

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Il gas di Chaplygin e le componenti oscure dell’universo

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

Correlatore

Dr. Daniele Bertacca

Laureando

Margherita Putti

Anno Accademico 2018/2019

Indice

1	Introduzione	1
1.1	L'universo	1
1.2	Energia e materia oscura	3
1.2.1	Dark Matter	3
1.2.2	Dark Energy	4
1.3	Inventario cosmico	4
1.4	Λ CDM	5
1.5	Unified Dark Matter (UDM)	5
2	Gas di Chaplygin	7
2.1	Studio di un universo con gas di Chaplygin	7
2.1.1	Validità gas di Chaplygin	7
2.2	Comportamento	9
2.2.1	Campo scalare	9
2.2.2	Fluido perfetto	10
2.3	Stabilità	11
3	Gas di Chaplygin generalizzato	15
3.1	Campo scalare	15
3.2	Fluido perfetto	16
3.3	Effetto ISW	17
4	Analisi della Lagrangiana	19
4.1	Lagrangiana di un fluido perfetto	20
5	Conclusioni	25

Capitolo 1

Introduzione

1.1 L'universo

Nello studio dell'evoluzione dell'universo l'assunzione classica derivante dall'applicazione del principio copernicano alla cosmologia (il cosiddetto *Principio Cosmologico*) prevede che l'universo sia globalmente omogeneo e isotropo. Questa ipotesi, alla base di tutti i modelli cosmologici moderni, si giustifica in maniera empirica e intuitiva osservando che una struttura complessa e eterogenea diventa sempre più omogenea e isotropa all'aumentare della scala di osservazione [2].

I modelli che descrivono l'evoluzione dell'universo si basano sulle equazioni di campo della relatività generale di Einstein, che possiamo scrivere nella loro forma semplificata come [2]:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = 8\pi G \mathcal{T}_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

Quest'equazione mette in relazione il tensore di Einstein $\mathcal{G}_{\mu\nu}$, che misura la curvatura spazio-temporale di un universo omogeneo, con il tensore energia-impulso $\mathcal{T}_{\mu\nu}$, che misura la quantità di materia dell'universo, tramite la costante gravitazionale G . In tali modelli, la richiesta di omogeneità e isotropia è soddisfatta dalla cosiddetta metrica di Friedman-Robertson-Walker (FRW) [2]. La metrica spaziotemporale trasforma le coordinate $X^\mu = (t, x^i)$ nell'elemento invariante

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu := g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \quad (1.2)$$

Nella teoria della relatività speciale la metrica di Minkowski è la stessa ovunque nello spazio e nel tempo, invece nella teoria della relatività generale la metrica dipende da entrambi i parametri: $g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x})$. La dipendenza spazio-temporale della metrica è stabilita dalla distribuzione di materia e energia nello spazio. Grazie alla simmetria data dall'omogeneità dell'universo si riesce a trovare la metrica cercata. L'omogeneità e l'isotropia spaziale rendono possibile la rappresentazione di un universo da una sequenza ordinata temporalmente di sezioni spaziali tridimensionali omogenee e isotrope, caratterizzate da curvature costanti: nulla, positiva o negativa.

- spazio piatto: l'elemento di linea di uno spazio Euclideo tridimensionale è

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$$

invariante per traslazioni spaziali.

- spazio curvato positivamente: tale spazio può essere rappresentato come una sfera S^3 in uno spazio Euclideo quadri dimensionale. Presenta quindi un elemento di linea

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 + du^2, \quad \mathbf{x}^2 + u^2 = a^2$$

dove a è il raggio della sfera.

- spazio curvato negativamente: tale spazio può essere rappresentato come un iperboloide in uno spazio di Lorentz quadri dimensionale

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 - du^2, \quad \mathbf{x}^2 - u^2 = -a^2$$

con a^2 costante arbitraria.

Posso così identificare l'elemento di linea attraverso un'unica definizione:

$$dl^2 = a^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

con $\gamma_{ij} = \delta_{ij} + k \frac{x_i x_j}{1 - k(x_k x^k)}$. In tal modo per $k = 0$ ottengo un elemento di linea euclideo, per $k = 1$ sferico, per $k = -1$ iperbolico.

La metrica Friedman-Robertson-Walker (FWR) è data includendo dl^2 nell'elemento di linea dello spazio tempo e definendo a come un parametro dipendente dal tempo

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

Il fattore di scala $a(t)$ descrive l'espansione dell'universo nel tempo. Per convenzione, si assume che all'epoca attuale sia $a(t = t_0) = 1$, per cui al tempo t il termine dl descrive la distanza comovente, cioè la distanza propria divisa per il fattore di scala $a(t)$.

In un universo FWR la relazione relativistica (1.1) si semplifica nelle equazioni di Friedmann [2]:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{K}{a^2} \quad (1.3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3P) \quad (1.4)$$

dove con ρ e P si considera la somma di tutti contributi rispettivamente alla densità di energia e alla pressione nell'universo. La seconda equazione viene anche chiamata *equazione di accelerazione* del fattore di scala. Queste equazioni non ammettono soluzioni statiche non banali, da cui si deduce che l'universo deve essere o in contrazione o in espansione.

Per controbilanciare gli effetti della gravità e con l'intento di ottenere la descrizione di un universo statico, Einstein stesso introdusse nell'equazione (1.1) un termine aggiuntivo contenente la cosiddetta costante cosmologica Λ

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \mathcal{T}_{\mu\nu}$$

Equivalentemente si può riordinare tale equazione

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = 8\pi G \mathcal{T}_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

considerando la costante cosmologica una sorgente del campo gravitazionale come la materia e la radiazione. Il segno di Λ non è determinato, al contrario di quello di $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ che dev'essere positivo per non violare le leggi della fisica. In tal modo la costante cosmologica esercita una forza gravitazionale che può essere sia attrattiva sia repulsiva a seconda. Se si immagina un universo dominato da tale costante si ottiene una soluzione con velocità crescente, che contrasta l'effetto decelerante dell'attrazione gravitazionale della materia ordinaria [19].

Una possibile interpretazione di tale costante è la densità di energia dello spazio, equivalente all'energia del vuoto: $\Lambda = 8\pi G \rho_\Lambda$. Tale energia del vuoto è presente ovunque nello spazio, anche se privo di materia, ed è legata alle fluttuazioni quantistiche, che determinano la continua annichilazione di particelle e antiparticelle. Successivamente, è stato dimostrato [19] che l'universo statico ipotizzato da Einstein non potesse essere stabile. Infatti, l'equilibrio delle equazioni di campo non è stabile, e una piccola espansione dell'universo rilascerebbe energia del vuoto causando ulteriore espansione, e allo stesso modo se l'universo si contraesse continuerebbe a contrarsi. Questo tipo di perturbazioni sono inevitabili a causa della distribuzione non uniforme della materia.

In seguito alle osservazioni di Edwin Hubble che introdussero il fenomeno di *redshift* (spostamento

verso il rosso) delle galassie [13]: la luce proveniente da quest'ultime aveva una lunghezza d'onda maggiore rispetto all'emissione; Einstein ha realizzato che l'espansione prevista dalla relatività generale doveva essere reale. Misurando il *redshift* infatti Hubble ha dimostrato che le galassie stanno allontanandosi le une dalle altre, poichè i segnali provenienti da esse arrivano sulla terra una lunghezza d'onda incrementata.

Il fisico tedesco ha dunque ammesso che cambiare le sue equazioni fu "il più grande abbaglio della [sua] vita" [10]. Il ruolo della costante cosmologica verrà approfondita nei capitoli successivi del presente lavoro.

1.2 Energia e materia oscura

Agli inizi l'universo era denso e incandescente, le interazioni tra particelle erano frequenti e considerevolmente energetiche, la materia era composta da elettroni liberi e nuclei atomici, e la luce rimbalzava tra gli oggetti. Con il raffreddamento del plasma primordiale iniziarono a formarsi gli elementi leggeri: idrogeno, elio e litio. Nell'istante in cui l'energia si abbassò sufficientemente a far comparire i primi atomi stabili, i fotoni iniziarono a fluire liberamente [2]. L'evoluzione appena descritta prende il nome di *teoria del Big Bang*. Oggi è possibile osservare il bagliore residuo di questi istanti iniziali dell'universo come radiazione di microonde (CMB cosmic microwave background) quasi totalmente uniforme. Questa radiazione ha uno spettro termico di corpo nero a circa $2.7K$.

La distribuzione spaziale dell'energia tuttavia presenta delle variazioni che rispecchiano delle oscillazioni nella densità di materia primordiale.

Sotto l'influenza della gravità, queste fluttuazioni di materia sono cresciute, e le regioni dense si sono addensate ulteriormente. E' così che si sono formate galassie, stelle e pianeti [15].

