Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea in Matematica

Algebra Esterna e Grassmanniane

Relatrice:
Prof.ssa Luisa Fiorot

Laureando: Valeria Ferlin
Matricola: 1234912

Anno Accademico 2022/2023

21 luglio 2023

Indice

Introduzione

L'algebra esterna e le Grassmanniane rappresentano due argomenti di notevole importanza all'interno degli ambiti della geometria e dell'algebra. Nel corso di questa tesi, ci impegneremo a esplorare la teoria dell'algebra esterna, non trascurando di analizzare le molteplici applicazioni che essa offre alle Grassmanniane. Il nostro obiettivo è fornire una panoramica dei concetti chiave, evidenziando le relazioni che intercorrono tra di essi. Mediante un approccio sistematico e approfondito, cercheremo di gettare luce su questo campo di studio affascinante, contribuendo ad ampliare la comprensione e l'interpretazione delle strutture geometriche e algebriche sottostanti.

Nel primo capitolo, inizieremo lo studio del prodotto tensoriale, che ci permetterà di definire l'operazione del prodotto simmetrico. In particolare, introdurremo le forme esterne come prodotti tensoriali antisimmetrici, dimostrando così la loro importanza nella definizione del prodotto esterno $\wedge$. Approfondiremo il teorema di Grassmann, il cui risultato sarà fondamentale per dimostrare numerosi risultati successivi. Il prodotto esterno rappresenta l'operazione fondamentale dell'algebra esterna $(\Lambda^d(V), \wedge)$, concetto essenziale per la trattazione degli argomenti sviluppati in questa tesi. Analizzeremo le proprietà del prodotto esterno e troveremo una base per quest'algebra. Inoltre, esamineremo il concetto di prodotto interno o contrazione, un'ulteriore operazione nell'algebra esterna che, come suggerisce il nome, abbassa il grado delle forme. Infine, ci concentreremo sulle relazioni che intercorrono tra un'algebra esterna su V e un'algebra esterna su V^*. Dimostreremo la relazione di dualità $\Lambda^d(V) \simeq \Lambda^{n-d}(V^*)$, che rappresenta un risultato di notevole importanza e fornisce una connessione profonda tra queste due algebre esterne.

Nel secondo capitolo, ci dedicheremo alla teoria delle Grassmanniane, iniziando con la presentazione delle definizioni preliminari necessarie per comprendere i concetti che verranno sviluppati nel resto del capitolo. Definiremo le Grassmanniane $G(d, n)$ come spazi che parametrizzano i sottospazi vettoriali di dimensione d all'interno di uno spazio vettoriale n-dimensionale fisso. Introdurremo, tramite l'immersione di Plücker, le coordinate Plückeriane, che ci permetteranno di parametrizzare in modo accurato le Grassmanniane. Dimostreremo che utilizzando tali coordinate, le Grassmanniane possono essere considerate varietà proiettive. Approfondiremo ulteriormente il concetto di coordinate Plückeriane, evidenziando le relazioni Plückeriane $\Xi_{\alpha,\beta}(\omega)$, che sono soddisfatte dalle coordinate Plückeriane stesse. Queste relazioni generano l'ideale omogeneo associato alla Grassmanniana.

Attraverso l'analisi di tali relazioni Plückeriane, forniremo una prova supplementare del fatto che la Grassmanniana è effettivamente una varietà proiettiva. Questo risultato rafforzerà la nostra comprensione delle Grassmanniane come spazi strutturati e ci offrirà un quadro più completo delle proprietà geometriche che le caratterizzano. Il secondo capitolo, quindi, ci fornirà gli strumenti concettuali necessari per esplorare le strutture delle Grassmanniane e per analizzare le loro proprietà fondamentali.

Nel terzo capitolo, focalizzeremo la nostra attenzione sulle applicazioni dei concetti precedentemente esaminati, fornendo esempi concreti. Inizieremo analizzando la prima Grassmanniana non triviale, $G(2,4)$, e attraverso calcoli dettagliati verificheremo che questa Grassmanniana può essere rappresentata come una quadrica in $\mathbb{P}^5$, utilizzando l'immersione di Plücker. Questa dimostrazione ci permetterà di apprezzare la struttura geometrica particolare di $G(2,4)$ e di comprendere meglio le sue proprietà intrinseche. Successivamente, esamineremo una descrizione alternativa della Grassmanniana dal punto di vista affine. Dimostreremo che è possibile coprire la Grassmanniana con un numero finito di aperti che sono isomorfi a spazi affini. Questo risultato costituirà una prova aggiuntiva del fatto che la Grassmanniana è effettivamente una sottovarietà proiettiva. Attraverso questa prospettiva affine, acquisiremo una visione più approfondita delle strutture locali della Grassmanniana e delle proprietà che la caratterizzano. Infine, discuteremo le sottovarietà delle Grassmanniane, illustrando i diversi modi in cui possono essere costruite, esplorando le varie possibilità per la formazione di sottovarietà all'interno della Grassmanniana.

Infine, nell'appendice conclusiva, esploreremo la biografia di Hermann Grassmann, colui che ha sviluppato i concetti trattati in questa tesi, e i suoi principali contributi matematici. Grassmann è stato un matematico tedesco del XIX secolo che ha svolto un ruolo fondamentale nel progresso dell'algebra lineare e dell'analisi vettoriale. Esamineremo i suoi lavori, rivoluzionari per la sua epoca e pionieristici sull'algebra esterna e sul concetto di spazi di dimensione superiore, che hanno gettato le basi per la teoria delle Grassmanniane e hanno avuto un impatto significativo sulla matematica moderna.

Attraverso questa tesi speriamo pertanto di fornire una panoramica completa e approfondita dell'algebra esterna e delle Grassmanniane, evidenziando le loro relazioni e applicazioni.

Capitolo 1

Algebra Esterna

In questo capitolo introduciamo le algebre di Grassmann su uno spazio vettoriale, con le operazioni definite su di esse, e ne studiamo le proprietà. Questi oggetti saranno infatti fondamentali per lo studio geometrico delle Grassmanniane come varietà. Le referenze per questo capitolo sono date principalmente da [1] e [3].

1.1 Algebre tensoriali su spazi vettoriali

Definizione 1.1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n, e sia V^* lo spazio duale associato. Le applicazioni multilineari

$$f : V^{*q} \times V^p \to \mathbb{R}$$

si chiamano *tensori* q volte covarianti e p volte controvarianti. Denotiamo il loro insieme, che è chiaramente uno spazio vettoriale di dimensione n^{p+q}, con $T^p_q(V)$.

Esempio 1.2.

$$T^0_0(V) = \mathbb{R}$$

$$T^1_0(V) = \{f \mid f : V \to \mathbb{R} \text{ lineare}\} = V^*$$

$$T^0_1(V) = \{f \mid f : V^* \to \mathbb{R} \text{ lineare}\} = (V^*)^* \simeq V$$

Esempio 1.3. Si può identificare $T^1_1 \simeq End_{\mathbb{R}}(V)$. Tale identità è data dall'isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} End(V) & \to & T^1_1(V) \\ \text{A} & \mapsto & f_A \end{array}$$

definito da $f_A(\phi, v) := \phi(A(v))$, per ogni $\phi \in V^*$, per ogni $v \in V$.

Definizione 1.4. Se $f \in T^p_q(V)$, $g \in T^{p'}_{q'}(V)$, allora il loro *prodotto tensoriale* è il tensore $f \otimes g \in T^{p+p'}_{q+q'}(V)$ definito da

$$f \otimes g(\phi_1, \dots, \phi_{q+q'}, v_1, \dots, v_{p+p'}) \stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=} f(\phi_1, \dots, \phi_q, v_1, \dots, v_p) g(\phi_{q+1}, \dots, \phi_{q+q'}, v_{p+1}, \dots, v_{p+p'})$$

per ogni $\phi_1, \dots, \phi_{q+q'} \in V^*$, $v_1, \dots, v_{p+p'} \in V$.

Si nota subito dalla definizione che tale prodotto è associativo, ma non commutativo, pertanto la somma diretta

$$T(V) := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{N}_0} T^p_q(V)$$

è dotata di una naturale struttura di $\mathbb{R}$-algebra associativa.

Definizione 1.5. Sia $f \in T^p_0$ un tensore p volte controvariante e sia Σ_p il gruppo simmetrico di ordine p. A ogni $\sigma \in \Sigma_p$ è associato il tensore f^σ definito da

$$f^\sigma(v_1, \dots, v_p) \stackrel{def}{=} f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)})$$

Si dice che $f \in T^p_0(V)$ è *tensore simmetrico* di ordine p se $f^\sigma = f$ per ogni $\sigma \in \Sigma_p$, che è *tensore antisimmetrico* o *forma esterna* di grado p se $f^\sigma = (-1)^\sigma f$.

Osservazione 1.6. *Entrambi gli insiemi*

$$S^p(V^*) = \{f \in T^p_0(V) \,|\, f \text{ simmetrico}\} \quad e \quad \Lambda^p(V^*) = \{f \in T^p_0(V) \,|\, f \text{ antisimmetrico}\}$$

sono evidentemente sottospazi di $T^p_0(V)$. *Tuttavia, i sottoinsiemi*

$$S(V^*) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}_0} S^p(V^*) \quad e \quad \Lambda(V^*) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}_0} \Lambda^p(V^*)$$

non sono chiusi rispetto al prodotto tensoriale, perciò non sono sottoalgebre chiuse di $T(V)$.

Definizione 1.7. Definiamo la proiezione naturale

$$\begin{array}{ccc} T^p_0(V) & \to & S^p(V^*) \\ f & \mapsto & f_{sym} \end{array} \quad \text{con} \quad f_{sym} \stackrel{def}{=} \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \Sigma_p} f^\sigma$$

Vale che $f = f_{sym} \iff f \in S^p(V^*)$ e che $(f_{sym})_{sym} = f_{sym}$, il quale si dice *simmetrizzato* o *parte simmetrica* di f.
Analogamente esiste una mappa naturale

$$\begin{array}{ccc} T^p_0(V) & \to & \Lambda^p(V^*) \\ f & \mapsto & f_{alt} \end{array} \quad \text{con} \quad f_{alt} \stackrel{def}{=} \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \Sigma_p} (-1)^\sigma f^\sigma$$

dove $f = f_{alt} \iff f \in \Lambda^p(V^*)$ e $(f_{alt})_{alt} = f_{alt}$, che si definisce *antisimmetrizzato* o *parte antisimmetrica* di f.

Osservazione 1.8. *Valgono le seguenti identità*

$$(f_{alt})_{sym} = (f_{sym})_{alt} = 0, \quad \forall f \in T_0^p(V)$$

Forniamo ora una struttura di algebra associativa reale $S^p(V^*)$ e $\Lambda^P(V^*)$, iniziando da $S^p(V^*)$.

Definizione 1.9. Dati $f \in S^p(V^*)$ e $g \in S^q(V^*)$, il loro *prodotto simmetrico* $\odot$ si definisce come

$$f \odot g \overset{def}{=} \frac{(p+q)!}{p!q!}(f \otimes g)_{sym} = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} (f \otimes g)^\sigma$$

Si verifica facilmente che tale prodotto $\odot$ è associativo e commutativo. L'algebra $(S^p(V^*), \odot)$ così ottenuta si definisce *algebra simmetrica* su V

Osservazione 1.10. *Dalla definizione di prodotto simmetrico notiamo che*

$$(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_p)_{sym} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(p)}, \qquad \text{per } \phi_1, \ldots, \phi_p \in V^*.$$

Si può inoltre dimostrare che

$$\phi_1 \odot \cdots \odot \phi_p = \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(p)} = p!(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_p)_{sym}.$$

Definizione 1.11. Dati $\omega \in \Lambda^p(V^*)$ e $\rho \in \Lambda^q(V^*)$, possiamo definire su $\Lambda^{p+q}(V^*)$ il *prodotto esterno* $\wedge$ tramite

$$\omega \wedge \rho \overset{def}{=} \frac{(p+q)!}{p!q!}(\omega \otimes \rho)_{alt} = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} (-1)^\sigma (\omega \otimes \rho)^\sigma$$

L'algebra $(\Lambda^p(V^*), \wedge)$ di dice *algebra esterna* o *algebra di Grassmann* su V.

1.2 Prodotto esterno

Verifichiamo ora l'associatività e l'anticommutatività del prodotto esterno, e conseguentemente dell'algebra di Grassmann. Per provare l'associatività dimostriamo il seguente.

Lemma 1.12. *Siano $\omega \in T_0^p(V)$, $\rho \in T_0^q(V)$, allora*

$$(\omega_{alt} \otimes \rho)_{alt} = (\omega \otimes \rho_{alt})_{alt} = (\omega \otimes \rho)_{alt}$$

Dimostrazione. Dalla definizione abbiamo che

$$(\omega_{alt} \otimes \rho)_{alt} = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} (-1)^\sigma (\omega_{alt} \otimes \rho)^\sigma =$$

$$= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} (-1)^\sigma \left(\frac{1}{p!} \sum_{\tau \in \Sigma_p} (-1)^\tau \omega^\tau \otimes \rho \right)^\sigma =$$

$$= \frac{1}{(p+q)!p!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} (-1)^\sigma \sum_{\tau \in \Sigma_p} (-1)^\tau (\omega^\tau \otimes \rho)^\sigma$$

Consideriamo ora l'estensione naturale $\widehat{\tau} \in \Sigma_{p+q}$ di $\tau \in \Sigma_p$:

$$\widehat{\tau}(i) = \begin{cases} \tau(i), & i = 1, \dots, p \\ i, & i = p+1, \dots, p+q \end{cases}$$

Notando che $\widehat{\tau}$ ha la stessa parità di τ, si ha che

$$(\omega_{alt} \otimes \rho)_{alt} = \frac{1}{(p+q)!p!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} \sum_{\tau \in \Sigma_p} (-1)^\sigma (-1)^{\widehat{\tau}} (\omega \otimes \rho)^{\sigma \circ \widehat{\tau}} =$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in \Sigma_p} \left[\frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} (-1)^{\sigma \circ \widehat{\tau}} (\omega \otimes \rho)^{\sigma \circ \widehat{\tau}} \right] =$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in \Sigma_p} (\omega \otimes \rho)_{alt} = (\omega \otimes \rho)_{alt}$$

Dove nell'ultimo passaggio si sfrutta il fatto che tutti i $p!$ termini della sommatoria sono uguali a $(\omega \otimes \rho)_{alt}$. La dimostrazione dell'identità rimanente è del tutto analoga. □

Osservazione 1.13. *Per dimostrare l'associatività dell'algebra esterna bisognerebbe dimostrare che, dati $\omega \in \Lambda^p(V^*), \rho \in \Lambda^q(V^*), \xi \in \Lambda^r(V^*)$, si ha*

$$(\omega \wedge \rho) \wedge \xi = \omega \wedge (\rho \wedge \xi)$$

A meno di un coefficiente questo equivale a dire che

$$((\omega \otimes \rho)_{alt} \otimes \xi)_{alt} = (\omega \otimes (\rho \otimes \xi)_{alt})_{alt},$$

che è vero per il Lemma appena dimostrato. Rimane dunque da verificare l'uguaglianza tra i coefficienti, ma questo è facile: infatti si ha

$$\frac{\cancel{(p+q)!}(p+q+r)!}{p!q!r!\cancel{(p+q)!}} = \frac{\cancel{(q+r)!}(p+q+r)!}{p!q!r!\cancel{(q+r)!}}.$$

Dimostriamo ora l'anticommutatività dell'algebra di Grassmann.

