

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Tesi di Laurea in  
INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

## Compressed Sensing

Relatore  
Prof. Michele Pavon

Candidato  
Alberto Celin

Anno Accademico 2010/2011



# Prefazione

L'obiettivo di questa tesi è presentare un approccio alternativo al teorema del campionamento di Nyquist-Shannon per prelevare da un certo segnale dei valori (campioni) che permettano la perfetta ricostruzione di quest'ultimo. L'aumento esponenziale di dati obbliga a trovare una strategia per diminuire il più possibile i costi a livello di acquisizione di un segnale (ad esempio ricezione di immagini) tenendo comunque elevata l'efficienza e quindi minimizzando la probabilità d'errore a livello di ricostruzione dell'oggetto acquisito. Con questo proposito prende forma il concetto di *Compressed Sensing* (o *Compressive Sampling*): attraverso alcune proprietà molto comuni nei segnali, tra tutte il concetto di *sparsità* del segnale, ovvero la presenza di molti zeri in una certa base, è possibile avviare il processo di acquisizione e ricostruzione utilizzando un piccolo numero di campioni. Si tratta essenzialmente della base del successo degli algoritmi di compressione come JPEG o MP3: una compressione è semplicemente ottenuta salvando esclusivamente gli elementi più grandi della base e al momento della ricostruzione i campioni mancanti sono considerati nulli. Nel campo del Compressed Sensing si sono sviluppate numerose teorie negli ultimi quaranta anni, ma risultati importanti sono stati raggiunti solo recentemente da David Donoho, Emmanuel Candes, Justin Romberg e Terence Tao. (come in [1], [2], [5])

Il Compressed Sensing prende vantaggio dalla presenza di ridondanza in molti segnali di interesse: è noto infatti che la maggior parte dei dati che acquisiamo possono essere gettati senza una perdita significativa, come insegnano i metodi di compressione *lossy*, che prevedono la minimizzazione della quantità di dati da trasmettere. Su questo argomento D. Donoho scrive :

*Why go to so much effort to acquire all the data when most of what we get will be thrown away? Can't we just directly measure the part that won't end up being thrown away?*

Il risultato mostrato è quello che, tramite alcune conoscenze a priori sul segnale e più precisamente sulla rappresentazione di tale segnale in una certa base, sia possibile attraverso un piccolo numero di campioni ricevere la gran parte dell'informazione utile. Una rappresentazione comoda per il segnale è sicuramente quella nel dominio della frequenza attraverso le *Trasformate di Fourier*. Come verrà illustrato in questa tesi, tra rappresentazione in frequenza e rappresentazione nel dominio del tempo esiste una stretta relazione che permette di passare da un dominio all'altro senza difficoltà. Tuttavia, laddove siano note solo alcune informazioni, il procedimento di antitrasformazione richiede essenzialmente la soluzione di

un sistema indeterminato di equazioni. Verrà a questo proposito mostrato che la minimizzazione della *norma*  $l_1$  fornisce per sistemi indeterminati di equazioni lineari la soluzione corretta.

Questa tesi discuterà inoltre alcune delle applicazioni portate dal risultato teorico del Compressed Sensing quali la compressione dati per immagini mediche o astronomiche che implica anche nuovi strumenti per l'acquisizione delle immagini, il miglioramento del *digital signal processing* (DSP) e applicazioni anche nel campo dei controlli e della robotica.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Teoria dei Segnali: Teorema del campionamento e Fourier</b>	<b>7</b>
2.1	Teorema del campionamento di Nyquist-Shannon . . . . .	7
2.2	Le serie di Fourier . . . . .	10
2.3	Fast Fourier Transform . . . . .	12
2.4	Fast Fourier Transform e DFT in Matlab . . . . .	15
2.5	Trasformata di Fourier a tempo discreto . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Compressed Sensing: un nuovo paradigma di campionamento</b>	<b>19</b>
3.1	Da Shannon a oggi . . . . .	19
3.2	Soluzione di un sistema lineare indeterminato: Norme $l_1$ e $l_2$ . . . . .	20
3.3	Background . . . . .	24
3.4	Modellizzazione matematica del Compressed Sensing . . . . .	26
3.4.1	Introduzione al problema dell'acquisizione . . . . .	26
3.4.2	Le due ipotesi fondamentali: Incoerenza e Sparsità . . . . .	27
3.4.3	Un nuovo teorema di campionamento . . . . .	29
3.4.4	Proprietà dell'isometria ristretta . . . . .	31
3.4.5	Costruzione di matrici che verificano la RIP( $2S, \sqrt{2} - 1$ ) . . . . .	32
3.4.6	Compressed sensing per segnali rumorosi . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Applicazioni</b>	<b>35</b>
4.1	Astronomia . . . . .	35
4.2	Reti di comunicazioni . . . . .	37
4.3	Single Pixel Camera . . . . .	38
4.4	Controlli e Robotica . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Conclusione</b>	<b>41</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Al fine di introdurre l'argomento principale della discussione sul *Compressed sensing* vengono sintetizzati in questa tesi inizialmente gli strumenti fondamentali per affrontare il tema: le trasformate di Fourier e il teorema del campionamento (per le trasformate si punterà l'attenzione in particolare sulle trasformate di segnali discreti, in quanto la teoria del Compressed Sensing presenta nel campo dei segnali continui un minor numero di studi a causa anche della maggior complessità). Si richiameranno inoltre le Serie di Fourier a tempo discreto e verrà brevemente spiegato l'algoritmo di Fast Fourier Transform, ideale in certe situazioni per diminuire la complessità nel calcolo delle trasformate. Verrà in particolare puntata l'attenzione sul processo di antitrasformazione di un segnale a partire dal dominio della frequenza al dominio del tempo e si osserverà come la ricostruzione di un oggetto a partire da un numero di campioni incompleto sia teoricamente impossibile.

Il terzo capitolo propone la soluzione al problema di ricostruzione del segnale attraverso la teoria del Compressed Sensing ovvero risponderà alla domanda se sia effettivamente possibile sfruttare un'informazione incompleta, ad esempio pochi coefficienti di Fourier, per riuscire comunque ad antitrasformare in modo esatto: nella prima parte verranno date delle motivazioni sul perchè l'utilizzo della minimizzazione della norma  $l_1$  possa portare ad una ricostruzione ottima di oggetti con rappresentazione sparsa a differenza della norma  $l_2$ ; nella seconda parte del capitolo si formalizzeranno le ipotesi matematiche, tra cui il concetto di sparsità, di incoerenza tra due matrici, per la formulazione dei due teoremi più significativi del Compressed Sensing. Il primo teorema afferma che il numero dei campioni necessari per ricostruire in modo efficiente e con probabilità elevata l'oggetto acquisito ha un rapporto di proporzionalità con la sparsità del segnale ovvero con il numero di termini non nulli dell'oggetto rappresentato in un'opportuna base. Il secondo teorema, più forte del primo, mostra che se il segnale è rappresentato secondo particolari trasformazioni, ovvero attraverso opportune matrici di cambiamento di base, la scelta della minimizzazione della norma  $l_1$  porterà alla ricostruzione esatta e senza coinvolgere il concetto di probabilità.

Attraverso l'uso di questi teoremi si definirà al meglio il ruolo del Compressed Sensing nella teoria dell'informazione portando a delle implicazioni pratiche di primo livello nei campi dell'astronomia, delle telecomunicazioni, della robotica e della radiologia e in generale nei campi scientifici che richiedono una rapida e efficiente acquisizione di immagini: infatti la possibilità di ricostruire usando un numero di campioni basso permette di sviluppare nuovi

sensori di acquisizione che riescano a sfruttare la teoria del Compressed Sensing. Verrà inoltre dedicato dello spazio alla *Single Pixel Camera*, strumento di acquisizione di immagini attraverso un singolo fotone.

## Capitolo 2

# Teoria dei Segnali: Teorema del campionamento e Fourier

### 2.1 Teorema del campionamento di Nyquist-Shannon

Uno dei teoremi fondamentali nella teoria dell'informazione e in particolare nella teoria dei segnali è il **Teorema di Nyquist-Shannon**. Esso definisce la minima frequenza necessaria per campionare un segnale, senza perdere le informazioni necessarie a ricostruirlo.

Preso un segnale  $x(t)$  e definita la sua trasformata di Fourier come

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt,$$

ben definita per  $x(t)$  assolutamente integrabile, ricaviamo la sua banda in termini di pulsazione, o equivalentemente di frequenza, osservando dove  $X(j\omega)$  è nullo. Il teorema seguente mostra la pulsazione di campionamento necessaria a una ricostruzione priva di errori.

**Teorema 2.1** *Dato  $x(t)$  un segnale di trasformata  $X(j\omega)$ , nulla per  $|\omega| > \omega_m$ , e se  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$  è tale che vale*

$$\omega_s > 2\omega_m,$$

*allora i campioni  $x(nT)$  permettono la ricostruzione del segnale  $x(t)$  nel senso della media quadratica .*

□

Il teorema può essere riscritto in termini di frequenza definendo  $B$  la banda del segnale e  $f_s$  la frequenza di campionamento e ponendo  $f_s > 2B$ .

Questo principio è la base di tantissime applicazioni che prevedono un protocollo di acquisizione di un segnale. Basti pensare alla ricezione di un segnale nell'ambito delle telecomunicazioni (Figura 2.1), oppure all'acquisizione di immagini in medicina, in astronomia o in biologia (per le immagini che sono naturalmente non a banda limitata come prevede il teorema, la frequenza di campionamento sarà dettata dalla voluta risoluzione dell'immagine). È infatti fondamentale ai fini della corretta trasmissione e quindi ricezione del segnale



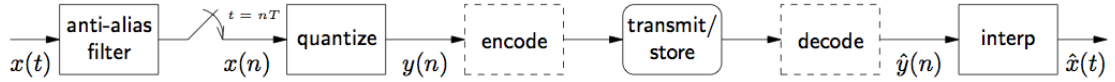


Figura 2.1: Trasmissione digitale di un segnale analogico. Il segnale viene digitalizzato attraverso un ADC, trasmesso attraverso un canale che tipicamente introduce rumore per poi essere decodificato dal ricevitore.

inviato, secondo la teoria di Shannon, effettuare un gran numero di campioni proporzionali alla banda del segnale. Nell'ipotesi del teorema di Shannon ovvero per  $\omega_s > 2\omega_m$  è possibile trovare la formula di interpolazione di Shannon. Preso un segnale  $x(t)$  e definita la sua trasformata di Fourier  $X(j\omega)$  consideriamo un filtro di ricostruzione, ovvero un sistema a singolo ingresso e singola uscita, costituito da un filtro passa basso con risposta impulsiva del tipo

$$h_{lp}(t) = \frac{T \sin(\omega_c t)}{\pi t},$$

ovvero l'antitrasformata di un segnale *rect* con supporto  $2\omega_c$ , che al suo ingresso ha una serie di campioni dati dal segnale e da un treno di impulsi

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT).$$

L'uscita del sistema è definita dall'operazione di convoluzione e di conseguenza dalle sue proprietà con la funzione  $\delta$

$$x_r(t) = h_{lp}(t) * x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\omega_c T}{\pi} \frac{\sin(\omega_c(t - nT))}{\omega_c(t - nT)}$$

che in altri termini possiamo scrivere sfruttando la definizione di pulsazione  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  e sfruttando le ipotesi del teorema di Shannon ovvero  $\omega_c = \frac{\pi}{T}$  come

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin(\frac{\pi}{T}(t - nT))}{\frac{\pi}{T}(t - nT)},$$

ovvero la **formula di interpolazione di Shannon**.

Si può osservare quindi che nelle ipotesi del teorema di Shannon per mezzo dei campioni è possibile ricostruire perfettamente il segnale  $x$  secondo una convergenza di tipo quadratico e che i segnali

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\sin(\omega_c(t - nT))}{\omega_c(t - nT)}$$

ovvero *sinc* rappresentano per le proprietà di ortogonalità degli esponenziali complessi una famiglia ortonormale.

È importante che la frequenza di campionamento abbia sempre un valore superiore rispetto alla frequenza di Nyquist  $f_s$  in modo tale da evitare il problema dell'*aliasing* (Figura 2.2),

ovvero la sovrapposizione delle repliche dello spettro, che rende poi impossibile la ricostruzione esatta del segnale. In Figura 2.2 si può osservare come la ricostruzione del segnale attraverso l'uso di un filtro passa-basso comporti un errore dovuto alle zone in cui i segnali si sovrappongono.

