



Università degli studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Teoria di gauge $U(1)$, aspetti fisici e matematici

Relatore:
Prof. Marco Matone

Laureando: Andrea Cristofoli

Anno Accademico 2013/2014

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Le equazioni fondamentali dell'elettrodinamica	3
2	Elementi matematici in teoria di gauge	4
2.1	Gruppo di Lie	4
2.2	Algebra di Lie	5
2.3	Fibrato principale	5
2.4	Connessioni su fibrati principali	6
2.5	1-forma di connessione	7
2.6	2-forme di curvatura	7
3	Teoria di gauge U(1)	9
3.1	Quadripotenziale	9
3.2	Tensore di campo elettromagnetico	9
3.3	Invarianza di Gauge	9
3.4	Identità di Bianchi	10
3.5	Equazione di Maxwell e Lorentz	10
3.6	Teorie di Yang-Mills	11
4	Dinamica di una particella carica in un campo elettromagnetico	12
4.1	Sistema classico	12
4.2	Trasformazione di gauge in meccanica classica	13
4.3	Sistema quantistico	14
4.4	Trasformazioni di gauge in meccanica quantistica	16
4.5	Legame tra trasformazioni di gauge in meccanica classica e quantistica	18
5	Dinamica di una particella carica in un campo magnetico costante	21
5.1	Sistema classico	21
5.2	Sistema quantistico: i livelli di Landau	21
5.3	Principi di indeterminazione nel caso quantistico	24

Capitolo 1

Introduzione

L' universo in cui viviamo è descritto da quattro forze fondamentali: l' interazione elettromagnetica, la forza di gravità, la forza nucleare debole e forte. Scopo ultimo della fisica teorica è quello di mostrare un' unità alla base di quest' ultime, così da poter avere una sola teoria in grado di descrivere ogni fenomeno naturale. A tal proposito le teorie di gauge hanno ottenuto un enorme successo permettendo l' unificazione dell' interazione elettromagnetica con la forza nucleare, sia debole che forte, dando luogo ad un unico riferimento teorico denominato *modello standard*. La prima parte della tesi mira a descrivere la struttura geometrica di queste teorie fondamentali. L' idea alla base, che verrà successivamente esposta con maggior rigore, è di associare ad ogni punto dell' universo un gruppo di Lie dalla cui algebra far discendere diversi elementi di interesse fisico per la descrizione delle forze fondamentali. Si mostrerà come l' elettromagnetismo sia una teoria di gauge con gruppo di Lie $U(1)$ e come il quadripotenziale e il tensore di campo elettromagnetico siano elementi della sua algebra, in particolare si descriverà l' origine geometrica dell' invarianza di gauge accennando alla possibilità di ottenere il modello standard tramite gruppi di dimensione maggiore. Nella parte successiva del lavoro di tesi studieremo il comportamento di uno stato fisico sotto trasformazioni di gauge. Nel caso di una particella carica in un campo elettromagnetico mostreremo come sia lo stato hamiltoniano classico che il corrispondente quantistico non siano invarianti per trasformazioni di gauge, un fatto non banale che porta ad interrogarsi sull' invarianza delle equazioni di Hamilton e di Schroedinger sotto trasformazioni di gauge. Queste questioni sono state affrontate cercando di verificare se l' introduzione del quadripotenziale sia compatibile con i postulati della meccanica quantistica non relativistica, in particolare tramite l' approssimazione semi-classica si è cercata una corrispondenza tra le trasformazioni di uno stato classico e quantistico per cambi di gauge. Volendo esemplificare gli argomenti esposti, studieremo infine il comportamento di una particella carica in un campo magnetico costante. Il sistema verrà studiato sia a livello classico che quantistico, mostrando fenomeni che non hanno un corrispettivo classico come i livelli di Landau e i principi di indeterminazione sulla velocità della particella e sul suo centro di rotazione.

1.1 Le equazioni fondamentali dell'elettrodinamica

Sia dato un sistema di n particelle di carica q_i e massa m_i con quadridensità di corrente totale j^μ e un tensore di campo elettromagnetico $F^{\mu\nu}$. Sia $y_i^\mu(s_i)$ la linea di universo della particella i -esima parametrizzata con il corrispondente tempo proprio s_i , e siano u_i^μ e p_i^μ la quadri-velocità e il quadrimpulso associato. La dinamica del campo elettromagnetico e delle n particelle cariche sarà regolata dalle seguenti equazioni [2]

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

$$\frac{dp_i^\mu}{ds_i}(s_i) = q_i F^{\mu\nu} u_{i\nu}(s_i)$$

Queste sono le equazioni fondamentali dell'elettrodinamica scritte in forma covariante a vista per azione del gruppo di Lorentz proprio. La prima vincola la forma assunta dal campo elettromagnetico e porta il nome di identità di Bianchi. In geometria differenziale è verificata da 2-forme di curvatura su fibrati principali connessi, questo deriva dal fatto che l'elettromagnetismo è una teoria di gauge abeliana ambientata su un fibrato principale $P(M, U(1))$ con M varietà C^∞ di dimensione 4 e gruppo di struttura $U(1)$. [1] La seconda equazione è di carattere dinamico e lega il campo elettromagnetico alle sue sorgenti, la terza è la forma covariante della forza di Lorentz per una particella carica. Entrambe possono essere ricavate da un principio variazionale grazie all'esistenza del quadripotenziale A_μ .

Capitolo 2

Elementi matematici in teoria di gauge

Verranno introdotte le nozioni fondamentali in una teoria di gauge : gruppo e algebra di Lie, fibrato principale, 1-forme di connessione e 2-forme di curvatura.

2.1 Gruppo di Lie

Si definisce **gruppo di Lie** [4] un gruppo (G, \cdot) dotato di una struttura di varietà differenziabile tale per cui l'applicazione interna $G \times G \rightarrow G$ è differenziabile assieme alla corrispondenza inversa $g \rightarrow g^{-1}$ con $g \in G$. Alcuni esempi di gruppi di Lie, di grande utilizzo in fisica, sono

$$U(n) = \{M \in GL(n, C) : MM^\dagger = id\}$$

$$SL(n, C) = \{M \in GL(n, C) : \det M = 1\}$$

$$SU(n, C) = U(n) \cap SL(n, C)$$

$$O(1, 3) = \{M \in M_4(R) : M\eta M^t = \eta \text{ con } \eta = d(1, -1, -1, -1)\}$$

I gruppi di Lie

$$U(1), SU(2), SU(3), O(1, 3)$$

sono alla base della formulazione geometrica dell'elettromagnetismo, dell'interazione elettrodebole, del modello standard, e della relatività speciale.