Lemma 1.14. *Per ogni* $\omega \in T_0^p(V^*)$, $\rho \in T_0^q(V^*)$, *vale*

$$(\omega \otimes \rho)_{alt} = (-1)^{pq}(\rho \otimes \omega)_{alt}$$

Dimostrazione. Dalla definizione di forma esterna, si ha che

$$(\omega \otimes \rho)_{alt}(v_1, \dots, v_{p+q}) =$$
$$= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} (-1)^\sigma \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \rho(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) =$$

$$= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} (-1)^\sigma \rho(v_{\sigma\circ\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\circ\tau(q)}) \omega(v_{\sigma\circ\tau(q+1)}, \dots, v_{\sigma\circ\tau(q+p)}) \tag{1.15}$$

dove τ è la permutazione che permette di invertire ρ e ω, per cui $(-1)^\tau = (-1)^{pq}$. Notiamo che anche la permutazione $\sigma\circ\tau$, al variare di σ, descrive tutto Σ_{p+q}. Pertanto, dal momento che $((-1)^\tau)^2 = 1$ si può riscrivere la 1.15 come

$$(\omega \otimes \rho)_{alt}(v_1, \dots, v_{p+q}) =$$
$$= \frac{(-1)^{pq}}{(p+q)!} \sum_{\sigma\circ\tau \in \Sigma_{p+q}} (-1)^\sigma (-1)^\tau \rho(v_{\sigma\circ\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\circ\tau(q)}) \omega(v_{\sigma\circ\tau(q+1)}, \dots, v_{\sigma\circ\tau(q+p)}) =$$
$$= (-1)^{pq}(\rho \otimes \omega)_{alt}(v_1, \dots, v_{p+q})$$

□

Definizione 1.16. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e siano $\phi_1, \dots, \phi_p \in V^*$, allora $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p \in \Lambda^p(V^*)$ si dice *monomio esterno* ed è una p-forma esterna su V, cioè un'applicazione

$$\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p : \underbrace{V \times \dots \times V}_{p \text{ fattori}} \to \mathbb{R}$$

lineare in ciascuno dei suoi argomenti e antisimmetrica.

Proposizione 1.17. (Teorema di Grassmann). *Siano* $v_1, \dots, v_p \in V$, *e siano* $\phi_1, \dots, \phi_p \in V^*$. *Allora*

$$\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p(v_1, \dots, v_p) = det\|\phi_i(v_j)\|_{i,j=1,\dots,p} \tag{1.18}$$

Dimostrazione. Essendo entrambi i membri della formula 1.18 applicazioni multilineari alternanti sia nelle variabili ϕ_i che nelle v_j, si può limitare la dimostrazione della 1.18 fissando una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V, e la rispettiva duale $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$ (che è definita naturalmente da $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$), e supponendo che i vettori che consideriamo vi appartengano. Si vuole quindi dimostrare che

$$\varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_p}(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = det\|\delta^{i_r}_{j_r}\|_{r=1,\dots,p} \tag{1.19}$$

per ogni possibile scelta delle sequenze $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq n$. Ovvero dimostriamo che il primo membro è uguale a 1 quando $i_1 = j_1, \ldots, i_p = j_p$, e nullo altrimenti. Il caso $p = n$ è banale, in quanto l'unica sequenza di indici da considerare è $(1, 2, \ldots, n)$, e la 1.19 si riduce a

$$\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n(e_1, \ldots, e_n) = 1 \tag{1.20}$$

Dimostriamo tale formula per induzione sulla dimensione n dello spazio: supponendo che 1.19 valga per sottospazi vettoriali di dimensione $n-1$, si dimostra per quelli di dimensione n. Siano $\omega = \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{n-1} \in \Lambda^{n-1}(V^*)$ e $F : W \to V$ l'inclusione del sottospazio $W = \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle$ nello spazio V, si ha che la funzione

$$\Lambda(F^*) : \Lambda^{n-1}(V^*) \to \Lambda^{n-1}(W^*)$$

che mappa ω in $F^*(\varepsilon^1) \wedge \cdots \wedge F^*(\varepsilon^{n-1})$ è semplicemente la restrizione a W delle forme esterne su V, cioè

$$\tilde{\alpha} = \Lambda(F^*)(\alpha) = \alpha|_W, \qquad \forall \alpha \in \Lambda(V^*).$$

Questo implica che $\{\tilde{\varepsilon}^1 = \Lambda(F^*)(\varepsilon^1), \ldots, \tilde{\varepsilon}^{n-1} = \Lambda(F^*)(\varepsilon^{n-1})\}$ è la base duale della base $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ di W, e $\tilde{\omega} = \tilde{\varepsilon}^1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\varepsilon}^{n-1}$ è la restrizione di ω a W. Pertanto abbiamo che

$$\begin{aligned}
\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n(e_1, \ldots, e_n) &= \omega \wedge \varepsilon^n(e_1, \ldots, e_n) = \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (-1)^\sigma \omega(e_{\sigma_1}, \ldots, e_{\sigma_{n-1}}) \varepsilon^n(e_{\sigma_n}) = \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_n \\ \sigma_n = n}} (-1)^\sigma \tilde{\omega}(e_{\sigma_1, \ldots, e_{\sigma_{n-1}}}) = \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} (-1)^\tau \tilde{\omega}(e_{\tau_1}, \ldots, e_{\tau_{n-1}}) = \\
&= \tilde{\omega}_{alt}(e_1, \ldots, e_{n-1}) = \tilde{\omega}(e_1, \ldots, e_{n-1}) = \\
&= \tilde{\varepsilon}^1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\varepsilon}^{n-1} = 1
\end{aligned}$$

per l'ipotesi induttiva. Abbiamo dunque dimostrato la 1.20, e di conseguenza anche la 1.18 nel caso in cui si abbia $p = n$, ovvero

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n(v_1, \ldots, v_n) = det\|\phi_i(v_j)\|_{i,j=1,\ldots,n} \tag{1.21}$$

per ogni $\phi_1, \ldots, \phi_n \in V^*, v_1, \ldots, v_n \in V$. Riduciamo ora quanto abbiamo appena dimostrato al caso particolare $p < n$: sia $W = \langle v_1, \ldots v_p \rangle$ un sottospazio di dimensione p e sia $f : W \to V$ l'inclusione, analoga a quella vista prima, con $\tilde{\alpha} = \Lambda(f^*(\alpha)) \in \Lambda(W^*)$ la restrizione a W di $\alpha \in \Lambda(V^*)$. Procedendo come prima, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p(v_1, \ldots, v_p) = f^*(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p)(v_1, \ldots, v_p) = \\
&f^*(\phi_1) \wedge \cdots \wedge f^*(\phi_p) = \tilde{\phi}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\phi}_p(v_1, \ldots, v_p)
\end{aligned}$$

Si vede facilmente che l'espressione ottenuta è un caso particolare di 1.21, con p al posto di n e $\tilde{\phi}_i$ al posto di ϕ_j, pertanto si conclude. $\square$

Proposizione 1.22. *I covettori $\phi_1, \dots, \phi_p \in V^*$ sono linearmente dipendenti se e solo se*

$$\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p = 0$$

Dimostrazione. Supponiamo che i covettori siano linearmente dipendenti, allora sicuramente uno di loro è combinazione lineare degli altri. Possiamo supporre che tale covettore sia ϕ_p: allora si ha che

$$\phi_p = \sum_{i=1}^{p-1} a_i \phi_i$$

implica

$$\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p = \sum_{i=1}^{p-1} a_i \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_{p-1} \wedge \phi_i = 0,$$

dal momento che ognuno dei termini della sommatoria ha un indice ripetuto, e quindi si annulla per l'alternanza del prodotto esterno.
Viceversa, supponiamo per assurdo che $\phi_1, \dots, \phi_p$ siano linearmente indipendenti. Possiamo quindi completarli a una base di V^*, $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, che sarà la duale di una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V. Applicando il Teorema di Grassmann (1.17), si ottiene

$$\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p(e_1, \dots, e_p) = det\|\delta_{ij}\|_{i,j=1,\dots,p} = 1,$$

per cui il prodotto $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p$ è non nullo.

□

Abbiamo ora tutti gli strumenti necessari per poter scrivere una forma esterna in *coordinate*: sia $\omega \in \Lambda^p(V^*)$ una forma esterna e sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V. Chiaramente, per l'antisimmetria e la linearità delle forme esterne, per determinare ω è sufficiente conoscere le quantità

$$\omega_{i_1,\dots,i_p} \overset{def}{=} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$$

per ogni sequenza strettamente crescente di indici $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$. Pertanto la dimensione dello spazio $\Lambda^p(V^*)$ è al massimo uguale al numero di tali quantità, ovvero

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Vediamo subito che in realtà la dimensione di $\Lambda^p(V^*)$ coincide con questo numero.

Proposizione 1.23. *Sia $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V, e $B^* = \{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$ la sua duale; le forme*

$$\{\varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_p} | 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n\} \tag{1.24}$$

costituiscono una base per $\Lambda^p(V^*)$, che ha pertanto dimensione $\binom{n}{p}$.
In questa base le espressioni

$$\omega_{i_1,\dots,i_p} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$$

costituiscono le componenti in coordinate della generica forma $\omega \in \Lambda^p(V^*)$, *ovvero*

$$\omega = \sum_{i_1<\dots<i_p} \omega_{i_1\dots i_p}\varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_p}. \tag{1.25}$$

Inoltre, se $v_1, \dots, v_p$ *hanno coordinate* $v_j = (v_j^1, \dots, v_j^n)$ *nella base scelta* B*, allora, per ogni scelta di indici* $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n$*, si ha*

$$\omega(v_1, \dots, v_p) = \sum_{i_1<\dots<i_p} \omega_{i_1\dots i_p} V^{i_1\dots i_p}, \qquad con \quad V^{i_1\dots i_p} := det\|v_r^{i_s}\|_{r,s=1,\dots,p} \tag{1.26}$$

Dimostrazione. Applicando il teorema di Grassmann si ottiene che per ogni $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1<\dots<i_p} \omega_{i_1\dots i_p} \cdot \varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_p}(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \\
&\sum_{i_1<\dots<i_p} \omega_{i_1\dots i_p} \cdot det\|\delta_{j_r}^{i_s}\|_{r,s=1,\dots,p} = \omega_{j_1\dots j_p} = \\
&\omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \omega
\end{aligned}$$

perché l'unico determinante non nullo nella sommatoria è quello con gli indici $i_1 = j_1, \dots, i_p = j_p$. Pertanto, la 1.25 è dimostrata, e, dal momento che tale espressione di ω come combinazione lineare degli elementi del tipo

$$\{\varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_p} | 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n\}$$

è unica, tali forme costituiscono effettivamente una base per $\Lambda^p(V^*)$. Infine, applicando il teorema di Grassmann a 1.25, otteniamo l'ultimo risultato della proposizione □

Osservazione 1.27. *Da queste ultime proposizioni si deduce facilmente che, per* $p > n$*, si ha che* $dim\Lambda^p(V^*) = 0$*, cioè che tutte le forme esterne di grado maggiore della dimensione di* V *sono nulle. Infatti abbiamo visto in precedenza che una forma esterna si annulla se i suoi argomenti sono linearmente dipendenti, o, ancora più evidentemente, che, per alternanza delle forme esterne, esse si annullano ogni volta che un elemento ricompare più volte. Infatti, se un argomento della forma esterna* ω*, supponiamo l'ultimo, dipende dai precedenti:*

$$v_p = \sum_{k=1}^{p-1} b^k v_k$$

allora, per la multilinearità delle forme esterne, si ha che

$$\omega(v_1, \dots, v_p) = \sum_{k=1}^{p-1} b^k \omega(v_1, \dots, v_{p-1}, v_k) = 0,$$

perché in ogni termine della sommatoria vi sono due argomenti uguali.
Nel caso in cui $p = n$ *vale inoltre anche l'implicazione inversa.*

Proposizione 1.28. *Sia $\omega \in \Lambda^n(V^*)\setminus\{0\}$, con $n = dimV$, e siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Allora $\omega(v_1, \dots, v_n) = 0$ se e solo se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. Il "se" è già stato dimostrato in precedenza, basta quindi dimostrare il "solo se". Dimostriamolo per assurdo: sia ω una n-forma esterna su V^n, non nulla, e siano $v_1, \dots, v_n \in V$ vettori linearmente indipendenti tali che $\omega(v_1, \dots, v_n) = 0$. Essendo linearmente indipendenti, essi formano una base di V, con corrispettiva base duale $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ in V^*. Pertanto, dal momento che $\dim \Lambda^n(V^*) = 1$, ed essendo $v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^* \neq 0$ in quanto

$$v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*(v_1, \dots, v_n) = 1,$$

tale n-forma genera tutto $\Lambda^n(V^*)$, quindi si ha che

$$\omega = \lambda \cdot v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*,$$

per qualche costante $\lambda \neq 0$, da cui segue

$$0 = \omega(v_1, \dots, v_n) = \lambda \cdot v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*(v_1, \dots, v_n) = \lambda \neq 0,$$

che è assurdo.

□

1.3 Prodotto interno

Definizione 1.29. Sia $v \in V$ e una forma esterna $\omega \in \Lambda^p(V^*)$. Si dice *prodotto interno* (o *contrazione*) di v con ω la $(p-1)$-forma $v \lrcorner\, \omega \in \Lambda^{p-1}(V^*)$ definita da

$$v \lrcorner\, \omega(v_1, \dots, v_{p-1}) \overset{def}{=} \omega(v, v_1, \dots, v_{p-1}),$$

per ogni $v_1, \dots, v_{p-1} \in V$.

