

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA ED ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"
Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea Triennale

I Nucleoni nel Modello di Skyrme

Candidato:

Michele Santagata

Matricola 1030741

Relatore:

Dott. Andrea Wulzer

Anno Accademico 2014–2015

Al pallido puntino blu

Indice

Introduzione	1
1 La lagrangiana del modello di Skyrme	5
1.1 L'ansatz di Skyrme	5
1.2 La lagrangiana dei barioni	8
2 Quantizzazione canonica della teoria	13
2.1 Operatori di spin ed isospin	14
2.2 Gli stati nucleoni	16
3 Corrente di Noether associata alla carica elettrica	19
3.1 Corrente relativa all'isospin	20
3.2 Corrente relativa alla carica barionica	23
4 Predizioni del modello e conclusioni	27
4.1 Distribuzioni di carica	27
4.2 Momenti magnetici e fattori g	28
4.3 Raggi di carica	30
4.4 Conclusioni	31
A Identità utili	33
A.1 Identità riguardanti spin ed isospin	34
B Trasformazioni di simmetria	37
C Rappresentazione aggiunta di un'algebra di Lie	39

Introduzione

Numerose evidenze sperimentali mostrano che l'interazione forte, una delle quattro forze fondamentali esistenti in natura, è descritta correttamente dalla cromodinamica quantistica (QCD), una teoria iniziata a svilupparsi negli anni '80, ad oggi largamente accettata ed affermata. L'interazione forte descrive le interazioni tra *quark* e *gluoni*. I quark sono le particelle elementari della QCD, come gli elettroni per l'elettrodinamica quantistica (QED), che trasportano una carica, detta di *colore*, che è l'analogo della carica elettrica trasportata dagli elettroni; ad oggi sono stati scoperti sei tipi (o sapori) diversi di quark: up (u), down (d), strange (s), charm (c), top (t) e bottom (b). I gluoni invece sono i mediatori dell'interazione, l'analogo dei fotoni per la QED. I quark sono tenuti insieme dai gluoni a formare gli adroni, che sono a loro volta suddivisi in mesoni e barioni, a seconda del numero di quark che essi contengono; i primi sono composti da una coppia quark-antiquark ($q\bar{q}$), i secondi da tre quark (qqq). In quest'ultima categoria rientrano, ad esempio, protoni (uud) e neutroni (udd) [1].

La QCD è una teoria quantistica di campo, precisamente una *teoria di Gauge non abeliana*, con gruppo di simmetria $SU(3)$, cioè una teoria di campo nella quale la lagrangiana è invariante sotto un gruppo continuo (cioè un *gruppo di Lie*) di trasformazioni locali (in questo caso $SU(3)$). La non abelianità del gruppo di gauge riflette, a livello fisico, il fatto che, i gluoni, trasportando carica di colore, possono interagire tra loro, a differenza della QED dove i fotoni non trasportano carica elettrica [2]. Le dinamiche di quark e gluoni sono controllate dalla lagrangiana della QCD:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{\psi}_f (i\gamma_\mu D^\mu - M_f) \psi_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (1)$$

dove:

- ψ_f è il campo dei quark nella rappresentazione fondamentale di $SU(3)$;
- M_f è la matrice diagonale delle masse;
- $D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{2} g \lambda^l A_\mu^l$ è la derivata covariante;
- \mathcal{A}_ν^a sono i campi dei gluoni, gli analoghi degli A^μ della QED;
- $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a + g f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c$, dove f^{abc} sono le costanti di struttura di $SU(3)$, è il campo di forza dei gluoni, l'analogo dell' $F^{\mu\nu}$ in QED; il termine aggiuntivo rispetto all' $F^{\mu\nu}$, dovuto alla presenza di costanti di struttura non nulle (cioè alla non-abelianità della teoria) descrive proprio l'interazione tra i vari gluoni,

con l'indice f che corre tra i vari sapori e abbiamo sottinteso gli indici spinoriali e di colore [2].

Lo studio dei sistemi di particelle a partire dall'interazione fondamentale tra quark è tuttavia ancora troppo complicato e non permette sempre di fare predizioni dirette nella regione dell'infrarosso, che è quella rilevante per la formazione degli adroni attraverso il fenomeno del *confinamento* [2]. Così si ricorre spesso a metodi indiretti basati su considerazioni di simmetria; ad esempio, nella descrizione della fisica degli adroni a basse energie, si restringe la lagrangiana ai soli due sapori di quark u e d (i quark più leggeri), e si considerano nulle le masse di questi. L'approssimazione di massa nulla è appunto dovuta ad una considerazione di simmetria: la lagrangiana (1) con $M = 0$, è invariante sotto la cosiddetta *simmetria chirale di sapore* (assumiamo solo i sapori u e d)

$$U(2)_L \times U(2)_R \quad (2)$$

dove i pedici L ed R denotano che la simmetria agisce indipendentemente sulle componenti left e right dei campi spinoriali dei quark definite da:

$$\psi_L \equiv P_+ \psi \quad (3)$$

$$\psi_R \equiv P_- \psi \quad (4)$$

dove $P_{\pm} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2}$ sono gli operatori di proiezione [3]. La simmetria chirale si decompone in:

$$SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V \times U(1)_A, \quad (5)$$

dove i pedici V ed A stanno per *vettoriale* ed *assiale* e rappresentano trasformazioni che agiscono con la stessa fase (V) o con fase opposta (A) sulle componenti ψ_L e ψ_R . Alla simmetria $U(1)_V$ corrisponde la conservazione del numero barionico, ad $U(1)_A$ non corrisponde nessuna quantità conservata, perché la simmetria è rotta a livello quantistico dall'anomalia di Adler-Bell-Jackiw. Il gruppo di simmetria $G = SU(2)_L \times SU(2)_R$ merita un discorso a parte; l'importanza della simmetria chirale risiede nel fatto che l'invarianza della lagrangiana rispetto a G non si riflette nell'invarianza dello stato di vuoto; lo stato risulta infatti ancora invariante sotto il sottogruppo di G delle trasformazioni vettoriali $SU(2)_V$, definite da:

$$\psi_L \rightarrow V \psi_L \quad (6)$$

$$\psi_R \rightarrow V \psi_R, \quad (7)$$

mentre non risulta più invariante sotto alcuni elementi del gruppo chirale, le cosiddette trasformazioni *assiali*

$$\psi_L \rightarrow A \psi_L \quad (8)$$

$$\psi_R \rightarrow -A \psi_R. \quad (9)$$

Il fenomeno si chiama rottura spontanea di simmetria (SSB); numerose evidenze teoriche, oltre che sperimentali, ne motivano l'esistenza. Ad esempio, gli adroni in natura si manifestano in multipletti di $SU(2)$ quasi degeneri in massa, espressione, questa, dell'invarianza del vuoto sotto $SU(2)_V$; se lo stato di vuoto fosse invariante sotto l'intero gruppo chirale G , si osserverebbero multipletti contenenti particelle con parità opposta, che è espressione appunto della simmetria

assiale; tuttavia nessun doppietto di parità è stato mai osservato nello spettro adronico di bassa energia. Inoltre, dal teorema di Goldstone sappiamo che quando una simmetria continua è rotta spontaneamente, nuove particelle scalari (tante quanti sono i generatori rotti della simmetria) a massa nulla (o molto piccola, nel caso la simmetria sia quasi esatta) compaiono nello spettro delle possibili eccitazioni; l'esistenza di particelle mesoniche molto leggere è quindi un ulteriore argomento a sostegno della presenza di SSB. I bosoni di Goldstone pertinenti sono, nel caso della QCD ristretta a due sapori, i tre pioni π^+ π^0 π^- [3], [4].

L'esistenza della simmetria chirale spontaneamente rotta permette di utilizzare risultati generali di teoria quantistica dei campi a partire dai quali è possibile derivare una descrizione effettiva (cioè non fondamentale, valida solo in un particolare regime, quello delle basse energie) dei pioni, dove quest'ultimi sono trattati come particelle puntiformi descritte da campi scalari; questa teoria è il *modello sigma non lineare* (NLSM), descritto dalla seguente lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{F_\pi^2}{16} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger) + \frac{1}{32e^2} \text{Tr}[(\partial_\mu U)U^\dagger, (\partial_\nu U)U^\dagger]^2,$$

dove U è una matrice di $SU(2)$ che contiene i campi scalari che descrivono i pioni, $F_\pi = 186$ MeV è la costante di decadimento del pione ed e un parametro adimensionale. In realtà la lagrangiana del NLSM è somma di infiniti altri termini; il motivo per cui ci siamo ristretti a questi soli due è duplice: da un lato la fisica dei pioni alle basse energie è ben approssimata dal solo termine a due derivate e dall'altro, come fatto notare da Skyrme, introducendo il termine a quattro derivate, la teoria permette l'esistenza di *solitoni topologici*, cioè soluzioni statiche omotopicamente distinte dallo stato vuoto, il cui motivo di interesse risiede nel fatto che essi presentano proprietà molto simili a quelle dei barioni.¹

Lo scopo di questa tesi è di predire alcune di queste proprietà, quali masse, raggi di carica, momenti e fattori magnetici riproducendo alcuni risultati di [5], verificando che in effetti i barioni possono essere riguardati come solitoni topologici del NLSM. Partendo dalla lagrangiana di Skyrme, dopo aver trovato la soluzione solitonica (capitolo 1) passeremo alla lagrangiana dei barioni applicando al solitone una piccola perturbazione (capitolo 2). A questo punto, procederemo alla quantizzazione e al calcolo delle quantità conservate della teoria. In particolare, ricaveremo gli operatori di spin ed isospin, visti come generatori delle simmetrie di rotazione ed isospin rispettivamente. Gli autostati con gli autovalori corretti corrisponderanno ai nucleoni e alla delta (capitolo 3). Il calcolo di alcune proprietà fisiche dei barioni (capitolo 5) richiederà la conoscenza della quadricorrente elettromagnetica, la cui espressione sarà ricavata nel capitolo 4; vedremo che essa è la somma di due correnti indipendentemente conservate (in corrispondenza del fatto che la carica dei barioni è somma della carica barionica e della carica di isospin): la corrente di isospin, corrente di Noether della simmetria vettoriale a cui accennavamo precedentemente, e la corrente barionica, la cui conservazione è dovuta a motivi di natura topologica. Confronteremo

¹in realtà a priori non ci sarebbe alcun motivo per cui potremmo escludere i restanti termini della lagrangiana; in effetti si può verificare che i termini successivi sono importanti tanto quanto questi per descrivere i solitoni, e questo è uno dei motivi per cui la teoria non è autoconsistente

infine le predizioni delle quantità fisiche incontrate nel corso della teoria, con i risultati sperimentali, trovando in generale un accordo del 30%.

Capitolo 1

La lagrangiana del modello di Skyrme

Come già accennato nell'introduzione, la lagrangiana del modello di Skyrme è:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \frac{F^2}{16} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger) + \frac{1}{32e^2} \text{Tr}[(\partial_\mu U)U^\dagger, (\partial_\nu U)U^\dagger]^2, \quad (1.1)$$

dove $U \in \text{SU}(2)$ e abbiamo scritto la lagrangiana come somma di due lagrangiane in base al numero di derivate. Come specificato in [2] la lagrangiana di Skyrme deve ereditare dalla QCD l'invarianza sotto la simmetria chirale, che su U agisce come:

$$U \rightarrow U' = LUR^\dagger \quad L, R \in \text{SU}(2). \quad (1.2)$$

Verifichiamolo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[U'] &= \frac{F^2}{16} \text{Tr}(\partial_\mu U' \partial_\mu U'^\dagger) + \frac{1}{32e^2} \text{Tr}[(\partial_\mu U')U'^\dagger, (\partial_\nu U')U'^\dagger]^2 = \\ &= \frac{F^2}{16} \text{Tr}(L \partial_\mu U R^\dagger R \partial_\mu U^\dagger R^\dagger) + \\ &+ \frac{1}{32e^2} \text{Tr}([L(\partial_\mu U)R^\dagger R U^\dagger L^\dagger, L(\partial_\nu U)R^\dagger R U^\dagger L^\dagger])^2 = \\ &= \mathcal{L}[U], \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato $RR^\dagger = 1$ e l'invarianza della traccia per trasformazioni di similitudine.

1.1 L'ansatz di Skyrme

La matrice U si scrive, in funzione dei tre campi $\pi^a(x, t)$ associati ai pioni come:

$$U(x, t) = e^{i\pi^a \tau^a} = (\cos \Pi) \mathbb{1} + i(\sin \Pi) \frac{\pi^a}{\Pi} \tau^a, \quad (1.3)$$

dove le τ sono le matrici di Pauli e $\Pi = \sqrt{\pi^a \pi^a}$. La soluzione solitonica, cioè la soluzione statica delle equazioni del moto, la si trova inserendo **l'ansatz di Skyrme** [5]:

$$\pi^a = F(r) \hat{x}^a, \quad (1.4)$$

dove $\hat{x}^a = \frac{x^a}{r}$ e $F(r)$ è una funzione con sola dipendenza radiale, che sarà specificata dalle equazioni di Lagrange e dovrà soddisfare le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} r \rightarrow 0 &\Rightarrow F(r) \rightarrow \pi \\ r \rightarrow \infty &\Rightarrow F(r) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Due commenti:

- la particolare forma dell'ansatz è dovuta al fatto che l'alta simmetria che esso possiede (è invariante sotto rotazioni spaziali composte opportunamente con trasformazioni vettoriali), fa sì che sia una configurazione di minima energia e, quindi, un buon punto di partenza per ricavare una lagrangiana descrivente particelle, visto che quest'ultime in teoria quantistica di campo non sono altro che fluttuazioni quantistiche intorno allo stato di minima energia (o vuoto);
- la scelta di queste condizioni al contorno è strettamente legata al fatto che vogliamo che le particelle della teoria siano barioni. Lo vedremo meglio più avanti.