2.2 Algebra di Lie

Sia G un gruppo di Lie, si definisce **azione a sinistra**¹ su G il diffeomorfismo

$$L_a : G \longrightarrow G \quad L_a(g) = ag$$

con a elemento di G . Una sezione X del fibrato tangente² si definisce **invariante a sinistra**, e denoteremo l'insieme di tali campi con $\zeta(G)$, se

$$dL_a(X_g) = X_{ag}$$

ove dL_a denota la mappa ottenuta dal differenziale d di L_a ³

$$dL_a : T_g G \rightarrow T_{ag} G$$

Si dimostra come l'insieme $\zeta(G)$ sia isomorfo allo spazio tangente a G sull'elemento identità, in particolare $\zeta(G)$ dotato del bracket di Lie⁴

$$[\ , \] : \zeta(G) \times \zeta(G) \longrightarrow \zeta(G)$$

ha una naturale struttura di gruppo. Si definisce **algebra di Lie** [4] di G l'insieme $\zeta(G)$ dotato del bracket. A livello esemplificativo, l'algebra di Lie è una linearizzazione locale di G compatibile con una struttura di gruppo.

2.3 Fibrato principale

Si definisce **fibrato** [1] la serie di elementi (E, π, M, F, G) in cui

- E è una varietà differenziabile detta *spazio totale*.
- M è un varietà differenziabile detta *spazio base*
- F è una varietà differenziabile detta *fibra*.
- $\pi : E \rightarrow M$ è una suriezione detta *proiezione* ove l'immagine inversa $\pi^{-1}(p) = F_p$ è chiamata *fibra* su p .
- G è un gruppo di Lie che agisce sulla varietà F da sinistra.

¹Alternativamente si definisce *azione a destra* il diffeomorfismo

$$R_a : G \rightarrow G \quad R_a(g) = ga$$

In teoria dei gruppi la scelta dell'azione sinistra a dispetto di quella destra porta a risultati del tutto equivalenti.

²Una sezione del fibrato tangente, anche detta *campo vettoriale*, è una applicazione C^∞ da $M \rightarrow TM$, che associa ad un punto $p \in M$ un vettore dello spazio tangente $T_p M$.

³Sia U_i una carta per M tale da indurre una base naturale per lo spazio tangente a $p \in M$. In coordinate, dL_a è lo jacobiano di L_a , applicazione lineare sugli spazi tangenti.

⁴Sia $p \in M$, lo spazio tangente $T_p M$ è isomorfo all'insieme degli operatori lineari dalle funzioni $f : M \rightarrow R$ in se stesse. Dati due campi vettoriali X e Y si definisce *bracket di Lie l'operatore* $[X, Y] = XY - YX$

- Sia $\{U_i\}$ un ricoprimento per M , allora

$$\forall U_i \quad \exists \phi : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$$

detta *trivializzazione locale* che verifica $\pi\phi_i(p, f) = p, \forall p \in M$.

- Sia $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e $\phi_i(p, f) = \phi_{i,p}(f)$ un diffeomorfismo $\phi_{i,p} : F_p \rightarrow F_p$. Si definisce *funzione di transizione* t_{ij} il diffeomorfismo

$$t_{ij} = \phi_{i,p}^{-1}\phi_{j,p} : U_i \cap U_j \rightarrow U_i \cap U_j \quad t_{ij} \in G$$

In una teoria di gauge si utilizzano i **fibrati principali**, fibrati in cui il gruppo di struttura G e la fibra F coincidono. Nel seguito verranno denotati con $P(M, G)$ ove P è lo spazio totale.

2.4 Connessioni su fibrati principali

Sia $u \in P$, si definisce *sottospazio verticale* V_uP il sottospazio di T_uP tangente a $G_{\pi^{-1}(u)}$ e *sottospazio orizzontale* H_uP il complemento $T_uP \setminus V_uP$. Una **connessione** [1] è una decomposizione unica di T_uP nei sottospazi verticale e orizzontale per cui

- $T_uP = V_uP \oplus H_uP$

- Dato $X \in TP$

$$\exists! X_H \in H_uP \wedge X_V \in V_uP : X = X_H + X_V$$

- $\forall u \in P$ e $g \in G$ vale $H_{ug}P = dR_g(H_uP)$

La costruzione di V_uP avviene nel seguente modo: sia $A \in \zeta(G)$ e $u \in P$, usando la mappa esponenziale⁵ si definisce la curva a valori in P

$$R_{\exp(tA)}(u) = u \exp(tA) : t \in R$$

la cui immagine tramite π è il punto fisso $p = \pi^{-1}(u) \in M$, così che la curva sia contenuta sulla stessa fibra. Definiamo ora A' l'operatore

$$A'f(u) = \frac{df}{dt}(\exp(tA)u)|_{t=0}$$

per un arbitraria $f \in C^\infty(P)$. Il vettore A' sarà tangente a G_p in u quindi $A' \in V_uP$, in particolare la mappa $A \rightarrow A'$ sarà un isomorfismo tra g e V_uP . Questo permette di definire V_uP a partire dall'algebra di Lie.

⁵In teoria dei gruppi la mappa esponenziale $\exp : g \rightarrow G$ è un isomorfismo locale tra gli elementi dell'algebra e del gruppo di Lie che associa ad ogni campo vettoriale invariante a sinistra il corrispondente flusso ad un istante fissato, e viceversa. Questo permette di ricostruire, almeno localmente, un gruppo a partire dalla corrispondente algebra.

2.5 1-forma di connessione

Si definisce *1-forma di connessione* [1] una applicazione $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*P$ che verifica:⁶

- $\omega(A') = A : A \in \mathfrak{g}$
- $R_g^*(\omega) = Ad_{g^{-1}}(\omega) : \forall X \in T(M), R_g^*(\omega)(X) = g^{-1}\omega_u(X)g.$

Per costruzione una 1-forma di connessione su $P(M, G)$ induce una connessione sul fibrato, e viceversa: questo mostra come le due definizioni siano equivalenti, in particolare fornisce un'interpretazione geometrica per le 1-forme a valori su un'algebra di Lie. Il carattere locale di una 1-forma di connessione dipenderà dalla carta U_i di P e potrà esprimersi come

$$A_i = \sigma_i^* \omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_i) \quad , \quad \sigma : P \rightarrow U_i$$

Con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, avremo due 1-forme locali rappresentati la medesima a livello globale: per l'unicità di ω questo si tradurrà in un vincolo di compatibilità coinvolgente le funzioni di transizione t_{ij} del fibrato principale e le 1-forme di connessione locali:⁷

$$A_j = t_{ij}^{-1} A_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}$$

2.6 2-forme di curvatura

Sia ω una 1-forma di connessione su un fibrato principale $P(M, G)$, si definisce *2-forma di curvatura* [1] F la seguente applicazione⁸

$$F = d_P \omega + \omega \wedge \omega \quad : \quad F \in \Omega^2(P) \otimes \zeta(G)$$