Osservazione 1.30. *La contrazione di v con ω si ottiene semplicemente fissando il primo elemento di ω con v. Si denota l'applicazione che associa ω a $v \lrcorner\, \omega$ con*

$$i_v : \Lambda^p(V^*) \to \Lambda^{p-1}(V^*).$$

Tale applicazione è lineare, e dipende linearmente da v. Vale inoltre che

$$i_v \circ i_w = -i_w \circ i_v, \qquad \forall v, w \in V$$

infatti,

$$v \lrcorner\, (w \lrcorner\, \omega) = w \lrcorner\, \omega(v, \dots) = \omega(w, v, \dots) = -\omega(v, w, \dots) = -w \lrcorner\, (v \lrcorner\, \omega),$$

per ogni $\omega \in \Lambda(V^*)$.

Vediamo ora in che modo il prodotto interno può essere collegato con il prodotto esterno, partendo prima da un caso particolare, ma arrivando poi a casi più generali.

Lemma 1.31. *Siano $v \in V, \phi_1, \dots, \phi_p \in V^*$, allora*

$$v \lrcorner (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p) = \sum_{r=1}^{p} (-1)^{r+1} \phi_r(v) \phi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\phi_r} \wedge \cdots \wedge \phi_p, \tag{1.32}$$

dove l'argomento col cappello non compare.

Dimostrazione. Tale dimostrazione segue direttamente dal teorema di Grassmann. Infatti dalla 1.17 si ha che

$$\begin{aligned}
& v \lrcorner (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p)(w_1, \dots, w_{p-1}) = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p(v, w_1, \dots, w_{p-1}) = \\
& = \begin{vmatrix} \phi_1(v) & \phi_1(w_1) & \dots & \phi_1(w_{p-1}) \\ \phi_2(v) & \phi_2(w_1) & \dots & \phi_2(w_{p-1}) \\ \vdots & & & \\ \phi_p(v) & \phi_p(w_1) & \dots & \phi_p(w_{p-1}) \end{vmatrix} = \\
& \sum_{r=1}^{p} (-1)^{r+1} \phi_r(v) det \|\phi_h(w_j)\|_{h=1,\dots,p, h \neq r}^{j=1,\dots,p-1} = \\
& \sum_{r=1}^{p} (-1)^{r+1} \phi_r(v) \phi_r(v) \phi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\phi_r} \wedge \cdots \wedge \phi_p(w_1, \dots, w_{p-1}),
\end{aligned}$$

per ogni $w_1, \dots, w_{p-1} \in V$, cioè quello che si voleva dimostrare.

□

Dimostriamo ora un teorema più generale sull'argomento:

Teorema 1.33. *Siano $v \in V, \omega \in \Lambda^p(V^*), \rho \in \Lambda^q(V^*)$. Allora vale*

$$v \lrcorner (\omega \wedge \rho) = (v \lrcorner \omega) \wedge \rho + (-1)^p \omega \wedge (v \lrcorner \rho) \tag{1.34}$$

Dimostrazione. Si nota facilmente che entrambi i membri di 1.34 sono funzioni lineari nelle variabili ω e ρ. Inoltre si è già visto in precedenza che ogni forma esterna è combinazione lineare di monomi esterni, perciò basta dimostrare l'asserto nel caso in cui ω e ρ siano monomi, ossia

$$\omega = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p, \quad \rho = \psi_1, \wedge \cdots \wedge \psi_q,$$

con $\phi_1, \dots, \phi_p, \psi_1, \dots, \psi_q \in V^*$. Sfruttiamo il Lemma precedente:

$$
\begin{aligned}
& v \lrcorner (\omega \wedge \rho) = v \lrcorner (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p \wedge \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_q) = \\
& \sum_{r=1}^{p} (-1)^{r+1} \phi_r(v) \phi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\phi_r} \wedge \cdots \phi_p \wedge \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_q + \\
& + \sum_{s=1}^{q} (-1)^{p+s+} \psi_s(v) \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p \wedge \psi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\psi_s} \wedge \cdots \wedge \psi_q = \\
& \left(\sum_{r=1}^{p} (-1)^{r+1} \phi_r(v) \phi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\phi_r} \wedge \cdots \phi_p \right) \wedge \rho + \\
& + (-1)^p \omega \wedge \left(\sum_{s=1}^{q} (-1)^{p+s+} \psi_s(v) \psi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\psi_s} \wedge \cdots \wedge \psi_q \right) = \\
& = (v \lrcorner \omega) \wedge \rho + (-1)^p \omega \wedge (v \lrcorner \rho),
\end{aligned}
$$

cioè quello che volevamo.

□

Sfruttiamo quello che abbiamo appena dimostrato per ricavare un'ulteriore proprietà dei monomi esterni.

Proposizione 1.35. *Siano $\phi_1, \dots, \phi_p \in V^*$ e $\psi_1, \dots, \psi_p \in V^*$ due insiemi di covettori linearmente indipendenti tra di loro.*
Allora tali insiemi generano lo stesso sottospazio di V^* se e solo se le corrispondenti forme esterne $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p$, $\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_p$ sono proporzionali.
In particolare vale che

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_p \tag{1.36}$$

se e solo se

$$\psi_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} \phi_i, \qquad j = 1, \dots, p \tag{1.37}$$

con $\det \|a_{ij}\|_{i,j=1,\dots,p} = 1$

Dimostrazione. Iniziamo dal dimostrare il primo asserto. Supponiamo che $\phi_1, \dots, \phi_p$ e $\psi_1, \dots, \psi_p$ generino lo stesso sottospazio in V^*, cioè che $\langle \psi_1, \dots, \psi_p \rangle = \langle \phi_1, \dots, \phi_p \rangle$. Allora ogni ψ_j, per $j = 1, \dots, p$, si può scrivere come combinazione lineare di $\phi_1, \dots, \phi_p$, ossia

$$\psi_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} \phi_j, \qquad j = 1, \dots, p$$

Si può scrivere quindi

$$\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_p = \left(\sum_{i_1=1}^{p} a_{i_1 1} \phi_{i_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_p=1}^{p} a_{i_p p} \phi_{i_p} \right) =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{p} \cdots \sum_{i_p=1}^{p} a_{i_1 1} \cdots a_{i_p p} \cdot \phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p} \tag{1.38}$$

per multilinearità di $\wedge$. Ricordando che $\det A = \sum_{\sigma \in S_p} sgn(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(p)p}$ otteniamo che 1.38 è uguale a

$$\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(p)p} \cdot \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p = \det A \cdot \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p.$$

Infatti per l'alternanza del prodotto esterno sono non nulle solo le somme con $i_1 \dots i_p$ permutazioni di $1 \dots p$.
Viceversa, supponiamo che esista un $\lambda \neq 0$ tale che

$$\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_p = \lambda \cdot \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p \neq 0,$$

dove l'ultima uguaglianza è vera perché i covettori sono stati scelti linearmente indipendenti. Completiamo i covettori $\phi_1, \dots, \phi_p$ a una base di V^*, ossia $\phi_1, \dots, \phi_p, \phi_{p+1}, \dots, \phi_n$, e consideriamo la sua base duale $v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n$ in V. Allora abbiamo che

$$\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_p(v_{p+1}, w_2, \dots, w_p) = \lambda \cdot \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p(v_{p+1}, w_2, \dots, w_p) = 0,$$

per ogni $w_2, \dots, w_p \in V$.
Analogamente, prendiamo la base $\psi_1, \dots, \psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_n$ di V^* e la sua duale in V, $\bar{v_1}, \dots, \bar{v_n}$. Si ha che, per il teorema di Grassmann,

$$\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_p(v_{p+1}, \bar{v_2}, \dots, \bar{v_p}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \psi_1(v_{p+1}) & \psi_1(\bar{v_2}) & \dots & \psi_1(\bar{v_p}) \\ \psi_2(v_{p+1}) & \psi_2(\bar{v_2}) & \dots & \psi_2(\bar{v_p}) \\ \vdots & & & \\ \psi_p(v_{p+1}) & \psi_p(\bar{v_2}) & \dots & \psi_p(\bar{v_p}) \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{c|ccc} a_{p+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_{p+1,2} & & & \\ \vdots & & \mathbb{1}_{p-1} & \\ a_{p+1,p} & & & \end{array} \right| = a_{p+1,1}$$

E allo stesso modo si ha che

$$\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_p(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1}, v_{p+r}, \bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_p) = a_{p+r,i} = 0,$$

per ogni $r = 1, \dots, n-p$, e $i = 1, \dots, p$.
Pertanto si ha che $\langle \psi_1, \dots, \psi_p \rangle \subseteq \langle \phi_1, \dots, \phi_p \rangle$, ma, dal momento che essi hanno la stessa dimensione, coincidono.
Dimostriamo ora il secondo asserto. Sia $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_p$, abbiamo visto sopra che $\psi_j \in \langle \phi_1, \dots, \phi_p \rangle$, per ogni $j = 1, \dots, p$, cioè che

$$\psi_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} \phi_j.$$

Inoltre si ha che
$$\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_p = (\det A)\, \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p;$$
sempre per quanto visto sopra, quindi si deve avere che $\det A = 1$.
Viceversa,
$$\psi_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}\phi_j,\ \det A = 1 \implies \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_p.$$
□

1.4 Algebra esterna su V^*

Vogliamo costruire una dualità tra $\Lambda^d(V)$ e $\Lambda^{n-d}(V^*)$, che ci risulterà utile nel capitolo successivo per trovare l'ideale omogeneo associato a una Grassmanniana.

Proposizione 1.39. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, e sia V^* il suo spazio vettoriale duale. Allora, per ogni $0 < d < n$, si ha $\Lambda^d(V) \cong \Lambda^{n-d}(V^*)$.*

Dimostrazione. Consideriamo la forma bilineare non degenere
$$\begin{array}{rcl} \Lambda^d(V) \times \Lambda^{n-d}(V) & \to & \Lambda^n(V) \\ (\omega, \rho) & \mapsto & \omega \wedge \rho. \end{array}$$
Dal momento che V è uno spazio vettoriale n-dimensionale, si può trovare un isomorfismo $\eta : \Lambda^n(V) \to k$, e pertanto definire una mappa
$$\begin{array}{rcl} \Psi : \Lambda^d(V) & \to & \left(\Lambda^{n-d}(V)\right)^* \\ \omega & \mapsto & \omega^*, \end{array} \tag{1.40}$$
dove $\omega^* : \Lambda^{n-d}(V) \to k$ è definita da $\rho \mapsto \eta(\omega \wedge \rho)$. Si verifica facilmente che Ψ è un isomorfismo. Inoltre, identificando $\left(\Lambda^d(V)\right)^* = \Lambda^d(V^*)$, otteniamo l'isomorfismo cercato.
□

Esempio 1.41. Si nota facilmente che $\Lambda^{n-1}(V) \simeq V^*$. Per vederlo basta considerare l'isomorfismo che associa a $e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_i \wedge \cdots \wedge e_n$, dove l'elemento col cappello non compare, alla forma lineare e_i^* nella corrispondente base duale.

Osservazione 1.42. *L'isomorfismo Ψ che abbiamo appena trovato è unico a meno di moltiplicazione per uno scalare, dal momento che dipende dalla scelta di η, che non è canonica. Pertanto procediamo nel seguente modo: sia $w_1 \wedge \cdots \wedge w_d \in \Lambda^d(V)$, e completiamo l'insieme di vettori $\{w_1, \ldots, w_d\}$ a una base di V, $\{w_1, \ldots, w_n\}$. Con questa scelta l'unico elemento di base per $\Lambda^n(V)$ sarà $w_1 \wedge \cdots \wedge w_n$ e l'isomorfismo η sarà pertanto unicamente determinato da tale scelta, ovvero $\eta(w_1 \wedge \cdots \wedge w_n) = \lambda \in k$. Diamo ora una formula per ω^*, l'immagine di ω sotto all'isomorfismo Ψ.*

Lemma 1.43. *Sia $\omega = w_1 \wedge \cdots \wedge w_d \in \Lambda^d(V)$, si estenda l'insieme $\{w_1, \ldots, w_d\}$ a una base di V, $\{w_1, \ldots, w_n\}$. Sia $\{w_1^*, \ldots, w_n^*\}$ la corrispondente base duale. Allora, usando l'isomorfismo 1.40, si ha che $\omega^* = \lambda \cdot w_{d+1}^* \wedge \cdots \wedge w_n^*$, dove λ è stato definito nell'osservazione precedente.*

Dimostrazione. Per $1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-d} \leq n$, abbiamo

$$\omega \wedge w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_{n-d}} = \begin{cases} 0 & \text{se qualche } i_j \in \{1, \ldots, d\} \\ \pm w_1 \wedge \cdots \wedge w_n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per l'alternanza e l'antisimmetria delle forme esterne. Notiamo inoltre che

$$[\lambda \cdot w_{d+1}^* \wedge \cdots \wedge w_n^*](w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_d}) = \begin{cases} 0 & \text{se qualche } i_j \in \{1, \ldots, d\} \\ \pm \lambda & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è precisamente $\eta(\omega \wedge w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_d})$. Inoltre, dalla costruzione di 1.40, si vede che $\eta(\omega \wedge w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_d}) = \omega^*(w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_d})$, e, pertanto segue che $\omega^* = \lambda \cdot w_{d+1}^* \wedge \cdots \wedge w_n^*$. $\square$

Capitolo 2

La Grassmanniana

In questo capitolo discuteremo della Grassmanniana e di come, tramite una particolare mappa detta immersione di Plücker, possiamo vederla come una varietà proiettiva. Le referenze per questo capitolo sono date principalmente da [3] e [2].

