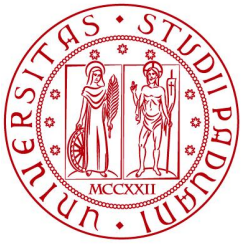


UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Pricing di opzioni con valutazione ESG a tempo discreto

Relatrice:

Prof.ssa Giorgia Callegaro

Laureanda: Beatrice Signori

Matricola: 2034796

Anno Accademico 2023/2024

13/12/2024

Indice

Introduzione **5**

1 Valutazione ESG **7**

2 Modelli binomiali per il pricing di opzioni ESG **11**
2.1 Presentazione del modello 11
2.2 Modello con rendimenti aritmetici 13
2.2.1 Limite al caso continuo 18
2.3 Modello con rendimenti logaritmici 19
2.3.1 Limite al caso continuo 24
2.4 ESG-valued option pricing 24
2.5 Condizione di non arbitraggio 26

3 Applicazione ai dati **27**
3.1 Dinamiche dei prezzi ESG 28
3.2 Stima dei parametri 33
3.3 Superfici di intensità ESG 35

A Risultati utili **39**
A.1 Probabilità 39
A.2 Finanza Matematica 40

B Codici Matlab **43**

Bibliografia **47**

Introduzione

Il tema principale di questa tesi è l'integrazione della valutazione ESG (Environmental, Social, Governance) nel pricing di opzioni a tempo discreto. Il pricing consiste nel definire un prezzo equo, ovvero che non perturbi il mercato e che eviti la possibilità di arbitraggi. Il rating ESG consente di valutare le imprese secondo criteri ambientali, sociali e di governance e sta acquisendo un'importanza crescente per aziende e investitori, sia per ragioni etiche che legate al miglioramento della performance finanziaria.
Il lavoro si sviluppa a partire dagli studi condotti da Yuan Hu, W. Brent Lindquist, e Svetlozar T. Rachev in [6].
Il Capitolo 1 fornisce una descrizione dei vari aspetti inerenti gli ESG scores e una panoramica sulle motivazioni, modalità e implicazioni del loro utilizzo.
Nel Capitolo 2 viene presentato un modello per il pricing di opzioni a tempo discreto che utilizza alberi binomiali ricombinanti. Il contesto riguarda opzioni Europee, in particolare opzioni Call (di acquisto), in mercati completi. Viene introdotto in questo modello il *parametro di intensità ESG* $\lambda \in [0, 1]$ che indica il peso relativo attribuito al "rendimento ESG", generato dagli ESG scores, rispetto a quello finanziario tradizionale.
L'elaborazione del modello con alberi binomiali riguarda il caso di rendimenti aritmetici $(S_{t+\Delta t} - S_t)/S_t$ e quindi compounding discreto (come $1 + r_f \Delta t$, dove r_f è il tasso risk-free), e il caso di rendimenti logaritmici $\ln(S_{t+dt}/S_t)$ e compounding continuo (come $e^{r_f \Delta t}$). In particolare analizziamo il comportamento di tali modelli quando si considera il limite al caso continuo, mostrando come l'utilizzo del compounding continuo per il nostro modello di mercato non sia compatibile con il Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing. Quando le operazioni finanziarie avvengono a tempo discreto, la condizione di non arbitraggio richiede quindi modelli per l'option pricing come quello con rendimenti aritmetici.
Nel Capitolo 3 viene esaminato l'impatto dell'integrazione del rating ESG sul prezzo delle opzioni. Al fine di questa analisi, il modello teorico illustrato nel Capitolo precedente viene applicato a dati reali di mercato. In questo modo, è possibile simulare un "prezzo ESG" ricavato a partire da una combinazione del rendimento finanziario tradizionale e degli ESG scores. Mediante l'uso di grafici

si rappresenta e analizza l'evoluzione di questo "prezzo ESG", per diversi valori del peso attribuito alla valutazione ESG. I grafici consentono inoltre un confronto con il prezzo usuale e uno studio degli effetti di punteggi più o meno buoni sull'andamento del prezzo ESG. L'ultima parte del Capitolo è dedicata alle *superfici di intensità ESG*, ottenute attraverso una stima dell'*intensità ESG* λ che minimizzi l'errore tra i prezzi teorici di un'opzione Call calcolati applicando il nostro modello e quelli reali di mercato. Tali superfici consentono di visualizzare l'*intensità ESG* λ in funzione della scadenza T della Call e del rapporto $M = K/S_T$ tra il suo strike K e il suo sottostante S.
Infine, si possono trovare in Appendice A alcune definizioni e nozioni utili. In Appendice B vengono riportati i codici in Matlab utilizzati per la realizzazione dei grafici e delle tabelle presenti in questo elaborato.

Capitolo 1

Valutazione ESG

Il rating ESG (Environmental, Social, Governance) rappresenta un indice di valutazione che descrive l'impatto ambientale, sociale e di governance di un'azienda o organizzazione. Permette quindi una comprensione della sostenibilità di un'impresa e della sua esposizione ai rischi legati a questi aspetti. Questo rating si basa su parametri collegati a tre principali ambiti:

- **Ambientale (Environmental)**: emissione di carbonio, gestione delle risorse idriche ed energetiche, rispetto della biodiversità, resilienza ai cambiamenti climatici, ecc.

- **Sociale (Social)**: inclusività, condizione dei lavoratori, sostegno alle comunità locali, diritti umani, salute e sicurezza

- **Governance**: diversità nella composizione del consiglio di amministrazione, contrasto alla corruzione, etica retributiva, trasparenza amministrativa.

Negli ultimi anni si è registrata una crescita esponenziale del numero di agenzie interessate a raccogliere e analizzare dati inerenti agli aspetti ESG. Si è passati da meno di 20 agli inizi degli anni '90 a più di 9000 nel 2016 [1]. Parallelamente, anche l'interesse da parte degli investitori verso i criteri ESG è cresciuto significativamente e molti di loro hanno iniziato a integrare queste informazioni nelle proprie decisioni.
Il termine SRI (Socially Responsible Investing) si riferisce a un insieme di strategie di investimento orientate al medio-lungo termine, che mirano a generare un impatto sociale e ambientale positivo. I firmatari dei PRI (Principles for Responsible Investment), che dichiarano l'impegno nell'incorporare i parametri ESG nelle strategie di investimento, rappresentano un chiaro esempio di questa tendenza. L'interesse verso l'SRI e i criteri ESG da parte degli investitori è guidato principalmente da due ragioni:

1. Motivi etici
2. Miglioramento della performance finanziaria.

A questo proposito, gli investitori vedono l'utilizzo delle informazioni ESG come un modo per massimizzare i profitti, interpretando un buon punteggio ESG come segnale di un futuro rendimento superiore. Secondo alcuni studi, sebbene le metodologie di valutazione ESG possano variare, la performance finanziaria legata ai criteri ESG risulta essere in linea o addirittura superiore rispetto a quella degli indici tradizionali [5]. Da un'analisi di più di 1000 studi pubblicati nel periodo tra il 2015 e il 2020 emerge che per il 58% di essi esiste una correlazione positiva tra gli ESG scores e una migliore performance finanziaria [12]. In particolare:

- ciò risulta più evidente su orizzonti temporali lunghi
- gli investimenti ESG sembrano fornire una maggiore protezione dalle conseguenze negative derivanti da crisi economiche o sociali
- le iniziative aziendali legate alla sostenibilità favoriscono una migliore performance finanziaria grazie a fattori come una maggiore innovazione e una gestione del rischio più efficace. Una buona governance può aumentare l'efficienza operativa e diminuire il rischio di comportamenti non etici, frodi e scandali.

Per molti investitori, l'attenzione ai criteri ESG negli investimenti permette di conciliare il profitto con i valori personali e avere un impatto positivo sulla società e sul pianeta. Le ragioni non strettamente economiche che sono alla base di questa scelta includono infatti la responsabilità etica, la sensibilità verso questioni ambientali e sociali e l'idea di poter influenzare positivamente il comportamento delle imprese. L'integrazione dei criteri ESG può anche migliorare la reputazione aziendale, contribuendo a una buona immagine pubblica.

Gli stili di investimento variano tra investitori diversi, i quali possono prendere in considerazione maggiormente alcuni aspetti ESG rispetto ad altri, in base alle proprie convinzioni e ai propri obiettivi. Di conseguenza, l'approccio agli investimenti ESG è eterogeneo e soggettivo.
Le principali modalità di utilizzo delle informazioni ESG negli investimenti includono:

- **screening**: selezione delle aziende con rating ESG elevati (*screening positivo*) ed esclusione di quelle con punteggi bassi o il cui comportamento non è in linea con i propri valori etici (*screening negativo*). Nel contesto di screening positivo, il termine *best in class* indica le aziende con i migliori punteggi all'interno del proprio settore.

- **portfolio overlay**: diversificazione del portafoglio, con strategie di copertura per massimizzare i rendimenti gestendo il rischio.
- **full integration**: integrazione sistematica dei parametri ESG in ogni fase del processo di investimento.
- **active ownership**: dialogo attivo tra investitore e impresa, esprime la volontà da parte di investitori e azionisti di esercitare la propria influenza e i propri diritti (come quello di voto in assemblea).

Le modalità adottate variano a seconda dell'investitore. Lo screening negativo, ad esempio, viene utilizzato principalmente per motivi etici, mentre la full integration punta a migliorare la performance finanziaria. Le aspettative per il futuro vedono una crescente importanza dello screening positivo e dell'active ownership, con politiche di investimento sempre più orientate a influenzare i cambiamenti all'interno delle aziende. Inoltre la rilevanza degli aspetti ESG può variare a seconda del contesto geografico e delle problematiche in esso presenti. Dai sondaggi [1] emerge una maggiore attenzione alla responsabilità etica da parte degli investitori europei rispetto a quelli americani.

Le metodologie per determinare gli ESG scores tengono conto di una serie di parametri per ciascuno dei tre aspetti essenziali. Solitamente i punteggi sono espressi in una scala numerica da 0 a 100 e più sono elevati migliore è la performance ESG. Un altro tipo di valutazione utilizza le lettere, da "AAA" per indicare le aziende leader a "CCC" per le più carenti [10]. Tuttavia, una delle principali criticità riguarda la mancanza di standardizzazione nei rating, che rende complesso il confronto tra i dati forniti da providers diversi. Inoltre il concetto stesso di sostenibilità è molto ampio e comprende vari temi ESG, risultando difficile da quantificare e definire in maniera univoca. Un altro aspetto da considerare è che le aziende più piccole dispongono di meno risorse da impiegare in questi ambiti ed è quindi più probabile che a ottenere punteggi più elevati siano le imprese di dimensione maggiore. Inoltre providers diversi attribuiscono un peso diverso a ciascuno dei pilastri ESG e il metodo di valutazione spesso non si focalizza abbastanza sulle specificità di ogni settore e sul tipo di prodotto o servizio offerto.

Rimane aperta la questione sulle scelte e modalità di utilizzo dei rating ESG, che riflettono una combinazione di motivazioni, strategie e stili soggettivi; il loro impatto sull'evoluzione dei prezzi delle opzioni finanziarie costituisce comunque un tema rilevante e sarà approfondito nei capitoli successivi.

Capitolo 2

Modelli binomiali per il pricing di opzioni ESG

2.1 Presentazione del modello

Andiamo a descrivere il contesto in cui studieremo il pricing di opzioni a tempo discreto tenendo conto degli ESG scores. Questi punteggi forniscono una valutazione della performance delle aziende in ambito ambientale, sociale e di governance. Sono utilizzati dagli investitori nelle proprie decisioni e possono rappresentare un incentivo per le imprese a migliorare le proprie pratiche.
Vediamo quali sono le implicazioni dal punto di vista finanziario della valutazione ESG, in particolare per quanto riguarda il pricing di opzioni.
Facciamo riferimento a un mercato discreto come quello descritto in Appendice A.2.
In particolare, il mercato che consideriamo è costituito da un titolo rischioso S, un titolo non rischioso B e un'opzione Call Europea C con S come sottostante, scadenza T, strike K e il cui payoff è $X = (S_T - K)^+$.
La dinamica del prezzo di S evolve secondo un modello discreto rappresentato da un albero binomiale ricombinante, nell'intervallo di tempo $[0, T]$. Suddividiamo tale intervallo in $n \in \{1, 2, ...\}$ subintervalli e indichiamo con $t_{n,k}$: $k = 0, \dots, n$, gli istanti di trading (estremi di ogni subintervallo), dove $0 = t_{n,o} < t_{n,1} < \dots < t_{n,n} = T$. Questa formulazione permette di prendere in esame un caso generale in cui, per ogni scelta di n intero, $\Delta t_{n,k} = t_{n,k} - t_{n,k-1}$ denota l'intervallo di tempo tra due istanti successivi. Nel caso usuale si considera $\Delta t_{n,k} \equiv \Delta t \equiv 1$ giorno, come vedremo anche nella parte di applicazione ai dati. In questo capitolo invece l'idea è di estendere il caso base in modo che la lunghezza $\Delta t_{n,k}$ degli n intervalli in cui si suddivide il periodo di tempo considerato $[0, T]$ dipenda dalla scelta dell'intero n (per esempio $\Delta t_{n,k} = T/n$). In questo modo è possibile analizzare il comporta-

mento del modello quando si considera il limite al caso continuo per $\Delta t_{n,k} \to 0^+$.

