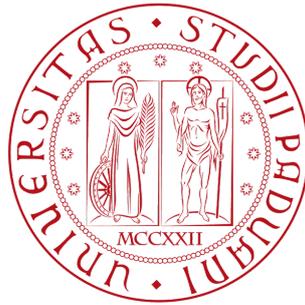


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI FISICA ED ASTRONOMIA
“Galileo Galilei”



CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA

**Processi di fusione tra ioni pesanti con
deformazioni quadrupolari, ottupolari ed
esadecapolari**

RELATORE: **Andrea Vitturi**
CO-RELATORE: **José Antonio Lay Valera**

LAUREANDO: **Giorgio Ruaro**

Anno accademico 2014/2015

Ai miei genitori

Indice

1	Modello a goccia	1
1.1	Stati deformati	1
2	Fusione	5
2.1	Sezione d'urto	5
2.2	Distribuzione di barriera	7
3	Accoppiamento di canali	11
3.1	Stati rotazionali	11
3.2	Stati vibrazionali	13
4	Il caso del ^{224}Ra	17
4.1	Distribuzioni di barriera	17
4.2	Sezioni d'urto	21
5	Conclusioni	23
	Bibliografia	25

Introduzione

In natura esistono numerosi esempi di fusione nucleare fra ioni pesanti. Nel corso degli anni, perfezionando tecniche e strumenti di misura, si è riscontrato come, ad esempio nei processi stellari, vi siano fusioni nucleari a temperature relativamente basse. Ci si concentra, in questo lavoro di tesi, nello studio di collisioni fra ioni a energie inferiori alla barriera Coulombiana, con un occhio di riguardo al ruolo svolto dalle deformazioni di multipolo in tali processi.

Intenderemo qui, con il termine *fusione nucleare*, il processo che porta alla formazione di un nuovo nucleo (più pesante, che può risultare più o meno stabile) a partire da due nuclei padri collidenti fra loro. Tipicamente, il nucleo figlio massivo, verrà a trovarsi in uno stato caratterizzato da alta energia di eccitazione e alti valori di momento angolare. Per descrivere tali fenomeni è utile introdurre la grandezza *sezione d'urto* σ definita come:

$$\sigma = -\frac{\Delta f}{fn\Delta x}$$

dove f è il flusso di particelle proiettile e Δf la sua variazione fra stato finale (post-collisione) e iniziale (pre-collisione), n la densità volumica del bersaglio e Δx il suo spessore. Nel corso di questo elaborato verrà espressa in funzione di grandezze diverse. In un modello ad un solo grado di libertà, trattando quindi i nuclei collidenti come sfere rigide, ci si accorge della discrepanza fra previsioni e dati raccolti. In particolare, si nota come la teoria sottostimi la probabilità di fusione dei due nuclei. Evidentemente, è necessario apportare alcune modifiche al modello: tenteremo qui di inserire una correzione togliendo l'approssimazione di sfera rigida del nucleo, valida per nuclei leggeri. Vedremo quindi, come le deformazioni multipolari dei nuclei portino ad una sensibile variazione della sezione d'urto, con una conseguente modifica alla probabilità di superamento della barriera Coulombiana, che schematicamente riportiamo qui in Figura 1.

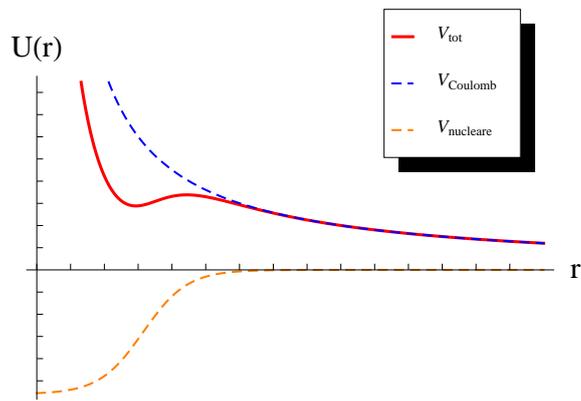


Figura 1: Potenziale di interazione fra due nuclei: somma del termine nucleare (assunto essere di tipo Woods-Saxon) e Coulombiano.

Capitolo 1

Modello a goccia

Per poter descrivere in modo efficace la deformazione nucleare, che intendiamo studiare appunto in questo lavoro, è necessario introdurre un modello che ci permetta di lavorare agevolmente.

Nel modello atomico si era ipotizzato l'esistenza di un campo elettrico in cui gli elettroni si muovono come particelle indipendenti, regolati appunto da questo campo medio a simmetria radiale, che li tiene confinati in una certa regione attorno al nucleo. Analogamente all'atomo, si è sviluppato un modello del tutto simile per descrivere il comportamento nucleare. Protoni e neutroni, costituenti del nucleo, vengono disposti, secondo quest'idea, su livelli energetici quantizzati, regolati dal *principio di Pauli* e dalla *composizione di momenti angolari*, e generati da un campo medio dovuto all'azione di tutti gli altri nucleoni. Nonostante questo modello a *shell* sia atto a descrivere le proprietà dei livelli energetici dei nuclei vicini a shell chiuse, per nuclei lontani da queste particolari situazioni, è indispensabile affrontare il problema con un modello che tenga conto del comportamento collettivo dei nucleoni: il *modello a goccia*.

In analogia ad una goccia di liquido, si hanno forze nucleari a corto range, una densità indipendente dal volume (quindi dalla massa atomica) e a prescindere dal nucleo esaminato, un rapporto fra energia di legame e numero di massa, approssimativamente costante. Matematicamente si descrive quindi il nucleo, esplicitandone l'energia di legame, secondo la formula semi-empirica di Bethe-Weizsacher:

$$B(A, Z) = a_v A + a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_a \frac{(N - Z)^2}{A} \pm \frac{a_p}{A^{\frac{1}{2}}} \quad (1.1)$$

dove A e Z sono rispettivamente il numero di massa ed il numero atomico. I vari coefficienti a_{\dots} sono relativi in ordine al termine di volume, il termine di superficie, il termine Coulombiano, il termine di simmetria e il termine di pairing.

1.1 Stati deformati

Una volta introdotto il modello, è necessario poter descrivere la deformazione del sistema nucleare. Riconosciamo innanzitutto che il nucleo può presentare due tipi di moto collettivo: uno *vibrazionale* e uno *rotazionale*. Il primo consiste in una fluttuazione della superficie attorno ad uno stato di equilibrio, il secondo in una rotazione comune dei nucleoni a partire da una deformazione statica della struttura. Vediamo ora un po' più in dettaglio i due tipi di moto.

Stati vibrazionali. L'approccio più semplice allo studio della superficie del nucleo consiste nel parametrizzarla in coordinate sferiche, tramite le armoniche sferiche:

$$R(\theta', \phi) = R_0 + \sum_{\lambda} \delta_{\lambda} Y_{\lambda 0}^*(\theta') \equiv R_0 + \hat{\Delta}(\Omega) \quad (1.2)$$

dove R_0 è il raggio medio del nucleo, δ_{λ} è la lunghezza di deformazione, $Y_{\lambda 0}^*(\theta')$ sono le relative armoniche sferiche. L'apice sta ad indicare che l'angolo è riferito all'asse di simmetria assiale. Nell'ambito degli stati vibrazionali il parametro δ_{λ} presenterà una dipendenza dal tempo, che verrà esplicitata formalmente nella sezione 3.2. La somma $\sum_{\lambda} \delta_{\lambda} Y_{\lambda 0}^*(\theta) \equiv \hat{\Delta}(\Omega)$ è la deviazione dal raggio, in un punto, dal suo valor medio. Si può normalizzare la lunghezza di deformazione δ_{λ} ad R_0 , per ottenerne un valore adimensionale β_{λ} :

$$\beta_{\lambda} = \frac{\delta_{\lambda}}{R_0}. \quad (1.3)$$

Il parametro λ fornisce la multipolarità della forma. Alcuni esempi di multipolarità sono forniti in Figura 1.1, dove non vengono riportate deformazioni per $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$, in quanto il primo, pur variando il volume del nucleo non ne modifica la forma della superficie (lo studio di questa polarità consente di fatto uno studio sulla compressibilità del nucleo), e il secondo, descrivendo solo una traslazione del centro di massa, non fornisce alcuno stato eccitato fisicamente accettabile.