2.1 Prerequisiti

Sia k un campo algebricamente chiuso, consideriamo l'anello dei polinomi in n variabili $k[X] = k[x_1, \dots, x_n]$. Definiamo lo *spazio affine* n-dimensionale, $\mathbb{A}$ come k^n privato della sua struttura di spazio vettoriale, ovvero considerato semplicemente come un insieme. Possiamo vedere $f \in k[X]$ come un polinomio che ha valori in k, attraverso l'identificazione $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$. Gli oggetti che verranno presi in considerazione sono una generalizzazione della nozione di luogo degli zeri di una famiglia di polinomi. Più precisamente

Definizione 2.1. Dato un sottoinsieme $S \subset k[X]$, sia

$$V(S) \overset{def}{=} \{X \in \mathbb{A}^n \mid f(X) = 0, \quad \forall f \in S\}.$$

Un insieme $W \subset \mathbb{A}^n$ tale che $W = V(S)$, per un qualche $S \in k[X]$, si dice *varietà affine.*

Definizione 2.2. Sia $W \subset \mathbb{A}^n$ una varietà affine. L'*ideale della varietà* $I(W)$ è definito come

$$I(W) \overset{def}{=} \{f \in k[X] \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0, \qquad \forall (a_1, \dots, a_n) \in W\}.$$

Osservazione 2.3. *Data una varietà affine W, in generale esiste più di un ideale $\mathcal{I}$ tale che $W = V(\mathcal{I})$. Tuttavia l'ideale della varietà $I(W)$ è unico e massimale tra tutti gli ideali J di $k[X]$ tali che $W = V(J)$, ovvero comprende tutti i polinomi f che si annullano in W.*

Ricordiamo ora la definizione di spazio proiettivo che risulterà di fondamentale importanza per lo studio della Grassmanniana che faremo più avanti: lo *spazio proiettivo* $\mathbb{P}^n$ è il quoziente di $\mathbb{A}^{n+1} \setminus 0$ mediante l'azione di k^* su $\mathbb{A}^n$ per moltiplicazione. Questa definizione introduce un sistema di $n+1$ coordinate su $\mathbb{P}^n$ appena definito, che sono dette *coordinate omogenee.*

Un punto in $\mathbb{P}^n$ si denota con $[a_0 : \cdots : a_n]$, e si nota che in questo spazio $[a_0 : \cdots : a_n] = [\lambda a_0 : \cdots : \lambda a_n]$, per ogni $\lambda \in k \setminus \{0\}$. Si può definire una relazione di equivalenza $\sim$ per quest'identificazione, tale che se due elementi x, y di $\mathbb{A}^{n+1}$, meno la $(n+1)-$tupla nulla, giacciono sulla stessa retta passante per l'origine, allora $x \sim y$. In questo modo è possibile pensare $\mathbb{P}^n$ come lo spazio delle rette per l'origine in $\mathbb{A}^{n+1}$. Si può generalizzare tale costruzione a un qualsiasi spazio vettoriale V, e formare così lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$.

Osservazione 2.4. *Dal momento che, per $f \in k[X]$, non si ha necessariamente che $f(a_1, \ldots, a_n) = f(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$, in generale non si può dire che f è una funzione su $\mathbb{P}^n$. Per questo motivo, non vi è una nozione precisa di luogo degli zeri di un insieme generico di polinomi in $\mathbb{P}^n$, e pertanto occorre considerare un insieme più ridotto di polinomi, ossia i* polinomi omogenei.

Definizione 2.5. Un *polinomio omogeneo* di grado m è un polinomio $f \in k[X]$ tale che $f(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) = \lambda^m f(a_1, \ldots, a_n)$.

Osservazione 2.6. *I polinomi omogenei non definiscono una funzione $\mathbb{P}^n \to k$, che sia ben definita, a meno che non siano di grado* 0*. Tuttavia questi polinomi hanno un grande vantaggio, cioè che gli insiemi di tali polinomi hanno un luogo degli zeri ben definito.*

Definizione 2.7. Una *varietà proiettiva* è un sottoinsieme $W \subset \mathbb{P}^n$ tale che $W = V(S)$, dove S è un qualche insieme di polinomi omogenei $S \subset k[x_0, \ldots, x_n]$.

2.2 Grassmanniane e immersione di Plücker

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo K. Possiamo immaginare il proiettivo di tale spazio $\mathbb{P}(V)$ come l'insieme di tutte le rette di V che passano per l'origine, ovvero l'insieme di tutti i sottospazi vettoriali 1-dimensionali di V. Si può anche visualizzarlo nel modo seguente: ad ogni iperpiano in V, possiamo associare un'unica retta passante per l'origine in V^*, e, analogamente, si può associare a ogni retta per l'origine in V^* un unico iperpiano in V. Considerando tale corrispondenza, e il fatto che $V \cong V^*$, possiamo immaginare $\mathbb{P}^n$ anche come l'insieme dei sottospazi vettoriali $(n-1)$-dimensionali di V. Generalizzando ai sottospazi d-dimensionali di V, per $1 \leq d \leq n$, otteniamo la seguente.

Definizione 2.8. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K. Si dice *Grassmanniana* $G(d, V)$, con $n \geq 2$ lo spazio dei sottospazi vettoriali d-dimensionali di

V, ovvero

$$G(d,V) \overset{def}{=} \{W \leq V \ : \ dim_V W = d\}.$$

Nel caso in cui si identifica $V \simeq K^n$, scegliendo una base di V, indichiamo la Grassmanniana con $G(d,n)$.

Osservazione 2.9. *Si può identificare naturalmente un sottospazio vettoriale di V d-dimensionale con un (d-1)-piano nel corrispondente spazio proiettivo (che ha dimensione n-1). In questo caso possiamo pertanto immaginare la Grassmanniana come l'insieme di tali (d-1)-piani, e indicarla con* $\mathbb{G}(d-1,\mathbb{P}(V))$. *Nel caso in cui lo spazio vettoriale è quello canonico* $V = K^n$, *si indica con* $\mathbb{G}(d-1,n-1)$.

Lo scopo di questo lavoro è quello di mostrare che la Grassmanniana è una varietà proiettiva; cominciamo quindi immergendola in uno spazio proiettivo:

Definizione 2.10. Sia il sottospazio $W \in G(d,V)$, e una sua base $\{w_1,\ldots,w_d\}$; la mappa

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}\ell : G(d,V) & \rightarrow & \mathbb{P}(\Lambda^d(V)) \\ W & \mapsto & [w_1 \wedge \cdots \wedge w_d] \end{array}$$

è detta *immersione di Plücker.* Dato un sottospazio $U \subseteq V$ k-dimensionale, le coordinate omogenee di $\mathcal{P}\ell(U)$ in $\mathbb{P}(\Lambda^k(V))$ si dicono *coordinate Plückeriane* di U.

Osservazione 2.11. *Da 1.35 e 1.39 deduciamo che questa funzione è ben definita e non dipende dalla scelta della base di W perché se cambiamo base il risultato cambia a meno del prodotto del determinante della matrice di cambio base, che è non nullo, e perciò due basi diverse per W definiscono lo stesso elemento di* $\mathbb{P}(\Lambda^d(V))$.

Proposizione 2.12. *L'immersione di Plücker è iniettiva.*

Dimostrazione. Definiamo la mappa

$$\begin{array}{rcl} p : \mathbb{P}(\Lambda^d(V)) & \rightarrow & G(d,V) \\ [\omega] & \mapsto & \{v \in V \,|\, v \wedge \omega = 0 \in \Lambda^{d+1}(V)\}, \end{array}$$

e dimostriamo che quest'applicazione è l'inversa di $\mathcal{P}\ell$, ovvero che $p \circ \mathcal{P}\ell = id$. Consideriamo $W \in G(d,V)$ un sottoinsieme della Grassmanniana, e fissiamone una base $\{w_1,\ldots,w_d\}$ tale che $\mathcal{P}\ell(W) = [w_1 \wedge \cdots \wedge w_d]$. Completiamo $\{w_1,\ldots,w_d\}$ a una base di V, $\{w_1,\ldots,w_n\}$, in modo tale che, considerato un vettore $v \in p(\mathcal{P}\ell(W)) \subset V$, si possa scrivere nella forma $v = \sum_{i=1}^n a_i w_i$, con $a_i \in k$. Evidentemente vale che $w \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_d = 0$, per ogni $w \in W$, pertanto $W \subset p(\mathcal{P}\ell(W))$, e inoltre

$$v \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_d = 0 \iff \left(\sum_{i=1}^n a_i w_i\right) \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_d = 0.$$

Per le proprietà del prodotto esterno, si nota facilmente che tutti gli a_i, con $i > d$, devono essere nulli, pertanto il vettore v può essere scritto come $v = a_1 w_1 + \cdots + a_d w_d$. Questo implica che $v \in W$, e quindi $p(\mathcal{P}\ell(W)) \subset W$, e questo completa la doppia inclusione e quindi la dimostrazione. $\square$

Osservazione 2.13. *Possiamo notare che tale mappa permette di vedere la Grassmanniana come un sottoinsieme dello spazio proiettivo* $\mathbb{P}(\Lambda^d(V))$.

È possibile identificare la Grassmanniana con un sottoinsieme di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}^N$ nel modo seguente: abbiamo visto che, fissata una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V e considerato l'insieme

$$\{v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_d} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n\},$$

questo forma una base per $\Lambda^d(V)$, che è pertanto uno spazio vettoriale di dimensione $\binom{n}{d}$. Pertanto $\mathbb{P}(\Lambda^d(V)) \cong \mathbb{P}^N$, con $N = \binom{n}{d} - 1$ e quindi possiamo immergere la Grassmanniana in $\mathbb{P}^N$.

Sia allora

$$I_{d,n} = \{\bar{i} = (i_1, \dots, i_d) \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n\}.$$

Indicizziamo le coordinate di $\mathbb{P}^N$ tramite $I_{d,n}$, ovvero il vettore base di $\mathbb{P}^N$ indicizzato da $\bar{i} = (i_1, \dots, i_d)$ sarà $v_{\bar{i}} = v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_d}$. Dato un sottospazio $W \in G(d,n)$, troviamo dunque esplicitamente $\mathcal{P}\ell_{\bar{i}}(W)$, ovvero l'$\bar{i}-$esima coordinata dell'immagine della Grassmanniana tramite l'immersione Plückeriana. Scegliamo una base $\{w_1, \dots, w_d\}$ di W, scriviamo ciascuno dei w_j come combinazione lineare dei vettori di base di V, ovvero

$$w_j = a_{1j}v_1 + \dots + a_{nj}v_n,$$

e definiamo la matrice $M_W \in \mathcal{M}_{n \times d}$ come $M_W := (a_{ij})$. Osserviamo che la j-esima colonna di M_W sarà formata dalle coordinate di w_j. Pertanto

$$\mathcal{P}\ell(W) = [w_1 \wedge \dots \wedge w_d],$$

e si calcola

$$\begin{aligned} &w_1 \wedge \dots \wedge w_d = \\ &\quad = (a_{11}v_1 + \dots + a_{n1}v_n) \wedge \dots \wedge (a_{1d}v_1 + \dots + a_{nd}v_n) = \\ &\quad = \sum_{\bar{i} \in I_{d,n}} \sum_{\sigma \in S_d} sgn(\sigma) a_{i_1\sigma(1)} \cdots a_{i_d\sigma(d)} v_{\bar{i}}. \end{aligned}$$

Si nota che la $\bar{i}$-esima coordinata di $\mathcal{P}\ell(W)$ è $\mathcal{P}\ell_{\bar{i}} = \det(M_{\bar{i}})$, dove $M_{\bar{i}}$ è la sottomatrice $d \times d$ formata dalle righe $i_1, \dots, i_d$ di M_W.
Abbiamo pertanto dimostrato la seguente proposizione.

Proposizione 2.14. *L'$\bar{i}$-esima coordinata di $\mathcal{P}\ell(W) \in \mathbb{P}^N$ è data dal corrispondente minore $d \times d$ della matrice M_W, ovvero* $\det(M_{\bar{i}})$.

2.3 Grassmanniane come varietà proiettive

Siamo giunti a dire che è possibile immergere la Grassmanniana in uno spazio proiettivo; ora vogliamo dimostrare che essa è in realtà una varietà proiettiva. Per fare ciò introduciamo alcuni risultati sulla decomposizione vettoriale.

Definizione 2.15. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, $v \in V$, e $\omega \in \Lambda^d(V)$. Si dice che v *divide* ω se esiste $\phi \in \Lambda^{d-1}(V)$ tale che $\omega = v \wedge \phi$.

Lemma 2.16. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, $v \in V$, e $\omega \in \Lambda^d(V)$. Allora v divide ω se e solo se $v \wedge \omega = 0$.*

Dimostrazione. Dalla definizione sappiamo che, se v divide ω, allora esiste $\phi \in \Lambda^{d-1}(V)$ tale che $\omega = v \wedge \phi$. Perciò

$$v \wedge \omega = v \wedge (v \wedge \phi) = 0$$

per l'alternanza del prodotto esterno.
Viceversa, sia $v \wedge \omega = 0$. Scegliamo una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V con $v_1 = v$, e scriviamo il vettore $v_{\bar{i}} = v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d}$, di base per $\Lambda^d(V)$, dove $\bar{i} = (i_1, \dots, i_d) \in I_{d,n}$. Pertanto possiamo scrivere $\omega = \sum_{\bar{i} \in I_{d,n}} a_{\bar{i}} v_{\bar{i}}$ con $a_{\bar{i}} \in k$. Per ipotesi,

$$v \wedge \omega = v \wedge \left(\sum_{\bar{i} \in I_{d,n}} a_{\bar{i}} v_{\bar{i}} \right) = \sum_{\bar{i} \in I_{d,n}} a_{\bar{i}} (v \wedge v_{\bar{i}}) = 0.$$

Dal momento che tutti i vettori della forma $v \wedge v_{\bar{i}}$, per tutti gli $\bar{i}$ aventi $i_1 > 1$, sono indipendenti, risulta che tutti gli $a_{\bar{i}}$ devono essere nulli per $i_1 > 1$. Questo dimostra che ω è una combinazione lineare di vettori di base della forma $v_{\bar{i}} = v \wedge v_{\bar{j}}$, con $\bar{j} = (i_2, \dots, i_d)$ ovvero i vettori in cui $i_1 = 1$ in $\bar{i}$, e questo ci permette di concludere, dal momento che possiamo scrivere ω nella forma

$$\omega = \sum_{\bar{j} \in I_{d-1,n}} a_{\bar{j}} (v \wedge v_{\bar{j}}) = v \wedge \left(\sum_{\bar{j} \in I_{d-1,n}} a_{\bar{j}} v_{\bar{j}} \right) = v \wedge \phi.$$

□

Osservazione 2.17. *L'insieme di tutti i vettori $v \in V$ che dividono $\omega \in \Lambda^d(V)$ forma un sottospazio di V, che denotiamo con D_ω.*

Definizione 2.18. Sia $\omega \in \Lambda^d(V)$ non nullo. Diciamo che ω è *tensore puro* o *totalmente decomponibile* se $\omega = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$, dove $\{v_1, \dots, v_d\} \subset V$ sono linearmente indipendenti.

