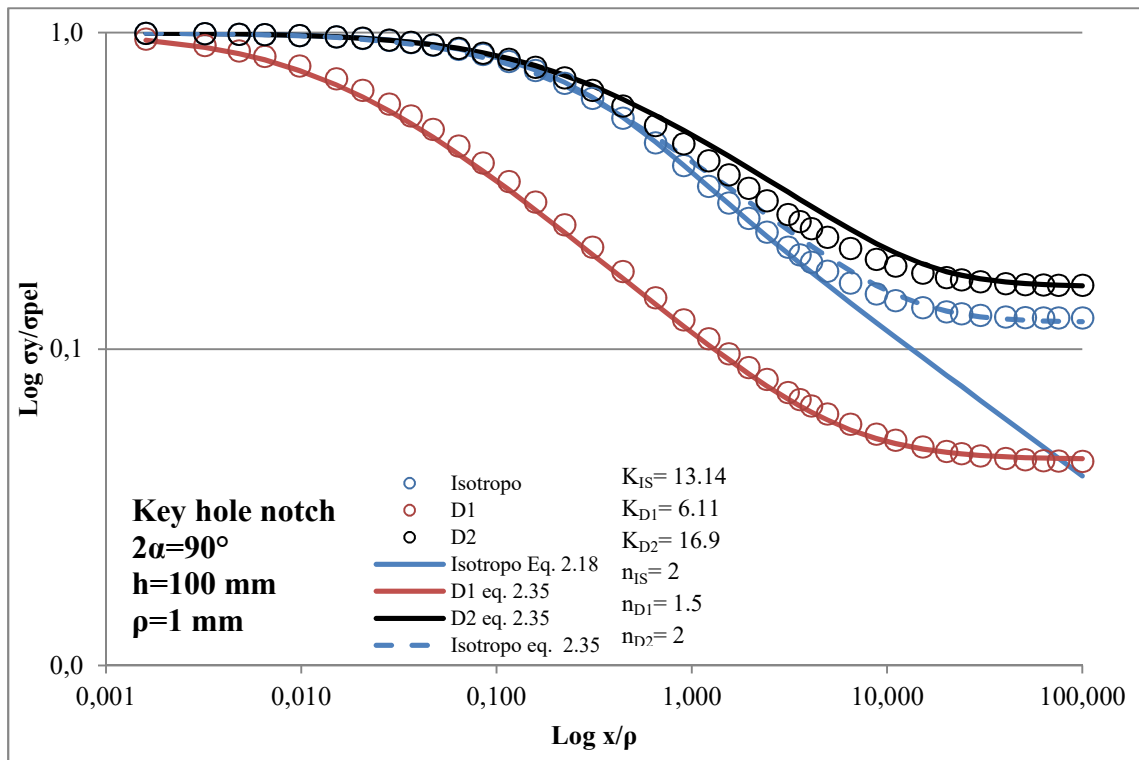


Figura 137– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

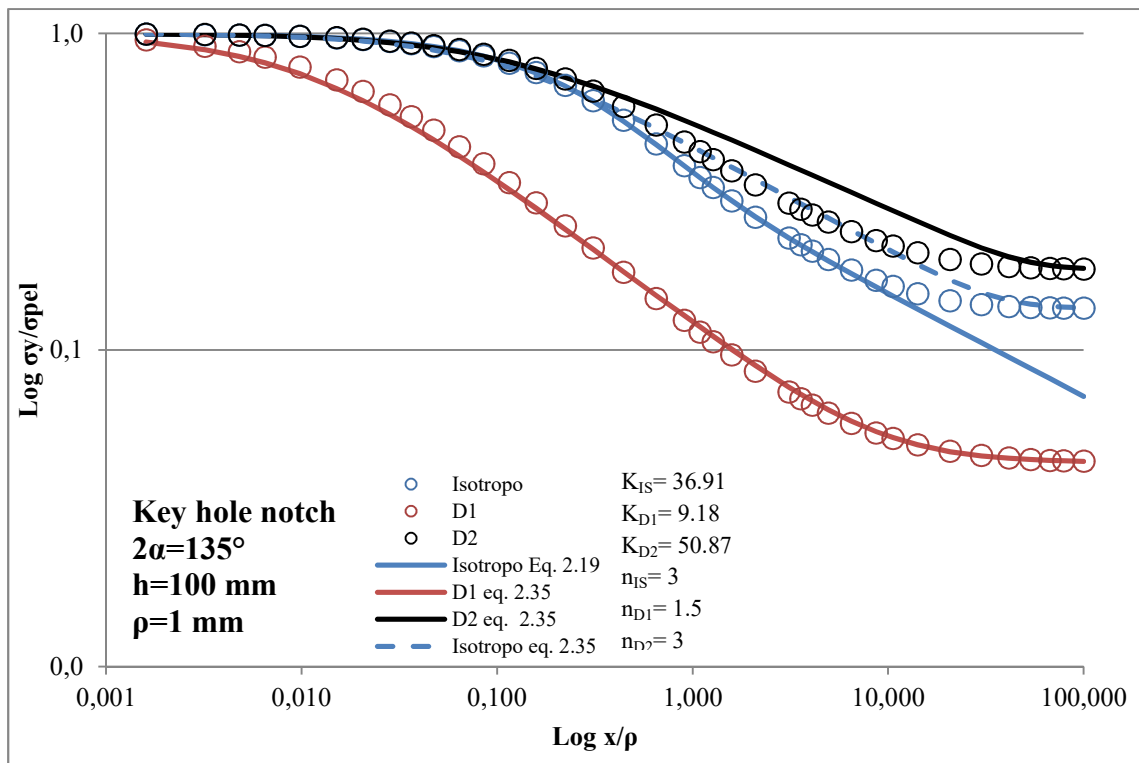


Figura 138– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

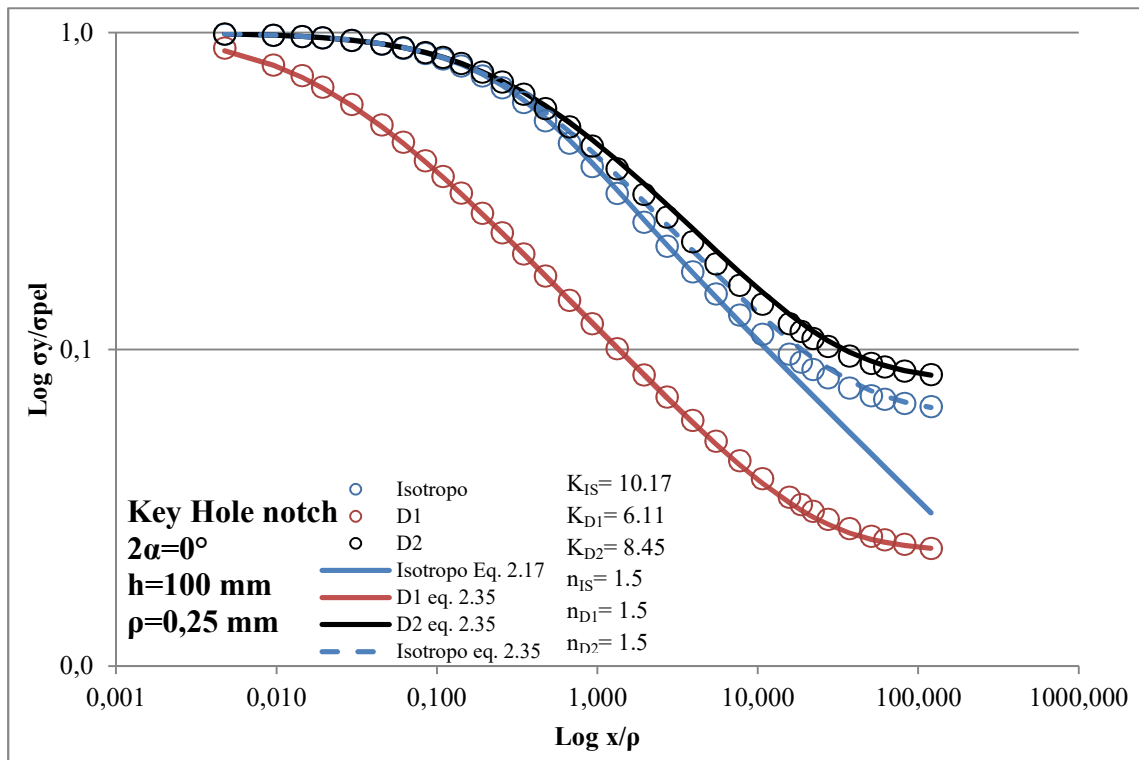


Figura 139– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

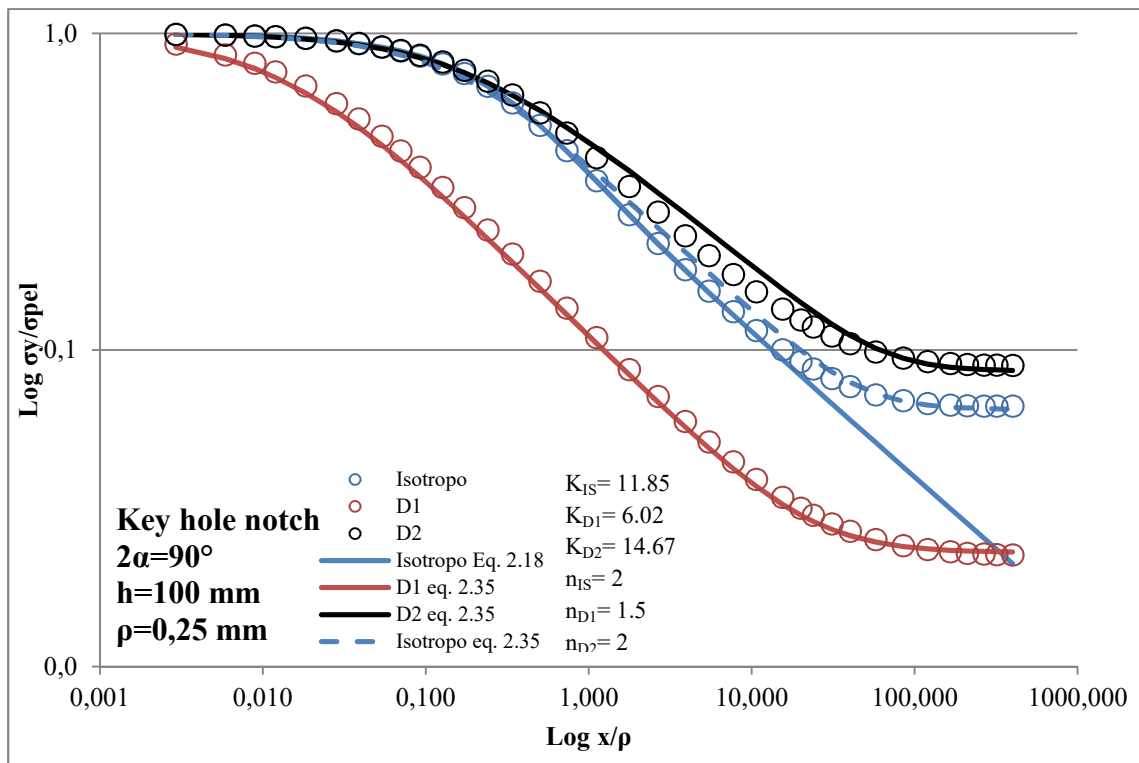


Figura 140– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

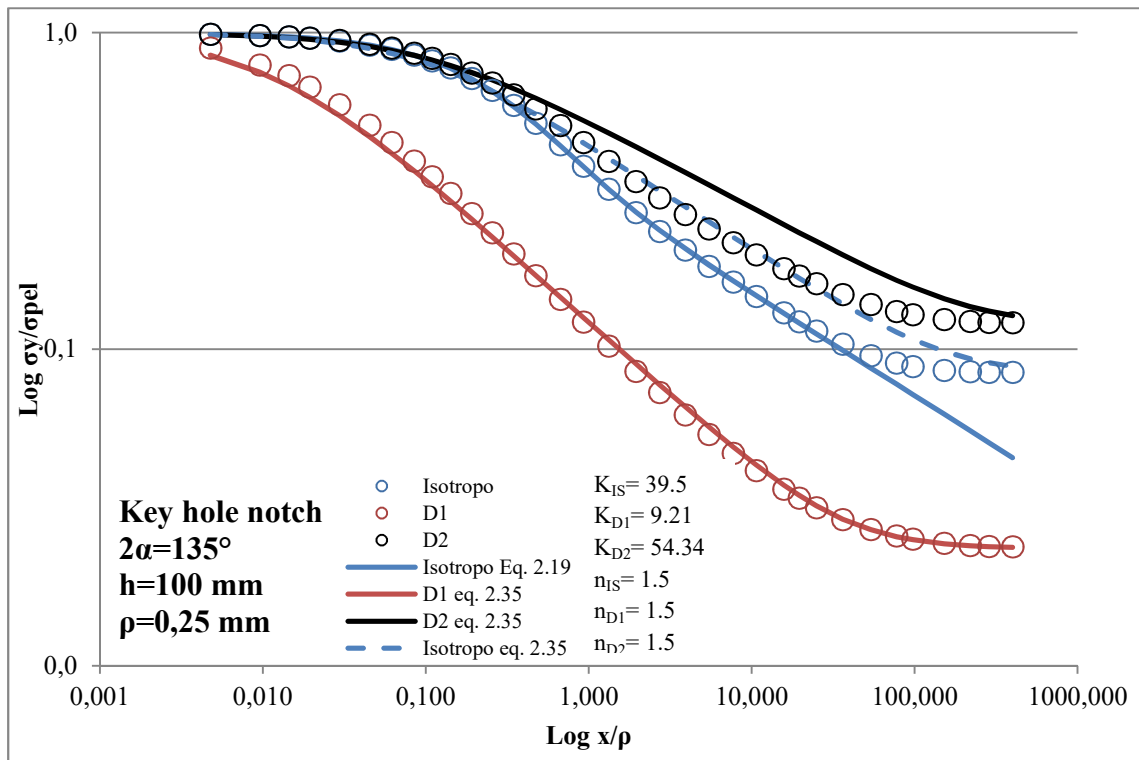


Figura 141– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

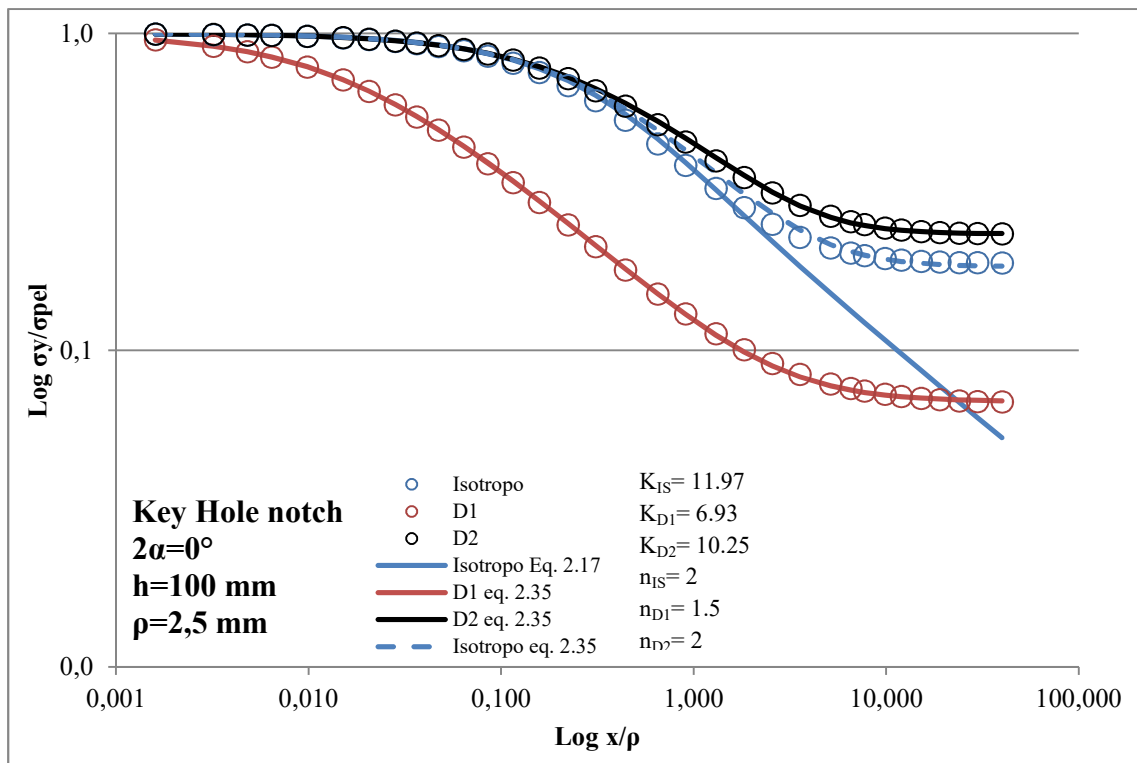


Figura 142– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

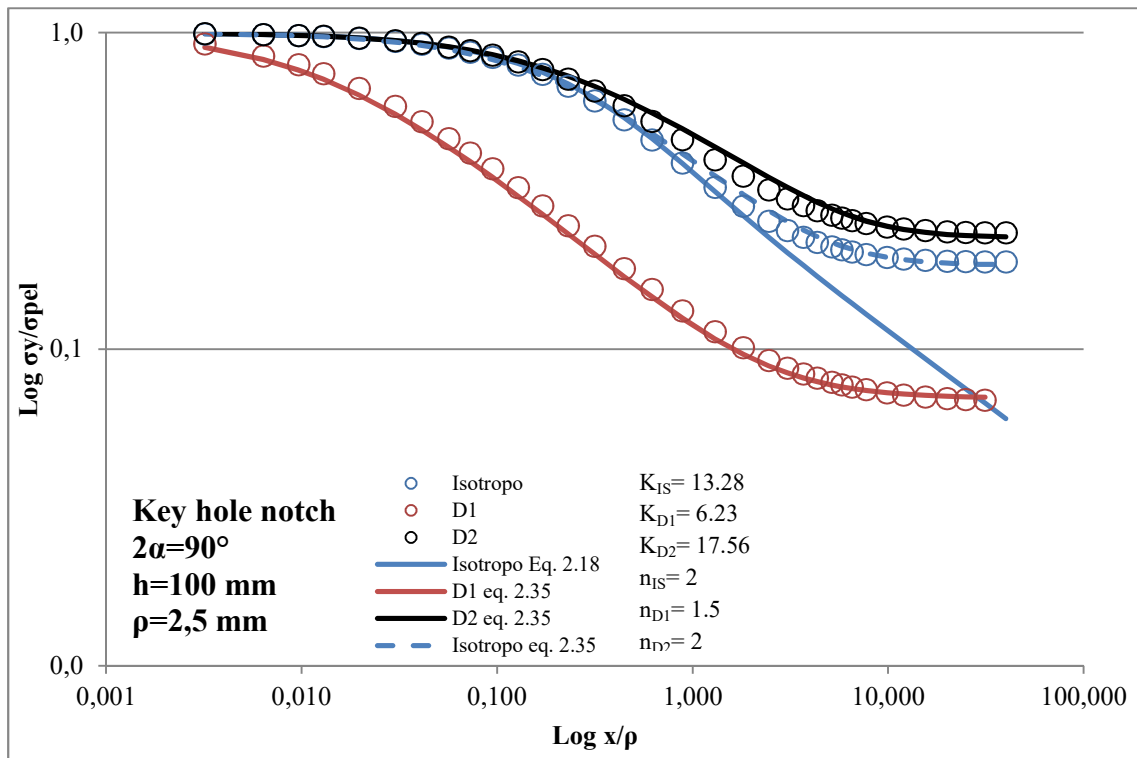


Figura 143– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