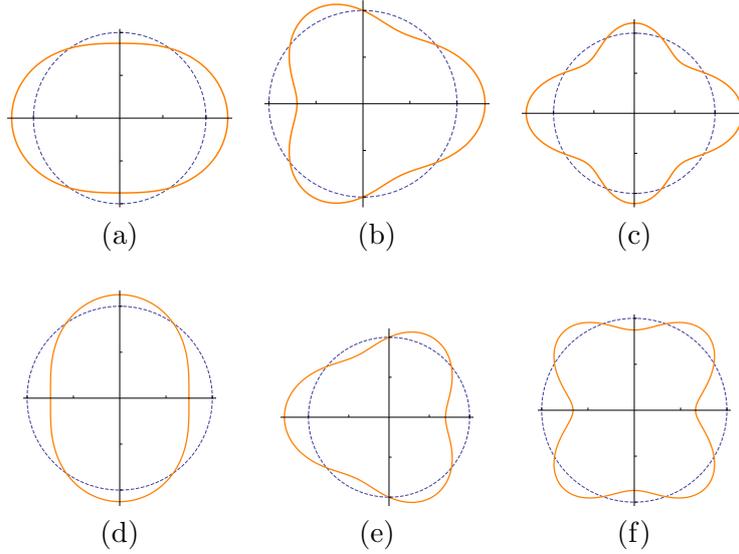


Figura 1.1: Vengono mostrati gli stati deformati nei loro punti di inversione: per $\beta_{\lambda} > 0$: (a) Quadrupolo ($\lambda = 2$); (b) Ottupolo ($\lambda = 3$); (c) Esadecapolo ($\lambda = 4$); per $\beta_{\lambda} < 0$: (d) Quadrupolo ($\lambda = 2$); (e) Ottupolo ($\lambda = 3$); (f) Esadecapolo ($\lambda = 4$).

Quando si analizza uno spettro, in seguito a misure di energia, se lo stato di deformazione è vibrazionale puro, ci si aspetta un set di energie equamente distanziate. In particolare ne risulta che il ΔE tra uno stato eccitato e il successivo, sia pari all'energia di un fonone $\hbar\omega$, energia tipica di un oscillatore armonico.

Stati rotazionali. Questi stati sono caratterizzati da una deformazione permanente della superficie del nucleo, ossia il nucleo risulta stabile in una configurazione non sferica, genericamente caratterizzata da simmetria assiale. In questa configurazione il nucleo tende, per energie basse, a ruotare attorno ad un asse perpendicolare a quello di simmetria, come

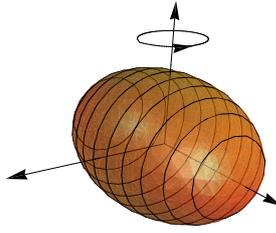


Figura 1.2: Rotazione di un nucleo stabilmente deformato attorno ad un asse perpendicolare a quello di simmetria.

mostrato in Figura 1.2, nel caso di una deformazione quadrupolare prolata ($\beta_2 > 0$). Si possono caratterizzare questi stati tramite un set di numeri quantici $\{I, K\}$. Generalmente si indica con K la proiezione del momento angolare intrinseco \vec{I} sull'asse di simmetria. L'energia dei livelli relativi a K , nel caso in cui la deformazione del nucleo non abbia componente vibrazionale, scala come $I(I + 1)$, andamento che permette di fatto la distinzione da una banda vibrazionale.

Capitolo 2

Fusione

2.1 Sezione d'urto

Nello studio di processi di fusione, l'osservabile sperimentale, è data dalla grandezza *sezione d'urto* σ . Come si può facilmente intuire, nella fase di superamento della barriera, questa grandezza sarà legata alla probabilità di transizione. In un primo approccio, si può descrivere il problema tramite un potenziale unidimensionale, nel quale i nuclei sono considerati come *sfere rigide*. Dividendo la funzione d'onda totale nelle rispettive onde parziali Ψ_ℓ , l'hamiltoniana che descrive il sistema sarà specifica per ogni onda parziale, si ha pertanto:

$$H_\ell(r) = K_\ell + V(r) , \quad (2.1)$$

nella quale possiamo riconoscere l'energia cinetica K_ℓ , avente dipendenza da ℓ tramite il termine centrifugo ¹, e il potenziale $V(r)$. In questo modo si avrà una sezione d'urto specifica per ogni onda parziale ℓ :

$$\sigma_\ell = \frac{\pi \hbar^2}{2\mu E} (2\ell + 1) T_\ell \quad (2.2)$$

caratterizzata da una componente geometrica riconducibile al fattore $(2\ell + 1)$ e da un fattore dipendente dalla dinamica T_ℓ . La sezione d'urto totale sarà la somma delle sezioni d'urto relative alle onde parziali.

$$\sigma_{tot}(E) = \sum_\ell \sigma_\ell = \sum_\ell \frac{\pi \hbar^2}{2\mu E} (2\ell + 1) T_\ell \quad (2.3)$$

dove il fattore di trasmissione T_ℓ si trova risolvendo l'equazione di Schrödinger associata al sistema:

$$[K + V_\ell(r)] \Psi_\ell(r) = E \Psi_\ell(r) , \quad (2.4)$$

Per energie minori della barriera Coulombiana, in approssimazione di Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB), per risolvere equazioni differenziali parziali, si trova che il coefficiente di trasmissione vale:

$$T_\ell(E) = \frac{1}{1 + e^{2S_\ell(E)}} , \quad (2.5)$$

dove il termine S_ℓ è dato dall'integrale:

$$S_\ell(E) = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}} \int_{r_1}^{r_2} \left[V_0(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2\mu r^2} - E \right]^{\frac{1}{2}} dr . \quad (2.6)$$

¹ $V_{centr}(r, \ell) = \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2\mu r^2}$

Gli estremi di integrazione si vedono in Figura 2.1. Possiamo ora, per $V_{max} - E$ non troppo grande, approssimare la barriera ad una parabola con concavità negativa (Figura 2.1). Nel

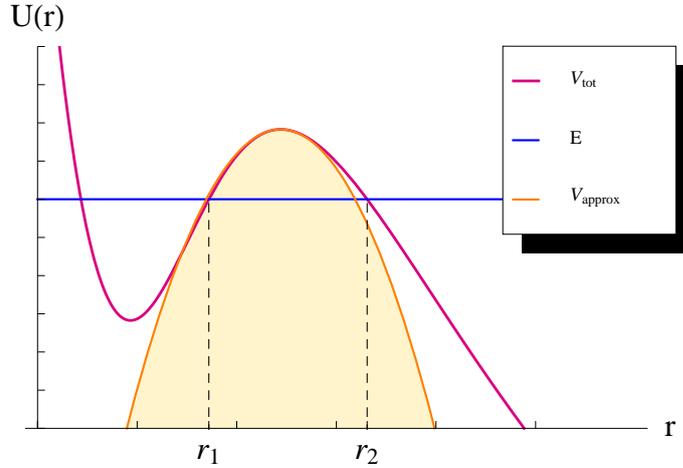


Figura 2.1: Limiti della barriera Coulombiana e approssimazione parabolica.

caso dell'oscillatore armonico, la soluzione è analitica e abbiamo che:

$$T_{\ell=0}(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{2\pi(V_{max}-E)}{\hbar\omega}}}, \quad (2.7)$$

formula valida per energie sia sopra che sotto la barriera Coulombiana V_{max} . Possiamo in prima approssimazione esprimere le trasmissioni delle varie onde parziali, semplicemente in funzione di uno shift in energia rispetto al valore $\ell = 0$:

$$T_{\ell}(E) = T_0 \left(E - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu R_0^2} \right) \quad (2.8)$$

Sommando adesso su tutti i possibili valori di ℓ , si arriva alla formula di Wong:

$$\sigma(E) = \frac{r_2^2 \hbar \omega}{2E} \ln \left[1 + e^{\frac{2\pi(E-V_{max})}{\hbar\omega}} \right] \quad (2.9)$$

A puro scopo didattico, per capire l'andamento della funzione $\sigma(E)$, possiamo considerare il limite per energie basse ($E - V_{max} \ll 1$ e l'esponenziale tende a zero). In tal caso avremo:

$$\sigma(E) = \frac{r_2^2 \hbar \omega}{2E} e^{\frac{2\pi(E-V_{max})}{\hbar\omega}} \quad (2.10)$$

All'altro estremo vediamo che per grandi valori dell'energia, che corrisponde al limite classico della formula, la sezione d'urto si riduce alla sezione geometrica del nucleo πr^2 .