Proposizione 2.19. *Un tensore $\omega \in \Lambda^d(V)$, è un tensore puro se e solo se* $\dim(D_\omega) = d$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia ω un tensore puro, decomponibile nella forma $\omega = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$, dimostriamo che $\dim(D_\omega) = d$. Lo spazio di tutti i vettori che dividono ω è dato da $\{v \in V \mid v \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = 0\}$. Per definizione gli elementi $v_1, \ldots, v_d$ sono d elementi di D_ω, linearmente indipendenti, mostriamo che formano una base per D_ω, ossia che ogni altro vettore in D_ω può essere scritto come combinazione lineare di tali v_i. Completiamo l'insieme dei v_i a una base di V, $\{v_1, \ldots, v_n\}$, in modo da poter scrivere $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$. Per avere

$$0 = v \wedge \omega = (\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_d,$$

tutti i termini con $i \leq d$ si annullano, dopo aver distribuito il prodotto, per l'alternanza del prodotto esterno. Per ottenere l'identità occorre quindi che $a_i = 0$ per $d < i \leq n$, ovvero $v = \sum_{i=1}^d a_i v_i$, e pertanto $\{v_1, \ldots, v_d\}$ formano una base per D_ω.
($\Leftarrow$) Supponiamo ora che $\dim(D_\omega) = d$, e scegliamone una base $\{v_1, \ldots, v_d\}$, che estendiamo a una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V. Scriviamo gli elementi di base di $\Lambda^d(V)$ come nella dimostrazione di 2.16, ovvero $\omega = \sum_{\bar{i}} a_{\bar{i}} v_{\bar{i}}$ con $a_{\bar{i}} \in k$. Per ipotesi $v_j \wedge \omega = 0$ per $1 \leq j \leq d$, quindi

$$0 = v_j \wedge \left(\sum_{\bar{i}} a_{\bar{i}} v_{\bar{i}} \right) = \sum_{\bar{i}} a_{\bar{i}} (v_j \wedge v_{\bar{i}}).$$

Per l'alternanza del prodotto esterno, $a_{\bar{i}} = 0$ dove j non appare tra gli indici di $\bar{i}$, e questo vale per ogni $1 \leq j \leq d$, ovvero tutti gli $a_{\bar{i}}$ per cui $\{i_1, \ldots, i_d\} \neq \{1, \ldots, d\}$. Concludiamo quindi che ω è un tensore puro, dal momento che $\omega = a v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$, per un qualche scalare $a \in k$. $\square$

Per $\omega \in \Lambda^d(V)$, definiamo la funzione

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\omega : V & \rightarrow & \Lambda^{d+1}(V) \\ v & \mapsto & \omega \wedge v \end{array} \tag{2.20}$$

e classifichiamo i tensori puri in termini di questa mappa.

Lemma 2.21. *Sia $0 \neq \omega \in \Lambda^d(V)$. Allora $\mathrm{rank}\varphi_\omega \geq n - d$, e in particolare*

$$\mathrm{rank}\varphi_\omega = n - d \iff \omega \textit{ è tensore puro}$$

Dimostrazione. Sia $r = \dim(\ker \varphi_\omega) = n - \mathrm{rank}\varphi_\omega$. Scegliamo una base $\{v_1, \ldots, v_r\}$ di φ_ω e completiamola a una base di V, $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Scriviamo $\omega = \sum_{\bar{i} \in I_{d,n}} a_{\bar{i}} v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d}$ con $a_{\bar{i}} \in k$, e $\bar{i} = \{i_1, \ldots, i_d\}$. Poiché per $j = 1, \ldots, r$ abbiamo che $v_j \wedge \omega = 0$, allora solo gli $a_{\bar{i}}$ dove $\{1, \ldots, r\} \subset \bar{i}$ possono essere non nulli. Questo implica che $r \leq d$, che è equivalente alla condizione $\mathrm{rank}\varphi_\omega \geq n - d$.
Per quanto riguarda la seconda parte, chiaramente se $r = d$, allora $\omega = \lambda \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$. Viceversa, se ω è tensore puro, ovvero se $\omega = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$, dal momento che $\omega \neq 0$, i v_j sono linearmente indipendenti, e appartengono a $\ker \varphi_\omega$. Dal fatto che $r \neq d$, abbiamo l'uguaglianza richiesta.

$\square$

Osservazione 2.22. *Possiamo costruire una mappa analoga nell'algebra esterna di* V^* *: definiamo la mappa* $\psi : \left(\Lambda^{n-d}(V)\right)^* \to Hom(V^*, \left(\Lambda^{n-d+1}(V)\right)^*)$*, che manda* ω^* *in* ψ_{ω^*}*, dove*

$$\begin{array}{rcl} \psi_{\omega^*} : V^* & \to & \Lambda^{n-d+1}(V^*) \\ v^* & \mapsto & v^* \wedge \omega^* \end{array} \tag{2.23}$$

Per questa mappa abbiamo il seguente risultato, che non verrà dimostrato in quanto del tutto analogo a 2.21.

Lemma 2.24. *Per ogni* $\omega \in \Lambda^d(V)$*, sia* ω^* *la sua immagine sotto l'isomorfismo 1.40. Allora* $\mathrm{rank}\psi_{\omega^*} \geq d$ *e in particolare*

$$\mathrm{rank}\psi_{\omega^*} = d \iff \omega \textit{ è tensore puro.}$$

Siamo quindi giunti a poter dimostrare che la Grassmanniana è una sottovarietà proiettiva attraverso la seguente identificazione.

Lemma 2.25. *Sia* $\omega \in \Lambda^d(V)$*.* $[\omega] \in \mathbb{P}(\Lambda^d(V))$ *sta nell'immagine della Grassmanniana sotto l'immersione di Plücker se e solo se* ω *è un tensore puro.*

Dimostrazione. Se ω è un tensore puro, cioè $\omega = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$, allora il sottospazio di V generato da $\{v_1, \ldots, v_d\}$ ha dimensione d, pertanto tale sottospazio è un qualche $U \subset G(d, V)$ e $\mathcal{P}\ell(U) = [\omega]$.
Viceversa, supponiamo che $[\omega] = \mathcal{P}\ell(U)$ per un qualche $U \subset G(d, V)$. Scegliamo una base per U, $\{u_1, \ldots, u_d\}$. Allora $[\omega] = [u_1 \wedge \cdots \wedge u_d]$, e quindi ω è totalmente decomponibile nella forma $\omega = \lambda u_1 \wedge \cdots \wedge u_d$ con $\lambda \in k$. □

Teorema 2.26. $\mathcal{P}\ell(G(d, n)) \subset \mathbb{P}(\Lambda^d(V))$ *è una varietà proiettiva.*

Dimostrazione. Si nota facilmente che la mappa

$$\begin{array}{rcl} \phi : \Lambda^d(V) & \to & Hom(V, \Lambda^{d+1}(V)) \\ \omega & \mapsto & \varphi_\omega \end{array} \tag{2.27}$$

è lineare. Per $\omega \in \Lambda^d(v)$, l'omomorfismo $\phi(\omega) \in Hom(V, \Lambda^{d+1}(V))$ può essere rappresentato con la sua matrice $\binom{n}{d+1} \times n$, le cui entrate sono funzioni di ω. La linearità di ϕ implica che $\phi(\lambda\omega) = \lambda\phi(\omega)$ e mostra che le funzioni sono omogenee di grado 1.
Da 2.25 e da 2.21 si ottiene che un particolare $[\omega']$ sta in $\mathcal{P}\ell(G(d, V))$ se e solo se tutti i suoi $(n - d + 1) \times (n - d + 1)$ minori si annullano. Questo segue soprattutto da 2.25, poiché se tutti i $n - d + 1$ minori si annullano, segue che $\mathrm{rank}\phi(\omega') \leq n - d$. Viceversa, se $\phi(\omega')$ ha rango $r \leq n - d$, allora, per la massimalità di r nel lemma, tutti i $n - d + 1$ minori devono annullarsi.
Da ciò si evince quindi che un punto $[\omega']$ appartiene a $\mathcal{P}\ell(G(d, V))$ se e solo se tutti i suoi minori $(n - d + 1)$ si annullano, ovvero, se ω' sta nel luogo degli zeri dei minori $(n - d + 1)$ della matrice di $\phi(\omega)$. □

Osservazione 2.28. *Abbiamo quindi trovato delle coordinate per esprimere la Grassmanniana in uno spazio proiettivo tramite l'immersione di Plücker. Tali coordinate sono date dall'annullarsi dei $(n-d+1)$-minori, che sono polinomi omogenei nelle coordinate della matrice, e quindi anche nelle coordinate omogenee di ω.*

Esempio 2.29. Per Grassmanniane dove $d = 1$, ovvero $G(1,n)$, un sottospazio $U = \langle a_1e_1 + \cdots + a_ne_n\rangle \in G(1,n)$ ha coordinate Plückeriane $\mathcal{P}\ell(U) = [a_1 : \cdots : a_n] \in \mathbb{P}^{n-1}$. Analogamente si verifica facilmente che anche in Grassmanniane del tipo $G(n-1,n)$ un sottospazio W ha coordinate Plückeriane $\mathcal{P}\ell(W) \in \mathbb{P}^{n-1}$.

Esempio 2.30. Sia $U = \langle e_1 + e_2, e_1 + e_3\rangle \in G(2,3)$. Abbiamo che

$$(e_1 + e_2) \wedge (e_1 + e_3) = e_1 \wedge e_3 - e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_3,$$

ovvero $\mathcal{P}\ell(U) = [-1 : 1 : 1] \in \mathbb{P}^2$.

2.4 Relazioni Plückeriane

I polinomi omogenei che abbiamo appena trovato costituiscono le coordinate della Grassmanniana, ma hanno un grosso difetto: non generano il suo ideale omogeneo. Ci proponiamo in questa sezione di trovare dei polinomi omogenei che generano tale ideale, e per farlo ci occorre introdurre le relazioni Plückeriane.

Definizione 2.31. Sia V uno spazio vettoriale e V^* il suo spazio duale. Definiamo il pairing

$$\begin{array}{rcl} \langle\cdot,\cdot\rangle : V^* \otimes V & \to & k \\ (w^*, v) & \mapsto & w^*(v) \end{array}$$

per ogni $v \in V$ e $w^* \in V^*$, e lo denotiamo con $\langle w^*, v\rangle$.

Osservazione 2.32. *Questo pairing è una forma bilineare non degenere: la linearità nel secondo termine deriva dalla linearità di w^*, infatti*

$$\langle w^*, av + bv'\rangle = w^*(av + bv') = aw^*(v) + bw^*(v').$$

La linearità nel primo termine è invece ancora più immediata. Anche il fatto che non sia degenere è semplice da verificare: se $\langle w^*, v\rangle = 0$, per ogni $v \in V$, allora w^* deve essere la mappa identicamente nulla, e se $\langle w^*, v\rangle = 0$ per ogni $w^* \in V^*$, allora, scegliendo una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ per V e scrivendo $v = \sum a_iv_i$, in particolare ogni elemento della base duale di V^* sarà valutato a 0 in v, ovvero $v_i^*(v) = a_i = 0$, e da questo segue che $v = 0$.

Definizione 2.33. Sia $a : V \to W$ un'applicazione lineare e siano $v \in V$ e $w^* \in W^*$. La mappa ${}^ta : W^* \to V^*$ definita da $\langle {}^ta(w^*), v\rangle = \langle w^*, a(v)\rangle$ è detta *trasposta* di a.

Osservazione 2.34. *Dal momento che le mappe φ_ω e ψ_ω definite rispettivamente in 2.20 e 1.40 sono lineari, possiamo definire le loro trasposte*

$$^t\varphi_\omega : \Lambda^{d+1}(V^*) \to V^* \quad e \quad ^t\psi_\omega : \Lambda^{n-d+1}(V) \to V.$$

Definizione 2.35. Per ogni $\alpha \in \Lambda^{d+1}(V^*)$, $\beta \in \Lambda^{n-d+1}(V)$, sia

$$\Xi_{\alpha,\beta}(\omega) \overset{def}{=} \langle ^t\varphi_\omega(\alpha), ^t\psi_{\omega^*}(\beta)\rangle.$$

Un'espressione della forma $\Xi_{\alpha,\beta}(\omega) = 0$ è detta *relazione di Plücker.*

Teorema 2.36. *ω è un tensore puro se e solo se $\Xi_{\alpha,\beta}(\omega) = 0$, per ogni $\alpha \in \Lambda^{d+1}(V^*)$ e per ogni $\beta \in \Lambda^{n-d+1}(V)$.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia ω un tensore puro, $\omega = w_1 \wedge \cdots \wedge w_d$. Definiamo il sottospazio $W := \langle w_1, \ldots, w_d\rangle$, scegliamo una base per $W^\perp$, $\{v_1^*, \ldots, v_{n-d}^*\}$. Possiamo dunque scrivere $\omega^* = v_1^* \wedge \cdots \wedge v_{n-d}^*$, per quanto visto in 1.43. Allora si ha che

$$\begin{aligned}
&\Xi_{\alpha,\beta}(\omega) = 0 \quad \forall \alpha \in \Lambda^{d+1}(V^*), \beta \in \Lambda^{n-d+1}(V) \\
&\iff \langle ^t\phi_\omega(\alpha), ^t\psi_{\omega^*}(\beta)\rangle = 0 \quad \forall \alpha, \beta \\
&\iff \langle \alpha, \phi_\omega^t\psi_{\omega^*}(\beta)\rangle = \langle \alpha, \omega \wedge ^t\psi_{\omega^*}(\beta)\rangle = 0 \quad \forall \alpha, \beta \\
&\iff \omega \wedge ^t\psi_{\omega^*}(\beta) = 0 \quad \forall \beta \text{ (il pairing è non degenere)} \\
&\iff im(^t\psi_{\omega^*}) \subset \ker \phi_\omega.
\end{aligned}$$

Mostriamo ora che effettivamente se $\langle v_i^*, ^t\psi_{\omega^*}(\beta)\rangle = 0$ per ogni β si ha che $im(^t\psi_{\omega^*}) \subset \ker \phi_\omega$, e pertanto che $\Xi_{\alpha,\beta}(\omega) = 0$. Fissato un $\beta \in \Lambda^{n-d+1}(V)$, supponiamo che $\langle ^t\psi_{\omega^*}(\beta), v_i^*\rangle = 0$ per $i = 1, \ldots, n-d$. Allora ogni $v^* \in W^\perp$ fa annullare $^t\psi_{\omega^*}(\beta)$ e pertanto possiamo dire che $^t\psi_{\omega^*}(\beta) \in (W^\perp)^\perp \simeq W$. Quindi $^t\psi_{\omega^*}(\beta)$ è scrivibile come combinazione lineare di elementi d W, ovvero $^t\psi_{\omega^*}(\beta) = \sum_{i=1}^d a_i w_i$; da ciò si deduce che $\omega \wedge ^t\psi_{\omega^*}(\beta) = 0$, ovvero che $^t\psi_{\omega^*}(\beta) \in \ker \phi_\omega$. Notiamo infine che la condizione $\langle v_i^*, ^t\psi_{\omega^*}(\beta)\rangle = \langle \psi_{\omega^*}(v_i^*), \beta\rangle = \langle \omega^* \wedge v_i^*, \beta\rangle = 0$ vale per ogni β, dal momento che $\omega^* = v_1^* \wedge \cdots \wedge v_{n-d}^*$.