Assegnata una carta U_i di P la 2-forma di curvatura è localmente definita come

$$F_i = \sigma^* F \quad F' \in \Omega^2(U_i) \otimes \zeta(G)$$

Sia $A_i = A_\mu dx^\mu$ una 1-forma di connessione locale con $A_\mu \in \mathfrak{g}$ e $dx^\mu \in \Omega^1(U_i)$, si è interessati agli elementi $F_{\mu\nu} \in \mathfrak{g}$ tali per cui

$$F_i = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

⁶ R_g^* è il pullback del diffeomorfismo R_g , mentre Ad è il differenziale d del diffeomorfismo $ad_a : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}a^{-1}$ con $ad_a : G \rightarrow G$

⁷si noti come questa legge di trasformazione sia la medesima per le 1-forme di connessione su fibrati tensoriali: alla base di questa identità risiede il concetto generale di connessione di Ehresmann, applicabile sia a fibrati principali che vettoriali. [4]

⁸Si definisce *derivata esterna* l'applicazione d_P che agisce localmente sulle n-forme di M , $d_M : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$, $d(\omega_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \omega_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$

Si definisce *prodotto esterno* l'applicazione \wedge che agisce localmente sulle n-forme di M associando trivialmente ad una n-forma ed m-forma la n + m-forma data dal prodotto.

Un calcolo esplicito mostra la seguente uguaglianza

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

Nel caso siano assegnate su M due carte U_i e U_j non disgiunte, avremo che le corrispondenti 2-forme locali verificheranno un vincolo di compatibilità come per le 1-forme di connessione

$$F_i = t_{ij}^{-1} F_j t_{ij}$$

Capitolo 3

Teoria di gauge U(1)

In una teoria di gauge l'universo viene considerato come una varietà C^∞ di dimensione 4, ove una carta U_i consiste nella scelta di un sistema di riferimento. La varietà universo viene poi dotata di un fibrato principale $P(M, G)$ e di una 1-forma di connessione. Nel caso dell'elettromagnetismo si sceglie su $P(M, G)$ il gruppo di struttura $U(1)$.

3.1 Quadripotenziale

In questo contesto una 1-forma di connessione locale è il noto quadripotenziale A_μ . Le funzioni di transizione del fibrato saranno le seguenti

$$t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U(1) : t_{ij}(p) = e^{i\chi(p)} \quad : \chi(p) \in \mathbb{R}$$

e faranno sì che il vincolo di compatibilità coincida con una trasformazione di gauge locale

$$A_j = t_{ij}^{-1} A_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} \rightarrow A_j^\mu = A_i^\mu + \partial^\mu \chi$$

3.2 Tensore di campo elettromagnetico

Il gruppo $U(1)$ è un gruppo abeliano, pertanto le costanti di struttura della sua algebra di Lie sono nulle con $[A_\mu, A_\nu] = 0$. Questo fa sì che una 2-forma di curvatura locale sia il tensore di campo elettromagnetico

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

3.3 Invarianza di Gauge

L'invarianza di gauge emerge in maniera naturale osservando la forma dei vincoli di compatibilità per le 2-forme di curvatura e 1-forme di connessione

$$F_i = F_j \quad , \quad A_i^\mu = A_j^\mu + \partial^\mu \chi$$

Il fatto che una 2-forma di curvatura non dipenda dalla carta scelta, equivale a dire che la forma del tensore di campo elettromagnetico non dipende dal sistema di riferimento scelto per descrivere l'universo. [1]

3.4 Identità di Bianchi

La scelta di $U(1)$ come gruppo di struttura per il fibrato principale di M comporta che una 2-forma di curvatura sia priva del termine $A \wedge A$ con

$$F = dA$$

Utilizzando il lemma di Poincaré [2]¹, avremo che

$$dF = d \circ dA = 0$$

la quale è l'identità di Bianchi.

In coordinate locali

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0 \rightarrow \nabla B = 0 \quad e \quad \nabla \times B = -\frac{\partial E}{\partial t}$$

Questo risultato, oltre a mostrare l'origine geometrica di una delle tre equazioni fondamentali dell'elettrodinamica, mostra come alla base della teoria vi sia un'ipotesi topologica sul carattere locale dello spazio-tempo, senza di essa infatti non sarebbe stata valido il lemma di Poincaré e non avremmo ottenuto l'identità di Bianchi.

3.5 Equazione di Maxwell e Lorentz

Per definire le restanti equazioni fondamentali dell'elettrodinamica si utilizza il calcolo variazionale. Sia $F_{\mu\nu}$ un tensore di campo elettromagnetico in funzione dei potenziali A_μ , e consideriamo un sistema di n particelle cariche interagenti con il campo: si tratta di individuare un funzionale dei potenziali $A_\mu(x)$ e delle linee di universo $y^\mu(\lambda)$ delle particelle dalla cui minimizzazione ricavare le ultime due equazioni dinamiche. L'azione è la seguente [2]

$$I[A, y] = -\frac{1}{4} \int_{R^4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x - \int_{R^4} A_\mu J^\mu d^4x - \sum_r m_r \int_R ds_r$$

La giustificazione di questo funzionale risiede nel fatto che i campi $A_\mu(x)$ e le linee di universo $y^\mu(\lambda)$ minimizzano tale funzionale se e solo se verificano le equazioni di Maxwell e di Lorentz rispettivamente. Questo importante risultato, la cui dimostrazione è qui omessa, permette l'introduzione di una densità di lagrangiana per il campo elettromagnetico e di una lagrangiana per la dinamica delle particelle cariche. Grazie al teorema di Noether si potranno ricavare le principali leggi di conservazione dell'elettrodinamica. Dall'invarianza delle lagrangiane per traslazioni spazio-temporali si ottiene la conservazione del quadri-impulso totale mentre dall'invarianza per cambi di gauge si ricava la conservazione della carica elettrica.

¹Il lemma di Poincaré afferma che ogni forma differenziale chiusa è localmente esatta. Nel nostro caso, la località si traduce nella scelta di una carta $U_i \subset R^4$ di M . Essendo R^4 topologicamente banale, il lemma sarà verificato per ogni carta U_i .

3.6 Teorie di Yang-Mills

Incidentalmente, facciamo notare che se al posto di $U(1)$ avessimo dotato $P(M, G)$ del gruppo di struttura $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ avremmo ottenuto come 1-forma di connessione locale il potenziale di Yang-Mills e come 2-forma di curvatura il tensore di Yang-Mills, elementi basilari nel modello standard.

In coordinate il tensore di Yang-Mills assume la forma [1]

$$F_{\mu\nu}^{\alpha} = \partial_{\mu} A_{\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu} A_{\mu}^{\alpha} + f_{\beta\gamma}^{\alpha} A_{\mu}^{\beta} A_{\nu}^{\gamma}$$

ove il termine $f_{\beta\gamma}^{\alpha}$ denota le costanti di struttura dell'algebra di Lie del gruppo $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. L'elettromagnetismo in particolare emerge come caso particolare essendo le costanti di struttura nulle per $U(1)$, in quanto gruppo abeliano, e $\alpha = 1$ per la dimensione del gruppo.