Esempio 1: chiariamo che con questa notazione l'indice n viene fissato all'inizio e serve a indicare il numero di intervalli in cui è suddiviso il periodo di tempo $[0, T]$. È l'indice k quello che varia, per esempio se $n = 2$ avremo che k assume i valori $k = 0, 1, 2$.

Esempio 2: consideriamo come periodo di tempo $[0, T]$ un anno, ovvero $T = 365$ giorni. Se fissiamo $n = 12$, gli istanti di trading $t_{12,k}$ si avranno per $k = 0, 1, \dots, 12$ con $\Delta t_{12,k} \approx 30$ giorni. Se fissiamo invece $n = 365$ allora $k = 0, 1, \dots, 365$ analogamente a prima, mentre in questo caso $\Delta t_{365,k} = 1$ giorno.

Siamo interessati a introdurre in questo modello la valutazione ESG. Per fare questo, definiamo il tasso con valutazione ESG come

$$r_{t_{n,k},\lambda} = \lambda e_{t_{n,k}} + (1 - \lambda) r_{t_{n,k},0}, \qquad r_{t_{n,k}} \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

dove

- $r_{t_{n,k},0} \equiv r_{t_{n,k},\lambda=0} > -1$ denota il rendimento finanziario tradizionale all'istante $t_{n,k}$ ed è uguale a $\frac{S_{t_{n,k+1}} - S_{t_{n,k}}}{S_{t_{n,k}}}$ nel caso aritmetico e a $\ln\left(\frac{S_{t_{n,k+1}}}{S_{t_{n,k}}}\right)$ in quello logaritmico
- $e_{t_{n,k}} \in [-1/c, 1/c]$, dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante[1], indica il punteggio ESG normalizzato che si ottiene a partire dagli ESG scores $\mathrm{ESG}_{t_{n,k}} \in [\mathrm{ESG}_{min}, \mathrm{ESG}_{max}]$ con $\mathrm{ESG}_{min} = 0$ e $\mathrm{ESG}_{max} = 100$
- il parametro $\lambda \in [0, 1]$ è detto *intensità ESG* e indica il peso relativo attribuito alla valutazione ESG rispetto al rendimento finanziario usuale.

Supponiamo inoltre che l'investitore abbia assunto una posizione corta su C, che consiste nel vendere l'opzione Call. Si assume così l'obbligo di vendere il sottostante al compratore dell'opzione a un prezzo prefissato (il prezzo di esercizio, o strike) se il compratore decide di esercitare l'opzione alla scadenza (visto che si tratta di un'opzione europea).

[1] solitamente si assume $c = 252$ che è il numero di giorni lavorativi all'anno e si normalizza $e_{t_{n,k}}$ come $e_{t_{n,k}} = \frac{\mathrm{ESG}_{t_{n,k}} - 50}{50 \cdot 252}$, in cui $\mathrm{ESG}_{t_{n,k}}$ è il punteggio ESG in una scala da 0 a 100.

2.2 Modello con rendimenti aritmetici

Consideriamo il nostro modello nel caso di rendimenti aritmetici $r_{t_{n,k}} \equiv r_{n,k+1,\lambda} = \frac{S_{n,k+1,\lambda} - S_{n,k,\lambda}}{S_{n,k,\lambda}} \equiv \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k}$ utilizzando la notazione compatta $S_{t_{n,k},\lambda} \equiv S_{n,k,\lambda} \equiv S_k$ in quanto n e λ sono parametri che possono essere fissati. Da questo momento in poi continueremo a utilizzare questo tipo di notazione per tutte le variabili dipendenti dal tempo.
L'evoluzione del sottostante S è data da:

$$\begin{cases} S_0 = s_0 > 0 \\ S_{k+1} = S_k(1 + \xi_{k+1}) \end{cases}$$

dove $\xi_k,\ k = 1, \dots, n$ sono variabili aleatorie i.i.d. tali che

$$\xi_{k+1} = \begin{cases} u_{k+1} & \text{con probabilità } p_{k+1} \\ d_{k+1} & \text{con probabilità } 1 - p_{k+1} \end{cases}$$

$p_{k+1} \in (0,1), \quad 0 < 1 + d_{k+1} < 1 + u_{k+1}$.
La distribuzione di ξ_k è una combinazione di delta di Dirac $p_k \delta_{u_k} + (1 - p_k)\delta_{d_k}$.
Si può notare che la probabilità p_{k+1} dipende dal tempo, governa la direzione di movimento del sottostante nell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$ e in particolare è la probabilità di un movimento verso l'alto.
Dunque l'albero binomiale che rappresenta l'evoluzione del prezzo di S è

$$S_{k+1} = \begin{cases} S^u_{k+1} = S_k(1 + u_{k+1}), & \text{con probabilità } p_{k+1} \\ S^d_{k+1} = S_k(1 + d_{k+1}), & \text{con probabilità } 1 - p_{k+1} \end{cases} \tag{2.2}$$

Supponiamo che $\xi_k,\ k = 1, \dots, n$ sia adattata ad una qualche filtrazione $(\mathcal{F}_k)_{k \in \{0,\dots,n\}}$, con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.
Le quantità aleatorie sono le variabili aleatorie ξ_k e quindi, con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, si ha

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{F}^\xi_k = \sigma\{\xi_j,\ j \le k\},\ k = 1, \dots, n \tag{2.3}$$

e inoltre, essendoci una corrispondenza biunivoca tra S_k e ξ_k, vale anche $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}^\xi_k = \mathcal{F}^S_k$.

Per quanto riguarda il titolo non rischioso B, ha dinamica

$$B_{k+1} = B_k(1 + r_{f,k}\Delta t_{k+1}) \tag{2.4}$$

con $r_{f,k}$ tasso neutrale al rischio.

Teorema 2.1. *In un modello binomiale la condizione*

$$d_{k+1} < r_{f,k}\Delta t_{k+1} < u_{k+1}$$

è equivalente all'esistenza e unicità della misura martingala $\mathbb{Q}$*. Sotto tale condizione, posto*

$$q_{k+1} = \frac{r_{f,k}\Delta t_{k+1} - d_{k+1}}{u_{k+1} - d_{k+1}} \tag{2.5}$$

la misura martingala equivalente $\mathbb{Q}$ *è definita da* $\mathbb{Q}(\xi_k = u_k) = 1 - \mathbb{Q}(\xi_k = d_k) = q_k$*, essendo* $\xi_1, \dots, \xi_{k_n}$ *i.i.d.*

Dimostrazione. Dalla definizione in Appendice A.2, $\mathbb{Q}$ è una MME se e solo se vale

$$\tilde{S}_k = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_{k+1}|\mathcal{F}_k] \quad \text{ovvero} \quad \frac{S_k}{B_k} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_{k+1}}{B_{k+1}}|\mathcal{F}_k\right]$$

$$\frac{S_k}{B_k} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_{k+1}}{B_k(1 + r_{f,k}\Delta t_{k+1})}|\mathcal{F}_k\right]$$

$$\Rightarrow S_k(1+r_{f,k}\Delta t_{k+1}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_{k+1}|\mathcal{F}_k] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_k(1+\xi_{k+1})|\mathcal{F}_k] = S_k\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(1+\xi_{k+1})|\mathcal{F}_k]$$

Semplificando:

$$1 + r_{f,k}\Delta t_{k+1} = 1 + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi_{k+1}|\mathcal{F}_k]$$

$$\Rightarrow r_{f,k}\Delta t_{k+1} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi_{k+1}|\mathcal{F}_k] = u_{k+1}\mathbb{Q}(\xi_{k+1} = u_{k+1}|\mathcal{F}_k) + d_{k+1}\mathbb{Q}(\xi_{k+1} = d_{k+1}|\mathcal{F}_k)$$

Definiamo $q_{k+1} := \mathbb{Q}(\xi_{k+1} = u_{k+1}|\mathcal{F}_k)$
e troviamo $u_{k+1}q_{k+1} + d_{k+1}(1 - q_{k+1}) = r_{f,k}\Delta t_{k+1}$ da cui

$$q_{k+1} = \frac{r_{f,k}\Delta t_{k+1} - d_{k+1}}{u_{k+1} - d_{k+1}}$$

Deve valere $q_{k+1} \in (0,1)$: $\quad 0 < \frac{r_{f,k}\Delta t_{k+1} - d_{k+1}}{u_{k+1} - d_{k+1}} < 1$ e siccome $u_{k+1} > d_{k+1}$ per definizione, allora

$$\begin{cases} r_{f,k}\Delta t_{k+1} - d_{k+1} > 0 \\ r_{f,k}\Delta t_{k+1} - d_{k+1} < u_{k+1} - d_{k+1} \end{cases}$$

$\Rightarrow d_{k+1} < r_{f,k}\Delta t_{k+1}$ e $u_{k+1} > r_{f,k}\Delta t_{k+1}$ quindi otteniamo proprio la condizione dell'enunciato. □

Indichiamo con $(f_k)_{k\in\{0,\dots,n\}}$ il processo di prezzo della Call C. Sotto $\mathbb{Q}$, da

$$f_k = \frac{1}{1 + r_{f,k}\Delta t_{k+1}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(f_{k+1}|\mathcal{F}_k)$$

abbiamo che

$$f_k = \frac{1}{1 + r_{f,k}\Delta t_{k+1}} \left[q_{k+1} f_{k+1}^{(u)} + (1 - q_{k+1}) f_{k+1}^{(d)} \right]. \tag{2.6}$$

Vale inoltre che

$f_k = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{f_T}{B_T} B_k | \mathcal{F}_k \right]$, dove f_T è il prezzo finale della Call C, che corrisponde al suo payoff X.

Lemma 2.2. *Calcoliamo la media e la varianza dei rendimenti aritmetici* $r_{k+1} \equiv (S_{k+1} - S_k)/S_k$.
La media è

$$\mathbb{E}[r_{k+1} | \mathcal{F}_k] = \mathbb{E}\left[\frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} | \mathcal{F}_k \right]$$

per la proprietà di Markov di S si ha che

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} | \mathcal{F}_k \right] = \mathbb{E}\left[\frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} | S_k \right] = \mathbb{E}\left[\frac{S_{k+1}}{S_k} - 1 | S_k \right] = \mathbb{E}\left[\frac{S_{k+1}}{S_k} | S_k \right] - 1$$

poichè le p_k sono indipendenti

$$\begin{aligned} &= \frac{S_k(1 + u_{k+1})}{S_k} p_{k+1} + \frac{S_k(1 + d_{k+1})}{S_k}(1 - p_{k+1}) - 1 \\ &= p_{k+1} + u_{k+1}p_{k+1} + 1 - p_{k+1} + d_{k+1} - d_{k+1}p_{k+1} - 1 \\ &= p_{k+1}u_{k+1} + (1 - p_{k+1})d_{k+1}. \end{aligned}$$

Per il calcolo della varianza:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var}[r_{k+1} | S_k] = \mathbb{E}[(r_{k+1})^2 | S_k] - (\mathbb{E}[r_{k+1} | S_k])^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_{k+1}}{S_k} - 1 \right)^2 | S_k \right] - (\mathbb{E}[r_{k+1} | S_k])^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{S_{k+1}^2}{S_k^2} - 2\frac{S_{k+1}}{S_k} + 1 | S_k \right] - (\mathbb{E}[r_{k+1} | S_k])^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{S_k^2(1 + \xi_{k+1})^2}{S_k^2} - 2\frac{S_k(1 + \xi_{k+1})}{S_k} | S_k \right] + 1 - (\mathbb{E}[r_{k+1} | S_k])^2 \\ &= \mathbb{E}[(1 + \xi_{k+1})(1 + \xi_{k+1} - 2) | S_k] + 1 - (\mathbb{E}[r_{k+1} | S_k])^2 \\ &= \mathbb{E}[(\xi_{k+1} + 1)(\xi_{k+1} - 1) | S_k] + 1 - (\mathbb{E}[r_{k+1} | S_k])^2 \\ &= \mathbb{E}[\xi_{k+1}^2 - 1 | S_k] + 1 - (\mathbb{E}[r_{k+1} | S_k])^2 = \mathbb{E}[\xi_{k+1}^2 | S_k] - 1 + 1 - (\mathbb{E}[r_{k+1} | S_k])^2 \\ &= u_{k+1}^2 p_{k+1} + d_{k+1}^2(1 - p_{k+1}) - p_{k+1}^2 u_{k+1}^2 - 2p_{k+1}(1 - p_{k+1})u_{k+1}d_{k+1} - (1 - p_{k+1})^2 d_{k+1}^2 \end{aligned}$$

$$= u_{k+1}^2 p_{k+1}(1-p_{k+1}) + d_{k+1}^2(1-p_{k+1})p_{k+1} - 2p_{k+1}(1-p_{k+1})u_{k+1}d_{k+1}$$
$$= p_{k+1}(1-p_{k+1})[u_{k+1}-d_{k+1}]^2.$$

Quindi otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[r_{k+1}|S_k] &= p_{k+1}u_{k+1} + (1-p_{k+1})d_{k+1}, \\ \mathrm{Var}[r_{k+1}|S_k] &= p_{k+1}(1-p_{k+1})[u_{k+1}-d_{k+1}]^2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Definiamo ora lo *Sharpe ratio* [2] istantaneo nell'intervallo di tempo Δt_{k+1} come

$$\Theta_{n,k,\lambda} \equiv \Theta_k = \frac{\mathbb{E}(r_{k+1}|S_k) - r_{f,k}\Delta t_{k+1}}{\sqrt{\mathrm{Var}(r_{k+1}|S_k)\Delta t_{k+1}}} \tag{2.8}$$

e da (2.7) otteniamo

$$\begin{aligned} \Theta_k &= \frac{p_{k+1}u_{k+1} + (1-p_{k+1})d_{k+1} - r_{f,k}\Delta t_{k+1}}{\sqrt{p_{k+1}(1-p_{k+1})\Delta t_{k+1}}(u_{k+1}-d_{k+1})} \\ &= \frac{p_{k+1}(u_{k+1}-d_{k+1}) + d_{k+1} - r_{f,k}\Delta t_{k+1}}{\sqrt{p_{k+1}(1-p_{k+1})\Delta t_{k+1}}(u_{k+1}-d_{k+1})} = \frac{p_{k+1} - \frac{r_{f,k}\Delta t_{k+1} - d_{k+1}}{u_{k+1}-d_{k+1}}}{\sqrt{p_{k+1}(1-p_{k+1})\Delta t_{k+1}}} \end{aligned} \tag{2.9}$$

quindi, sostituendo q_{k+1} definita in (2.5), troviamo

$$q_{k+1} = p_{k+1} - \Theta_k\sqrt{p_{k+1}(1-p_{k+1})\Delta t_{k+1}} \tag{2.10}$$

e in questo modo possiamo scrivere q_{k+1} in funzione della probabilità p_{k+1}. Questo ci sarà utile in particolare quando andremo a studiare il comportamento del modello passando al limite al caso continuo per $\Delta t_{k+1} \to 0^+$ e per stabilire se il mercato sia libero da arbitraggio.