Comparando tale modello con i dati sperimentali, ci si accorge di un comportamento sistematicamente fuori dalla previsione, pur seguendone l'andamento esponenziale; in particolare, si ha una sezione d'urto sperimentale a basse energie, di ordini di grandezza più grande rispetto alle aspettative. Si nota inoltre una forte dipendenza isotopica dalla natura dello specifico nucleo come evidenziato in Figura 2.2 e 2.3.

Al fine di risolvere il problema, si prova a togliere l'approssimazione WKB e quella parabolica, ciononostante non si ottiene un miglioramento consistente nella capacità di previsione del modello. La questione viene risolta rilasciando la ben più restrittiva condizione di nucleo a sfera rigida. Sappiamo, infatti, che il nucleo è una struttura complessa

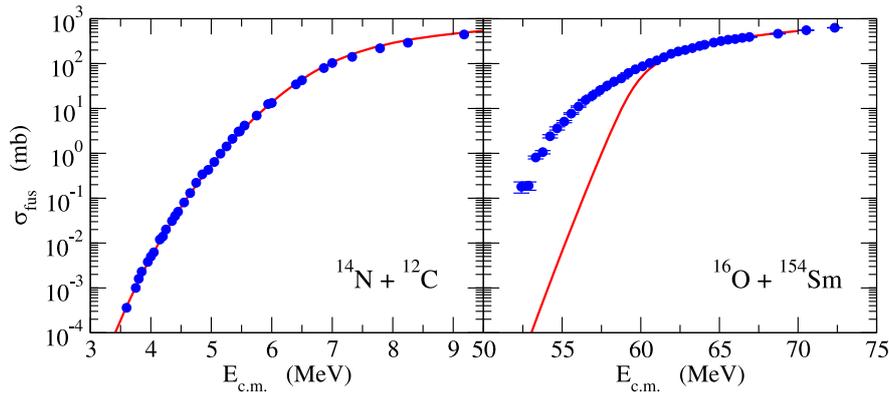


Figura 2.2: A confronto le sezioni d'urto per due sistemi diversi: $^{14}\text{N}+^{12}\text{C}$ e $^{16}\text{O}+^{154}\text{Sm}$. Si noti come, per il primo sistema leggero, si abbia un ottimo accordo fra teoria (—) e dati sperimentali (●), mentre a destra è evidenziata una sottostima della sezione d'urto nel modello teorico.

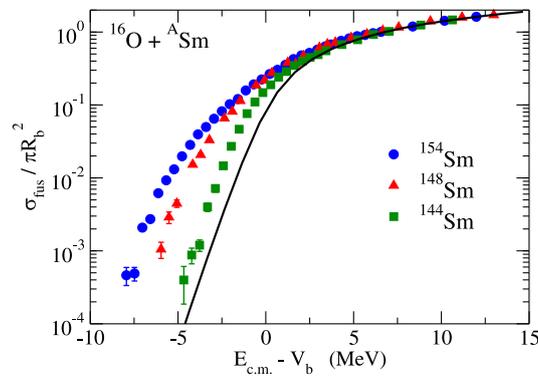


Figura 2.3: Dipendenza della sezione d'urto dal numero di massa: in particolare solo il nucleo quasi-sferico (●) del ^{144}Sm si avvicina alla predizione teorica, qui in nero (—)

composta da più particelle e questo fa sì che vi siano ulteriori gradi di libertà da considerare nella trattazione del processo. Come vedremo, le modifiche alla superficie del nucleo, descritte nel capitolo precedente, porteranno, in base anche alla loro orientazione reciproca, a un *ensemble* di barriere, comunemente chiamato *distribuzione di barriera*.

2.2 Distribuzione di barriera

Classicamente, una particella di energia E , in moto lungo una direzione generica $\hat{\mu}$, se entra in una regione ove è attivo un potenziale, può assumere due comportamenti: definito V_{max} il massimo del potenziale, se $E > V_{max}$ la particella procede, con probabilità pari ad 1, oltre la barriera, portando con sé un'energia cinetica che alla barriera vale $E - V_{max}$; altrimenti, nel caso $E < V_{max}$, la particella riflette sulla barriera tornando indietro con energia $E' \leq E$, a seconda del tipo di urto. Pertanto, indicando ancora con $T(E)$ la probabilità di superare la barriera, si ha che la quantità $\frac{dT(E)}{dE}$ è una delta di Dirac $\delta(V_{max})$.

A causa dell'effetto tunnel, invece, quantisticamente si ha un fenomeno di smoothing della barriera a scalino, con conseguente allargamento della $\delta(V_{max})$ in $\frac{dT(E)}{dE}$, come mostrato in Figura 2.4. Se, oltre a considerare un allargamento dovuto all'effetto tunnel, aggiungiamo un possibile accoppiamento dei gradi di libertà del sistema, esso si troverà

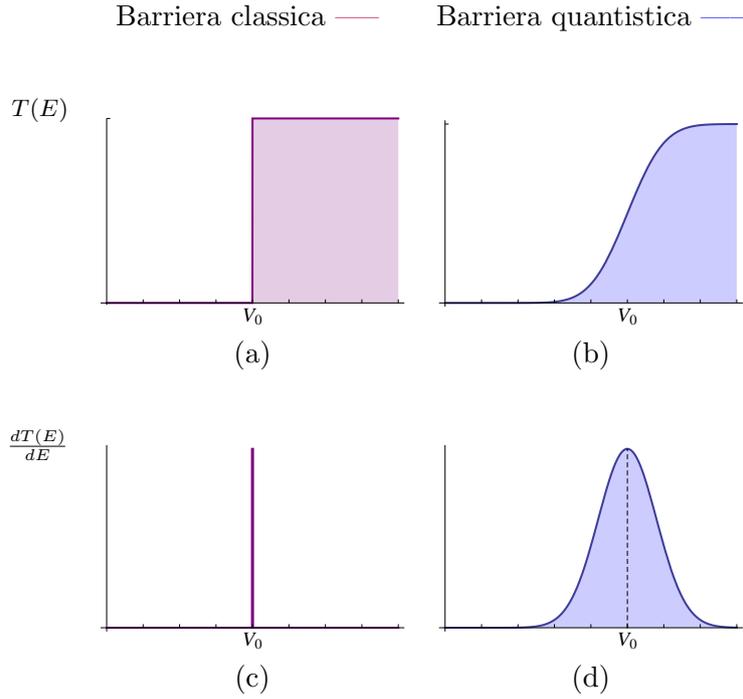


Figura 2.4: Plot di barriere nel caso di un solo canale.

ad affrontare barriere diverse nei diversi canali corrispondenti ai diversi stati interni del nostro sistema. In Figura 2.5 si vede la barriera nel caso di due canali accoppiati a confronto con il caso di un solo canale. Si noti come per energie sottobarriera si abbia un forte incremento della sezione d'urto (Figura 2.5 (b))

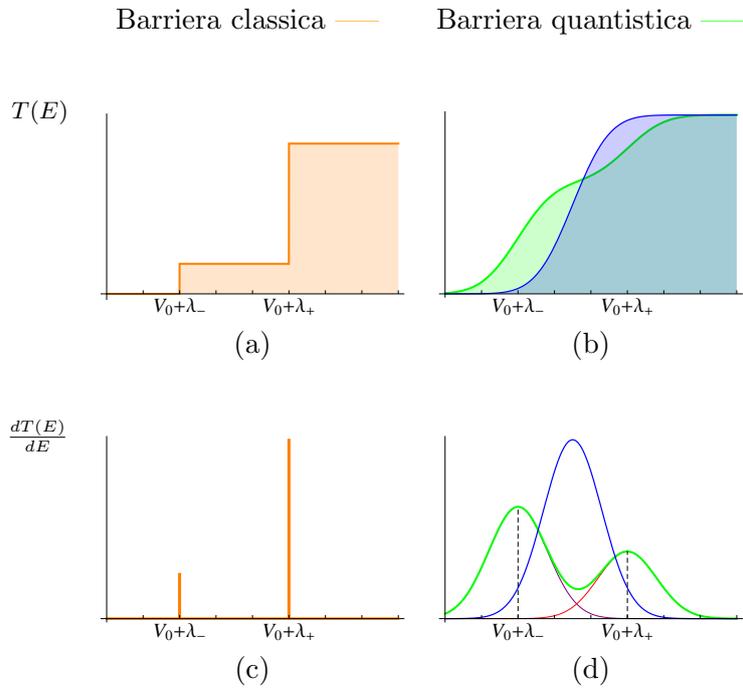


Figura 2.5: Plot di barriere nel caso di due canali accoppiati a confronto col caso di un solo canale.