Capitolo 4

Dinamica di una particella carica in un campo elettromagnetico

In questa sezione, grazie ai risultati precedenti, si studierà la dinamica di una particella carica in un campo elettromagnetico esterno e si analizzerà il comportamento di uno stato classico e quantistico sotto una trasformazione di gauge.

4.1 Sistema classico

La forza subita da una particella carica in un campo elettromagnetico è descritta in notazione vettoriale dall'equazione di Lorentz

$$F = eE + \frac{1}{c}v \times B$$

ove e è la carica elettrica, E e B sono i campi elettrico e magnetico esterni e v la velocità della particella. Sia la dinamica del campo elettromagnetico che di una particella carica in esso discendono da un principio variazionale. Questo garantisce l'esistenza di una lagrangiana e permette di studiare il sistema in ambito hamiltoniano, condizione necessaria per la successiva quantizzazione.

Sia $A^\mu = (c\phi, A)$, la lagrangiana sarà

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{evA}{c} - e\phi(q, v)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \iff F = eE + \frac{v \times B}{c}$$

Il passaggio all'ambito hamiltoniano avviene tramite il seguente diffeomorfismo [8]

$$T : (q, v) \rightarrow (q, p), \quad p = \frac{\partial L}{\partial v}(q, v) : \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v \partial v}\right) \neq 0$$

in cui p si definisce *impulso generalizzato*. Questo diffeomorfismo locale fa sì che le equazioni di Eulero-Lagrange, ambientate sullo spazio degli atti di moto (q, v) , siano equivalenti alle equazioni di Hamilton, ambientate sullo spazio delle fasi (q, p) .

Definendo *hamiltoniana* la funzione $H(q, p) = pv(q, p) - L(q, v(q, p))$, le equazioni di Hamilton saranno

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt}(t) &= \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt}(t) &= -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q}\end{aligned}$$

Nel nostro caso

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{evA}{c} - e\phi(q, v) : \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v \partial v}\right) = m \neq 0$$

Questo implica l'esistenza di un diffeomorfismo locale

$$T : (q, v) \rightarrow (q, p) : p = mv + \frac{eA(q, t)}{c}$$

L'hamiltoniana del sistema sarà

$$H = \frac{1}{2m} \left(p - \frac{eA(q, t)}{c} \right)^2 + e\phi(q, t)$$

4.2 Trasformazione di gauge in meccanica classica

A questo punto è interessante studiare il comportamento di uno stato hamiltoniano (q, p) sotto una trasformazione di gauge

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi$$

Le coordinate q per trasformazioni di gauge non cambiano, ciò che cambia invece è l'impulso generalizzato p

$$q' = q \quad , \quad p' = p - \frac{1}{c} e \nabla \chi$$

Lo stato hamiltoniano di una particella carica non è invariante per trasformazioni di gauge, e questo ha diverse conseguenze. Sia infatti F una funzione dello stato hamiltoniano (q, p) a t_0 . Se per trasformazioni di gauge trasforma anche F si dovrà concludere che questa funzione non è misurabile, questo poichè una grandezza fisica non può dipendere dalla gauge scelta per descriverlo. Pertanto F è *misurabile se e solo se sotto trasformazioni di gauge è invariante in forma* [3]. Le coordinate q e l'impulso canonico mv sono invarianti per trasformazioni di gauge, e dunque misurabili, questo in quanto le grandezze cinematiche di una particella carica soddisfano l'equazione di Lorentz, la quale è manifestamente gauge-invariante. Analogamente è misurabile il momento angolare $L = q \times mv$, mentre un discorso a parte è da svolgersi per l'hamiltoniana. Sia H la hamiltoniana di una particella

carica in un generico campo elettromagnetico ed eseguiamo una trasformazione di gauge.

$$q' = q \quad , \quad p' = p - \frac{1}{c}e\nabla\chi$$

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2m} \left(p - \frac{eA(q, t)}{c} \right)^2 + e\phi(q, t) \quad \rightarrow \quad H'(q, p, t) = H(q, p, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial\chi}{\partial t}(q, t)$$

L'hamiltoniana di una particella carica non è invariante sotto trasformazioni di gauge, un fatto che porta al seguente interrogativo:

- Le equazioni di Hamilton sono invarianti in forma sotto trasformazioni di gauge?

La risposta è positiva.

Si osservi il comportamento dell'azione di una particella carica sotto trasformazioni di gauge.

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\chi$$

$$\int_R L(q(t), v(t), t) dt \rightarrow \int_R L(q(t), v(t), t) dt - \frac{e}{c} \int_R \frac{d\chi}{dt}(q(t), t) dt$$

Assumendo χ nullo all'infinito [2] si ricava l'invarianza del funzionale azione sotto trasformazioni di gauge. Questo implica che le equazioni di Eulero-Lagrange, minimo del funzionale, saranno anch'esse invarianti. Essendo quest'ultime equivalenti alle equazioni di Hamilton si dimostra la loro invarianza in forma sotto trasformazioni di gauge.

4.3 Sistema quantistico

Per poter studiare il precedente sistema a livello quantistico risulta necessario utilizzare le regole di quantizzazione canoniche: quest'ultime, a seconda delle categorie $Cat(M)$ ¹ adottate per descrivere la meccanica classica e quantistica, possono essere viste come l'azione di un funtore

$$F : Cat(M.Classica) \longrightarrow Cat(M.Quantistica)$$

che associa ad ogni varietà simplettica della meccanica hamiltoniana uno spazio di Hilbert descrivente l'insieme dei possibili stati di un sistema quantistico. Data una carta locale U_i su una varietà simplettica, così da lavorare su uno spazio delle fasi in coordinate (q, p) , si procede associando alle variabili q l'operatore posizione Q , e

¹Una *categoria* consiste in un insieme di elementi M , detti *oggetti*, e in un insieme di mappe $f : M \rightarrow M$ detti *morfismi*. Un *funtore* è una mappa tra due categorie $F : Cat(A) \rightarrow Cat(B)$ che ad ogni oggetto e morfismo di $Cat(A)$ ne associa uno in $Cat(B)$.

all'impulso generalizzato p l'operatore impulso P . Dovendo essere ogni grandezza fisica funzione delle q e delle p , si avrà la *quantizzazione canonica* di tutte le grandezze, nel senso che ad ogni grandezza classica sarà associato un operatore autoaggiunto e osservabile su uno spazio di Hilbert. Questa sostituzione tuttavia è molto delicata e ad alcune grandezze classiche non è possibile associare un operatore autoaggiunto.² Per una particella carica in un campo elettromagnetico la funzione hamiltoniana è

$$H = \frac{1}{2m} \left(p - \frac{eA(q, t)}{c} \right)^2 + e\phi(q, t)$$

Si applichino le regole di quantizzazione canoniche

$$q \longrightarrow Q : H \rightarrow H$$

$$p \longrightarrow P : H \rightarrow H$$

L'operatore hamiltoniano associato sarà autoaggiunto e osservabile, ovvero

$$H = \frac{1}{2m} \left(P - \frac{eA(Q, t)}{c} \right)^2 + e\phi(Q, t)$$

In base ai postulati della meccanica quantistica tale operatore definisce la dinamica di uno stato vettore $|\Psi\rangle$ del sistema, in particolare la corrispondente equazione agli autovalori fornisce lo spettro di tutte le possibili energie fisicamente misurabili.