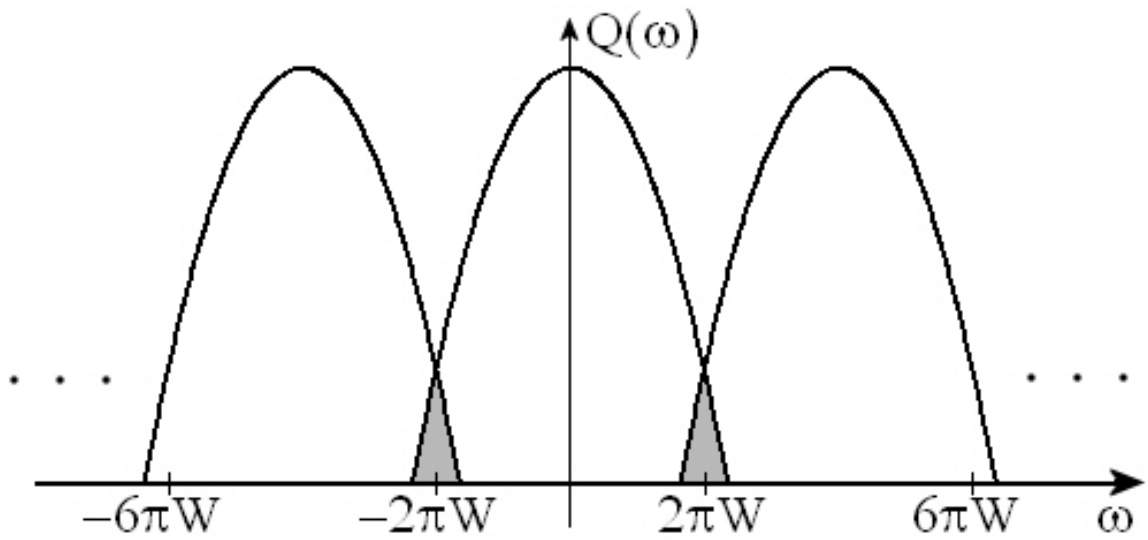


Figura 2.2: Sovrapposizione degli spettri dei segnali rappresentate dalle zone in grigio. La frequenza di campionamento usata in questa situazione non soddisfa l'ipotesi del teorema di Shannon.

## 2.2 Le serie di Fourier

Assumiamo di avere un segnale  $x(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , periodico di periodo  $N$  e scriviamolo come somma di esponenziali della forma

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N_F} kn}.$$

È interessante notare come questa sommatoria possa in realtà essere limitata a certi valori di  $k$  in quanto

$$e^{j \frac{2\pi}{N_F} (k+N_F)n} = e^{j \frac{2\pi}{N_F} kn} e^{j \frac{2\pi}{N_F} N_F n} = e^{j \frac{2\pi}{N_F} kn},$$

poiché è noto che  $e^{j2\pi n} = 1$ . Possiamo pertanto scrivere, sfruttando la periodicità, la rappresentazione in **Serie a tempo discreto di Fourier (DTFS)** del segnale  $x(n)$

$$x(n) = \sum_{k=\langle N_F \rangle} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N_F} kn} \quad 1$$

dalla quale deriva la formulazione per  $X(k)$

$$X(k) = \frac{1}{N_F} \sum_{n=\langle N_F \rangle} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N_F} kn},$$

dove  $X(k)$  (o anche  $a_k$ ) sono chiamati **coefficienti di Fourier** e come visto in precedenza obbediscono a una legge di periodicità tale che  $a_{k+N_F} = a_k$ . Tutta l'informazione su un segnale periodico  $x(n)$  di periodo generico  $N$  è pertanto contenuta in  $N$  numeri complessi, ovvero i suoi coefficienti di Fourier, dai quali possiamo ricostruire perfettamente il segnale attraverso la formula di antitrasformazione. In altre parole l'informazione di un segnale è conservata laddove venga trasformato da funzione del tempo discreto a equivalente rappresentazione nei suoi coefficienti di Fourier. Di seguito sono sintetizzate le principali proprietà della DTFS che mappa  $\mathbb{C}^{N_F}$  in  $\mathbb{C}^{N_F}$  :

**Linearità**  $\alpha x(n) + \beta y(n) \longleftrightarrow \alpha X(k) + \beta Y(k)$

**Time Shift**  $x(n - n_0) \longleftrightarrow e^{j \frac{2\pi}{N} kn_0} X(k)$

**Frequency Shift**  $e^{j \frac{2\pi}{N} k_0 n} x(n) \longleftrightarrow X(k - k_0)$

**Coniugazione**  $\overline{x(k)} \longleftrightarrow \overline{X(-k)}$

**Inversione temporale**  $x(-n) \longleftrightarrow X(-k)$

---

<sup>1</sup>Con la scrittura  $\langle N_F \rangle$  si indica un intervallo discreto costituito da  $N_F$  interi consecutivi

**Moltiplicazione**  $x(n)y(n) \longleftrightarrow X(k) * Y(k) = \sum_{q=\langle N \rangle} Y(q)X(k-q)$

**Convoluzione**  $x(n) * y(n) \longleftrightarrow NX(k)Y(k)$

Un teorema di grande importanza al fine di calcolare l'energia di un segnale è il **Teorema di Parseval**.

**Teorema 2.2** *Preso  $x(n)$  un segnale periodico e considerata la sua energia sul periodo  $N_F$  si ha che*

$$E_{x, N_F} = \sum_{n=\langle N_F \rangle} |x(n)|^2 = N_F \sum_{k=\langle N_F \rangle} |X(k)|^2.$$

□

Essendo la DTFS una mappa lineare da  $\mathbb{C}^{N_F}$  a  $\mathbb{C}^{N_F}$  essa può essere rappresentata da una matrice  $F$  detta matrice di Fourier.

Definito  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N_F - 1) \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N_F - 1) \end{pmatrix}$  si ha  $\mathbf{x} = F\mathbf{X}$ , corrispondente alla

definizione della DTFS data in precedenza, dove  $F$  è una matrice quadrata e  $F_{jk} = e^{\frac{2\pi jk}{N_F}}$ . Sfruttando la relazione di Parseval e la definizione  $\mathbf{x} = F\mathbf{X}$

$$\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{x} = \bar{\mathbf{X}}^T \bar{F}^T F \mathbf{X} = N_F \bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{X} \longrightarrow \bar{F}^T F = N_F I.$$

Si può osservare che, per le proprietà della DTFS (e vedremo in seguito anche della DFT), la matrice di Fourier risulta essere unitaria se moltiplicata per un opportuno scalare  $\frac{1}{\sqrt{N_F}}$ . Definita quindi  $U = \frac{1}{\sqrt{N_F}}F$  si ha che per le proprietà delle matrici unitarie  $\bar{U}^T = U^{-1}$ , ovvero la coniugata trasposta e l'inversa coincidono. Sfruttando la definizione di  $U$  e la definizione di matrice unitaria si ha

$$U^{-1} = \sqrt{N_F} F^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \bar{F}^T = \bar{U}^T \longrightarrow F^{-1} = \frac{1}{N_F} \bar{F}^T.$$

Pertanto invertendo la relazione  $\mathbf{x} = F\mathbf{X}$  si ottiene  $\mathbf{X} = F^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{N_F} \bar{F}^T \mathbf{x}$ .

Le relazioni vettoriali appena scritte mostrano due risultati fondamentali: la DTFS può essere scritta come sistema lineare attraverso la matrice di Fourier e, inoltre, i procedimenti di trasformazione e di antitrasformazione sono simili grazie alla proprietà della matrice  $U$  di essere unitaria.

## 2.3 Fast Fourier Transform

Precisiamo preliminarmente che oltre alla DTFS esiste una trasformata (Discrete Fourier Transform o DFT) essenzialmente identica alle serie di Fourier. Le uniche reali differenze sono un fattore di scala e l'assunzione che il primo campione del segnale si trovi al tempo  $t = 0$ , formalmente

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Essa è definita per  $k = 0, 1, \dots, N - 1$  e pertanto richiede un numero  $O(N^2)$  di somme e moltiplicazioni. Da questa valutazione sorge la domanda se sia possibile, e quindi se esista un algoritmo, che possa calcolare in modo più efficiente la DFT. Nel 1965 un ricercatore della IBM, Jim Cooley, e un docente di Princeton, John Tukey, sviluppano quello che oggi conosciamo come **Fast Fourier Transform**. Si tratta di un algoritmo in grado di svolgere la DFT nell'ordine di  $O(N \log N)$  operazioni per una certa lunghezza di input. Nel 1984 Heideman e Burrus scoprono che attorno al 1805 Carl Friedrich Gauss aveva già ideato questo algoritmo, ma non l'aveva mai pubblicato. Assumiamo che la lunghezza del segnale sia una potenza di 2:  $N = 2^L$ . Consideriamo ora cosa accade agli elementi pari e agli elementi dispari nel calcolo della DFT

$$X(k) = [x(0) + x(2)e^{-j\frac{2\pi}{N}2k} + \dots + x(N-2)e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-2)k}] + \\ [x(1)e^{-j\frac{2\pi}{N}k} + x(3)e^{-j\frac{2\pi}{N}3k} + \dots + x(N-1)e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)k}]$$

Ogni termine tra parentesi quadre rappresenta una DFT per un segnale di lunghezza  $\frac{N}{2}$ : il primo è una trasformata di elementi pari e la seconda di elementi dispari moltiplicati per l'esponenziale complesso  $e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$ . Il vantaggio computazionale della FFT consiste in una proprietà prima enunciata di periodicità dei coefficienti: infatti l'algoritmo semplicemente riutilizza i calcoli fatti nella trasformata e li combina attraverso somme e moltiplicando per l'esponenziale complesso. Definiamo  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ . Le proprietà su questa  $W_N$  permettono di spiegare al meglio l'algoritmo FFT. Infatti:

Proprietà di simmetria :  $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$  (si nota infatti  $W_N^{\frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = -1$  )

Proprietà di periodicità:  $W_N^{k+N} = W_N^k$

Riscriviamo la trasformata semplicemente sostituendo il termine  $W_N$  all'esponenziale complesso

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = \sum_{n\text{ pari}} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n\text{ dispari}} x(n)W_N^{kn} = \\ \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m)W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m+1)W_N^{k(2m+1)}$$

L'equazione può quindi essere riscritta sfruttando l'ovvia  $W_N^2 = W_{\frac{N}{2}}$  e quindi

$$X(k) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_1(m)W_{\frac{N}{2}}^{km} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}} f_2(m)W_{\frac{N}{2}}^{km} = F_1(k) + W_N^k F_2(k).$$

Per come sono state definite  $F_1(k)$  e  $F_2(k)$  sono le DFT rispettivamente di  $f_1(m)$  e  $f_2(m)$  e quindi sono sicuramente periodiche di periodo  $\frac{N}{2}$ . Sfruttando la proprietà di simmetria otteniamo:

$$\begin{aligned} X(k) &= F_1(k) + W_N^k F_2(k) \\ X(k + \frac{N}{2}) &= F_1(k) - W_N^k F_2(k) \end{aligned}$$

Dal punto di vista computazionale questo primo passaggio costa  $(\frac{N}{2})^2 + \frac{N}{2} + (\frac{N}{2})^2 = \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}$  che per  $N$  grande rispetto alle  $N^2$  operazioni porta a una riduzione delle operazioni di un fattore 2.

Definendo  $F_{DFT}(\bullet)$  la DFT osserviamo che procedendo come prima (calcolando per  $\frac{N}{4}$ ) riotteniamo le  $F_1(k)$  e  $F_2(k)$  prima definite:

$$\begin{aligned} F_1(k) &= F_{DFT}(f_1(2n)) + W_{\frac{N}{2}}^k F_{DFT}(f_1(2n+1)) \\ F_1(k + \frac{N}{4}) &= F_{DFT}(f_1(2n)) - W_{\frac{N}{2}}^k F_{DFT}(f_1(2n+1)) \\ F_2(k) &= F_{DFT}(f_2(2n)) + W_{\frac{N}{2}}^k F_{DFT}(f_2(2n+1)) \\ F_2(k + \frac{N}{4}) &= F_{DFT}(f_2(2n)) - W_{\frac{N}{2}}^k F_{DFT}(f_2(2n+1)) \end{aligned}$$

In altre parole avviene quello che si era notato in precedenza ovvero il fatto che l'algoritmo di FFT riutilizza degli elementi calcolati in precedenza per diminuire la complessità. Nelle ipotesi che  $N = 2^L$  questo procedimento può essere effettuato  $L = \log_2 N$  volte. Il numero totale e quindi la complessità generale dell'algoritmo risulta diventare  $O(N \log_2 N)$ . In Figura 2.3 e 2.4 è mostrato il procedimento per  $N = 8$ . Di seguito si calcolano i primi due coefficienti di Fourier come esempio di utilizzo dello schema in Figura 2.4.

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) + x(1)W_8^0 + x(2)W_8^0 + x(3)W_8^0W_8^0 + x(4)W_8^0 + x(5)W_8^0W_8^0 + x(6)W_8^0W_8^0 + x(7)W_8^0W_8^0W_8^0 \\ X(1) &= x(0) + x(1)W_8^1 + x(2)W_8^2 + x(3)W_8^2W_8^1 - x(4)W_8^0 - x(5)W_8^0W_8^0 - x(6)W_8^0W_8^2 - x(7)W_8^0W_8^1W_8^2 \end{aligned}$$

Dove osserviamo che  $-W_8^0$  per la proprietà di simmetria equivale a  $W_8^4$ . Banale la verifica che anche i rimanenti coefficienti di Fourier siano proprio gli stessi termini che avremmo ottenuto operando con la DFT.

Lo schema a farfalla rappresenta il punto fondamentale della FFT: prende due numeri complessi e forma le quantità mostrate in Figura 2.5 attraverso moltiplicazioni per gli esponenziali complessi  $W_N^k$  e somme.