Con questo ansatz la (1.3) si scrive:

$$U(x, t) \equiv U_0(x) = e^{iF(r)\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{x}}} = (\cos F) \mathbb{1} + i(\sin F) \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{x}}. \quad (1.6)$$

Prima di procedere al calcolo della lagrangiana del solitone, notiamo che la combinazione $(\partial_i U)U^\dagger$, con $U \in \text{SU}(2)$ è antihermitiana:

$$(\partial_i U)U^\dagger = \partial_i(UU^\dagger) - U(\partial_i U^\dagger) = -U(\partial_i U^\dagger) = -((\partial_i U)U^\dagger)^\dagger$$

e a traccia nulla: infatti la formula di Jacobi

$$d \det(U) = \det(U) \text{Tr}(U^{-1}dU)$$

dove d denota il differenziale e U è una qualsiasi matrice invertibile, si scrive, per una matrice $U \in \text{SU}(2)$:

$$0 = \text{Tr}(U^{-1}dU), \quad (1.7)$$

che è quanto volevamo; ciò significa che $i(\partial_i U)U^\dagger \in \mathfrak{su}(2)$, dove $\mathfrak{su}(2)$ denota l'algebra di $\text{SU}(2)$, e possiamo quindi scrivere:

$$(\partial_i U)U^\dagger = i d_{ij}(x) \tau_j$$

per certi $d_{ij}(x)$. In particolare, con $U = U_0$, i d_{ij} assumono la forma:

$$d_{ij} = \frac{\partial F}{\partial r} \hat{x}_i \hat{x}_j + \frac{\sin 2F}{2r} P_{ij} + \frac{\sin^2 F}{r} \epsilon_{aij} \hat{x}_a \quad (1.8)$$

dove ϵ_{ijk} è il tensore di Levi-Civita e

$$P_{ij} = (\delta_{ij} - \hat{x}_i \hat{x}_j) \quad (1.9)$$

è l'operatore di proiezione sul sottospazio S ortogonale ad \hat{x}_j che soddisfa le proprietà:

$$P_{ij} P_{jk} = \delta_{ik} - \hat{x}_i \hat{x}_k = P_{ik},$$

$$P_{ij}\hat{x}_j = 0.$$

Nel calcolo ci saranno utili anche le seguenti contrazioni tra gli indici di d_{ij} :

$$d_{ij}d_{ij} = F'^2 + 2\frac{\sin^2 F}{r^2} \quad (1.10)$$

$$d_{ij}d_{ik} = F'^2\hat{x}_j\hat{x}_k + \frac{\sin^2 F}{r^2}P_{jk}. \quad (1.11)$$

Ora possiamo procedere. Valutiamo i due termini della lagrangiana separatamente. $\mathcal{L}_1^{U_0}$ si calcola agevolmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{U_0} &= -\frac{F_\pi^2}{16}Tr[(\partial_i U_0)(\partial_i U_0^\dagger)] = -\frac{F_\pi^2}{16}Tr[(\partial_i U_0)U_0^\dagger U_0(\partial_i U_0^\dagger)] = \\ &= -\frac{F_\pi^2}{16}Tr[(id_{ij}\tau_j)(-id_{ik}\tau_k)] = -\frac{F_\pi^2}{8}d_{ij}d_{ij} = \\ &= -\frac{F_\pi^2}{4}\left(F'^2 + 2\frac{\sin^2 F}{r^2}\right) \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la nota relazione tra le matrici di Pauli:

$$\tau_i\tau_j = i\epsilon_{ijk}\tau_k + \delta_{ij}\mathbb{1}$$

e la (1.10). Per quanto riguarda $\mathcal{L}_2^{U_0}$ possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^{U_0} &= \frac{1}{32e^2}Tr[(\partial_i U_0)U_0^\dagger, \partial_j U_0 U_0^\dagger]^2 = \frac{1}{32e^2}Tr((d_{ik}d_{jl}[\tau_k, \tau_l])^2) = \\ &= -\frac{4}{32e^2}d_{ik}d_{jl}d_{ip}d_{jq}\epsilon_{klm}\epsilon_{pqr}Tr(\tau_m\tau_r) = \frac{8}{32e^2}[d_{ik}d_{il}d_{jk}d_{jl} - d_{ik}d_{ik}d_{jl}d_{jl}], \end{aligned}$$

e, utilizzando le (1.10), (1.11):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^{U_0} &= \frac{1}{4e^2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^4 + 2\frac{\sin^4 F}{r^4}\right] - \frac{1}{4e^2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + 2\frac{\sin^2 F}{r^2}\right]^2 = \\ &= -\frac{1}{2e^2}\frac{\sin^2 F}{r^2}\left[2\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2}\right]. \end{aligned}$$

Sommando le due lagrangiane otteniamo la densità di lagrangiana solitonica:

$$\mathcal{L}^{U_0} = -\frac{F_\pi^2}{8}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + 2\frac{\sin^2 F}{r^2}\right] - \frac{1}{2e^2}\frac{\sin^2 F}{r^2}\left[\frac{\sin^2 F}{r^2} + 2\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2\right]. \quad (1.12)$$

Dalla densità di Lagrangiana \mathcal{L}^{U_0} ricaviamo la densità di Hamiltoniana \mathcal{H}^{U_0} , definita come sempre in teoria classica dei campi:

$$\mathcal{H}^{U_0} = \frac{\partial \mathcal{L}^{U_0}}{\partial \dot{\pi}_i}\dot{\pi}_i - \mathcal{L}^{U_0} = -\mathcal{L}^{U_0}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che il campo F è stazionario. Inoltre, essendo il momento del campo nullo, la densità di hamiltoniana integrata corrisponderà all'energia a riposo della particella, cioè, in unità di c , alla sua massa:

$$M = 4\pi \int_0^{+\infty} r^2 \left[\frac{F_\pi^2}{8} \left(F'^2 + 2\frac{\sin^2 F}{r^2} \right) + \frac{1}{2e^2} \frac{\sin^2 F}{r^2} \left(\frac{\sin^2 F}{r^2} + 2F'^2 \right) \right] dr. \quad (1.13)$$

Da (1.13), variando rispetto ad F , otteniamo inoltre l'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\left(\frac{1}{4}\tilde{r}^2 + 2\sin^2 F\right)F'' + \frac{1}{2}\tilde{r}F' + \sin 2FF'^2 - \frac{1}{4}\sin 2F - \frac{\sin^2 F \sin 2F}{\tilde{r}^2} = 0 \quad (1.14)$$

che abbiamo riscritto in termini della variabile adimensionale $\tilde{r} = eF_\pi r$. Il comportamento della soluzione numerica dell'equazione (1.14), ottenuta con MATHEMATICA, è mostrato in figura (1.1).

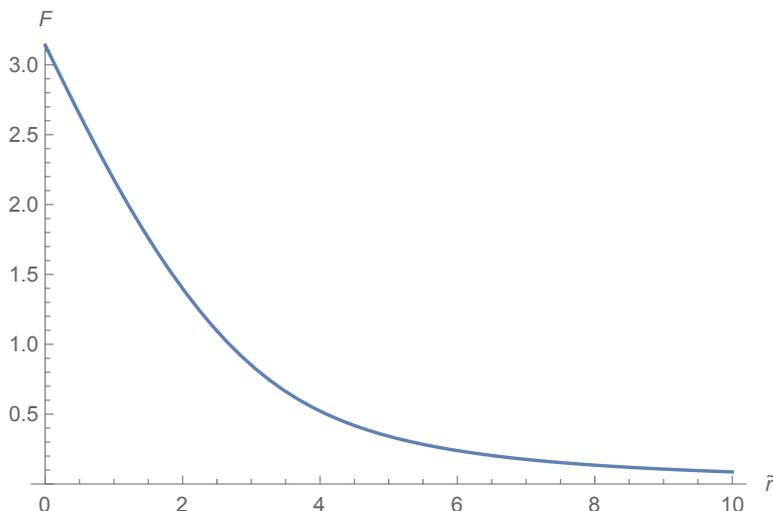


Figura 1.1: Soluzione numerica dell'equazione (1.14) in termini della variabile adimensionale \tilde{r} .

1.2 La lagrangiana dei barioni

La motivazione antistante la ricerca di una soluzione solitonica è che, essendo questa una configurazione di campo classica e stazionaria, può essere usata come punto di partenza per una quantizzazione semiclassica. In linea di principio qualunque deformazione della soluzione dovrebbe venir quantizzata, tuttavia solo poche di queste sono rilevanti per descrivere i barioni. Le fluttuazioni quantistiche sono infatti generalmente favorite lungo le direzioni di simmetria, il motivo essendo che lungo queste ultime non sono presenti barriere di potenziale. Nel nostro caso, sappiamo la (1.1) essere invariante sotto la simmetria chirale, che agisce su U_0 come:

$$U_0 \rightarrow LU_0R^\dagger, \quad (1.15)$$

con $L, R \in \text{SU}(2)$ [5]; in particolare è quindi invariante sotto il sottogruppo delle trasformazioni vettoriali ottenuto ponendo $L = R$, che lasciano invariate anche lo stato di vuoto. Quanto appena detto ci porta a perturbare la soluzione solo lungo la direzione di simmetria:

$$U_0 \rightarrow A(t)U_0A(t)^\dagger, \quad (1.16)$$

dove $A(t)$ è un'arbitraria matrice di $SU(2)$ dipendente dal tempo. Ora non ci resta che sostituire $U = A(t)U_0A^\dagger(t)$ nella (1.1), per trovare la lagrangiana dei barioni.

Prima di farlo, apriamo una piccola parentesi sulla notazione utilizzata. Per questo, e per tutti i calcoli seguenti, adotteremo le seguenti convenzioni:

$$(\partial_i U_0)U_0^\dagger = id_{ij}\tau_j \quad (1.17)$$

$$U_0^\dagger \partial_i U_0 = i\tilde{d}_{ij}\tau_j \quad (1.18)$$

$$(\partial_0 A)A^\dagger = i\beta_j\tau_j \quad (1.19)$$

$$A^\dagger \partial_0 A = i\tilde{\beta}_j\tau_j \quad (1.20)$$

$$(\partial_i U)U^\dagger = i\hat{d}_{ij}\tau_j \quad (1.21)$$

$$U^\dagger (\partial_i U) = i\tilde{\hat{d}}_{ij}\tau_j, \quad (1.22)$$

con $U = A(t)U_0A^{-1}(t)$ e:

$$d_{ij} = \frac{\partial F}{\partial r} \hat{x}_i \hat{x}_j + \frac{\sin 2F}{2r} P_{ij} + \frac{\sin^2 F}{r} \epsilon_{aij} \hat{x}_a \quad (1.23)$$

$$\tilde{d}_{ij} = \frac{\partial F}{\partial r} \hat{x}_i \hat{x}_j + \frac{\sin 2F}{2r} P_{ij} - \frac{\sin^2 F}{r} \epsilon_{aij} \hat{x}_a. \quad (1.24)$$

$$(1.25)$$

Facciamo qualche commento:

- innanzitutto $i(\partial_0 A)A^\dagger \in \mathfrak{su}(2)$, e siamo quindi autorizzati a scriverla come $i\beta_j\tau_j$ per certi β_j dipendenti dal tempo;
- gli \hat{d}_{ij} hanno la stessa forma degli d_{ij} in (1.8), con la differenza che le coordinate x_i sono ruotate da una certa matrice $R \in SO(3)$ alla quale non faremo mai riferimento direttamente, e quindi non ne daremo la forma esplicita. In altre parole: $\hat{d}_{ij}(x) \equiv d_{ij}(Rx) \equiv d_{ij}(y)$. Il discorso è chiaramente analogo per i $\tilde{\hat{d}}_{ij}$. Denoteremo con $\hat{P}_{ij} \equiv \delta_{ij} - \hat{y}_i \hat{y}_j$ l'operatore di proiezione scritto nelle coordinate ruotate;
- utilizzeremo i seguenti fatti:

$$Tr[(\partial_0 A)(\partial_0 A^\dagger)] = Tr[(\partial_0 A)A^\dagger A \partial_0 A^\dagger] = \beta_j \beta_k Tr(\tau_j \tau_k) = 2\beta_j \beta_j, \quad (1.26)$$

$$Tr[(\partial_0 A)A^\dagger \tau_k] = i\beta_j Tr(\tau_j \tau_k) = 2i\beta_k; \quad (1.27)$$