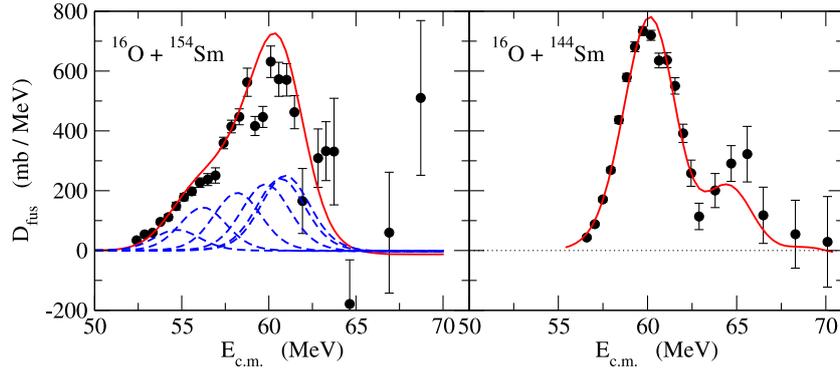


Figura 2.6: Distribuzione di barriera per i sistemi $^{16}\text{O}+^{154}\text{Sm}$ e $^{16}\text{O}+^{144}\text{Sm}$ (—), ricavata dai dati sperimentali (\bullet). A sinistra vengono anche mostrati i contributi dei vari canali (- - -) che sommati danno la distribuzione totale.

È proprio questo insieme di barriere a descrivere le proprietà di interazione degli ioni collidenti, insieme che viene comunemente detto *distribuzione di barriera*. È possibile associare il calcolo delle relative distribuzioni, a misure dirette delle sezioni d'urto per diverse onde parziali ℓ . Per far ciò, si parte dall'equazione (2.3), si moltiplica per l'energia da entrambi i lati e, approssimando la sommatoria con un integrale, si giunge alla forma:

$$E\sigma(E) = \pi R_0^2 \int_{\ell} dE T_0(E), \quad (2.11)$$

dove l'integrale su ℓ è da intendersi come un integrale sull'energia, che dipende da ℓ . Si ha infatti, sfruttando l'equazione (2.8):

$$E\sigma(E) = \pi R_0^2 \int_{-\infty}^E d\mathcal{E} T_0(\mathcal{E}), \quad (2.12)$$

e derivando due volte

$$\frac{dT_{\ell}(\mathcal{E})}{d\mathcal{E}} = \frac{1}{\pi R_0^2} \left[\frac{d^2 \mathcal{E} \sigma_{\ell}(\mathcal{E})}{d\mathcal{E}^2} \right], \quad (2.13)$$

dove \mathcal{E} è stato definito come:

$$\mathcal{E} = E - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu R_0^2}. \quad (2.14)$$

È l'utilizzo di questa espressione che consente di determinare la distribuzione di barriere "sperimentale" a partire dalle misure di sezione d'urto di fusione.

Capitolo 3

Accoppiamento di canali

3.1 Stati rotazionali

Ci accingiamo ora a descrivere il processo di reazione dei due nuclei collidenti. Adottiamo a tal fine il metodo *IWBC: ingoing-wave boundary conditions*.

Il sistema delle due particelle è descritto da una funzione d'onda totale Ψ^+ . Indicando con ϕ_β la funzione d'onda dello stato interno del nucleo bersaglio, con $\chi_\beta(\vec{R})$ la funzione d'onda di interazione fra le due particelle, possiamo decomporre la totale Ψ^+ come:

$$\Psi^+(\vec{R}, \xi) = \sum_{\beta} \frac{\chi_{\beta}(\vec{R})}{R} \cdot \phi_{\beta}(\xi). \quad (3.1)$$

In questo lavoro, prenderemo sempre come ione proiettile, nuclei di ^{16}O , caratterizzati da una forte sfericità e da energie di eccitazione relativamente elevate. Questa scelta fa in modo che sia solo il nucleo bersaglio a determinare, tramite la sua struttura, le caratteristiche dinamiche del processo. È possibile, ora, considerare l'hamiltoniano del sistema e la corrispondente equazione di Schrödinger indipendente dal tempo, in coordinate sferiche:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \Psi^+ + V \Psi^+ = E \Psi^+, \quad (3.2)$$

e dividendo il potenziale V in somma di un termine di accoppiamento e di un termine centrale, ricaviamo un set di equazioni accoppiate del tipo:

$$\frac{d^2 \chi_{\beta}(\vec{R})}{dR^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{R^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E_{\beta} - V_{\beta}^{eff}(\vec{R})] \chi_{\beta}(\vec{R}) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \sum_{\alpha \neq \beta} V_{\alpha\beta}^{Accop.}(\vec{R}) \chi_{\alpha}(\vec{R}) \quad ; \quad (3.3)$$

dove μ è la massa ridotta, E_{β} è l'energia relativa al canale β . In questo caso il canale β è descritto dalla terna di numeri quantici $\{I, \ell, J\}$ che indicano rispettivamente il momento angolare dello stato ϕ_{β} , il momento angolare nelle coordinate relative ed infine il momento angolare totale al quale sono accoppiati i precedenti due.

Al fine di trovare una soluzione all'equazione differenziale (3.3), approssimiamo il potenziale centrale $V_{\beta}^{eff}(R)$, con il potenziale di Woods-Saxon attrattivo ² più il potenziale

¹Si ricorda che in coordinate sferiche si ha: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) \right]$

²Il potenziale di Woods-Saxon: $V = -\frac{V_0}{1 + \exp\left[\frac{(R-r)}{a}\right]}$, dove r è il raggio del nucleo, che viene determinato, assieme ai parametri V_0 e a , in processi di scattering. Tipici valori per tali parametri sono: $V_0 = (52 - 0,3E) \text{ MeV}$, $a = 0,65 \text{ fm}$, $R = 1,25 \cdot A^{\frac{1}{3}} \text{ fm}$.

Coulombiano repulsivo ³, ignorando il contributo, noto come termine di riorientamento, $V_{\beta\beta}$. Il termine $V_{\alpha\beta}$ rappresenta l'elemento di matrice non diagonale dell'interazione, relativo all'accoppiamento di due diversi canali, α e β appunto.

Ci proponiamo ora di risolvere l'equazione (3.3), utilizzando le seguenti condizioni al contorno:

$$\chi_{\beta}(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \delta_{\beta 0} H_{\ell}^{(-)}(k_{\beta}) + r_{\beta} H_{\ell}^{(+)}(k_{\beta} R) \quad (3.4)$$

$$\chi_{\beta}(R) \xrightarrow{R=R_{min}} t_{\beta} H_{\ell}^{(-)}(k_{\beta} R) \quad (3.5)$$

dove $H_{\ell}^{(-)}$ $H_{\ell}^{(+)}$ indicano le funzioni d'onda, rispettivamente entranti e uscenti, relative al termine Coulombiano, con $k_{\beta} = \sqrt{\frac{2\mu(E-\epsilon_{\beta})}{\hbar^2}}$ il numero d'onda associato. Ribadiamo qui che β rappresenta un set di numeri quantici, pertanto con χ_{β} si vuol dire che χ dipende dai numeri I , ℓ e J .

La probabilità di trasmissione totale T , è data quindi dalla somma della probabilità su ogni singola coppia di valori β . Si ha:

$$T = \sum_{\beta} |T_{\beta}|^2 = \sum_{\beta} \frac{v_{\beta}}{v_0} |t_{\beta}|^2 \quad (3.6)$$

dove v_{β} indica la velocità relativa al canale β .