La storia dell'universo è una realtà scientifica che ha da sempre attratto l'interesse di numerosi studiosi e ricercatori. Le scoperte degli ultimi decenni ci hanno permesso di avanzare profondamente nella conoscenza del cosmo e delle sue leggi, tuttavia la maggior parte dell'universo attuale consiste di forme di materia ed energia non presenti sulla terra e ancora sconosciute [2].

1.2.1 Dark Matter

L'ipotesi dell'esistenza di materia oscura è nata concretamente nel 1933 con Fritz Zwicky [8]. Studiando il moto di ammassi di galassie lontani e massivi, l'astronomo stimò la massa di ogni galassia utilizzando il rapporto di luminosità media per unità di volume e la densità di materia all'interno dello stesso, sommandole per ottenere la massa totale del gruppo. Il confronto tra tale valore con una seconda stima basata invece sulla dispersione delle velocità delle diverse galassie rivelò una discrepanza, in quanto quest'ultima stima risultò considerevolmente maggiore della prima. Il materiale galattico risultava, per le elevate velocità delle galassie, non sufficiente a generare la forza di gravità necessaria ad impedire la dispersione del gruppo studiato. La non disgregazione dell'ammasso esigeva l'esistenza di materia aggiuntiva, oltre a quella visibile, che lo tenesse unito. Per un resoconto storico più approfondito si veda [23].

La mancanza di materia venne confermata definitivamente negli anni '70 grazie all'astronoma Vera Rubin, che trovò anomalie misurando la velocità delle stelle e dei loro gas più esterni [8]. Era noto infatti che le galassie ruotano attorno ad un asse passante per il loro centro, dov'è maggiore la densità stellare, analogamente a come i pianeti ruotano intorno al sole, e rispettano quindi la terza legge di Keplero, secondo la quale il quadrato dei tempi di percorrenza delle orbite dei pianeti è proporzionali al cubo delle loro distanze medie dal sole. Maggiore è la distanza dall'astro centrale, e minore è la velocità della stella. Rubin ha notato invece che le stelle più esterne delle galassie osservate ruotavano con una velocità uguale o superiore di quelle delle stelle più interne. Due sono le strade per spiegare tale fenomeno: o si introducono dei termini correttivi nella teoria gravitazionale, che sono significativi solamente a distanze dell'ordine galattico, oppure si ammette l'esistenza di una quantità non indifferente di materia soggetta solo all'attrazione gravitazionale. Quest'ultima è la cosiddetta *materia oscura*.

L'ipotesi più accreditata è che la materia oscura sia composta da un tipo di particella elementare non ancora scoperta, massiva e debolmente interagente WIMP (weakly interactive mass particle).

1.2.2 Dark Energy

Si è visto precedentemente come l'espansione dell'universo sia governata dalle equazioni di Friedmann. Da esse deriva l'ipotesi secondo la quale man mano che la gravità attrae la materia l'espansione rallenti. Tuttavia alla fine degli anni novanta osservazioni di supernove di tipo Ia, originate cioè dall'esplosione di una stella nana bianca, hanno suggerito che l'espansione stia invece accelerando. Per misurare la velocità di allontanamento sono state compiute misure di *redshift* delle radiazioni emanate dall'oggetto, applicando semplicemente la *legge di Hubble*, secondo la quale la velocità di recessione è proporzionale alla distanza: più è distante l'oggetto, più è pronunciato lo spostamento verso il la banda del rosso. Misurando la velocità di espansione a diverse distanze spazio temporali si è quindi evidenziata l'accelerazione di tale espansione [21]. Per questo lavoro agli americani Saul Perlmutter e Adam Riess e all'australo-statunitense Brian P. Schmidt è stato assegnato il premio Nobel per la fisica nel 2011. Da ulteriori osservazioni si è scoperto che l'accelerazione è positiva solo da qualche milione di anni, mentre prima l'espansione gradualmente rallentava [15].

Per motivare questa scoperta è stato introdotto il concetto di energia oscura: una componente sconosciuta caratterizzata da pressione negativa.

Si vuole infatti che il fattore di scala presenti accelerazione positiva. Dall'*equazione di accelerazione* di Friedman (1.4) per ottenere $\ddot{a} \geq 0$ si necessita di un elemento con pressione negativa. Per giustificare l'esistenza di una forza antigravitazionale presente in tutto l'universo, è stata nuovamente rivalutata la costante cosmologica di Einstein, o energia del vuoto della meccanica quantistica. Alcune ipotesi identificano tale energia nell'energia oscura [19].

L'*abbaglio* di Einstein in tal modo è stato ridimensionato: esiste un'energia non rilevabile che permea effettivamente lo spazio, ma il suo effetto "antigravitazionale" non stazionarizza l'universo ma ne accelera l'espansione.

Si stima che il 95% dell'universo sia composto dalle seguenti componenti oscure: 68% energia oscura, 27% materia oscura. Il rimanente 5% di massa si trova in forma barionica [20].

1.3 Inventario cosmico

E' utile classificare le componenti diverse dello spazio in base al loro contributo alla pressione, risolvendo l'equazione di continuità (derivante dalle equazioni di Friedman 1.4):

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0$$

- Materia: tutte le componenti dell'universo per cui la pressione è più bassa della densità di energia, $|P| \ll \rho$. Ponendo $P = 0$ si ha $\rho \propto \frac{1}{a^3}$.
- Radiazione: ciò per cui la pressione è un terzo, $P = \frac{1}{3}\rho$, ottenendo così $\rho \propto \frac{1}{a^4}$
- Energia oscura: componente con pressione negativa $P = -\rho$, per cui $\rho \propto a^0 = \text{cost}$. Poichè la densità di energia è costante, dev'essere creata energia con l'espansione dell'universo.

I fluidi cosmologici possono essere parametrizzati in termine della costante $w = \frac{P}{\rho}$, e quindi le soluzioni di (1.5) si possono condensare come

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}$$

con

$$w = \begin{cases} 0 & \text{materia} \\ \frac{1}{3} & \text{radiazione} \\ -1 & \text{energia oscura} \end{cases} \quad (1.5)$$

1.4 Λ CDM

Negli ultimi decenni si è affermato il *Modello Cosmologico Standard* del Big Bang (Λ CDM: Λ Cold Dark Matter), in grado di riprodurre varie osservazioni cosmiche partendo dal presupposto che la Relatività Generale sia la corretta teoria di gravitazione cosmologica. Esso descrive un universo composto da tre principali componenti: la materia oscura, formata da particelle poco interagenti e definita per questo "fredda", la costante cosmologica (Λ) associata all'energia oscura, e la materia ordinaria. Questo modello assume inoltre che lo spazio-tempo sia piatto, e quindi con curvatura K nulla.

Il modello standard della cosmologia del Big Bang è denominato in tal modo perchè è il più semplice modello che permette di riprodurre le seguenti proprietà del cosmo: l'esistenza e la struttura del CMB, le strutture a grande scala nella distribuzione delle galassie, l'abbondanza di idrogeno, elio e litio, l'accelerata espansione dell'universo.

Ciò nonostante il modello presenta diversi problemi [1]. Innanzitutto non spiega perchè la materia oscura si raggruppi ai margini esterni delle galassie e non al centro, dove tenderebbe a concentrarsi a causa dell'attrazione gravitazionale.

Il numero di galassie nane riscontrato non rispecchia il numero previsto teoricamente dal modello Λ CDM. Tale modello inoltre non spiega la natura della costante cosmologica nè il motivo della sua esistenza, nè tantomeno il perché abbia un determinato valore. Il candidato per ricoprire il ruolo dell'energia oscura, la densità di energia del vuoto quantistico, porterebbe ad un valore della costante cosmologica di oltre 120 ordini di grandezza superiore a quello misurato.

Infine c'è il problema della coincidenza: i valori della densità materia e densità di costante cosmologica sono tuttora circa dello stesso ordine di grandezza.

Il modello standard è quindi in grado di dare una spiegazione a vari fenomeni osservati, tuttavia domande fondamentali riguardanti la natura dell'energia e della materia oscura rimangono senza risposta. La mancanza di una teoria adeguata per comprendere questo settore suggerisce la necessità di esplorare nuovi modelli in grado di dare una spiegazione a questi problemi non risolti dal modello standard.

1.5 Unified Dark Matter (UDM)

I modelli UDM (Unified Dark Matter) identificano l'energia oscura e la materia oscura come due aspetti diversi dello stesso fluido, che si comporterebbe a seconda delle condizioni come una o l'altra componente. Il vantaggio di tale approccio consiste nella possibilità di descrivere l'accelerazione cosmica e la formazione di Large Scale Structures (LSS), cioè formazioni a scale più grande di galassie, attraverso un unico elemento. Tale fluido in questo modello viene identificato con il termine di componente oscura. Generalmente, questi modelli possono essere espressi tramite il formalismo di campo scalare con specifiche condizioni iniziali fissate che variano da modello a modello [5].