($\Leftarrow$) Per assurdo, supponiamo che ω non sia un tensore puro. Allora sicuramente rank$\phi_\omega > n-d$ (da 2.21), ovvero $\ker \phi_\omega$ ha dimensione $< d$, mentre per 2.24 sappiamo che rank$\psi_{\omega^*} > d$. Abbiamo appena dimostrato che le relazioni di Plücker si annullano se e solo se

$$im(^t\psi_{\omega^*}) \subset \ker \phi_\omega,$$

ma per una questione di dimensioni, è impossibile che questo avvenga, e pertanto si ha che $\Xi_{\alpha,\beta}(\omega) \neq 0$ per qualche α e β. Abbiamo così raggiunto un assurdo, e si può concludere. □

Osservazione 2.37. *Da quanto è stato visto in 2.25, il teorema appena dimostrato indica che $[\omega]$ appartiene alla Grassmanniana se e solo se le sue coordinate Plückeriane $\Xi_{\alpha,\beta}(\omega)$*

si annullano per ogni $\alpha \in \Lambda^{d+1}(V^*)$ e per ogni $\beta \in \Lambda^{n-d+1}(V)$.
Per completare questa dimostrazione che la Grassmanniana è una varietà proiettiva, occorre dimostrare anche che le relazioni di Plücker sono dei polinomi omogenei. Dimostreremo in realtà un fatto più particolare, ovvero che tali relazioni sono forme quadratiche, cioè polinomi omogenei di grado 2. Questo è una conseguenza diretta della proposizione seguente.

Proposizione 2.38. *Siano $f : V \to W$ e $g : V \to W^*$ due applicazioni lineari, dove V e W sono spazi vettoriali di dimensione finita sul campo k. Allora il pairing $\langle f(v), g(v)\rangle : V \to k$ è una forma quadratica.*

Dimostrazione. Consideriamo il vettore $v \in V$. Scelta una base di V, $\{e_1, \dots, e_n\}$ possiamo scrivere $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$. Dal momento che sia f che g sono lineari, e che il pairing $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ è bilineare, si ha che

$$\langle f(v), g(v)\rangle = \langle f(\sum_{i=1}^n a_i e_i), g(\sum_{j=1}^n a_j e_j)\rangle = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \langle f(e_i), g(e_j)\rangle,$$

dove per come è costruito il pairing $\langle f(e_i), g(e_j)\rangle \in k$. Chiamando $b_{i,j} = \langle f(e_i), g(e_j)\rangle$, si ottiene che $\langle f(v), g(v)\rangle = \sum_{i,j=1}^n b_{i,j} a_i a_j$. Pertanto si può concludere che $\langle f(v), g(v)\rangle$ è una forma quadratica nelle coordinate di v.

□

Osservazione 2.39. *Vogliamo applicare quest'ultima proposizione a $\Xi_{\alpha,\beta}(\omega) = \langle {}^t\phi_\omega, {}^t\psi_{\omega^*}\rangle$, per cui dobbiamo dimostrare che ognuna delle entrate di $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ è lineare. Abbiamo già osservato in precedenza che sia ϕ_ω che ψ_{ω^*} sono lineari., basta quindi dire che l'applicazione che manda una funzione nella sua trasposta è lineare. Siano dunque $S, T : V \to W$ funzioni lineari, $a \in k$, $w^* \in W^*$ e $v \in V$: la trasposta ${}^t(aT + S) : W^* \to V^*$ è definita da*

$$\begin{aligned}
&\langle {}^t(aT+S)(w^*), v\rangle = \\
&= \langle w^*, (aT+S)(v)\rangle = a\langle w^*, T(v)\rangle + \langle w^*, S(v)\rangle = \\
&= a\langle {}^tT(w^*), v\rangle + \langle {}^tS(w^*), v\rangle = \langle a{}^tT(w^*) + {}^tS(w^*), v\rangle = \\
&\langle (a{}^tT + {}^tS)(w^*), v\rangle
\end{aligned}$$

e questo dimostra che è tale applicazione è lineare. Infine si nota che l'isomorfismo $\Lambda^d(V) \simeq \Lambda^{n-d}(V^*)$ e la valutazione dei vettori α e β sono chiaramente lineari, pertanto si conclude che entrambe le funzioni ${}^t\phi_\omega(\alpha)$ e ${}^t\psi_{\omega^*}(\beta)$ sono lineari in ω.
Questo completa la seconda dimostrazione che la Grassmanniana è una varietà proiettiva e che

$$\mathcal{P}\ell(G(d,V)) = Z(\{\Xi_{\alpha,\beta}(\omega) \,|\, \alpha \in \Lambda^{d+1}(V^*),\ \beta \in \Lambda^{n-d+1}(V)\}).$$

Per concludere il capitolo, enunciamo il risultato che evidenzia l'importanza delle relazioni di Plücker, ovvero che esse generano l'ideale omogeneo della Grassmanniana, anche se non lo dimostriamo.

Teorema 2.40.

$$I(Z(\{\Xi_{\alpha,\beta}(\omega)\,|\,\alpha\in\Lambda^{d+1}(V^*),\,\beta\in\Lambda^{n-d+1}(V)\}))=(\Xi_{\alpha,\beta}(\omega)).$$

Capitolo 3

Applicazioni

In questo capitolo tratteremo della Grassmanniana $G(2,4)$, e dimostreremo che tramite l'immersione di Plücker essa è una quadrica in $\mathbb{P}^5$. Inoltre vedremo una breve trattazione della Grassmanniana dal punto di vista affine e delle possibili sottovarietà della Grassmanniana. Il materiale è tratto da *Algebraic Geometry* di Harris [2].

3.1 La Grassmanniana G(2,4)

Si nota che tutte le Grassmanniane della forma $G(1,n)$ sono semplicemente spazi proiettivi, e che la prima Grassmanniana non banale è quindi $G(2,4)$. Consideriamo dunque tale Grassmanniana $G(2,4)$, ovvero formata dai 2-spazi nello spazio $V = k^4$, di cui consideriamo la base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Osserviamo anche che tale Grassmanniana si può indicare anche con $\mathbb{G}(1,3)$, cioè è formata dalle rette nello spazio proiettivo di dimensione 3. Le coordinate Plückeriane di un elemento della Grassmanniana $W = \langle a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4\rangle$, sono date dai 2-minori della matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix}$$

In questo caso vi sono quindi 6 coordinate Plückeriane e le denotiamo con

$$x_{12},\ x_{13},\ x_{14},\ x_{23},\ x_{24},\ x_{34}.$$

Sia $[\omega] = [p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}] \in \mathbb{P}^5$. In $\Lambda^2 V$ l'elemento corrispondente è quindi dato da

$$\omega = p_{12} \cdot e_1 \wedge e_2 + p_{13} \cdot e_1 \wedge e_3 + p_{14} \cdot e_1 \wedge e_4 + p_{23} \cdot e_2 \wedge e_3 + p_{24} \cdot e_2 \wedge e_4 + p_{34} \cdot e_3 \wedge e_4$$

La mappa φ_ω (2.20) manda gli elementi della base rispettivamente in

$$\begin{array}{rcl}
e_1 & \mapsto & p_{23} \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + p_{24} \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 + p_{34} \cdot e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \\
e_2 & \mapsto & -p_{13} \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 - p_{14} \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 + p_{34} \cdot e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \\
e_3 & \mapsto & p_{12} \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 - p_{14} \cdot e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 - p_{24} \cdot e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \\
e_4 & \mapsto & p_{12} \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 + p_{13} \cdot e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 + p_{23} \cdot e_2 \wedge e_3 \wedge e_4
\end{array}$$

E la matrice che otteniamo, che per quanto visto dovrebbe avere rango 3, è

$$\begin{pmatrix}
p_{23} & -p_{13} & p_{12} & 0 \\
p_{24} & -p_{14} & 0 & p_{12} \\
p_{34} & 0 & -p_{14} & p_{13} \\
0 & p_{34} & -p_{24} & p_{23}
\end{pmatrix}$$

Questa matrice ha 16 minori, da cui si ottengono i generatori, in cui i p_{ij} sono sostituiti con delle variabili:

$$\begin{array}{rclrcl}
g_1 & = & x_{14}^2 x_{23} - x_{13}x_{14}x_{24} + x_{12}x_{14}x_{34} & g_2 & = & x_{14}x_{23}x_{24} - x_{13}x_{24}^2 + x_{12}x_{24}x_{34} \\
g_3 & = & x_{14}x_{23}x_{34} - x_{13}x_{24}x_{34} + x_{12}x_{34}^2 & g_4 & = & 0 \\
g_5 & = & -x_{13}x_{14}x_{23} + x_{13}^2 x_{24} - x_{12}x_{13}x_{34} & g_6 & = & -x_{14}x_{23}^2 + x_{13}x_{23}x_{24} - x_{12}x_{23}x_{34} \\
g_7 & = & 0 & g_8 & = & x_{14}x_{23}x_{34} - x_{13}x_{23}x_{34} + x_{12}x_{34}^2 \\
g_9 & = & x_{12}x_{14}x_{23} - x_{12}x_{13}x_{24} + x_{12}^2 x_{34} & g_{10} & = & 0 \\
g_{11} & = & -x_{14}x_{23}^2 + x_{13}x_{23}x_{24} - x_{12}x_{23}x_{34} & g_{12} & = & -x_{14}x_{23}x_{24} + x_{13}x_{24}^2 - x_{12}x_{24}x_{34} \\
g_{13} & = & 0 & g_{14} & = & x_{12}x_{14}x_{23} - x_{12}x_{13}x_{24} + x_{12}^2 x_{34} \\
g_{15} & = & x_{13}x_{14}x_{23} - x_{13}^2 x_{24} + x_{12}x_{13}x_{34} & g_{16} & = & x_{14}^2 x_{23} - x_{13}x_{14}x_{24} + x_{12}x_{14}x_{34}
\end{array}$$

Notiamo che, se definiamo $f = x_{14}x_{23} - x_{13}x_{24} + x_{12}x_{34}$ i polinomi non nulli si possono scrivere come

$$\begin{array}{rcrrcrrcr}
g_1 = & x_{14} \cdot f & & g_2 = & x_{24} \cdot f & & g_3 = & x_{34} \cdot f \\
g_5 = & -x_{13} \cdot f & & g_6 = & -x_{23} \cdot f & & g_8 = & x_{34} \cdot f \\
g_9 = & x_{12} \cdot f & & g_{11} = & -x_{23} \cdot f & & g_{12} = & -x_{24} \cdot f \\
g_{14} = & x_{12} \cdot f & & g_{15} = & x_{13} \cdot f & & g_{16} = & x_{14} \cdot f
\end{array}$$

Questo indica che l'ideale generato dai 3-minori è

$$\langle x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34} \rangle \cap \langle x_{14}x_{23} - x_{13}x_{24} + x_{12}x_{34} \rangle,$$

ovvero che $I(\mathcal{P}\ell(G(2,4))) = \langle x_{14}x_{23} - x_{13}x_{24} + x_{12}x_{34} \rangle$. Possiamo quindi concludere pertanto che la Grassmanniana dei piani nello spazio quadridimensionale è una quadrica in $\mathbb{P}^5$.

3.2 Grassmanniana Affine

Guardando una particolare famiglia di sottoinsiemi aperti affini si può osservare la Grassmanniana da un'altra interessante prospettiva. In questa sezione identificheremo lo spazio vettoriale V con lo spazio vettoriale standard di dimensione n, ovvero k^n.

Quando pensiamo a un punto di una Grassmanniana $P \in G(d,n)$ lo possiamo immaginare in due modi: il primo viene dalla definizione stessa di Grassmanniana, e cioè P rappresenta un sottospazio di dimensione d contenuto all'interno dello spazio vettoriale k^n; il secondo si ottiene attraverso l'immersione Plückeriana, ovvero P è un punto nello spazio proiettivo $\mathbb{P}(\Lambda^d(V))$, rappresentato dalle coordinate $p_{i_1 \cdots i_d}$, con $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n$. Data una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ per V, ogni coordinata corrisponde al coefficiente di un multivettore $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d} \in \Lambda^d(V)$. Sia

$$U_0 \overset{def}{=} \{P \in G(d,n) \,|\, p_{1 \cdots k} \neq 0\}.$$

Per quanto visto nel capitolo precedente, P come sottospazio vettoriale è generato dalle righe di una matrice $d \times n$, con il primo $(d \times d)-$ minore non nullo. Sia tale matrice

$$(A \,|\, B)$$

con $A \in \mathrm{GL}_d(k)$, $B \in \mathcal{M}_{d \times (n-d)}(k)$. Dal momento che moltiplicando (a sinistra) entrambe le sottomatrici per A^{-1} non cambia lo spazio generato dalle righe, ovvero P, si ottiene la matrice della forma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & A^{-1}B \\ 0 & & 1 & \end{array}\right) \tag{3.1}$$

Se consideriamo $\mathcal{M}_{d \times (n-d)}(k)$ come uno spazio affine di dimensione $d(n-d)$, otteniamo l'applicazione $\phi_0 : \mathbb{A}^{d(n-d)} \to U_0$ che manda la matrice M nello spazio generato dalle righe di $(\mathbb{1}_d \,|\, C)$. Considerando i minori, che sono polinomi a entrate in C, si ottiene la corrispondenza tra rappresentazione di un sottospazio attraverso matrice e le coordinate di Plücker. La mappa ϕ_0 è pertanto un morfismo. Inoltre, due matrici diverse C e C' definiscono due sottospazi differenti, e quindi si deduce che ϕ_0 è anche biiettiva; più precisamente si ha che la sua inversa è data da

$$\begin{array}{rcl} U_0 & \to & \mathcal{M}_{d \times (n-d)}(k) \simeq \mathbb{A}^{d(n-d)} \\ (p_{i_1 \cdots 1_d})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n} & \mapsto & ((-1)^{i+j+k-1} p_{1 \cdots \hat{i} \cdots d\, j})_{i,j} \end{array}.$$

Notando che anch'esso è un morfismo, possiamo concludere che effettivamente U_0 è isomorfo a $\mathbb{A}^{d(n-d)}$, è stato dimostrata la seguente

Proposizione 3.2. *La Grassmanniana $G(d,n)$ può essere ricoperta con un numero finito di aperti isomorfi allo spazio affine $\mathbb{A}^{d(n-d)}$. In particolare la dimensione della Grassmanniana è esattamente $d(n-d)$.*

Osservazione 3.3. *Ogni sottospazio $d-$dimensionale di $\mathbb{A}^n$ è dato da una matrice $d \times n$ di rango massimo e se due matrici sono equivalenti a meno di operazioni sulle righe producono lo stesso sottospazio. Pertanto si può scegliere un rappresentante di tali sottospazi* *tra le matrici in forma a scala ridotta, e in tal modo si ha una rappresentazione della Grassmanniana $G(d,n)$ come unione disgiunta di spazi affini.*

Esempio 3.4. Nella Grassmanniana $G(2,4)$ abbiamo le possibili forme in scala ridotta:

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{pmatrix} \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

$$Z_3 = \begin{pmatrix} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Z_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

$$Z_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Z_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che $Z_1 \simeq \mathbb{A}^4$, $Z_2 \simeq \mathbb{A}^3$, $Z_3 \simeq \mathbb{A}^2$, $Z_4 \simeq \mathbb{A}^2$, $Z_5 \simeq \mathbb{A}^1$, $Z_6 \simeq \mathbb{A}^0$, pertanto possiamo scrivere $G(2,4) \simeq \mathbb{A}^4 \sqcup \mathbb{A}^3 \sqcup \mathbb{A}^2 \sqcup \mathbb{A}^2 \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \mathbb{A}^0$.