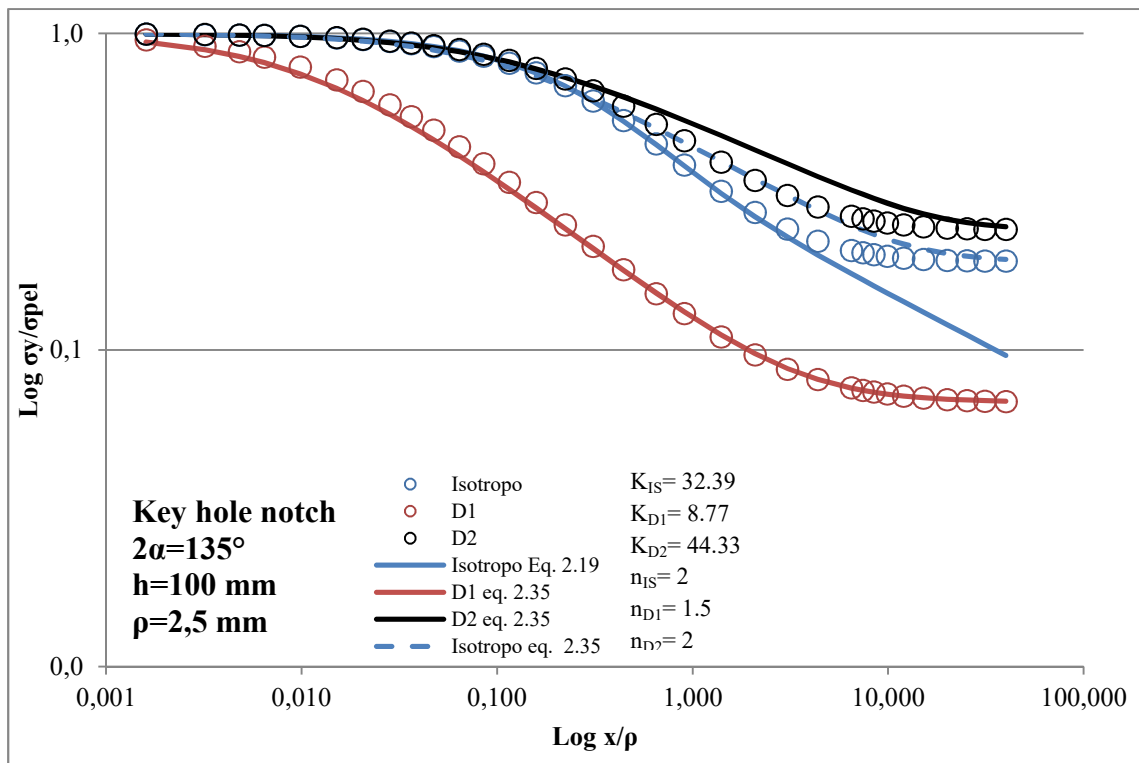


Figura 144– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

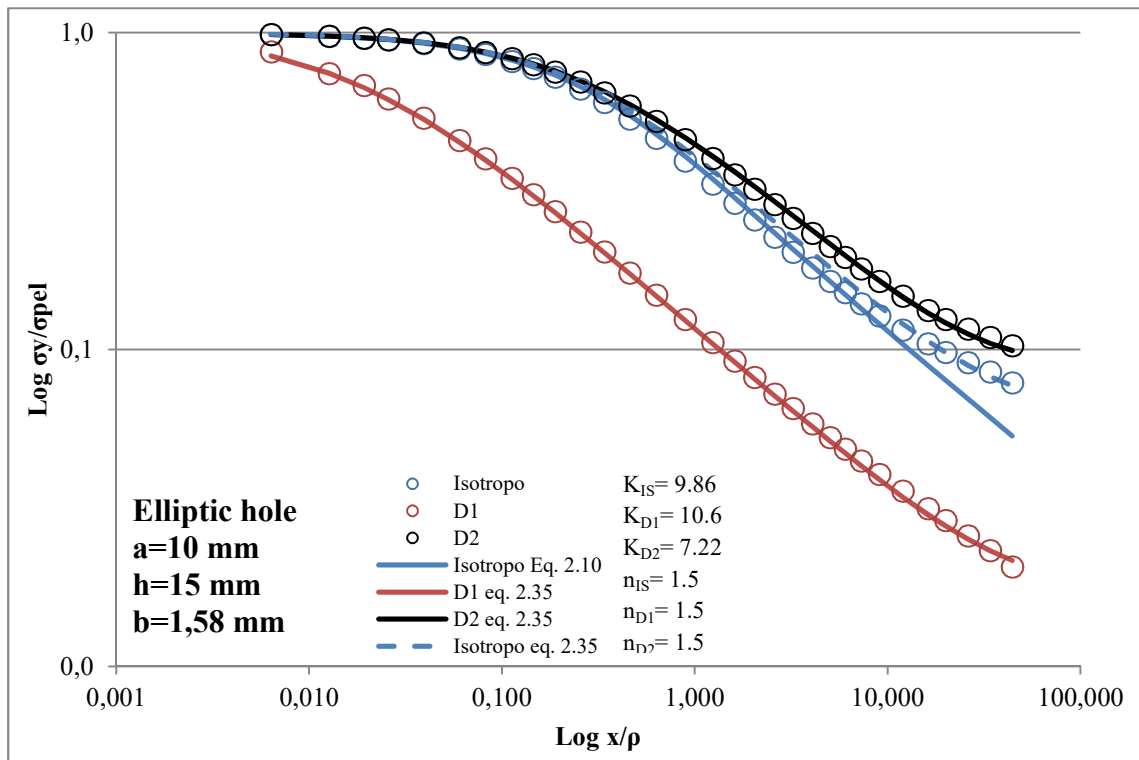


Figura 145– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

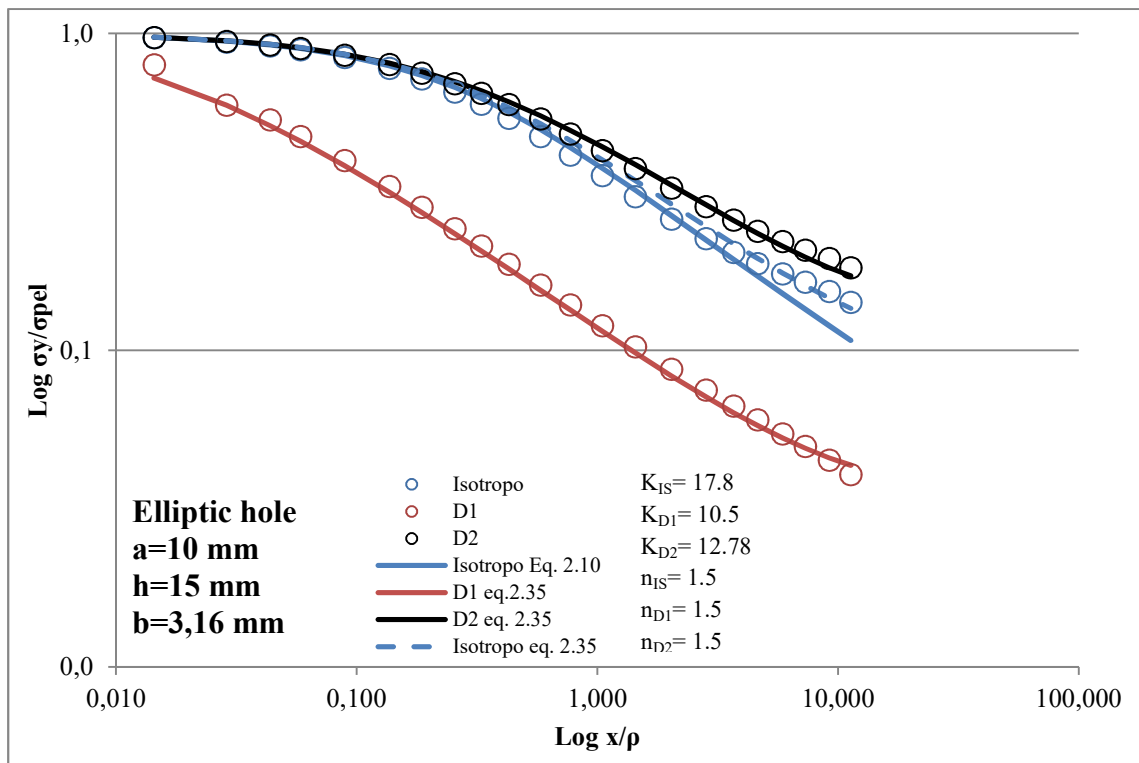


Figura 146– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

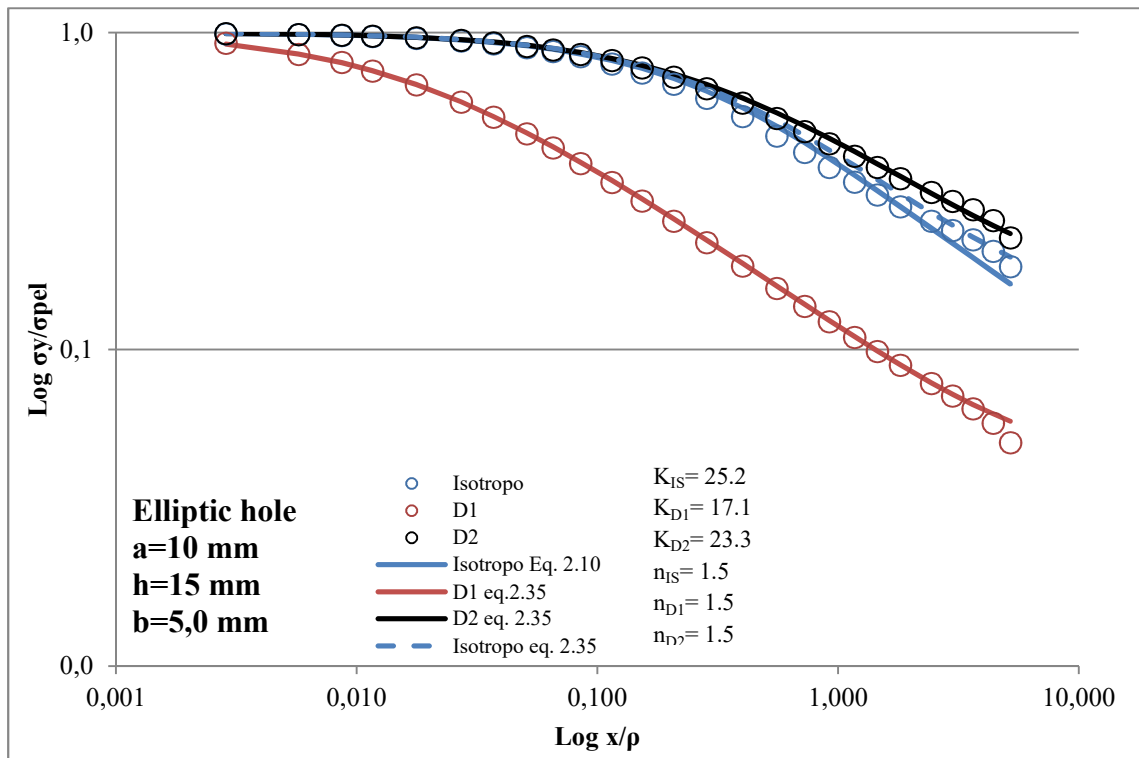


Figura 147– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

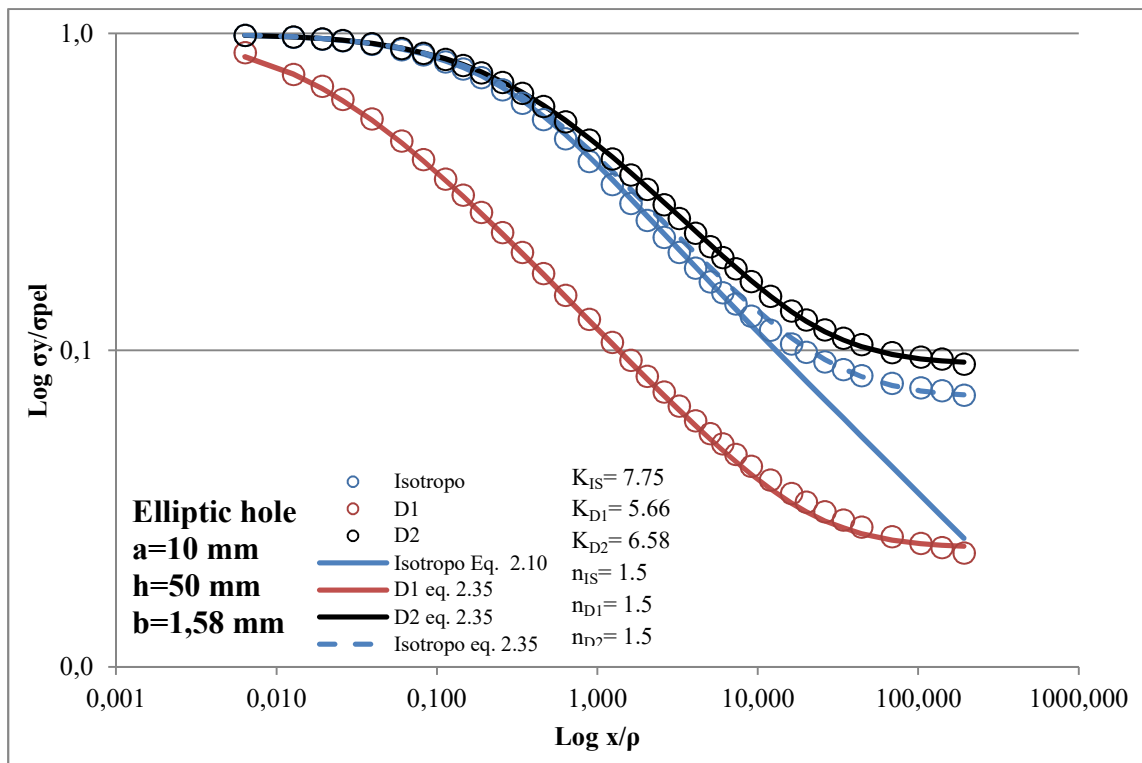


Figura 148– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

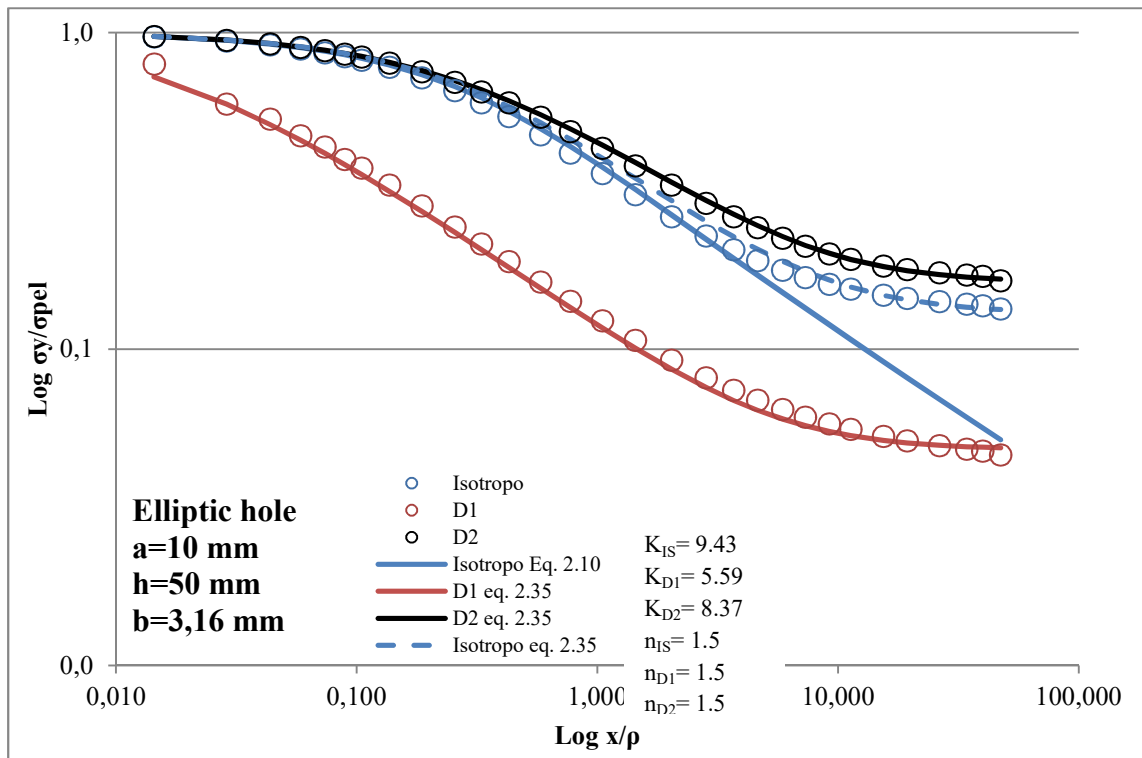


Figura 149– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$



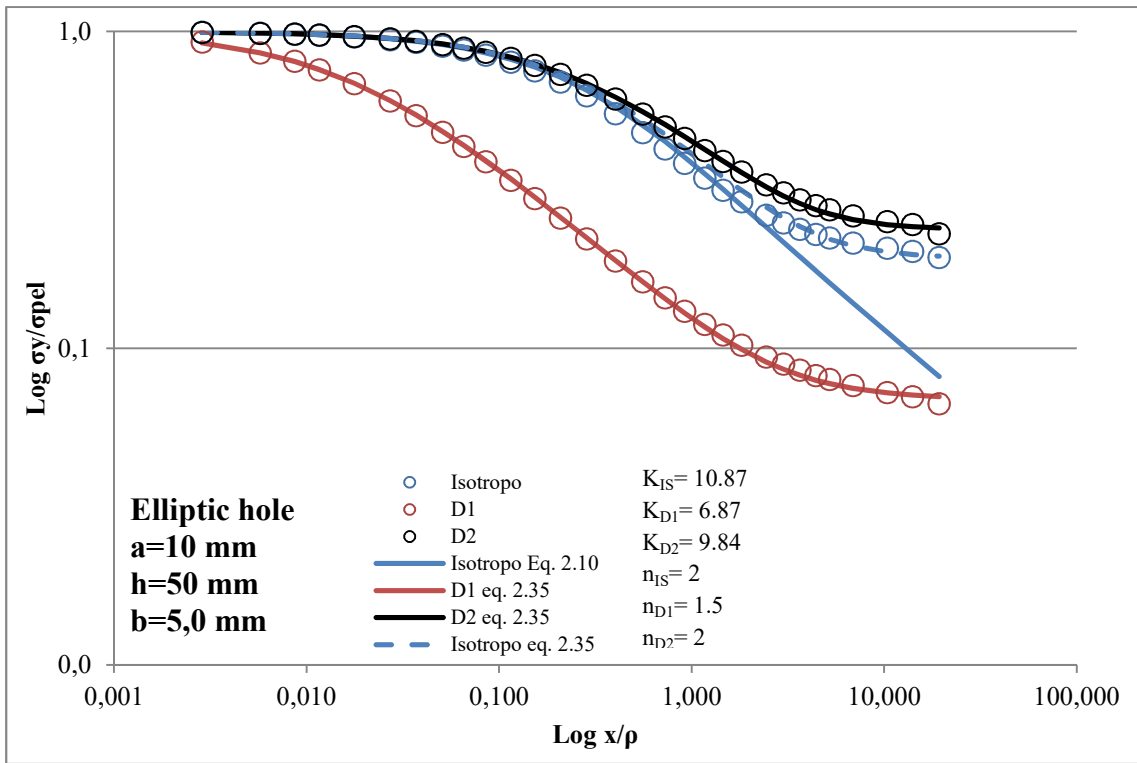