Ora possiamo procedere al calcolo esplicito; essendo in questo caso l'espressione della densità di lagrangiana abbastanza complicata, al momento opportuno la integreremo nello spazio (ottenendo così la lagrangiana), utilizzando coordinate sferiche, per semplificare i conti. Ricordiamo, a tal proposito, che l'elemento di volume in coordinate sferiche si scrive $d^3x = r^2 dr d\Omega$, dove $d\Omega$ è l'angolo solido. Iniziamo da \mathcal{L}_1 :¹

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{F^2}{16} Tr[(\partial_\mu U)(\partial^\mu U^\dagger)] = \\ &= \frac{F^2}{16} Tr[(\partial_0(AU_0A^\dagger))(\partial_0(AU_0^\dagger A^\dagger))] + Tr[(\partial_i(AU_0A^\dagger))(\partial^i(AU_0^\dagger A^\dagger))]. \end{aligned}$$

¹d'ora in poi sarà omessa la dipendenza esplicita da t

Sfruttando l'unitarietà di A , le proprietà cicliche della traccia e il fatto che A non dipende da x il secondo termine si riduce a $\mathcal{L}_1^{U_0}$. Per quanto riguarda il primo termine invece:

$$\begin{aligned}
& \frac{F_\pi^2}{16} \text{Tr}[(\partial_0(AU_0A^\dagger))(\partial_0(AU_0^\dagger A^\dagger))] = \\
& = \frac{F_\pi^2}{16} \text{Tr} \left[\left((\partial_0 A)U_0A^\dagger + AU_0\partial_0A^\dagger \right) \left((\partial_0 A)U_0^\dagger A^\dagger + AU_0^\dagger\partial_0A^\dagger \right) \right] = \\
& = \frac{F_\pi^2}{16} \left[2\text{Tr}(\partial_0 A\partial_0A^\dagger) + 2\text{Tr}(U_0(\partial_0A^\dagger)AU_0^\dagger(\partial_0A^\dagger)A) \right] = \\
& = \frac{F_\pi^2}{8} \left[\text{Tr}(\partial_0 A\partial_0A^\dagger) - \beta_j\beta_k \text{Tr}(U_0\sigma_j U_0^\dagger\sigma_k) \right].
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Per risalire ad L_1 integriamo in d^3x e sfruttiamo (A.5):

$$\begin{aligned}
L_1 &= L_1^{U_0} + \frac{F_\pi^2}{2}\pi \int r^2 \left[\text{Tr}(\partial_0 A\partial_0A^\dagger) - 2\tilde{\beta}_j\tilde{\beta}_j \left(\cos^2 F - \frac{1}{3}\sin^2 F \right) \right] dr = \\
&= L_1^{U_0} + \frac{2}{3}\pi F_\pi^2 \left(\int r^2 \sin^2 F dr \right) \text{Tr}(\partial_0 A\partial_0A^\dagger).
\end{aligned}$$

Passiamo ora ad \mathcal{L}_2 :

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{32e^2} \text{Tr}[(\partial_\mu U)U^\dagger, (\partial_\nu U)U^\dagger]^2.$$

Notiamo subito che i termini con $\mu = \nu$ sono nulli per via del commutatore, quelli con $\mu = i, \nu = j$ riproducono $\mathcal{L}_2^{U_0}$. Rimangono solo i termini con $\mu = 0, i$ e, rispettivamente $\nu = i, 0$; esplicitando i commutatori \mathcal{L}_2 si scrive dunque:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= \mathcal{L}_2^{U_0} + \frac{1}{8e^2} \text{Tr}[(\partial_0 U)U^\dagger(\partial_i U)U^\dagger(\partial_i U)U^\dagger(\partial_0 U)U^\dagger] - \\
&\quad - \frac{1}{8e^2} \text{Tr}[(\partial_0 U)U^\dagger(\partial_i U)U^\dagger(\partial_0 U)U^\dagger(\partial_i U)U^\dagger].
\end{aligned}$$

Valutiamo i due termini separatamente. Utilizzando (A.7) e notando che vale:

$$\text{Tr}[(\partial_0 U)U^\dagger(\partial_0 U)U^\dagger] = \beta_j\beta_k [\text{Tr}(U\tau_j U^\dagger\tau_k) + \text{Tr}(U^\dagger\tau_j U\tau_k)] - 2\text{Tr}(\partial_0 A\partial_0A^\dagger),$$

l'integrale del primo termine si calcola immediatamente:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8e^2} \int r^2 dr \int \text{Tr}[(\partial_0 U)U^\dagger(\partial_i U)U^\dagger(\partial_i U)U^\dagger(\partial_0 U)U^\dagger] d\Omega = \\
& = \frac{4}{3e^2}\pi \int r^2 \sin^2 F \left(F'^2 + 2\frac{\sin^2 F}{r^2} \right) dr,
\end{aligned} \tag{1.29}$$

dove abbiamo sfruttato (A.5). Per quanto riguarda il secondo:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8e^2} \text{Tr}[(\partial_0 U)U^\dagger(\partial_i U)U^\dagger(\partial_0 U)U^\dagger(\partial_i U)U^\dagger] = \\
& = \frac{1}{8e^2} \left((\hat{d}_{ij}\hat{d}_{ik} + \hat{d}_{ij}\hat{d}_{ik})\beta_a\beta_b \text{Tr}(\tau_a\tau_j\tau_b\tau_k) - 2\beta_a\beta_b \text{Tr}(\tau_a\partial_i U^\dagger\tau_b\partial_i U) \right) = \\
& = \frac{1}{8e^2} \left[8 \left(F'^2 \hat{y}_a\hat{y}_b + \frac{\sin^2 F}{r^2} \hat{P}_{ab} \right) \beta_a\beta_b - 4\beta_k\beta_k \left(F'^2 + 2\frac{\sin^2 F}{r^2} \right) - \right. \\
& \quad \left. - 2\beta_a\beta_b \text{Tr}(\tau_a\partial_i U^\dagger\tau_b\partial_i U) \right],
\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato le analoghe delle (A.1), (A.2), (A.8) valide per $R\hat{x}_a = \hat{y}_a$. Integriamo in d^3x e sfruttiamo (A.6), (A.11), (A.12):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8e^2} \int r^2 dr \int Tr[(\partial_0 U)U^\dagger(\partial_i U)U^\dagger(\partial_0 U)U^\dagger(\partial_i U)U^\dagger] d\Omega = \\ & = \frac{1}{8e^2} \int r^2 \left[8 \left(\frac{4\pi}{3} F'^2 + \frac{8\pi}{3} \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \beta_a \beta_a - 16\pi \beta_k \beta_k \left(F'^2 + 2 \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) - \right. \\ & \left. - 16\pi \left(F'^2 \sin^2 F - \frac{1}{3} F'^2 \cos^2 F - \frac{2}{3} \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \beta_a \beta_a \right] dr = \\ & = \frac{4}{3e^2} \pi \left(\int r^2 F'^2 \sin^2 F dr \right) Tr(\partial_0 A \partial_0 A^\dagger). \end{aligned}$$

L_2 si scrive quindi:

$$L_2 = L_2^{U_0} + \frac{8}{3e^2} \pi \int r^2 \sin^2 F \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) dr;$$

la lagrangiana totale di conseguenza vale:

$$L = L_1^{U_0} + L_2^{U_0} + \frac{4\pi}{6} \int r^2 \sin^2 F \left(F_\pi^2 + \frac{4}{e^2} \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \right) dr, \quad (1.30)$$

che possiamo anche riscrivere come:

$$L = -M + \lambda Tr[\partial_0 A \partial_0 A^{-1}], \quad (1.31)$$

dove M è la massa del solitone definita in (1.13) e $\lambda = \frac{4\pi}{6} \left(\frac{1}{e^3 F_\pi} \right) \Lambda$ con

$$\Lambda = \int \tilde{r}^2 \sin^2 F \left[1 + 4 \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{\tilde{r}^2} \right) \right] d\tilde{r}. \quad (1.32)$$

Numericamente troviamo $\Lambda = 50.9$.

Capitolo 2

Quantizzazione canonica della teoria

Dalla lagrangiana (1.31) passiamo ora all'hamiltoniana che, quantizzata e successivamente diagonalizzata tramite l'introduzione degli operatori di spin ed isospin, ci permetterà di dare una stima del parametro e e della costante di decadimento del pione F_π , prendendo in input i valori della massa del nucleone M_n e della massa della delta M_Δ . Gli operatori di spin ed isospin ci permetteranno inoltre di scrivere le funzioni d'onda relative ai vari barioni, che ci serviranno nel calcolare le quantità fisiche predette dalla teoria.

Scriviamo la matrice $A \in SU(2)$ come $A = a_0 + i\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, con il vincolo

$$a_0^2 + \mathbf{a}^2 = 1. \quad (2.1)$$

Il vincolo (2.1) ci sta dicendo che le variabili a_0, a_i sono ristrette alla sfera unitaria S^3 , che possiamo parametrizzare con le coordinate $q^i \equiv (z, \phi_1, \phi_2)$ [6]:

$$\begin{cases} a_0 = \sqrt{\frac{1+z}{2}} \cos \phi_2 \\ a_1 = \sqrt{\frac{1-z}{2}} \cos \phi_1 \\ a_2 = \sqrt{\frac{1-z}{2}} \sin \phi_1 \\ a_3 = \sqrt{\frac{1+z}{2}} \sin \phi_2. \end{cases} \quad (2.2)$$

Riscriviamo la (1.31) in termini delle coordinate q sulla sfera.

$$L = -M + \lambda \text{Tr}[(\dot{a}_0 + \dot{\mathbf{a}}^2)\mathbb{1}] = -M + 2\lambda \delta_{ij} \dot{a}^i \dot{a}^j = -M + 2\lambda g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \quad (2.3)$$

dove g_{ij} è la metrica indotta su S^3 da \mathbb{R}^4 con:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \frac{1}{1-z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-z}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+z}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Esplicitamente la (2.3) si scrive:

$$L = -M + 2\lambda \left(\frac{1}{4} \frac{1}{1-z^2} \dot{z}^2 + \frac{1-z}{2} \dot{\phi}_1^2 + \frac{1+z}{2} \dot{\phi}_2^2 \right). \quad (2.5)$$

Per procedere alla quantizzazione, dobbiamo dapprima scrivere l'hamiltoniana classica. I momenti coniugati valgono:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 2\lambda g_{ij} \dot{q}^j + 2\lambda g_{ji} \dot{q}^j = 4\lambda g_{ij} \dot{q}^j,$$

e quindi:

$$H = p_i \dot{q}^i - L = \frac{1}{4\lambda} g^{ij} p_i p_j - L = M + \frac{1}{8\lambda} g^{ij} p_i p_j.$$

Promuovendo i p^i ad operatori con la sostituzione $p_i \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial q^i}$ ricaviamo l'hamiltoniana quantizzata:

$$H = M - \frac{1}{8\lambda} g^{ij} \frac{\partial}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial q^j} = M - \frac{1}{8\lambda} \left(4(1-z^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2}{1-z} \frac{\partial^2}{\partial \phi_1^2} + \frac{2}{1+z} \frac{\partial^2}{\partial \phi_2^2} \right). \quad (2.6)$$

Ora, come anticipato, allo scopo di diagonalizzare l'hamiltoniana e di determinare gli stati corrispondenti ai nucleoni e alla delta, troveremo la forma degli operatori di spin ed isospin (in funzione delle variabili z , ϕ_1 , ϕ_2) di modo che gli autostati con particolari autovalori, saranno le candidate funzioni d'onda di p , n e Δ .

2.1 Operatori di spin ed isospin

Notiamo innanzitutto che la lagrangiana (1.1) ha due simmetrie manifeste:

- l'invarianza per rotazioni:

$$\mathcal{L}[U[\pi^a(Rx)]] = \mathcal{L}[U[\pi^a(x)]],$$

perchè i π^a sono campi scalari, che implica la conservazione del momento angolare totale (in realtà la lagrangiana è invariante sotto tutto il gruppo di Poincarè, ma noi focalizzeremo l'attenzione solo sull'invarianza per rotazioni);

- la già citata simmetria chirale (1.2) che abbiamo dimostrato precedentemente essere una simmetria; in particolare, come già accennato, con $L = R$ otteniamo la trasformazione vettoriale, la quale, come vedremo, genera la corrente di isospin.

Ora vogliamo dimostrare che queste due trasformazioni sulle U si possono scrivere in maniera equivalente in termini di trasformazioni sulle variabili quanto-meccaniche A . Partiamo dalla trasformazione vettoriale:

$$U(x, t) \rightarrow IU(x, t)I^\dagger, \quad I \in \text{SU}(2), \quad U(x, t) = A(t)U_0(x)A^{-1}(t).$$

Ciò è equivalente a dire che (1.1) è invariante sotto la trasformazione

$$A \rightarrow IA. \quad (2.7)$$

Infatti (2.7) implica

$$U(x) \rightarrow IAU_0(x)(IA)^\dagger = IAU_0(x)A^\dagger I^\dagger = IU(x)I^\dagger.$$

I è talvolta chiamata anche trasformazione di isospin.