Consideriamo ora il processo fra due nuclei, nel quale uno presenta uno spettro rotazionale di quadrupolo (vedi Figura 1.1 (a)-(d)) ed adoperiamo lo sviluppo in armoniche sferiche come nell'equazione (1.2). Se ora si assume che il potenziale sia ancora una funzione della distanza fra la particella e la superficie del nucleo, allora, il potenziale di interazione seguirà la medesima dipendenza in $R - R_0$, avendo cura di sostituire R_0 con $R(\theta, \phi) \stackrel{simm. ass.}{=} R(\theta)$, ottenendo così:

$$V(R, \theta') = V(R - R(\theta')). \quad (3.7)$$

Da cui segue:

$$V(R - R(\theta')) = \sum_{\lambda} V_{\lambda}(R) Y_{\lambda 0}^*(R) \quad (3.8)$$

dove

$$V_{\lambda}(R) = 2\pi \int_{-1}^1 V(R - R(\theta')) Y_{\lambda 0}(\theta', 0) d(\cos \theta') \quad (3.9)$$

Con una trasformazione di coordinate possiamo passare dal sistema della particella al sistema del laboratorio, caratterizzato dalle variabili (senza apici) θ e ϕ . Abbiamo:

$$Y_{\lambda 0}^*(\theta', 0) = \sum_{\mu} \mathcal{D}_{\mu 0}(\epsilon, \eta, \rho) Y_{\lambda 0}^*(\theta, \phi) \quad (3.10)$$

dove gli argomenti di \mathcal{D} sono gli angoli di Eulero. Sostituendo quindi l'espressione trovata (3.10) nell'equazione (3.8) si giunge a:

$$V(R - R(\theta)) = \sum_{\lambda\mu} V_{\lambda}(R) \mathcal{D}_{\mu 0}(\epsilon, \eta, \rho) Y_{\lambda 0}^*(\theta, \phi) \quad (3.11)$$

In questo modo ci si accorge da subito che un calcolo di ogni accoppiamento possibile diventa ben presto proibitivo, in quanto dato $J = I + \ell$, molte coppie $\{I, \ell\}$ soddisfano

³Il potenziale Coulombiano: $V = \frac{Z_p Z_t e^2}{r}$

a tale relazione ed, essendo queste accoppiate ognuna in modo differente, il numero di canali diventa computazionalmente inaccettabile. Per ovviare a questo limite si cerca di ridurre il numero di canali tramite l'approssimazione iso-centrifuga. Consideriamo la particella proiettile, movente in linea retta e trascureremo la variazione della barriera centrifuga dovuta all'eccitazione di gradi di libertà interni. Eliminiamo quindi il parametro ℓ sommando su di esso, facendone una media pesata:

$$\bar{\chi}_\beta(R) = (-1)^I \sum_{\ell} \langle J0I0 | \ell 0 \rangle \chi_\beta(R), \quad (3.12)$$

è stato quindi ridotto β ad un set di soli due numeri quantici $\{I, J\}$. In questo modo il sistema di equazioni accoppiate si riduce a:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\chi}_\beta}{dR^2} - \frac{J(J+1)}{R^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E_\beta - V_\beta^{eff}(R)] \bar{\chi}_\beta = \\ = \frac{2\mu}{\hbar^2} \sum_{I \neq I'} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}} \langle KI | V_{\alpha\beta}^\lambda(R, \theta') | KI' \rangle \bar{\chi}_\alpha, \end{aligned} \quad (3.13)$$

dove K indica la banda rotazionale sulla quale vivono gli stati I ed I' . Riprendiamo ora la matrice di rotazione $\mathcal{D}_{\mu 0}^\lambda$ introdotta in (3.10), inglobando in essa la dipendenza dalla multipolarità λ della forma, ed usando la definizione di Bohr-Mottelson per gli elementi di matrice, otteniamo:

$$\langle KI | \mathcal{D}_{\mu 0}^\lambda | KI' \rangle = \hat{I} \langle IK \lambda 0 | I' K \rangle. \quad (3.14)$$

Tutto ciò serve per arrivare a descrivere il potenziale nel sistema del laboratorio, avremo pertanto:

$$\langle KI | V_{\alpha\beta}^\lambda(R, \theta') | KI' \rangle = V_\lambda(R) \hat{I} \langle IK \lambda 0 | I' K \rangle \quad (3.15)$$

Per risolvere alla fine l'equazione (3.13) si impongono le condizioni al contorno trovate prima in (3.5)

3.2 Stati vibrazionali

In modo analogo si possono determinare gli elementi di matrice non diagonali $V_{\alpha\beta}$ nel caso il nucleo presenti uno spettro vibrazionale. In tal caso, usando la parametrizzazione introdotta nell'equazione (1.2), è possibile esplicitare il fattore δ_λ in funzione degli operatori di creazione e distruzione $b_{\lambda\mu}^\dagger$ e $b_{\lambda\mu}$:

$$\delta_{\lambda\mu} = \frac{\beta_\lambda}{\sqrt{2\lambda+1}} [b_{\lambda\mu}^\dagger + (-1)^\mu b_{\lambda-\mu}]. \quad (3.16)$$

L'accoppiamento quindi fra lo stato di minimo momento angolare (0^+) ed il primo stato ad un fonone di multipolarità λ , può essere ottenuto applicando allo stato $\langle 0, 0 |$ l'operatore di creazione. Avremo:

$$\begin{aligned} \langle 1, I\mu | V(R - R(\xi)) | 0, 0 \rangle &= \langle 0, 0 | b_{\lambda\mu} V(R - R(\xi)) | 0, 0 \rangle \\ &= \frac{\beta_\lambda}{\hat{\lambda}} \langle 0 | \frac{\partial V}{\partial \alpha_{\lambda\mu}} | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.17)$$

dove:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_{\lambda\mu}} = -R_0 \frac{\partial V}{\partial R} Y_{\lambda\mu}^*(\hat{R}). \quad (3.18)$$

Il modo più semplice di descrivere ora la superficie è approssimarla ad un oscillatore armonico. L'hamiltoniano del sistema risulterà quindi, considerando una componente lineare di accoppiamento:

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2\Lambda} + \frac{1}{2}\zeta\xi^2 + \mathcal{F}\xi . \quad (3.19)$$

Dove Λ è un parametro di inerzia e ζ è la costante elastica, \mathcal{F} la costante di accoppiamento. Risolvendo \mathcal{H} , troviamo sulla diagonale le energie dell'oscillatore

$$Q = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) = \hbar\sqrt{\frac{\zeta}{\Lambda}} \left(n + \frac{1}{2} \right) , \quad (3.20)$$

mentre gli altri elementi di matrici avranno una struttura del tipo:

$$F \left(\sqrt{n}\delta_{n,m+1} + \sqrt{n+1}\delta_{n,m-1} \right) , \quad (3.21)$$

con $F = \mathcal{F}\sqrt{\frac{|Q|}{2\zeta}}$ l'intensità dell'accoppiamento. Si trovano gli autovalori di \mathcal{H} :

$$\lambda_n = n|Q| - \frac{F^2}{|Q|} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

Notiamo come l'effetto dell'accoppiamento produca sempre almeno una barriera inferiore a quella in entrata. Data la natura del processo, considerando indipendenti gli eventi su ogni barriera, si ha una distribuzione poissoniana nell'espansione dell'autostato a energia minima di $H(x, \xi)$, quindi:

$$|0\rangle = \sum_n \left[\frac{\left(\frac{F}{Q}\right)^n}{\sqrt{n!}} \right] e^{-\frac{F^2}{2Q^2}} |n\rangle \quad (3.23)$$

È facile ora prendere i pesi di ogni singola barriera, che indicheremo con $\rho_{\langle N \rangle}$, facendo il modulo quadro dei coefficienti. Ciò che si ottiene, esplicitando i termini in funzione del numero medio di quanti $\langle N \rangle = \frac{F^2}{Q^2}$ è:

$$\rho_{\langle N \rangle} = \frac{\langle N \rangle^n}{n!} e^{-\langle N \rangle} . \quad (3.24)$$

Da ciò si ricava un'espressione per la probabilità di trasmissione totale:

$$T = \sum_n \rho_{\langle N \rangle} T[E, V_0 + \lambda_n] \quad (3.25)$$

Per la natura della distribuzione di Poisson, si evince subito che nel limite in cui $\langle N \rangle \rightarrow 0$ si ha $T \rightarrow T[E, V_0]$, al contrario, quando $\langle N \rangle \gg 0$, ossia per accoppiamenti importanti, la distribuzione di Poisson tende ad una gaussiana.

Esempio. Per una migliore comprensione analizziamo qui il caso di un sistema che abbia solo 2 canali accoppiati. In particolare si abbia il canale in entrata elastico, accoppiato con un canale inelastico con $Q < 0$. La matrice ne risulta quindi:

$$V = \begin{pmatrix} 0 & F \\ F & -Q \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

⁴È stato utile porre l'energia dello stato fondamentale $E_0 = 0$, in modo da avere nella matrice le sole energie utili.

Gli autovalori diventano quindi:

$$\begin{cases} \lambda_+ = \frac{1}{2} \left(-Q + \sqrt{Q^2 + 4F^2} \right) \\ \lambda_- = \frac{1}{2} \left(-Q - \sqrt{Q^2 + 4F^2} \right) \end{cases} \quad (3.27)$$

con pesi calcolati secondo (3.24), che qui esprimeremo direttamente in funzione di Q ed F :

$$\begin{cases} \rho_+(Q, F) = \frac{2F^2}{4F^2 + Q^2 - Q\sqrt{Q^2 + 4F^2}} \\ \rho_-(Q, F) = \frac{2F^2}{4F^2 + Q^2 + Q\sqrt{Q^2 + 4F^2}} \end{cases} \quad (3.28)$$

Un rapido sguardo, permette di capire come l'aumento di probabilità di transizione ci sia sempre, sia con $Q > 0$ che con $Q < 0$. Il caso interessante è il secondo ($Q < 0$), in quanto la barriera più bassa porta il peso maggiore, evidenziando più spiccatamente l'effetto dell'accoppiamento come mostrato in figura 2.5 (d).