Siano $\mu_k^{(r)}$ e $(\sigma_k^{(r)})^2$ rispettivamente la media e la varianza istantanee dei rendimenti aritmetici con valutazione ESG:

$$\mathbb{E}[r_{k+1}|S_k] = \mu_k^{(r)}\Delta t_{k+1}, \quad \mathrm{Var}[r_{k+1}|S_k] = (\sigma_k^{(r)})^2\Delta t_{k+1}. \tag{2.11}$$

Confrontando con (2.7) si ha che

$$\begin{cases} \mu_k^{(r)}\Delta t_{k+1} &= p_{k+1}u_{k+1} + (1-p_{k+1})d_{k+1} \\ (\sigma_k^{(r)})^2\Delta t_{k+1} &= p_{k+1}(1-p_{k+1})[u_{k+1}-d_{k+1}]^2 \end{cases}$$

[2] *Indice di Sharpe*: misura la performance di un investimento tenendo conto del rischio. Si ottiene tramite la formula $\Theta = \frac{\mathbb{E}(r_p - r_f)}{\sigma_p}$, con r_p il rendimento dell'asset o del portafoglio, σ_p la sua deviazione standard e r_f il tasso risk-free.

Dalla prima equazione ricaviamo $u_{k+1} - d_{k+1} = \frac{\mu_k^{(r)} \Delta t_{k+1} - d_{k+1}}{p_{k+1}}$ che andiamo a sostituire nella seconda

$$(\sigma_k^{(r)})^2 \Delta t_{k+1} = p_{k+1}(1 - p_{k+1}) \frac{(\mu_k^{(r)} \Delta t_{k+1} - d_{k+1})^2}{p_{k+1}^2}$$

$$(\mu_k^{(r)} \Delta t_{k+1} - d_{k+1})^2 = \frac{p_{k+1}(\sigma_k^{(r)})^2 \Delta t_{k+1}}{1 - p_{k+1}} \quad \Rightarrow \quad d_{k+1} = \mu_k^{(r)} \Delta t_{k+1} - \sigma_k^{(r)} \sqrt{\frac{p_{k+1} \Delta t_{k+1}}{1 - p_{k+1}}}$$

Poi

$$u_{k+1} = \frac{\mu_k^{(r)} \Delta t_{k+1} - d_{k+1}}{p_{k+1}} + d_{k+1} = \frac{\sigma_k^{(r)} \sqrt{\frac{p_{k+1} \Delta t_{k+1}}{1 - p_{k+1}}}}{p_{k+1}} + \mu_k^{(r)} \Delta t_{k+1} - \sigma_k^{(r)} \sqrt{\frac{p_{k+1} \Delta t_{k+1}}{1 - p_{k+1}}}$$

$$= \mu_k^{(r)} \Delta t_{k+1} + \sigma_k^{(r)} \sqrt{\frac{p_{k+1} \Delta t_{k+1}}{1 - p_{k+1}}} \left(\frac{1}{p_{k+1}} - 1 \right) = \mu_k^{(r)} \Delta t_{k+1} + \sigma_k^{(r)} \sqrt{\frac{(1 - p_{k+1}) \Delta t_{k+1}}{p_{k+1}}}$$

Possiamo dunque scrivere u_{k+1} e d_{k+1} nella forma

$$\begin{aligned} &u_{k+1} = \mu_k^{(r)} \Delta t_{k+1} + \sigma_k^{(r)} p_{k+1}^{(u)} \sqrt{\Delta t_{k+1}}, \\ &d_{k+1} = \mu_k^{(r)} \Delta t_{k+1} - \sigma_k^{(r)} p_{k+1}^{(d)} \sqrt{\Delta t_{k+1}}, \\ &\text{dove poniamo} \quad p_{k+1}^{(u)} := \sqrt{\frac{1 - p_{k+1}}{p_{k+1}}} > 0, \qquad p_{k+1}^{(d)} := \sqrt{\frac{p_{k+1}}{1 - p_{k+1}}} > 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

La media del sottostante S è:

$$\mathbb{E}[S_{k+1}|S_k] = S_k[p_{k+1}(1 + u_{k+1}) + (1 - p_{k+1})(1 + d_{k+1})]$$

o anche, ricavando S_{k+1} da $r_{k+1} \equiv (S_{k+1} - S_k)/S_k$ e per (2.11),

$$\mathbb{E}[S_{k+1}|S_k] = \mathbb{E}[S_k(1 + r_{k+1})|S_k] = S_k(1 + \mathbb{E}[r_{k+1}|S_k]) = S_k[1 + \mu_k^{(r)} \Delta t_{k+1}].$$

Il coefficiente di drift $\mu_k^{(r)}$ esprime l'incremento medio per unità di tempo del sottostante S, ossia come si prevede che il prezzo si muova in media. È equivalente a dire che $\mu_k^{(r)}$ rappresenta la media attesa del rendimento r_{k+1}, come indicato nell'equazione (2.11).

In maniera analoga alla media, si può calcolare la varianza di S

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var}[S_{k+1}|S_k] = S_k^2 p_{k+1}(1 - p_{k+1})[u_{k+1} - d_{k+1}]^2 \\ &\mathrm{Var}[S_{k+1}|S_k] = S_k^2 (\sigma_k^{(r)})^2 \Delta t_{k+1}. \end{aligned}$$

Troviamo quindi che

$$\mathbb{E}[S_{k+1}|S_k] = S_k[1 + \mu_k^{(r)}\Delta t_{k+1}], \quad \text{Var}[S_{k+1}|S_k] = S_k^2(\sigma_k^{(r)})^2\Delta t_{k+1}$$

da cui notiamo che il coefficiente di drift istantaneo μ_k e la volatilità σ_k^2 di S corrispondono proprio a

$$\mu_k = \mu_k^{(r)}, \quad \sigma_k^2 = (\sigma_k^{(r)})^2. \tag{2.13}$$

Utilizzando la (2.11), lo *Sharpe ratio* diventa

$$\Theta_k = \frac{\mathbb{E}(r_{k+1}|S_k) - r_{f,k}\Delta t_{k+1}}{\sqrt{\text{Var}(r_{k+1}|S_k)\Delta t_{k+1}}} = \frac{\mu_k\Delta t_{k+1} - r_{f,k}\Delta t_{k+1}}{\sqrt{\sigma_k^2\Delta t_{k+1}\Delta t_{k+1}}} = \frac{\mu_k - r_{f,k}}{\sigma_k} \equiv \theta_k \tag{2.14}$$

dove θ_k è detto *market price of risk*[3].

2.2.1 Limite al caso continuo

Analizziamo il comportamento del modello discreto descritto in questa sezione quando si considera il limite al caso continuo, ovvero per $\Delta t \to 0^+$.
Introduciamo prima alcune definizioni, tratte da [3] e [4].

Definizione. *Lo spazio di Skorokhod $D[0,T]$ è lo spazio di tutte le funzioni $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ che sono continue a destra e che hanno limite sinistro finito (dette funzioni càdlàg).*

Definizione. *Sia Λ l'insieme delle funzioni strettamente crescenti e continue $\lambda : [0,T] \to [0,T]$, tali che $\lambda(0) = 0$ e $\lambda(T) = T$.*

Per $\lambda \in \Lambda$, sia $\|\lambda\| = \sup_{0\le s<t\le T}\left|\ln\left(\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right)\right|$.

Si definisce la metrica di Skorokhod-Billingsley su $D[0,T]$ come

$$d(f,g) = \inf_{\lambda\in\Lambda}\max\{\|\lambda\|, \sup_{0\le t\le T}|f(t) - g(\lambda(t))|\}.$$

La topologia indotta da tale metrica è detta topologia di Skorokhod.

[3] Il *market price of risk* si definisce come $\theta = \frac{\mu - r_f}{\sigma}$, dove μ e σ sono rispettivamente il coefficiente di drift e la volatilità del sottostante e r_f è il tasso privo di rischio. Misura il tradeoff tra rischio e rendimento, indicando quanto rendimento aggiuntivo gli investitori si aspettano per ogni unità di rischio che sono disposti a sopportare.

Definizione. *(MOTO BROWNIANO STANDARD) Un processo stocastico reale* $(B_t)_{t\geq 0}$ *su uno spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *si dice moto Browniano standard se valgono le seguenti condizioni:*

1. $B_0 = 0$*;*

2. *il processo* B *ha incrementi indipendenti, cioè se* $r < s \leq t < u$ *allora* $B_u - B_t$ *e* $B_s - B_r$ *sono variabili aleatorie indipendenti;*

3. *per ogni* $0 \leq s < t$ *la variabile aleatoria* $B_t - B_s$ *ha legge gaussiana:* $(B_t - B_s) \sim N(0, t-s)$*;*

4. *q.c.* B *ha traiettorie continue, cioè q.c. la funzione* $t \mapsto B_t$ *è continua.*

Per $\Delta t \to 0^+$ l'albero binomiale (2.2) per il pricing di S, con u e d definite come in (2.12), genera un processo stocastico che converge debolmente nella topologia di Skorokhod $D[0,T]$ al processo di rendimento cumulativo R_t, $t \in [0,T]$ determinato da $dR_t = dS_t/S_t = \mu_t dt + \sigma_\lambda dB_t$, dove B_t è un moto browniano standard (si veda per esempio [13]).

2.3 Modello con rendimenti logaritmici

Vediamo ora il caso con compounding continuo e quindi rendimenti logaritmici $r_{k+1} = \ln\left(\frac{S_{k+1}}{S_k}\right)$. La dinamica del sottostante S è

$$\begin{cases} S_0 = s_0 > 0 \\ S_{k+1} = S_k e^{\xi_{k+1}} \end{cases}$$

dove

$$\xi_{k+1} = \begin{cases} u_{k+1} & \text{con probabilità} \quad p_{k+1} \\ d_{k+1} & \text{con probabilità} \quad 1 - p_{k+1} \end{cases}$$

con $u_{k+1} > d_{k+1}$. Le $\xi_k, k = 1, \ldots, n$ sono variabili aleatorie descritte come nella sezione precedente, mentre i valori assunti da u_{k+1} e d_{k+1} possono essere diversi. L'albero binomiale ricombinante che rappresenta l'evoluzione del sottostante S è quindi

$$S_{k+1} = \begin{cases} S^u_{k+1} = S_k e^{u_{k+1}} & \text{con probabilità } p_{k+1} \\ S^d_{k+1} = S_k e^{d_{k+1}} & \text{con probabilità } 1 - p_{k+1} \end{cases} \tag{2.15}$$

ed è adattato alla filtrazione (2.3).

La dinamica del titolo non rischioso B è:

$$B_{k+1} = B_k e^{r_{f,k}\Delta t_{k+1}}. \tag{2.16}$$

La condizione $d_{k+1} < r_{f,k}\Delta t_{k+1} < u_{k+1}$ del Teorema (2.1) implica che

$$e^{d_{k+1}} < e^{r_{f,k}\Delta t_{k+1}} < e^{u_{k+1}}.$$

Sia $\mathbb{Q}$ la misura martingala equivalente

$$\tilde{S_k} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_{k+1}|\mathscr{F}_k] \quad \text{ovvero} \quad \frac{S_k}{B_k} = \mathbb{E}^{Q}\left[\frac{S_{k+1}}{B_{k+1}}|\mathscr{F}_k\right]$$

$$\frac{S_k}{B_k} = \mathbb{E}^{Q}\left[\frac{S_k e^{\xi_{k+1}}}{B_k e^{r_{f,k}\Delta t_{k+1}}}|\mathscr{F}_k\right] = \frac{S_k}{B_k}\mathbb{E}^{Q}\left[\frac{e^{\xi_{k+1}}}{e^{r_{f,k}\Delta t_{k+1}}}|\mathscr{F}_k\right]$$

$$\Rightarrow e^{r_{f,k}\Delta t_{k+1}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{\xi_{k+1}}|\mathscr{F}_k] = e^{u_{k+1}}\mathbb{Q}(\xi_{k+1} = u_{k+1}|\mathscr{F}_k) + e^{d_{k+1}}\mathbb{Q}(\xi_{k+1} = d_{k+1}|\mathscr{F}_k)$$

Poniamo $q_{k+1} := \mathbb{Q}(\xi_{k+1} = u_{k+1}|\mathscr{F}_k)$, quindi $e^{u_{k+1}}q_{k+1} + e^{d_{k+1}}(1 - q_{k+1}) = e^{r_{f,k}\Delta t_{k+1}}$ da cui otteniamo

$$q_{k+1} = \frac{e^{r_{f,k}\Delta t_{k+1}} - e^{d_{k+1}}}{e^{u_{k+1}} - e^{d_{k+1}}} \tag{2.17}$$

Vale $q_{k+1} \in (0, 1)$, in quanto $e^{d_{k+1}} < e^{r_{f,k}\Delta t_{k+1}}$ e $e^{u_{k+1}} > e^{r_{f,k}\Delta t_{k+1}}$.