Figura 150– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

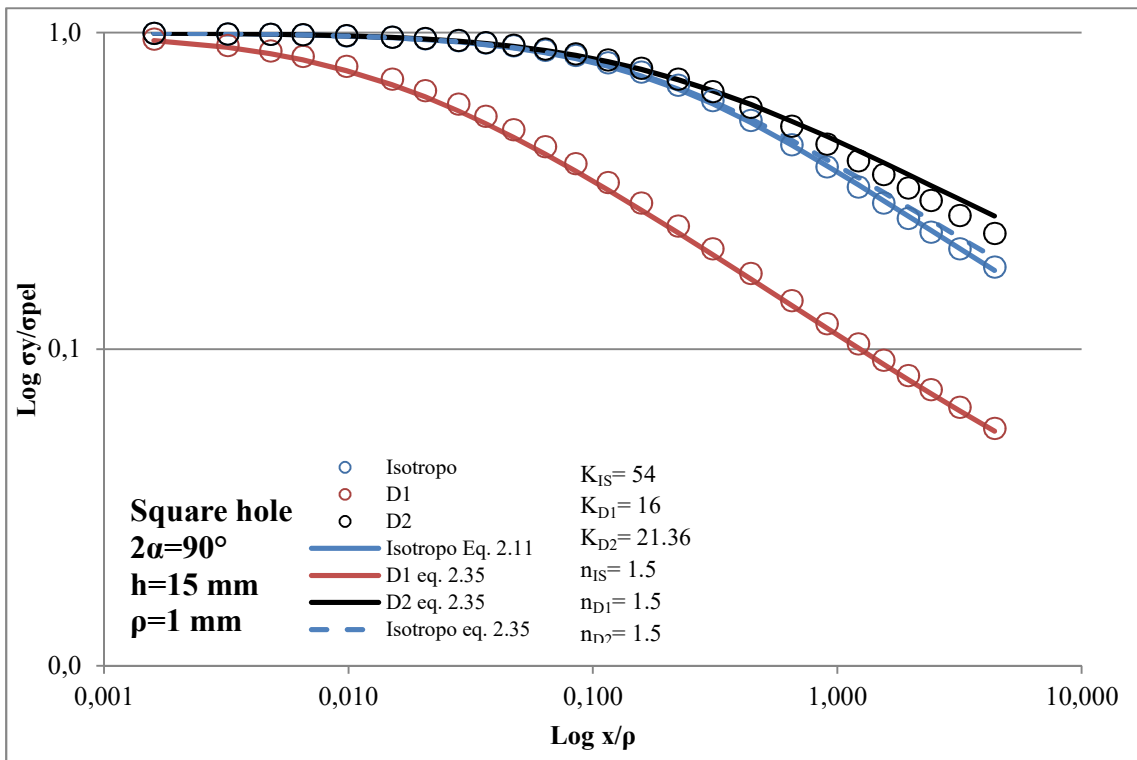


Figura 151– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

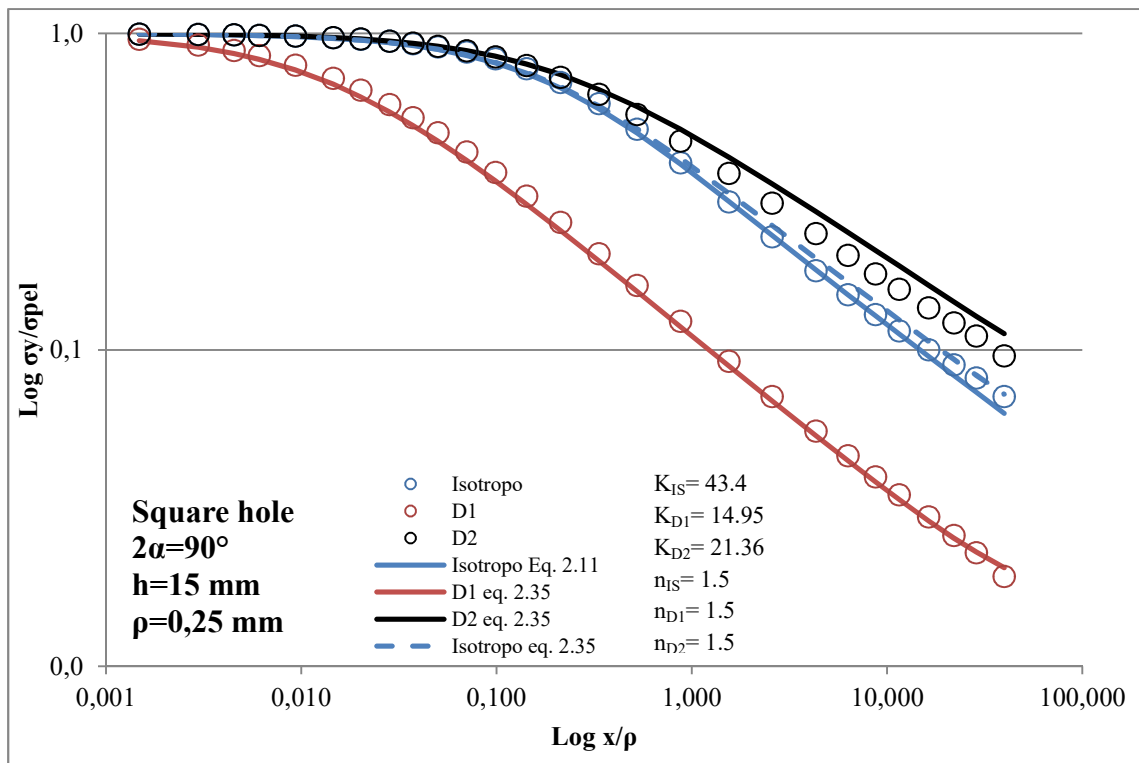


Figura 152– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

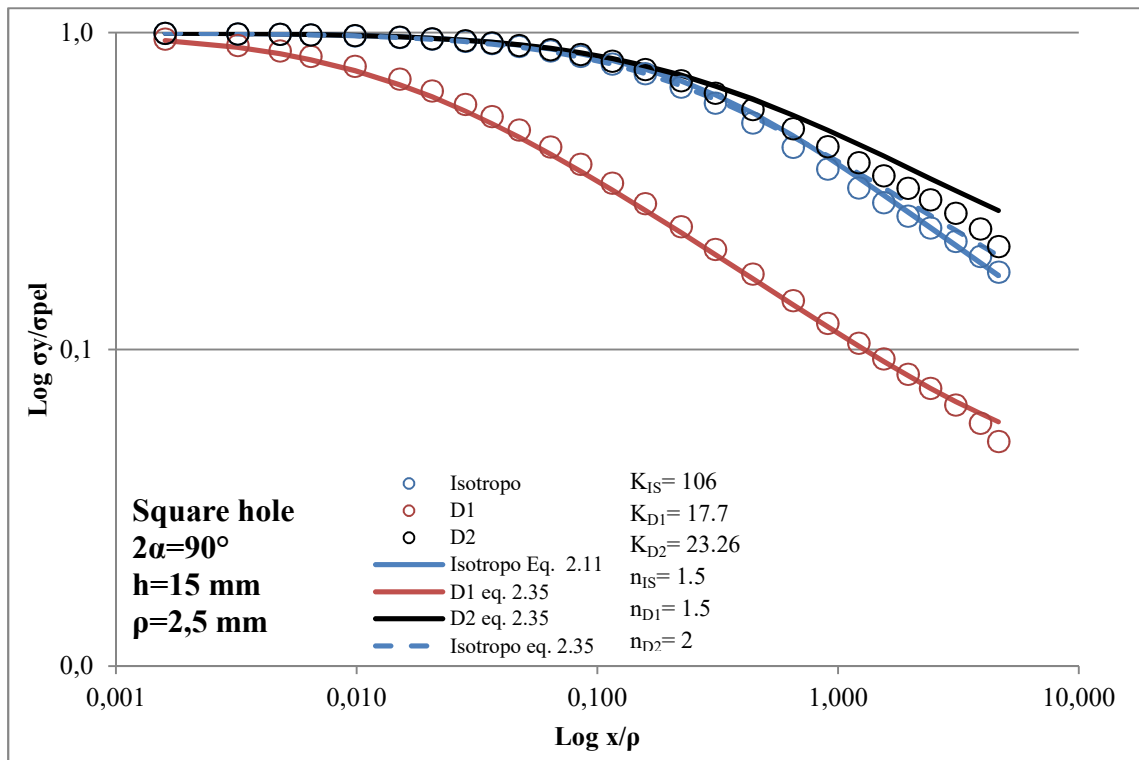


Figura 153– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

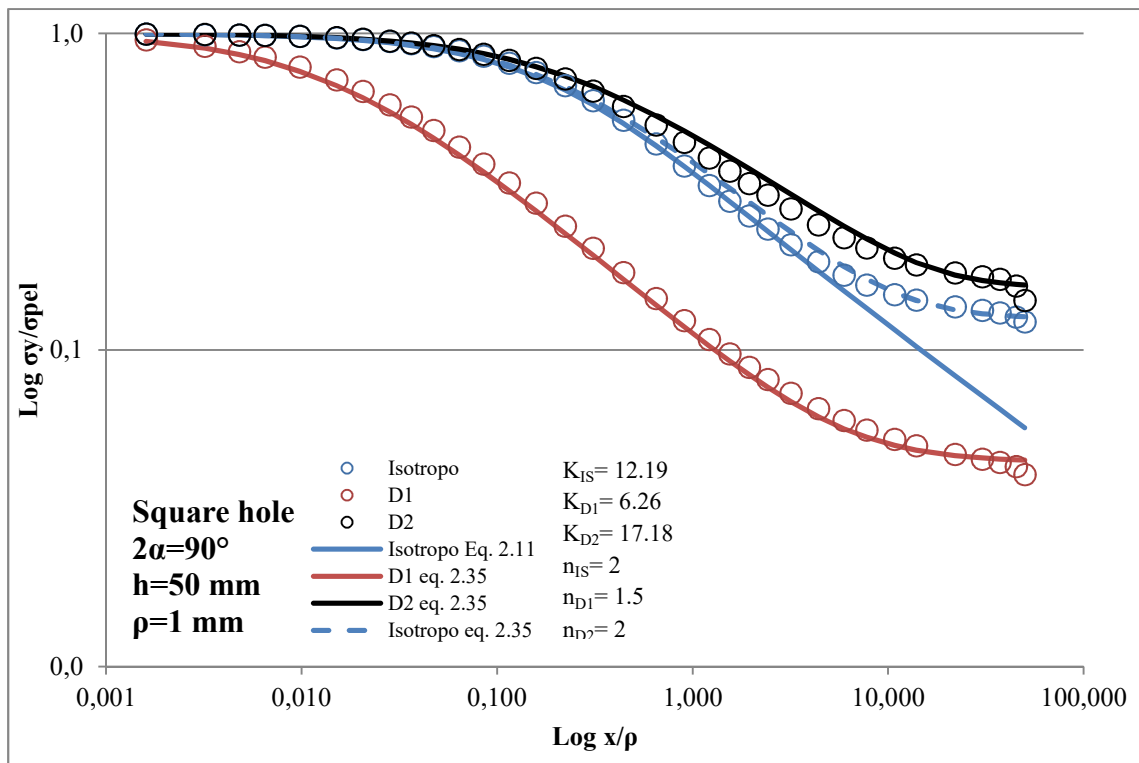


Figura 154– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

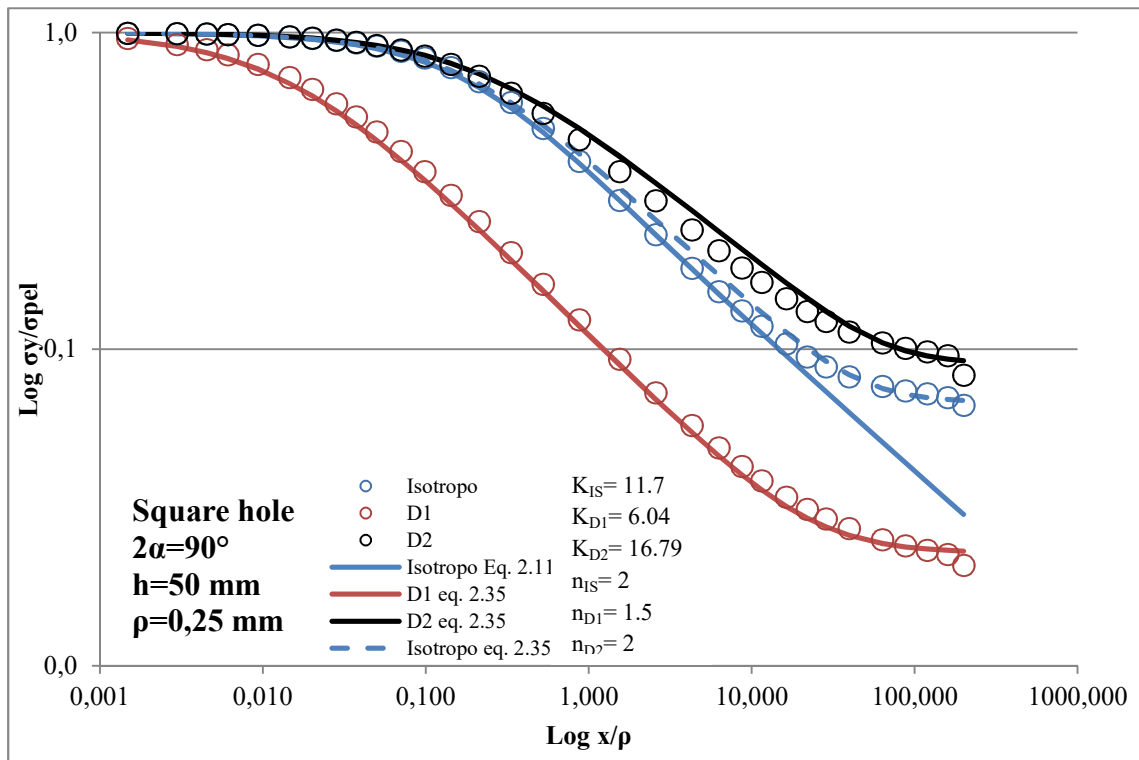


Figura 155– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

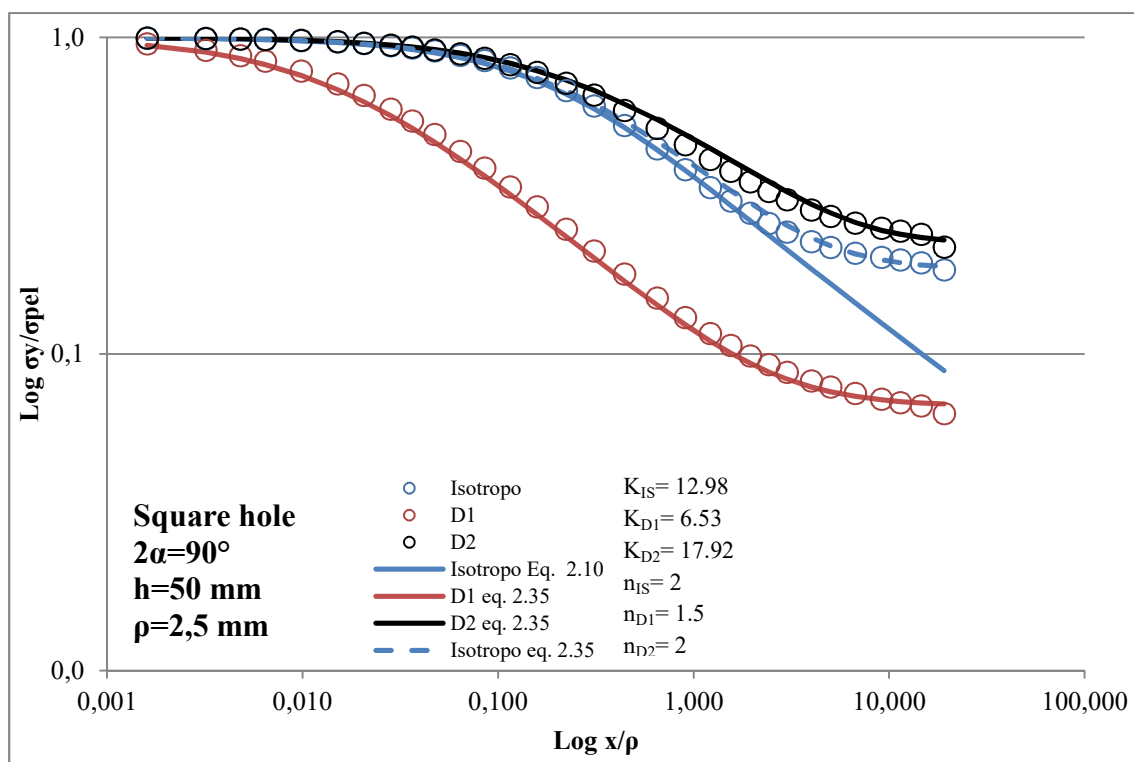


Figura 156– Tensione normalizzata  $\sigma_y/\sigma_{pel}$  su distanza dall'apice normalizzata  $x/\rho$