Capitolo 4

Il caso del ^{224}Ra

Daremo, in questo capitolo, attenzione al Radio 224, evidenziandone in particolare lo spettro rotazionale di eccitazione a bassa energia, fornendone di volta in volta i parametri di deformazione β_λ .

4.1 Distribuzioni di barriera

In questa configurazione, l'isotopo preso in esame, mostra uno spettro rotazionale, come si può facilmente appurare dalla figura seguente 4.1, notando come le energie siano distanziate, almeno al primo ordine, seguendo l'andamento di $I(I + 1)$, con una successione (a partire dallo spin 4) di livelli a parità naturale alternata.

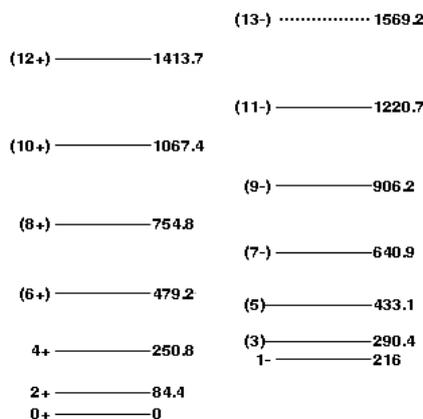


Figura 4.1: Spettro associato a bande di tipo rotazionale per ^{224}Ra . Le energie sono espresse in [KeV]. [7]

La superficie viene descritta da una somma di armoniche sferiche, ovviamente reali, $Y_{\lambda 0}$, dando:

$$R = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda} \beta_{\lambda} Y_{\lambda,0} \right) \quad \lambda \geq 2, \quad (4.1)$$

con $R_0 = 7.29$ fm, $\beta_2 = 0.138$ e $\beta_3 = 0.099$ [6]. Si è voluto qui, dare uno sguardo anche a deformazioni esadecapolari, corrispondenti a $\lambda = 4$.

Date queste configurazioni, è stato possibile risolvere numericamente senza l'approssimazione parabolica, simulando processi di fusione sotto barriera per il sistema $^{16}\text{O} + ^{224}\text{Ra}$,

l'equazione (3.3). Si è indagato un range di energia della particella incidente da 72 a 92 MeV, sapendo a priori che la barriera coulombiana è piccata intorno al valore di 80 MeV, con un passo di energia $\Delta E = 0.5$ MeV. Nel calcolo si sono inclusi gli stati più bassi della banda rotazionale associata con lo stato fondamentale. Ricordo che nel caso di deformazioni con λ pari la banda rotazionale è costituita da una successione di stati con momenti angolari pari e parità sempre positiva. Nel caso di deformazioni con λ dispari la simmetria rispetto all'equatore viene rotta, e la banda fondamentale risulta costituita da una successione di stati con momenti angolari scalati di una unità e parità alternata (O^+ , 1^- , 2^+ , 3^- e così via). Nei calcoli la banda rotazionale è stata necessariamente troncata ad un valore massimo del momento angolare ($I = 6^+$). Riportiamo in figura 4.2 i dati ottenuti (a sinistra) e la loro derivata (a destra). Si sono tenuti costanti i parametri di deformazione β_λ durante tutti i run, con valori riferiti, come suddetto, alla referenza [6].

Come si può notare, la deformazione del nucleo porta valori più bassi nella distribuzione di barriera e quindi ad un aumento della probabilità di transizione, soprattutto per valori in energia inferiori alla barriera stessa (da 77 a 80 MeV circa). L'utilità di tale analisi è che questa possa aiutare nella determinazione dei valori delle deformazioni del nucleo. Supponiamo ad esempio di avere un nucleo deformato β_2 : questo risulterà in uno stato oblatto ($\beta_2 > 0$) oppure prolato ($\beta_2 < 0$). Quando si va a studiare processi di fusione, la variazione di β da positivo a negativo, va ad agire nei termini diagonali della matrice di accoppiamento, in particolare nel termine di riorientamento, permettendo di fatto una distinzione dei due casi. D'altro canto, ci possono essere casi in cui si hanno deformazioni che coinvolgono più multipolarità, si ha quindi una superficie nucleare descritta da più valori di β , vedremo quindi nuclei con deformazioni del tipo: $\beta_2 + \beta_3$, $\beta_2 + \beta_3 + \beta_4$ e $\beta_2 + \beta_4$, al fine di studiarne l'impatto sulle distribuzioni di barriera. A tal proposito, facciamo riferimento alla figura 4.3.

Per semplicità abbiamo supposto la coincidenza di tutti gli assi di simmetria assiale delle varie multipolarità, in modo che la stessa simmetria sia conservata anche per nuclei interessati a più tipi di deformazione.

Possiamo, innanzitutto, vedere come l'accoppiamento separi in più picchi le distribuzioni di barriera. Ponendo a confronto i risultati, possiamo notare come non vi sia differenza qualitativa fra deformazioni con multipolarità $\lambda = 2, 3$ e $\lambda = 2, 3, 4$. Il contributo pertanto di β_4 , si manifesta livellando i due picchi e allargandoli fra di loro ulteriormente. Al contrario, la presenza o meno di β_3 , (si confronti (d) con (b) ed (f) in figura 4.3) porta ad un cambiamento qualitativo, dato dall'evidenza di un terzo picco nella distribuzione.

È possibile dare una spiegazione semiclassica, più intuitiva, della presenza di questi picchi. Consideriamo per semplicità solo l'onda parziale per $\ell = 0$ e un nucleo deformato con multipolarità $\lambda = 2$ prolato. A parità di distanza dei centri dei due nuclei, il nucleo bersaglio può orientarsi in modo differente, in particolare esso può trovarsi in due situazioni opposte. La prima con l'asse di simmetria parallelo al moto traslazionale, in questo caso l'interazione nucleare compare prima abbassando la barriera e favorendo il processo di fusione. La seconda con l'asse di simmetria giacente su un piano perpendicolare al moto traslazionale che ha comportamento opposto, si ha un ritardo dell'interazione forte e una conseguente aumento della barriera, come mostrato nella figura 4.4. Tali configurazioni si riflettono poi su un aumento e una diminuzione rispettivamente della sezione d'urto. L'andamento esponenziale della sezione d'urto in funzione della barriera rende comunque il guadagno superiore alla perdita, con un globale aumento della sezione d'urto totale.

Quanto appena detto, però, è un po' semplicistico ed utile solo al fine di capire qualitativamente ciò che succede. Tale ragionamento infatti è approssimativamente valido per deformazioni semplici come $\lambda = 2$, ma in casi in cui più multipolarità sono coinvolte,