Calcoliamo ora il prezzo neutrale al rischio della Call C al tempo t_k:

Dalla relazione $f_k = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{f_T}{B_T}B_k|\mathscr{F}_k\right]$, dove f_T è il prezzo all'istante finale $T \equiv t_n$ di C e coincide con il suo payoff X, si ha che $f_k = \frac{1}{(e^{r_{f,k}\Delta t_{k+1}})^{n-k}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[f_T|\mathscr{F}_k\right]$.

Vale inoltre

$$f_k = e^{-r_{f,k}\Delta t_{k+1}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f_{k+1}|\mathscr{F}_k] = e^{-r_{f,k}\Delta t_{k+1}}\left[q_{k+1}f_{k+1}^{(u)} + (1 - q_{k+1})f_{k+1}^{(d)}\right]. \tag{2.18}$$

Lemma 2.3. *Calcoliamo media e varianza dei log-rendimenti* $r_{k+1} = ln\left(\frac{S_{k+1}}{S_k}\right)$.
Per il calcolo della media utilizziamo la Markov property

$$\mathbb{E}[r_{k+1}|\mathscr{F}_k] = \mathbb{E}\left[\ln\left(\frac{S_{k+1}}{S_k}\right)|\mathscr{F}_k\right] = \mathbb{E}\left[\ln\left(\frac{S_{k+1}}{S_k}\right)|S_k\right] = \mathbb{E}\left[\ln\left(\frac{S_k e^{\xi_{k+1}}}{S_k}\right)|S_k\right] =$$
$$= \mathbb{E}[\xi_{k+1}|S_k] = p_{k+1}u_{k+1} + (1 - p_{k+1})d_{k+1}.$$

La varianza è

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}[r_{k+1}|S_k] = \mathbb{E}[r_{k+1}^2|S_k] - (\mathbb{E}[r_{k+1}|S_k])^2 = \mathbb{E}\left[\ln^2\left(\frac{S_{k+1}}{S_k}\right)|S_k\right] - (\mathbb{E}[r_{k+1}|S_k])^2 \\
&= \mathbb{E}[\xi_{k+1}^2|S_k] - (\mathbb{E}[r_{k+1}|S_k])^2 \\
&= u_{k+1}^2 p_{k+1} + d_{k+1}^2(1-p_{k+1}) - p_{k+1}^2 u_{k+1}^2 - 2p_{k+1}(1-p_{k+1})u_{k+1}d_{k+1} + \\
&- (1-p_{k+1})^2 d_{k+1}^2 \\
&= u_{k+1}^2 p_{k+1}(1-p_{k+1}) + d_{k+1}^2(1-p_{k+1})p_{k+1} - 2p_{k+1}(1-p_{k+1})u_{k+1}d_{k+1} \\
&= p_{k+1}(1-p_{k+1})[u_{k+1}-d_{k+1}]^2.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[r_{k+1}|S_k] &= p_{k+1}u_{k+1} + (1-p_{k+1})d_{k+1}, \\
\mathrm{Var}[r_{k+1}|S_k] &= p_{k+1}(1-p_{k+1})[u_{k+1}-d_{k+1}]^2.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Possiamo notare che hanno la stessa forma della media e varianza dei rendimenti aritmetici (2.7).

Anche lo *Sharpe ratio* istantaneo avrà la stessa forma di quello della sezione precedente (si veda l'equazione (2.8)):

$$\Theta_k = \frac{\mathbb{E}(r_{k+1}|S_k) - r_{f,k}\Delta t_{k+1}}{\sqrt{\mathrm{Var}(r_{k+1}|S_k)\Delta t_{k+1}}} = \frac{p_{k+1} - \frac{r_{f,k}\Delta t_{k+1} - d_{k+1}}{u_{k+1}-d_{k+1}}}{\sqrt{p_{k+1}(1-p_{k+1})\Delta t_{k+1}}}$$

Remark: poichè ora la misura martingala equivalente è definita in termini di $q_{k+1} = \frac{e^{r_{f,k}\Delta t_{k+1}} - e^{d_{k+1}}}{e^{u_{k+1}} - e^{d_{k+1}}}$, non è invece più valida l'identità (2.10) che permetteva di scrivere q_{k+1} in funzione della probabilità p_{k+1}.

Siano $\mu_k^{(r)}$ e $(\sigma_k^{(r)})^2$ la media e la varianza istantanee dei rendimenti logaritmici con valutazione ESG

$$\mathbb{E}[r_{k+1}|S_k] = \mu_k^{(r)}\Delta t_{k+1}, \quad \mathrm{Var}[r_{k+1}|S_k] = (\sigma_k^{(r)})^2\Delta t_{k+1}. \tag{2.20}$$

Con gli stessi conti della sezione precedente possiamo scrivere u_{k+1} e d_{k+1} nella forma

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= \mu_k^{(r)}\Delta t_{k+1} + \sigma_k^{(r)} p_{k+1}^{(u)}\sqrt{\Delta t_{k+1}}, \\
d_{k+1} &= \mu_k^{(r)}\Delta t_{k+1} - \sigma_k^{(r)} p_{k+1}^{(d)}\sqrt{\Delta t_{k+1}}, \\
\text{con } p_{k+1}^{(u)} &:= \sqrt{\frac{1-p_{k+1}}{p_{k+1}}} > 0, \qquad p_{k+1}^{(d)} := \sqrt{\frac{p_{k+1}}{1-p_{k+1}}} > 0.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

In questo modo, troviamo che lo *Sharpe ratio* istantaneo è

$$\Theta_k = \frac{\mu_k^{(r)} - r_{f,k}}{\sigma_k^{(r)}}. \tag{2.22}$$

La media e la varianza del sottostante S sono:

$$\mathbb{E}[S_{k+1}|S_k] = \mathbb{E}[S_k e^{\xi_{k+1}}|S_k] = S_k \mathbb{E}[e^{\xi_{k+1}}|S_k] = S_k[p_{k+1}e^{u_{k+1}} + (1-p_{k+1})e^{d_{k+1}}]$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}[S_{k+1}|S_k] = \mathbb{E}[S_{k+1}^2|S_k] - \mathbb{E}^2[S_{k+1}|S_k] = \mathbb{E}[S_k^2 e^{2\xi_{k+1}}|S_k] - \mathbb{E}^2[S_{k+1}|S_k] \\
&= S_k^2 \mathbb{E}[e^{2\xi_{k+1}}|S_k] - \mathbb{E}^2[S_{k+1}|S_k] \\
&= S_k^2[p_{k+1}e^{2u_{k+1}} + (1-p_{k+1})e^{2d_{k+1}}] - S_k^2[p_{k+1}^2 e^{2u_{k+1}} + 2p_{k+1}(1-p_{k+1})e^{u_{k+1}+d_{k+1}} + \\
&+ (1-p_{k+1})^2 e^{2d_{k+1}}] \\
&= S_k^2[p_{k+1}e^{2u_{k+1}}(1-p_{k+1}) + (1-p_{k+1})e^{2d_{k+1}}p_{k+1} - 2p_{k+1}(1-p_{k+1})e^{u_{k+1}+d_{k+1}}] \\
&= S_k^2 p_{k+1}(1-p_{k+1})[e^{u_{k+1}} - e^{d_{k+1}}]^2.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Le equazioni trovate fino a questo punto per il modello nel caso di rendimenti logaritmici sono esatte. Siamo ora interessati a calcolarne delle approssimazioni in termini di $O(\Delta t_{k+1})$. Dalla definizione (2.21), si ha che $u_{k+1} \downarrow 0$ e $d_{k+1} \downarrow 0$ per $\Delta t_{k+1} \downarrow 0$. Possiamo quindi utilizzare gli sviluppi

$$e^{u_{k+1}} = 1 + u_{k+1} + \frac{u_{k+1}^2}{2} + O(\Delta t_{k+1}), \quad e^{d_{k+1}} = 1 + d_{k+1} + \frac{d_{k+1}^2}{2} + O(\Delta t_{k+1})$$

Sostituendo in (2.23) e per (2.21) si ottiene

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[S_{k+1}|S_k] = S_k[p_{k+1}e^{u_{k+1}} + (1-p_{k+1})e^{d_{k+1}}] \\
&\approx S_k\left[p_{k+1}\left(1 + u_{k+1} + \frac{u_{k+1}^2}{2}\right) + (1-p_{k+1})\left(1 + d_{k+1} + \frac{d_{k+1}^2}{2}\right)\right] \\
&= S_k\left[p_{k+1}\left(1 + \mu_k^{(r)}\Delta t_{k+1} + \sigma_k^{(r)}p_{k+1}^{(u)}\sqrt{\Delta t_{k+1}} + \frac{(\mu_k^{(r)}\Delta t_{k+1} + \sigma_k^{(r)}p_{k+1}^{(u)}\sqrt{\Delta t_{k+1}})^2}{2}\right) + \right. \\
&\left. + (1-p_{k+1})\left(1 + \mu_k^{(r)}\Delta t_{k+1} - \sigma_k^{(r)}p_{k+1}^{(d)}\sqrt{\Delta t_{k+1}} + \frac{(\mu_k^{(r)}\Delta t_{k+1} - \sigma_k^{(r)}p_{k+1}^{(d)}\sqrt{\Delta t_{k+1}})^2}{2}\right)\right] \\
&= \ldots = S_k\left[1 + \left(\mu_k^{(r)} + \frac{(\sigma_k^{(r)})^2}{2}\right)\Delta t_{k+1}\right]
\end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[S_{k+1}|S_k] &= S_k^2 p_{k+1}(1-p_{k+1})[e^{u_{k+1}} - e^{d_{k+1}}]^2 \\ &\approx S_k p_{k+1}(1-p_{k+1})\left[1 + u_{k+1} + \frac{u_{k+1}^2}{2} - 1 - d_{k+1} - \frac{d_{k+1}^2}{2}\right]^2 = \ldots = S_k^2 {\sigma_k^{(r)}}^2 \Delta t_{k+1}\end{aligned}$$

L'approssimazione in termini di $O(\Delta t_{k+1})$ ottenuta è

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_{k+1}|S_k] &\approx S_k\left[1 + \left(\mu_k^{(r)} + \frac{{\sigma_k^{(r)}}^2}{2}\right)\Delta t_{k+1}\right], \\ \mathrm{Var}[S_{k+1}|S_k] &\approx S_k^2 {\sigma_k^{(r)}}^2 \Delta t_{k+1}.\end{aligned} \tag{2.24}$$

In termini di $O(\Delta t_{k+1})$ il coefficiente di drift istantaneo μ_k e la volatilità σ_k del sottostante S corrispondono a

$$\mu_k = \mu_k^{(r)} + \frac{(\sigma_k^{(r)})^2}{2}, \quad \sigma_k = \sigma_k^{(r)}. \tag{2.25}$$

Possiamo ricavare $\mu_k^{(r)}$ e $\sigma_k^{(r)}$ e sostituirli nella definizione dello *Sharpe ratio*, che in termini di μ_k e σ_k diventa

$$\Theta_k = \frac{\mu_k^{(r)} - r_{f,k}}{\sigma_k^{(r)}} = \frac{\mu_k - \frac{\sigma_k^2}{2} - r_{f,k}}{\sigma_k}. \tag{2.26}$$

in modo analogo la media e la varianza dei rendimenti logaritmici sono

$$\mathbb{E}[r_{k+1}|S_k] = \left(\mu_k - \frac{\sigma_k^2}{2}\right)\Delta t_{k+1}, \quad \mathrm{Var}[r_{k+1}|S_k] = \sigma_k^2 \Delta t_{k+1}; \tag{2.27}$$

e si ottengono per

$$\begin{aligned}u_{k+1} &= \left(\mu_k - \frac{\sigma_k^2}{2}\right)\Delta t_{k+1} + p_{k+1}^{(u)}\sigma_k\sqrt{\Delta t_{k+1}} \\ d_{k+1} &= \left(\mu_k - \frac{\sigma_k^2}{2}\right)\Delta t_{k+1} - p_{k+1}^{(d)}\sigma_k\sqrt{\Delta t_{k+1}}.\end{aligned} \tag{2.28}$$

Tale scrittura di u_{k+1} e d_{k+1} si ricava sostituendo nella definizione (2.21) $\mu_k^{(r)}$ e $\sigma_k^{(r)}$ trovati a partire da (2.25).

Approssimando la probabilità neutrale al rischio in termini di $O(\Delta t_{k+1})$ e da (2.3), si ha che:

$$q_{k+1} \approx p_{k+1} - \theta_k \sqrt{p_{k+1}(1-p_{k+1})\Delta t_{k+1}}, \tag{2.29}$$

dove $\theta_k = \frac{\mu_k - r_{f,k}}{\sigma_k}$ è il *market price of risk* come in (2.14).