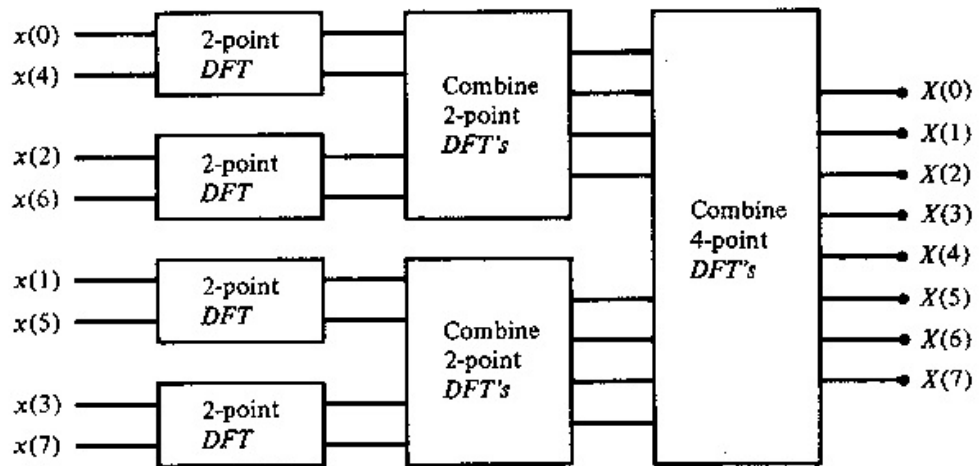


Figura 2.3: Le tre fasi della Fast Fourier Transform per un segnale di lunghezza  $N = 8$

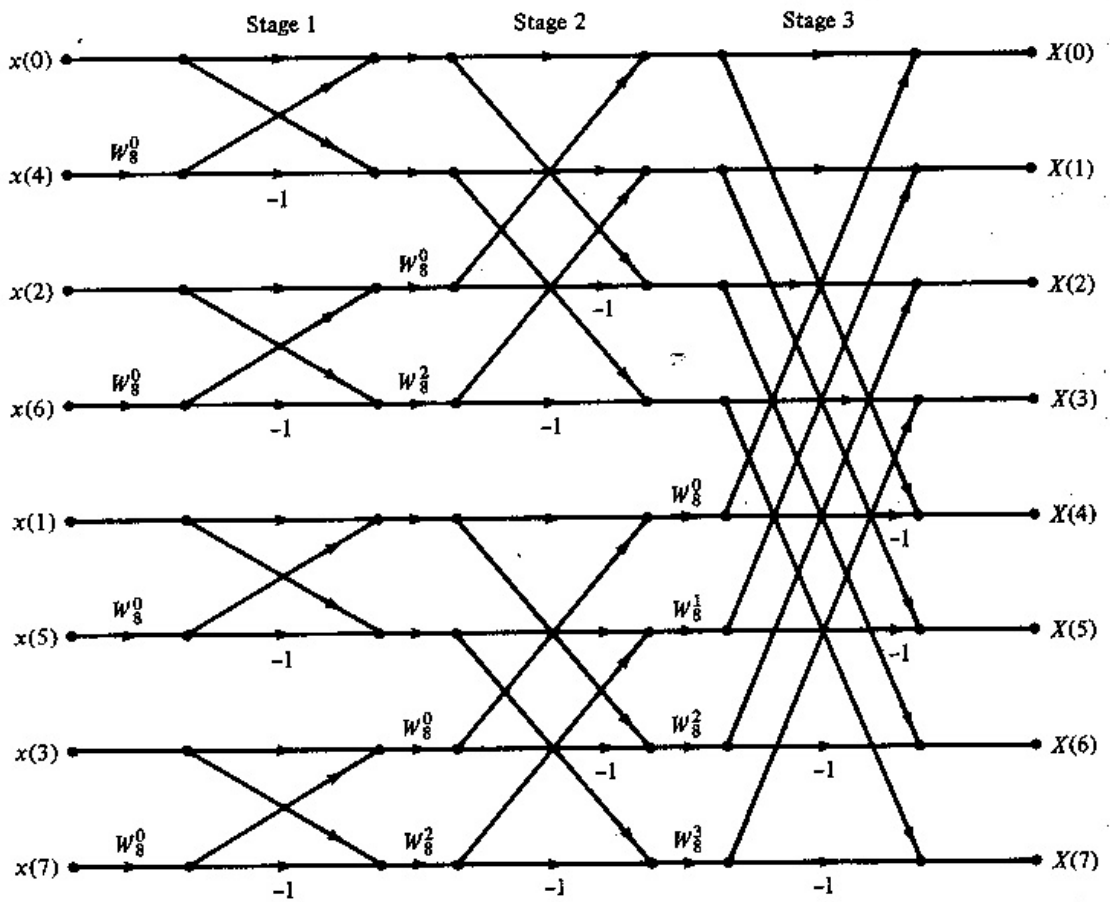


Figura 2.4: Divisione e calcolo della FFT tramite lo schema a farfalla per  $N = 8$

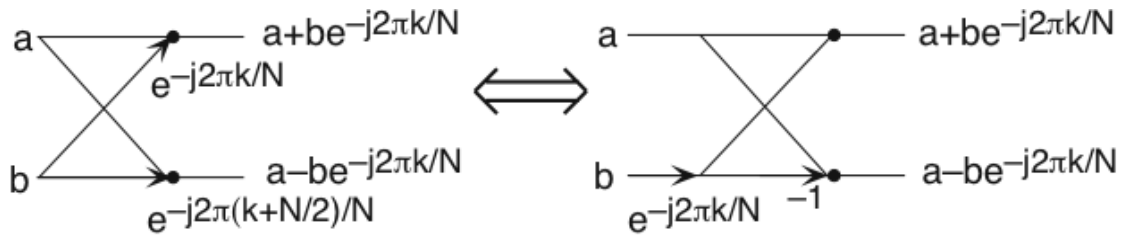


Figura 2.5: Schema a farfalla

## 2.4 Fast Fourier Transform e DFT in Matlab

Se, per quanto riguarda la Fast Fourier Transform, Matlab fornisce una funzione  $fft(x, N)$  (con  $x$  un segnale rappresentato tramite un vettore e  $N$  la lunghezza), per poter calcolare la Discrete Time Fourier Transform è necessario definire una funzione  $dft(x, N)$  partendo banalmente dalla definizione mostrata nella sezione 2.1. Di seguito viene proposto il codice Matlab che implementa la funzione DFT:

---

```

1 function [Xk] = dft(xn, N)
  % Slow DFT
3 % Calcoliamo la DFT senza usare la funzione FFT di Matlab
  %
5 % [Xk] = dft(xn, N)
  % Xk = Coefficienti di Fourier
7 % xn = segnale
  % N = Lunghezza della DFT
9
11 n = [0:1:N-1];
   k = [0:1:N-1];
13 WN = exp(-j*2*pi/N);
   nk = n'*k;
15 WNnk = WN .^ nk;
   xn = [xn zeros(1, N-length(xn))];
17 Xk = zeros(1, N);
19 for k1 = 1:N,
   for n1 = 1:N,
21       Xk(k1) = Xk(k1) + (xn(n1)*WNnk(n1, k1));
   end
23       end

```

---

In questa sezione confrontiamo in termini temporali la FFT e la DFT mostrando attraverso la funzione di Matlab  $tic()$   $toc()$  il tempo speso per il calcolo delle due funzioni. Il prossimo codice Matlab prende un segnale di lunghezza  $N$  elevata che è una potenza di 2 per poter sfruttare al massimo le potenzialità dell'algoritmo.



---

```

1  %Fast Fourier Transform e Discrete Fourier Transform su un segnale
   %sinusoidale generico
3  n = [0:29];
   x1 = cos(2*pi*n/10);
5  N = 2048;
   tic()
7  X2 = abs(dft(x1,N));
   toc()
9  tic()
   X1 = abs(fft(x1,N));
11 toc()

```

---

Questo esempio è stato usato per calcolare il tempo di esecuzione delle trasformate. Di seguito proponiamo media, deviazione standard e numero di campioni per DFT e FFT :

DFT:

*Numero campioni = 30*

*Media  $m_x = 2.78576$  secondi*

*Deviazione standard  $\sigma_x = 0.06697$*

FFT:

*Numero campioni = 30*

*Media  $m_x = 0.00023$  secondi*

*Deviazione standard  $\sigma_x = 0.00014$*

Osserviamo che la media e la deviazione standard dei tempi impiegati per la DFT è di gran lunga superiore rispetto a quella della FFT. La differenza è ancora più marcata se si considerano potenze di 2 più grandi.

## 2.5 Trasformata di Fourier a tempo discreto

Se la DTFS operava su segnali periodici, la **Discrete Time Fourier Transform (DTFT)** viene definita su una classe di segnali a tempo discreto *aperiodici*. Intuitivamente preso un segnale periodico di periodo  $T$ , se  $T \rightarrow \infty$  la ripetizione periodica del segnale in questione corre a infinito, portando a ottenere nel dominio del tempo un segnale aperiodico. Dall'altro lato (dominio della frequenza) i campioni si infittiscono, fino a diventare un segnale *continuo*.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} X(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}.$$

È essenziale assumere per questo passaggio  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$  ovvero che  $x(n)$  sia assolutamente sommabile. Questa condizione può essere sintetizzata come  $x(n) \in l^1$ .

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta,$$

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\theta n}.$$

La scrittura  $X(e^{j\theta})$  trova una sua motivazione nella proprietà di periodicità della Trasformata di Fourier. Infatti  $X(e^{j\theta})$  si può banalmente dimostrare essere periodico rispetto a  $\theta$  di periodo  $2\pi$ . Andiamo a riepilogare altre varie proprietà:

**Linearità**  $\alpha x(n) + \beta y(n) \longleftrightarrow \alpha X(e^{j\theta}) + \beta Y(e^{j\theta})$

**Time Shift**  $x(n - n_0) \longleftrightarrow e^{-j\theta n_0} X(e^{j\theta})$

**Frequency Shift**  $e^{j\theta_0 n} x(n) \longleftrightarrow X(e^{j(\theta - \theta_0)})$

**Coniugazione**  $\overline{x(k)} \longleftrightarrow \overline{X(e^{-j\theta})}$

**Inversione temporale**  $x(-n) \longleftrightarrow X(e^{-j\theta})$

**Moltiplicazione**  $x(n)y(n) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(e^{j\theta}) * Y(e^{j\theta})$

**Convoluzione**  $x(n) * y(n) \longleftrightarrow X(e^{j\theta})Y(e^{j\theta})$

Notiamo che la convoluzione tra le trasformate è una convoluzione *periodica*: in senso generale la convoluzione per due segnali periodici non esiste in quanto non assolutamente sommabili. Pertanto la scelta è di fare la convoluzione sul periodo comune. Per  $x(n) \in l^2$  (spazio dei segnali tali che  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$ , vale la solita relazione di Parseval vista anche per le serie di Fourier:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\theta})|^2 d\theta$$

Sullo spazio  $l^2$  la trasformata di Fourier è lineare e **isometrica**.

**Definizione 2.1** Si definisce **isometria** una mappa tra due spazi metrici che mantiene la distanza tra due punti degli spazi stessi.

La mappa di isometria definita dalla trasformata di Fourier, grazie alla proprietà di invertibilità, è unitaria.

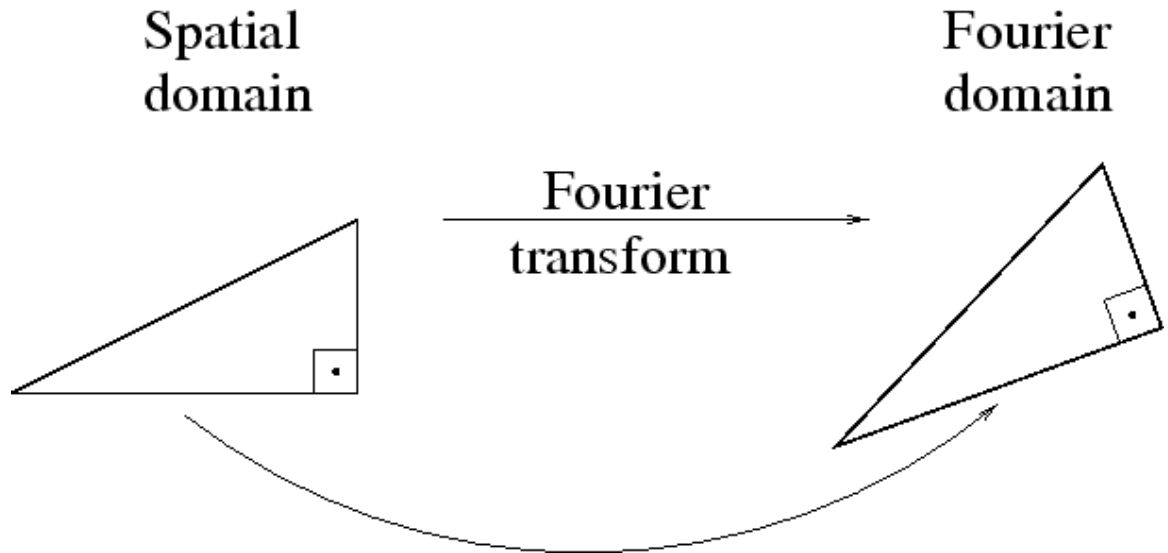


Figura 2.6: L'isometria tra i due spazi  $l^2$

Le proprietà che caratterizzano le trasformate di Fourier torneranno utili nelle prossime sezioni a proposito della ricostruzione dei segnali.