Lo stesso discorso vale anche per le rotazioni. Cioè, esiste una trasformazione che agisce sulle $A(t)$:

$$A(t) \rightarrow A(t)R^\dagger \quad R^\dagger \in \text{SU}(2) \quad (2.8)$$

tale che (2.8) è equivalente ad applicare una rotazione alle coordinate spaziali. Mostriamolo. (2.8) implica

$$U(x, t) \rightarrow AR^\dagger U_0(x)RA^\dagger = Ae^{iF(\tau)R^\dagger \tau \cdot \hat{\mathbf{x}}R} A^\dagger. \quad (2.9)$$

Basta a questo punto verificare che:

$$R^\dagger \tau \cdot \mathbf{x}R = \hat{x}_a R^\dagger \tau^a R = \hat{x}_a [O_\rho^{-1}]^{ab} \tau^b = \hat{x}_a [O_\rho]^{ba} \tau^b = \hat{\mathbf{x}}_\rho \cdot \tau$$

per qualche matrice $O_\rho \in \text{SO}(3)$, cosicché in questo modo

$$U(x) \rightarrow ARU_0(x)R^\dagger A^\dagger = AU_0(x_\rho)A^\dagger = U(x_\rho).$$

Vediamolo. Ad un livello infinitesimo:

$$R^\dagger \tau^a R = \left(1 - \frac{i}{2} \rho_b \tau_b\right) \tau^a \left(1 + \frac{i}{2} \rho_b \tau_b\right) = \tau^a - \frac{i}{2} \rho_b [\tau^b, \tau^a]. \quad (2.10)$$

Ora, esplicitando il commutatore e chiamando $-i\epsilon^{bac} = (T^b)^{ac}$, (2.10) si scrive:

$$R^\dagger \tau^a R = (\delta^{ac} + i\rho_b (T^b)^{ac}) \tau^c.$$

Visto che esponenziando elementi dell'algebra si ottengono elementi del gruppo, basta mostrare che i $(T^b)^a_c$ sono i generatori di $\text{SO}(3)$ ed abbiamo concluso, perché a quel punto $R^\dagger \tau^a R = (e^{i\rho_b T^b})^{ac} \tau^c$ con $e^{i\rho_b T^b} \in \text{SO}(3)$. Il risultato segue subito dal fatto che le costanti di struttura di un qualsiasi gruppo di Lie forniscono una rappresentazione dell'algebra chiamata la *rappresentazione aggiunta*, la cui dimensione è uguale al numero dei generatori indipendenti del gruppo. La dimostrazione è semplice ed è mostrata in appendice C per un generico gruppo di Lie.

In conclusione, $A(t) \rightarrow A(t)R^\dagger$ è equivalente ad una trasformazione spaziale sulle coordinate. R è detta trasformazione di spin.

Ora, gli operatori di spin ed isospin sono dati, nella teoria quantistica, dai generatori delle rispettive trasformazioni sullo spazio delle funzione d'onda $\psi(q)$. In appendice B è mostrato che ciò implica che essi devono essere tali da soddisfare le seguenti relazioni di commutazione:

$$[S^a, A] = \frac{1}{2} A \sigma^a \quad (2.11)$$

$$[I^a, A] = -\frac{1}{2} \tau^a A \quad (2.12)$$

Gli operatori che soddisfano alle (2.11), (2.12) sono [6]:

$$\begin{cases} S^3 = -\frac{i}{2} (\partial_{\phi_1} + \partial_{\phi_2}) \\ S^+ = e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \left[i\sqrt{1-z^2} \partial_z + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \partial_{\phi_1} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \partial_{\phi_2} \right] \\ S^- = e^{-i(\phi_1 + \phi_2)} \left[i\sqrt{1-z^2} \partial_z - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \partial_{\phi_1} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \partial_{\phi_2} \right] \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} I^3 = -\frac{i}{2}(\partial_{\phi_1} - \partial_{\phi_2}) \\ I^+ = -e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \left[i\sqrt{1-z^2}\partial_z + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\partial_{\phi_1} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\partial_{\phi_2} \right] \\ I^- = -e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} \left[i\sqrt{1-z^2}\partial_z - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\partial_{\phi_1} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\partial_{\phi_2} \right], \end{cases} \quad (2.14)$$

dove S^+ S^- sono gli operatori di innalzamento/abbassamento: $S^\pm = S^1 \pm iS^2$.
Mostriamolo ad esempio per S^3 . Notando che:

$$\begin{cases} \partial_{\phi_1} a_1 = -a_2 \\ \partial_{\phi_1} a_2 = a_1 \\ \partial_{\phi_2} a_3 = a_0 \\ \partial_{\phi_2} a_0 = -a_3, \end{cases}$$

con a_0, a_i parametrizzati come in (2.2), troviamo

$$[S^3, A] = -\frac{i}{2}(\partial_{\phi_1} + \partial_{\phi_2})(a_0 + i\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = -\frac{i}{2} \left(-a_3 \mathbb{1} + i(a_1 \sigma_2 - a_2 \sigma_1 + a_0 \sigma_3) \right).$$

D'altra parte

$$\frac{1}{2}(a_0 + i\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})\sigma_3 = \frac{1}{2}a_0\sigma_3 + \frac{1}{2}ia^j (i\epsilon^{j3k}\sigma_k + \delta^{3j}\mathbb{1}) = \frac{i}{2}a_3 + \frac{1}{2}(a_0\sigma_3 + a_1\sigma_2 - a_2\sigma_1),$$

e i due termini effettivamente coincidono.

2.2 Gli stati nucleoni

Cerchiamo ora gli stati relativi ai nucleoni. Chiaramente, le funzioni d'onda corrispondenti al protone (neutrone) dovranno essere autostati di I_3 con autovalori $\frac{1}{2}$ ($-\frac{1}{2}$), quelle corrispondenti agli stati di spin \uparrow (\downarrow) dovranno essere autostati di S_3 con autovalori $\frac{1}{2}$ ($-\frac{1}{2}$).

Per rendere la notazione più compatta, definiamo la variabili complesse:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + ia_2 = \sqrt{\frac{1-z}{2}} e^{i\phi_1} \\ z_2 &= a_0 + ia_3 = \sqrt{\frac{1+z}{2}} e^{i\phi_2}. \end{aligned}$$

L'autostato $|p \uparrow\rangle$ corrispondente a $S_3 = \frac{1}{2}$, $I_3 = \frac{1}{2}$ si trova subito:

$$|p \uparrow\rangle = \frac{1}{\pi} z_1;$$

agendo con gli operatori di abbassamento troviamo gli altri:

$$\begin{aligned} |p \downarrow\rangle &= S^- |p \uparrow\rangle = -\frac{1}{\pi} e^{-i(\phi_1 + \phi_2)} \left[\frac{i\sqrt{1-z^2}}{2} \frac{1}{\sqrt{2(1-z)}} + \frac{i\sqrt{1+z}}{2\sqrt{2}} \right] e^{i\phi_1} = \\ &= -\frac{i}{\pi} \sqrt{\frac{1+z}{2}} e^{-i\phi_2} = -\frac{i}{\pi} \bar{z}_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |n \uparrow\rangle &= I^- |p \uparrow\rangle = \frac{1}{\pi} e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} \left[\frac{i\sqrt{1-z^2}}{2} \frac{1}{\sqrt{2(1-z)}} + \frac{i\sqrt{1+z}}{2\sqrt{2}} \right] e^{i\phi_1} = \\
 &= \frac{i}{\pi} \sqrt{\frac{1+z}{2}} e^{i\phi_2} = \frac{i}{\pi} z_2; \\
 |n \downarrow\rangle &= I^- |p \downarrow\rangle = \frac{i}{\pi} e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} \left[\frac{i\sqrt{1-z^2}}{2} \frac{1}{\sqrt{2(1-z)}} + \frac{i\sqrt{1-z}}{2\sqrt{2}} \right] e^{-i\phi_2} = \\
 &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-z}{2}} e^{-i\phi_1} = -\frac{1}{\pi} \bar{z}_1.
 \end{aligned}$$

In definitiva i quattro stati nucleoni si scrivono:

$$|p \uparrow\rangle = \frac{1}{\pi} z_1 \quad (2.15)$$

$$|p \downarrow\rangle = -\frac{i}{\pi} \bar{z}_2 \quad (2.16)$$

$$|n \uparrow\rangle = \frac{i}{\pi} z_2 \quad (2.17)$$

$$|n \downarrow\rangle = -\frac{1}{\pi} \bar{z}_1 \quad (2.18)$$

dove il fattore π è di normalizzazione. Infatti, notando che $\sqrt{\det g} = \frac{1}{4}$ si ha:

$$\langle n \downarrow \uparrow | n \downarrow \uparrow \rangle = \langle p \uparrow \downarrow | p \uparrow \downarrow \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{1 \pm z}{2} dz = \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 = 1.$$

Notiamo infine che, valendo:

$$\begin{aligned}
 S^2 &= S^+ S^- + S_z^2 = -\frac{1}{4} g^{ij} \frac{\partial}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial q^j} \\
 I^2 &= I^+ I^- + I_z^2 = -\frac{1}{4} g^{ij} \frac{\partial}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial q^j},
 \end{aligned}$$

l'hamiltoniana (2.6) si scrive:

$$H = M - \frac{1}{8\lambda} g^{ij} \frac{\partial}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial q^j} = M + \frac{1}{2\lambda} S^2 = M + \frac{1}{2\lambda} I^2,$$

che effettivamente commuta con S^a ed I^a . Le masse dei nucleoni e della delta valgono quindi:

$$\begin{aligned}
 M_n &= M + \frac{1}{2\lambda} \frac{3}{4} \\
 M_\Delta &= M + \frac{1}{2\lambda} \frac{15}{4}.
 \end{aligned}$$

Le due equazioni appena trovate ci permettono di dare una stima della costante e e della costante di decadimento F_π assumendo $M_n = 939$ MeV e $M_\Delta = 1232$ MeV. Troviamo:

$$e = 5.45 \quad (2.19)$$

$$F_\pi = 129 \text{ MeV}. \quad (2.20)$$

Quindi, sulla base dei valori delle masse dei barioni, richiediamo in questo modello un valore di F_π che devia al 30% dal valore sperimentale di 186 MeV.

Capitolo 3

Corrente di Noether associata alla carica elettrica

Come precisato nell'introduzione, protoni e neutroni non sono particelle elementari, ma sono costituiti da quark. Il protone è formato da due quark up e un quark down, il neutrone da due quark down ed un quark up. Sperimentalmente si verifica che le cariche elettriche dei quark u e d sono rispettivamente $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$; effettivamente questi valori restituiscono le giuste cariche a protoni e neutroni. Nella base $|u\rangle, |d\rangle$ l'operatore carica Q si scrive quindi:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Ora, la simmetria $SU(2)$ di isospin del doppietto (p, n) si riflette a livello microscopico nella simmetria del doppietto (u, d) . Quindi, nella base $|u\rangle, |d\rangle$ l'operatore I_3 si scrive:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Pertanto la carica elettrica Q dei quark deve essere somma di due cariche, di modo che:

$$Q = I_3 + \alpha B, \quad (3.3)$$

dove α è una costante. La carica B si chiama carica barionica e vale $\frac{1}{3}$ per i quark, $-\frac{1}{3}$ per gli antiquark, il motivo essendo che in questo modo i nucleoni, che sono barioni, hanno carica barionica normalizzata $B = 1$ e i pioni, che sono mesoni, hanno carica barionica $B=0$ (in effetti i 3 pioni π^+, π^0, π^- , che si sistemano in un tripletto di isospin, hanno $Q = I_3$ e l'uguaglianza è valida). Con questa scelta di B , da (3.3) ricaviamo $\alpha = \frac{1}{2}$.

Per l'argomentazione appena svolta ci aspettiamo che la corrente elettromagnetica sia somma di due correnti indipendentemente conservate:

- una corrente di isospin, J_V , dove il pedice sta per vettoriale perchè, come già anticipato, la simmetria che la genera è la simmetria vettoriale;
- una corrente barionica, B , generata da una simmetria topologica.

Le due sezioni seguenti sono riservate al calcolo delle correnti.

3.1 Corrente relativa all'isospin

La trasformazione V è definita da:

$$U \mapsto IUI^\dagger = e^{-i\alpha^a \tau^a} U e^{i\alpha^a \tau^a}.$$

Notiamo che, parametrizzando $I \in SU(2)$ come $I = e^{-i\alpha^a \tau^a}$, alla fine la carica conservata sarà $Q^a = 2I^a$.