Tali modelli devono soddisfare determinati requisiti per poter essere considerati una valida alternativa al modello standard. Devono riprodurre tutti i fenomeni previsti dal Λ CDM e verificati sperimentalmente. Devono spiegare la natura della componente oscura evitando di complicare il modello standard. Devono essere coerenti e consistenti nell'unione di energia e materia oscura. Ogni modello, cioè, deve riprodurre la dinamica di ogni componente e deve risolvere, almeno in parte, le problematiche irrisolte dal modello standard. Il modello deve essere in grado di riprodurre l'evoluzione dell'universo fino ad oggi, a partire da un set di condizioni iniziali dato dalle nostre conoscenze dell'universo primordiale. Il dominio dello spazio delle condizioni iniziali deve essere più ampio possibile, in modo da poter descrivere un maggior numero di scenari. Infine, il fluido unificato deve essere in grado di raggrupparsi (*clustering*), ossia di formare delle eterogeneità che permettono la creazione delle LSS. Affinchè questo fenomeno sia previsto dal modello, si impongono dei vincoli sulla velocità del suono v_s , ovvero la velocità di propagazione delle perturbazioni all'interno del fluido. Si è infatti dimostrato che a $v_s \neq 0$ corrisponde la comparsa di una lunghezza di Jeans, al di sotto della quale il fluido non riesce ad ammassarsi. Si deve quindi richiedere che la velocità sia sufficientemente piccola [5].

In questa tesi verrà approfondito il modello che unifica energia e materia oscura in un unico fluido, chiamato il *Gas di Chaplygin* [11].

Capitolo 2

Gas di Chaplygin

Un fluido viene connotato come perfetto se è caratterizzato da densità costante e coefficiente di viscosità nullo. È stato dimostrato come le equazioni che descrivono il comportamento di un fluido perfetto possono essere derivate da un'unica funzione *lagrangiana*: la pressione del fluido stesso. Ne consegue che la trattazione del fluido si semplifica nel semplice studio della sua pressione [17].

Per *gas di Chaplygin* si intende un fluido perfetto con equazione di stato

$$p = -\frac{A}{\rho} \quad (2.1)$$

dove p è la pressione, ρ è la densità di energia, A è una costante positiva.

Un'altra importante caratteristica di tale fluido è che presenta una velocità del suono

$$v_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = A/\rho^2$$

positiva e limitata [14].

2.1 Studio di un universo con gas di Chaplygin

Nei seguenti paragrafi verrà studiato un universo FWR immerso nel gas di Chaplygin con la convenzione $8\pi G = c^2 = 1$ e $diag(g_{\mu\nu}) = (-, +, +, +)$.

2.1.1 Validità gas di Chaplygin

Tale fluido risulta interessante per il suo comportamento: a tempi iniziali la sua pressione è circa nulla, comportamento che corrisponde a quello della materia fredda oscura, mentre per tempi lunghi la sua equazione di stato va ad assomigliare a quella della costante cosmologica Λ ($p \sim -\rho$) [18].

Nella metrica FWR per un universo isotropo e omogeneo il fattore di scala $a(t)$ segue l'evoluzione regolata dall'equazione di Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \rho - \frac{K}{a^2} \quad (2.2)$$

Dalla conservazione di energia

$$d(\rho a^3) = -pd(a^3) \quad (2.3)$$

e dall'equazione di stato (2.1) si trova la seguente espressione per la densità

$$\rho = \sqrt{A + \frac{B}{a^6}} \quad (2.4)$$

dove B è una costante di integrazione, presa positiva.

Studiando (2.4) al variare di a si delineano due possibili approssimazioni diverse.

Per a limitato ($a^6 \ll \frac{B}{A}$) si ottiene $\rho \sim \frac{\sqrt{B}}{a^3}$ che corrisponde ad un universo dominato da materia simile a polvere, cioè materia con pressione nulla, mentre al crescere del fattore di espansione $\rho \sim \sqrt{A}$, si trova $p \sim -\sqrt{A}$, che rappresenta un universo vuoto con una costante cosmologica \sqrt{A} .

Supponendo che questo modello sia quello che descrive la realtà cosmologica, si può determinare la costante A confrontando i dati sperimentali di pressione ed energia con le loro stime modellistiche. Vengono considerati in questa tesi i valori di densità di energia e materia oscura comunemente accettati nella letteratura, riportati nel capitolo precedente. Per poter usare questi dati si utilizzano le seguenti scomposizioni:

$$p - p_\Lambda + p_M = -\Lambda \quad , \quad \rho = \rho_\Lambda + \rho_M = \Lambda + \rho_M \quad (2.5)$$

che, combinate con l'equazione di stato (2.1) definiscono la costante $A = \Lambda (\Lambda + \rho_M)$. Se la costante cosmologica contribuisce all'energia per il 70% allora si ha un valore $\sqrt{A} \sim 1.2\Lambda$. Si osserva inoltre come, seguendo una descrizione cosmologica di Chaplygin, dopo un'accelerazione dell'espansione dell'universo, non può esserci una decelerazione. Per dimostrare quest'affermazione bisogna innanzitutto si sviluppa la conservazione dell'energia (2.3), trovando la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned} d(\rho a^3) &= -pd(a^3) \\ d\rho a^3 + 3a^2\rho da &= -p3a^2 da \\ d\rho &= \frac{-3da(p + \rho)}{a} \end{aligned}$$

Derivando invece l'equazione di Friedmann (2.2) rispetto al tempo si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &= \rho a^2 \\ 2\dot{a}\ddot{a} &= \frac{d\rho}{dt}a^2 + 2a\rho\dot{a} \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{a\frac{d\rho}{dt} + 2\rho\dot{a}}{2\dot{a}} \end{aligned}$$

Si ottiene così la seguente espressione :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-3\dot{a}(p + \rho) + 2\rho\dot{a}}{2\dot{a}} = \frac{1}{2}(\rho + 3p) \quad (2.6)$$

La condizione $\ddot{a} > 0$, che corrisponde quindi a un'accelerazione dell'incremento del fattore di scala, è soddisfatta se $a^6 > \frac{B}{2A}$. L'espansione dell'universo equivale matematicamente a un valore positivo della derivata temporale di a . Questo implica che dal momento in cui $a^6 > \frac{B}{2A}$ in poi, il fattore di scala a può solamente crescere: in un universo in espansione la condizione $\ddot{a} > 0$ risulta essere conservata temporalmente.

Segue da ciò che l'effettivo valore osservato della costante cosmologica Λ aumenta fino a 1.2Λ .

Per a elevato ($a \gg \frac{B}{A}$) si trovano le seguenti approssimazioni:

$$\begin{aligned} \rho &\approx \sqrt{A} + \sqrt{\frac{B}{4A}}a^{-6} \\ p &\approx -\sqrt{A} + \sqrt{\frac{B}{4A}}a^{-6} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Tali equazioni descrivono un universo dominato da una mistura composta dalla costante cosmologica \sqrt{A} e da una materia *rigida* caratterizzata dall'equazione di stato $p = \rho$. Si noti come un campo scalare privo di massa sia un esempio di tale materia.

Una cosmologia generica di Chaplygin può quindi essere vista come un'interpolazione di diverse fasi dell'universo: da un universo dominato da polvere a una fase *de Sitter*, che descrive un universo spazialmente piatto che trascura la materia ordinaria in modo tale che la dinamica dell'universo sia dominata dalla costante cosmologica ($p = \rho$), passando per una fase intermedia dominata da una

mistura delle due componenti sopra citate [14].

Si conclude che il modello in considerazione fornisce una possibilità valida per spiegare le osservazioni attuali riguardo l'espansione dell'universo. Predice inoltre un'aumento della costante cosmologica, che potrebbe in linea di principio essere osservato.

2.2 Comportamento

Per descrivere il comportamento del gas di Chaplygin si cerca la sua lagrangiana. Ci sono due modi possibili: partendo dalla definizione di fluido perfetto oppure partendo da un campo scalare con termine cinetico canonico, che a livello medio si comporta come un fluido perfetto. In un modello che segue la metrica FWR infatti, data una dipendenza del fattore di scala $a(t)$ dal tempo t è sempre possibile costruire un potenziale $V(\varphi)$ per un campo scalare φ che riproduce esattamente l'evoluzione cosmologica del modello. Se si ha una soluzione in un universo FWR immerso in un fluido perfetto, si può sempre trovare un campo scalare che riproduce l'evoluzione descritta dal modello. Entrambi i ragionamenti sono proposti a seguire.

2.2.1 Campo scalare

Si considera un campo scalare capace di descrivere una mistura di energia e materia oscura [14]. Viene considerata una lagrangiana di quintessenza, cioè con un termine cinetico canonico:

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - V(\varphi) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \quad (2.8)$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dall'isotropia dello spazio: a livello medio il campo dipende solo dal tempo.