## Capitolo 3

# Compressed Sensing: un nuovo paradigma di campionamento

### 3.1 Da Shannon a oggi

Quanto abbiamo visto fin ora sulla rappresentazione dei segnali nel dominio della frequenza e in particolare sul teorema di Nyquist-Shannon costituiscono le basi fondamentali del campo del *signal processing*. Riuscire dal numero di campioni a ricostruire un segnale, nelle ipotesi che la frequenza di campionamento soddisfi  $f_s > 2B$  con  $B$  la banda del segnale, è nell'intuizione comune possibile soltanto se il numero di misure nel dominio della frequenza risulta essere completo per effettuare una corretta anti-trasformazione al dominio del tempo. Le proprietà di linearità, di isomorfismo e di isometria offrono una relazione biunivoca tra i due spazi che equivale alla soluzione di un sistema di  $n$  incognite con  $n$  equazioni. Tuttavia in molte applicazioni di interesse pratico siamo interessati a ricostruire un oggetto a partire da un numero *incompleto* di campioni di Fourier. Pensiamo ad esempio di voler acquisire un'immagine di milioni di pixel, sembrerebbe necessario prelevarli tutti. La nuova teoria del **Compressed sensing** provvede a fornire un nuovo approccio all'acquisizione dei dati che stravolge la conoscenza comune prima descritta. Essa prevede di ricostruire certi segnali o immagini a partire da quello che prima era considerato come *highly incomplete frequency information* ovvero, in termini algebrici, la risoluzione di un sistema di equazioni con molte più incognite che equazioni. Le differenze tra questa nuova idea e gli algoritmi di compressione sono molteplici: se nella compressione il segnale viene prima totalmente acquisito per poter valutare i campioni più importanti gettando in una seconda fase quelli meno significativi, portando in questo modo a un grandissimo spreco di risorse in termini temporali ed economici, nel Compressed Sensing, invece, l'acquisizione avviene direttamente, prendendo un piccolo numero di campioni del segnale. Come sia possibile, e su quali ipotesi ci si debba muovere per tenere alta l'efficienza del sistema globale di trasmissione e ricezione è argomento di discussione nelle prossime sezioni.

## 3.2 Soluzione di un sistema lineare indeterminato: Norme $l_1$ e $l_2$

**Definizione 3.1** : Preso un vettore  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N$  si definisce **norma  $l_2$**  o anche **norma Euclidea** la seguente:

$$\|\mathbf{x}\|_{l_2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_N|^2}$$

**Definizione 3.2** : Preso un vettore  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N$  si definisce **norma  $l_1$**  la seguente:

$$\|\mathbf{x}\|_{l_1} = \sum_{i=1}^N |x_i|$$

Sia  $b = Ax$  dove  $A$  è una matrice di  $m$  righe e  $n$  colonne con  $n > m$  e supponiamo di voler trovare  $x \in \mathbb{R}^N$  a partire da  $b \in \mathbb{R}^M$ . Chiaramente il sistema, se risolvibile, ammette infinite soluzioni e la soluzione esatta può essere ricavata, ad esempio, nei seguenti due modi:

1) Minimizzazione della norma  $l_2$  (metodo dei minimi quadrati)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \|b - Ax\|_{l_2}$$

Con questo metodo si attribuisce peso maggiore ai residui grandi, mentre viene dato una piccola importanza ai residui piccoli.

2) Minimizzazione della norma  $l_1$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \|b - Ax\|_{l_1}$$

Con questo metodo ai residui più piccoli viene dato un peso maggiore e ai residui più grandi viene dato minor peso rispetto alla minimizzazione ai minimi quadrati, poiché i termini non sono più elevati al quadrato. Facciamo l'ipotesi preliminare, che vedremo essere un punto fondamentale nel Compressed Sensing, che il vettore  $x$  sia sufficientemente sparso ovvero abbia un certo numero di zeri di cui io non conosco la collocazione. Dimosteremo quindi che per questa particolare situazione la minimizzazione della norma  $l_1$  è maggiormente indicata per la soluzione di un sistema di equazioni indeterminato. Daremo una ragione tramite dei codici Matlab, sfruttando segnali sparsi, tramite immagini e daremo anche una ragione geometrica di quanto prima detto. Procediamo di seguito con dei segmenti di codice Matlab per mostrare le differenze tra le minimizzazioni con le due norme, dove per semplicità viene sfruttato un *package* di Matlab *cvx*<sup>1</sup> in grado di risolvere problemi di ottimizzazione convessa.

---

<sup>1</sup>Costruito da Michael Grant e Stephen Boyd porta Matlab a risolvere certi problemi di ottimizzazione, quali la minimizzazione della norma  $l_1$  e della norma  $l_2$

---

```

1  %%Sparse signal recovery

3  n = 512;
   m = 256;                % Numero di campioni n > m
5  A = randn(m,n);

7  S = round(m/3);
   support = randsample(n,S);
9  x0 = zeros(n,1) ; x0(support) = randn(S,1);
   b = A*x0;

11  %%Solve l1

13  cvx_begin
15  variable x(n);
   minimize(norm(x,1));
17  subject to
   A*x == b;
19  cvx_end

21  norm(x - x0)/norm(x0)
   figure, plot(1:n, x0, 'b*', 1:n, x, 'ro'), legend('original', 'decoded')

```

---

```

2  %%Sparse signal recovery

4  n = 512;
   m = 256;                % Numero di campioni n > m
   A = randn(m,n);

6  S = round(m/3);
8  support = randsample(n,S);
   x0 = zeros(n,1) ; x0(support) = randn(S,1);
10  b = A*x0;

12  %%Solve l2

14  cvx_begin
   variable x(n);
16  minimize(norm(x,2));
   subject to
18  A*x == b;
   cvx_end

20  norm(x - x0)/norm(x0)
22  figure, plot(1:n, x0, 'b*', 1:n, x, 'ro'), legend('original', 'decoded')

```

---

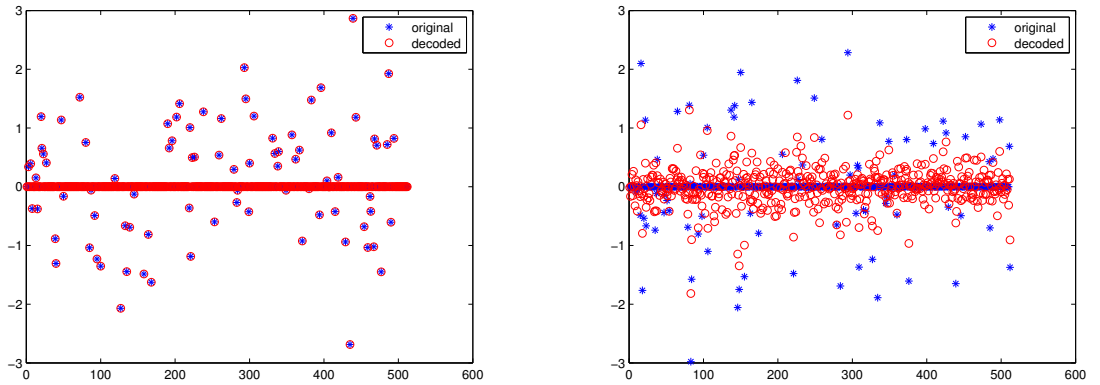


Figura 3.1: Sulla sinistra la minimizzazione con norma  $l_1$  mentre sulla destra gli effetti della minimizzazione con norma  $l_2$

Quello che si osserva dalla Figura 3.1 è una precisione molto elevata per il primo segmento di codice Matlab ovvero quello che sfrutta la tecnica di minimizzazione della norma  $l_1$  (con \* si indicano i valori originali e con o quelli decodificati) mentre per il metodo dei minimi quadrati il risultato non è certamente ottimo.

In Figura 3.2 viene mostrata un'immagine molto usata nella letteratura delle ricostruzioni per presentare la qualità degli algoritmi di ricostruzione: si tratta del test dello *Shepp-Logan phantom*, una simulazione di ricostruzione delle immagini attraverso acquisizione con macchine per la risonanza magnetica (MRI) o attraverso l'acquisizione a raggi X (tomografia assiale computerizzata, più comunemente TAC). In tutti e due i casi si tratta di strumenti di acquisizioni di immagini mediche attraverso un processo lento. Applicando la teoria del Compressed Sensing e di conseguenza la minimizzazione della norma  $l_1$ , si offrono al paziente significative riduzioni dei tempi, con un vantaggio anche economico.

Ciò che si evince osservando le quattro immagini è la perfetta ricostruzione dell'immagine attraverso la minimizzazione della variazione totale definita come la distanza tra misure di probabilità

$$\|p - q\|_{TV} = \frac{1}{2} \sum_x |p(x) - q(x)|$$

concetto strettamente collegato alla minimizzazione della norma  $l_1$ . Se tralasciamo il fattore  $\frac{1}{2}$ , la definizione è simile alla 3.2, in confronto a una ricostruzione non buona via minimizzazione della norma  $l_2$ . Si possono inoltre osservare altre caratteristiche per questo test: l'immagine nel suo dominio della frequenza mostra un gran numero di *parti nere* corrispondenti a dei coefficienti di Fourier che in fase di campionamento non sono acquisiti e sono semplicemente posti a zero. Questo è ciò che si era anticipato e che verrà ripreso in seguito a proposito del concetto di sparsità di un segnale. L'acquisire soltanto un certo numero di valori permette al paziente di minimizzare il tempo speso sotto la macchina di acquisizione (TAC), ottenendo comunque un'immagine ricostruita perfettamente.

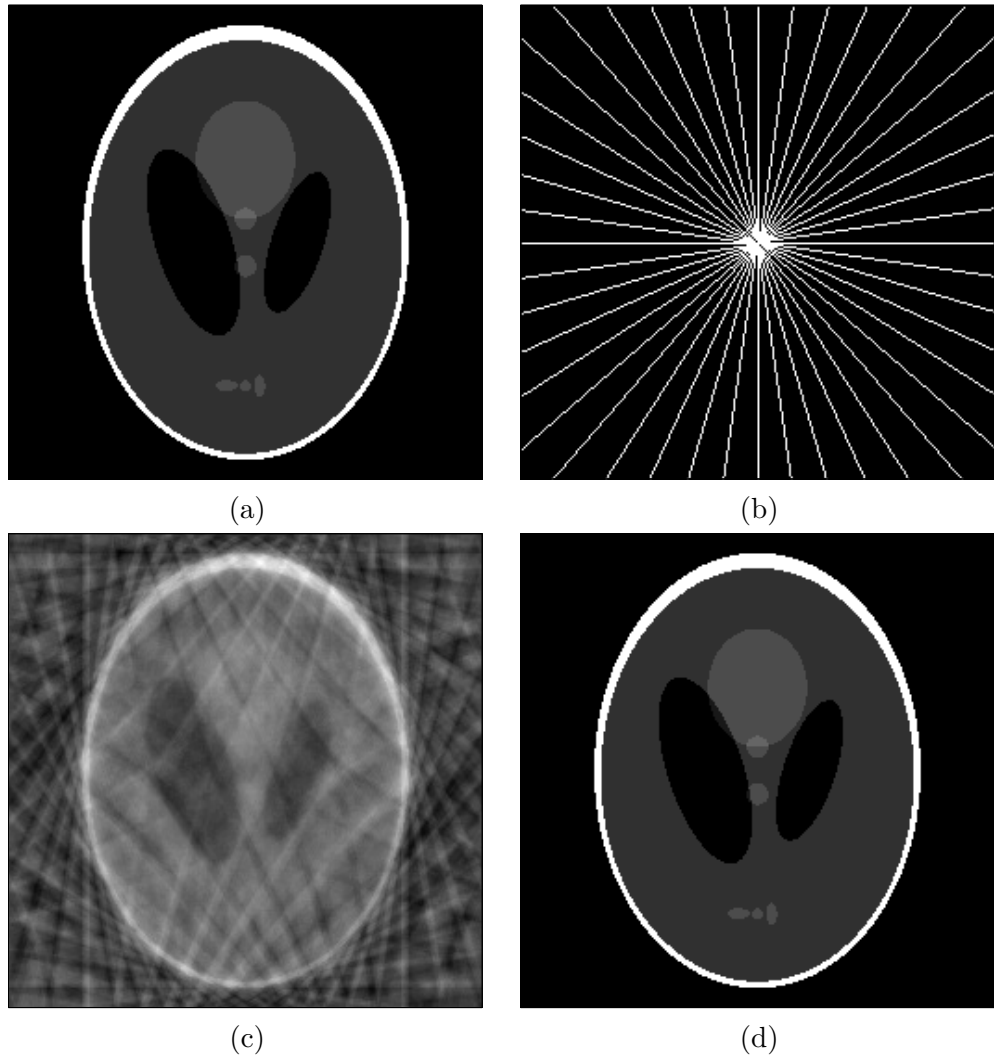


Figura 3.2: Esempio di recupero di immagine. (a) The Logan-Shepp phantom test image. (b) Campionamento nel dominio della frequenza; I coefficienti di Fourier sono campionati sulle 22 linee. Al di fuori delle linee i coefficienti sono posti a zero . (c) Ricostruzione con norma  $l_2$ . (d) Ricostruzione con norma  $l_1$ .