Osservazione

Una peculiarità di questo sistema risiede nel fatto che

$$p = \frac{\partial L}{\partial q}(q, v) \neq mv$$

Le regole di quantizzazione canoniche si applicano all'impulso generalizzato $p = \frac{\partial L}{\partial q}(q, v)$ e non a quello canonico mv . L'operatore P ottenuto sarà autoaggiunto ed osservabile per definizione, tuttavia il suo spettro sarà formato dagli impulsi generalizzati $p = mv + \frac{Ae}{c}$, non misurabili in quanto non invarianti sotto trasformazioni di gauge. Si è nel caso in cui *un operatore P è autoaggiunto ma il suo spettro non è misurabile*. Per renderlo tale è necessario fissare una gauge, solo così potrà stabilirsi il significato fisico o meno dello spettro. A tal proposito verrà affrontato lo studio dei livelli di Landau, in grado di mettere in evidenza le conseguenze della differenza tra l'impulso generalizzato e canonico .

²Nell'ambito della teoria delle categorie è stato dimostrato un teorema *no-go* per polinomi nelle q e nelle p di ordine superiore al terzo. Ad essi non è possibile associare un operatore autoaggiunto e osservabile.

4.4 Trasformazioni di gauge in meccanica quantistica

L'Hamiltoniano di una particella carica in un campo elettromagnetico, dipende esplicitamente dal quadripotenziale A_μ

$$H = \frac{1}{2m} \left(P - \frac{e}{c} A(Q, t) \right)^2 + e\phi(Q, t)$$

Poniamoci per semplicità in assenza di campo elettrico, ovvero

$$\phi(q, t) = 0 \quad \frac{dA}{dt}(q, t) = 0$$

una scelta che non andrà ad influenzare il ragionamento successivo. Eseguendo una trasformazione di gauge sull'operatore H si ottiene

$$H' = \frac{1}{2m} \left(P - \frac{e}{c} A(Q, t) - \frac{e}{c} \nabla \chi(Q, t) \right)^2, \quad H' \neq H$$

Un comportamento analogo si riscontra nell'operatore

$$\Pi = P - \frac{eA}{c}$$

il cui spettro è mv , grandezza classicamente misurabile. Eseguendo una trasformazione di gauge si ottiene

$$\Pi' = \Pi - \frac{e\nabla\chi}{c}, \quad \Pi' \neq \Pi$$

Questi ed altri esempi portano alla seguente conclusione :

In meccanica quantistica gli operatori associati a grandezze classiche misurabili non sono invarianti sotto trasformazioni di gauge, viceversa gli operatori associati a grandezze non misurabili sono invarianti sotto trasformazioni di gauge. [3]

A prima vista questo sembra minare la consistenza interna della meccanica quantistica in quanto dipendendo l'operatore dalla gauge, sembra che lo sia anche il suo spettro. Tuttavia lo spettro è determinato a partire da una equazione agli autovalori su H , coinvolgente oltre che un operatore, anche gli stati vettore $|\Psi\rangle$. Rimane pertanto da individuare la trasformazione di uno stato quantistico $|\Psi\rangle$ sotto cambi di gauge, il fatto stesso poi che debba modificarsi lo stato del sistema è strettamente legato alla trasformazione del corrispondente stato classico, come si mostrerà più avanti.

Trasformazione unitaria dello stato vettore sotto cambio di gauge

In ambito classico siano

$$p = mv + \frac{e}{c} A, \quad p' = p - \frac{e\nabla\chi}{c}$$

l'impulso generalizzato ed il corrispondente sotto una trasformazione di gauge. Applichiamo ad entrambe queste grandezze classiche le regole di quantizzazione canoniche ottenendo rispettivamente gli operatori P e $P' = P - \frac{e}{c}\nabla\chi$. Si richiede che un cambio di gauge sugli operatori P e P' mandi l'uno nell'altro così da rendere commutativa la quantizzazione canonica con le trasformazioni di gauge. Questo è equivalente alle seguenti condizioni sugli operatori e sui loro domini:

$$\begin{aligned} \langle \Psi' | Q | \Psi' \rangle &= \langle \Psi | Q | \Psi \rangle \\ \langle \Psi' | P | \Psi' \rangle &= \langle \Psi | P - \frac{e\nabla\chi}{c} | \Psi \rangle \\ \langle \Psi' | \Psi' \rangle &= \langle \Psi | \Psi \rangle \end{aligned}$$

Si nota subito che affinché queste equazioni siano verificate è necessario che lo stato vettore $|\Psi\rangle$ trasformi mediante l'azione di un operatore unitario $T_\chi(t)$ su H .³ La richiesta su $T_\chi(t)$ risiede nel fatto che un operatore unitario preserva la norma su H , in questo caso $T_\chi(t)$ manterrà valida l'interpretazione probabilistica associata alle funzioni d'onda. L'attenzione ora si sposta sulla determinazione dell'operatore unitario. Dalla prima e della seconda equazione, mediante $|\Psi'\rangle = T_\chi(t)|\Psi\rangle$, si ricavano i seguenti vincoli per $T_\chi(t)$:

$$\begin{aligned} T_\chi^\dagger(t) Q T_\chi(t) &= Q \\ T_\chi^\dagger(t) P T_\chi(t) &= P - \frac{e\nabla\chi}{c} \end{aligned}$$

Sfruttando il fatto che la trasformazione che stiamo cercando è unitaria dalla prima ricaviamo $[T_\chi(t), Q] = 0$. Questo implica

$$T_\chi(t) = e^{iF(Q,t)}$$

ove $F(Q, t)$ è un operatore autoaggiunto. Sfruttando le relazioni di $T_\chi(t)$ con P si ricava la seguente relazione

$$[P, T_\chi(t)] = \hbar \nabla F(Q, t) T_\chi(t)$$

Analoga ad una equazione differenziale per $F(Q, t)$:

$$\hbar \nabla F(Q, t) = -e \frac{\nabla\chi}{c}$$

La soluzione è $F(Q, t) = F_0(t) - \frac{e}{\hbar}\chi(Q, t)$.