Questo metodo, partendo da una lagrangiana canonica, si sviluppa nella ricerca di un potenziale che possa descrivere il comportamento cercato.

Riprendendo l'equazione (2.4) ottenuta dalla conservazione dell'energia e dall'equazione di stato del gas di Chaplygin, si eguaglia la densità del gas alla densità di energia del campo scalare, inteso come la somma dei contributi cinetici e potenziali:

$$\rho_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) = \sqrt{A + \frac{B}{a^6}} \quad (2.9)$$

La corrispondente pressione coincide con la lagrangiana:

$$p_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) = -\frac{A}{\rho_\varphi} = -\frac{A}{\sqrt{A + \frac{B}{a^6}}} \quad (2.10)$$

Ne segue che

$$\dot{\varphi}^2 = \rho_\varphi + p_\varphi = \frac{\rho_\varphi^2 - A}{\rho_\varphi} = \frac{B}{a^6\sqrt{A + \frac{B}{a^6}}} \quad (2.11)$$

e

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\rho_\varphi - p_\varphi = \frac{\rho_\varphi^2 + A}{2\rho_\varphi} = \frac{2a^6(A + B/a^6) - B}{2a^6\sqrt{A + B/a^6}} \quad (2.12)$$

Ci si restringe poi ad uno spazio piatto (curvatura K nulla), l'equazione (2.2) diventa

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \rho \quad (2.13)$$

quindi dall'equazione (2.11) segue che la derivata del campo rispetto ad a , inteso come raggio cosmologico, è

$$\varphi' = \frac{\sqrt{B}}{a(Aa^6 + B)^{1/2}} \quad (2.14)$$

ed integrando tale relazione si trova

$$a^6 = \frac{4Be^{6\varphi}}{A(1 - e^{6\varphi})^2} \quad (2.15)$$

Sostituendo tale valore nell'equazione (2.12) si deriva il potenziale

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{A} \left(\cosh 3\varphi + \frac{1}{\cosh 3\varphi} \right) \quad (2.16)$$

La velocità del suono risulta essere data da

$$v_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = 1 \quad (2.17)$$

come in tutti i campi scalari con termine cinetico canonico. [6]

Questo modello di quintessenza si comporta come una miscela di energia e materia oscura lungo le soluzioni attrattive, ma non risulta essere capace di formare *cluster* a tutte le scale.

2.2.2 Fluido perfetto

È stata considerata in [9] una lagrangiana di k-essenza, cioè che dipende solo dal termine cinetico: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X)$ dove $X = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi$, $g_{\mu\nu}$ sono i componenti del tensore metrico, $g^{\mu\gamma}g_{\gamma\nu} = \delta_\nu^\mu$, δ_ν^μ è la delta di Kronecker, e φ è un campo scalare reale.

Il corrispondente tensore energia-impulso è [4]

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^\varphi = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}_\varphi}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, X)}{\partial X} \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + \mathcal{L}(\varphi, X)g_{\mu\nu} \quad (2.18)$$

dove \mathcal{S}_φ è l'azione del sistema e $g = -\det(g_{\mu\nu})$. Affermare che il fluido in considerazione è perfetto equivale a riscrivere il tensore energia-impulso come

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (2.19)$$

con

$$u_\mu = \frac{\partial_\mu\varphi}{\sqrt{2X}}, \quad p = \mathcal{L}(X), \quad \rho = 2X \frac{\partial p}{\partial X} - p \quad (2.20)$$

dove u_μ è la quadrivelocità del fluido rinormalizzata.

Svilppuando (2.19) e utilizzando l'equazione di stato

$$p = -\frac{A}{\rho}$$

si riscrive $\mathcal{T}_{\mu\nu}$, esplicitando la scelta dell'azione, nel seguente modo

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mu\nu} &= 2X \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu} \mathcal{L} = 2X \frac{\partial p}{\partial X} u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu} p \\ &= \rho u^\mu u^\nu + p u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu} = (p + \rho) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \\ &= \left(p - \frac{A}{p}\right) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.21)$$

ottenendo così l'equazione differenziale

$$2X \frac{\partial p}{\partial X} = p - \frac{A}{p} \quad (2.22)$$

o equivalentemente

$$2X \frac{\partial \mathcal{L}(X)}{\partial X} = \mathcal{L}(X) - \frac{A}{\mathcal{L}(X)} \quad (2.23)$$

Risolvendo quest'ultima si trova la seguente espressione per $\mathcal{L}(X)$

$$\mathcal{L}(X) = \sqrt{A + e^{2c_1} X}$$

con c_1 costante di integrazione.

I modelli di questo tipo proposti in letteratura presentano tuttavia problematiche non indifferenti a seconda del valore dei parametri: non formano *cluster*, presentano instabilità, o sono caratterizzati da velocità del suono divergente [5].

Entrambe le lagrangiane ottenute non dipendono dal parametro B , e sono quindi conseguenze solamente dell'equazione di stato del gas. Le soluzioni dei due modelli sopra descritte differiscono non banalmente, descrivendo due dinamiche significativamente diverse dello stesso gas con la stessa equazione di stato. Questo succede perchè si possono avere azioni differenti che danno lo stesso tensore energia impulso $\mathcal{T}_{\mu\nu}$, e quindi la stessa equazione di stato, a livello medio, ma divergono in generale. Le due lagrangiane descrivono modelli diversi che convergono però nella predizione di quella che è l'equazione di stato. A priori quindi non si può preferire un metodo all'altro: il modello di k -essenza descrive un fluido perfetto, mentre quello di quintessenza descrive un campo scalare, che si comporta a livello medio come un fluido perfetto.

È necessario tuttavia evidenziare come la corrispondenza tra fluido e campo scalare è estremamente precaria: si ottengono soluzioni identiche solo in caso che determinate condizioni iniziali siano specificate. Se ci si allontana da queste condizioni, la dinamica del modello del campo scalare può variare molto da quella del corrispondente modello di fluido perfetto. [12] È necessario perciò analizzare la stabilità delle traiettorie del modello del campo scalare con potenziale (2.16) rispetto alle traiettorie del modello del gas di Chaplygin come fluido perfetto.

2.3 Stabilità

Seguendo il ragionamento proposto in [12] si introduce il parametro x definito come:

$$x = \rho p + A \quad (2.24)$$

che è identicamente nullo per il modello del gas di Chaplygin; questa identità viene banalmente dedotta dall'equazione di stato (2.1).

Questo parametro misura con approssimazione lineare, cioè al prim'ordine del parametro, la deviazione della traiettoria del modello in considerazione da quella del fluido perfetto. Verrà quindi studiata l'evoluzione temporale di questo parametro intorno alla traiettoria del fluido perfetto.

Riscrivendo le equazioni di Friedmann (1.4) per il modello caratterizzato dal potenziale (2.16) con curvatura spaziale nulla, si ottiene, come si era già visto:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \rho = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \quad (2.25)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \quad (2.26)$$

Sostituendo queste espressioni nella definizione del parametro x in (2.24) si ottiene:

$$x = \frac{\dot{\varphi}^4}{4} - V(\varphi)^2 + A$$

e la sua derivata temporale risulta:

$$\dot{x} = \ddot{\varphi}\dot{\varphi}^3 - 2VV'\dot{\varphi} \quad (2.27)$$

Per continuare lo studio si introduce l'equazione di Klein-Gordon:

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} + V' = 0$$

dove $V' = \frac{dV}{d\varphi}$. Esplicitando $\ddot{\varphi}$ si ottiene

$$\ddot{\varphi} = -3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} - V' = -3\sqrt{\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V}\dot{\varphi} - V' \quad (2.28)$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dall'equazione di Friedman (2.2). Sostituendo (2.28) in (2.27) si trova

$$\dot{x} = -3\dot{\varphi}^4\sqrt{\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V} - \dot{\varphi}^3V' - 2VV'\dot{\varphi} \quad (2.29)$$

Si può così scrivere la derivata temporale del campo scalare come [12]:

$$\dot{\varphi} = -\sqrt{2}(V^2 - A + x)^{\frac{1}{4}} = -\sqrt{2}\left(\frac{A}{4}\tanh^2(3\varphi) + x\right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.30)$$

Sostituendo quindi quest'espressione e la forma esplicita del potenziale (2.16) nell'equazione (2.29) si ottiene un'espressione per la derivata temporale del parametro x in funzione del campo φ e del parametro x :

$$\begin{aligned} \dot{x} = & -3(A\tanh^2(3\varphi) + 4x)\left[\frac{1}{2}\sqrt{A}\left(\cosh(3\varphi) + \frac{1}{\cosh(3\varphi)}\right)\right. \\ & \left. + \left(\frac{A}{4}\tanh^2(3\varphi) + x\right)^{1/2}\right]^{1/2} \\ & - 3\sqrt{2A}\frac{\sinh^3(3\varphi)}{\cosh^3(3\varphi)}\left(\frac{A}{4}\tanh^2(3\varphi) + x\right)^{3/4} \\ & + \frac{3\sqrt{2A}}{2}\frac{\sinh^3(3\varphi)}{\cosh^2(3\varphi)}\left(\cosh(3\varphi) + \frac{1}{\cosh(3\varphi)}\right) \\ & \cdot \left(\frac{A}{4}\tanh^2(3\varphi) + x\right)^{1/4} \end{aligned}$$

Questa relazione si semplifica considerando il termine principale dell'espansione intorno a $x = 0$, cioè trascurando i termini di ordine superiore al primo:

$$\dot{x} = -\frac{3A^{1/4}(5\sinh^2(3\varphi) + 6)}{2(\cosh(3\varphi))^{3/2}}x + o(x) \quad (2.31)$$

Il valore negativo del coefficiente del termine lineare in x dimostra la stabilità delle traiettorie del gas di Chaplygin derivanti dal modello del campo scalare.