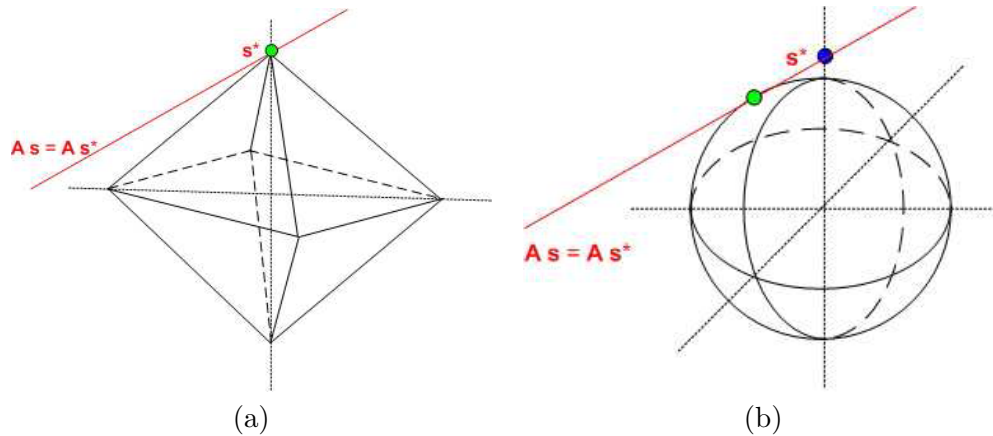


Figura 3.3: (a) Rappresentazione geometrica della norma  $l_1$  (b) Rappresentazione geometrica della norma  $l_2$

Come ultimo argomento a favore della ricostruzione tramite minimizzazione della norma  $l_1$  è possibile fare una considerazione di tipo geometrico. Nella Figura 3.3, dove per facilità è stato mostrato il caso in  $\mathbb{R}^2$ , ma si può estendere a  $\mathbb{R}^N$ , preso il punto  $s^*$  ovvero il punto che deve essere riconosciuto soluzione dell'equazione  $y = Ax$ , esso viene intercettato perfettamente se consideriamo la norma  $l_1$ , mentre nella norma  $l_2$  la ricostruzione non fornisce un risultato ottimale. Ciò è dovuto alla diversa forma della "palla unitaria" nelle due diverse metriche.

### 3.3 Background

Il termine di Compressed Sensing è stato coniato solo recentemente in un articolo da D. Donoho, seguito da un'attiva ricerca che trova delle radici antecedenti a Donoho. Rivolgiamo ora la nostra attenzione a contestualizzare queste correnti di pensiero cercando di costruire un completo *background* prima di procedere con l'analisi matematica del Compressed Sensing. Presumibilmente il primo algoritmo collegato alla *sparse recovery* è da attribuire al matematico francese de Prony (1755-1839). Il metodo di de Prony consisteva nello stimare le ampiezze non nulle e le corrispondenti frequenze di un polinomio trigonometrico sparso da un piccolo numero di campioni equispaziati risolvendo un problema di autovalori. Il primo articolo sull'uso della minimizzazione  $l_1$  apparve nella tesi di Ph.D. di B. Logan, dove osservò la possibilità di ricostruire esattamente dei dati a partire da un numero basso di campioni sfruttando la sparsità del segnale. I geofisici tra il 1970 e il 1980 osservarono che in sismologia l'uso della minimizzazione della norma  $l_1$  portava a indicare dei cambiamenti tra substrati nella crosta terrestre. Attraverso la propagazione di un'onda sulla superficie del mare il suono si propaga al di sotto del livello del mare: ogni livello ha una diversa velocità di propagazione. Ogni volta che l'onda colpisce una discontinuità essa torna indietro ed è possibile campionarla attraverso un sensore. Citando Claerbout-Muir nel 1973

*In deconvolving any observed seismic trace, it is rather disappointing to discover that there is a nonzero spike at every point in time regardless of the data sampling rate. One might hope to find spikes only where real geologic discontinuities take place*

e quindi probabilmente la norma  $l_1$  può essere utilizzata: la funzione che riceviamo è una serie di impulsi rappresentanti le varie discontinuità. Nella teoria dell'*image processing* l'uso della *total variation minimization*, già prima citato nel test di Shepp-Logan, apparve attorno al 1990 nei lavori di Rudin, Osher e Fatemi, ma venne applicata solo più tardi. In statistica il lavoro di Tibshirani (1995) ha portato a un nuovo metodo di stima nei modelli lineari (LASSO, *least absolute shrinkage and selection operator*). Alla teoria del Compressed Sensing ha sicuramente contribuito anche il lavoro fatto sulle tecniche di compressione quali JPEG, JPEG-2000, MPEG o MP3 che sfruttano l'osservazione che i segnali audio e le immagini hanno una rappresentazione sparsa in una certa base. Tuttavia è significativo osservare che il problema di compressione viene risolto semplicemente prendendo in modo selettivo i coefficienti più grandi: si tratta di un approccio costoso come già si è fatto notare in precedenza. Finalmente con i lavori di Candes, Romberg e Tao sono state formalizzate le proprietà chiave del Compressed Sensing.

## 3.4 Modellizzazione matematica del Compressed Sensing

### 3.4.1 Introduzione al problema dell'acquisizione

Per un segnale  $x(n)$ , con  $x$  periodico di periodo  $N$ , siamo in grado di definire la DFT

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Se noi conoscessimo tutti i valori dei coefficienti di Fourier ovvero avessimo accesso a  $X_k$  con  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , potremmo, tramite la formula inversa di ricostruzione, ovvero

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j \frac{2\pi}{N} nk}$$

ottenere esattamente il segnale  $x(n)$ .

Abbiamo osservato nelle sezioni precedenti che queste due relazioni possono essere espresse in forma vettoriale come  $\mathbf{x} = F\mathbf{X}$  e come  $\mathbf{X} = \frac{1}{N_F} \bar{F}^T \mathbf{x}$ . Supponiamo di non conoscere tutti i coefficienti, ma di avere accesso solamente a un sottoinsieme di tutte le frequenze: in generale l'informazione in nostro possesso non può essere sufficiente alla ricostruzione esatta di  $x(n)$ . Si potrebbe pensare di porre a zero tutti i coefficienti non osservati: questa strategia tuttavia, come abbiamo notato osservando lo *Shepp-Logan phantom*, non può essere utilizzata in quanto l'immagine ricostruita soffrirà di problematiche dovute a un non sufficiente numero di campioni.

I sistemi lineari definiti dalle relazioni vettoriali prima richiamate risultano pertanto sistemi indeterminati e, senza aggiungere ulteriori conoscenze, le soluzioni possibili sono infinite.

Nelle sezioni precedenti è stato osservato come la conoscenza a priori di certe informazioni sul segnale in una opportuna base, come la sua sparsità, possano permettere via minimizzazione della norma  $l_1$  una corretta ricostruzione, ovvero una corretta scelta tra le infinite soluzioni di questo problema. Su queste basi prende forma la teoria del Compressed Sensing.

Supponiamo quindi che  $x(n)$  sia il segnale che viene campionato da questo particolare sensore e supponiamo che l'informazione che arriva da questo segnale sia ottenuta come segue:

$$y_k = \langle x, \varphi_k \rangle, \quad k = 1, \dots, m,$$

dove  $\varphi_k$  sono delle forme d'onda che definiscono l'acquisizione dell'oggetto  $y$ , ovvero definiscono per via matematica il sensore. Ad esempio se le  $\varphi_k$  sono delle delta di Dirac allora  $y$  è il vettore formato dagli elementi campionati di  $x$ , ovvero abbiamo progettato un sensore che campiona in modo canonico gli elementi nel dominio del tempo. Se le forme d'onda sono sinusoidi allora  $y$  sarà un vettore di coefficienti di Fourier ovvero sarà la rappresentazione nel dominio della frequenza del segnale  $x(n)$ .

Definiamo una matrice  $A$  di  $m$  righe e  $n$  colonne con  $m < n$ . Sia questa matrice formata dai vettori  $\varphi_1^*, \varphi_2^* \dots \varphi_m^*$  (dove con  $a^*$  si intende il complesso trasposto di  $a$ ). Riscrivendo il sistema come  $y = Ax$ , abbiamo già osservato che per  $m < n$  il problema in generale è mal-posto ovvero prevede infiniti candidati  $\tilde{x}$  tali che  $y = A\tilde{x}$ . Già la teoria di Shannon, tuttavia, afferma che, nel caso il segnale  $x(n)$  abbia una banda molto piccola, il numero

di campioni necessari alla ricostruzione di quest'ultimo sia comunque molto piccolo e suggerisce quindi che la ricostruzione per una certa classe di segnali sia possibile anche se il numero di acquisizioni non è grande. Come è stato anticipato nella sezione 3.2 la soluzione al problema sarà la minimizzazione della norma  $l_1$ , efficace sotto la particolare ipotesi della sparsità del segnale.

### 3.4.2 Le due ipotesi fondamentali: Incoerenza e Sparsità

Molti segnali hanno una rappresentazione utile e concisa se rappresentati in una opportuna base. Immagini e audio sono gli esempi più importanti di questa categoria, ma anche altri segnali, se rappresentati nel dominio della frequenza, presentano molti zeri all'interno della loro banda. Prendiamo come esempio  $x(n) = \cos(\theta_0 n)$ . La sua trasformata di Fourier può essere facilmente ricavata scrivendo

$$\cos(\theta_0 n) = \frac{e^{j\theta_0 n} + e^{-j\theta_0 n}}{2}.$$

Per cui la trasformata di Fourier

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \pi [\delta(\theta - \theta_0 - l2\pi) + \delta(\theta + \theta_0 - l2\pi)].$$

Si osserva che questo segnale ha una banda illimitata, anche se generalmente questo treno di impulsi viene considerato su un solo periodo. Quello che è più interessante notare è che la trasformata su, ad esempio,  $(-\pi, \pi]$ , è diversa da zero solo dove vi sono i due impulsi delta.

Sia dato un vettore  $X$  e sia data una base ortonormale  $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n]$  di uno spazio vettoriale di segnali (ad esempio i segnali a energia finita o quadrato sommabili) e sia definito  $x$  come segue:

$$x(n) = \sum_{i=1}^n X_i \psi_i(n).$$

Questa scrittura per l'opportuna base  $\Psi$ , prendendo  $X_i$  come gli  $X(k)$  e  $x(n)$  come il segnale, risulta essere la serie di Fourier con coefficienti  $X_i$ . Quando il segnale ha un'espansione **sparsa** allora i coefficienti che lo caratterizzano sono in numero molto più piccolo rispetto a quelli previsti dal supporto del segnale. Sia  $x_S$  il segnale ottenuto prendendo come termini soltanto quelli corrispondenti ai coefficienti più significativi del vettore  $X_i$ , e ponendo a zero i rimanenti termini. Chiamiamo per semplicità tale vettore  $x_S$ . Per definizione  $x_S = \Psi X_S$ .

**Definizione 3.3** : *Preso un segnale  $x(n)$  in una sua certa base esso è **S-sparso** se tale oggetto ha al più  $S$  elementi non nulli.*

Se  $\Psi$  è una base ortonormale allora  $\|x - x_S\|_{l_2} = \|X - X_S\|_{l_2}$  e se  $X$  è  $S$ -sparso allora la quantità  $\|x - x_S\|_{l_2}$  è piccola. In altri termini è possibile gettare tutti i coefficienti nulli senza una grande perdita percentuale. È il principio che ha reso possibile gli algoritmi di

compressione *lossy*: la ricostruzione richiede la conoscenza di tutti gli  $n$  coefficienti  $X$ , così come chiede la conoscenza di dove si trovino gli zeri di  $X$ , cosa che a priori non è nota. In questo senso il Compressed Sensing risulta ancora più sorprendente in quanto la sparsità ha delle implicazioni sul processo di acquisizione del segnale e non prevede di conoscere necessariamente tutti i coefficienti  $X$ .

Definiamo la coppia di basi  $(\Phi, \Psi)$ , basi ortonormali di  $\mathbb{C}^N$  dove  $\Phi$  è la base usata per l'acquisizione dell'oggetto  $y = \Phi x$ , mentre  $\Psi$  è la base sulla quale rappresentiamo il segnale  $x(n)$ .

**Definizione 3.4** : Data una coppia di basi  $\Phi$  e  $\Psi$  si definisce **coerenza** tra le due basi la seguente espressione

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \max_{1 \leq k, j \leq n} | \langle \varphi_k, \psi_j \rangle |$$

La coerenza misura pertanto la correlazione tra le due basi: se tra  $\Psi$  e  $\Phi$  ci sono elementi correlati allora la coerenza sarà un numero grande, altrimenti sarà piccola. Dal momento che le basi sono ortonormali, il valore massimo che  $\mu(\Phi, \Psi)$  può assumere è  $\sqrt{n}$ , ovvero quando per una certa coppia di valori  $(k, j)$   $\langle \varphi_k, \psi_j \rangle = \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = \|\varphi_k\|^2 = 1$  (ovvero le due basi hanno un elemento in comune). Quando due segnali presentano la **massima incoerenza** allora  $\mu(\Phi, \Psi) = 1$ .