Ponendo a zero il primo termine, in quanto costante moltiplicativa per $|\Psi\rangle$, giungiamo alla seguente conclusione:

Nella rappresentazione delle posizioni $|Q\rangle$, le funzioni d'onda Ψ e Ψ' sono collegate da $\Psi' = e^{-\frac{ie}{\hbar}\chi}\Psi$ pertanto sotto un cambio di gauge è necessario richiedere una trasformazione per lo stato vettore Ψ consistente nell'aggiunta di una fase variabile punto per punto nello spazio, il campo scalare χ .

³Per definizione un operatore unitario U è un operatore il cui inverso coincide con l'aggiunto.

Invarianza dell'equazione di Schroedinger per cambi di gauge

In questa sezione si verifica l'invarianza in forma dell'equazione di Schroedinger sotto trasformazioni di gauge, fatto che se non fosse verificato mostrerebbe una inconsistenza interna tra i postulati della meccanica quantistica.

Per verificare l'invarianza siano

$$|\Psi' \rangle = T_\chi(t)|\Psi \rangle \quad H' = T_\chi(t)HT_\chi^\dagger(t) - e\frac{d\chi}{dt}$$

lo stato e l'operatore hamiltoniano trasformato sotto cambio di gauge. L'equazione di Schroedinger si dirà invariante in forma se sono verificate le seguenti condizioni

$$i\hbar\frac{d|\Psi' \rangle}{dt} = H'|\Psi' \rangle \leftrightarrow i\hbar\frac{d|\Psi \rangle}{dt} = H|\Psi \rangle$$

Per dimostrarlo assumiamo che $|\Psi \rangle$ soddisfi l'equazione di Schroedinger per H . Allora

$$i\hbar\frac{d|\Psi' \rangle}{dt} = i\hbar\frac{dT_\chi(t)}{dt}|\Psi \rangle + iT_\chi(t)\frac{d|\Psi \rangle}{dt}$$

Sfruttando la forma nota di $T_\chi(t)$ e l'ipotesi iniziale avremo

$$i\hbar\frac{d|\Psi' \rangle}{dt} = (-e\frac{d\chi}{dt} + H^*)|\Psi' \rangle$$

Ove si è posto $H^* = T_\chi(t)HT_\chi^\dagger(t)$

In tal modo

$$i\hbar\frac{d|\Psi' \rangle}{dt} = H'|\Psi' \rangle \leftrightarrow H' = H^* - e\frac{d\chi}{dt}$$

ma quest'ultimo è proprio l'operatore H trasformato per cambio di gauge. Si dimostra pertanto che l'equazione di Schroedinger può essere scritta in una gauge arbitraria e che essa è invariante in forma per cambi di quest'ultima. Tale risultato, non ovvio a priori, dimostra come l'invarianza di gauge per le equazioni di Maxwell sia consistente con i postulati della meccanica quantistica classica, facendo sì che l'evoluzione temporale di uno stato vettore non dipenda dalla gauge scelta.

4.5 Legame tra trasformazioni di gauge in meccanica classica e quantistica

In ambito quantistico, ad una particella viene associata una funzione d'onda che rispetta un'equazione differenziale lineare, l'equazione di Schroedinger, in ambito classico invece una particella viene interpretata come un punto materiale che si muove lungo precise traiettorie in base alle leggi di Newton. E' evidente come il legame tra meccanica classica e quantistica sia molto simile a quello che intercorre tra ottica ondulatoria e geometrica, nella prima la luce viene studiata a partire da un campo vettoriale che soddisfa delle equazioni lineari, le equazioni di Maxwell, nella seconda invece la luce si muove lungo percorsi definiti in base al principio di Fermat. Essendo l'ottica geometrica un caso limite dell'ottica ondulatoria, si

potrà sfruttare l'analogia qui introdotta per definire il passaggio dalla meccanica quantistica alla meccanica classica. Sia dunque

$$E = a(q, t)e^{i\phi(q, t)}$$

la componente di un'onda elettromagnetica con a ampiezza e ϕ fase dell'onda. Il passaggio all'ottica geometrica avviene assumendo che la lunghezza d'onda λ vari molto su piccole distanze e che il percorso del raggio sia tale da minimizzare la differenza di fase tra gli estremi del percorso, *principio di Fermat*.

Sia ora

$$\Psi = a(q, t)e^{i\phi(q, t)}$$

la funzione d'onda di una particella di modulo a e fase ϕ . Sulla base dell'analogia precedente, si richiede che il passaggio alla dinamica classica avvenga assumendo che la lunghezza d'onda di de Broglie vari molto su piccole distanze, e che il percorso della particella sia tale da minimizzare l'azione S , *principio di Hamilton*. Questo è verificato ponendo

$$\frac{S(q)}{\hbar} = \phi(q) \quad , \quad \hbar \rightarrow 0$$

La proporzionalità tra azione e fase permette di mettere in correlazione il principio di Hamilton con quello di Fermat, così che l'uno implichi l'altro. [6] Il limite per $\hbar \rightarrow 0$ invece agisce sulla lunghezza d'onda di de Broglie come richiesto. Questa procedura, che agisce sulle funzioni d'onda con l'intento di riprodurre i risultati della meccanica classica, porta il nome di *approssimazione WKB*, anche detta *approssimazione semiclassica*.

A questo punto è interessante studiare l'equazione agli autovalori per un hamiltoniano H in ambito semi-classico.

Sia dato un autostato

$$\Psi(q) = a(q)e^{i\frac{S(q)}{\hbar}} \quad , \quad \hbar \rightarrow 0$$

$$\left\{ \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(q) \right\} \Psi = E \Psi$$

Il laplaciano agisce sia sul modulo che sul termine esponenziale dando luogo ad una equazione complessa, dividendola in parte reale e immaginaria si ottiene

$$\begin{aligned} \nabla^2 S(q) a(q) + 2 \nabla a(q) \cdot \nabla S(q) &= 0 \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 a(q)}{a(q)} + \frac{|\nabla S(q)|^2}{2m} + V(q) &= E \end{aligned}$$

Il limite per $\hbar \rightarrow 0$ dà luogo all'equazione di *Hamilton-Jacobi ridotta*

$$\frac{|\nabla S(q)|^2}{2m} + V(q) = E$$

Si ottiene pertanto il seguente risultato:

Sia Ψ la funzione d'onda di uno stato quantistico. In approssimazione semiclassica, la fase $\frac{S(q)}{\hbar}$ è soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi del corrispondente sistema classico.