Si va successivamente ad analizzare la convergenza delle traiettorie del campo scalare con la soluzione $x = 0$ del gas di Chaplygin.

Per quest'ultimo il valore del parametro di Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$ risulta:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = A^{\frac{1}{4}}\sqrt{\cosh(3\varphi)} \quad (2.32)$$

Allora, denotando γ il coefficiente lineare dell'equazione che descrive la derivata temporale del parametro x :

$$\dot{x} = -\gamma x + o(x) \quad (2.33)$$

si trova la seguente relazione con il parametro di Hubble:

$$\frac{\gamma}{H} = \frac{\gamma a}{\dot{a}} = \frac{3}{2} \left(5 + \frac{1}{\cosh^2(3\varphi)} \right) \quad (2.34)$$

da cui, calcolando il valore numerico di questa frazione tra i due estremi del coseno iperbolico, si trovano i seguenti limiti:

$$7.5 \leq \frac{\gamma}{H} \leq 9 \quad (2.35)$$

Il comportamento tipico del gas di Chaplygin è ottenuto facilmente per

$$|x| \lesssim A \quad (2.36)$$

Si è così mostrato che il modello del campo scalare per descrivere il gas di Chaplygin non presenta instabilità rilevanti.

Ricapitolando, si è trovato che i modelli di k-essenza del gas di Chaplygin non riescono a descrivere esattamente il comportamento di un fluido che unifica energia e materia oscura, mentre, sebbene riproducano tale comportamento senza presentare instabilità, i modelli di quintessenza inevitabilmente portano a una velocità del suono $v_s^2 = 1$, non soddisfacendo quindi la richiesta di velocità del suono subluminali [4].

Sono inoltre significative le problematiche che tale modello presenta con le perturbazioni del fondo cosmico: analisi hanno dimostrato che il modello ha una funzione di trasferimento errata per perturbazioni di materia.

Tuttavia l'idea di unificare energia e materia oscura rimane valida e può essere attuata attraverso altri modelli. Il gas di Chaplygin è un modello troppo semplice per descrivere l'universo reale, non perchè sbagliato, ma perchè incompleto.

Nei prossimi capitoli si tratterà quindi di un modello che estende quello appena studiato, complicando l'equazione di stato.

Capitolo 3

Gas di Chaplignyn generalizzato

Il modello CG (Chapligyn Gas) si può generalizzare includendo un ulteriore parametro α nella definizione della sua equazione di stato [9]:

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha} \quad (3.1)$$

Tale generalizzazione produce una evoluzione simile al modello classico: da polvere a costante cosmologica con un'epoca intermedia che si può vedere come una mescolanza del comportamento della costante cosmologica e di un fluido [14].

Per $0 \leq \alpha \leq 1$, la velocità del suono

$$v_s^2 = \frac{dp}{d\rho} = -\alpha \frac{p}{\rho^{\alpha+1}} = \alpha \frac{A}{\rho^{2\alpha+1}} \quad (3.2)$$

risulta essere $v_s^2 \geq 0$ garantendo quindi la stabilità classica, e $v_s^2 \leq 1$, minore quindi della velocità della luce [9].

I due ragionamenti proposti nel capitolo precedente per studiare il comportamento del modello del gas di Chaplygin si possono estendere al caso generico.

3.1 Campo salare

Sfruttando il ragionamento del capitolo precedente, si parte imponendo una lagrangiana canonica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) \quad (3.3)$$

Si utilizza la legge di conservazione per i fluidi:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (3.4)$$

da cui si riesce ad esprimere la densità in funzione del fattore di scala a . [3]

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) = \left(A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (3.5)$$

$$p = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) = -\frac{A}{\rho^\alpha} = -\frac{A}{\left(A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} \quad (3.6)$$

Si può così trovare il potenziale cercato:

$$V = \frac{\rho^{1+\alpha} + A}{2\rho^\alpha} = \frac{1}{2} \left(\psi^{2/\alpha} + \frac{A}{\psi^2} \right) \quad (3.7)$$

dove

$$\psi \equiv B^{-(1-\alpha/1+\alpha)} a^{3(1-\alpha)} \varphi^2 \quad (3.8)$$

3.2 Fluido perfetto

Risolvendo l'equazione (2.23) anche per il gas di Chaplygin generalizzato una possibile soluzione è invece la seguente lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \left((-1)^{-\alpha} \left(A + X^{\alpha+1} e^{(\alpha+1)c_1} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \quad (3.9)$$

In [9] è stata proposta una lagrangiana che estende le possibili lagrangiane per il gas di Chaplygin generalizzato:

$$\mathcal{L} = -\rho_\Lambda \sqrt{(1 - (2X)^\beta)^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}} \quad (3.10)$$

dove β è un parametro positivo che varia a seconda del modello considerato, ρ_Λ è una costante di densità di energia positiva, e $0 \leq 2X \leq 1$.

Sostituendo tale lagrangiana nelle definizioni per pressione e densità date in (2.20) si ottiene

$$\begin{aligned} p &= -\rho_\Lambda \sqrt{(1 - (2X)^\beta)^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}} \\ \rho &= \rho_\Lambda \left[1 + (2X)^\beta \left(\beta \frac{2\alpha}{1+\alpha} - 1 \right) \right] (1 - (2X)^\beta)^{-\frac{1}{1+\alpha}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Definendo il parametro w come $w := \frac{p}{\rho}$, si trova una sua espressione in funzione del termine cinetico X :

$$w = \frac{p}{\rho} = -\frac{1 - (2X)^\beta}{1 + (2X)^\beta \left(\beta \frac{2\alpha}{1+\alpha} - 1 \right)} \quad (3.12)$$

Tale parametro è quindi limitato: poichè $0 \leq 2X \leq 1$ allora anche $0 \leq w \leq 1$.

La velocità del suono risulta

$$v_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \alpha \frac{1 - (2X)^\beta}{1 + (1 + \alpha - \alpha(2X)^\beta) \left(\beta \frac{2\alpha}{1+\alpha} - 1 \right)} \quad (3.13)$$

Per $\beta \geq \frac{1}{2}$ si ha $v_s^2 \geq 0$ e $v_s^2(X)$ è una funzione monotona decrescente, con un massimo per $X = 0$: $v_{s,max}^2 = \frac{1}{2\beta-1}$.

La richiesta $v_s^2 \leq 1$ è invece soddisfatta per $\beta \geq 1$, per cui la condizione di velocità del suono minore della velocità della luce sono soddisfatte da questi modelli per $\beta \geq 1$ [9].

Riscrivendo l'equazione (3.11) come

$$\rho = \rho_\Lambda \left\{ 1 + \left[1 - \left(-\frac{p}{\rho_\Lambda} \right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \right] \left[\beta \frac{2\alpha}{1+\alpha} - 1 \right] \right\} \left(-\frac{p}{\rho_\Lambda} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3.14)$$

si vede subito che per ritrovare l'equazione di stato del gas di Chaplygin generico bisogna imporre

$$\beta = \frac{1 + \alpha}{2\alpha} \quad (3.15)$$

ottenendo così

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha}, \quad A = \rho_\Lambda^{1+\alpha}$$

Graficando w e v_s^2 in funzione della densità ρ per diversi β tenendo α fissato si trovano le figure 3.1 Si possono osservare, guardando le figure riportate determinate proprietà. Nel grafico mostrato in alto si nota come il parametro w passa dal valore nullo per $\rho \gg \rho_\Lambda$, cioè per densità elevate si trova $p = cost$, caratteristica della materia, a $w = -1$, cioè $p = -\rho$ per $\rho \ll \rho_\Lambda$, caratteristica dell'energia oscura. Nel grafico riportato in basso invece si può osservare la variazione della velocità. Si osserva che v_s^2 risulta essere, per $\beta = 0.5, 1, 2$, una funzione di p monotona decrescente.