I grafici mostrano l'influenza del tipo di materiale sull'andamento del campo tensionale a parità di geometria. In tutti i casi considerati è possibile fare alcune considerazioni generali valide indipendentemente dalla geometria in esame: l'influenza delle proprietà elastiche del materiale è notevole, in particolare per materiali con  $\psi$  basso, quindi molto rigidi nella direzione di applicazione del carico, si ha una zona interessata dall'effetto di intaglio più ristretta, ma con valori di  $K_t$  e quindi di tensione di picco elastico ben più alti rispetto al caso isotropo e al materiale ortotropo D2, l'andamento della tensione per il materiale D1 infatti è molto distinto rispetto agli altri due materiali. In questo caso inoltre, la transizione tra le regioni tende ad essere meno marcata. Per i materiali isotropo e D2, quindi con  $\psi \geq 0.25$ , l'andamento del campo tensionale è più simile, con zone interessate dall'effetto di intaglio più estese e valori di  $K_t$  più bassi e simili tra loro. Le regioni 1,2 e 3 sono più marcate con una transizione più brusca. Nel dettaglio sia per i casi con intaglio laterale ad U o a V raccordato che per quelli con intaglio a key hole si può affermare che subiscono la stessa influenza dal tipo di materiale, senza differenze significative. A conferma di quanto già visto nei due paragrafi precedenti l'equazione (2.35) da ottimi risultati per tutti e 3 i materiali per la geometria con intaglio laterale ad U o V raccordato, senza differenze significative al variare del raggio di raccordo o dell'angolo di apertura. Le stesse considerazioni valgono per la geometria con foro ellittico. La teoria risulta invece meno accurata nel caso con intaglio a key hole per materiali con  $\psi \geq 0.25$  e per angoli di apertura elevati. Un'ulteriore considerazione va fatta per la geometria con foro quadrato, i cui diagrammi non erano riportati nei

paragrafi precedenti. L'andamento delle tensioni ricorda molto quello dell'intaglio laterale a V con angolo di apertura di  $90^\circ$ , in particolare per le regioni 1 e 2. Si osserva una differenza nella zona 3 dove in questo caso ci si avvicina al bordo libero della piastra. Anche in questo caso l'equazione (2.35) da risultati soddisfacenti, in particolare per il caso con una semi-sezione netta di 50 mm. Nel caso della semisezione netta di 15 mm, l'equazione tende ad essere meno accurata nel caso dei materiali con  $\psi$  alto, probabilmente per il fatto che il rapporto  $W/2a$  è basso e l'effetto di intaglio è ancora presente quando ci si avvicina al bordo libero.

### 3.4 Criterio energetico

Quanto visto finora, a partire dalla teoria della meccanica della frattura lineare elastica, ha lo scopo di studiare l'andamento dei campi tensionali in un componente caratterizzato dalla presenza di un difetto. L'andamento dei campi di tensione infatti, può essere direttamente riconducibile ad un parametro che quantifichi in che misura il campo di tensione di intensifica avvicinandosi all'apice di un intaglio. Tale parametro, chiamato NSIF ovvero Notch Stress Intensity Factor, è stato introdotto per la prima volta da Gross e Mendelson (1972) e per un intaglio a spigolo vivo soggetto ad una sollecitazione di puro modo I è definito come:

$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} [\sigma_\theta r^{1-\lambda_1}] \quad (3.1)$$

In via più generale l'NISF di modo I può essere definito analiticamente a partire dalle formulazioni ricavate per descrivere lo stato tensionale, come ad esempio quelle descritte nel capitolo 2, con espressioni del tipo:

$$K_I = k_1 \sigma_0 t^{1-\lambda_1} \quad (3.2)$$

Dove:

- $k_1$  è un parametro che dipende dalla forma del componente ovvero dai rapporti tra le dimensioni caratteristiche (ad esempio  $W/2a$  oppure  $\rho/a$ )
- $\sigma_0$  è la tensione di riferimento
- $t$  rappresenta una dimensione caratteristica dell'intaglio
- $\lambda_1$  è il grado di singolarità del campo tensionale di modo I

Un aspetto fondamentale legato alla teoria che sta alla base degli NSIF è che contengono intrinsecamente informazioni legate alle dimensioni assolute del componente e alle caratteristiche geometriche del difetto, essi infatti hanno un'unità di misura che dipende dall'angolo di apertura dell'intaglio [ $\text{MPa} \cdot \text{mm}^{1-\lambda_1}$ ] rendendo non confrontabili i valori di diversi modelli presi in considerazione. Al fine di superare queste limitazioni, Lazzarin e Zambardi (2001) hanno introdotto un metodo che utilizza un valore medio di densità di energia totale di deformazione valutato su un certo volume di controllo circolare attorno all'apice del difetto. Questo approccio chiamato ASED (Average Strain energy density) è direttamente esprimibile in termini di NSIF, ma non dipende dall'angolo di apertura dell'intaglio quindi rende confrontabili direttamente diverse geometrie tra di loro. Un altro vantaggio di questo metodo è che la densità media di energia di deformazione può essere determinata mediante un'analisi agli elementi finiti e non è sensibile al tipo di mesh che si usa, ciò porta alla possibilità di compiere analisi in maniera più veloce e con modelli molto più snelli di quelli che servono per determinare il valore di  $K_I$ .

### 3.4.1 Trattazione analitica

Considerando un generico componente come quello di figura (157) con un intaglio a spigolo vivo e un generico angolo di apertura pari a  $2\alpha$  è possibile esprimere la densità di energia di deformazione totale per un materiale isotropo in condizioni lineari elastiche come:

$$W(r, \theta) = \frac{1}{2E} \{ \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\nu(\sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr}\sigma_{zz} + \sigma_{\theta\theta}\sigma_{zz} + 2(1 + \nu)\sigma_{r\theta}^2) \} \quad (3.3)$$

Dove per le tensioni tangenziali si è usata una notazione più compatta del tipo  $\sigma_{ij}$ .

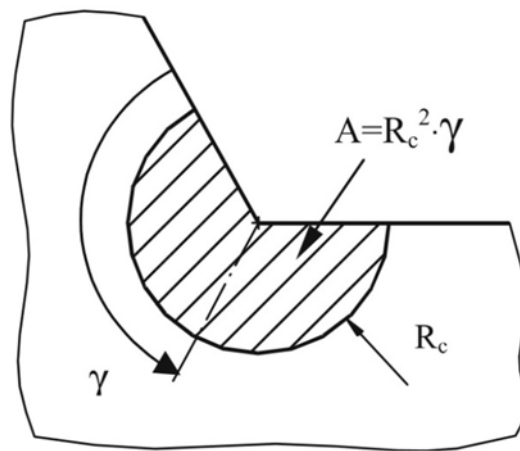


Figura 157 – Volume di controllo in un intaglio a spigolo vivo

L'energia di deformazione elastica totale riferita al modo I valutata in una regione circolare di raggio  $R_c$  attorno all'apice dell'intaglio è pari a:

$$E_1 = \int_A W_1 dA = \int_{0-\gamma}^{R_c \gamma} W_1(r, \theta) r dr d\theta = \frac{1}{E} \frac{I_1(\gamma)}{4\lambda_1} K_1^2 R_c^{2\lambda_1} \quad (3.4)$$

Dove l'integrale  $I_1$  dipende dalle componenti del campo tensionale espresse in coordinate polari e  $\lambda_1$  è il parametro definito da Williams (1952) nel primo studio del campo tensionale di un intaglio a spigolo vivo, e definisce il grado di singolarità del campo tensionale. L'area corrispondente ad un caso piano delimitata dal cerchio di raggio  $R_c$  vale:

$$A = \int_{0-\gamma}^{R_c \gamma} r dr d\theta = R_c^2 \gamma \quad (3.5)$$

Quindi l'energia di deformazione mediata sull'area A vale:

$$\bar{W}_1 = \frac{E_1}{A} = \frac{I_1}{4E\lambda_1\gamma} \left( \frac{K_1}{R_c^{\lambda_1-1}} \right)^2 \quad (3.6)$$

Gli stessi autori dello studio fin qui esposto hanno esteso il criterio ASED ad intagli raccordati considerando come volume di controllo quello definito in figura (158). Il volume è un settore di cerchio centrato ad una distanza dall'apice pari a:

$$r_0 = \frac{q-1}{q} \rho \quad (3.7)$$

in accordo con la mappatura data da Neuber nel paragrafo 2.2.1 e la sua estensione è data da  $R_c$ . In questo modo il volume di controllo permette di considerare il raggio di raccordo  $\rho$  e l'angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$  e degenera automaticamente nel volume caratteristico di uno spigolo vivo nel caso  $\rho=0$ .

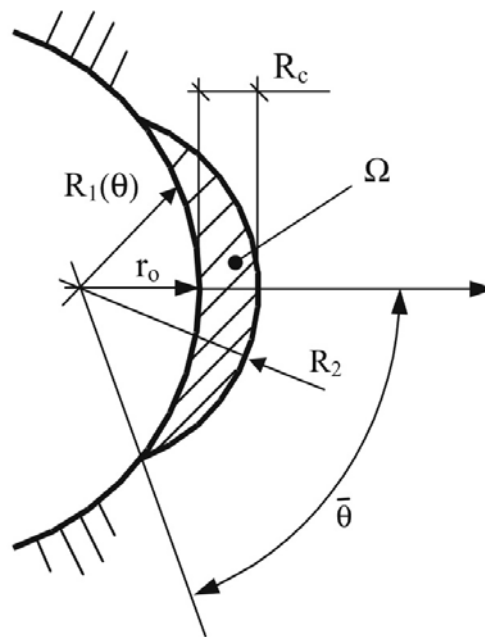


Figura 158 – Volume di controllo in un intaglio raccordato

L'area corrispondente al volume appena descritto è espressa come:

$$\Omega = \int_{R_1(\theta)}^{R_2} \int_{-\theta}^{\theta} r \, dr \, d\theta \quad (3.8)$$



L'espressione dell'energia di deformazione mediata sull'area  $\Omega$  per un intaglio raccordato può essere espressa come:

$$\bar{W}_1 = \frac{E_1}{\Omega} = F(2\alpha)H(2\alpha, \frac{R_c}{\rho}) \frac{\sigma_{max}^2}{2E} \quad (3.9)$$

Dove le funzioni H ed F dipendono appunto dall'angolo di apertura e dal rapporto tra  $R_c$  e  $\rho$ , esse sono ricavate a partire dalle equazioni 2.7, 2.8 e .29 descritte nel paragrafo 2.2.1. In particolare quando il rapporto  $R_c/\rho$  tende a 0 le funzioni appena descritte tendono a 1 e il valore dell'ASED tende a quella dell'energia di picco pari a:

$$W_{max} = \frac{\sigma_{max}^2}{2E} \quad (3.10)$$

Viceversa per valori di  $R_c/\rho$  crescenti le funzioni H ed F hanno l'effetto di "smorzare" ciò che avviene lontano dall'apice dell'intaglio.

### 3.4.2 Calcolo della ASED mediante analisi agli elementi finiti

Con lo scopo di approfondire le teorie presenti per una geometria con intaglio laterale ad U o V raccordato, già largamente analizzata nei capitoli precedenti, sono state condotte altre analisi agli elementi per valutare l'andamento della ASED in funzione del rapporto  $R_c/\rho$ .

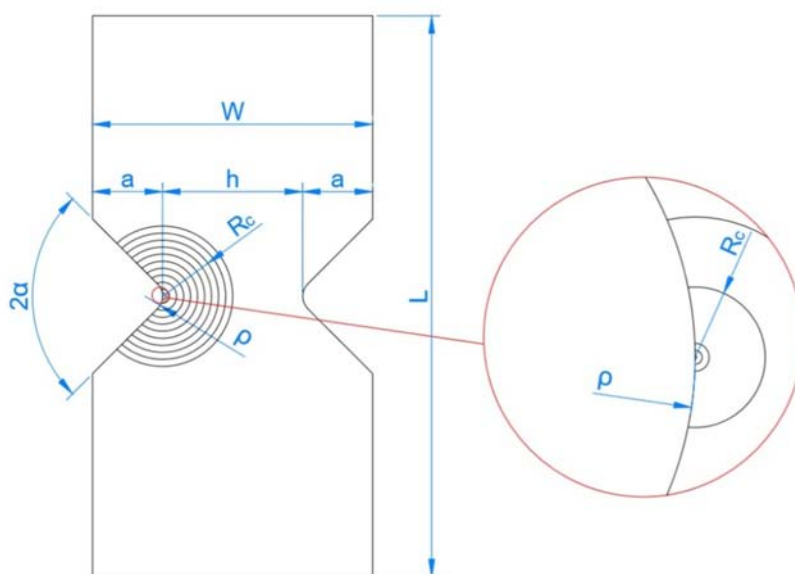


Figura 159 – Schema della geometria utilizzata per l'analisi FEM

A tal proposito sono state analizzate diverse geometrie con intaglio laterale raccordato caratterizzato da diversi angoli di apertura e raggi di raccordo. A differenza dei modelli del capitolo 2, i quali sono stati studiati in modo da guidare al meglio una mesh di tipo mapped fino all'apice dell'intaglio, questi sono sviluppati con il preciso scopo di determinare la ASED in un'area ben precisa. Il codice di calcolo Ansys infatti permette di valutare l'energia di deformazione elastica su un numero di elementi selezionati, quindi di conoscere il volume o, nel caso di analisi piane, l'area totale degli elementi selezionati. Il valore medio si ricava semplicemente dal rapporto delle due grandezze date in output dal programma. Il modello dunque è costituito, oltre dalla geometria propria, da una serie di settori di cerchio concentrici centrati all'apice dell'intaglio di raggio  $R_c$  (figura 159). I raggi di controllo  $R_c$  considerati sono (in mm):

0.01 – 0.05 – 0.1 – 0.5 -1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 - 10

I parametri geometrici considerati sono riassunti in tabella 9. Per ogni geometria infine sono state condotte 3 analisi per ciascuno dei materiali descritti nel paragrafo 2.1.5.