Questo risultato permette di stabilire un legame tra le trasformazioni di gauge degli stati classici e i corrispondenti quantistici. In meccanica analitica infatti l'equazione di Hamilton-Jacobi è ottenuta dalla sostituzione

$$H(q, p) = E \quad \rightarrow \quad H(q, \nabla S(q)) = E$$

In particolare esiste un legame tra la fase della funzione d'onda e l'impulso generalizzato del corrispondente sistema hamiltoniano

$$\nabla S(q) = p$$

Ricordando il comportamento di uno stato fisico sotto trasformazioni di gauge, si ricava che una trasformazione su uno stato classico ne induce una sul corrispondente quantistico, e viceversa

$$p' = p + \nabla\alpha \quad : \quad p' = \nabla S' \quad \rightarrow \quad p + \nabla\alpha = \nabla S' \quad \rightarrow \quad \nabla S + \nabla\alpha = \nabla(S') \quad \rightarrow \quad S' = S + \alpha$$

Si ritrova in particolar modo il risultato sugli stati vettori sotto trasformazioni di gauge precedentemente ricavato

$$\Psi' = ae^{i\frac{S'}{\hbar}} \quad \rightarrow \quad \Psi' = ae^{\frac{i(S+\alpha)}{\hbar}} \quad \rightarrow \quad \Psi' = \Psi e^{i\alpha}$$

Capitolo 5

Dinamica di una particella carica in un campo magnetico costante

Si studierà sia a livello classico che quantistico la dinamica di una particella carica in un campo magnetico costante ed elettrico nullo. Il sistema in questione è classicamente risolvibile e la dinamica altrettanto semplice, a livello quantistico invece le regole di quantizzazione canoniche metteranno in risalto fenomeni che non hanno un corrispettivo classico.

5.1 Sistema classico

Sia K un sistema di riferimento inerziale, sia esso il nostro laboratorio, e poniamo il campo magnetico costante B lungo la direzione verticale z . A livello classico la dinamica è elementare. Una particella carica di carica q , è sottoposta alla forza

$$F(q, v, t) = \frac{q}{c} v(t) \times B(q, t)$$

pertanto la sua dinamica soddisfa le seguenti equazioni

$$x(t) = \frac{v_{x0}}{\omega} \cos \omega t + x_0$$

$$y(t) = \frac{v_{y0}}{\omega} \sin \omega t + y_0$$

$$z(t) = z_0 + v_{z0} t$$

ove $x_0, y_0, z_0, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}$ denotano le condizioni iniziali. Lungo l'asse z il moto è di particella libera, nel piano x, y vi è invece un moto circolare uniforme di frequenza $\omega = \frac{eB}{mc}$ e centro di coordinate (x_0, y_0) .

5.2 Sistema quantistico: i livelli di Landau

L'operatore hamiltoniano di una particella carica in un campo elettromagnetico è

$$H = \frac{1}{2m} \left(P - \frac{q}{c} A(Q, t) \right)^2 + q\phi(Q, t)$$

Nel caso di un campo magnetico costante ed elettrico nullo, possiamo utilizzare l'invarianza di gauge per porre

$$\phi(Q, t) = 0 \quad \frac{\partial A(Q, t)}{\partial t} = 0$$

A questo punto l'operatore H potrà esprimersi per esteso come

$$H = \frac{P^2}{2m} - \frac{q}{2mc}(A(Q, t)P + PA(Q, t)) + \frac{q^2}{2mc^2}A^2(Q, t)$$

Si noti come l'algebra operatoriale sia non abeliana, per questo si è espresso il termine $AP + PA$. In ogni caso possiamo porlo a $2AP$ grazie al fatto che

$$[P, A] = -i\hbar\nabla A$$

In gauge di Coulomb $\nabla \cdot A = 0$ l'hamiltoniano diviene

$$H = \frac{P^2}{2m} - \frac{e}{mc}(A(Q, t)P) + \frac{e^2}{2mc^2}A^2(Q, t)$$

e il potenziale vettore A potrà essere scelto compatibilmente con

$$B = \nabla \times A \rightarrow A = \frac{B \times Q}{2}$$

Si fissi la gauge con

$$A_x = -By \quad A_y = 0 \quad A_z = 0$$

Questa scelta per il potenziale vettore fa sì che l'hamiltoniano abbia la forma

$$H = \frac{1}{2m} \left(P_x + \frac{eBy}{c} \right)^2 + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{P_z^2}{2m}$$

il cui pregio è quello di formare assieme a P_x e P_z un set compatibile di osservabili che commutano. Questo permette di risolvere simultaneamente le equazioni agli autovalori per H , P_x , P_z . In rappresentazione delle posizioni, l'autostato Ψ soddisfa [6]

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= p_x \Psi \\ -i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= p_z \Psi \\ \left\{ \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \frac{eBy}{c} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial^2 z} \right\} \Psi &= E\Psi \end{aligned}$$

Le prime due equazioni indicano che la funzione d'onda Ψ è di particella libera e potrà esprimersi come $\Psi = e^{ip_x x + ip_z z} \Phi(y)$, ove $\Phi(y)$ è da determinarsi tramite l'equazione per H . Sostituendo Ψ nella equazione per H si ottiene:

$$\Phi''(y) + \frac{2m}{\hbar} \left(E - \frac{p_z^2}{2m} - \frac{m\omega^2(y - y_0)^2}{2} \right) \Phi(y) = 0$$

ove si è posto $\omega = \frac{eB}{mc}$ e $y_0 = -\frac{cp_x}{eB}$. Questa equazione è formalmente identica all'equazione di Schroedinger per l'oscillatore armonico unidimensionale con frequenza ω e punto attorno alla quale avvengono le oscillazioni dato da y_0 . [5] Sfruttando l'analogia avremo che le possibili energie del sistema in esame saranno quantizzate, a differenza del corrispettivo classico, e avranno la forma

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{ehB}{mc} + \frac{p_z^2}{2m}$$

L'autostato associato è

$$\Psi = e^{(ip_x x + ip_z z)} e^{\left(\frac{-eB(y-y_0)^2}{2ch}\right)} H_n \sqrt{\frac{eB(y-y_0)}{ch}}$$

in cui H_n indica i polinomi di Hermite al variare del numero quantico n . La divisione dei livelli energetici in stati discreti porta il nome di *Livelli di Landau*.