La corrente di Noether è data dalla sola variazione dei campi, essendo la trasformazione V una simmetria interna:

$$J_V^{\mu,a} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu U_{ij})} \delta U_{ij}^a.$$

La variazione infinitesima di U è, al primo ordine in α^a :

$$\alpha^a \delta U^a = (1 - i\alpha^a \tau^a) U (1 + i\alpha^b \tau^b) - U = -i\alpha^a [\tau^a, U].$$

Come al solito, trattiamo le due lagrangiane separatamente. Per \mathcal{L}_1 abbiamo¹

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_1}^{\mu,a} &= i \frac{F^2}{16} \frac{(\partial_\alpha U)^{eb} U^{\dagger bc} (\partial^\alpha U)^{cd} U^{\dagger de}}{\partial(\partial_\mu U_{ij})} [\tau^a, U]^{ij} = \\ &= i \frac{F^2}{16} \left(g^{\alpha\mu} \delta^{ei} \delta^{bj} U^{\dagger bc} (\partial_\alpha U)^{cd} U^{\dagger de} + (\partial_\alpha U)^{eb} U^{\dagger bc} g^{\alpha\mu} \delta^{ci} \delta^{dj} U^{\dagger de} \right) [\tau^a, U]^{ij} = \\ &= i \frac{F^2}{16} \text{Tr}([\tau^a, U] U^\dagger (\partial^\mu U) U^\dagger) + i \frac{F^2}{16} \text{Tr}((\partial^\mu U) U^\dagger [\tau^a, U] U^\dagger) = \\ &= i \frac{F^2}{8} \text{Tr}([\tau^a, U] U^\dagger (\partial^\mu U) U^\dagger) = i \frac{F^2}{8} \text{Tr}((\partial^\mu U) [U^\dagger, \tau^a]) \end{aligned}$$

dove $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ è la metrica di Lorentz con segnatura $(1, -1, -1, -1)$. Come notiamo dal calcolo di $J_{\mathcal{L}_1}^{\mu,a}$, per calcolare più agevolmente $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu U_{ij})} \delta U_{ij}$ possiamo utilizzare il seguente algoritmo: deriviamo l'argomento della traccia e rimpiazziamo $\partial_\mu U$ con δU ogni volta che lo deriviamo. Applichiamo questa regola a $J_{\mathcal{L}_2}^\mu$. Per comodità di notazione poniamo $L_\mu = (\partial_\mu U) U^\dagger$ e notiamo che la derivata intesa come sopra (cioè derivata moltiplicata per δU) vale $\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu U)} L_\alpha = (\delta U) U^\dagger$. Si ha:

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_2}^{a,\mu} &= -\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu U)} \delta U = -\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu U)} \left(\text{Tr}([L_\alpha, L_\beta][L^\alpha, L^\beta]) \right) \delta U = \\ &= -\frac{1}{32e^2} \text{Tr} \left(2[L^\alpha, L^\beta] \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu U)} [L_\alpha, L_\beta] \right) = \\ &= -\frac{1}{8e^2} \text{Tr} \left([L^\mu, L^\beta] [(\delta U) U^\dagger, L_\beta] \right) = \\ &= \frac{i}{8e^2} \text{Tr} \left([(\partial^\mu U) U^\dagger, (\partial^\nu U) U^\dagger] [(\partial_\nu U) U^\dagger, [\tau^a, U] U^\dagger] \right). \end{aligned}$$

¹d'ora in poi ometteremo il pedice V

Sommando le due correnti otteniamo la corrente associata alla trasformazione vector:

$$J^{\mu,a} = i\frac{F^2}{8}Tr(\partial^\mu U[U^\dagger, \tau^a]) + \frac{i}{8e^2}Tr\left([\partial^\mu U]U^\dagger, (\partial^\nu U)U^\dagger][(\partial_\nu U)U^\dagger, [\tau^a, U]U^\dagger]\right). \quad (3.4)$$

Prima di procedere al calcolo esplicito della corrente vector inserendo $U = AU_0A^{-1}$ in (3.4), facciamo un paio di considerazioni: innanzitutto, per via dell'indice a , le correnti conservate saranno 3, cioè le 3 componenti dell'isospin, a meno di un fattore 2; a noi in realtà per il calcolo delle proprietà dei nucleoni interesserà solo la terza componente I_3 , semplicemente per completezza la calcoleremo lungo la generica direzione a . Inoltre, siccome per ciò che interessa a noi, servirà l'integrale sull'angolo solido della quadricorrente, ricaveremo direttamente $\int J_V^{a,\mu} d\Omega$, essendo l'espressione integrata molto più semplice.

Ora possiamo procedere. Per il termine con $\mu = 0$ (componente temporale), con lagrangiana \mathcal{L}_1 , abbiamo:

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_1}^{a,0} &= i\frac{F^2}{8}Tr(\partial^0 U[U^\dagger, \tau^a]) = \\ &= i\frac{F^2}{8}\left(2Tr((\partial_0 A)A^\dagger \tau^a) - Tr(U(\partial_0 A)A^\dagger U^\dagger \tau^a) - Tr(U^\dagger(\partial_0 A)A^\dagger U \tau^a)\right) = \\ &= i\frac{F^2}{8}\left(2Tr((\partial_0 A)A^\dagger \tau^a) - i\beta^b Tr(U\tau^b U^\dagger \tau^a) - i\beta^b Tr(U^\dagger \tau^b U \tau^a)\right), \end{aligned}$$

da cui, sfruttando (A.5), otteniamo:

$$\begin{aligned} \int J_{\mathcal{L}_1}^{a,0} d\Omega &= i\frac{F^2}{4}\left(4\pi Tr((\partial_0 A)A^\dagger \tau^a) - 8\pi d^a(\cos^2 F - \frac{1}{3}\sin^2 F)\right) = \\ &= i\frac{4\pi}{3}\sin^2 F Tr((\partial_0 A)A^\dagger \tau^a). \end{aligned}$$

Passiamo alla componente temporale di lagrangiana \mathcal{L}_2 . Sfruttando le proprietà cicliche della traccia e (A.7), $J_{\mathcal{L}_2}^{a,0}$ si scrive:

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_2}^{a,0} &= \frac{i}{8e^2}Tr\left([\partial^0 U]U^\dagger, (\partial^i U)U^\dagger][(\partial_i U)U^\dagger, [\tau^a, U]U^\dagger]\right) = \\ &= \frac{i}{4e^2}(F'^2 + 2\frac{\sin^2 F}{r^2})Tr([\partial_0 U], U^\dagger)\tau^a + \\ &+ \frac{i}{4e^2}Tr((\partial_i U)U^\dagger(\partial_0 U)U^\dagger(\partial_i U)U^\dagger(\tau^a - U\tau^a U^\dagger)). \end{aligned}$$

La prima traccia l'abbiamo appena calcolata per $V_{\mathcal{L}_1}^{a,0}$; integrata, restituisce, come prima, il termine $\frac{32}{3}\pi\sin^2 F$. Riscriviamo la seconda come:

$$\begin{aligned} &Tr([\partial_i U]U^\dagger(\partial_0 A)A^\dagger(\partial_i U)U^\dagger + U^\dagger(\partial_i U)(\partial_0 A)A^\dagger(\partial_i U)U^\dagger)\tau^a + \\ &+ Tr((\partial_i U)(\partial_0 A)A^\dagger(\partial_i U^\dagger)\tau^a) + Tr((\partial_i U^\dagger)(\partial_0 A)A^\dagger(\partial_i U)\tau^a) = \\ &= -i(\hat{d}_{ij}\hat{d}_{ik} + \hat{d}_{ij}\hat{d}_{ik})d^b Tr(\tau^j \tau^b \tau^k \tau^a) + id^b Tr((\partial_i U)\tau^b(\partial_i U^\dagger)\tau^a) + \\ &+ id^b Tr((\partial_i U^\dagger)\tau^b(\partial_i U)\tau^a). \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo riscritto tutto servendoci delle (1.19), (1.21), (1.22). Integriamo sull'angolo solido e sfruttiamo (A.1), (A.2), (A.6), (A.8), (A.11), (A.12). Otteniamo:

$$\begin{aligned} & -4id^b(\delta^{jb}\delta^{ka} + \delta^{ja}\delta^{kb} - \delta^{jk}\delta^{ba}) \int \left(F' \hat{y}_j \hat{y}_k + \frac{\sin^2 F}{r^2} \hat{P}_{jk} \right) d\Omega + \\ & + 16\pi d^a \left(F'^2 \sin^2 F - \frac{1}{3} F'^2 \cos^2 F - \frac{4}{3} \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) = \\ & = \frac{64}{3} \pi i F'^2 \sin^2 F d^a = \left(\frac{32}{3} \pi F'^2 \sin^2 F \right) Tr((\partial_0 A) A^\dagger \tau^a) \end{aligned}$$

Quindi, sommando i vari termini, otteniamo:

$$\int J_{\mathcal{L}_2}^{a,0} d\Omega = \frac{16}{3e^2} \pi i \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) Tr((\partial_0 A) A^\dagger \tau^a),$$

e la componente temporale della corrente vector si scrive :

$$\begin{aligned} \int J^{a,0} d\Omega &= \int (J_{\mathcal{L}_1}^{a,0} + J_{\mathcal{L}_2}^{a,0}) d\Omega = \\ &= i \frac{4\pi}{3} \sin^2 F \left[F_\pi^2 + \frac{4}{e^2} \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \right] Tr((\partial_0 A) A^\dagger \tau^a) = \\ &= i \frac{4\pi}{3} \Lambda' Tr((\partial_0 A) A^\dagger \tau^a), \end{aligned} \quad (3.5)$$

con

$$\Lambda' = \sin^2 F \left[F_\pi^2 + \frac{4}{e^2} \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \right]. \quad (3.6)$$

Notiamo infine che, integrando la carica vettoriale $J_V^{a,0}$ nello spazio, otteniamo l'identità operatoriale:

$$\int J^{a,0} d^3x = \int r^2 J_V^{a,0} dr d\Omega = \frac{2}{\Lambda} \left(\int r^2 e^3 F_\pi \Lambda' dr \right) I^a = 2I^a. \quad (3.7)$$

Passiamo ora alla componente spaziale.

$J_{\mathcal{L}_1}^{a,i}$ si calcola rapidamente:

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_1}^{a,i} &= i \frac{F_\pi^2}{8} Tr([\partial^i U, U^\dagger] \tau^a) = i \frac{F_\pi^2}{8} Tr(A[\partial^i U_0, U_0^\dagger] A^\dagger \tau^a) = \\ &= \frac{F_\pi^2}{8} 2 \frac{\sin^2 F}{r} \epsilon^{ikl} \hat{x}^k Tr(A \tau^l A^\dagger \tau^a). \end{aligned}$$

Rimane da calcolare $J_{\mathcal{L}_2}^{a,i}$:

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_2}^{a,i} &= \frac{i}{8e^2} Tr \left([(\partial^i U) U^\dagger, (\partial^j U) U^\dagger] [(\partial_j U) U^\dagger, [\tau^a, U] U^\dagger] \right) + \\ &+ \frac{i}{8e^2} Tr \left([(\partial^i U) U^\dagger, (\partial^0 U) U^\dagger] [(\partial_0 U) U^\dagger, [\tau^a, U] U^\dagger] \right) = \\ &= \frac{i}{8e^2} Tr \left([(\partial^i U) U^\dagger, \partial^j U] U^\dagger [(\partial_j U) U^\dagger, \tau^a] \right) - \\ &- Tr \left([U^\dagger (\partial^i U), U^\dagger (\partial^j U)] [U^\dagger (\partial_j U), \tau^a] \right) + o((\partial_0 A)^2). \end{aligned}$$

Abbiamo sommariamente racchiuso tutti i termini quadratici nelle derivate temporali in $o((\partial_0 A)^2)$ perché li trascureremo, il motivo essendo che, nel limite semiclassico, i solitoni ruotano lentamente (come abbiamo visto, infatti, le fluttuazioni sono adiabatiche, nel senso che, istante per istante, la soluzione U ha la stessa energia di U_0).

Rimangono da valutare due termini. Consideriamo il primo:

$$\begin{aligned} & \frac{i}{8e^2} \text{Tr} \left([(\partial^i U)U^\dagger, \partial^j U]U^\dagger [\partial_j U]U^\dagger, \tau^a \right) = \\ & = \frac{i}{8e^2} (4i\epsilon^{klm}\epsilon^{nmp}d^{ik}d^{jl}d^{jm}) \text{Tr}(A\tau^p A^\dagger \tau^a) = \\ & = \frac{i}{8e^2} \left[4iD^{ip} + 4i\frac{\sin^2 F}{r} \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \epsilon^{bip}\hat{x}^b \right] \text{Tr}(A\tau^p A^\dagger \tau^a) \end{aligned}$$

con:

$$D^{ip} = \left(F' + \frac{\sin^2 F}{r} \right) \frac{\sin 2F}{2r} P^{ip} + 2\frac{\sin^2 F}{r^2} F' \hat{x}^i \hat{x}^p$$

Il secondo termine è identico al primo con la sostituzione:

$$d^{ij} \rightarrow \tilde{d}^{ij};$$

siccome d^{ij} e \tilde{d}^{ij} sono identici a meno del segno del termine proporzionale al tensore di Levi-Civita, l'ultimo termine è identico a (3.1) con la sostituzione $\epsilon^{abc} \rightarrow -\epsilon^{abc}$:

$$\frac{i}{8e^2} \left[4iD^{ip} - 4i\frac{\sin^2 F}{r} \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \epsilon^{bip}\hat{x}^b \right] \text{Tr}(A\tau^p A^\dagger \tau^a)$$

Quindi:

$$J_{\mathcal{L}_2}^{a,i} = -\frac{1}{e^2} \frac{\sin^2 F}{r} \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \epsilon^{bip}\hat{x}^b \text{Tr}(A\tau^p A^\dagger \tau^a).$$

L'integrale sull'angolo solido della corrente spaziale dà chiaramente risultato nullo perché qualsiasi corrente spaziale si annulla su una superficie chiusa; riportiamo invece il risultato di un integrale che utilizzeremo nel calcolo dei momenti magnetici:

$$\begin{aligned} \int x^c J_V^{a,i} d\Omega &= \frac{i\pi}{3} \sin^2 F \left[F_\pi^2 + \frac{4}{e^2} \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \right] \text{Tr}(\tau^c \tau^i A^\dagger \tau^a A) = \\ &= \frac{i\pi}{3} \Lambda' \text{Tr}(\tau^c \tau^i A^\dagger \tau^a A) \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.2 Corrente relativa alla carica barionica

L'espressione della corrente barionica é:

$$B^\mu = \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(U^\dagger(\partial_\nu U)U^\dagger(\partial_\rho U)U^\dagger(\partial_\sigma U)), \quad (3.9)$$

dove nella nostra convenzione $\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123} = 1$ [7]. Le motivazioni anti-stanti questa scrittura vanno oltre gli scopi di questa trattazione superficiale

del modello e le tralascieremo; ci limiteremo a verificare che tale espressione è consistente con le nostre aspettative sulla corrente barionica.