L [mm]	a [mm]	h/2 [mm]	W/2[mm]	$\rho$ [mm]	$2\alpha$ [°]
160	10	30	40	0.25	0
					3
					60
					90
					120
					135
					150
					1
				30	
				60	
				90	
				120	
				135	
				150	
				2.5	
					30
					60
					90
					120
					135
					150

Tabella 9

In figura (160) è riportato a titolo di esempio una delle geometrie modellata nel codice Ansys, dove si è sfruttata la simmetria geometrica della piastra. Come già accennato precedentemente la determinazione della densità di energia di deformazione è mesh insensitive, ovvero non varia nel caso di mesh fitta o rada. Per le analisi dunque viene

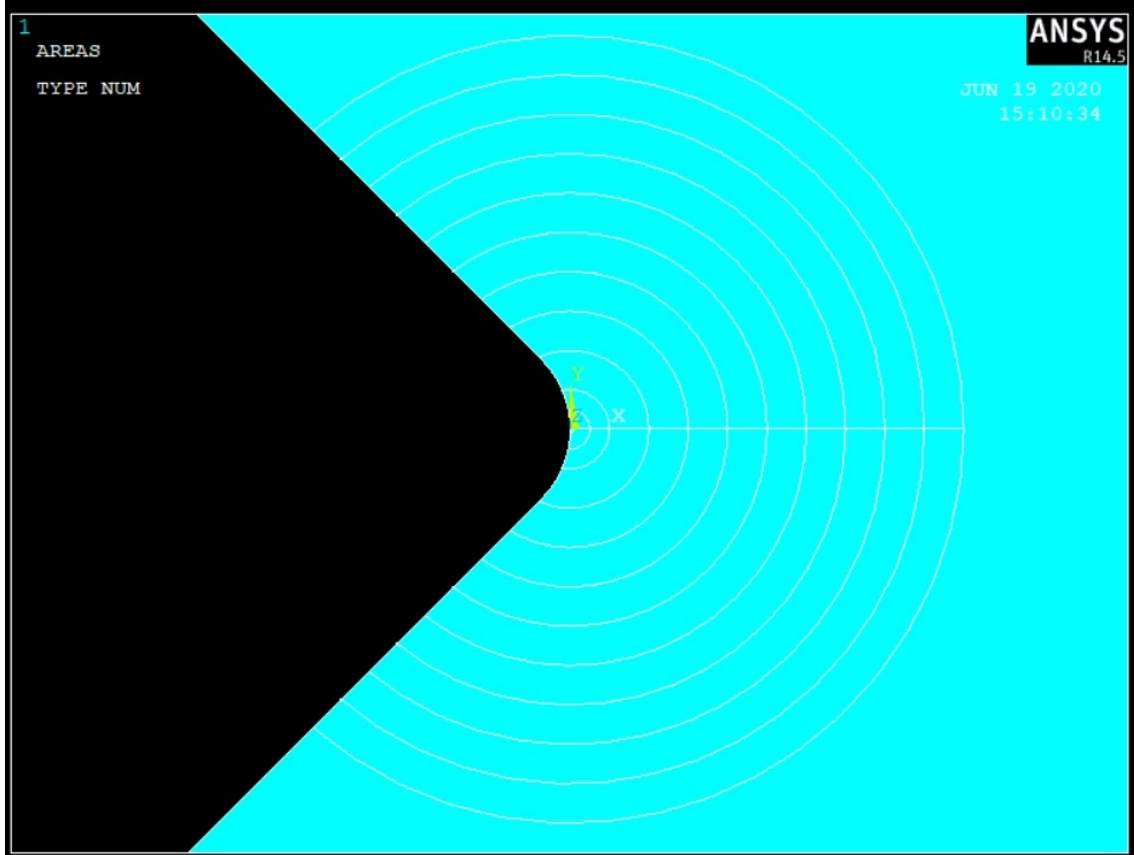
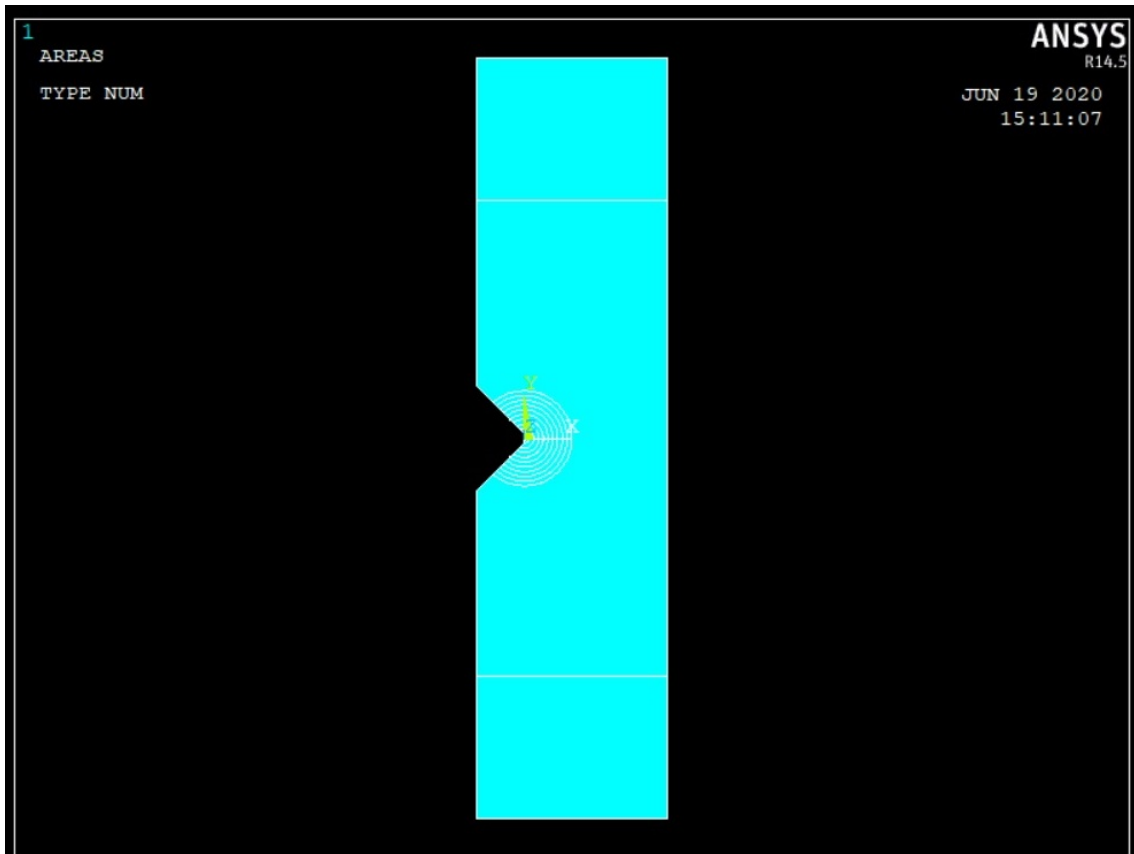


Figura 160 – Modello in Ansys con  $2\alpha=90^\circ$  e  $\rho=2.5$  mm

adottata una mesh di tipo free caratterizzata da una densità di elementi relativamente bassa, caratterizzata da elementi che in prossimità dell'apice hanno una dimensione dell'ordine di  $\rho/1000$ .

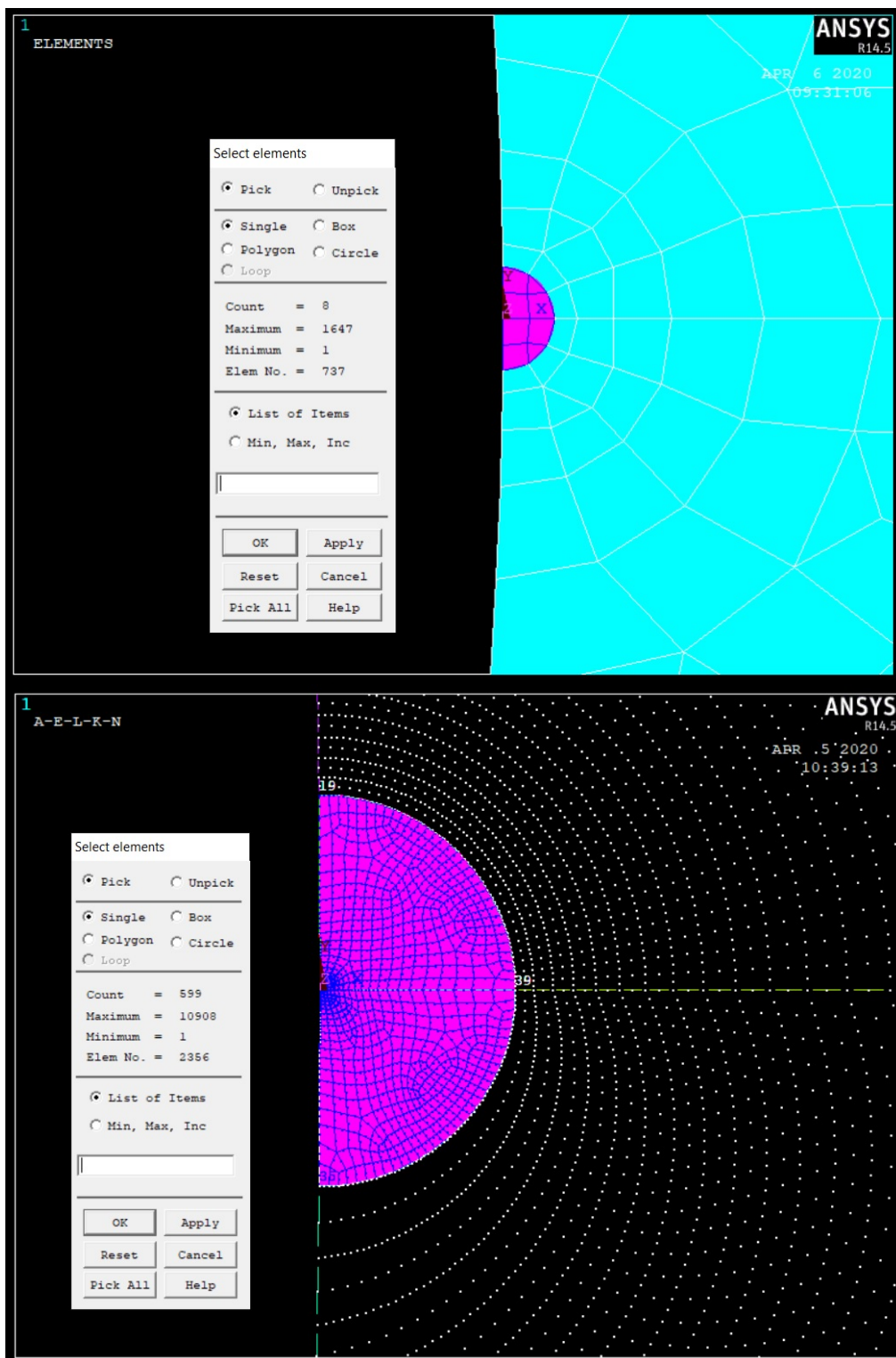


Figura 161 - In alto: mesh rada di tipo free. In basso: mesh fitta di tipo mapped

A conferma che le supposizioni fatte siano valide sia per materiali isotropi che per materiali ortotropi sono state fatte due analisi, su una geometria a campione tra quelle considerate, una prima caratterizzata da una mesh free rada con 8 elementi nel settore di

cerchio di raggio 0.01 mm, la seconda con una mesh mapped fitta con circa 600 elementi nello stesso settore di cerchio. I risultati confermano la teoria per tutti e tre i materiali considerati, la variazione in output tra i due modelli è appena apprezzabile.

I risultati sono riportati in grafici doppio logaritmici dove nelle ordinate è rappresentato il valore dell'energia di deformazione normalizzata al valore dell'energia di picco, ricavabile dalla (3.10) e in ascissa il rapporto  $R_c/\rho$ . Per ciascun angolo di apertura e con riferimento ad un solo materiale vengono confrontati i diversi raggi di raccordo considerati per valutarne l'influenza sull'andamento della ASED.

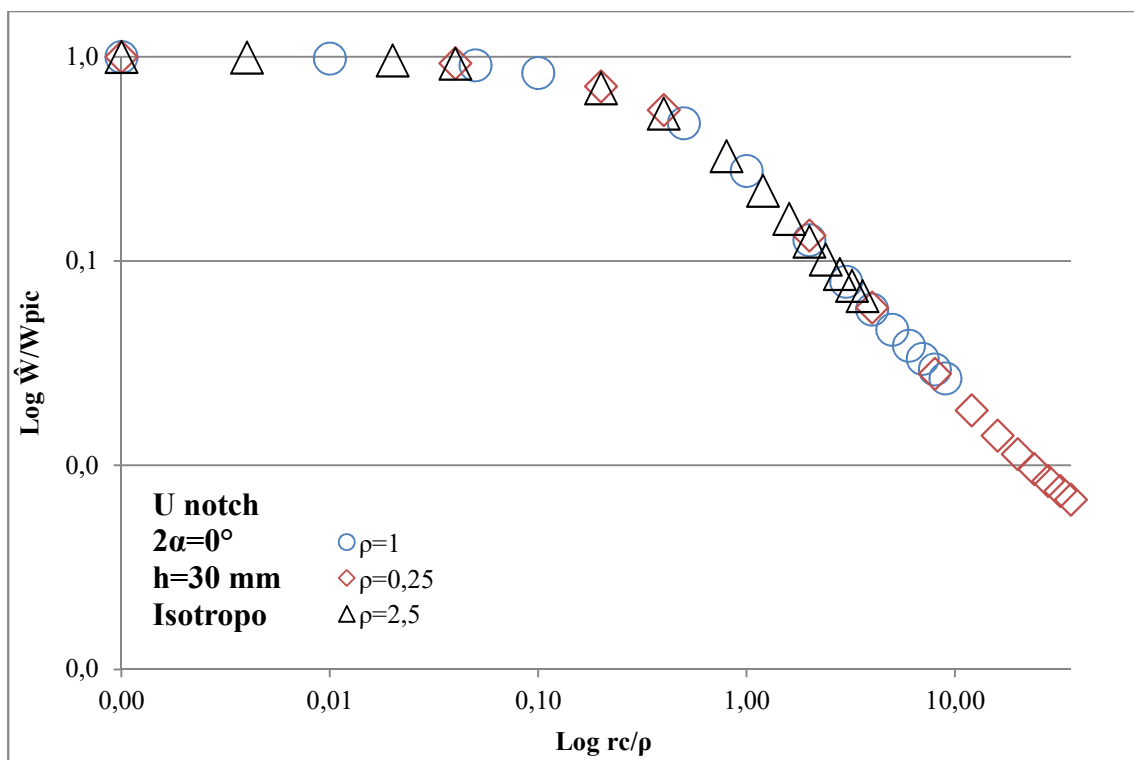


Figura 162 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/\rho$

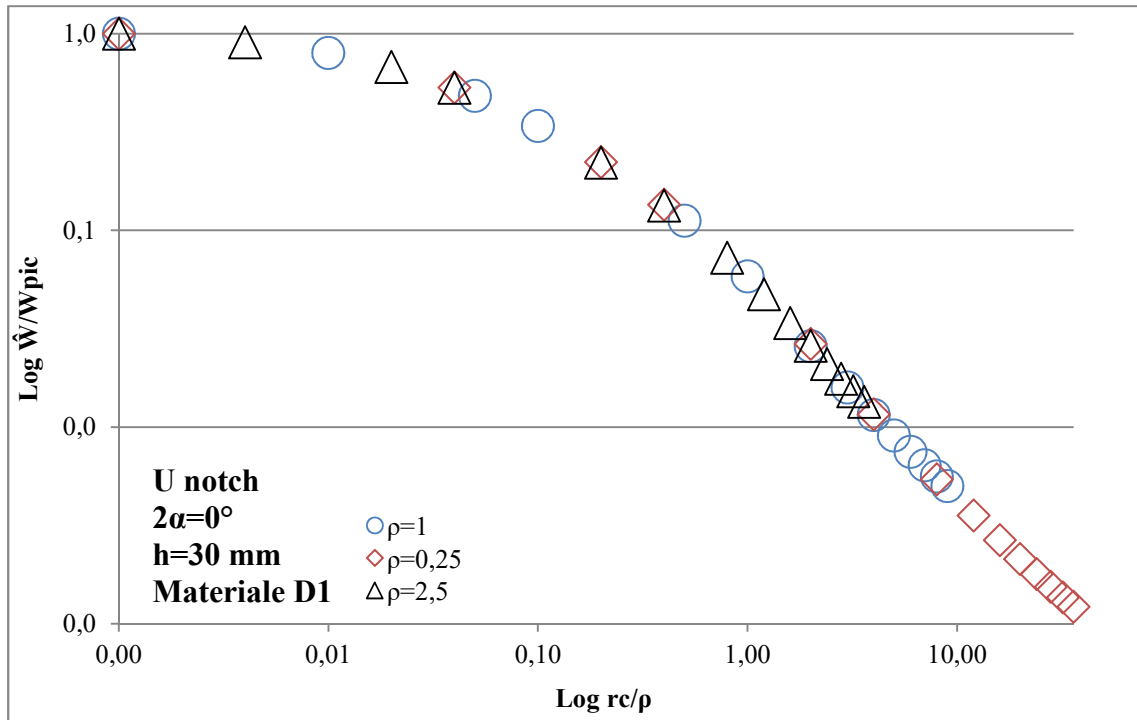


Figura 163 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{\max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/p$

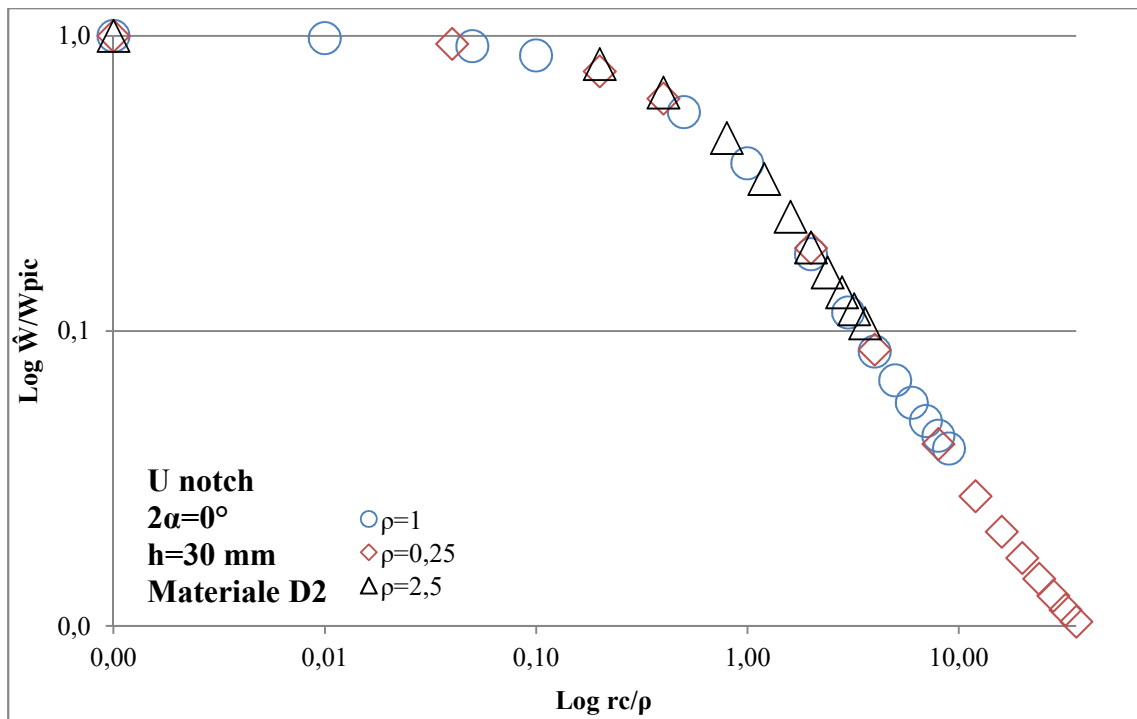


Figura 164 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{\max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/p$