Definizione 3.5. Siano $p_{i_1 \cdots i_d}$, con $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n$, le coordinate Plückeriane della Grassmanniana. Fissando una di queste coordinate, supponiamo $p_{1 \cdots d} = 1$, definiamo le rimanenti come *coordinate affini* della Grassmanniana in U_0.

Osservazione 3.6. *Le coordinate affini della Grassmanniana rispetto a U_0 corrispondono a tutti i minori nel blocco $d(n-d)$ "più a destra" (ovvero $A^{-1}B$, come avevamo indicato in 3.1). Se espandiamo questi determinanti con la regola di Laplace otteniamo delle relazioni quadratiche tra coordinate Plückeriane, ovvero questo è un modo per ottenere più facilmente le relazioni di Plücker affini.*

Esempio 3.7. In $G(2,4) \cap U_0$, la matrice in scala ridotta è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix}$$

dove le coordinate Plückeriane sono date dai minori 2×2, ovvero sono

$$\begin{aligned} p_{12} &= 1 & p_{13} &= x_{23} \\ p_{14} &= x_{24} & p_{23} &= -x_{13} \\ p_{24} &= -x_{14} & p_{34} &= x_{13}x_{24} - x_{14}x_{23} \end{aligned}$$

Il minore più a destra è dato quindi dalla coordinata p_{34}, ed espandendola rispetto alle altre coordinate otteniamo

$$p_{34} = p_{24}p_{13} - p_{23}p_{14}.$$

Per concludere e trovare le relazioni di Plücker omogenee basta omogeneizzare rispetto alla coordinata p_{12}, e così si ottiene

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0,$$

che è effettivamente il generatore dell'ideale omogeneo.

Osservazione 3.8. *Possiamo vedere U_0 anche come l'insieme di spazi vettoriali $d-$dimensionali complementari a $\Gamma_0 = \langle e_{d+1}, \dots, e_n \rangle$. Così facendo, si ottiene un altro modo di scrivere le coordinate affini di tutti i $d-$ piani P complementari a un dato $n-d$ piano sul sottoinsieme aperto U_0 : si considerano $v_1, \dots, v_d$ vettori che, con Γ_0, generano tutto k^n, e si definisce*

$$v_i(P) = P \cap (\Gamma_0 + v_i),$$

e si nota che i vettori $v_i(P)$ forniscono una base di P, per ogni $P \in U_0$; inoltre le $k-$tuple di vettori $v_i(\Gamma) - v_i$ danno un'identificazione di U_0 con Γ_0.

Osservazione 3.9. *Si può anche dimostrare che, per la relazione di dualità tra le algebre esterne che abbiamo dato nel capitolo precedente, c'è una corrispondenza duale tra $G(d,n)$ e $G(n-d,n)$. Infatti basta considerare il complemento ortogonale di ogni sottospazio, e verificare che ciò produce un morfismo di varietà proiettive.*

3.3 Sottovarietà di Grassmanniane

Iniziamo questa sezione osservando che un'inclusione di spazi vettoriali $W \hookrightarrow V$ induce un inclusione di Grassmanniane $G(d,W) \hookrightarrow G(d,V)$.

Definizione 3.10. Siano W, V spazi vettoriali, con $W \subseteq V$, e sia $\iota : W \hookrightarrow V$ l'inclusione naturale, che mappa ogni vettore di W nel corrispondente vettore di V. Definiamo l'applicazione

$$\iota_* : G(d,W) \hookrightarrow G(d,V),$$

nel seguente modo: per ogni d-sottospazio U di W, l'immagine di U tramite ι è l'immagine dell'applicazione lineare ι applicata a U, ovvero $\iota_*(U) = \iota(U) = \{\iota(u) \mid u \in U\}$.

Osservazione 3.11. *Questa inclusione ι_* è ben definita e rappresenta un'immersione di Grassmanniane. Inoltre, preserva le relazioni geometriche tra i sottospazi, il che significa che due sottospazi U_1 e U_2 di W hanno intersezione non nulla in W se e solo se anche le loro immagini $\iota_*(U_1)$ e $\iota_*(U_2)$ hanno intersezione non nulla in V.*

Possiamo fare una cosa analoga anche considerando la mappa quoziente $V \to V/U$, dove U è un sottospazio $l-$dimensionale di V.

Definizione 3.12. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, e $U \leq V$ di dimensione l. L'applicazione quoziente $\delta : V \to V/U$ è quella che manda un vettore $v \in V$ nella sua classe di equivalenza $[v]_{V/U}$ dove due elementi di V sono equivalenti se differiscono per un vettore di U. Definiamo quindi la mappa

$$\delta_* : G(d-l, V/U) \hookrightarrow G(d,V),$$

che manda ogni sottospazio $(k-l)$-dimensionale $L \leq V/W$ in $\delta^{-1}(L) \leq V$. Anch'essa rappresenta un inclusione di Grassmanniane.

Osservazione 3.13. *In generale, se $U \leq W \leq V$, abbiamo l'inclusione*

$$\zeta_* : G(d-l, W/U) \hookrightarrow G(d, V).$$

Definizione 3.14. Siano $U \leq W \leq V$ spazi vettoriali su k. Le immagini di mappe del tipo $\zeta_* : G(d-l, W/U) \hookrightarrow G(d, V)$ sono dette *Sottograssmanniane*, e sono delle sottovarietà di $G(d, V)$.

Osservazione 3.15. *Se immaginiamo la Grassmanniana come l'insieme dei sottospazi lineari in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$, allora possiamo vedere le sottograssmanniane come i sottoinsiemi composti da piani contenuti in un sottospazio fissato e/o che contengono un dato sottospazio.*

Osservazione 3.16. *Possiamo anche considerare il sottoinsieme $\Sigma(\Lambda) \subset \mathbb{G}(d, \mathbb{P}(V))$ dei sottospazi $d-$dimensionali che intersecano un dato sottospazio lineare $\Lambda \in \mathbb{P}(V)$ di dimensione m, o, in modo più generale, l'insieme $\Sigma_l(\Lambda)$ dei sottospazi d-dimensionali che intersecano Λ in un sottospazio di dimensione $d \geq l$. Anche queste sono sottovarietà di Grassmanniane.*

Definizione 3.17. Sia $\Sigma_l(\Lambda)$ come nell'osservazione precedente, ovvero

$$\Sigma_l(\Lambda) = \{[\omega] | \omega \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_{m-l+1} = 0 \qquad \forall v_1, \dots v_{m-l+1} \in \Lambda\}. \tag{3.18}$$

Una sottovarietà di $\mathbb{G}(d, \mathbb{P}(V))$ di questo tipo si dice *ciclo di Schubert.*

Osservazione 3.19. *Come nel caso delle sottograssmanniane, si nota che i cicli di Schubert non sono altro se non l'intersezione di una Grassmanniana con un sottospazio lineare di $\mathbb{P}(\Lambda^d(V))$.*

Concludiamo il capitolo con delle mappe di proiezione. Esistono infatti delle mappe, analoghe proiezioni su uno spazio proiettivo, per Grassmanniane. In particolare ne vediamo due.

Definizione 3.20. Sia V uno spazio vettoriale n-dimensionale, sia $W \leq V$ un suo sottospazio di codimensione l.
Per $d \leq l$, se considero il sottoinsieme $U \subset Gr(d, V)$, che interseca W unicamente in (0) la mappa

$$\begin{array}{cccc} \pi : & U & \to & G(d, V/W) \\ & A & \mapsto & (A+W)/W, \end{array}$$

è una proiezione sulla Grassmanniana.
Analogamente, per $d \geq l$, si definisce su $U \leq G(d, V)$, insieme dei sottospazi A di V tali che $\dim(A \cap W) = n - d$, la mappa

$$\begin{array}{cccc} \eta : & U & \to & G(d-l, W) \\ & A & \mapsto & A \cap W, \end{array}$$

che è anch'essa una proiezione su Grassmanniana.

Osservazione 3.21. *Entrambe le applicazioni* π *e* η *che abbiamo appena definito possono essere viste, tramite immersione di Plucker su dominio e codominio, come proiezioni lineari sullo spazio* $\mathbb{P}(\Lambda^k(V))$. *La proiezione* π, *infatti è semplicemente la restrizione della mappa lineare* $\mathbb{P}(\Lambda^k(V)) \to \mathbb{P}(\Lambda^k(V/W))$, *indotta da* $V \to V/W$, *su* $G(d, V)$.

Appendice A

Herbert Grassmann

A.1 La Vita

Hermann Grassmann è stato un notevole matematico, che particolarmente si è distinto tra le figure di spicco nella storia di questa materia, sia per i suoi studi insoliti e il suo stile matematico distintivo, ma anche per il riconoscimento tardivo delle sue abilità e la mancanza di comprensione e apprezzamento delle sue idee sia durante la sua vita che molto tempo dopo la sua morte, tanto che tale disinteresse che lo ha tenuto come professore di liceo mentre individui meno capaci occupavano posizioni universitarie. Anche oggi, molti matematici non sono a conoscenza della sua vita e delle sue opere, nonostante utilizzino le sue idee originali.

Grassmann nacque il 15 aprile 1809 a Stettino, nell'est della Prussia, città che oggi si trova in Polonia, ed era il terzo dei 12 figli di Justus Grassmann, un ministro luterano e professore del Ginnasio della città, di Justine Luise Voss, figlia di Friedrich Gustav Voss, un professore di matematica all'università di Berlino. È importante mettere dell'enfasi su quali fossero le mansioni di un professore liceale nella Prussia di quel periodo: doveva infatti tenere lezioni su tutte le materie, dalla matematica alla biologia al latino, per circa dalle 18 alle 30 ore settimanali, senza contare tutti gli impegni aggiuntivi come le riunioni tra docenti, la preparazione e la correzione del materiale ecc. Herbert, crescendo, fu un pupillo nella scuola del padre, dove infatti sviluppò molto presto vari interessi in svariate discipline tra cui soprattutto quello verso la filologia, che fu infatti una materia che lo accompagnò per tutta la vita, e il desiderio di diventare un ministro luterano. Questi interessi lo spinsero a spostare gli studi, dopo aver terminato il Ginnasio, a Berlino, dove studiò teologia e filologia all'università per 6 semestri. Una volta terminati gli studi, nel 1830 tornò nella città natale e iniziò immediatamente la sua carriera come insegnante del Ginnasio. Ci fu da parte sua qualche tentativo di ottenere una posizione universitaria, dopo aver pubblicato i suoi principali lavori matematici, ma rimase comunque per tutta la vita professore liceale, prendendo definitivamente il posto del padre dopo la morte di quest'ultimo nel 1852. Grassmann mantenne inoltre a lungo l'idea di diventare un ministro luterano, tanto che si sottopose a numerosi test attitudinali, tuttavia, avendo l'impressione che tale stile di vita lo avrebbe distratto eccessivamente dalla sua crescente passione verso la matematica, nel 1840 decise di accantonarla. Si sposò relativamente tardi, nel 1834, con Anna Heim, ed ebbe 11 figli, e nonostante la sua miriade di impegni e passioni fu un padre presente e devoto, tanto che molte serate le passava in famiglia leggendo e facendo attività musicali. Tuttavia Grassmann ebbe una grande varietà di passioni: tra le sue pubblicazioni ricordiamo degli articoli sulla teoria del colore, altri sulla teoria del suono e un libro sull'aritmetica elementare, mentre tra le sue attività extracurricolari citiamo il suo ruolo da direttore del coro scolastico, nella sua loggia massonica, e, per anni, in una società nata con lo scopo di portare il gospel in Cina. Tra i suoi interessi ci furono inoltre la cristallogia, le lingue orientali e in particolare il sanscrito, di cui divenne un grande esperto e grazie al quale ottenne numerosi riconoscimenti, e ovviamente la matematica e la filologia, materia su cui si focalizzò dopo lo scarso apprezzamento che i suoi lavori matematici avevano ricevuto. Grassmann morì nel 1877, all'età di 68 anni, a Stettino.

A.2 Le idee matematiche

Durante il diciottesimo secolo, con l'invenzione delle coordinate cartesiane, c'era stato un grande progresso in Analisi, Geometria e Meccanica. Tuttavia, a fine secolo vi fu un generale malcontento nei confronti della geometria, e si iniziò a cercare un metodo alternativo per affrontare i problemi geometrici, che fosse più semplice e veloce sia di quello a coordinate che di quello euclideo. In generale questo malcontento si espresse in due principali correnti: la prima fu l'invenzione della geometria proiettiva, che portò un grande entusiasmo nel primo '800; la seconda fu l'introduzione dei vettori, prima nel piano e successivamente nello spazio ordinario, fino a $n-$dimensioni. Tale corrente fu poi la culla di quella che oggi conosciamo come algebra lineare, ma in quel periodo non ebbe un particolare successo: lo stesso Gauss, che era familiare con il concetto di vettori nel piano da quando li aveva usati per la rappresentazione dei complessi nel piano intorno al 1796, non pubblicò niente in materia fino al 1831.