Osservazione: notiamo che nel modello con rendimenti aritmetici l'equazione che permette di scrivere la probabilità neutrale al rischio q_{k+1} in funzione della probabilità p_{k+1} è esatta, mentre nel modello con log-rendimenti la si ottiene solo come approssimazione in termini di $O(\Delta t_{k+1})$.

2.3.1 Limite al caso continuo

Anche per questo modello consideriamo il limite al caso continuo, limitandoci a un'idea molto generale.
L'albero binomiale (2.15), con u e d definite come in (2.29), approssima un processo càdlàg che converge debolmente nello spazio di Skorokhod $D[0,T]$ al moto Browniano geometrico

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu_t - \frac{\sigma_t^2}{2}\right)t + \sigma_t B_t\right], \tag{2.30}$$

dove B_t è un moto Browniano standard (si veda [13]).

2.4 ESG-valued option pricing

Osservazione: per entrambi i modelli, tenendo conto dell'intensità ESG rappresentata dal parametro $\lambda \in (0,1]$ è possibile definire un dividendo $\mathbb{D}_{n,k,\lambda}$ che permette un confronto tra la performance finanziaria dovuta all'adozione degli ESG scores e quella tradizionale:

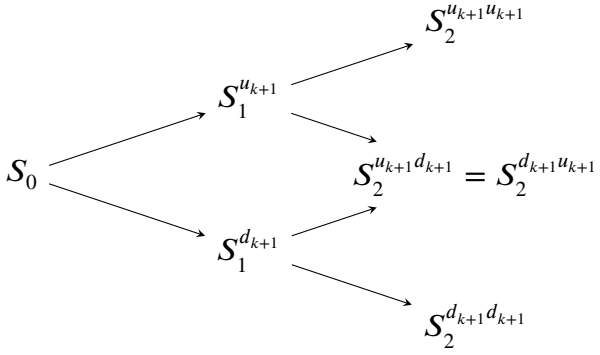
$$\mathbb{D}_{n,k,\lambda} = \sigma_{n,k,0}(\Theta_{n,k,\lambda} - \Theta_{n,k,0}). \tag{2.31}$$

Il dividendo $\mathbb{D}_{n,k,\lambda}$ è determinato dalla differenza tra lo *Sharpe ratio* del modello con valutazione ESG e quello usuale, moltiplicata per la volatilità $\sigma_{n,k,0}$ (che normalizza tale differenza). Se $\mathbb{D}_{n,k,\lambda}$ è positivo significa che l'integrazione dei punteggi ESG comporta un miglioramento rispetto al modello finanziario tradizionale, per esempio grazie a una riduzione del rischio.
I valori dello *Sharpe ratio* per ciascun modello si possono calcolare utilizzando le formule trovate nelle Sezioni 2.2 e 2.3.

Pricing dell'opzione Call: vediamo ora il procedimento per il pricing dell'opzione Call C con sottostante S, scadenza T, strike K, con payoff $X = (S_T - K)^+$. Consideriamo il modello con rendimenti aritmetici.
Ricordiamo che la dinamica del prezzo di S è

$$S_{k+1} = \begin{cases} S^u_{k+1} = S_k(1 + u_{k+1}), & \text{con probabilità } p_{k+1} \\ S^d_{k+1} = S_k(1 + d_{k+1}), & \text{con probabilità } 1 - p_{k+1} \end{cases}$$

che può essere rappresentata mediante un albero binomiale:



Dall'albero binomiale possiamo ottenere per ciascun nodo il prezzo finale $S_n \equiv S_T$ del sottostante S e quindi anche il payoff X dell'opzione Call C, che coincide con f_T. Indicando con $(f_k)_{k\in\{0,\dots,n\}}$ il processo di prezzo della Call C, tramite la relazione

$$f_k = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{f_T}{B_T} B_k | \mathcal{F}_k\right], \text{ ovvero } f_k = \frac{1}{(1 + r_{f,k}\Delta t_{k+1})^{n-k}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[f_T | \mathcal{F}_k\right],$$

o anche

$$f_k = \frac{1}{1 + r_{f,k}\Delta t_{k+1}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(f_{k+1} | \mathcal{F}_k)$$

può essere calcolato "all'indietro" il prezzo di C.

Osservazione: per il modello con rendimenti logaritmici il procedimento è analogo e si applica a partire dall'albero binomiale (2.15).

Osservazione: poichè u e d si possono scrivere come

$$u_{k+1} = \mu_k \Delta t_{k+1} + \sigma_k \sqrt{\frac{1 - p_{k+1}}{p_{k+1}}} \sqrt{\Delta t_{k+1}}, \quad d_{k+1} = \mu_k \Delta t_{k+1} - \sigma_k \sqrt{\frac{p_{k+1}}{1 - p_{k+1}}} \sqrt{\Delta t_{k+1}},$$

conoscere i parametri μ_k e σ_k e la probabilità p_{k+1} permette di rappresentare l'albero binomiale per S.

2.5 Condizione di non arbitraggio

Vogliamo stabilire se i due modelli di mercato descritti siano liberi da opportunità di arbitraggio.

Modello con rendimenti aritmetici

Per quanto riguarda il modello con rendimenti aritmetici, la condizione

$$0 < 1 + d_{k+1} < 1 + r_{f,k}\Delta t_{k+1} < 1 + u_{k+1} \tag{2.32}$$

garantisce che $q_{k+1} = \frac{r_{f,k}\Delta t_{k+1} - d_{k+1}}{u_{k+1} - d_{k+1}} \in (0,1)$, ovvero l'esistenza della misura martingala equivalente $\mathbb{Q}$. Di conseguenza il mercato è libero da arbitraggi per il Primo Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing. Ciò continua a valere anche considerando il limite al caso continuo, infatti nella Sezione 2.2 abbiamo mostrato che

$$q_{k+1} = p_{k+1} - \Theta_k \sqrt{p_{k+1}(1-p_{k+1})\Delta t_{k+1}}, \quad \text{dove } \Theta_k = \frac{\mu_k - r_{f,k}}{\sigma_k}.$$

Prendendo il limite per $\Delta t_{k+1} \to 0^+$ si ha che $q_{k+1} \to p_{k+1} \in (0,1)$ e quindi il mercato è privo di arbitraggio.

Modello con log-rendimenti

Nel modello con rendimenti logaritmici invece la probabilità neutrale al rischio è definita tramite

$$q_{k+1} = \frac{e^{r_{f,k}\Delta t_{k+1}} - e^{d_{k+1}}}{e^{u_{k+1}} - e^{d_{k+1}}}$$

ma l'identità $q_{k+1} = p_{k+1} - \theta_k \sqrt{p_{k+1}(1-p_{k+1})\Delta t_{k+1}}$ non è esatta, in quanto ottenuta mediante un'approssimazione in termini di $O(\Delta t_{k+1})$. Calcolare il limite per $\Delta t \to 0^+$ non garantisce che q_{k+1} appartenga all'intervallo $[0,1]$. Concludiamo quindi che l'utilizzo di compounding continuo (che in questo modello corrisponde a $e^{u_{k+1}}, e^{d_{k+1}}, e^{r_{f,k}\Delta t_{k+1}}$) quando le operazioni finanziarie avvengono a tempo discreto non è compatibile con il Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing e con la condizione di non arbitraggio.

Capitolo 3

Applicazione ai dati

Il rating ESG viene integrato nelle decisioni di investimento da un numero crescente di investitori, con modalità e motivazioni diverse. Vediamo ora quali sono le sue implicazioni dal punto di vista finanziario.
In questo capitolo ci occupiamo di applicare a dati reali di mercato i modelli per il pricing con valutazione ESG presentati nel capitolo precedente. Analizziamo come l'introduzione degli ESG scores possa influire sui rendimenti finanziari e sul prezzo delle opzioni.
Viene mostrato in particolare un confronto grafico dell'impatto di punteggi ESG più o meno elevati sul prezzo delle opzioni, al variare del peso che si sceglie di attribuire alla valutazione ESG.
Esaminiamo inoltre il comportamento dei modelli con alberi binomiali per l'option pricing, riportando in tabella una stima dei parametri ottenuta a partire dai dati di mercato e dagli ESG scores.
Viene infine applicato il nostro modello per il pricing di un'opzione Call, confrontando i risultati con i dati di mercato relativi a questa tipologia di opzione. L'obiettivo è stimare i valori dell'intensità ESG λ che minimizzano l'errore tra i prezzi teorici del modello e quelli reali di mercato. Un'opzione Call con scadenza T e strike K ha payoff $X = (S_T - K)^+$. Per il nostro studio utilizziamo i grafici delle superfici di intensità ESG, che indicano una stima di λ in funzione di T e del rapporto $M = K/S_T$ detto *moneyness*.
Il seguente lavoro si sviluppa a partire dagli studi e dai risultati riportati nel paper [6].

3.1 Dinamiche dei prezzi ESG

I punteggi ESG utilizzati in questa analisi sono forniti da RobecoSAM (ora S&P Global), che attribuisce gli score usando una scala da 0 a 100 dove 100 rappresenta il punteggio migliore.
Prendiamo in esame i dati relativi a tre aziende: Microsoft Corporation (MSFT), Amazon (AMZN) e Apple (AAPL), scelte in quanto hanno rispettivamente un punteggio ESG alto, intermedio e basso. Per ciascuna di esse consideriamo i prezzi giornalieri di chiusura nel periodo compreso tra il 31/12/2020 e il 31/12/2021[1]. L'intervallo temporale $[0, T]$ copre quindi un anno ed è costituito da $n = 252$ giorni lavorativi. Di conseguenza possiamo descriverlo come $[0, 252]$, con i giorni di trading indicati da $t_{n,k} = k\Delta t$, dove $k = 0, 1, \dots, 252$ e $\Delta t \equiv 1$.
Come la maggior parte dei providers, S&P Global rilascia i punteggi ESG una volta all'anno, che per il periodo di tempo analizzato corrisponde al 19/11/2020 e al 19/11/2021. Il punteggio ESG viene assegnato da S&P Global[2] tramite una combinazione di:

- dati aziendali pubblici
- valutazione del questionario Corporate Sustainability Assessment (CSA) compilato dalle aziende stesse
- monitoraggio di media e stakeholder
- approcci di modellizzazione quantitativa per analizzare e integrare i dati raccolti.

Vogliamo utilizzare il tasso con valutazione ESG definito come nella Sezione 2.1

$$r_{n,k,\lambda} = \lambda e_{n,k} + (1 - \lambda) r_{n,k,0}. \tag{3.1}$$

Calcoliamo il punteggio ESG giornaliero normalizzato $e_{n,k}$ come

$$e_{n,k} = \frac{\mathrm{ESG}^{(\mathrm{R})} - 50}{50 \cdot 252}$$

dove $\mathrm{ESG}^{(\mathrm{R})} \in [0, 100]$ è il più recente ESG score rilasciato prima del giorno $t_{n,k}$; consideriamo 252 poichè è il numero di giorni lavorativi annuali e il valore 50 in quanto rappresenta la mediana nel punteggio da 0 a 100.

[1] da Yahoo Finance, https://finance.yahoo.com
[2] da S&P Global, https://www.spglobal.com/esg/solutions/esg-scores-data

Nella Tabella 3.1 sono riportati i dati relativi ai punteggi ESG$^{(R)}$ rilasciati da RobecoSAM nei giorni 19/11/2020 e 19/11/2021 per le tre aziende considerate e i rispettivi valori normalizzati $e_{n,k}$. Riportiamo anche il prezzo iniziale S_0 (ovvero quello in data 31/12/2020) per ciascuno stock, in dollari.

	19/11/2020		19/11/2021		
Azienda	ESG$^{(R)}$	$e_{n,k}$	ESG$^{(R)}$	$e_{n,k}$	S_0 (USD)
MSFT	96	$3.65 \cdot 10^{-3}$	98	$3.81 \cdot 10^{-3}$	336.32
AMZN	60	$0.79 \cdot 10^{-3}$	71	$1.67 \cdot 10^{-3}$	3334.34
AAPL	25	$-1.98 \cdot 10^{-3}$	34	$-1.27 \cdot 10^{-3}$	177.57

Tabella 3.1: ESG scores e prezzo S_0 delle azioni

Notiamo che il tasso definito in (3.1) combina gli ESG scores con il rendimento finanziario tradizionale e, a partire da esso, possiamo analizzare gli effetti della valutazione ESG sui prezzi delle tre stock.
Come prima cosa calcoliamo i rendimenti aritmetici $r_{n,k,0} = \frac{S_{n,k,0} - S_{n,k-1,0}}{S_{n,k-1,0}}$ utilizzando i prezzi di chiusura giornalieri di ciascuna azienda.
Per i valori di $\lambda \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75\}$ possiamo ottenere mediante la formula (3.1) i rendimenti $r_{n,k,\lambda}$ con valutazione ESG. Più λ è elevato, maggiore è il peso assegnato agli ESG scores rispetto al rendimento finanziario tradizionale.