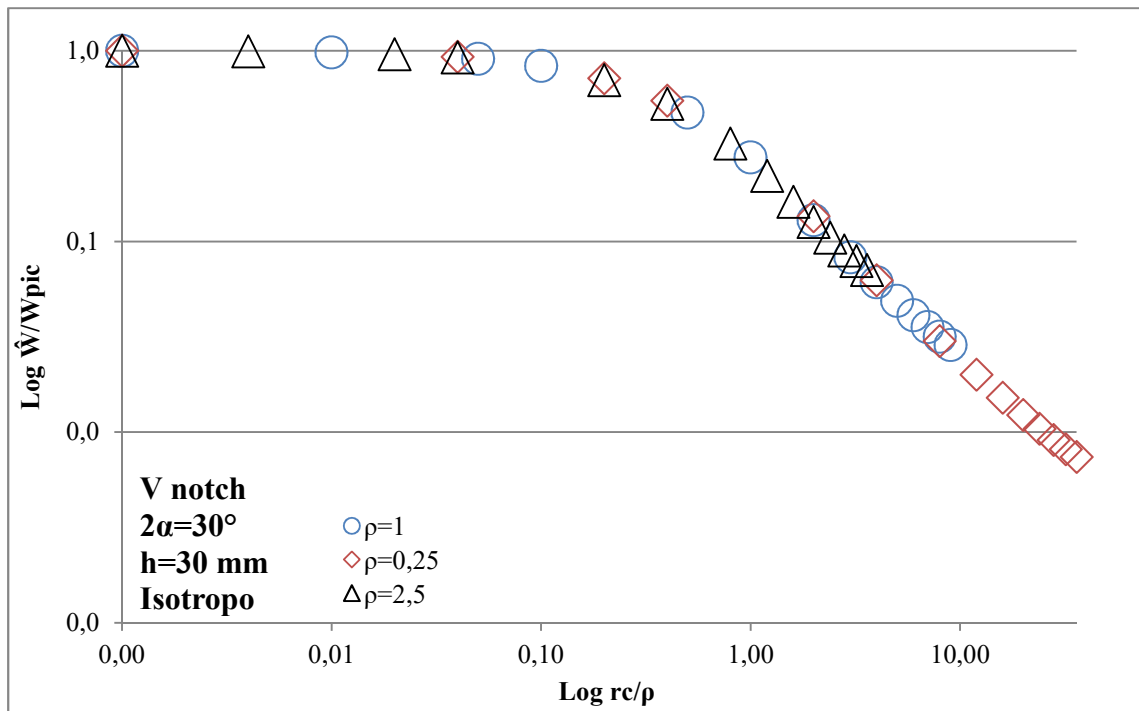


Figura 165 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{\max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/\rho$

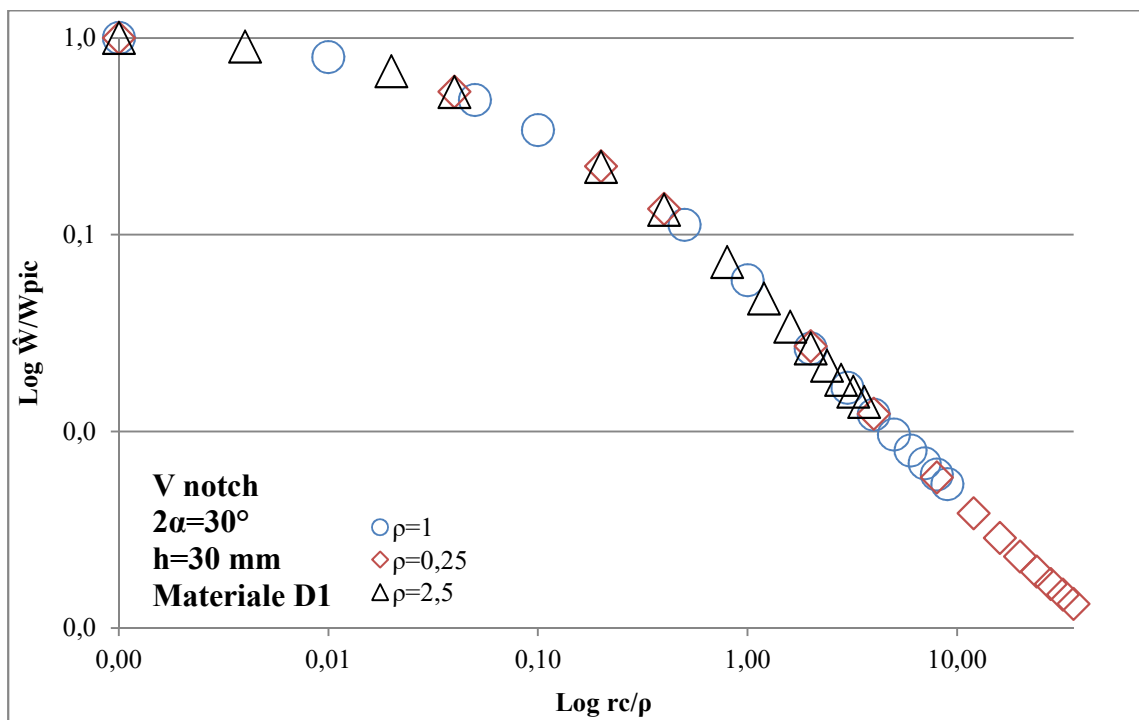


Figura 166 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{\max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/\rho$

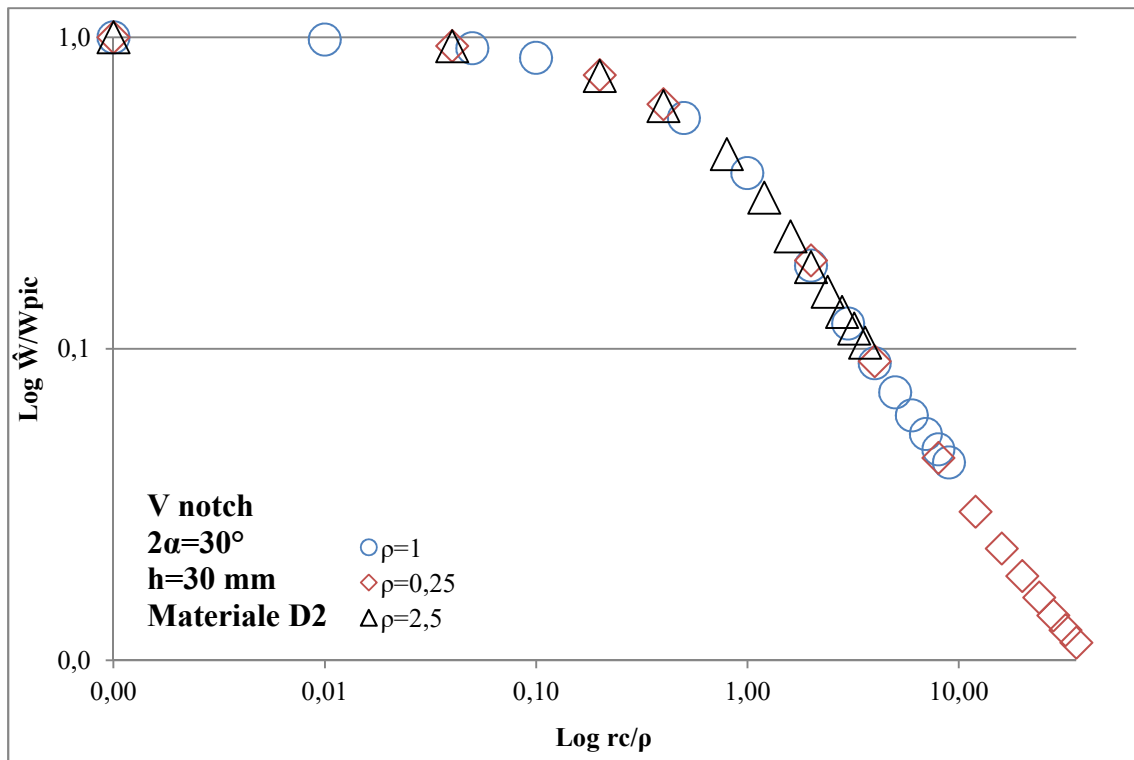


Figura 167 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/\rho$

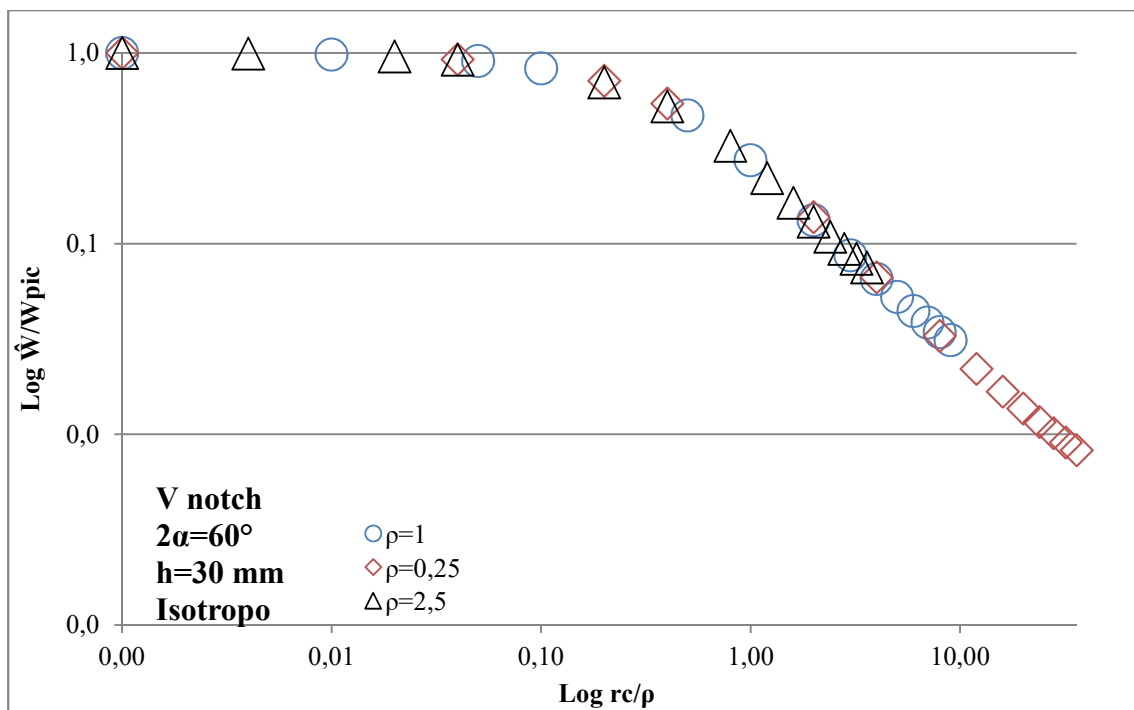


Figura 168 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/\rho$



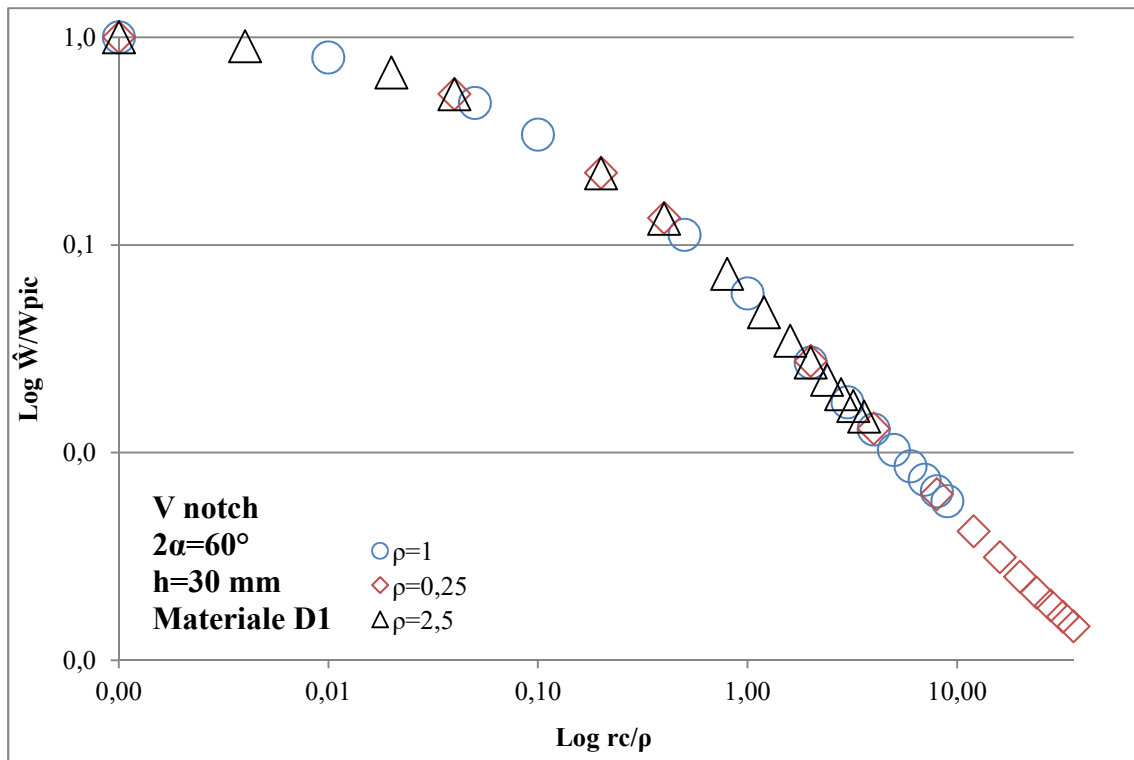


Figura 169 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{\max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/p$

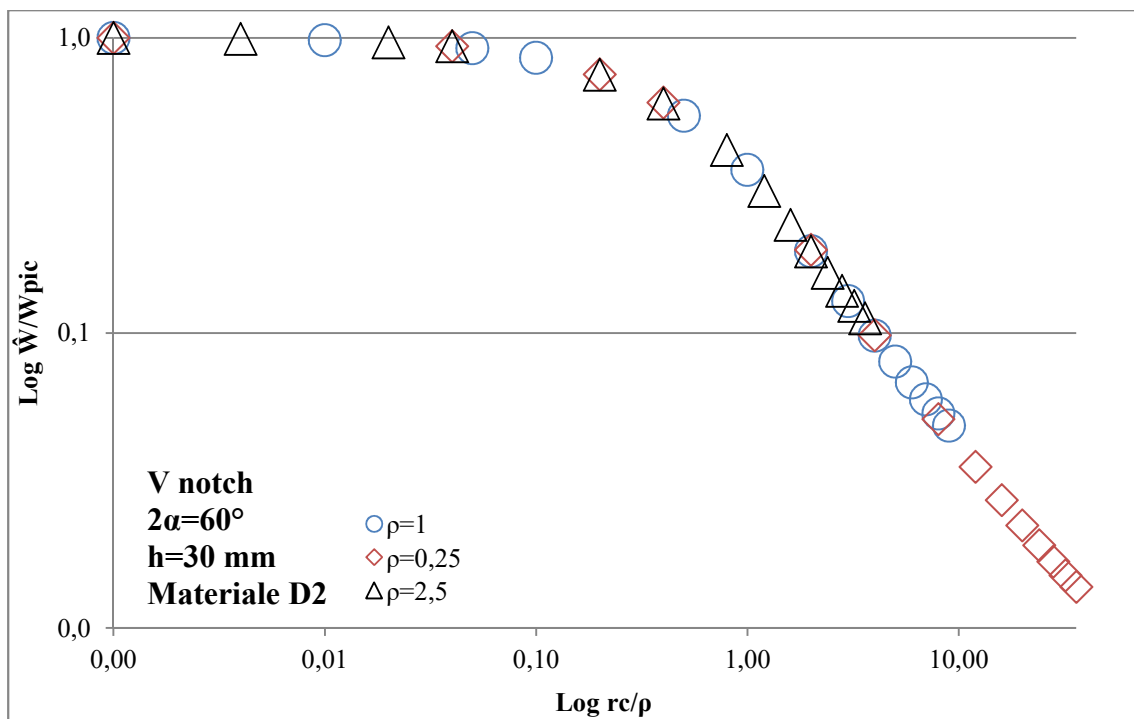


Figura 170 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{\max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/p$

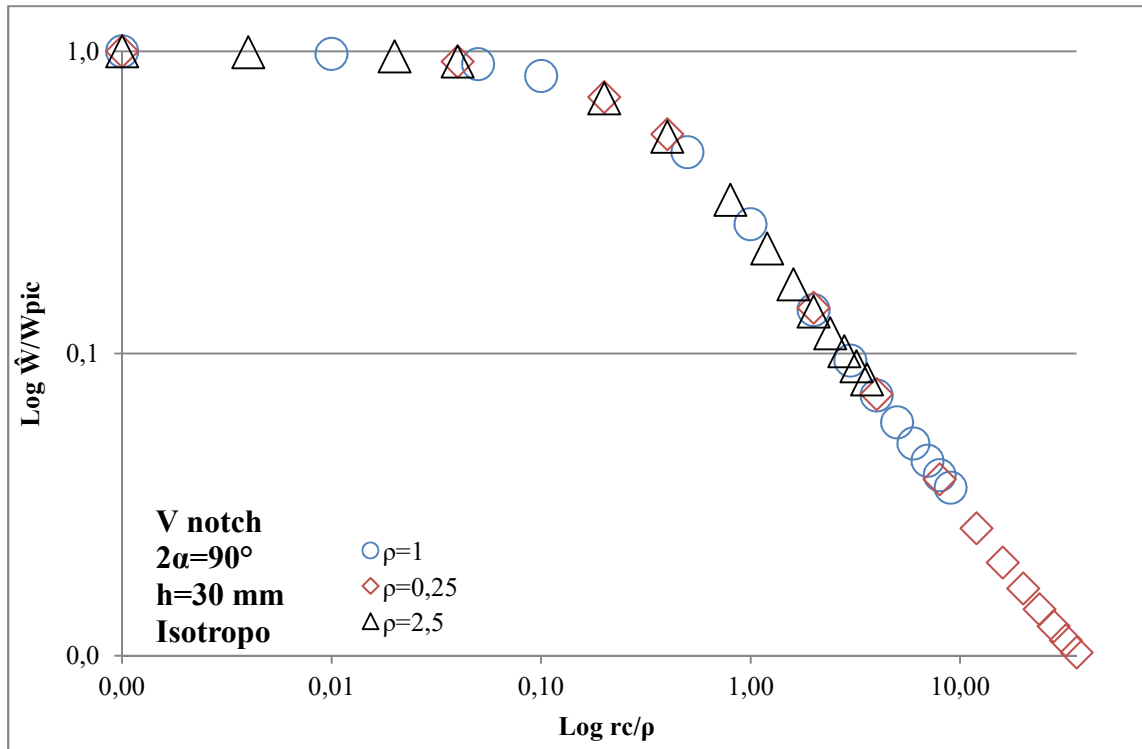


Figura 171 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{\max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/\rho$