L'esistenza della corrente barionica è legata, come già detto, a proprietà topologiche dello spazio, che permettono ai solitoni topologici di essere assegnati a classi topologiche distinte, ognuna delle quali porta una carica topologica B , detta *winding number*, diversa per ognuno. Ora, si può dimostrare che le proprietà dello spazio dei campi del modello di Skyrme impongono che il winding number debba essere in questo caso un intero; un modo per far sì che B coincida con il numero barionico è che soddisfi le seguenti proprietà:

- $B(U) = z$ con $z \in \mathbb{Z}$, $\forall U \in \text{SU}(2)$,
- $B(\mathbb{1}) = 0$ perchè la soluzione $U = \mathbb{1}$ corrisponde ai pioni che, essendo mesoni, devono avere numero barionico 0;
- $B(U_0) = 1$, perchè vogliamo che la soluzione solitonica U_0 corrisponda ai barioni.

Un modo per soddisfare queste richieste è di porre $B = \int B^0 d^3x$, con B^0 definita in (3.9); ma allora, come vedremo tra un attimo, per soddisfare la terza richiesta le condizioni al contorno per la F devono essere tali che $F(0) - F(\infty) = \pi$. In definitiva, questo è il motivo per cui sono state fissate le condizioni (1.5) per F [2].

Il fatto che la corrente sia una corrente topologica, nel senso che deriva da proprietà topologiche dello spazio e non da un'invarianza della lagrangiana come ad esempio per la corrente vettoriale, lo si vede anche notando che (3.9) è identicamente conservata, cioè $\partial_\mu B^\mu = 0$ a prescindere dalla scelta della U , cioè a prescindere dal fatto che essa soddisfi o meno le equazioni del moto. Dimostriamolo. Per comodità di notazione poniamo $L_\mu = U^\dagger \partial_\mu U$ e notiamo che:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu L_\nu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U + U^\dagger \partial_\mu \partial_\nu U) = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} L_\mu L_\nu.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \partial_\mu B^\mu &= \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(\partial_\mu (L_\nu L_\rho L_\sigma)) = \\ &= -\frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(L_\mu L_\nu L_\rho L_\sigma + L_\nu L_\mu L_\rho L_\sigma + L_\nu L_\rho L_\mu L_\sigma). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ma

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(L_\mu L_\nu L_\rho L_\sigma) &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d_{\mu i} d_{\nu j} d_{\rho k} d_{\sigma l} \text{Tr}(\tau_i \tau_j \tau_k \tau_l) = \\ &= 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (d_{\mu i} d_{\nu i} d_{\rho k} d_{\sigma k} + d_{\mu i} d_{\nu k} d_{\rho k} d_{\sigma i} - d_{\mu i} d_{\nu j} d_{\rho i} d_{\sigma j}) = 0, \end{aligned}$$

dove si è sfruttata (A.8) e, nell'ultima uguaglianza, la contrazione di indici simmetrici con antisimmetrici. I tre termini in (3.10) sono quindi identicamente nulli e abbiamo concluso. Effettivamente, come avevamo anticipato, nella dimostrazione non si è mai fatto riferimento ad una particolare forma della U .

Calcoliamo ora esplicitamente le componenti della corrente barionica. B^0 si scrive:

$$\begin{aligned} B^0 &= \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{0ijk} \text{Tr}(A(\partial_i U_0) U_0^\dagger (\partial_j U_0) U_0^\dagger (\partial_k U_0) U_0^\dagger A^\dagger) = \\ &= \frac{i}{24\pi^2} \epsilon^{0ijk} d^{il} d^{jm} d^{kn} \text{Tr}(\tau^l \tau^m \tau^n) = -\frac{1}{12\pi^2} \epsilon^{0ijk} \epsilon^{lmn} d^{il} d^{jm} d^{kn}. \end{aligned}$$

Sfruttando (A.10) troviamo:

$$B^0 = -\frac{1}{12\pi^2} (d^{ii} d^{jj} d^{kk} - 3d^{ii} d^{jk} d^{kj} + 2d^{il} d^{lk} d^{ki}) = -\frac{F'^2 \sin^2 F}{2\pi^2 r^2}. \quad (3.11)$$

Per quanto riguarda B^i invece:

$$\begin{aligned} B^i &= \frac{3}{24\pi^2} \epsilon^{i0jk} \text{Tr} \left((\partial_0 U) U^\dagger (\partial_j U) U^\dagger (\partial_k U) U^\dagger \right) = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{i0jk} \text{Tr} \left(A^\dagger \partial_0 A \left((\partial_j U_0) U_0^\dagger (\partial_k U_0) U_0^\dagger - U_0^\dagger (\partial_j U_0) U_0^\dagger (\partial_k U_0) \right) \right) = \\ &= \frac{i}{8\pi^2} \epsilon^{0ijk} \tilde{d}^n (d^{jl} d^{km} - \tilde{d}^{jl} \tilde{d}^{km}) \text{Tr} (\tau^n \tau^l \tau^m) = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \epsilon^{0ijk} \epsilon^{nlm} \tilde{d}^n (d^{jl} d^{km} - \tilde{d}^{jl} \tilde{d}^{km}). \end{aligned}$$

Il modo più veloce per esplicitare le contrazioni è scrivere

$$\begin{aligned} d^{ij} &= S^{ij} + A^{ij} = F' \hat{x}_i \hat{x}_j + \frac{\sin 2F}{2r} P_{ij} + \frac{\sin^2 F}{r} \epsilon_{aij} \hat{x}_a \\ \tilde{d}^{ij} &= S^{ij} - A^{ij} = F' \hat{x}_i \hat{x}_j + \frac{\sin 2F}{2r} P_{ij} - \frac{\sin^2 F}{r} \epsilon_{aij} \hat{x}_a \end{aligned}$$

con S^{ij} e A^{ij} rispettivamente tensori simmetrico ed antisimmetrico; così facendo termini proporzionali a contrazioni del tipo A^{ii} , $S^{ij} A^{ij}$, si annullano automaticamente. In funzione di questi il termine tra parentesi vale $2(S^{jl} A^{km} + S^{km} A^{jl})$ e quindi:

$$\begin{aligned} B^i &= -\frac{1}{2\pi^2} \epsilon^{0ijk} \epsilon^{nlm} \tilde{d}^n (S^{jl} A^{km} + A^{jl} S^{km}) = -\frac{1}{\pi^2} \epsilon^{0ijk} \epsilon^{nlm} \tilde{d}^n S^{jl} A^{km} = \\ &= \frac{1}{\pi^2} (\tilde{d}^j (S^{kk} A^{ji} - S^{ki} A^{jk}) + \tilde{d}^k (S^{ki} A^{jj} - S^{kj} A^{ji}) + \tilde{d}^i (S^{jl} A^{lj} - S^{kk} A^{jj})) = \\ &= -\frac{1}{\pi^2} F' \frac{\sin^2 F}{r} \epsilon^{ajj} \hat{x}^a \tilde{d}^j = \frac{i}{2\pi^2} F' \frac{\sin^2 F}{r} \epsilon^{iaj} \hat{x}^a \text{Tr} [A^\dagger (\partial_0 A) \tau^j] = \\ &= \frac{i}{2\pi^2} F' \frac{\sin^2 F}{r} \epsilon^{ija} \hat{x}^a \text{Tr} [(\partial_0 A^\dagger) A \tau^j]. \end{aligned}$$

Verifichiamo infine che, con le condizioni al contorno (1.5), $B = 1$:

$$B = \int B^0 d^3x = -\frac{2}{\pi} \int F' \sin^2 F dr = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{F}{2} - \frac{\sin 2F}{4} \right) \Big|_0^\infty = 1$$

Capitolo 4

Predizioni del modello e conclusioni

Ora siamo in grado di predire qualche osservabile fisica.

4.1 Distribuzioni di carica

Per quanto visto nelle precedenti sezioni possiamo definire le due seguenti distribuzioni di carica:

- la distribuzione di carica *isoscalfare* - cioè la distribuzione di carica bario-nica -, che è identica per entrambi i nucleoni:

$$\rho_{I=0}(r) = 4\pi r^2 B^0 = -\frac{2}{\pi} \sin^2 F F'; \quad (4.1)$$

- la distribuzione di carica *isovettoriale* - cioè la distribuzione di carica di isospin - che è diversa per p ed n :

$$\begin{aligned} \rho_{I=1}(r) &= \int r^2 \langle N | J_V^{3,0} | N \rangle d\Omega = \\ &= i \frac{4\pi}{3} r^2 \sin^2 F \left[F_\pi^2 + \frac{4}{e^2} \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \right] \langle N | \text{Tr}(\partial_0 A) A^\dagger \tau^3 | N \rangle; \end{aligned}$$

in appendice è mostrato che:

$$\text{Tr}((\partial_0 A) A^\dagger \tau^j) = -\frac{i}{\lambda} I^j = -\frac{6}{4\pi\Lambda} i e^3 F_\pi I^j, \quad (4.2)$$

e quindi, la distribuzione di carica isovettoriale si scrive, sullo stato $|p \uparrow\rangle$:

$$\rho_{I=1}(r) = 2e^3 F_\pi \frac{r^2 \Lambda'}{\Lambda} \langle p | I^3 | p \rangle = e^3 F_\pi \frac{r^2 \Lambda'}{\Lambda}$$

dove Λ' è quella definita in (3.6).

Sfruttando (3.3), (3.7) possiamo scrivere le distribuzioni di carica di p ed n :

$$\rho_p = \frac{1}{2}\rho_{I=1} + \frac{1}{2}\rho_{I=0} = \frac{1}{2\Lambda}\tilde{r}^2 \sin^2 F \left[1 + 4 \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{\tilde{r}^2} \right) \right] - \frac{1}{\pi} \sin^2 F F' \quad (4.3)$$

$$\rho_n = -\frac{1}{2}\rho_{I=1} + \frac{1}{2}\rho_{I=0} = -\frac{1}{2\Lambda}\tilde{r}^2 \sin^2 F \left[1 + 4 \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{\tilde{r}^2} \right) \right] - \frac{1}{\pi} \sin^2 F F', \quad (4.4)$$

che abbiamo riscritto in funzione della variabile adimensionale \tilde{r} ; le due distribuzioni sono plottate in figura (4.1).

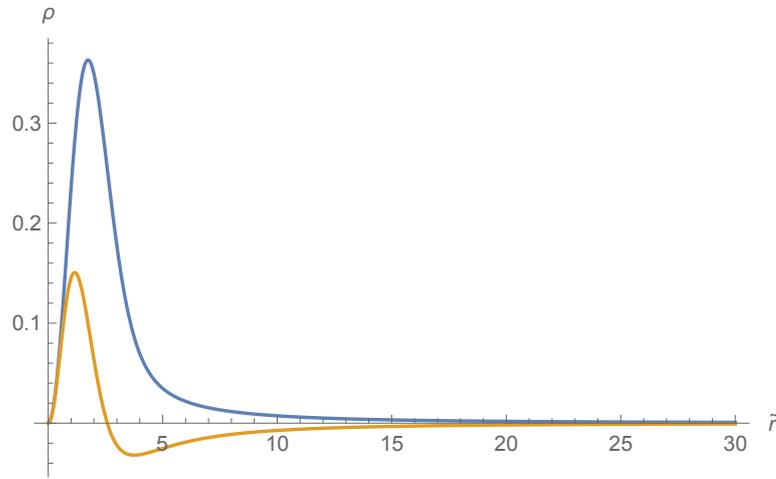


Figura 4.1: In blu è rappresentata la densità di carica del protone, in rosso quella del neutrone, in funzione della variabile adimensionale \tilde{r} .