Correzione ai livelli di Landau ed equazione di Dirac

Qualsiasi particella può essere classificata come fermione o come bosone, avendo pertanto spin semi-intero o intero. La presenza dello spin, nei livelli di Landau, si ottiene sommando all'hamiltoniano il termine operatoriale

$$-\beta S \cdot B$$

in cui S è l'operatore di spin e β una costante caratteristica della particella. Il nuovo hamiltoniano diviene

$$H = \frac{1}{2m} \left(P_x + \frac{eBy}{c} \right)^2 + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{P_z^2}{2m} - \beta S_z B$$

Lo spazio degli stati per una particella è ora formato dal prodotto tensoriale dello spazio degli stati ordinario con lo spazio degli stati di spin di particella singola. L'operatore S commuta con H agendo su spazi diversi, pertanto lo spin della particella è una costante del moto in senso quantistico, sia essa s_z . La correzione ai livelli di Landau diviene

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{ehB}{mc} + \frac{p_z^2}{2m} - \beta s_z B$$

La modifica dell'hamiltoniano può apparire poco naturale in quanto non nasce dai postulati della meccanica quantistica ma da un evidenza sperimentale¹ Un modo piu'elegante per derivare il termine di spin consiste nel sostituire l'equazione di Schroedinger con l'equazione di Dirac. In rappresentazione delle posizioni, denotando le matrici di Dirac con γ^μ si ha

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H(\psi) \rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = 0$$

L'equazione di Dirac, a differenza dell'equazione di Schroedinger, descrive la dinamica in forma covariante a vista per trasformazioni di Lorentz, tuttavia questo

¹si pensi all'esperimento di Stern-Gerlach.

risultato richiede che la funzione d'onda non sia piu' un campo scalare, ma un campo a quattro uscite, denominato *campo spinoriale*. La conseguenza piu' importante è che ad ogni fermione saranno associate quattro funzioni d'onda. Due di queste indicano lo spin $\{\uparrow, \downarrow\}$ della particella, le rimanenti lo spin $\{\uparrow, \downarrow\}$ dell'antiparticella. Risolvendo ora l'equazione di Dirac in un campo magnetico costante, si otterrà la correzione ai livelli di Landau per effetto dello spin, questa volta in maniera naturale. [7]

Vincolo sui cambi di gauge nei livelli di Landau

Sia H l'operatore hamiltoniano in gauge di Coulomb descritto all'inizio di questa sezione

$$H = \frac{P^2}{2m} - \frac{e}{mc} A(Q, t) P + \frac{e^2}{2mc^2} A^2(Q, t)$$

Si calcoli il commutatore tra H e P_i senza aver fissato una gauge specifica, ma rimanendo soltanto all'interno di quella di Coulomb.

Si ricava

$$[H, P_i] = \frac{i\hbar e^2}{mc^2} \frac{\partial A_j(Q, t)}{\partial x^i} A^j(Q, t)$$

La scelta della gauge

$$A_x = -By \quad A_y = 0 \quad A_z = 0$$

per affrontare lo studio dei livelli di Landau non è casuale.

Con tali potenziali si ottiene

$$[H, P_i] = 0 \quad i = 1, 3$$

Questo ha permesso di risolvere l'equazione agli autovalori per H, P_x e P_z e di associare allo spettro di P_x una componente del centro di rotazione della particella e a P_z l'impulso canonico lungo z . In queste condizioni una trasformazione di gauge non è banale in quanto agisce sia sugli autostati che sul commutatore tra H e P_i . Non basta pertanto far agire l'operatore unitario $T_\chi(t)$ sull'autostato ψ , ma bisogna accertarsi che il commutatore $[H, P_i]$ sia ancora nullo per $i = 1, 3$.

5.3 Principi di indeterminazione nel caso quantistico

Indeterminazione intrinseca sulle velocità

Definiamo l'operatore associato all'impulso canonico mv

$$\Pi = P - \frac{eA}{c}$$

Si calcoli il commutatore tra la componente i -esima di Π e la j -esima.

$$[\Pi_i, \Pi_j] = [P_i - A_i, P_j - A_j] = [P_i, P_j] - [P_i, A_j] + [P_j, A_i] + [A_i, A_j]$$

In base alle regole di quantizzazione canoniche $[P_i, P_j] = 0$. In particolare la scelta della gauge

$$A_x = -By, A_y = 0, A_z = 0$$

comporta

$$\begin{aligned} [\Pi_x, \Pi_y] &= \frac{i\hbar Be}{c} \\ [\Pi_x, \Pi_z] &= 0 \\ [\Pi_y, \Pi_z] &= 0 \end{aligned}$$

A partire da questi commutatori si deduce un principio di indeterminazione per le componenti x ed y della velocità della particella. Siano infatti A e B due operatori osservabili generici. Gli errori² sulle grandezze associate soddisfano la disuguaglianza

$$\sigma_a \sigma_b > \frac{|\langle [A, B] \rangle|}{2}$$

Ponendo

$$A = \frac{\Pi_x}{m} \quad B = \frac{\Pi_y}{m}$$

così che gli errori possano essere associati alle componenti della velocità della particella, otteniamo il seguente principio di indeterminazione, da non confondersi con il principio di indeterminazione di Heisenberg

$$\sigma_{v_x} \sigma_{v_y} > \frac{\hbar Be}{2cm^2}$$

Questo significa che non è possibile conoscere con arbitrarietà assoluta il modulo della velocità della particella lungo il piano x, y [6]. Nessun principio di indeterminazione invece per quanto riguarda la componente v_z .

Indeterminazione intrinseca sul centro di rotazione della particella

L'indeterminazione sulle componenti della velocità nel piano x, y non è l'unica indeterminazione aggiuntiva rispetto a quella di Heisenberg. Le coordinate del centro di rotazione nel piano x, y , derivanti dalla dinamica classica del sistema sono

$$x_0 = \frac{cp_y}{eB} + x \quad , \quad y_0 = -cp_x/eB$$

Tramite le regole di quantizzazione canoniche a queste grandezze associamo gli operatori autoaggiunti e osservabili X_0 e Y_0 . Il loro commutatore è

$$[X_0, Y_0] = \frac{i\hbar mc}{eB}$$

ricavando la seguente disuguaglianza

$$\sigma_{X_0} \sigma_{Y_0} > \frac{m\hbar c}{2eB}$$

²Per errore di una grandezza fisica si intende la radice quadrata della varianza statistica.

Il significato è semplice. Non è possibile conoscere simultaneamente, e con precisione assoluta, le coordinate del centro di rotazione della particella carica durante il suo moto. [6] Come si è potuto vedere, le regole di quantizzazione canoniche, tutt'altro che banali, portano a fenomeni che non hanno un corrispettivo in meccanica classica.

Bibliografia

- [1] Mikio Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Graduate student series in physics, IOP Publishing Ltd 1990
- [2] Kurt Lechner, *Elettrodinamica classica*, UNITEXT Collana di Fisica e astronomia, Springer Verlag Italia 2004
- [3] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Laloë, *Quantum Mechanics Volume 1*, Hermann 1991
- [4] Marco Abate e Francesco Tivena, *Geometria differenziale*, UNITEXT Collana di matematica, Springer Verlag Italia 2007
- [5] Steven Weinberg, *Lectures on Quantum Mechanics*, Cambridge University Press 2013
- [6] L. Landau e E.M.Lifshitz, *Quantum mechanics, non relativistic theory*, Pergamon Press 1958
- [7] J.J.Sakurai, *Advanced quantum mechanics*, Addison-Wesley 1967
- [8] G. Benettin, *Meccanica analitica*, dispense didattiche per il corso di meccanica analitica