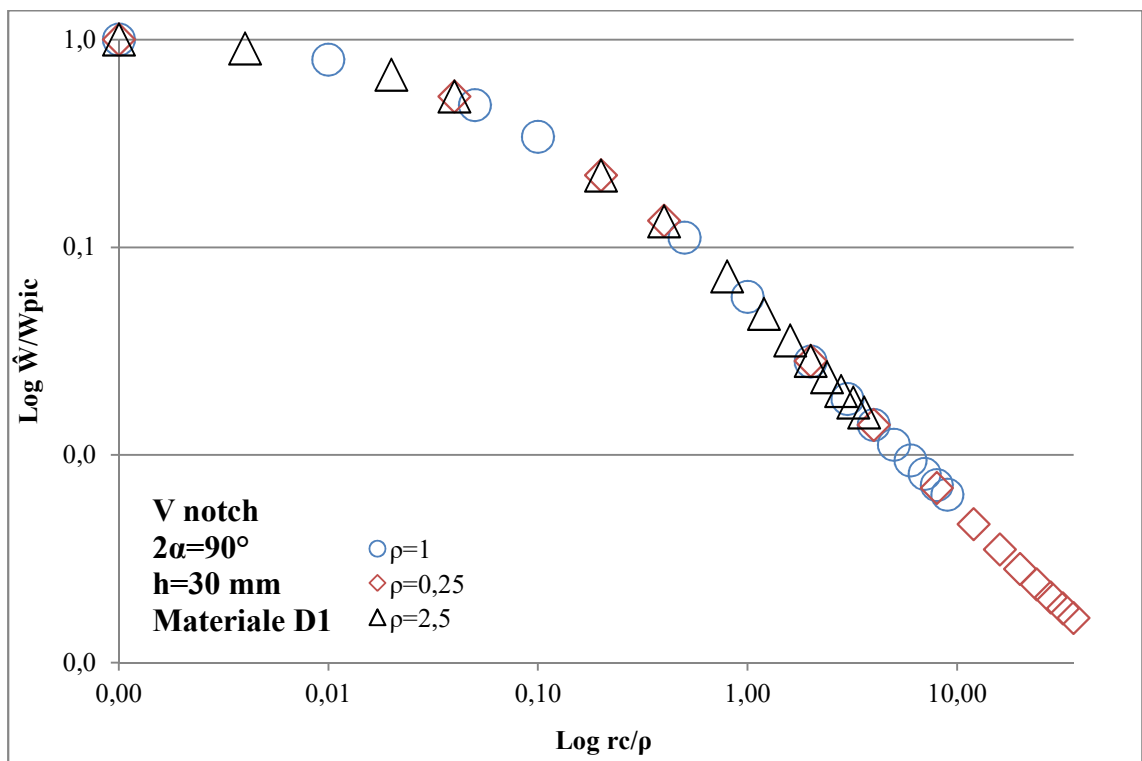


Figura 172 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{\max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/\rho$

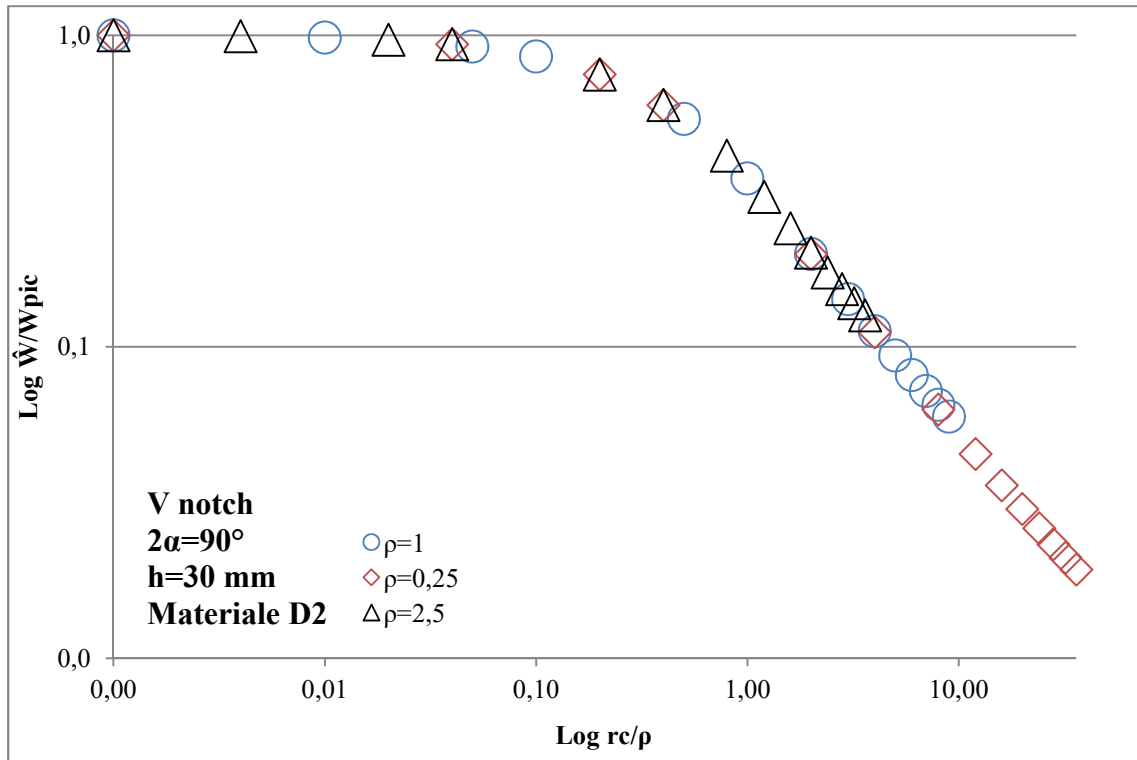


Figura 173 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{\max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/\rho$

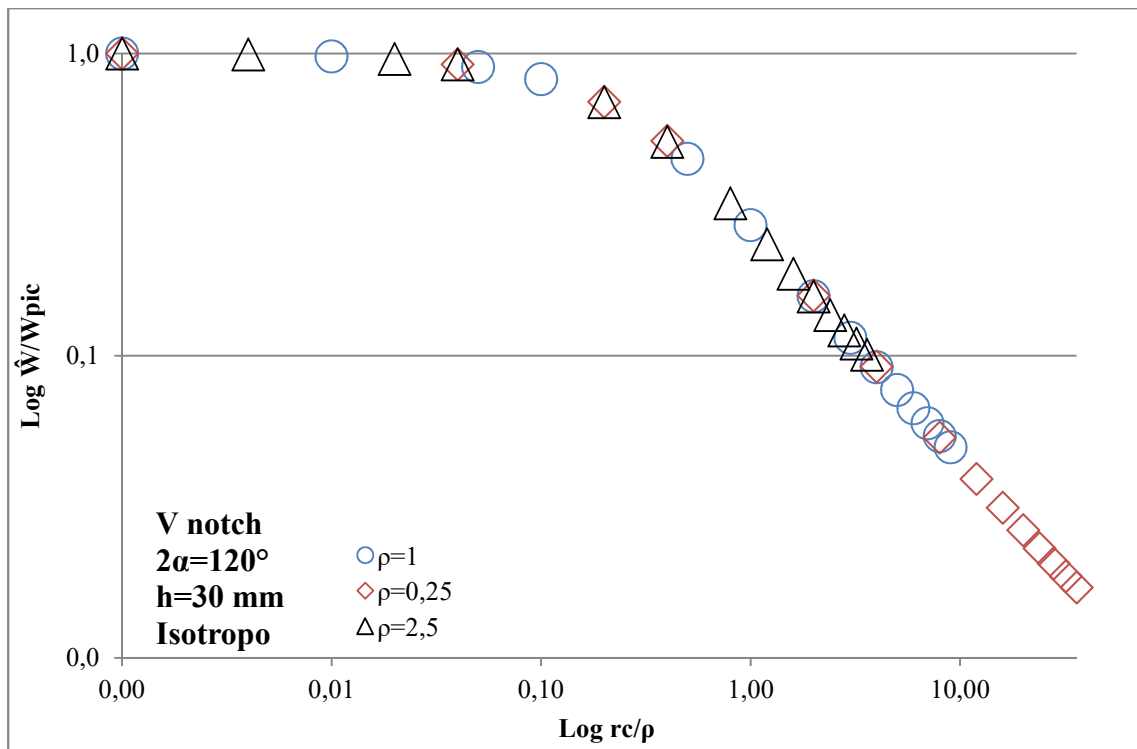


Figura 174 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{\max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/\rho$

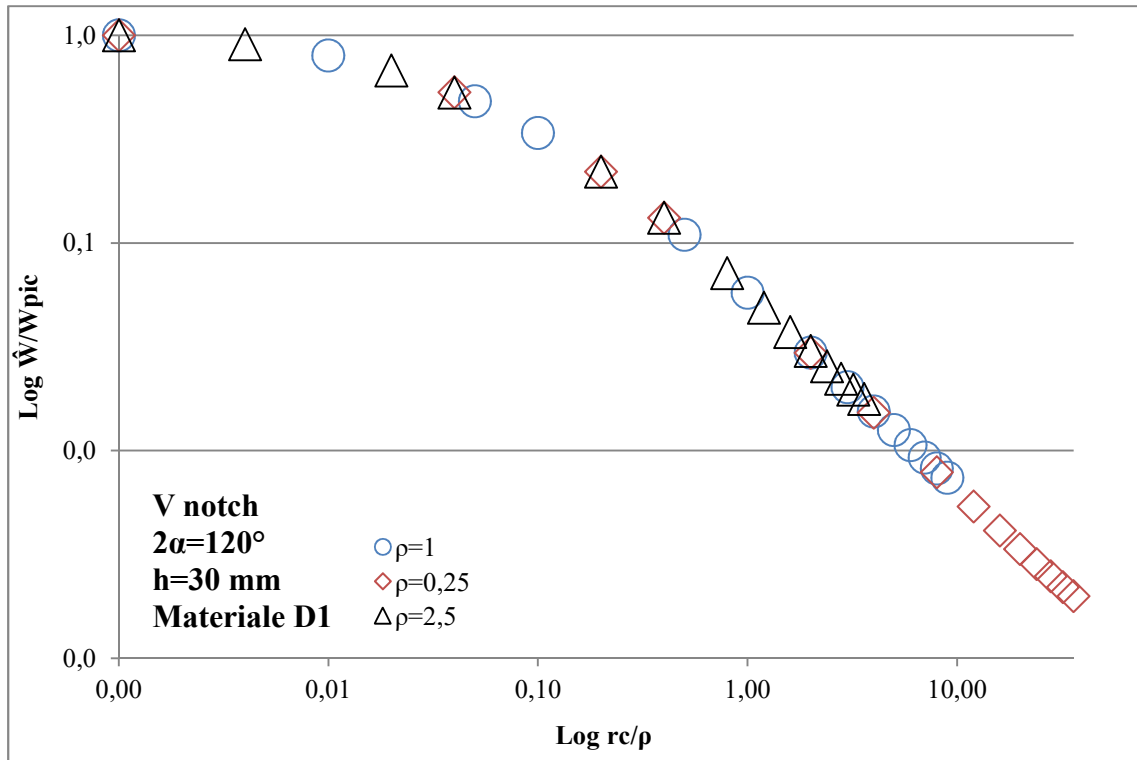


Figura 175 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{\max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/p$

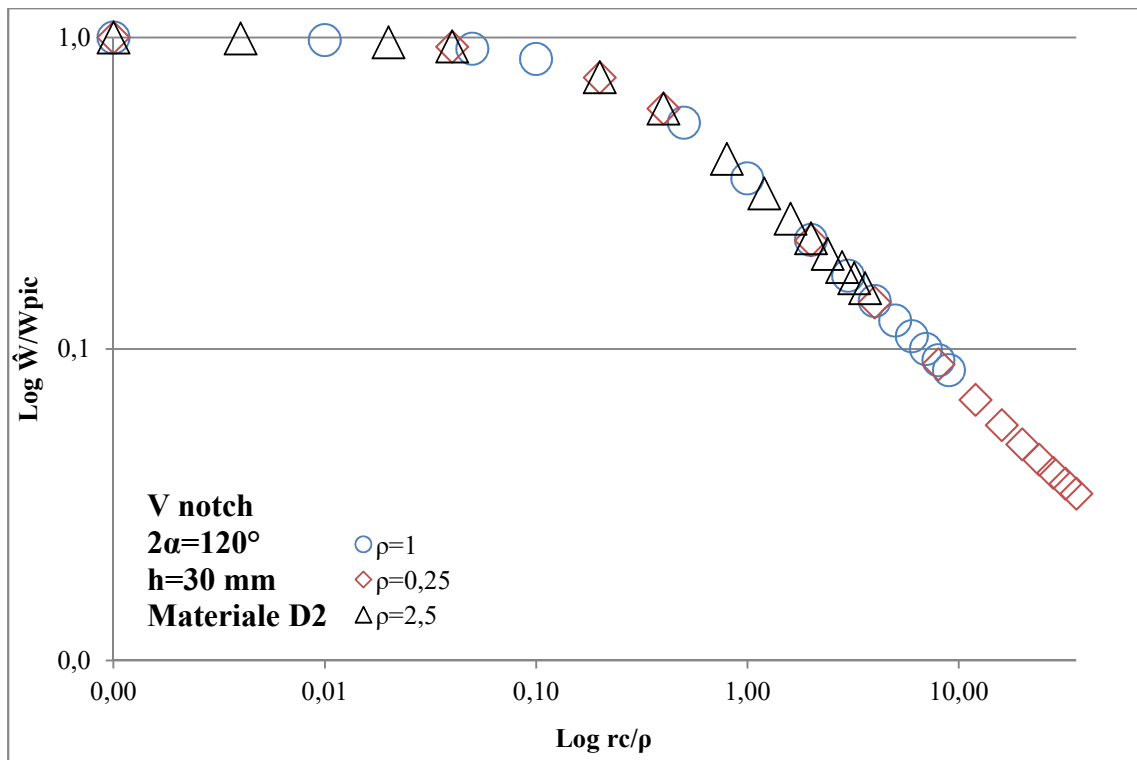


Figura 176 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{\max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/p$