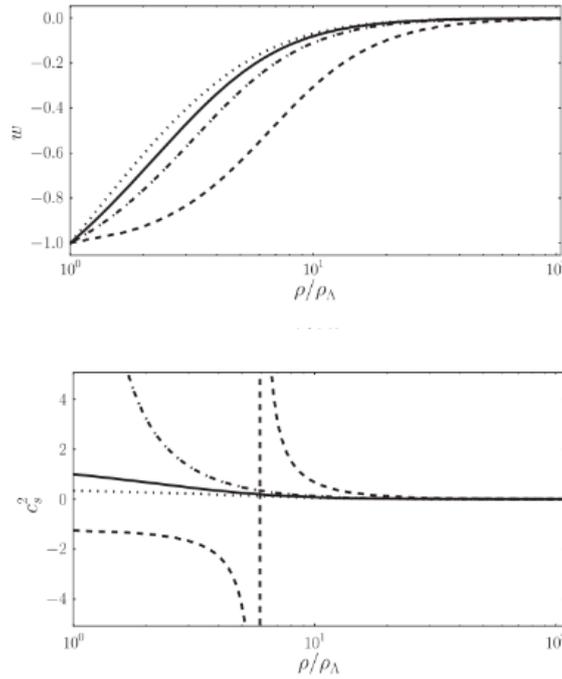


Figura 3.1: Il parametro w (sopra) e la velocità del suono v_s^2 (figura in basso) in funzione della densità ρ a variare del parametro β : per $\beta = (1 + \alpha)/2\alpha$ linea continua, per $\beta = 0.1$ linea tratteggiata, per $\beta = 0.5$ linea tratteggiata e a puntini, per $\beta = 2$ linea a puntini.

Successivamente si dimostra come nel regime non relativistico vale sempre l'equazione di stato del gas di Chaplygin generalizzato, indipendentemente dal valore di β . Si considera un regime non relativistico, con $2X \sim 1$, così la relazione (3.10) diventa $\mathcal{L} = p \sim 0$. Si sviluppa quindi la lagrangiana attorno a $1 - 2X \sim 0$, ottenendo

$$\mathcal{L} = -\rho_\Lambda \beta^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \sqrt{(1 - 2X)^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}} \quad (3.16)$$

Utilizzando le definizioni per pressione e densità date in equazione (2.20) si trova la seguente relazione

$$\frac{\rho}{\rho_\Lambda} = \left(-\frac{p}{\rho_\Lambda}\right) \left(\frac{2\alpha}{1+\alpha} - 1\right) + \beta \frac{2\alpha}{1+\alpha} \left(-\frac{p}{\rho_\Lambda}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (3.17)$$

Poichè in un regime non relativistico $p \sim 0$ il primo termine si può trascurare, trovando l'equazione di stato

$$p = -\frac{\rho_\Lambda^{1+\alpha} \left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\beta\right)^\alpha}{\rho^\alpha} = -\frac{A}{\rho^\alpha} \quad (3.18)$$

con $A = \rho_\Lambda^{1+\alpha} \left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\beta\right)^\alpha$.

L'equazione di stato del gas di Chaplygin generalizzato viene quindi recuperata in un regime non relativistico per qualsiasi $\beta > 0$.

Si è quindi mostrato che in un regime non relativistico (bassa densità) questi modelli presentino l'equazione di stato caratteristica del gas di Chaplygin generalizzato, e che si avvicinano asintoticamente, in un regime relativistico (densità elevata) alla costante cosmologica.

Si può così affermare che il gas di Chaplygin generalizzato è un modello valido per descrivere energia e materia oscura.

3.3 Effetto ISW

È stato spiegato come sia necessaria una velocità del suono ridotta affinché ci sia la possibilità per il fluido di creare le LSS. Tuttavia esiste anche un motivo ulteriore per richiedere una limitata velocità

del suono: deve infatti essere in grado di riprodurre le anisotropie della radiazione cosmica di fondo. La presenza di una velocità del suono v_s^2 non nulla può infatti modificare l'evoluzione del potenziale gravitazionale, producendo un effetto ISW (*Integrated Sachs Wolfe*): è un fenomeno della radiazione cosmica di fondo, che causa irregolarità nel fondo cosmico. Viene quindi studiato il caso del gas di Chaplygin generalizzato, paragonandolo a quello del modello standard. Per $\alpha < 10^{-4}$ l'effetto è trascurabile. Per $10^{-4} < \alpha \leq 5 \times 10^{-3}$ la velocità del suono $v_s^2 = -\alpha w$ è esigua e il fondo cosmico della storia dell'espansione dell'universo risulta simile a quello del modello standard. Per $6 \times 10^{-3} < \alpha \leq 1$ è prodotto un forte effetto ISW. Per $\alpha > 1$ si trova che l'effetto ISW è trascurabile, tuttavia non vengono presi in considerazione poichè studiando le fasi descritte da questi modelli si trova che la transizione da una fase in cui l'universo è dominato da materia oscura a una fase in cui è dominato dalla costante cosmologica avviene in un passato troppo recente, mentre è verificato che essa è avvenuta in un passato lontano.

Perciò si conclude che dev'essere $\alpha < 10^{-4}$.

Capitolo 4

Analisi della Lagrangiana

La lagrangiana trovata in (3.10) risulta un'estensione di quella che caratterizza il modello di Dirac Born Infeld. È una forma di Lagrangiana non rinormalizzabile, e assolutamente non canonica: non presenta una dipendenza diretta dal termine cinetico X [7]. Questo è necessario per la presenza di materia oscura.

Si può dimostrare, seguendo il ragionamento proposto in [18], come un campo scalare non canonico unifici materia e energia oscura. Si considera una generica lagrangiana non canonica per descrivere il campo φ :

$$\mathcal{L}(X, \varphi) = X^\alpha - V(\varphi) \quad (4.1)$$

La velocità del suono $v_s^2 = \frac{1}{2\alpha-1}$ decresce all'aumentare di α , il che assicura la possibilità del campo di formare *cluster*.

L'equazione del moto risulta essere

$$\ddot{\varphi} + \frac{3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi}}{2\alpha-1} + \left(\frac{V'(\varphi)}{\alpha(2\alpha-1)} \right) \left(\frac{2M^4}{\dot{\varphi}^2} \right)^{\alpha-1} = 0 \quad (4.2)$$

La pressione e la densità associate a questo campo risultano

$$\begin{aligned} p_\varphi &= X^\alpha - V(\varphi) \\ \rho_\varphi &= (2\alpha-1)X^\alpha + V(\varphi) \end{aligned} \quad (4.3)$$

È facilmente verificabile come queste equazioni si riducano alla forma canonica nel caso $\alpha = 1$.

La prima equazione di Friedman (1.4), in una geometria piatta con curvatura nulla, si riduce, come si è già ampiamente discusso, a

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_\varphi + \rho_r + \rho_b) = \rho_\varphi + \rho_r + \rho_b \quad (4.4)$$

Dove l'ultimo passaggio è giustificato dalla scelta $\frac{8\pi G}{3} = 1$, con ρ_r termine di radiazione e ρ_b il termine barionico. Per potenziali con $V' \sim 0$ si trova [22] che il terzo termine dell'equazione del moto (4.2) è trascurabile. Riformulando quindi tale equazione risulta

$$\ddot{\varphi} \simeq -\frac{3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi}}{2\alpha-1} \quad (4.5)$$

da cui segue

$$\dot{\varphi} \propto a^{-\frac{3}{2\alpha-1}} \quad (4.6)$$

Sostituendo quanto appena trovato nella definizione del termine cinetico si trova:

$$X = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \propto \frac{1}{2}a^{-\frac{6}{2\alpha-1}} \quad (4.7)$$

e quindi la densità associata alla parte cinetica del campo risulta

$$\rho_X = (2\alpha - 1)X^\alpha \propto a^{-\frac{6\alpha}{2\alpha-1}} \quad (4.8)$$

Usando il parametro w_X delle definizioni (1.5) si trova che

$$w_x = \frac{1}{2\alpha - 1} \simeq 0 \quad \text{per } \alpha \gg 1 \quad (4.9)$$

Si conclude quindi che, per α elevati e potenziali circa costanti, il termine cinetico di un campo scalare non canonico ha un comportamento tipico della materia oscura [22].

Tale risultato si ottiene considerando un potenziale circa costante, in modo da poter annullare il terzo termine dell'equazione del moto (4.2). Viene dimostrato tuttavia in [16] che tale termine può essere trascurato anche considerando un potenziale che decresce sufficientemente rapido.

Si vede facilmente che, affinché il terzo termine di (4.2) sia molto più piccolo del secondo, la derivata del potenziale dev'essere la seguente:

$$V' \ll \left(\frac{2\alpha - 1}{2\alpha} \right) \frac{3\frac{\dot{a}}{a}\rho_x}{\dot{\varphi}} \sim \frac{3\frac{\dot{a}}{a}\rho_x}{\dot{\varphi}} \quad (4.10)$$

dove l'ultimo passaggio vale per α elevati.