Prendiamo come esempio la base di Fourier  $\psi_k = n^{-\frac{1}{2}} e^{j \frac{2\pi}{n} kt}$  e la base di campionamento classica  $\varphi_j = \delta(t - j)$ . Risulta chiaro che  $\max_{1 \leq j, k \leq n} \langle \varphi_j, \psi_k \rangle = n^{-\frac{1}{2}}$  e pertanto le due basi presentano massima incoerenza ovvero  $\mu(\Phi, \Psi) = 1$ . Si può dimostrare che una base ortonormale  $\Phi$  creata con un processo di ortonormalizzazione di  $n$  vettori generici, con alta probabilità ha coerenza  $\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{2 \log n}$  per ogni base  $\Psi$ . Da questo si ricava inoltre che prese delle forme d'onda  $\varphi_k(t)$  indipendenti e identicamente distribuite come delle Gaussiane o delle Bernoulliane, esse portano con una fissata base  $\Psi$  a una coerenza molto bassa. Il significato della coerenza tra due basi diverrà chiaro nel Teorema 3.1 che segue.

### 3.4.3 Un nuovo teorema di campionamento

Sia  $x = \Psi X$  e sia  $y_k = \langle \varphi_k, \Psi X \rangle$  un certo numero  $k$  di dati. Allora come è stato osservato in precedenza il recupero del segnale  $x(n)$  a partire dai campioni  $y_k$  è possibile con un piccolo errore attraverso la minimizzazione della norma  $l_1$ . Discutiamo ora attraverso il teorema centrale del Compressed Sensing il numero di campioni sufficienti a rendere possibile la ricostruzione del segnale con una piccola probabilità d'errore.

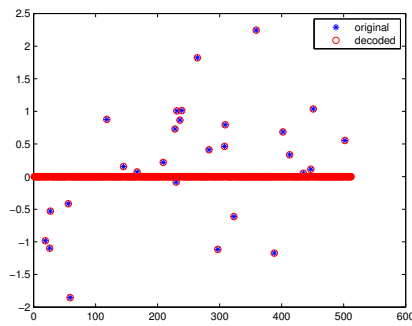
**Teorema 3.1** *Fissato  $x \in R^N$  e supposto che la sequenza  $X$ , tale che  $x = \Psi X$ , sia  $S$ -sparsa per un'opportuna base ortonormale  $\Psi$ , scegliamo le  $m$  misure nel dominio  $\Phi$  casualmente. Allora se vale*

$$m \leq C\mu^2(\Psi, \Phi)S \log n$$

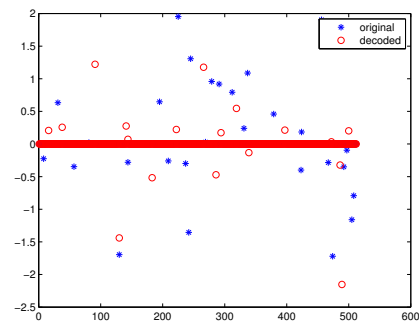
per una qualche costante  $C$ , la minimizzazione della norma  $l_1$  ricostruisce  $X$  esattamente con probabilità di successo superiore a  $1 - O(N^{-\delta})$

□

Il ruolo della coerenza per questo teorema è chiaro: se scegliamo una coppia di basi  $(\Phi, \Psi)$ , come ad esempio la base canonica di campionamento e la base di Fourier, tali che  $\mu(\Phi, \Psi) = 1$  il numero di campioni sufficienti a una corretta ricostruzione di  $X$  risulta dell'ordine di  $S \log n$ . Altrettanto sorprendente è notare che il teorema non richiede la conoscenza della posizione degli elementi non nulli di  $X$ , ma semplicemente compare il termine  $S$  equivalente al numero di elementi non nulli. Come ultima osservazione è interessante notare che questo teorema fornisce ai sensori di campionamento un nuovo paradigma: se nella teoria di Shannon il numero di campioni dipendeva dalla banda, e quindi richiedeva anche la conoscenza della taglia di  $B$ , e considerava tutte le frequenze necessarie, questo teorema richiama la possibilità di ricostruire un segnale di banda arbitraria attraverso delle acquisizioni casuali. Un esempio dell'applicazione di questo teorema è mostrato nel codice Matlab proposto di seguito. Essenziale notare che il segnale da ricostruire prenda i valori del suo supporto dalla funzione Matlab `randn(n,m)` che restituisce una matrice  $n * m$  con valori presi dalla normale standard. Pertanto la sparsità del segnale non ci è nota con precisione, ma è possibile fare un ragionamento statistico considerando che la media è 0 e la varianza è 1. Sottolineiamo come l'esempio preveda una massima incoerenza tra le due basi quindi  $m \leq S \log n$  dove  $m = 64$ .



(a)



(b)

Figura 3.4: Risultato del codice Matlab. (a) Compressed sensing: recupero perfetto se  $m$  è sufficientemente grande (b) Recupero del segnale per  $m = \log n = 9$

---

```

n = 512;                                % Taglia del segnale
2  m = 64;                                % Numero dei campioni m

4  k = 0:n-1;  t = 0:n-1;
   F = exp(-i*2*pi*k'*t/n)/sqrt(n);      % Rappresentazione trasformata
6                                     % di Fourier tramite matrice
   freq = randsample(n,m);
8  A = [real(F(freq,:));
        imag(F(freq,:))];

10

12  L = 28;
   support = randsample(n,L);             % Campione L volte
   x0 = zeros(n,1);  x0(support) = randn(L,1);
14  b = A*x0;

16

18  cvx_begin
   variable x(n);
20  minimize(norm(x,1));
   A*x == b;
22  cvx_end

24  figure, plot(1:n,x0,'b*',1:n,x,'ro'), legend('original','decoded')

```

---

### 3.4.4 Proprietà dell'isometria ristretta

La proprietà dell'isometria ristretta è una nozione che risulta essere di notevole importanza nello studio della robustezza del Compressed Sensing. Come è stato dimostrato da Candes e Tao la **Restricted Isometry Property** o **RIP** permette di determinare delle condizioni sufficienti a garantire l'esatta ricostruzione di un vettore sparso.

**Definizione 3.5** : Per ogni intero  $k = 1, 2, \dots$  la costante di isometria  $\delta_S$  di una matrice  $A$  è definita come il più piccolo numero tale che

$$(1 - \delta_S)\|x\|_2^2 \leq \|Ax\|_2^2 \leq (1 + \delta_S)\|x\|_2^2$$

per tutti i vettori  $S$ -sparsi  $x$ .

Quando vale la RIP (ovvero se il coefficiente di isometria è piccolo) la norma del segnale  $S$ -sparso è approssimativamente preservata dalla matrice  $A$ . In altri termini tutti i sottoinsiemi di  $S$  colonne prese da  $A$  sono approssimativamente ortogonali. Facciamo un'osservazione fondamentale: supponiamo di valutare la  $RIP(2S, \delta)$  ovvero poniamo  $\delta_{2S} = 1$  (in questa situazione la RIP non è soddisfatta) e supponiamo che esista un vettore  $x$   $2S$ -sparso tale che  $Ax = 0$  e dividiamo in modo opportuno il vettore  $x$  in due vettori  $x_1$  e  $-x_2$  tali che siano ambedue  $S$ -sparsi. Osserviamo che se la RIP non è soddisfatta allora i vettori colonna della matrice non sono ortogonali e la mappa definita dalla matrice  $A$  non è iniettiva. Possiamo quindi riscrivere

$$Ax = A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = 0 \longrightarrow Ax_1 = Ax_2$$

La ricostruzione diventa pertanto impossibile poichè non saremmo in grado di distinguere i due vettori. La RIP, se verificata, ci assicura l'inesistenza di questa ambiguità e quindi è garantita la ricostruzione in quanto la mappa rappresentata dalla matrice  $A$  è iniettiva per i vettori  $2S$ -sparsi e quindi permette la ricostruzione dei segnali  $S$ -sparsi.

**Teorema 3.2** Preso  $x^*$  tale che

$$x^* = \min_{\tilde{x} \in \mathbf{R}^N} \|\tilde{x}\|_{l_1}$$

con  $A\tilde{x} = y$ , nelle ipotesi che  $\delta_{2S} < \sqrt{2} - 1$  e che quindi valga la  $RIP(2S, \sqrt{2} - 1)$  allora  $x^*$  obbedisce a

$$\|x^* - x\|_{l_2} \leq \frac{C_0 \|x - x_S\|_{l_1}}{\sqrt{S}}$$

$$\|x^* - x\|_{l_1} \leq C_0 \|x - x_S\|_{l_1}$$

per un qualche  $C_0$ .

□



Questo teorema afferma che la distorsione che si ha con la norma  $l_1$  nella ricostruzione del segnale è approssimativamente la stessa distorsione che si ha prendendo il segnale, osservandone tutti i coefficienti, scartando i termini nulli. Il teorema appena visto fornisce non più una constatazione probabilistica, ma un'affermazione deterministica. Si tratta quindi di un teorema più forte del Teorema 3.1. Se siamo abbastanza fortunati da scegliere una matrice  $A$  che obbedisca alle ipotesi del teorema allora potremmo applicarlo e garantire un recupero perfetto di tutti i segnali  $S$ -sparsi senza probabilità di fallimento. Osserviamo inoltre che la minimizzazione con norma  $l_2$  è buona tanto più il termine a denominatore è vicino a 1. Resta ora da stabilire il rapporto tra  $S$ , ovvero i coefficienti che possiamo effettivamente recuperare, e il numero di misure  $m$ . In altre parole come scegliamo la matrice  $A$  che permetta il recupero di  $x$  con poche acquisizioni? Come possiamo costruire una matrice tale che ogni sottoinsieme di  $S$  colonne sia ortogonale?

### 3.4.5 Costruzione di matrici che verificano la RIP( $2S, \sqrt{2} - 1$ )

Siamo interessati nel caso ideale a valutare  $S$  coefficienti dell'ordine di  $m$ : l'idea è quella di un oracolo che ci permette di conoscere quali coefficienti sono nulli e quali non lo sono e di campionare semplicemente quelli non nulli (ovvero quelli necessari alla ricostruzione). Provare a costruire una matrice che obbedisce alle proprietà del Teorema 3.2 è complicato per grandi valori di  $S$ , ma è possibile costruirla con una probabilità di successo elevata. Campioniamo  $n$  vettori nella sfera unitaria di  $\mathbb{R}^m$  in modo indipendente e uniforme. Allora la condizione imposta dal Teorema 3.2 vale per  $S = O(\frac{m}{\log(\frac{n}{m})})$  con probabilità  $1 - O(e^{-\gamma m})$  per qualche  $\gamma > 0$ . La ragione per cui questo vale è da cercare nel fatto che la sfera appartiene a uno spazio *high dimensional* ovvero è per la maggior parte vuota ed è quindi possibile individuare dei vettori approssimativamente ortogonali. Consideriamo le seguenti matrici:

- *Misure Gaussiane.* Assumiamo di creare  $A$  campionando ingressi indipendenti via una distribuzione normale gaussiana con media 0 e varianza  $\frac{1}{m}$ .
- *Misure bernoulliane.* Creiamo  $A$  campionando gli ingressi via una distribuzione di Bernoulli tale che  $P(A_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{m}}) = P(A_{i,j} = -\frac{1}{\sqrt{m}}) = \frac{1}{2}$
- *Misure incoerenti.* Creiamo  $A$  come visto in precedenza ovvero campionando casualmente una base  $P$  e normalizzando  $A = \sqrt{\frac{n}{m}}$ .

Allora con probabilità elevata tutte queste matrici obbediscono alla RIP sotto l'ipotesi

$$m \leq CS \log\left(\frac{n}{S}\right)$$

dove  $C$  è una qualche costante che dipende dai vari casi. In tutti questi esempi la probabilità di fallire la RIP è esponenziale in  $m$ . È interessante notare che nessun algoritmo di ricostruzione può fornire le conclusioni del Teorema 3.2 con un numero di campioni inferiore. Notiamo che per un segnale non sparso che può essere rappresentato tramite un'arbitraria base ortonormale  $\Psi$  che lo renda sufficientemente sparso, la RIP vale prendendo una base  $\Phi$  tra i tre precedenti casi menzionati e con probabilità elevata la matrice  $A = \Phi\Psi$  obbedisce alla RIP( $2S, \sqrt{2} - 1$ ).

### 3.4.6 Compressed sensing per segnali rumorosi

Consideriamo l'esempio di un sistema di telecomunicazioni: l'utente A invia dati all'utente B attraverso un certo canale (Figura (2.1)). Il canale tuttavia in un caso generale somma al segnale di ingresso una componente di errore, possiamo supporre per semplicità che si tratti di rumore bianco. La robustezza del Compressed Sensing permette di ricostruire in modo efficiente anche in situazioni di dati rumorosi. Sia

$$y = Ax + e$$

dove  $e$  è il termine di errore che supponiamo avere energia limitata  $\|e\|_{l_2} \leq \varepsilon$ . Scegliamo  $x^*$  tale che

$$x^* = \min_{\tilde{x} \in R^N} \|\tilde{x}\|_{l_1}$$

con  $\|A\tilde{x} - y\|_{l_2} \leq \varepsilon$ . Vale il seguente teorema:

**Teorema 3.3** *Sia*

$$y = Ax + e$$

dove  $e$  è il termine di errore che supponiamo avere energia limitata  $\|e\|_{l_2} \leq \varepsilon$ . Scegliamo  $x^*$  tale che

$$x^* = \min_{\tilde{x} \in R^N} \|\tilde{x}\|_{l_1}$$

con  $\|A\tilde{x} - y\|_{l_2} \leq \varepsilon$ . Assumiamo che valga la RIP( $2S, \sqrt{2} - 1$ ). Allora la soluzione  $x^*$  obbedisce a:

$$\|x^* - x\|_{l_2} \leq \frac{C_0 \|x - x_S\|_{l_1}}{\sqrt{S}} + C_1 \varepsilon$$

per un qualche  $C_0$  e  $C_1$ .