Osservazione: Per un dato $\lambda \in [0, 1]$, conoscendo i punteggi ESG normalizzati $e_{n,k+1,\lambda}$ e avendo calcolato il rendimento $r_{n,k+1,0}$, troviamo il tasso $r_{n,k+1,\lambda}$ con valutazione ESG. Esso può anche essere definito come

$$r_{n,k+1,\lambda} = \frac{S_{n,k+1,\lambda} - S_{n,k,\lambda}}{S_{n,k,\lambda}}$$

da cui possiamo simulare il valore di S futuro

$$S_{n,k+1,\lambda} = S_{n,k,\lambda}(1 + r_{n,k+1,\lambda})$$

che chiamiamo prezzo con valutazione ESG o più semplicemente *prezzo ESG*.

La Figura 3.1 mostra i grafici ottenuti da noi che rappresentano le dinamiche dei prezzi ESG di Microsoft, Amazon e Apple nell'intervallo di tempo indicato come $[0, 252]$, che va dal 31/12/2020 al 31/12/2021, per i valori di $\lambda \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75\}$. (Per i codici in Matlab si veda l'Appendice B).

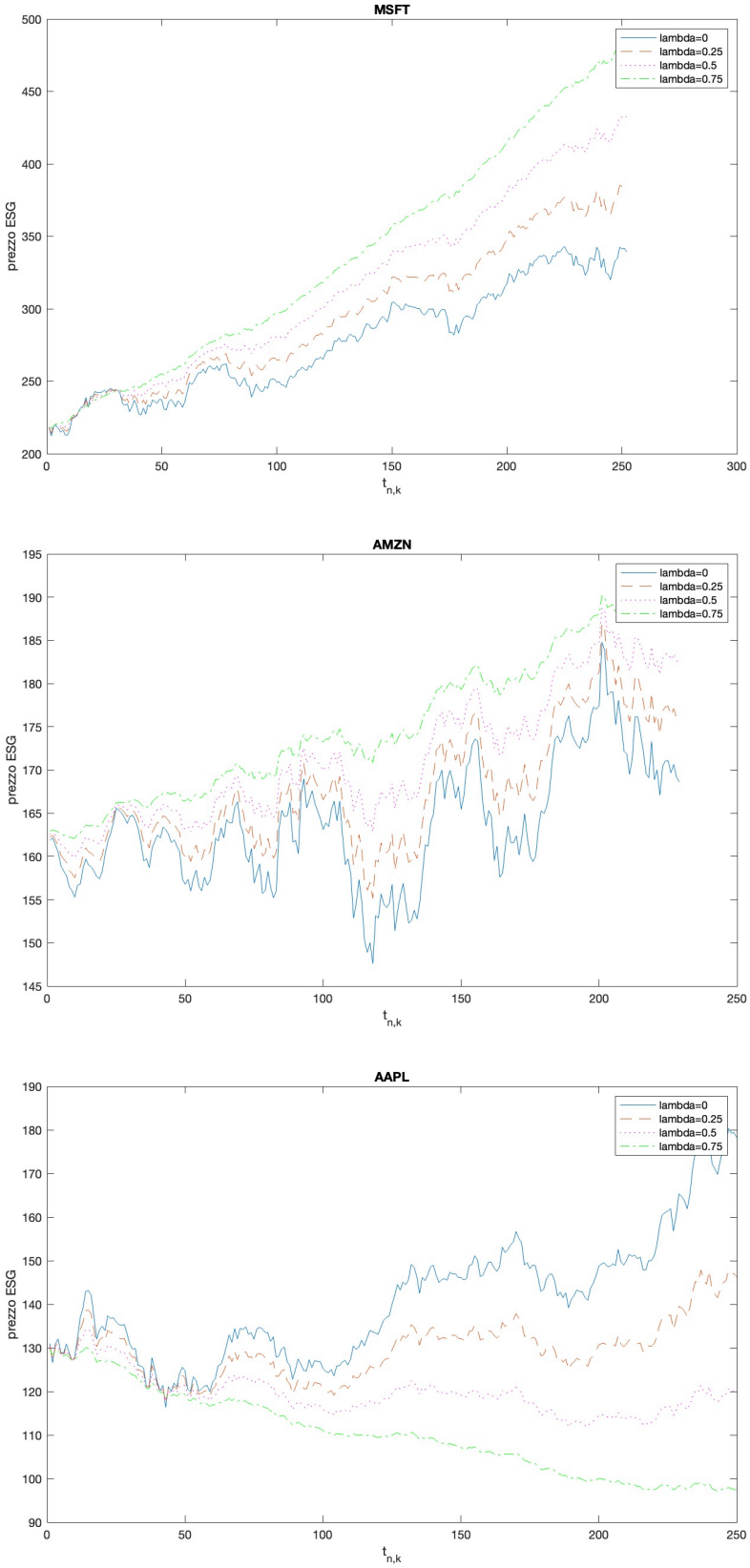


Figura 3.1: "Prezzi ESG" di Microsoft, Amazon e Apple.

Vogliamo confrontare ora l'evoluzione dei prezzi ESG tra le tre diverse aziende, in relazione ai valori assunti da λ.
Nella Figura 3.2 i grafici dei prezzi ESG sono scalati in modo che il prezzo iniziale, ovvero quello in data 30/12/2020, abbia valore 1 per $\lambda = 0$ per ciascuna delle tre stock. Di conseguenza anche il prezzo ESG in ogni altra data viene riscalato ed è più immediato il confronto tra i tre grafici.

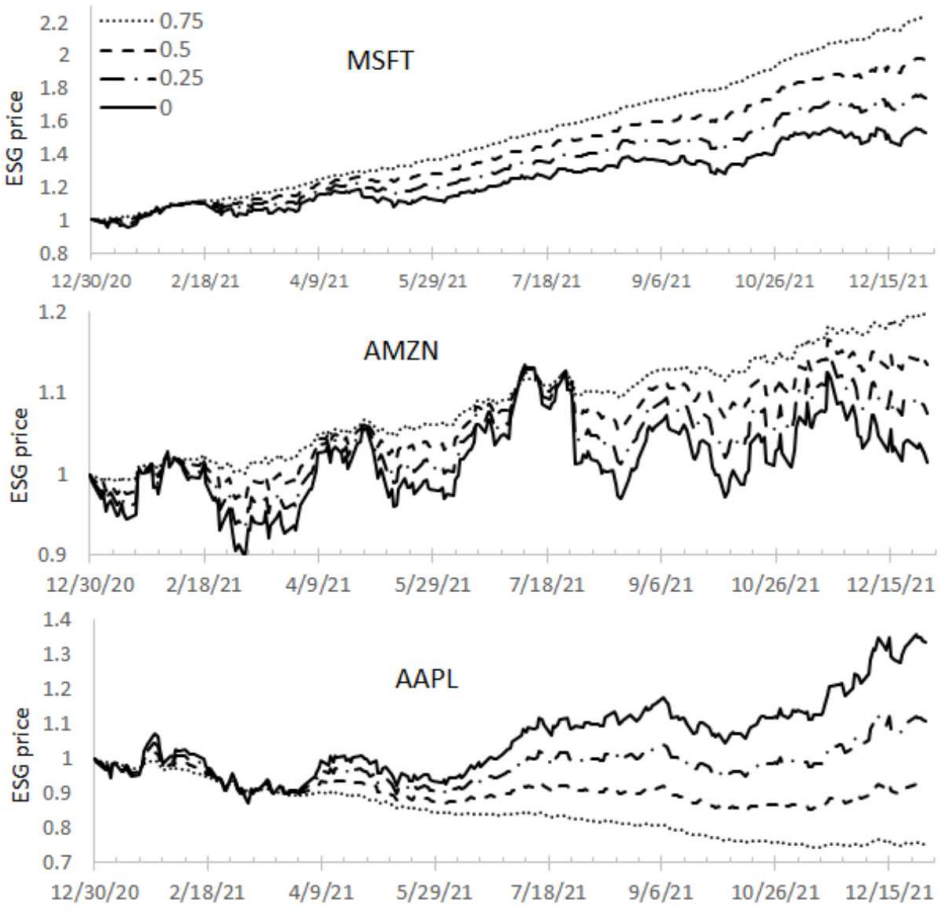


Figura 3.2:
Prezzi ESG scalati di MSFT, AMZN, AAPL per $\lambda \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75\}$.

La prima cosa che possiamo notare è che per le aziende che hanno punteggi ESG più alti il prezzo ESG aumenta al crescere di λ. Tale incremento si osserva per MSFT, che ha l'andamento più regolare e l'ESG score più elevato, e anche per AMZN, nonostante un andamento dei prezzi meno regolare. Per AAPL invece, che ha il punteggio ESG più basso, quando aumenta λ si ha che il prezzo ESG diminuisce. Possiamo quindi dedurre che se si decide di integrare la valutazione

ESG e questa è positiva, l'impatto sul prezzo delle stock ne comporta un aumento rispetto a quello finaziario usuale. Al contrario, un punteggio ESG basso implica una riduzione del prezzo ESG. Nel contesto degli investimenti, tale comportamento si dimostra in linea con le modalità di screening positivo e negativo (vedi Capitolo 1) che prevedono la selezione di aziende con buoni ESG scores e l'esclusione di quelle con punteggi bassi.
La determinazione del peso da assegnare agli indicatori ESG vede una componente di soggettività legata agli stili di investimento e alle motivazioni personali degli investitori. Quello che emerge dall'analisi dei grafici è che al crescere di λ, ovvero della rilevanza attribuita agli ESG scores, l'entità dell'aumento del prezzo ESG (o della sua diminuzione nel caso di punteggi negativi) diventa sempre più marcata. Si può inoltre osservare che in tutti e tre i grafici la dinamica dei prezzi ESG tende a ricalcare quella del prezzo tradizionale per i valori più piccoli di λ. Tuttavia, per $\lambda = 0.75$ l'andamento diventa molto più lineare. In questo caso in particolare il prezzo ESG è crescente nel tempo per MSFT e AMZN; per AAPL invece è decrescente, in contrasto a quanto accade per $\lambda = 0$. Questo suggerisce che l'impiego della valutazione ESG ha effetti più evidenti in orizzonti temporali lunghi, sottolineando una prospettiva di crescita per i prezzi ESG delle aziende con un buon punteggio.

Il comportamento dei prezzi ESG può essere spiegato grazie ai box-whisker plot (diagrammi a scatola e baffi)[3] dei rendimenti ESG $r_{n,k,\lambda}$ nella Figura 3.3.

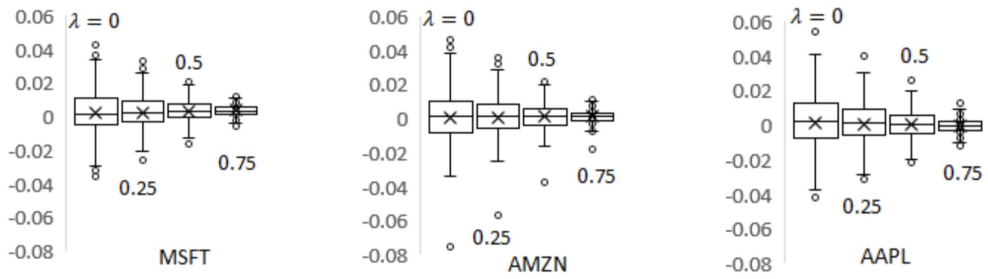


Figura 3.3: Box-whisker plot dei rendimenti $r_{n,k,\lambda}$ di Microsoft, Amazon, Apple.

Notiamo che al crescere di λ il range di valori assunti dai rendimenti aritmetici diminuisce. Ciò è dovuto al peso maggiore che la valutazione ESG, introdotta nel modello in termini di $e_{n,k}$, assume quando λ aumenta.
Gli ESG scores vengono rilasciati una volta all'anno e quindi nel periodo consi-

[3]Mostrano la distribuzione dei dati. La scatola è basata sul primo e il terzo quartile e ha lunghezza pari a IQR = $q_{\frac{3}{4}}$-$q_{\frac{1}{4}}$ (detto *range interquartile*). La linea nella scatola rappresenta la mediana, le linee che si estendono dalla scatola sono dette "baffi" e possono avere lunghezza fino a 1.5 · IQR, i puntini al di fuori dei baffi indicano gli *outliers*.

derato il valore normalizzato $e_{n,k}$ non presenta particolari variazioni nel tempo (di fatto cambia una sola volta, verso la fine dell'anno).
Al crescere di λ, il valore medio di $r_{n,k,\lambda}$: per MSFT aumenta, per AMZN aumenta leggermente, per AAPL diminuisce (diventando negativo per $\lambda = 0.5$ e $\lambda = 0.75$).

Osservazione: Abbiamo preso in esame e confrontato il comportamento dei prezzi ESG delle tre aziende considerate, partendo dal tasso $r_{n,k\lambda}$ calcolato utilizzando gli ESG scores normalizzati $e_{n,k}$ e i rendimenti aritmetici $r_{n,k,0}$. L'analisi è stata condotta per diversi valori di $\lambda \in [0, 1]$.
Uno studio analogo può essere effettuato utilizzando i rendimenti logaritmici definiti come $r_{n,k+1,0} = \ln\left(\frac{S_{n,k+1,0}}{S_{n,k,0}}\right)$ all'interno della formula (3.1) per il calcolo di $r_{n,k,\lambda}$. Tuttavia, i risultati ottenuti in questo caso non mostrano variazioni significative nel comportamento e nei valori dei prezzi ESG, che risultano solo leggermente inferiori rispetto a quelli presentati nella Figura 3.1.