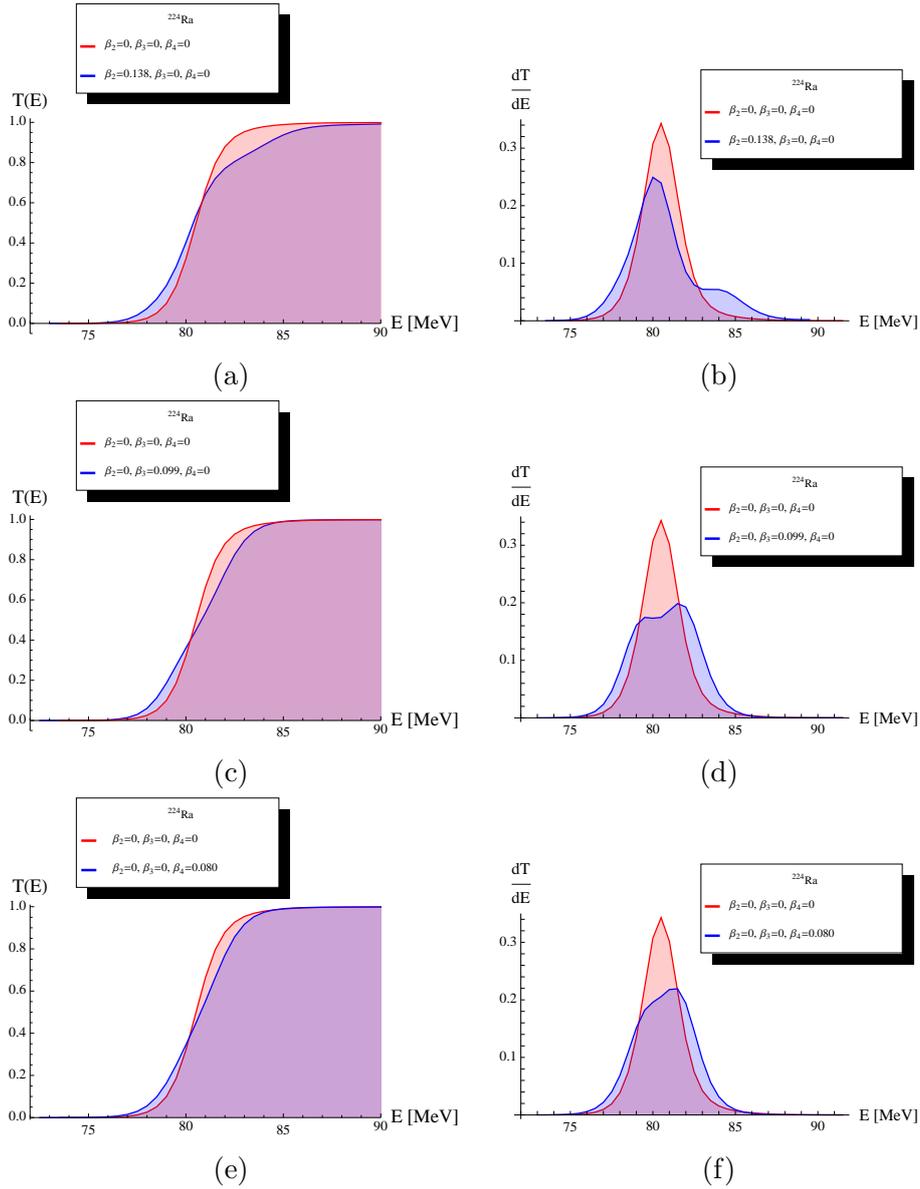


Figura 4.2:

- (a) Probabilità di transizione per un nucleo sferico (—) e per un nucleo deformato con sola deformazione β_2 (—).
- (b) Distribuzione di barriera per la configurazione β_2 calcolata come la derivata del plot (a).
- (c) Probabilità di transizione per un nucleo sferico (—) e per un nucleo deformato con sola deformazione β_3 (—).
- (d) Distribuzione di barriera per la configurazione β_3 calcolata come la derivata del plot (c).
- (e) Probabilità di transizione per un nucleo sferico (—) e per un nucleo deformato con sola deformazione β_4 (—).
- (f) Distribuzione di barriera per la configurazione β_4 calcolata come la derivata del plot (e).

fallisce. Per questo si basti osservare in figura 4.5 dove si riporta in grafico l'andamento del raggio in funzione dell'angolo θ . Per esempio ci si aspetterebbero due picchi nel caso di un nucleo deformato con multipolarità $\lambda = 2, 4$ invece di tre, ed al contrario, per multipolarità $\lambda = 2, 3, 4$. Nonostante il carattere di imprevedibilità, questo modello semi-classico molto semplice, spiega almeno in parte le separazioni energetiche dei picchi. In riferimento

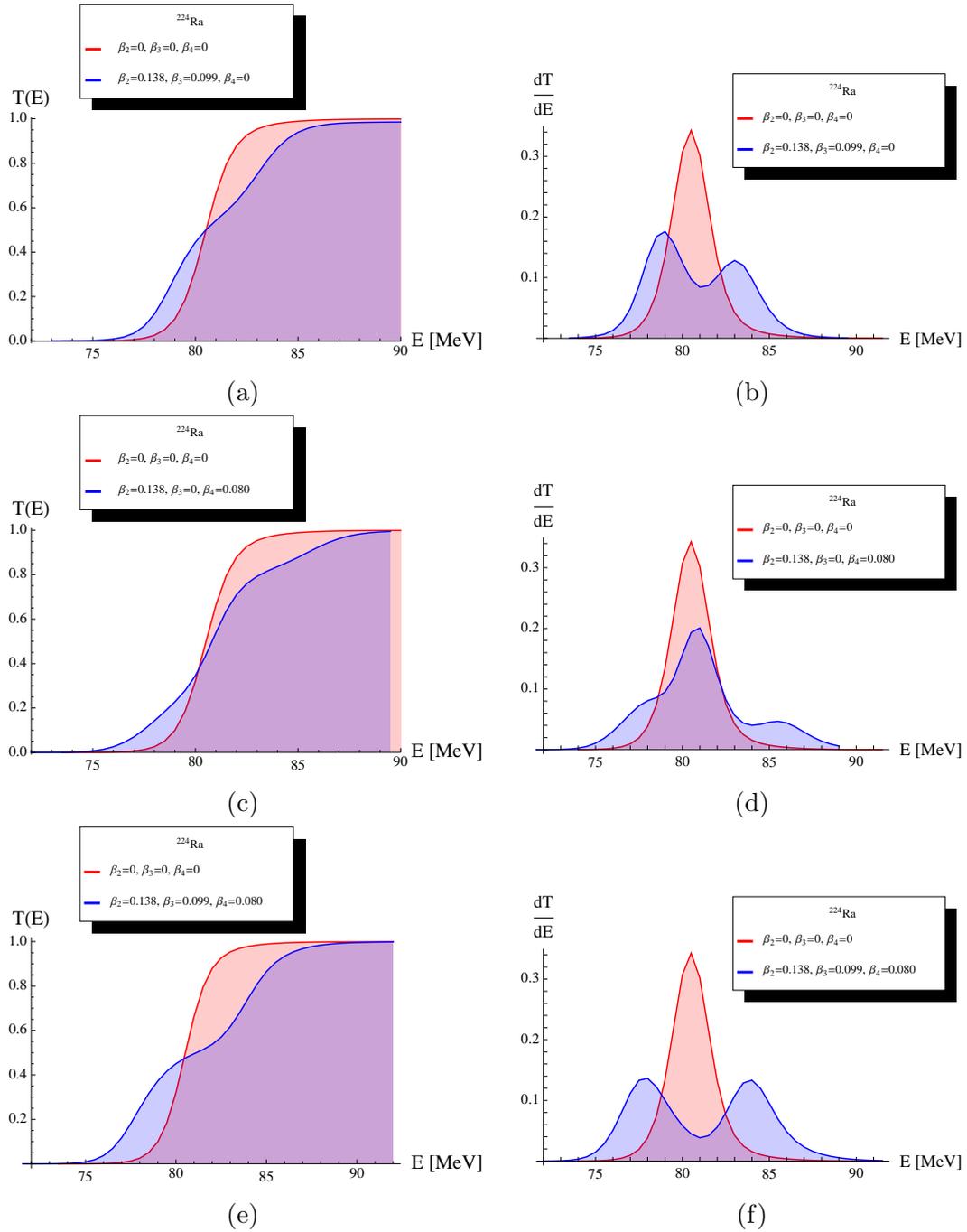


Figura 4.3:

- (a) Probabilità di transizione per un nucleo sferico (—) e per un nucleo deformato $\beta_2 + \beta_3$ (—).
- (b) Distribuzione di barriera per la configurazione $\beta_2 + \beta_3$ calcolata come la derivata del plot (a).
- (c) Probabilità di transizione per un nucleo sferico (—) e per un nucleo deformato $\beta_2 + \beta_4$ (—).
- (d) Distribuzione di barriera per la configurazione $\beta_2 + \beta_4$ calcolata come la derivata del plot (c).
- (e) Probabilità di transizione per un nucleo sferico (—) e per un nucleo deformato $\beta_2 + \beta_3 + \beta_4$ (—).
- (f) Distribuzione di barriera per la configurazione $\beta_2 + \beta_3 + \beta_4$ calcolata come la derivata del plot (e).

sempre alla figura 4.5, associandola alle rispettive multipolarità in figura 4.3, si nota come tali separazioni siano legate alla variazione del raggio. Infatti dove questa è maggiore si

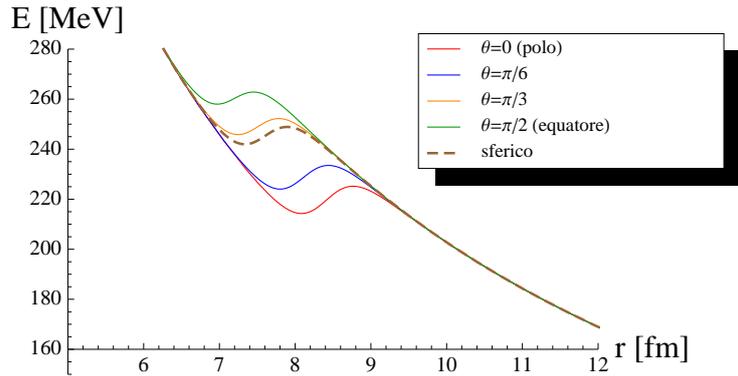


Figura 4.4: Variazione della barriera a seconda dell'orientazione del nucleo di Radio nel caso di multipolarità $\lambda = 2$.

hanno picchi maggiormente distanziati e viceversa. Un esempio è fornito dai grafici (b) ed (f) di figura 4.3 a confronto con (d) ed (f) in figura 4.5.