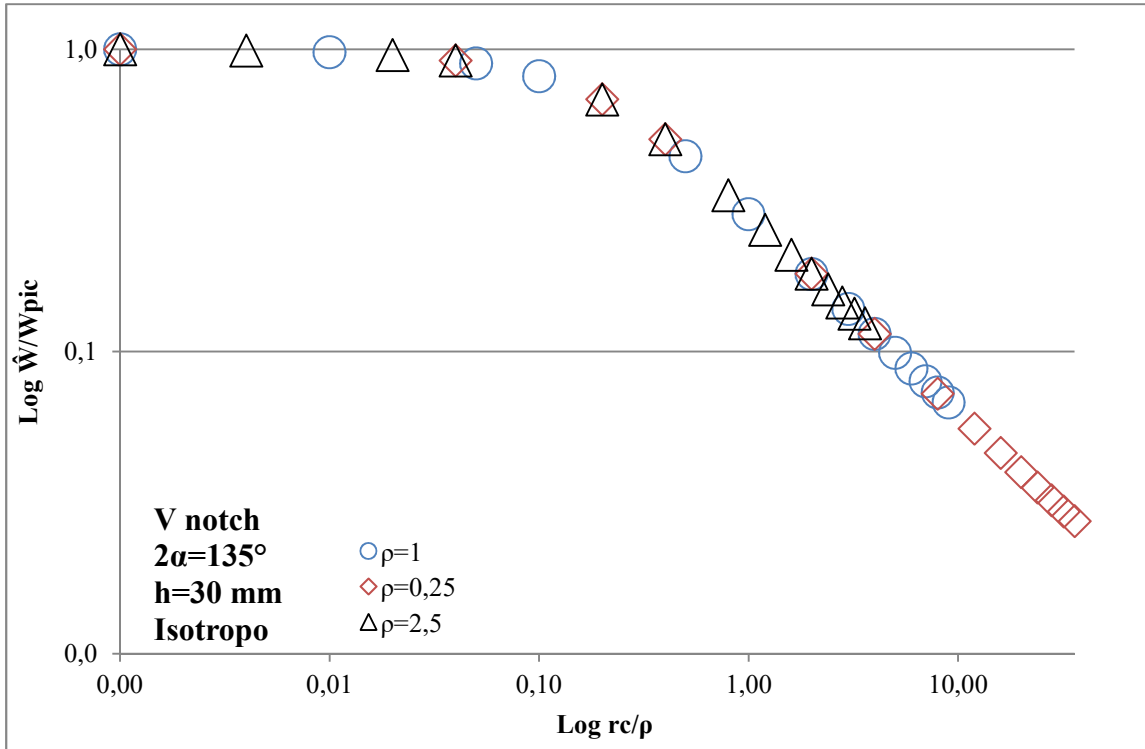


Figura 177 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/\rho$

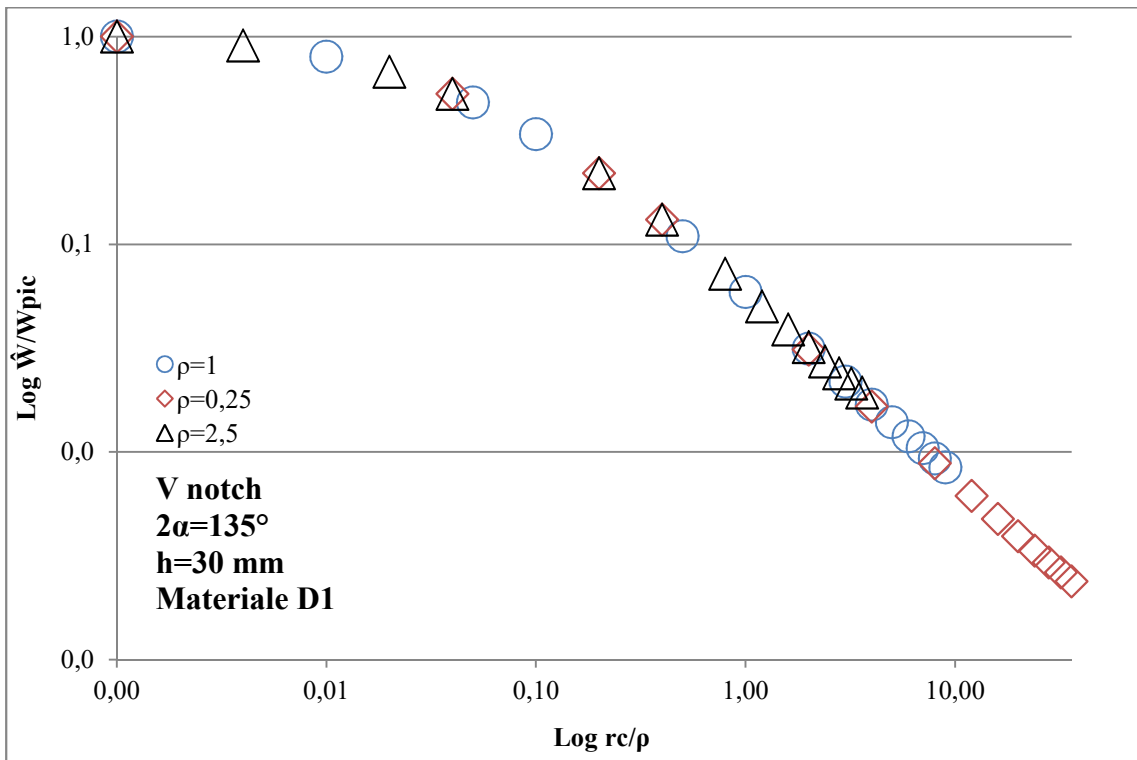


Figura 178 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/\rho$

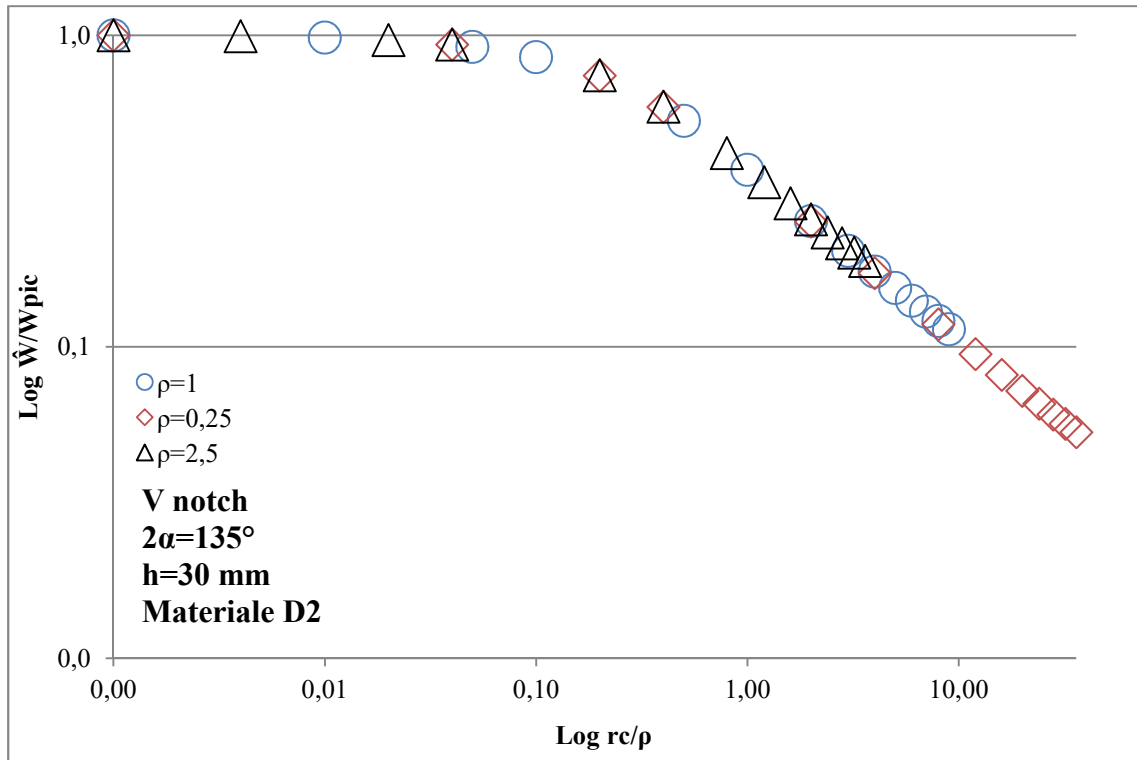


Figura 179 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/\rho$

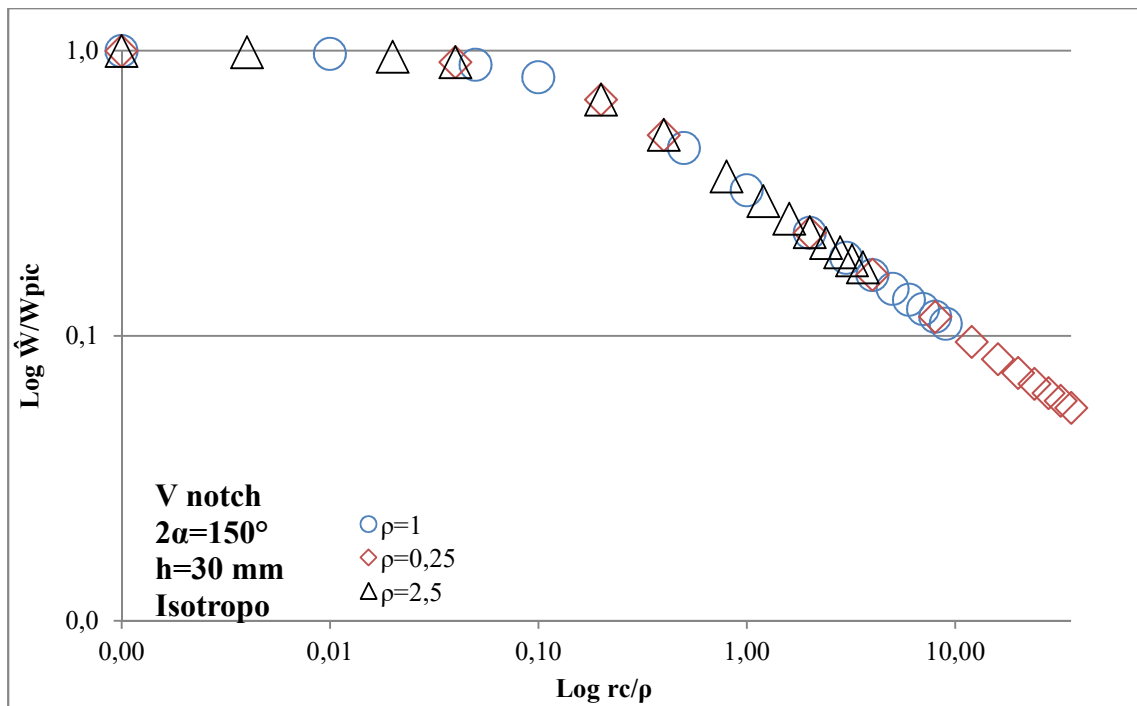


Figura 180 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/\rho$

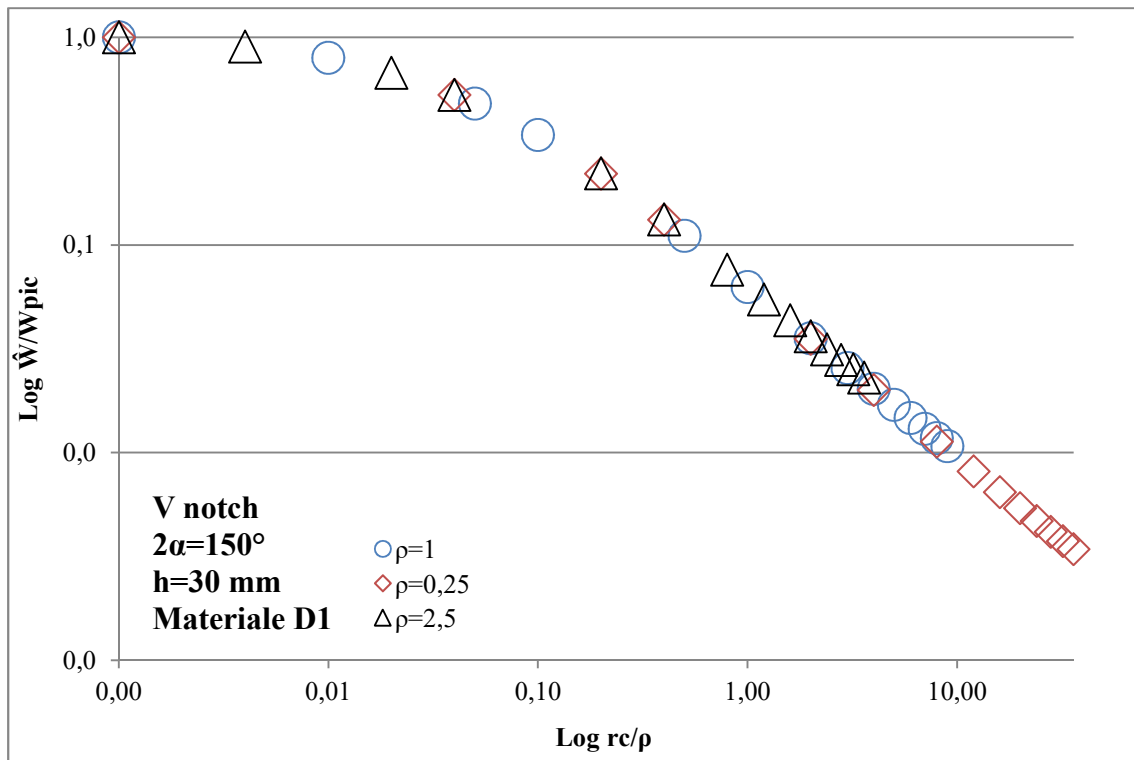


Figura 181 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{\max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/p$

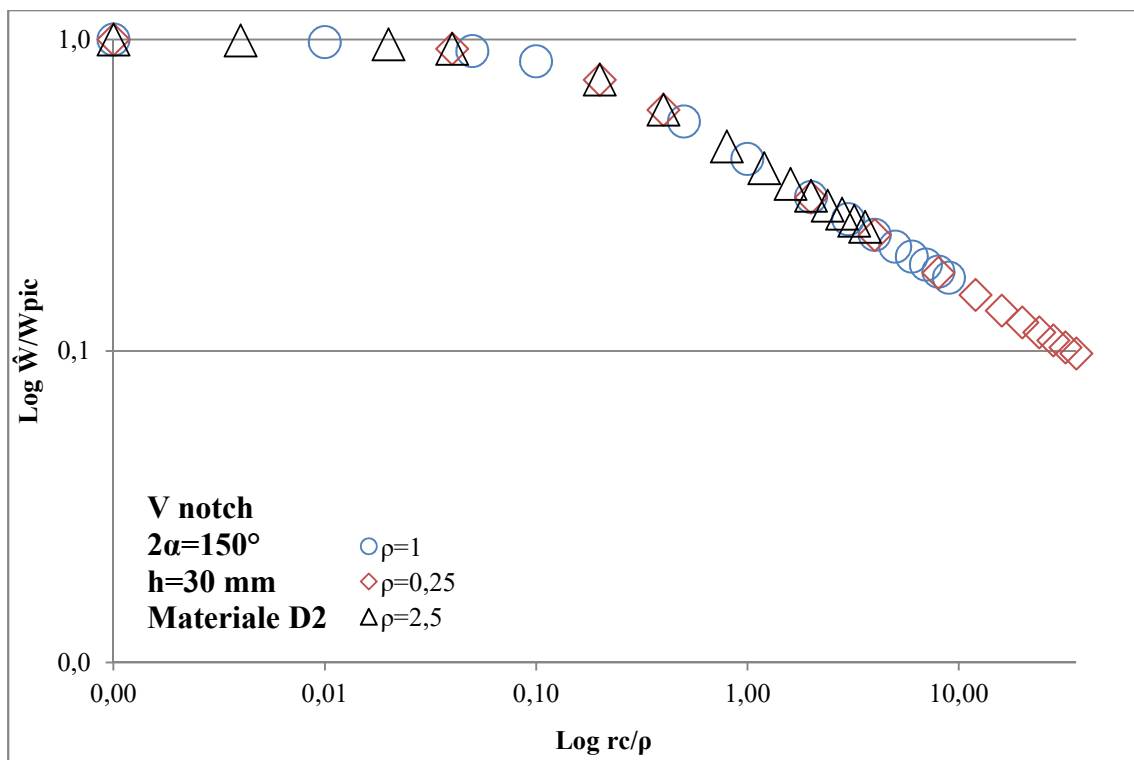


Figura 182 – Energia di deformazione elastica  $W/W_{\max}$  su raggio di controllo normalizzato  $R_c/p$

I diagrammi mostrano un'ottima stabilità dei risultati e rispecchiano quanto prevede la teoria appena descritta. I valori medi della densità di energia deformazione nelle vicinanze dell'apice, approssimativamente fino a  $R_c/\rho=0.1$ , tendono al valore di picco  $W_{max}$  descritto dalla (3.10). Allontanandosi dall'apice invece la ASED diminuisce progressivamente in accordo con la (3.9), in cui le funzioni F ed H, dipendenti dall'angolo di apertura e dal rapporto  $R_c/\rho$ , smorzano il valore massimo dell'energia. Per tutti i casi analizzati si può notare che il confronto tra i diversi raggi di raccordo dell'intaglio da in output dei dati sovrapposti che possono essere approssimati con un'unica curva. L'andamento della ASED dunque non è influenzato dal raggio di raccordo  $\rho$ , qualunque sia il materiale o l'angolo di apertura preso in esame. Un'ulteriore considerazione può essere fatta confrontando l'andamento di questi grafici con quelli relativi ai campi tensionali del capitolo 3. Si osserva infatti una certa analogia tra l'andamento della ASED con l'andamento dei campi tensionali per i diversi materiali analizzati. Anche per questi il materiale (D1) caratterizzato da un'elevata rigidità nella direzione di carico presenta una zona interessata dall'effetto di intaglio più ristretta, ma con valori di energia di picco ben più alti rispetto al caso isotropo e al materiale ortotropo D2, come per il campo tensionale l'andamento della ASED per il materiale D1 infatti è molto distinto rispetto agli altri due materiali. Infine, la transizione tra la regione in cui il valore dell'energia eguaglia quello di picco e quella in cui l'energia diminuisce progressivamente è meno apprezzabile per il materiale D1, mentre più marcata per gli altri due materiali.



## 4. CONCLUSIONI

In questo trattato sono stati analizzati alcuni modelli matematici presenti in letteratura per lo studio dei campi di tensione all'apice di intagli in piastre sottoposte a carico di trazione. In particolare sono state prese in considerazione diversi tipi di geometrie di intaglio assegnando a ciascuna una condizione di isotropia e due condizioni di ortotropia dei materiali, con l'accorgimento per quest'ultime di simulare un comportamento elastico agli antipodi.

Mediante un vasta campagna di analisi agli elementi finiti è stato fatto un confronto grafico sia tra le diverse condizioni elastiche e geometriche sia tra i risultati forniti dalla teoria e i dati ottenuti dal FEM con lo scopo di valutare e in alcuni casi migliorare, il campo di validità di ciascun modello teorico. Lo studio ha permesso di migliorare un'equazione che descrive l'andamento delle tensioni all'apice dell'intaglio estendendo la sua validità lungo tutta la bisettrice geometrica, con ottimi risultati per quanto riguarda intagli laterali ad U o a V raccordati, indipendentemente dal tipo di materiale o dalle dimensioni assolute dell'intaglio. L'affidabilità dell'equazione è stata messa a confronto anche con geometrie quali intaglio a key hole, foro ellittico e foro quadrato, con risultati che tuttavia andrebbero perfezionati. Un'ulteriore campagna di analisi ha preso in considerazione il criterio ASED, il quale usa come parametro di resistenza un valore medio di densità di energia di deformazione valutato su un certo volume di controllo. Sulla base delle stesse condizioni elastiche e geometriche delle analisi precedenti è stata fatta una prima indagine dei risultati ottenuti dal FEM, cercando di valutare quali sono i parametri che ne influenzano l'andamento e di confrontarli con la teoria alla base del criterio.

Uno sviluppo futuro di questo lavoro può essere sicuramente uno studio delle potenzialità del criterio ASED nel caso di materiali ortotropi, con un confronto diretto fra teoria e analisi FEM similmente a quanto fatto nella prima parte del lavoro.

## **BIBLIOGRAFIA**

*Martin H. Sadd - (2005) - Elasticity: Theory, applications and numerics*

*M Zappalorto, P. A. Carraro - (2015) - An engineering formula for the stress concentration factor of orthotropic composite plates*

*S. Filippi, P. Lazzarin, R. Tovo - (2002) - Developments of some explicit formulas useful to describe elastic stress fields ahead of notches in plates*

*M. Zappalorto, P. Lazzarin - (2011) - In-plane and out-of-plane solutions for V-notches with end holes*

*M Zappalorto, P. A. Carraro - (2016) - Two-dimensional stress distributions in tensioned orthotropic plates weakened by blunt V-shaped notches*

*P. Lazzarin, F. Berto - (2005) - Some expressions for the strain energy in a finite volume surrounding the root of blunt V-notches*

*M. Zappalorto - (2014-2015) - Appunti del corso di meccanica dei materiali*

*G. Meneghetti, M. Manzolaro, M. Quaresimin - (2014) - Introduction to the structural analysis with Ansys numerical code*

*P. Lazzarin, F. Berto, M. Zappalorto - (2010) - Rapid calculations of notch stress intensity factors based on averaged strain energy density from coarse meshes: Theoretical bases and applications*