3.2 Stima dei parametri

Utilizziamo ora i modelli presentati nelle Sezioni 2.2 e 2.3 per l'option pricing con valutazione ESG. Ci servirà una stima dei parametri $\mu_{n,k,\lambda}$, $\sigma_{n,k,\lambda}$ e $p_{n,k,\lambda}$, che possiamo ottenere a partire dalle formule

$$\mathbb{E}[r_{n,k+1,\lambda}|S_{n,k,\lambda}] = \mu^{(r)}_{n,k,\lambda}\Delta t_{n,k+1}, \quad \mathrm{Var}[r_{n,k+1,\lambda}|S_{n,k,\lambda}] = (\sigma^{(r)}_{n,k,\lambda})^2\Delta t_{n,k+1}. \tag{3.2}$$

dove $\mu_{n,k,\lambda} = \mu^{(r)}_{n,k,\lambda}$, $\quad \sigma^2_{n,k,\lambda} = (\sigma^{(r)}_{n,k,\lambda})^2$ nel caso di rendimenti aritmetici
e $\mu_{n,k,\lambda} = \mu^{(r)}_{n,k,\lambda} + \frac{(\sigma^{(r)}_{n,k,\lambda})^2}{2}$, $\quad \sigma_{n,k,\lambda} = \sigma^{(r)}_{n,k,\lambda}$ in quello di rendimenti logaritmici.

Per calcolare il valor medio e la varianza dei rendimenti, utilizziamo i dati relativi ai prezzi di chiusura di ciascuna stock nel periodo di tempo dall'01/01/2021 al 31/12/2021[4] considerando, come nella sezione precedente, l'intervallo di tempo $[0, 252]$ costituito da 252 giorni lavorativi annuali e con $\Delta t_{n,k} \equiv 1$. In questo modo possiamo calcolare i rendimenti $r_{n,k,0}$ in ogni intervallo tra due istanti di trading successivi e poi i corrispettivi rendimenti $r_{n,k,\lambda}$ con valutazione ESG attraverso la formula (3.1) per un dato valore di λ. Ne calcoliamo quindi la media e la varianza e da (3.2) otteniamo una stima dei parametri $\mu_{n,k,\lambda} \equiv \hat{\mu}_\lambda$ e $\sigma_{n,k,\lambda} \equiv \hat{\sigma}_\lambda$.
Per quanto riguarda la stima della probabilità $p_{n,k,\lambda} \equiv p_\lambda$, è calcolata come la proporzione di giorni in cui i rendimenti assumono valori non-negativi nel periodo

[4]Fonti: RobecoSAM da Bloomberg Professional Services, Yahoo Finance

considerato:

$$\hat{p}_\lambda = \frac{\text{numero di giorni con rendimento non-negativo}}{\text{numero di giorni in totale}}.$$

La stima dei parametri $\hat{\mu}_\lambda$, $\hat{\sigma}_\lambda$ e $\hat{p}_\lambda$ per i valori di $\lambda \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75\}$ è indicata nella Tabella 3.2 (per i codici in Matlab si veda l'Appendice B).

Azienda	$\hat{\mu}_0$	$\hat{\mu}_{0.25}$	$\hat{\mu}_{0.5}$	$\hat{\mu}_{0.75}$ ($\cdot 10^{-3}$)	$\hat{\sigma}_0$	$\hat{\sigma}_{0.25}$	$\hat{\sigma}_{0.5}$	$\hat{\sigma}_{0.75}$ ($\cdot 10^{-2}$)	$\hat{p}_0$	$\hat{p}_{0.25}$	$\hat{p}_{0.5}$	$\hat{p}_{0.75}$
rendimenti aritmetici												
MSFT	1.76	2.24	2.72	3.19	1.33	0.99	0.66	0.33	0.52	0.57	0.66	0.85
AMZN	0.21	0.38	0.55	0.72	1.52	1.14	0.76	0.38	0.51	0.52	0.54	0.60
AAPL	1.31	0.50	-0.30	-1.11	1.58	1.19	0.79	0.40	0.52	0.51	0.46	0.36
rendimenti logaritmici												
MSFT	1.76	2.22	2.69	3.18	1.32	0.99	0.66	0.33	0.52	0.57	0.66	0.85
AMZN	0.21	0.36	0.52	0.70	1.52	1.14	0.76	0.38	0.51	0.52	0.54	0.60
AAPL	1.30	0.48	-0.33	-1.12	1.58	1.19	0.79	0.40	0.52	0.51	0.46	0.36

Tabella 3.2: Stima dei parametri per i modelli binomiali con valutazione ESG.

Osservazioni: nel periodo di tempo esaminato:

- Per Microsoft si ottengono i valori più grandi di $\hat{\mu}_\lambda$ e $\hat{p}_\lambda$ e il valore più piccolo di $\hat{\sigma}_\lambda$
- Microsoft e Amazon hanno ESG score normalizzati $e_{n,k,\lambda}$ positivi e $\hat{\mu}_\lambda$ aumenta al crescere di λ. Lo stesso vale per $\hat{p}_\lambda$, poichè il termine $\lambda e_{n,k,\lambda} > 0$ in (3.1) fa aumentare il numero di giorni con rendimento $r_{n,k,\lambda}$ positivo in confronto a $r_{n,k,0}$. Inoltre $\hat{p}_\lambda$ cresce più rapidamente quando il punteggio ESG è maggiore
- Per Apple, che ha un punteggio ESG normalizzato negativo, si ha che $\hat{\mu}_\lambda$ e $\hat{p}_\lambda$ decrescono all'aumentare di λ
- I valori di $\hat{\sigma}_\lambda$ diminuiscono al crescere di λ per tutte e tre le aziende.

3.3 Superfici di intensità ESG

Il parametro $\lambda \in [0,1]$ indica l'*intensità ESG*, ovvero il peso relativo attribuito alla valutazione ESG rispetto al rendimento finanziario tradizionale.
Il mercato preso in esame nel nostro modello si caratterizza per la presenza di un'opzione Call Europea C che ha S come sottostante. Per quanto riguarda S, possiamo utilizzare i tre stock analizzati nella sezione precedente, ovvero MSFT, AMZN e AAPL. Ricordiamo che il payoff di un'opzione Call C su S con scadenza T e prezzo strike K è $X = (S_T - K)^+$.
In questa sezione ci occupiamo di stimare l'intensità ESG confrontando i prezzi di mercato delle opzioni Call su MSFT, AMZN e AAPL con quelli calcolati applicando il nostro modello.
Definiamo l'intensità ESG $\lambda^{(i)}(T,K)$ in funzione della scadenza T e dello strike K di C, per ogni stock i, utilizzando la minimizzazione

$$\lambda^{(i)}(T,K) = \arg\min_{\lambda}\left(\frac{C^{(i)}(S_T,K;r_f,\hat{\mu}_\lambda,\hat{\sigma}_\lambda,\hat{p}_\lambda) - C^{(i)}(S_T,K)}{C^{(i)}(S_T,K)}\right)^2 \tag{3.3}$$

dove

- $C^{(i)}(S_T,K;r_f,\hat{\mu}_\lambda,\hat{\sigma}_\lambda,\hat{p}_\lambda)$ indica i prezzi della Call su S, con scadenza T e strike K; in funzione del tasso risk-free r_f e dei parametri $\hat{\mu}_\lambda, \hat{\sigma}_\lambda$ e $\hat{p}_\lambda$ relativi al modello binomiale. Notiamo che sono proprio questi parametri a dipendere da λ.

- $C^{(i)}(S_T,K)$ sono i prezzi di mercato delle opzioni Call con la stock i come sottostante[5].

Il periodo di tempo preso in considerazione è $[0, T = 252]$, con $t_{n,k} = k\Delta t$, $k = 0,\dots,252$ e $\Delta t = 1$ in maniera analoga alle sezioni precedenti.

Per calcolare il prezzo $C^{(i)}(S_T,K;r_f,\hat{\mu}_\lambda,\hat{\sigma}_\lambda,\hat{p}_\lambda)$, per ogni $\lambda \in [0,1]$, ricaviamo prima una stima dei parametri $\hat{\mu}_\lambda, \hat{\sigma}_\lambda$ e $\hat{p}_\lambda$ come descritto nella Sezione 3.2. Utilizziamo quindi questi parametri, i prezzi iniziali S_0 delle tre stock (nella Tabella 3.1) e un tasso risk-free r_f pari all'1.52%[6] per applicare il modello con alberi binomiali seguendo il procedimento indicato nella Sezione 2.4.

Una volta calcolato $C^{(i)}(S_T,K;r_f,\hat{\mu}_\lambda,\hat{\sigma}_\lambda,\hat{p}_\lambda)$, lo si confronta con i dati di mercato in modo da stimare il valore di λ che minimizzi l'errore. Tale minimizzazione viene effettuata su un insieme $\lambda \in \{0, 0.01, 0.02, \dots, 1\}$ di valori dell'intensità ESG,

[5]Fonte: Cboe, per il 31/12/2021. Si considera un set di dati costituito da 699 opzioni Call su AAPL, 581 su MSFT e 1213 su AMZN, con scadenze comprese tra il 21/01/2022 e il 15/07/2022.

[6]da 10-year U.S.Treasury yield curve rate per il 31/12/2021, https://www.treasury.gov/

per tutti i valori di K, T per cui l'opzione Call $C^{(i)}(S_T, K)$ ha un prezzo diverso da 0.

Le superfici di intensità ESG nella Figura 3.4 consentono di visualizzare l'intensità ESG $\lambda(T, M = K/S_T)$ in funzione della scadenza T e del rapporto $M = K/S_T$, noto come *moneyness* o *valore a parità di sottostante*.

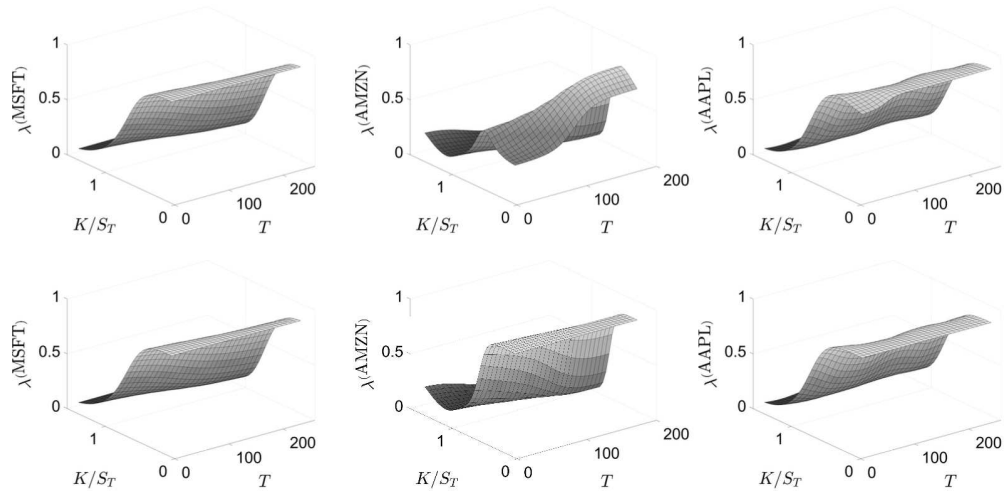


Figura 3.4: Superfici di intensità ESG $\lambda(T, M)$ in funzione della scadenza T (in giorni) e di $M = K/S_T$, per MSFT, AMZN, AAPL. Riga in alto: modello con rendimenti aritmetici; riga in basso: modello con rendimenti logaritmici.

La *moneyness* $M = K/S_T$ misura il grado con cui uno strumento derivato può avere un valore monetario positivo al momento della sua scadenza. In base al valore di M, un'opzione Call può essere:

- *at-the-money* se il prezzo strike K è identico al prezzo S_T del sottostante, ovvero $K = S_T$ e quindi $M = 1$
- *out-of-the-money* se $K > S_T$ e dunque $M > 1$ (esercitare l'opzione farebbe perdere soldi al detentore, l'opzione non ha valore intrinseco e infatti il suo payoff $X = (S_T - K)^+$ è uguale a 0)
- *into-the-money* se $K < S_T$, ovvero $M < 1$ (l'opzione ha valore intrinseco e payoff positivo).

Osservando le superfici di intensità ESG notiamo che in generale, per entrambi i modelli e per tutte le aziende, quando l'opzione Call è *out-of-the-money* (per

$M > 1$) i valori di $\lambda(T, M)$ sono più piccoli. Ciò suggerisce che gli ESG scores vengono presi meno in considerazione quando è poco probabile che l'opzione venga esercitata. Al contrario, il valore di $\lambda(T, M)$ aumenta quando l'opzione diventa *into-the-money*, evidenziando una maggiore rilevanza dei fattori ESG per opzioni che hanno valore intrinseco.
Per quanto riguarda la dipendenza di $\lambda(T, M)$ da T, si osserva un leggero aumento al crescere di T. Ciò rappresenta un'ulteriore evidenza del fatto che l'impatto della valutazione ESG diventa più significativo nel lungo termine.

Andando poi nel dettaglio, per il modello basato su rendimenti logaritmici le superfici appaiono qualitativamente simili per tutti e tre gli stock. Nel caso di quello con rendimenti aritmetici, AMZN mostra un comportamento diverso rispetto alle altre due stock, in quanto si nota una maggiore dipendenza da T per i valori *into-the-money* di M. Una delle cause di ciò potrebbe essere legata all'andamento del prezzo di AMZN, che appare meno regolare rispetto agli altri due stock, come evidenziato dai grafici nella Figura 3.1.