□

L'errore di ricostruzione è pertanto limitato superiormente dalla somma di due termini: il primo è il termine presente se non ci fosse errore, mentre il secondo è proporzionale all'energia dell'errore. La Figura 3.5 mostra la ricostruzione da dati rumorosi.

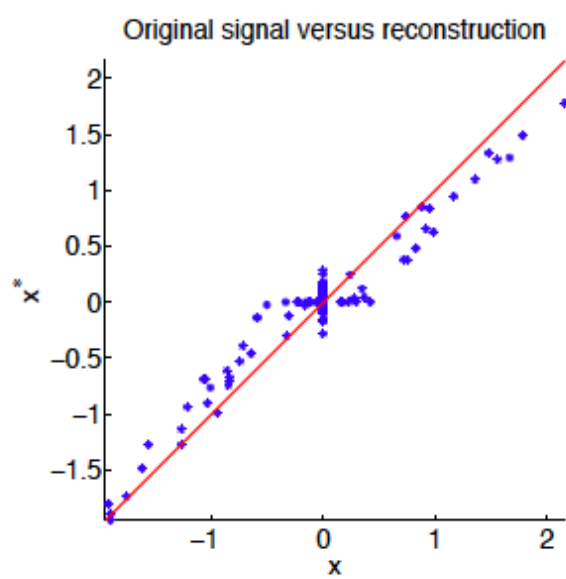


Figura 3.5: Un segnale  $x$  ricostruito tramite il Teorema 2.3 con matrice di acquisizione  $A$  di tipo Gaussiano e rumore bianco: Nell'esempio  $\|x - x^*\|_{l_2} = 1.3\varepsilon$

## Capitolo 4

# Applicazioni

### 4.1 Astronomia

Negli anni la quantità di dati astronomici disponibili è aumentata con grandissima velocità. Come risultato gli astronomi si sono confrontati con l'esigenza di utilizzare delle tecniche di compressione dati tali da diminuire il dispendio economico e temporale. Per alcuni progetti siamo interessati a raggiungere un elevato rapporto di compressione, che con i metodi tradizionali non può essere ottenuto senza una distorsione elevata. Le caratteristiche dell'immagine ricevuta devono infatti fornirci una risoluzione adeguata, si pensi alla fotometria astronomica che attraverso procedimenti ottici misura il flusso luminoso di un corpo celeste. Il caso del satellite Herschel, lanciato tra il 2008-2009 con la missione di studiare la formazione delle galassie attraverso il più grande telescopio spaziale mai costruito, è a stretto contatto con il problema di compressione in quanto i dati fotometrici dovevano essere compressi di un fattore 6 per essere inviati. Poiché il carico della CPU doveva essere piccolo usare metodi convenzionali di compressione non era possibile. La teoria del Compressed Sensing ha permesso di comprimere dati con grande efficienza e mantenendo bassa distorsione. Se confrontato con il JPEG2000, che mostra una *Signal to Noise Ratio* di 9.77 dB, il Compressed Sensing ha una SNR di 46.8 dB dove  $SNR = -20\log(\frac{x-\tilde{x}}{x})$  con  $\tilde{x}$  il segnale recuperato. Questa grande differenza è l'ennesima dimostrazione dell'importanza del Compressed Sensing. Torniamo al problema del satellite Herschel: i dati devono essere compressi di un fattore 6 da una CPU di bassa potenza. Inoltre il telescopio deve effettuare uno scanning rapido di grandissime porzioni di cielo. Supponiamo pertanto di comprimere 6 immagini consecutive: in Figura 4.1 è mostrato come il Compressed Sensing porti a mitigare l'effettiva perdita di risoluzione dell'immagine dovuta alla compressione di 6 immagini. L'approccio con Compressed Sensing in conclusione fornisce un modo computazionalmente poco costoso permettendo anche, grazie alla progettazione di sensori ad acquisizione casuale, di effettuare dei campionamenti rapidi.

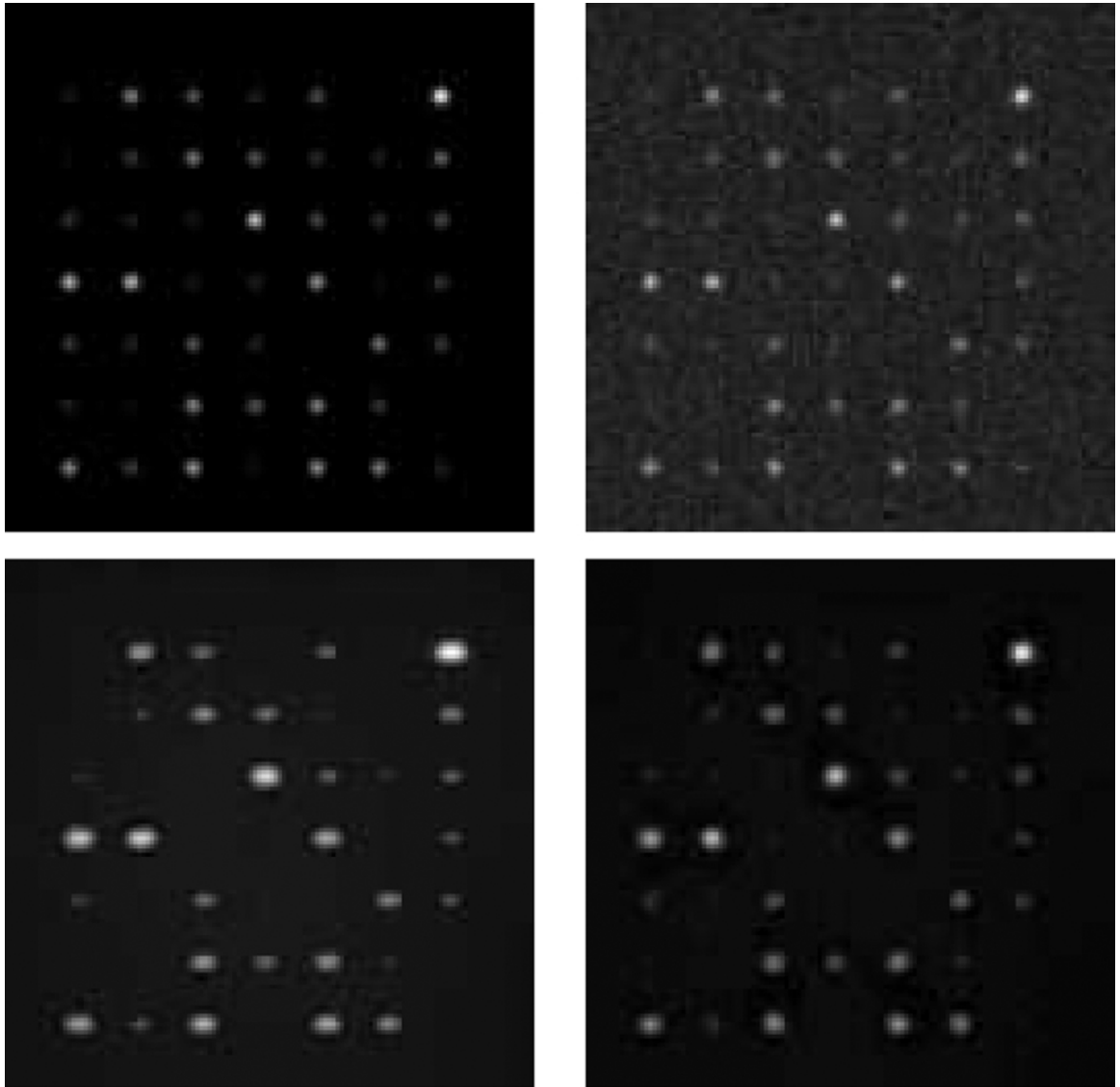


Figura 4.1: In alto a sinistra l'immagine originale. In alto a destra una delle 6 immagini ricevute affetta da rumore gaussiano bianco. In basso a sinistra la media delle 6 immagini di input. In basso a destra la ricostruzione attraverso Compressed Sensing.

## 4.2 Reti di comunicazioni

Abbiamo già osservato come il Compressed Sensing possa essere utile, ad esempio, a livello di ricostruzione e riconoscimento del segnale. Sintetizziamo ora, distinguendo tra i vari livelli che caratterizzano un sistema di comunicazioni, le varie applicazioni del Compressed sensing:

- *Physical Layer* Nel physical layer un grande numero di informazioni viaggia da un utente A attraverso un canale (fibre ottiche, canali radio...) per poi essere ricevuto e riconosciuto da un utente B. Nella ricostruzione del segnale il Compressed Sensing porta numerosi vantaggi nell'ipotesi di dati sparsi. Riferendoci alle tecniche di *Spread spectrum modulation*, ovvero modulazione che sfrutta la proprietà dei segnali di essere espansi e quindi ha a disposizione una banda molto più grande della banda minima, è possibile con *Frequency Hopping* partizionare la banda totale in modo da attribuire a ogni utente un certo *pattern* all'interno del quale l'utente viaggia in modo pseudo-casuale per garantire l'accesso senza collisioni anche agli altri utenti e anche per limitare la probabilità di essere intercettato. Il fatto che i segnali siano a banda estremamente maggiore porta a una sparsità che permette di usare il Compressed Sensing come strategia di identificazione e di ricostruzione del segnale di arrivo.
- *MAC Layer* A livello MAC il Compressed Sensing può essere usato per le Wireless Sensor Network per minimizzare il numero di misure necessarie a monitorare condizioni quali la temperatura, pressione, suono...
- *Application Layer* Il problema di compressione dati è già stato ampiamente trattato e si è già visto come sotto le opportune condizioni il Compressed Sensing può essere usato come oracolo per individuare quali elementi sono non nulli gettando i rimanenti. Possiamo quindi affrontare il problema di *storage* dei dati in modo efficiente.

La ricerca moderna si è focalizzata sulla costruzione di nuove architetture per la conversione *analog to information* tali da alleviare la pressione sulle tecnologie convenzionali ADC, limitate al campionamento di 1GHz. La **Random Modulation Preintegration** permette di digitalizzare dei segnali analogici anche se essi sono a frequenza molto alta. L'idea è di moltiplicare il segnale per una sequenza pseudo-casuale di numeri, integrare il prodotto sul tempo e digitalizzare l'integrale alla fine di ogni intervallo. Osserviamo che la base scelta  $\Psi$  per l'acquisizione delle misure è una Bernoulli.

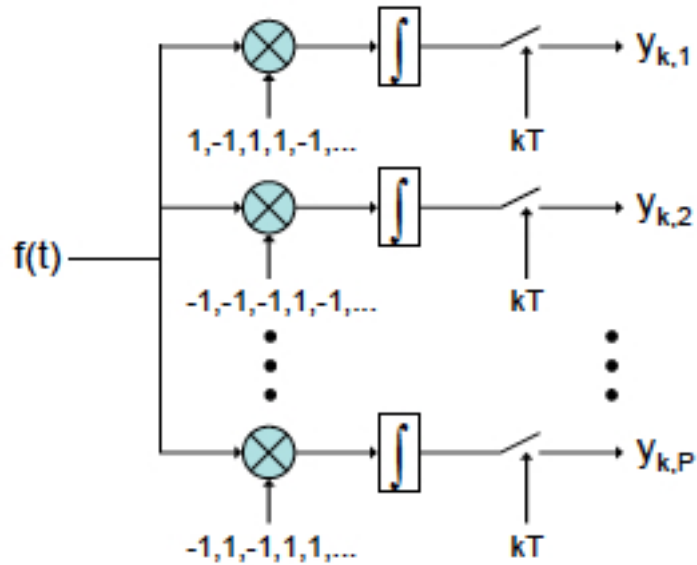


Figura 4.2: Architettura RMPI per la conversione *analog-to-information*.

### 4.3 Single Pixel Camera

In questa sezione presentiamo un nuovo approccio alla costruzione di camere digitali che operino in modo efficiente. Supponiamo di dover ricevere un'immagine di 10 Mega Pixel attraverso un singolo *photodetector* e supponiamo di avere accesso a un chip con 10 milioni di specchi di dimensione  $15\mu\text{m} \times 15\mu\text{m}$  che possiamo comandare orientandoli verso il *photodetector* o meno. Un approccio a forza bruta suggerirebbe di ricevere ogni singolo pixel comandando ogni volta uno specchio diverso per ricevere quindi i 10 milioni di pixel. Se sfruttiamo l'idea che la maggior parte delle immagini sono sparse nell'opportuna base possiamo migliorare il processo prima visto attraverso il Compressed Sensing: usando specchi riflettenti e non riflettenti (rappresentati in Figura 4.3 da zone chiare e zone scure) l'immagine viene ricevuta attraverso dei campionamenti casuali e con massima incoerenza rispetto alla base di campionamento. Le maschere vengono applicate per ogni fase di acquisizione per distinguere specchi riflettenti da specchi non riflettenti. Ovviamente questo metodo nella pratica non è conveniente, ma ha una valenza teorica certamente di primo piano. Il Compressed Sensing ci insegna che con un numero piccolo di misure siamo in grado di ricostruire l'immagine velocemente e a basso costo.