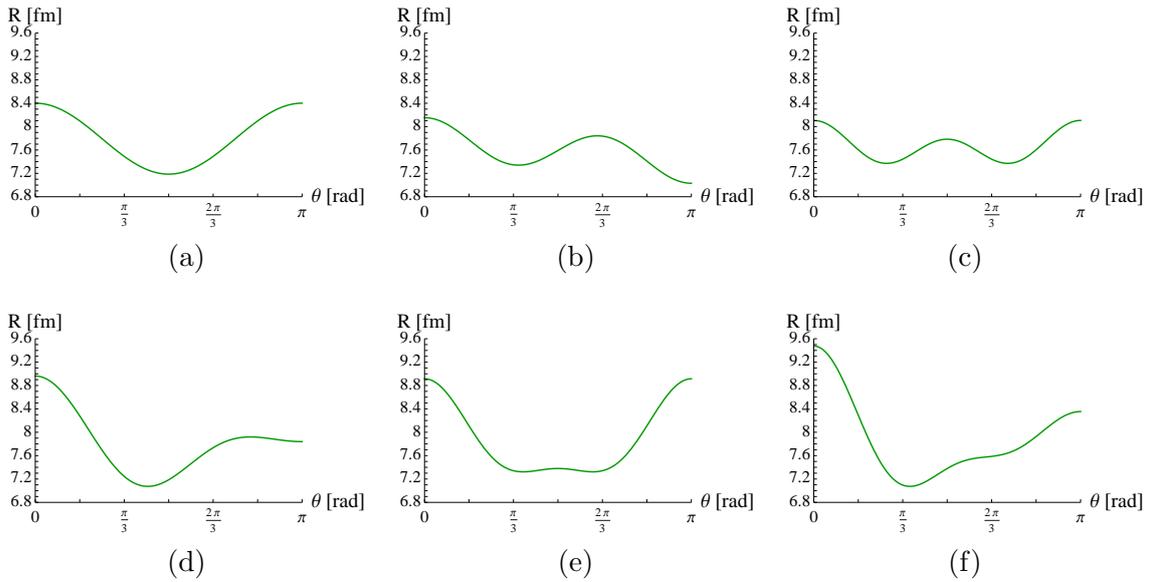


Figura 4.5: Raggio del ^{224}Ra in funzione dell'angolo di orientazione per: (a) $\lambda = 2$; (b) $\lambda = 3$; (c) $\lambda = 4$; (d) $\lambda = 2, 3$; (e) $\lambda = 2, 4$; (f) $\lambda = 2, 3, 4$.

4.2 Sezioni d'urto

Una volta calcolate le distribuzioni di barriera, presentiamo infine le relative sezioni d'urto, importanti per descrivere i processi di fusione. Per far ciò si è approssimato la formula della sezione d'urto come:

$$\sigma_i = \frac{\pi \hbar^2}{2\mu E_i} \sum_{\ell} (2\ell + 1) T_0 \left[E_i - \frac{\ell(\ell + 1)}{2\mu R_0^2} \right]. \quad (4.2)$$

In figura 4.6 riportiamo le sezioni d'urto trovate. Si noti come in questa figura risulti

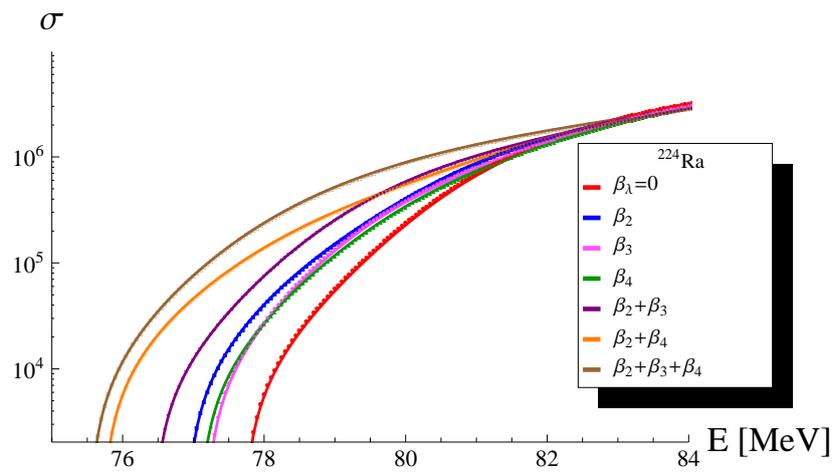


Figura 4.6: Sezioni d'urto calcolate da (4.2).

assai più chiaro l'effetto dell'accoppiamento, tenendo conto inoltre del fatto, che il grafico è logaritmico.

Capitolo 5

Conclusioni

In questo lavoro, abbiamo presentato il problema dei processi di fusione sotto barriera e il formalismo dei canali accoppiati per la loro descrizione. Si è visto come, senza considerare il nucleo come sistema a molti gradi di libertà, non si riesca a dare spiegazione delle probabilità di fusione a basse energie, inferiori alla barriera Coulombiana. Seguendo il modello a goccia, si sono potuti esaminare i modi collettivi interni, in primis responsabili del grado di deformazione del nucleo. Tali gradi di libertà interni sono stati infine accoppiati al moto traslazionale dei due nuclei, con buone predizioni per quanto riguarda l'andamento di osservabili, come la sezione d'urto.

In linea di principio tale formalismo risulta molto potente, ma si incorre velocemente in un problema computazionale di gestione dell'elevato numero di canali. Per far fronte a tale difficoltà, si è assunta la validità dell'approssimazione centrifuga, che ha permesso di esprimere i vari coefficienti di trasmissione per le onde parziali ℓ , tramite una dipendenza dall'energia dipendente ella stessa dal momento angolare ℓ . Operando in tal modo, i coefficienti T_ℓ , si sono potuti calcolare a posteriori, una volta stimato il valore di T_0 . Questo formalismo, permette quindi di mostrare la diversa struttura della barriera Coulombiana, evidenziandone le differenze a seconda del tipo di deformazione considerato.

Come applicazione del formalismo si è preso in esame il caso concreto del nucleo di ^{224}Ra , che presenta spettro prevalentemente rotazionale, e si è visto, tramite la soluzione del sistema di equazioni differenziali accoppiate, come vanno ad agire le deformazioni sulla sezione d'urto sulla distribuzione di barriera. Il risultato ottenuto è un aumento della sezione d'urto fino a $\sim 7 \cdot 10^5 [fm^2]$, con un guadagno di parecchi ordini di grandezza rispetto al caso imperturbato, nell'ipotesi che il nucleo presenti tutte e tre le deformazioni prese in esame nel lavoro (quadrupolo, ottupolo ed esadecapolo).

Bibliografia

- [1] P. Ring, P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (2004).
- [2] R. Bass, *Nuclear Reactions with Heavy Ions*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1980).
- [3] R. Kumar, J. A. Lay, A. Vitturi, *Nuclear fusion as a probe for octupole deformation in ^{224}Ra* , accettato per la pubblicazione su Phys. Rev. C, in corso di pubblicazione, (2015)
- [4] A. Vitturi, *Eur. Phys. J. Special Topics*, **156**, 237 (2008).
- [5] K. Hagino, N. Takigawa, *Progress of Theoretical Physics*, **128**, 1061 (2012).
- [6] W. Nazarewicz, P. Olanders, I. Ragnarsson, J. Dudek, G.A. Leander, P. Möller, E. Ruchowska, *Nuclear Physics A*, **429**, 205 (1984).
- [7] *National Nuclear Data Center* at the site <http://www.nndc.bnl.gov/>.
- [8] K. Hagino, N. Rowley, *Brazilian Journal of Physics*, **35**, 890 (2005).