Questa equazione ci rassicura che le variazioni del potenziale possono essere elevate per ρ_X e $\frac{\dot{a}}{a}$ elevati, cioè nel periodo iniziale, mentre il potenziale dev'essere circa costante più avanti si va nel tempo, cioè quando $\frac{\dot{a}}{a}$ e ρ_X si abbassano, fatto che permette al potenziale $V(\varphi)$ di essere associato all'energia oscura in tempi elevati e possa essere causa dell'accelerazione cosmica.

Come per il gas di Chaplygin generico, quindi con $\alpha = 1$, si sono trovate due lagrangiane diverse a seconda del ragionamento proposto. La differenza con la lagrangiana trovata nel caso in cui si parte considerando un campo scalare è principalmente la mancanza di un termine proporzionale a φ . Questa è una caratteristica tipica dei fluidi perfetti: la descrizione del loro moto dipende dalla derivata del campo scalare e non dal campo scalare stesso. Quest'affermazione verrà giustificata nella sezione successiva.

4.1 Lagrangiana di un fluido perfetto

Riprendendo il ragionamento proposto in [17] si cerca di giustificare la mancanza di termini proporzionali al campo scalare nella lagrangiana di un fluido perfetto. Partendo dalla definizione di tensore di un fluido perfetto data in (2.19)

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu - ph_{\mu\nu} \quad (4.11)$$

dove $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu$ è un proiettore tensoriale ortogonale a u_μ . Il moto del fluido può essere descritto tramite il quadrimomento delle particelle che lo compongono:

$$C^\mu = wu^\mu \quad (4.12)$$

dove w è l'entalpia specifica del fluido per particella: $w = \frac{p+\rho}{n}$ dove n è la densità di particelle. Ricordando che il tensore energia impulso è la derivata funzionale rispetto a $g_{\mu\nu}$ dell'azione, cioè:

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^\varphi = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}_\varphi}{\delta g^{\mu\nu}}$$

si considera un fluido irrotazionale la cui azione dipende solo da $g_{\mu\nu}$ e dal campo scalare φ

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(g_{\mu\nu}, \varphi) \quad (4.13)$$

Utilizzando una virgola per denotare la derivata parziale, la vorticità di un fluido $\Omega_{\mu\nu}$ è definita nel seguente modo:

$$\Omega_{\mu\nu} = C_{\nu,\mu} - C_{\mu,\nu}$$

Un fluido caratterizzato da vorticità nulla è detto irrotazionale. Questa proprietà in una varietà semplicemente connessa si traduce nella scrittura del quadripotenziale C_μ come

$$C_\mu = wu_\mu = \varphi_{,\mu} \quad (4.14)$$

L'entalpia specifica del fluido si riscrive quindi nel seguente modo:

$$w = (g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu})^{\frac{1}{2}} \quad (4.15)$$

Poichè l'azione è invariante sotto trasformazioni infinitesime di coordinate

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon \xi^\mu(x), \quad |\varepsilon| \ll 1 \quad (4.16)$$

si ritrova la seguente identità:

$$\int d^4x g^{\frac{1}{2}}(x) \left[\frac{1}{2} \mathcal{T}_{\mu\nu}(x) \delta g^{\mu\nu}(x) - g^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi(x)} \delta \varphi(x) \right] = 0 \quad (4.17)$$

dove si identificano, utilizzando la notazione con punto e virgola per indicare a derivata covariante

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu}(x) &= -\varepsilon \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}(x) = -2\varepsilon \xi_{(\mu;\nu)} \equiv -\varepsilon (\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}) \\ \delta \phi(x) &= -\varepsilon \mathcal{L}_\xi \phi(x) = -\varepsilon \varphi_{,\nu} \xi^\nu \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sostituendo (4.18) nell'identità (4.17) e dopo aver derivato per parti si ritrova

$$\int d^4x g^{\frac{1}{2}}(x) \left[\mathcal{T}_{\nu;\mu}^\mu(x) + g^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi(x)} \varphi_{,\nu}(x) \right] \xi^\nu(x) = 0 \quad (4.19)$$

Affinchè questa relazione sia valida per qualunque $\xi^\nu(x)$ scelto, deve annullarsi il contenuto della parentesi quadra, cioè:

$$\mathcal{T}_{\nu;\mu}^\mu(x) = -g^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi(x)} \varphi_{,\nu}(x) \quad (4.20)$$

Per il teorema di Noether applicato alla trasformazione, poichè

$$\left. \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi} \right|_{\varphi_0} = 0 \quad (4.21)$$

è l'equazione di Eulero Lagrange per il campo φ , il tensore energia impulso ha quadridivergenza nulla per quei fluidi che soddisfano l'equazione (4.21).

Proiettando (4.20) lungo u_μ (4.22) e perpendicolarmente ad esso (4.23) si ottengono le seguenti uguaglianze

$$w^{-1} u^\nu \mathcal{T}_{\nu;\mu}^\mu = -g^{-\frac{1}{2}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi} \quad (4.22)$$

$$h^{\rho\nu} \mathcal{T}_{\nu;\mu}^\mu = 0 \quad (4.23)$$

Utilizzando il tensore energia impulso per un fluido perfetto (4.11) si ottiene:

$$-g^{-1} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi} = (nw^\mu)_{;\mu} + w^{-1} (nw_{,\nu} - p_{,\nu}) u^\nu \quad (4.24)$$

Denotando con σ l'entropia specifica e T la temperatura assoluta, si può scrivere

$$p_{,\nu} = \left(\frac{\partial p}{\partial w} \right)_{\sigma=\text{const.}} w_{,\nu} + \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \right)_{w=\text{const.}} \sigma_{,\nu} = nw_{,\nu} - nT\sigma_{,\nu} \quad (4.25)$$

e sostituendolo nell'equazione (4.24) si ottiene

$$-g^{-\frac{1}{2}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi} = (nu^\mu)_{;\mu} + \frac{nT}{w} \dot{\sigma} \quad (4.26)$$

dove il punto sopra a σ denota una derivata convettiva lungo u_μ : ad esempio per uno scalare f e per un quadrivettore v^ν , utilizzando τ per definire il tempo proprio dell'osservatore,

$$\dot{f} \equiv \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}\tau} f \equiv f_{,\mu} u^\mu, \quad \dot{v}^\nu \equiv \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}\tau} v^\nu \equiv v^\nu_{;\mu} u^\mu \quad (4.27)$$

Si espande ora (4.23) tramite la definizione di tensore energia impulso per un fluido (4.11) ottenendo

$$0 = (p + \rho) h^{\rho\nu} \dot{u}_\nu - h^{\rho\nu} p_{,\nu} \quad (4.28)$$

o equivalentemente

$$(p + \rho) h^{\rho\nu} \dot{u}_\nu = h^{\rho\nu} p_{,\nu} \quad (4.29)$$

che è nota come l'equazione di Eulero per l'idrodinamica relativistica, o equazione di conservazione del momento.

Utilizzando (4.25) e ricordando la definizione di quadrimomento (4.14) e di vorticità si può scrivere l'equazione appena trovata con la seguente uguaglianza:

$$\Omega_{\nu\rho} u^\nu = -T h_{\rho\nu} \sigma^{\nu} \quad (4.30)$$

Poichè stiamo prendendo in considerazione un fluido irrotazionale, caratterizzato da vorticità nulla, il termine a sinistra dell'uguaglianza svanisce, e l'equazione è soddisfatta quando σ risulta costante. Se questa condizione è soddisfatta l'equazione (4.24) viene riscritta in modo più compatto come:

$$-g^{-\frac{1}{2}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi} = (nu^\mu)_{;\mu} \quad (4.31)$$

Risolviendo la precedente equazione si è in grado di derivare la forma dell'azione \mathcal{S} integrando per parti:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \int d^4x g^{\frac{1}{2}} (nu^\mu)_{;\mu} \delta \varphi \\ &= \int d^4x g^{\frac{1}{2}} nu^\mu (\delta \varphi)_{,\mu} \\ &= \int d^4x g^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial p}{\partial w} \right)_{\sigma=\text{const.}} w^{-1} \varphi^{\mu}_{; \mu} \delta(\varphi_{,\mu}) \end{aligned}$$

È chiaro quindi, come volevamo dimostrare, che l'azione di un fluido perfetto dipende solo dal gradiente del campo scalare e non dal campo stesso.