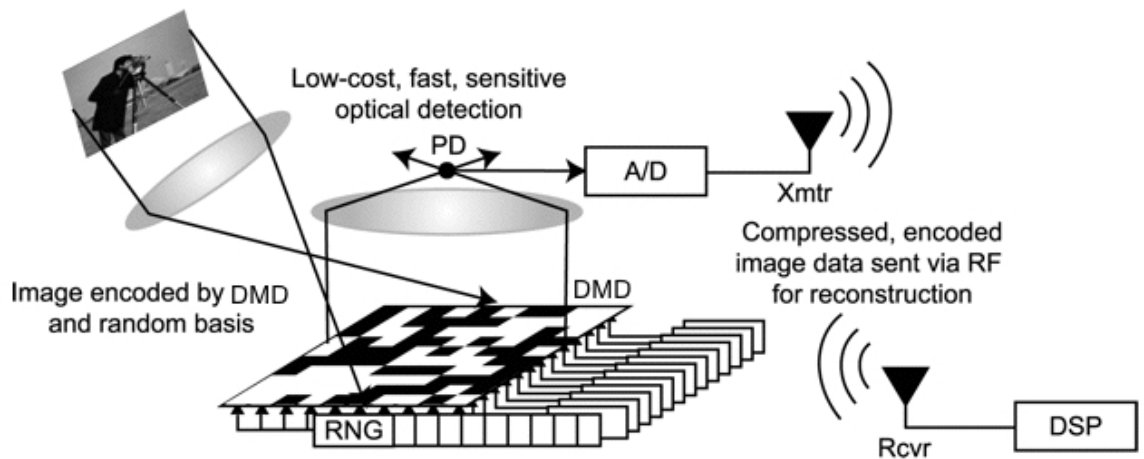


Figura 4.3: L'architettura della Single pixel camera. Gli specchi opportunamente direzionati permettono la ricezione dell'immagine attraverso un singolo fotone.

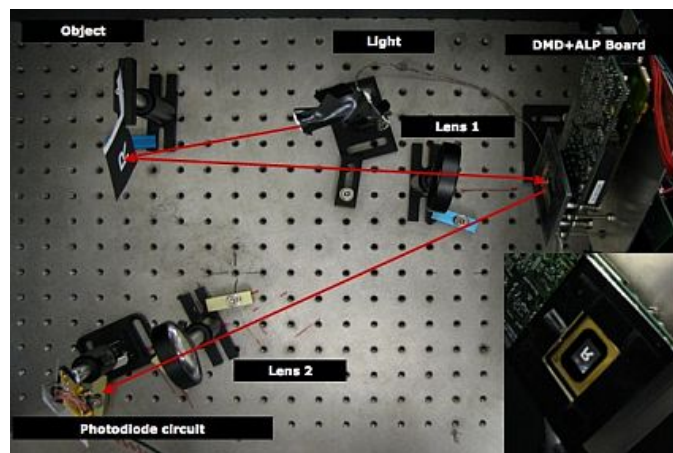


Figura 4.4: L'architettura della Single pixel camera. Ripresa dall'alto dell'esperimento della camera nei laboratori.



## 4.4 Controlli e Robotica

Il problema che verrà trattato in questa sezione riguarda la costruzione di mappe di alta qualità per il riconoscimento della presenza di ostacoli con grandissima efficienza. L'altissimo volume di informazione che è presente rende proibitivo controllare tutte le aree in modo preciso. Mostriamo quindi come sia possibile costruire una mappa attraverso un numero di osservazioni relativamente piccolo. Consideriamo un insieme di veicoli che devono accedere ad un edificio: quello che accade è che la mappatura avviene prima dell'ingresso nell'edificio in modo da portare il veicolo, prima di accedere all'edificio, alla conoscenza a priori degli ostacoli che troverà in esso. Sia  $g(u, v)$  una funzione che presa la posizione  $(u, v)$  vale 1 se c'è un ostacolo corrispondente alla coppia, vale 0 altrimenti. L'immagine ottenuta tramite la mappa  $g(u, v)$  soddisfa le condizioni di sparsità del Compressed Sensing e permette un campionamento pseudo-casuale che con minimizzazione della norma  $l_1$  ricostruirà lo schema degli ostacoli. In Figura 4.4 si considera la comunicazione della presenza dell'ostacolo tra un trasmettitore e un ricevitore. Il parametro fondamentale della potenza del segnale ricevuto è tracciato in funzione di  $(\theta, t)$

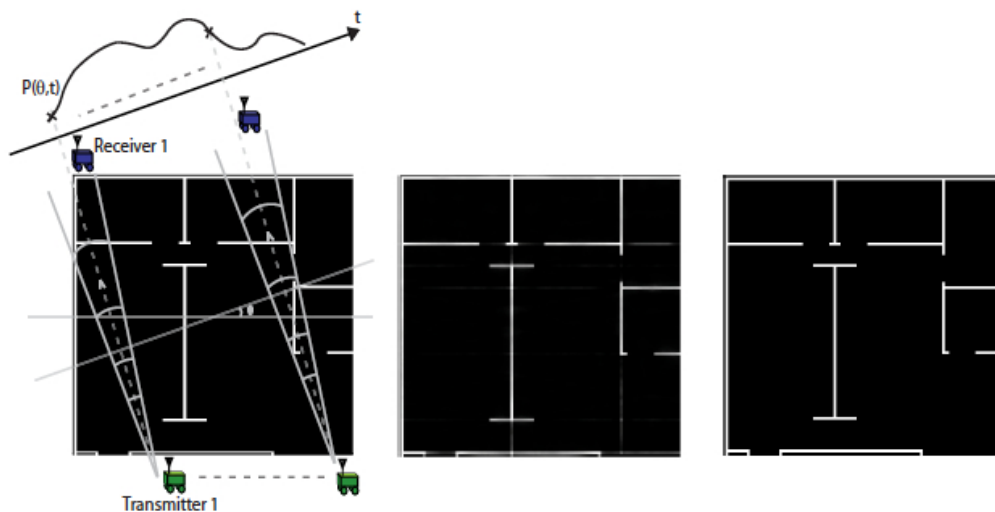


Figura 4.5: Sulla sinistra una mappa che mostra in bianco gli ostacoli. Nel mezzo la ricostruzione della mappa usufruendo del 4% delle misure. Sulla destra la ricostruzione con l'11,7% delle misure.

## Capitolo 5

# Conclusione

Il Compressed Sensing stabilisce una nuova teoria di campionamento grazie alla quale è possibile limitare le acquisizioni alle misure che effettivamente servono, senza dover campionare tutto per poi in un secondo momento gettare i dati inutili. Citando Dennis Healy, professore di matematica e project manager della DARPA

*The possibility of compressed data acquisition protocols which perform as if it were possible to directly acquire just the important information about the image of interest.*

Gli effetti del Compressed Sensing in questo senso appaiono miracolosi: se la matrice di acquisizione  $A = \Phi\Psi$  è tale da soddisfare le condizioni di isometria ristretta per un coefficiente di isometria  $\delta$  piccolo e il segnale è  $S$  sparso nella base  $\Phi$  allora il campionamento casuale corrisponde a un campionamento selettivo degli  $S$  termini non nulli. Questo risultato è ancora più sorprendente se si considera che non vale con una certa probabilità, ma è assicurato. Un risultato più debole di questo, ma comunque altrettanto importante, coinvolge il concetto di incoerenza tra le basi  $\Phi$  e  $\Psi$  e prevede che, sotto condizione di massima incoerenza, il numero di campioni  $m$  necessari per la ricostruzione del segnale  $x$  attraverso la minimizzazione della norma  $l_1$  sia dell'ordine di  $S \log n$  con  $n$  la taglia del segnale. Nei termini del teorema di Shannon-Nyquist è come se la banda del segnale da ricostruire fosse abbastanza piccola da permettere che il numero di campioni sia sufficientemente piccolo. Il Compressed Sensing non mostra interesse alla banda del segnale: un segnale ad ampia banda contiene infatti su certe basi un gran numero di zeri che ai fini della ricostruzione sono termini da ignorare. Pensiamo ad esempio a una somma di sinusoidi a tempo discreto: le loro trasformate di Fourier sono Delta di Dirac  $\delta(t-k) + \delta(t+k)$  con  $k$  la pulsazione della sinusoide e pertanto sono descritte da un numero molto ristretto di coefficienti rispetto al supporto totale del segnale. L'importanza di questa teoria è facilmente evidenziabile se si guarda alle possibilità che offre nella teoria dell'informazione: compressione di immagini, compressione audio, progettazione di nuovi sensori che effettuino un numero di acquisizioni piccolo e quindi efficienti anche dal punto di vista temporale, costruzione di nuove architetture al fine di digitalizzare l'informazione che ci circonda, tutti temi centrali nelle Telecomunicazioni, nei Controlli, nella Bioingegneria e nelle applicazioni ospedaliere (si

pensi allo Shepp-Logan phantom e più in generale in radiologia alla tomografia computerizzata di cui si è discusso), nell'Astronomia e in generale in tutte le scienze che richiedono di confrontarsi con l'informazione che arriva dall'esterno. La via tracciata è quella di costruire dei sensori in grado di effettuare delle misure incoerenti. La single pixel camera rappresenta una di queste architetture in grado di fornire *patterns* pseudo-casuali per l'acquisizione dell'immagine. Lo strumento teorico ottenuto permette in sintesi di stravolgere la teoria di Shannon, riconosciuto come il vero padre della teoria dell'informazione, ponendo l'attenzione non più sulla banda del segnale, ma quanto sulle proprietà di sparsità e sulle proprietà delle basi di acquisizione del segnale stesso ovvero su delle conoscenze a priori che rendono possibile la scelta di una soluzione ottimale tra le infinite possibili soluzioni di un sistema indeterminato di equazioni.

# Bibliografia

- [1] Emmanuel Candés, Justin Romberg, and Terence Tao, Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Trans. on Information Theory* 52(2) pp. 489 - 509, February 2006
- [2] David Donoho, Compressed sensing. *IEEE Trans. on Information Theory* 52(4), pp. 1289 - 1306, April 2006
- [3] Richard Baraniuk, Mark Davenport, Ronald DeVore, and Michael Wakin, A simple proof of the restricted isometry property for random matrices. *Constructive Approximation*, 28(3), pp. 253-263, December 2008
- [4] Jarvis Haupt and Rob Nowak, Signal reconstruction from noisy random projections. *IEEE Trans. on Information Theory*, 52(9) pp. 4036-4048, September 2006
- [5] Emmanuel Candés and Justin Romberg, Sparsity and incoherence in compressive sampling. *Inverse Problems* 23(3) pp. 969-985, 2007
- [6] Yin Zhang, On theory of compressive sensing via ell-1-minimization: Simple derivations and extensions. *Rice CAAM Department Technical Report TR08-11*, 2008
- [7] Emmanuel Candés, Compressive sampling. *Int. Congress of Mathematics*, 3, pp. 1433-1452, Madrid, Spain, 2006
- [8] Emmanuel Candés and Michael Wakin, An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine* 25(2), pp. 21 - 30, March 2008
- [9] Massimo Fornasier and Holger Rauhut, Compressive Sensing. *Chapter in Part 2 of the Handbook of Mathematical Methods in Imaging (O. Scherzer Ed.) Springer*, 2011 [disponibile a <http://www.springer.com/mathematics/applications/book/978-0-387-92920-0>]
- [10] Emmanuel Cands, The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *Compte Rendus de l'Academie des Sciences*, Paris, Series I, 346, pp. 589-592, 2008
- [11] Justin Romberg, Imaging via compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2), pp. 14 - 20, March 2008)

- [12] David Donoho, For most large underdetermined systems of linear equations, the minimal  $\ell_1$  norm solution is also the sparsest solution. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 59(6), pp. 797-829, June 2006
- [13] Marco Duarte, Mark Davenport, Dharmpal Takhar, Jason Laska, Ting Sun, Kevin Kelly, and Richard Baraniuk, Single-pixel imaging via compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2), pp. 83 - 91, March 2008)
- [14] Michael Lustig, David Donoho, and John M. Pauly, Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging. *Magnetic Resonance in Medicine*, 58(6) pp. 1182 - 1195, December 2007
- [15] J. Bobin, J.-L. Starck, and R. Ottensamer, Compressed sensing in astronomy. (Preprint, 2008)
- [16] Waheed U. Bajwa, Jarvis Haupt, Gil Raz, and Robert Nowak, Compressed channel sensing. *Conf. on Info. Sciences and Systems (CISS)*, Princeton, New Jersey, March 2008
- [17] Yasamin Mostofi, Pradeep Sen, Compressive Cooperative Sensing and Mapping in Mobile Networks. *Proceedings of American Control Conference (ACC)*, Page(s):3397 - 3404, June 2009
- [18] W.C.Chew and J.M.Song. Fast Fourier Transform of Sparse Spatial Data to Sparse Fourier Data *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, 4, 2000 pp. 2324-2327
- [19] Richard Baraniuk, Theory and applications of compressive sensing *EUSIPCO*, Lausanne, Switzerland, August 2008
- [20] M.J.Roberts: Signal and System, McGraw-Hill ed.2003, pp. 267-278; pp. 338-341; pp. 496-536