4.2 Momenti magnetici e fattori g

Le definizioni di momenti magnetici isoscalare e isovettoriale sono, rispettivamente:

$$\boldsymbol{\mu}_{I=0} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{B} d^3x \quad (4.5)$$

$$\boldsymbol{\mu}_{I=1} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{J}_{\mathbf{V}}^3 d^3x, \quad (4.6)$$

e quindi da (3.3), (3.7), otteniamo le relazioni che legano i momenti magnetici isoscalare ed isovettoriale a quelli di protone e neutrone:

$$\boldsymbol{\mu}_p = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_{I=0} + \boldsymbol{\mu}_{I=1}) \quad (4.7)$$

$$\boldsymbol{\mu}_n = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_{I=0} - \boldsymbol{\mu}_{I=1}).$$

Per calcolarli, valutiamo esplicitamente le (4.5), (4.6) sugli stati $|p \uparrow\rangle$. Iniziamo da $\langle p \uparrow | \boldsymbol{\mu}_{I=0} | p \uparrow \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle p \uparrow | (\mu_{I=0})_i | p \uparrow \rangle &= \frac{1}{2} \int \epsilon_{ilm} x_l \langle p \uparrow | B_m | p \uparrow \rangle d^3x = \\ &= - \langle p \uparrow | Tr[(\partial_0 A^\dagger) A \tau_j] | p \uparrow \rangle \int \frac{1}{2} \frac{i}{2\pi^2} \epsilon_{ilm} \epsilon_{mjk} \sin^2 FF' \hat{x}_l \hat{x}_k d^3x = \\ &= - \langle p \uparrow | Tr[(\partial_0 A^\dagger) A \tau_j] | p \uparrow \rangle \frac{2}{3\pi} i \delta_{ij} \int r^2 \sin^2 FF' dr. \end{aligned}$$

In appendice è mostrato che:

$$Tr[(\partial_0 A^\dagger) A \tau_j] = \frac{1}{\lambda i} S_j, \quad (4.8)$$

e quindi:

$$(\mu_{I=0})_i = -\frac{1}{3\pi\lambda} \delta_{i3} \int r^2 \sin^2 FF' dr. \quad (4.9)$$

E' diversa da zero solo la componente lungo l'asse z , come ci aspettava. Per calcolare il valore teorico riscriviamo il momento magnetico isoscalare con le sostituzioni:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{4\pi}{6} \left(\frac{1}{e^3 F_\pi} \right) \Lambda, \\ \int r^2 \sin^2 FF' dr &= -\frac{\pi}{2e^2 F_\pi^2} \langle \hat{r}^2 \rangle_{I=0}; \end{aligned}$$

in questo modo abbiamo:

$$(\mu_{I=0})_i = \frac{1}{4\pi\Lambda} \frac{e}{F_\pi} \langle \hat{r}^2 \rangle_{I=0} = \frac{1}{4\pi\Lambda} \frac{e}{F_\pi} \langle \hat{r}^2 \rangle_{I=0} \frac{qc^2\hbar}{2M_p} 2M_p = 0.56 \mu_N \quad (4.10)$$

dove $\mu_N = \frac{q\hbar}{2M_p}$ è il magnetone nucleare e abbiamo ripristinato q , \hbar e c . Il fattore g isoscalare è definito da:

$$\boldsymbol{\mu}_{I=0} = \frac{g}{4M} \boldsymbol{\sigma} \quad (4.11)$$

dove le σ sono le matrici di pauli. Sugli stati $|p \uparrow\rangle$ la (4.11) si scrive:

$$(\mu_{I=0})_3 = 0.56 \mu_N = \frac{g}{2} \mu_N$$

e quindi otteniamo un fattore isoscalare $g_{I=0} = g_p + g_n = 1.12$, contro un valore sperimentale di 1.76.

Passiamo al momento magnetico isovettoriale (4.6). Agendo sempre sugli stati $|p \uparrow\rangle$ e sfruttando (3.8) troviamo:

$$\begin{aligned} \langle p \uparrow | (\mu_{I=1})_i | p \uparrow \rangle &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int x_j J_V^{3,k} d^3x = \\ &= \frac{\Lambda}{e^3 F_\pi} \frac{i\pi}{6} \epsilon_{ijk} \langle p \uparrow | Tr(\tau_j \tau_k A^\dagger \tau_3 A) | p \uparrow \rangle = \\ &= -\frac{\Lambda}{e^3 F_\pi} \frac{\pi}{3} \langle p \uparrow | Tr(\tau_i A^\dagger \tau_3 A) | p \uparrow \rangle. \end{aligned}$$

Un calcolo dettagliato, mostrato in appendice, esibisce che su ogni stato nucleone N ed N' vale:

$$\langle N' | Tr[\tau_i A^\dagger \tau_j A] | N \rangle = -\frac{2}{3} \langle N' | \sigma_i \tau_j | N \rangle, \quad (4.12)$$

dove le σ_i , τ_j sono le matrici di Pauli relative a spin ed isospin rispettivamente. Sfruttando (4.12) otteniamo:

$$\begin{aligned} (\mu_{I=1})_i &= -\frac{\Lambda}{e^3 F_\pi} \frac{\pi}{3} \langle p \uparrow | Tr(\tau^i A^\dagger \tau^3 A) | p \uparrow \rangle = \\ &= \frac{2}{9} \frac{\Lambda}{e^3 F_\pi} \pi \langle p \uparrow | \sigma^i \tau^3 | p \uparrow \rangle = \frac{2}{9} \frac{\Lambda}{e^3 F_\pi} \pi \delta_{i3}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Di nuovo, è diversa da zero solo la terza componente, come ci si aspettava. Numericamente otteniamo, per il momento magnetico isovettoriale, in unità di μ_N , un valore di 3.18. In corrispondenza $g_{I=1} = 6.36$. Dai momenti magnetici isoscalare e isovettoriale ricaviamo momenti magnetici e fattori g di p ed n :

$$\begin{aligned} \mu_p &= \frac{1}{2}(\mu_{I=0} + \mu_{I=1}) = 1.87 \\ \mu_n &= \frac{1}{2}(\mu_{I=0} - \mu_{I=1}) = -1.31 \\ g_p &= \frac{1}{2}(g_{I=0} + g_{I=1}) = 3.74 \\ g_n &= \frac{1}{2}(g_{I=0} - g_{I=1}) = -2.62. \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.3 Raggi di carica

Ricaviamo infine i raggi di carica elettrico e magnetico. Fisicamente essi rappresentano una misura della taglia di una particella; la loro importanza nasce dal fatto che la sezione nucleare, che è la quantità determinante nei processi di scattering (e anche una delle poche sperimentalmente misurabili), è proporzionale appunto al quadrato del raggio di carica. Ricordando la definizione di densità elettrica isoscalare $\rho_{I=0}$ e definendo la densità di momento magnetico isoscalare come:

$$\rho_M^{I=0} = \frac{1}{|\mu_{I=0}|} \frac{1}{2} r^2 \int |\mathbf{r} \times \mathbf{B}| d\Omega = \frac{r^2 F' \sin^2 F}{\int_0^\infty F' \sin^2 F dr}, \quad (4.15)$$

possiamo definire:

- il quadrato del *raggio elettrico isoscalare medio*:

$$\langle r^2 \rangle_{I=0} = \int r^2 \rho_{I=0}(r) dr, \quad (4.16)$$

e numericamente troviamo:

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_{I=0} &= \int r^2 \rho_B(r) dr = \frac{1}{e^2 F_\pi^2} \int \tilde{r}^2 \rho_B(\tilde{r}) d\tilde{r} = \frac{4.47}{e^2 F_\pi^2} = \\ &= 4.47 (0.28)^2 10^{-30} \text{ m}^2 = 0.35 \text{ fm}^2, \end{aligned}$$

dove abbiamo ripristinato \hbar e c . Quindi $\sqrt{\langle r^2 \rangle_{I=0}} = 0.59 \text{ fm}$, mentre il corrispondente valore sperimentale è di 0.72 fm ;

- il quadrato del raggio magnetico isoscalare medio:

$$\langle r^2 \rangle_{M,I=0} = \int_0^\infty r^2 \rho_M^{I=0} dr; \quad (4.17)$$

otteniamo numericamente $\sqrt{\langle r^2 \rangle_{M,I=0}} = 0.92$ fm, contro un valore sperimentale di 0.81 fm.

Il quadrato del raggio di carica isovettoriale $\int r^2 \rho_{I=1}(r)$ è, invece, divergente, come aspettato nel limite chirale. Stiamo infatti trattando una teoria in cui i quark sono considerati a massa nulla. L'introduzione delle masse dei quark curerà il problema [6].

4.4 Conclusioni

Riassumiamo nella seguente tabella tutti i risultati predetti dalla teoria incontrati nel corso della trattazione e, di fianco, i relativi risultati sperimentali:

Quantita'	Predizione	Esperimento
M_N	<i>input</i>	939 MeV
M_Δ	<i>input</i>	1232 MeV
F_π	129 MeV	186 MeV
$\sqrt{\langle r^2 \rangle_{I=0}}$	0.59 fm	0.72 fm
$\sqrt{\langle r^2 \rangle_{M,I=0}}$	0.92 fm	0.81 fm
μ_p	$1.87 \mu_N$	$2.79 \mu_N$
μ_n	$-1.31 \mu_N$	$-1.91 \mu_N$
g_p	3.74	5.58
g_n	-2.62	-3.82

Il modello di Skyrme ha riscosso successo anche in altre predizioni, non trattate in questo lavoro:

- se consideriamo anche il quark s , la corrispondente teoria con simmetria chirale $SU(3) \times SU(3)$ predice tutto l'ottetto di barioni con $J = \frac{1}{2}$ e il decupletto con $J = \frac{3}{2}$;
- molte caratteristiche di base delle interazioni fenomenologiche nucleone-nucleone sono ben descritte dalle interazioni skirmione-skyrmione;
- stati eccitati di N e Δ sono descritti da accoppiamenti rotazionali - vibrazionali degli skyrmioni;
- nel settore $B = 2$ la teoria presenta stati risonanti che possono essere identificati con il *deuterone* e i *dibarioni*.

Predizioni più accurate sono state fatte lavorando in uno spazio 5-dimensionale [6].

In questa trattazione abbiamo visto come, trattando i pioni come particelle elementari, cioè trascurando i loro gradi di libertà interni, si riescano a predire in maniera più o meno precisa alcune quantità fisiche dei nucleoni, riguardati come particolari oggetti topologici la cui esistenza è dovuta, in ultima analisi,

al fatto che i campi della teoria vivono su una sfera quadridimensionale. E' questo il principale successo e il motivo per cui la teoria merita interesse. E' chiaro, infatti, che il modello di Skyrme non ha la pretesa di essere la corretta teoria descrivente la fisica degli adroni alle basse energie. Infatti, se anche l'accordo sperimentale fosse perfetto (cosa che non è), bisognerebbe trovare il modo di giustificare dal punto di vista microscopico la teoria, ovvero di derivarla dalla QCD. Come abbiamo accennato nell'introduzione, infatti, non esiste alcun motivo a priori per cui rigettare gli (infiniti) altri termini del NLSM e ciò mina fortemente la consistenza della teoria stessa. In definitiva il modello di Skyrme deve essere riguardato come un buon modello per testare la ragionevolezza di una descrizione solitonica dei nucleoni. I lavori di Skyrme, Witten ed altri, confermati da questa trattazione, suggeriscono infatti che, un'eventuale teoria fondamentale dei mesoni debolmente interagenti, la cosiddetta *teoria duale* della QCD, assegnerebbe ai barioni il ruolo di skyrmioni.

Appendice A

Identità utili

Riassumiamo nella seguente appendice le identità alle quali abbiamo fatto riferimento nel corso della trattazione.

I d_{ij} e i \tilde{d}_{ij} definiti in (1.8), (1.24), soddisfano alle seguenti relazioni:

$$d_{ij}d_{ij} = \tilde{d}_{ij}\tilde{d}_{ij} = F'^2 + 2\frac{\sin^2 F}{r^2} \quad (\text{A.1})$$

$$d_{ij}d_{ik} = \tilde{d}_{ij}\tilde{d}_{ik} = F'^2 \hat{x}_j \hat{x}_k + \frac{\sin^2 F}{r^2} P_{jk}. \quad (\text{A.2})$$

Sia $U = u_0 \mathbb{1} + i u_i \tau_i$ una matrice invertibile 2×2 definita sul campo \mathbb{C} . Vale:

$$\text{Tr}(\tau_a U \tau_b U^\dagger) = 2[(u_0^2 - \mathbf{u}^2)\delta_{ab} + 2u_a u_b + 2\epsilon_{abc} u_0 u_c]. \quad (\text{A.3})$$

In particolare, se $U = (\cos F) \mathbb{1} + i(\sin F) \hat{x}_i \tau_i$:

$$\text{Tr}(\tau_a U \tau_b U^\dagger) = 2[(\cos^2 F - \sin^2 F)\delta_{ab} + 2\hat{x}_a \hat{x}_b \sin^2 F + 2\sin F \cos F \epsilon_{cab} \hat{x}_c] \quad (\text{A.4})$$

$$\int \text{Tr}(\tau_a U \tau_b U^\dagger) d\Omega = 8\pi \delta_{ab} (\cos^2 F - \frac{1}{3} \sin^2 F); \quad (\text{A.5})$$

se $U = \partial_i U_0 = \hat{x}_i F' \sin F \mathbb{1} + i(F' \cos F \hat{x}_i \hat{x}_j + \frac{1}{r} \sin F P_{ij}) \tau_j$:

$$\int (\text{Tr}(\tau_a \partial_i U_0 \tau_b \partial_i U_0^\dagger)) d\Omega = 8\pi \delta_{ab} \left(F'^2 \sin^2 F - \frac{1}{3} F'^2 \cos^2 F - \frac{4}{3} \frac{\sin^2 F}{r^2} \right). \quad (\text{A.6})$$