Inoltre, esplicitando \mathcal{L} si trova

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}} = \frac{dp}{dw} w^{-1} \varphi^{\mu}_{; \mu} \quad (4.32)$$

Ricordando inoltre la definizione di entalpia (4.15), si può scrivere

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi_{,\mu}} = w^{-1} \varphi^{\mu}_{; \mu} \quad (4.33)$$

Si può così riscrivere (4.32) nel seguente modo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}} = \frac{dp}{dw} \frac{\partial w}{\partial \varphi_{,\mu}} = \frac{\partial p}{\partial \varphi_{,\mu}} \quad (4.34)$$

Integrando quest'ultima relazione si ottiene:

$$\mathcal{L}(\varphi) = p(\varphi) = n (g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu})^{\frac{1}{2}} - \rho \quad (4.35)$$

Si è così dimostrato come sia possibile, assumendo l'idealità del fluido, trovare solamente lagrangiane che dipendono dalla derivata del campo scalare, e non dal campo stesso.

Ritornando al caso del gas di Chaplygin questo giustifica la sostanziale differenza dei due casi: partire dall'assunzione che il gas di Chaplygin generalizzato sia un fluido perfetto restringe le lagrangiane possibili. Il comportamento di un mezzo continuo è infatti caratterizzato solamente da derivate di campi scalare, ma non da campi scalari stessi. La differenza tra le due lagrangiane ottenute è che una è stata trovata ipotizzando di avere un fluido, l'altra partendo da un campo scalare. A priori non si può prediligere una rispetto all'altra, poichè la funzione di stato del fluido che descrivono è la stessa.

Capitolo 5

Conclusioni

Il modello più accreditato per descrivere l'universo è il modello standard Λ CDM (Λ Cold Dark Matter), che identifica tre componenti dell'universo: la materia oscura, formata da particelle poco interagenti e per questo definita "fredda" (*cold*), la costante cosmologica (Λ) associata all'energia oscura, e la materia ordinaria. Si è visto tuttavia come questo modello presenti alcune lacune, soprattutto sulla natura e sul comportamento delle componenti oscure.

Per questo motivo si amplia la ricerca di un modello che possa descrivere l'universo, in grado di riprodurre i fenomeni previsti dal modello standard verificati sperimentalmente. Un tipo di modelli proposti sono i modelli UDM: *Unified Dark Model*, che identificano l'energia oscura e la materia oscura come due aspetti diversi dello stesso fluido, che si comporterebbe a seconda delle condizioni come una o l'altra componente. Il vantaggio di tali modelli consiste nella possibilità di descrivere l'accelerazione cosmica e la formazione di LSS attraverso un unico elemento.

In questa tesi è stato approfondito il gas di Chaplygin, un fluido perfetto caratterizzato dalla seguente equazione di stato:

$$p = -\frac{A}{\rho} \quad (5.1)$$

Questo fluido è caratterizzato da un comportamento corrispondente a quello della materia fredda oscura (pressione nulla) nei tempi iniziali, mentre per tempi lunghi la sua equazione di stato va ad assomigliare a quello della costante cosmologica Λ ($p \sim -\rho$). È stato studiato come una cosmologia di Chaplygin può essere vista come un susseguirsi di diverse fasi dell'universo: da un universo dominato da polvere a una fase che descrive un universo la cui dinamica è dominata dalla costante cosmologica. In tal modo si è accertata la validità di tale modello. Si è dunque cercata la lagrangiana del modello per poter descrivere il comportamento di tale gas, ottenendo due risultati differenti a seconda del ragionamento seguito. Si è trovata una lagrangiana di quintessenza partendo dalla descrizione del fluido da un campo scalare, mentre si è trovata una lagrangiana di quartessenza partendo dalla definizione di fluido perfetto. Le due dinamiche proposte descrivono modelli diversi che convergono nella predizione di quella che è l'equazione di stato. Si è tuttavia evidenziato come la corrispondenza tra fluido e campo scalare sia fortemente dipendente dalle condizioni iniziali, e si è quindi studiata la stabilità delle traiettorie del modello del campo scalare, trovando che esse convergono facilmente a quelle del fluido perfetto. Sono state espone tuttavia le problematiche di questo modello, concludendo che esso è incompleto, troppo semplificato per poter descrivere la complessa dinamica dell'universo.

Per questo si è esteso il modello complicando l'equazione di stato, aggiungendo un parametro nel seguente modo:

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha} \quad (5.2)$$

Tale generalizzazione produce un'evoluzione simile al modello classico da polvere a costante cosmologica. Si utilizzano i ragionamenti proposti per il gas di Chaplygin anche per il modello esteso trovando anche in questo caso due lagrangiane possibili, partendo da un campo scalare una lagrangiana canonica, partendo da un fluido perfetto una lagrangiana non canonica. Si sono poi trovati dei valori di α per cui il modello riproduce le anisotropie del fondo cosmico.

Si è quindi studiata la lagrangiana non canonica, accertandosi che sia una possibile descrizione dell'evoluzione dell'universo. Si è poi analizzata la lagrangiana di un fluido perfetto, dimostrando che l'unica dipendenza possibile sia da derivate del campo scalare, e non dal campo scalare stesso. Questa è quindi la differenza tra le lagrangiane trovate attraverso i due procedimenti proposti. A priori non si può prediligere una lagrangiana rispetto all'altra, poichè entrambe descrivono il comportamento di un fluido con la medesima equazione di stato.

Bibliografia

- [1] Y. Baryshev. Conceptual problems of the standard cosmological model. 2005. doi: 10.1063/1.2189119.
- [2] D. Baumann. *Cosmology, Part III Mathematical Tripos*. 2017.
- [3] M. C. Bento, O. Bertolami, and A. A. Sen. Generalized chaplygin gas, accelerated expansion and dark energy-matter unification. 2002. doi: 10.1103/PhysRevD.66.043507.
- [4] D. BERTACCA, S. MATARRESE, and M. PIETRONI. UNIFIED DARK MATTER IN SCALAR FIELD COSMOLOGIES. *Modern Physics Letters A*, 22(38):2893–2907, Dec. 2007. doi: 10.1142/s0217732307025893. URL <https://doi.org/10.1142/s0217732307025893>.
- [5] D. Bertacca, N. Bartolo, and S. Matarrese. Unified dark matter scalar field models. *Advances in Astronomy*, 2010:1–29, 2010. doi: 10.1155/2010/904379. URL <https://doi.org/10.1155/2010/904379>.
- [6] S. Bludman. What drives our accelerating universe?, 2007.
- [7] M. Born and L. Infeld. Foundations of the new field theory. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 144(852):425–451, Mar. 1934. doi: 10.1098/rspa.1934.0059. URL <https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0059>.
- [8] J. G. de Swart, G. Bertone, and J. van Dongen. How dark matter came to matter. *Nature Astronomy*, 1:0059, Mar. 2017. doi: 10.1038/s41550-017-0059.
- [9] V. Ferreira and P. Avelino. Extended family of generalized chaplygin gas models. *Physical Review D*, 98(4), Aug. 2018. doi: 10.1103/physrevd.98.043515. URL <https://doi.org/10.1103/physrevd.98.043515>.
- [10] G. Gamow. The Evolutionary Universe. *Scientific American*, 195:136–156, Sept. 1956. doi: 10.1038/scientificamerican0956-136.
- [11] V. Gorini, A. Y. Kamenshchik, and U. Moschella. Can the chaplygin gas be a plausible model for dark energy. 2003.
- [12] V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier, and A. Starobinsky. Stability properties of some perfect fluid cosmological models. *Physical Review D*, 72(10), Nov. 2005. doi: 10.1103/physrevd.72.103518. URL <https://doi.org/10.1103/physrevd.72.103518>.
- [13] E. Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1929.
- [14] A. Kamenshchik, U. Moschella, and V. Pasquier. An alternative to quintessence. *Physics Letters B*, 511(2-4):265–268, July 2001. doi: 10.1016/s0370-2693(01)00571-8. URL [https://doi.org/10.1016/s0370-2693\(01\)00571-8](https://doi.org/10.1016/s0370-2693(01)00571-8).
- [15] E. W. Kolb and M. S. Turner. The Early Universe. *Front. Phys.*, 69:1–547, 1990.
- [16] D. Li and R. J. Scherrer. Classifying the behavior of noncanonical quintessence. 2016. doi: 10.1103/PhysRevD.93.083509.

- [17] S. Matarrese. On the classical and quantum irrotational motions of a relativistic perfect fluid. i. classical theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 401(1820):53–66, 1985. ISSN 00804630. URL <http://www.jstor.org/stable/2397921>.
- [18] S. S. Mishra and V. Sahni. Unifying dark matter and dark energy with non-canonical scalars, 2018.
- [19] P. Peebles and B. Ratra. The cosmological constant and dark energy. *Reviews of Modern Physics*, 75, 2003.
- [20] M. Persic and P. Salucci. The baryon content of the universe. *mnras*, 258:14P–18P, Sept. 1992. doi: 10.1093/mnras/258.1.14P.
- [21] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, and J. Tonry. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *aj*, 116:1009–1038, Sept. 1998. doi: 10.1086/300499.
- [22] V. Sahni and A. A. Sen. A new recipe for λ cdm, 2015.
- [23] F. Zwicky. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica Physica Acta*, 6:110–127, 1933.