Appendice A

Risultati utili

A.1 Probabilità

Definizione. *(filtrazione) Una famiglia di σ-algebre $(\mathscr{F}_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ che soddisfi*

$$\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathscr{F}_T$$

è detta filtrazione.
Inoltre $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}, \mathbb{P})$ è uno spazio di probabilità filtrato.

Definizione. *(variabile aleatoria) Sia $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e sia E un insieme arbitrario non vuoto. Si dice variabile aleatoria ogni funzione $X : \Omega \to E$ definita su Ω e a valori in E.*

Definizione. *(processo stocastico) Consideriamo un insieme $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots, T\}$, insieme degli indici, e due spazi misurabili $(\Omega, \mathscr{F})$, $(E, \mathscr{E})$. Un processo stocastico $X = (X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ a valori in $(E, \mathscr{E})$, è una famiglia di variabili aleatorie.*

Definizione. *Dato $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}, \mathbb{P})$, un processo stocastico X si dice*

- *adattato a $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ se ogni X_t è $\mathscr{F}_t$-misurabile*
- *predicibile rispetto a $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ se ogni X_t è $\mathscr{F}_{t-1}$-misurabile.*

Definizione. *(martingala) dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e una filtrazione $(\mathscr{F}_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$, diremo che il processo stocastico X è una martingala rispetto alla filtrazione $(\mathscr{F}_t)_{t\in\{1,\dots,T\}}$ se*

- *X è adattato rispetto a $(\mathscr{F}_t)_{t\in\{1,\dots,T\}}$*
- *$\forall t \in \{1, \dots, T\}$*

$$\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_{t-1}] = X_{t-1}.$$

Definizione. *Consideriamo lo spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, un processo stocastico* X *a valori in* E *e la filtrazione* $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ *ad esso associata. Diremo che* X *soddisfa la proprietà di Markov se vale, per* $0 \leq s \leq t$ *e per ogni* $A \in \mathcal{B}(E)$

$$\mathbb{P}[X_t \in A|\mathcal{F}_s^X] = \mathbb{P}[X_t \in A|X_s].$$

A.2 Finanza Matematica

Tratto da [11].

Mercati discreti Consideriamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, con $|\Omega|$ finita, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}(\omega) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$. Fissiamo $t_0, t_1, \dots, t_N \in \mathbb{R}$ con

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N$$

rappresentante la griglia temporale.
Fissato $d \in \mathbb{N}$, un modello di mercato discreto è costituito da un titolo non rischioso (bond) B e da d titoli rischiosi (stock) $S^1, \dots, S^d$.
Per il titolo non rischioso B vale

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B_n = B_{n-1}(1 + r_n) \quad ,n = 1, \dots, N \end{cases}$$

dove $r_n > -1$ indica il tasso di interesse relativo al periodo da t_{n-1} a t_n.
I titoli non rischiosi hanno la seguente dinamica:

$$\begin{cases} S_0^i \in \mathbb{R} > 0 \\ S_n^i = S_{n-1}^i(1 + \mu_n^i) \quad ,n = 1, \dots, N \end{cases}$$

dove μ_n^i è una variabile aleatoria che rappresenta il rendimento del titolo i-esimo da t_{n-1} a t_n.

Pricing di strumenti derivati Consideriamo un modello di mercato discreto con vettore dei titoli rischiosi in t_n $S_n = (S_n^1, \dots, S_n^d)$ detti primari o sottostanti.

Definizione. *Un titolo derivato, scritto sul sottostante* S*, è una variabile aleatoria* X *definita su* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *che sia misurabile rispetto alla* σ*-algebra* $\mathcal{F}_N^S := \sigma\{S_n, n \leq N\}$*. Tale* X *viene anche detta "payoff" o "claim".*

Esempio. *Opzione Call (di acquisto) Europea su* S^j *con scadenza* t_N *e strike* K*: dà al suo detentore la possibilità di acquistare il titolo sottostante* S^j *alla scadenza* t_N*, ad un prezzo pattuito alla data di stipula del contratto pari a* $K > 0$*.*
Il suo payoff è $X^{Call} = (S_N^j - K)^+$*.*

Definizione. *Una misura martingala equivalente con numeraire B è una misura di probabilità $\mathbb{Q}$ su $(\Omega, \mathcal{F})$ tale che*

$$\begin{aligned} &a)\ \mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \\ &b)\ \forall n = 1, \dots, N \quad \tilde{S}_{n-1} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_n | \mathcal{F}_{n-1}] \quad q.c. \end{aligned} \tag{A.1}$$

ovvero $(\tilde{S}_n)_{n\geq 1}$ è una $\mathbb{Q}$-martingala, dove $\tilde{S}_n := \frac{S_n}{B_n}$.
Equivalentemente

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_n}{B_n} | \mathcal{F}_{n-1}\right] = \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\ , \forall n, q.c.$$

Teorema. ***Primo Teorema fondamentale dell'Asset Pricing****: un modello di mercato discreto è privo di arbitraggio se e solo se esiste almeno una misura martingala equivalente.*

Appendice B

Codici Matlab

In questa sezione vengono riportati i codici utilizzati nella realizzazione del Capitolo 3 di questo lavoro. In particolare, si riporta l'esempio in cui i dati dei prezzi e dei punteggi ESG sono quelli relativi alla stock MSFT. I codici per AMZN e AAPL seguono una struttura analoga.

```
% GRAFICO DEI PREZZI CON VALUTAZIONE ESG PER MSFT
% S1: prezzi di chiusura di MSFT nel periodo tra
%     l'01/01/2021 e il 31/12/2021
% e:  ESG score normalizzato
% l:  lambda
S1 = [339.32, 341.95, 341.25, 342.45, 334.69, 333.20,
   327.29, 319.91, 323.80, 324.90, 334.65, 328.34,
   339.40, 342.54, 333.10, 334.97, 334.92, 326.19,
   323.01, 329.49, 330.08, 330.59, 336.63, 329.68,
   337.91, 337.68, 339.83, 343.11, 341.27, 339.12,
   339.51, 336.07, 336.72, 332.43, 330.80, 335.95,
   336.99, 336.06, 336.44, 334.00, 333.13, 329.37,
   331.62, 324.35, 323.17, 326.19, 324.90, 327.29,
   322.05, 318.33, 322.88, 324.20, 317.13, 314.99,
   311.00, 308.51, 310.02, 306.13, 310.44, 309.16,
   310.76, 307.41, 308.23, 307.29, 304.21, 302.75,
   296.31, 292.88, 294.23, 294.85, 294.85, 293.11,
   288.76, 283.11, 289.10, 281.92, 284.00, 283.52,
   294.17, 299.35, 299.56, 298.58, 294.80, 294.30,
   299.87, 299.72, 299.79, 296.99, 295.71, 297.25,
   300.21, 300.18, 301.14, 301.15, 301.83, 301.88,
   303.59, 299.72, 299.09, 302.01, 302.62, 304.65,
   304.36, 296.77, 290.73, 293.08, 294.60, 292.85,
   289.81, 286.95, 286.44, 286.54, 289.05, 289.67,
   286.14, 281.40, 279.32, 277.01, 280.75, 281.03,
```

```
    282.51, 280.98, 277.32, 277.94, 277.42, 279.93,
    277.66, 277.65, 271.60, 270.90, 271.40, 268.72,
    265.02, 266.69, 265.27, 265.51, 262.63, 259.43,
    260.90, 257.38, 258.36, 259.89, 257.89, 257.24,
    253.59, 252.57, 253.81, 250.79, 245.71, 247.30,
    247.40, 249.68, 249.31, 251.49, 251.72, 250.78,
    245.17, 246.48, 243.12, 243.08, 245.18, 248.15,
    243.03, 239.00, 246.23, 247.18, 252.46, 249.73,
    246.47, 247.79, 251.86, 252.18, 252.51, 254.56,
    261.97, 261.55, 261.15, 257.17, 260.58, 258.26,
    258.74, 260.74, 259.50, 255.59, 258.49, 255.91,
    255.85, 253.25, 249.90, 247.86, 249.07, 242.35,
    235.77, 231.85, 235.24, 236.48, 232.34, 235.46,
    237.58, 235.99, 230.35, 230.72, 237.04, 237.71,
    234.81, 235.75, 237.13, 232.42, 233.78, 227.39,
    231.60, 226.73, 227.56, 233.87, 236.94, 232.38,
    228.99, 234.55, 233.27, 234.51, 240.97, 243.79,
    244.20, 243.70, 244.99, 244.49, 242.82, 243.77,
    242.47, 242.20, 242.01, 243.00, 239.51, 239.65,
    231.96, 238.93, 232.90, 232.33, 229.53, 225.95,
    224.97, 224.34, 216.44, 212.65, 213.02, 216.34,
    214.93, 217.49, 219.62, 218.29, 212.25, 217.90,
    217.69];
S = flip(S1);
e=3.65*10^(-3);
R = [];           % Calcolo dei rendimenti aritmetici
for i=1:length(S)-1
    R(i)=(S(i+1)-S(i))/S(i);
end
l=0;
Rl_0=[];
for i=1:length(R)
    Rl_0(i)=l*e+(1-l)*R(i);
end
% R_k+1 = (S_(k+1)-S_k)/S_k => S_(k+1)= S_k*(1 + R_(k+1))
S0 = S(1);
Sl_0 = [];
Sl_0(1)= S0*(1+Rl_0(1));
for i=2:length(Rl_0)
    Sl_0(i)= Sl_0(i-1)*(1+Rl_0(i));
end
y=linspace(1,length(Sl_0),length(Sl_0));
l=0.25;
```

```
Rl_25=[];
for i=1:length(R)
    Rl_25(i)=l*e+(1-l)*R(i);
end
Sl_25 = [];
Sl_25(1)= S0*(1+Rl_25(1));
for i=2:length(Rl_25)
    Sl_25(i)= Sl_25(i-1)*(1+Rl_25(i));
end
l=0.5;
Rl_50=[];
for i=1:length(R)
    Rl_50(i)=l*e+(1-l)*R(i);
end
Sl_50 = [];
Sl_50(1)= S0*(1+Rl_50(1));
for i=2:length(Rl_50)
    Sl_50(i)= Sl_50(i-1)*(1+Rl_50(i));
end
l=0.75;
Rl_75=[];
for i=1:length(R)
    Rl_75(i)=l*e+(1-l)*R(i);
end
Sl_75 = [];
Sl_75(1)= S0*(1+Rl_75(1));
for i=2:length(Rl_75)
    Sl_75(i)= Sl_75(i-1)*(1+Rl_75(i));
end
figure
plot(y,Sl_0,y,Sl_25,"--",y,Sl_50,"m:",y,Sl_75,"g-.")
legend("lambda=0","lambda=0.25","lambda=0.5","lambda=0.75
   ")
title("MSFT")
xlabel("t_{n,k}")
ylabel("prezzo ESG")

% STIMA DEI PARAMETRI mu, sigma, p
for l= [0,0.25,0.50,0.75]
   R = [];      % Calcolo dei rendimenti aritmetici
   for i=1:length(S)-1
       R(i)=(S(i+1)-S(i))/S(i);
   end
```

```
    Rl=[];
    for i=1:length(R)
        Rl(i)=l*e+(1-l)*R(i);
    end
    mu = sum(Rl)/length(Rl);  % E[r]=mu
    Rl2=[];
    for i=1:length(Rl)
        Rl2(i)=Rl(i)^2;
    end                       % Var[r] = E[r^2]-(E[r])^2
    Var = sum(Rl2)/length(Rl2)-(sum(Rl)/length(Rl))^2;
    sigma = sqrt(Var);        % Var[r]= sigma^2
    P = [];
    for i=1:length(Rl)
        if Rl(i) >= 0
            P = [P, Rl(i)];
        end
    end
    p=length(P)/length(S);
    fprintf("\n Per lambda = %1.2f: ", l);
    fprintf("\n mu= %1.6f, sigma= %1.6f, p= %1.6f", mu,
       sigma, p);
end
```

Bibliografia

[1] A. Amel-Zadeh e G. Serafeim. *Why and how investors use ESG information: Evidence from a global survey*. Financial Analysts Journal, 2018.

[2] R. Bénabou e J. Tirole. *Individual and corporate social responsibility*. Economica, 2010.

[3] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures, Second Edition*. New York: Wiley-Interscience, 1999.

[4] T. Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 2009.

[5] R. Boffo e R. Patalano. *ESG Investing: Practices, Progress and Challenges.* Organization for Economic Cooperation e Development, Paris, France. www.oecd.org/finance/ESG-Investing-Practices-Progress-and-Challenges.pdf, 2020.

[6] Y. Hu, W. Brent Lindquist e Svetlozar T. Rachev. *ESG-Valued Discrete Option Pricing in Complete Markets*. 2022.

[7] Y. Hu et al. *Option pricing in markets with informed traders*. International Journal of Theoretical e Applied Finance, 2020.

[8] J. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson Education, 2012.

[9] Achim Klenke. *Probability Theory: A Comprehensive Course*. Springer, 2014.

[10] MSCI ESG Research LLC. *ESG Ratings Methodology*. 2024.

[11] Andrea Pascucci e Wolfgang J. Runggaldier. *Finanza matematica: Teoria e problemi per modelli multiperiodali*. Springer, 2009.

[12] T. Whelan et al. *ESG AND FINANCIAL PERFORMANCE: Uncovering the Relationship by Aggregating Evidence from 1,000 Plus Studies Published between 2015 – 2020*. 2021.

[13] A. Shirvani Y. Hu et al. *Option pricing incorporating factor dynamics in complete markets*. Journal of Risk e Financial Management, 2020.