Le conoscenze matematiche di Grassmann derivavano principalmente dal liceo ma, dopo il 1830, grazie agli esami che aveva sostenuto per migliorare la sua posizione come insegnante, iniziò a coltivare un interesse verso la geometria. Da subito si rese conto dei limiti delle metodologie adottate nella materia, anche se è improbabile che sia stato influenzato dai suoi contemporanei (venne a conoscenza delle coordinate baricentriche Moebius solo nel '41, e lesse le pubblicazioni di Gauss ancora più tardi), e si ritiene addirittura che sia arrivato da solo alla concezione di vettore circa nel 1832. Nell'immediato Grassmann non parve particolarmente interessato a sviluppare l' idea, ma dopo che nel 1839, per

ottenere una promozione lavorativa, dovette scrivere un articolo sulle maree, e, leggendo *Mécanique Analytique* di Lagrange, si rese conto che lavorare in vettori semplificava di gran lunga l'esposizione. Questa fu la scintilla che lo portò ad approfondire e sviluppare sempre di più le sue idee in un lavoro completo, e in soli due anni completò il manoscritto *Die Ausdehnungslehre*, che fu pubblicato nel 1844.
Questo libro, anche se fu ristampato in seguito con note e commenti di Engel e Study, non ebbe per nulla successo, e anche oggi, nonostante non sia più difficile comprendere le idee di Grassmann grazie all'algebra lineare e vettoriale, la lettura di questo tomo è particolarmente pesante. Il motivo è che, dal momento che la formazione di Grassmann fu principalmente da autodidatta, non ci sono definizioni formali, ne quantomeno dimostrazioni rigorose. In questo libro sono infatti descritte le idee di Grassmann su dei nuovi oggetti geometrici, ma in maniera piuttosto astratta. Bisogna ammettere, comunque, che le idee geometriche di Grassmann furono brillanti per la sua epoca, considerando che fino a quel tempo i vettori arrivavano al massimo a 3 dimensioni, e le operazioni erano ristrette a somma e prodotto per scalare, mentre lui usava uno spazio di dimensione arbitraria e nuovi oggetti, i multivettori, che si combinavano con un'operazione anticommutativa.

L'interesse di Grassmann per la geometria probabilmente deriva dal padre, che aveva pubblicato un testo in cui rifletteva sul fatto che un segmento su una linea può essere *generato* da un punto in moto, e un rettangolo da un segmento in moto, parallelo a uno dei suoi lati e con una delle sue estremità che si muove sull'altro lato, e considerava questo processo di generazione come un "prodotto geometrico" dei due lati. Quest'idea rimase anche nel figlio, che dapprima estese il concetto dal rettangolo al parallelogramma, e poi a tre dimensioni, e poi cercò un modo di estenderlo ulteriormente, modificando la concezione di generazione e rendendola suscettibile a variazioni continue, in accordo con una specifica legge che lui chiamò *forma estensiva di primo livello.* Tale legge era data dall'insieme degli elementi che erano stati generati a causa di tale variazione. Tale forma fu poi estesa al p-esimo livello, cioè quando era formata dal prodotto di p forme del primo livello. Questo fu il primo tentativo nella storia di creare elementi geometrici puramente astratti, nelle parole di Grassmann "durch das Denken gewordenen" (esistenti solamente nel pensiero).

Definendo i cosiddetti *Ausdehnungsgrosse*, quelli che oggi chiamiamo p-vettori (e indicheremo con le notazioni), quando definisce il prodotto esterno $v \wedge w$, Grassmann inizia imponendo la distributività

$$v \wedge (w_1 + w_2) = v \wedge w_1 + v \wedge w_2,$$

giustificandolo con il diagramma di parallelogrammi (FIGURA 1), dove mostra il significato di somma di bivettori.

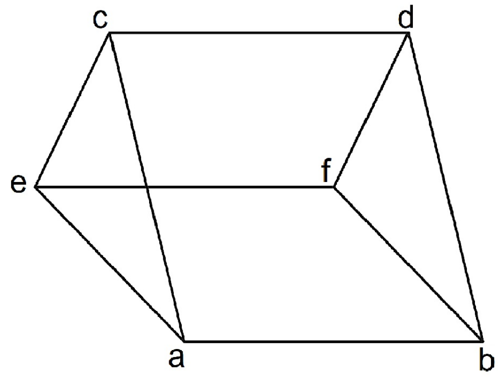

FIGURA 1

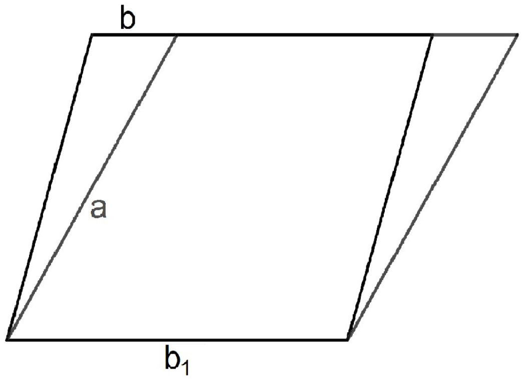

FIGURA 2

In maniera analoga la relazione

$$(v+w) \wedge w_1 = v \wedge w_1,$$

dove w e w_1 sono colineari, è rappresentata da un altro diagramma di parallelogrammi (FIGURA 2). Da queste due relazioni deduce che il prodotto di due vettori colineari è nullo, da cui deduce la relazione di anticommutatività

$$v \wedge w = -w \wedge v.$$

Questo è il punto di partenza con cui Grassmann si propone di sviluppare la sua teoria, che comprende sia l'algebra esterna, che gli spazi vettoriali n-dimensionali. Per tutto lo sviluppo del testo Grassmann mantiene una chiara visione del suo obiettivo: scrive per la prima volta la relazione

$$\dim V + \dim W = \dim(V \cap W) + \dim(V + W)$$

per due sottospazi vettoriali, introducendo addirittura la nozione di base per spazi di dimensione finita. C'è da considerare che Grassmann non fu mai particolarmente attratto dall'algebra, ma il suo interesse fu prettamente geometrico: gli unici p-vettori che studia, infatti, sono i tensori puri, ovvero prodotti esterni di p vettori linearmente indipendenti, che generano un sottospazio vettoriale p-dimensionale. Capisce inoltre che, dal momento che, come i vettori, anche i p-vettori vanno sommati, tale somma non può essere un tensore puro per $2 \leq p \leq n-2$, ma trascura il problema sostenendo che il concetto di addizione è "puramente formale", e non computa neppure il numero di vettori linearmente indipendenti per p e n arbitrari. Una buona fetta del suo lavoro, tuttavia, consiste nel semplificare notazioni, senza portare nuovi risultati, come scrive Engel nelle sue note. Per esempio scrive sistemi lineari come equazioni tra vettori $x_1p_1 + \cdots x_np_n = p_0$ con x_i incognite e p_j vettori. Moltiplicando entrambi i membri per $p_1 \wedge \hat{p}_j \wedge \cdots \wedge p_n$ ottiene le formule

$$x_j((p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) = p_1 \wedge \cdots \wedge p_{j-1} \wedge p_0 \wedge p_{j+1} \wedge \cdots \wedge p_n,$$

ovvero le formule di Cramer, scritte in maniera più compatta.

A.3 La dualità mancante

Grassmann ebbe pochissimi contatti con i matematici dell'epoca, e forse fu anche per questo motivo che le sue opere non furono apprezzate: in un articolo venne infatti definito un uomo che generalizzava per il gusto di farlo, e che non sapeva cosa voleva dire il lavoro di un matematico. Gauss, peraltro, detestava lo stile, così diverso dal suo, in cui era scritto il *die Ausdehnungslehre*, mentre l'unico che parve apprezzare il lavoro di Grassmann fu Moebius, con cui mantenne una corrispondenza ventennale. Grassmann aveva inoltre pensato di pubblicare un secondo volume del suo libro, ma alla fine incorporò in breve i contenuti in un manoscritto che nel 1846 aveva mandato all'Accademia di Lipsia, per una competizione sulla "analisi geometrica". In quest'opera vi erano i contenuti riassunti del primo libro del 1844; per confrontarsi con la geometria euclidea introdusse un nuovo concetto, ovvero quello di *prodotto scalare* in spazi di dimensione arbitraria. In questo scritto Grassmann tentò inoltre una prima definizione di *prodotto interno* tra un vettore e un bivettore, su cui si soffermerà in seguito.

Nel 1862 pubblicò a proprie spese una nuova edizione del suo *die Ausdehnungslehre*, che fu in realtà ben diversa dalla prima. Avendo realizzato, grazie al suggerimento di Moebius, che per essere considerato seriamente avrebbe dovuto cambiare il suo modo di scrivere matematica, abbandonò la sua idea di scrivere in termini di vettori e algebre esterne. Iniziò quindi definendo uno spazio vettoriale di dimensione n come combinazione lineare di n vettori $v_1, \ldots, v_n$ linearmente indipendenti. Questa modalità di scrittura causò non pochi problemi a Grassmann, che non riusciva più a dare le definizioni intrinseche che prima aveva dato nella prima edizione, e faticò a ottenere nozioni geometriche e risultati senza passare per una base: riuscì tuttavia a dimostrare, abbastanza correttamente, il teorema di scambio (generalmente attribuito a Steinitz, 1910), senza usare i determinanti. e da quello aveva dedotto l'invarianza della dimensione.

Nella parte finale del suo libro Grassmann espone alcune applicazioni della sua teoria, che oggi sono quasi banali, ma per l'epoca erano enormi passi avanti, per esempio definisce applicazioni lineari e multilineari senza l'uso delle coordinate: scrive $[l \mid v]$ per indicare il prodotto scalare, dove l è il vettore variabile; in modo simile, definisce un endomorfismo su uno spazio vettoriale n-dimensionale V considerandone una base $v_1, \ldots, v_n$ e sue rispettive immagini $w_1, \ldots, w_n$ tramite l'endomorfismo, che scrive tramite il "quoziente"

$$Q = \frac{v_1, \ldots, v_n}{w_1, \ldots, w_n}$$

o come la combinazione lineare

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot [l \,|v_j],$$

che noi scriveremmo $\sum w_j \otimes v_j^*$. Grassmann, inoltre, introduce spazi vettoriali i cui elementi sono funzioni, e indica le funzioni f, al posto della notazione tipica dell'epoca $f(x)$, e nel calcolo differenziale studia le funzioni differenziabili su spazi vettoriali di dimensione finita, considerandone la mappa tangente $f'(x)$ come endomorfismo sullo stesso spazio

vettoriale. Infine, applicando i suoi risultati alla classificazione di forme differenziali, arriva a un risultato praticamente equivalente al teorema di Darboux.
Abbiamo già menzionato che il lavoro di Grassmann fu prettamente geometrico, e gli oggetti che voleva introdurre erano i sottospazi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Aveva osservato fin da subito che, prendendo due sottospazi U e W di V con intersezione nulla, se essi sono generati rispettivamente dai multivettori u e w, allora $U + W$ sarà generato da $u \wedge w$. Il problema cambia però se i due sottospazi non hanno intersezione nulla: Grassmann riuscì a trovarvi la soluzione nel caso particolare in cui $U + W = V$, ovvero per dualità si rese conto che ciò implicava $U^* \cap W^* = \{0\}$, e $V \cap W$ corrispondeva per dualità a $V^* + W^*$. L'unica cosa che mancava effettivamente a Grassmann era quindi una dualità tra i multivettori, e provò a costruirla tramite un nuovo prodotto, detto *regressivo,* e questo fu l'inizio dei problemi. Grassmann voleva infatti unire tutti e tre i prodotti da lui definiti in un unica operazione, ma senza giungere ad alcuna conclusione.

Per più di 80 anni le possibilità aperte da Grassmann furono tralasciate. Solo nel primo 1900 i matematici iniziarono a sfruttare i suoi lavori: a inizio '900, nello sviluppo del calcolo delle forme differenziali venne utilizzato solamente il prodotto esterno, tuttavia anche questi lavori acquisirono popolarità solo a partire dal 1930. Si dovette aspettare una maggior comprensione dell'algebra esterna come la concepiamo oggi per apprezzare a pieno i lavori di Grassmann, che è a tutti gli effetti un caposaldo della geometria odierna.

Conclusione

In questa tesi, ci siamo impegnati nell'esplorazione dell'algebra esterna e delle Grassmanniane, due pilastri fondamentali della geometria e dell'algebra. Attraverso un approccio sistematico e approfondito, abbiamo esaminato i concetti chiave di queste teorie e abbiamo analizzato le loro interconnessioni e le molteplici applicazioni.

Nel primo capitolo, abbiamo introdotto il prodotto esterno e il prodotto interno, dimostrando le loro proprietà e fornendo una base solida per l'algebra esterna. Abbiamo anche evidenziato la relazione di dualità tra le algebre esterne su uno spazio vettoriale e il suo duale, contribuendo a una migliore comprensione delle strutture algebriche coinvolte. Nel secondo capitolo, ci siamo dedicati allo studio delle Grassmanniane, definendo le loro proprietà e introducendo le coordinate Plückeriane. Abbiamo dimostrato che le Grassmanniane possono essere considerate come varietà proiettive, esplorando le relazioni Plückeriane che le caratterizzano. Questo ci ha permesso di acquisire una visione più profonda delle strutture geometriche delle Grassmanniane. Nel terzo capitolo, abbiamo approfondito le applicazioni di queste teorie, concentrandoci sulla Grassmanniana $G(2,4)$ come esempio significativo. Abbiamo dimostrato che può essere rappresentata come una quadrica in $\mathbb{P}^5$, esplorando anche una descrizione affine delle Grassmanniane e discutendo le sottovarietà che possono essere costruite al loro interno.

Attraverso questa tesi, abbiamo cercato di fornire una panoramica completa e approfondita dell'algebra esterna e delle Grassmanniane, mettendo in evidenza le loro connessioni e applicazioni. Abbiamo evidenziato l'importanza di queste teorie per la comprensione e l'interpretazione delle strutture geometriche e algebriche sottostanti. In conclusione, l'algebra esterna e le Grassmanniane rappresentano strumenti potenti e affascinanti per lo studio della geometria e dell'algebra e, attraverso questa tesi, abbiamo sperato di offrire una panoramica approfondita di questi concetti, evidenziando le loro relazioni e applicazioni.

Bibliografia

[1] F.Pugliese. *Algebra esterna.* http://www.dipmat2.unisa.it/people/pugliese/www/Forme_Esterne.pdf. 2012.

[2] Joe Harris. *Algebraic Geometry: a first course.* Graduate Texts in Mathematics. Springer Science+Business Media New York, 1992. ISBN: 9781441930996.

[3] Drew A. Hudec. *The Grassmannian as a Projective Variety.* Rapp. tecn. University of Chicago, 2007.

[4] William C. Schultz. *Theory and application of Grassmann Algebra.* Transgalactic Publishing Company, 2011.

[5] *The Tragedy of Grassmann.* Vol. 2. Séminaire de philosophie et mathématiques. IREM Paris Nord, 1979.