Un'altra identità utile è la seguente:

$$(\partial_i U) U^\dagger (\partial_i U) U^\dagger = A(\partial_i U_0) U_0^\dagger (\partial_i U_0) U_0^\dagger A^\dagger = -d_{ij} d_{ij} \mathbb{1} = -\left(F'^2 + 2\frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \mathbb{1}. \quad (\text{A.7})$$

Riportiamo anche tre identità che riguardano le matrici di Pauli,

$$\text{Tr}(\tau_a \tau_b \tau_c \tau_d) = 2(\delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{ad} \delta_{bc} - \delta_{ac} \delta_{bd}) \quad (\text{A.8})$$

$$\tau_a \tau_b \tau_c = i\epsilon_{abc} \mathbb{1} + \delta_{ab} \tau_c + \delta_{bc} \tau_a - \delta_{ac} \tau_b \quad (\text{A.9})$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} = \delta_{il} (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) - \delta_{im} (\delta_{jl} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{kl}) + \delta_{in} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) \quad (\text{A.10})$$

e due riguardanti degli integrali angolari:

$$\int \hat{x}^a \hat{x}^b d\Omega = \frac{4}{3} \pi \delta^{ab} \quad (\text{A.11})$$

$$\int \hat{x}^a d\Omega = 0. \quad (\text{A.12})$$

A.1 Identità riguardanti spin ed isospin

Dimostriamo alcune identità riguardanti spin ed isospin tralasciate nel corso della trattazione. Scriviamo innanzitutto gli operatori di spin ed isospin introdotti in (2.13), (2.14) in funzione delle variabili canoniche a_i . Ad esempio per I^3 abbiamo:

$$I^3 = -\frac{i}{2} \left(\frac{\partial a_i}{\partial \phi_1} \frac{\partial}{\partial a_i} - \frac{\partial a_i}{\partial \phi_2} \frac{\partial}{\partial a_i} \right) = -\frac{i}{2} \left(-a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial a_0} - a_0 \frac{\partial}{\partial a_3} \right);$$

I^1 ed I^2 si calcolano in maniera simile così, in definitiva, possiamo scrivere:

$$I^k = \frac{i}{2} \left(a_0 \frac{\partial}{\partial a_k} - a^k \frac{\partial}{\partial a_0} - \epsilon^{klm} a^l \frac{\partial}{\partial a_m} \right). \quad (\text{A.13})$$

Stesso discorso per S^3 :

$$S^3 = -\frac{i}{2} \left(\frac{\partial a_i}{\partial \phi_1} \frac{\partial}{\partial a_i} + \frac{\partial a_i}{\partial \phi_2} \frac{\partial}{\partial a_i} \right) = -\frac{i}{2} \left(-a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} - a_3 \frac{\partial}{\partial a_0} + a_0 \frac{\partial}{\partial a_3} \right),$$

così che, in analogia con I^k , possiamo scrivere:

$$S^k = \frac{i}{2} \left(a^k \frac{\partial}{\partial a_0} - a_0 \frac{\partial}{\partial a_k} - \epsilon^{klm} a^l \frac{\partial}{\partial a_m} \right) \quad (\text{A.14})$$

Possiamo ora mostrare che gli operatori $Tr[(\partial_0 A^\dagger) A \tau_j]$, $Tr[(\partial_0 A) A^\dagger \tau_j]$ corrispondono, rispettivamente, agli operatori di spin ed isospin, a meno di un fattore costante. Si ha:

$$Tr[(\partial_0 A^\dagger) A \tau_j] = 2i \tilde{\beta}_j = 2i(\dot{a}_0 a_j - a_0 \dot{a}_j + \epsilon_{jkl} \dot{a}_k a_l);$$

effettuando la sostituzione $\dot{a}_i = \frac{\pi_i}{4\lambda} = -\frac{i}{4\lambda} \frac{\partial}{\partial a_i}$ otteniamo:

$$Tr[(\partial_0 A^\dagger) A \tau_j] = \frac{1}{\lambda i} \left[\frac{i}{2} \left(a_j \frac{\partial}{\partial a_0} - a_0 \frac{\partial}{\partial a_j} - \epsilon_{jlk} a_l \frac{\partial}{\partial a_k} \right) \right] = \frac{1}{\lambda i} S_k, \quad (\text{A.15})$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato (A.14).

Il calcolo di $Tr[(\partial_0 A) A^\dagger \tau_j]$ è analogo:

$$\begin{aligned} Tr[(\partial_0 A) A^\dagger \tau_j] &= 2i \beta_j = 2i(\dot{a}_j a_0 - \dot{a}_0 a_j + \epsilon_{jkl} \dot{a}_k a_l) = \\ &= \frac{1}{2\lambda} \left(a_0 \frac{\partial}{\partial a^j} - a_j \frac{\partial}{\partial a_0} - \epsilon_{jlk} a_l \frac{\partial}{\partial a_k} \right), \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato (A.13).

Mostriamo infine che :

$$\langle N | Tr[\tau_i A^\dagger \tau_j A | N'] = \langle N | \sigma_i \tau_j | N' \rangle, \quad (\text{A.16})$$

dove N e N' sono due generici stati nucleoni. Sottolineiamo innanzitutto che questa non è un'identità operatoriale, nel senso che è valida solo sugli stati nucleoni. Da (A.3) sappiamo che:

$$Tr[\tau_i A^\dagger \tau_j A] = 2((a_0^2 - a^2)\delta^{ij} + 2a^i a^j + 2a_0 a^k \epsilon^{kji}),$$

quindi, ad esempio, per $\langle p | Tr[\tau_1 A^\dagger \tau_3 A] | p \rangle$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \langle p | Tr[\tau_1 A^\dagger \tau_3 A] | p \rangle &= \frac{1}{4\pi^2} \int 2(a_1^2 + a_2^2)(2a_1 a_3 + 2a_0 a_2) dx d\phi_1 d\phi_2 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-1}^1 (1-z)\sqrt{1-z^2} dx \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} \sin(\phi_1 + \phi_2) d\phi_2 = 0 \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che l'integrale di funzioni periodiche su un periodo è zero. D'altra parte:

$$\langle p \uparrow | \sigma_1 \tau_3 | p \uparrow \rangle = \langle p \uparrow | p \downarrow \rangle = 0,$$

e quindi sussiste l'uguaglianza. Facciamo il calcolo anche per $i = j = 3$, sempre sugli stati $|p \uparrow\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle p | Tr[\tau_3 A^\dagger \tau_3 A] | p \rangle &= \frac{1}{2\pi^2} \int (a_1^2 + a_2^2)(2a_0^2 + 2a_3^2 - 1) dz d\phi_1 d\phi_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int \left(\frac{1-z}{2}\right)(1+z-1) dz d\phi_1 d\phi_2 = \int_{-1}^1 z(1-z) dz = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

D'altro canto:

$$-\frac{2}{3} \langle p \uparrow | \sigma_3 \tau_3 | p \uparrow \rangle = -\frac{2}{3} \langle p \uparrow | p \uparrow \rangle = -\frac{2}{3},$$

e recuperiamo nuovamente l'uguaglianza. Il calcolo per i restanti autostati ed indici è identico e lo tralasciamo.

Appendice B

Trasformazioni di simmetria

Una trasformazione di simmetria sulle coordinate di un sistema induce una trasformazione sulle funzioni d'onda, rappresentata da un operatore \mathcal{U} , unitario per preservare le probabilità di transizione. Sotto la trasformazione $\psi \rightarrow \mathcal{U}\psi$, un generico operatore O trasforma come $\mathcal{U}^{-1}O\mathcal{U}$. Ci sono particolari classi di simmetrie per le quali gli \mathcal{U} possono essere scelti arbitrariamente vicini all'identità:

$$\mathcal{U}_\epsilon = \mathbb{1} - i\epsilon^a T^a + O(\epsilon^2) \quad (\text{B.1})$$

dove ϵ^a è un vettore infinitesimo. La condizione di unitarietà di \mathcal{U}^{-1} si traduce nella condizione di hermiticità di T : $T = T^\dagger$. Dal generatore T possiamo ricostruire l'elemento finito del gruppo di simmetria semplicemente applicando infinite volte la trasformazione (B.1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\mathbb{1} - i \frac{\theta^a}{N} T^a \right)^N = e^{-i\theta^a T^a}. \quad (\text{B.2})$$

L'operatore T è detto il *generatore della simmetria*, e la sua hermiticità fa sì che sia un osservabile. E anzi, quasi se non tutti gli operatori rappresentanti osservabili sono generatori di simmetrie. Quindi, ad esempio, alla simmetria di isospin, che agisce sulle coordinate collettive come $A \rightarrow LA$ con $L \in SU(2)$ deve essere associato un operatore $U(L)$, agente sullo spazio delle funzioni d'onda, tale che:

$$\mathcal{U}^{-1}(L)A\mathcal{U}(L) = LA = e^{-\frac{i}{2}\epsilon^a \tau^a} A, \quad (\text{B.3})$$

dove abbiamo sfruttato (B.2) con $T^a = \frac{\tau^a}{2}$. Per ϵ infinitesimo, \mathcal{U} deve essere della forma (B.1):

$$\mathcal{U}_\epsilon = \mathbb{1} - i\epsilon^a I^a,$$

e la (B.3) a livello infinitesimo si scrive:

$$A + i\epsilon^a [I^a, A] = A - \frac{i}{2}\epsilon^a \tau^a A,$$

che deve valere per ogni vettore infinitesimo ϵ^a e quindi:

$$[I^a, A] = -\frac{1}{2}\tau^a A. \quad (\text{B.4})$$

Stesso discorso per la trasformazione di spin $A \rightarrow AR^\dagger$; deve cioè esistere un operatore unitario $\mathcal{U}(R)$ tale che:

$$\mathcal{U}^{-1}(R)A\mathcal{U}(R) = AR^\dagger = Ae^{\frac{i}{2}\epsilon^a\sigma^a}. \quad (\text{B.5})$$

A livello infinitesimo, scrivendo \mathcal{U} come $\mathcal{U} = \mathbb{1} - i\epsilon^a S^a$, la condizione (B.5) equivale a:

$$A + i\epsilon^a[S^a, A] = A + \frac{i}{2}\epsilon^a A\sigma^a,$$

che deve valere per ogni vettore infinitesimo ϵ^a e quindi:

$$[S^a, A] = \frac{1}{2}A\sigma^a. \quad (\text{B.6})$$

Appendice C

Rappresentazione aggiunta di un'algebra di Lie

Le costanti di struttura di un'algebra generano una rappresentazione dell'algebra chiamata la rappresentazione aggiunta. In questa sezione mostreremo il risultato per un generico gruppo di Lie.

Siano T^a , con $a = 1, \dots, N$ i generatori del gruppo G . Allora si ha, per definizione:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad (C.1)$$

dove le f^{abc} sono le costanti di struttura del gruppo. Vale inoltre la seguente l'identità di Jacobi:

$$[X^a[X^b, X^c]] + [X^c[X^a, X^b]] + [X^b[X^c, X^a]] = 0, \quad (C.2)$$

che, usando l'algebra (C.1), diventa:

$$(-f^{bcd}f^{ade} - f^{abd}f^{cde} - f^{cad}f^{bde})X^e = 0,$$

che deve essere valida per ogni X^e e quindi:

$$f^{bcd}f^{ade} + f^{abd}f^{cde} + f^{cad}f^{bde} = 0. \quad (C.3)$$

Definendo un set di matrici $[T^a]^{bc} \equiv -if^{abc}$, la (C.3) si scrive:

$$-[T^b]^{cd}[T^a]^{de} - if^{abd}[T^d]^{ce} + [T^a]^{cd}[T^b]^{de} = 0,$$

o, in termini matriciali:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad (C.4)$$

cioè i T^a soddisfano l'algebra del gruppo G , e quindi sono i generatori del gruppo.

Bibliografia

- [1] Povh, Rith, Scholz, Zetsche, *Particelle e Nuclei*, Bollati Boringhieri, 1998
- [2] M. Guidry, *Gauge Field Theories*, Wiley-Interscience, 1991
- [3] H. Georgi, *Weak Interactions and Modern Particle Theory*, Benjamin-Cummings Pub Co, 1984
- [4] U. G. Meissner *Low-Energy Hadron Physics from Effective Chiral Lagrangians with Vector Mesons*, Phys.Rept. 213 MIT-CTP-1471, 161 (1988)
- [5] G. Adkins, C. Nappi e E. Witten *Static Properties of Nucleons in the Skyrme Model*, Nucl. Phys. B 228, 552 (1983)
- [6] A. Wulzer, G. Panico *Nucleons Form Factors from 5D Skyrmions*
- [7] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Quantum Mechanics*, Wiley-Vch, 1991
- [8] F. Halzen, A. D. Martin, *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics* Wiley, 1984
- [9] M. Shifman, *Advanced Topics in Quantum Field Theory*, Cambridge University press, 2012
- [10] S. Weinberg, *Lectures on Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 2013
- [11] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, Westview Press, 1999
- [12] M. Peskin, D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995