



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi Industriali
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica e Meccatronica

Tesi di Laurea Triennale

Analisi teorica e numerica di una piastra soggetta a trazione indebolita
da un intaglio a V raccordato

Theoretical and numerical analysis on a tensioned plate weakened by a
V-notch with end hole

Relatore: Ing. Michele Zappalorto

Correlatore: Ing. Alessandro Pontefisso

Laureando: Francesco Lorenzato

Anno accademico 2012-2013

Sommario

1. Introduzione.....	4
1.1 Il calcolo delle tensioni.....	5
1.2 Il modello agli elementi finiti.....	5
1.3 Il programma Ansys.....	6
2. Geometria.....	8
2.1 Geometria dell'intaglio.....	8
2.2 Modello agli elementi finiti della piastra analizzata.....	10
3. Equazioni utilizzate.....	13
4. Risultati ottenuti.....	15
4.1 Piastra $h=20\text{mm}$; $\rho=0.1\text{ mm}$	15
4.2 Piastra $h=20\text{mm}$; $\rho=0.5\text{ mm}$	16
4.3 Piastra $h=20\text{mm}$; $\rho=2\text{ mm}$	17
4.4 Piastra $h=20\text{mm}$; $\rho=4\text{ mm}$	18
4.5 Piastra $h=40\text{mm}$; $\rho=0.1\text{ mm}$	19
4.6 Piastra $h=40\text{mm}$; $\rho=0.5\text{ mm}$	20
4.7 Piastra $h=40\text{mm}$; $\rho=2\text{ mm}$	21
4.8 Piastra $h=40\text{mm}$; $\rho=4\text{ mm}$	22
4.9 Piastra $h=60\text{mm}$; $\rho=0.1\text{ mm}$	23
4.10 Piastra $h=60\text{mm}$; $\rho=0.5\text{ mm}$	24
4.11 Piastra $h=60\text{mm}$; $\rho=2\text{ mm}$	25
4.12 Piastra $h=60\text{mm}$; $\rho=4\text{ mm}$	26
4.13 Piastra $h=80\text{mm}$; $\rho=0.1\text{ mm}$	27
4.14 Piastra $h=80\text{mm}$; $\rho=0.5\text{ mm}$	28
4.15 Piastra $h=80\text{mm}$; $\rho=2\text{ mm}$	29
4.16 Piastra $h=80\text{mm}$; $\rho=4\text{ mm}$	30
4.17 Piastra $h=100\text{mm}$; $\rho=0.1\text{ mm}$	31
4.18 Piastra $h=100\text{mm}$; $\rho=0.5\text{ mm}$	32
4.19 Piastra $h=100\text{mm}$; $\rho=2\text{ mm}$	33
4.20 Piastra $h=100\text{mm}$; $\rho=4\text{ mm}$	34
5. Conclusioni.....	35
6. Bibliografia.....	36

1. Introduzione

L'obiettivo della presente trattazione è quello di confrontare i dati che si ottengono attraverso un approccio numerico e uno matematico nel calcolo delle tensioni su un componente, più in particolare nel nostro caso una piastra, avente un intaglio di forma particolare, che verrà nel seguito analizzato, e soggetta a trazione.

I valori di queste tensioni verranno ricavati sulla bisettrice dell'intaglio e sul tratto circolare del profilo dello stesso.

I dati ottenuti rispettivamente dal programma di calcolo e dalle formule matematiche saranno messi a confronto su uno stesso grafico in modo tale che si possa facilmente avere un riscontro di quanto i valori si discostano tra loro.

Da questi grafici e in particolare dal loro scostamento riusciremo a stimare in che misura i due approcci si equivalgono, questo ci darà quindi la possibilità di capire quanto i valori teorici si avvicinano a quelli veri.

Le equazioni che verranno utilizzate sono riportate nella referenza [1].

Il confronto sarà effettuato su venti piastre al variare di alcuni parametri geometrici nel seguito descritti.

1.1 Il calcolo delle tensioni

In passato i metodi utilizzati per il calcolo delle tensioni oppure di indici e fattori su componenti di vario genere erano prevalentemente di tipo matematico oppure sperimentale.

Questi metodi hanno però dei limiti, infatti il primo consente un'analisi accurata attraverso formule ma solamente su componenti con geometria semplice, ad una complicazione della forma geometrica del componente corrisponde infatti quasi sempre una complicazione anche delle formule e dei calcoli da eseguire.

Inoltre la maggior parte delle volte la relazione matematica che si ottiene è solamente un'approssimazione dell'andamento delle tensioni di conseguenza i risultati ottenuti non sempre sono accurati.

Il secondo ha come difetto il fatto di richiedere che il componente venga fisicamente realizzato e poi testato, per ricavare una legge devono dunque essere effettuate molte prove su più componenti, ed i risultati ottenuti vanno poi interpolati utilizzando un adeguato software per ricavarne una legge.

Ricordiamo poi che tali prove possono essere costose, infatti richiedono di avere a disposizione dei macchinari e a volte possono essere anche distruttive.

Questi due metodi non forniscono quindi un approccio flessibile al problema ecco perché con il passare degli anni e l'evoluzione della potenza di calcolo si ricorre sempre più, al giorno d'oggi, ad approcci di tipo numerico e quindi all'utilizzo di programmi software.

1.2 Il modello agli elementi finiti

Il metodo agli elementi finiti (FEM) è l'approccio di tipo numerico più diffuso. Esso si basa sulla suddivisione di un modello del componente in una griglia più o meno fitta di elementi.

Ciascun elemento è formato da un certo numero di nodi. Attraverso la costruzione di vettori basati su forze e spostamenti e la correlazione di questi si può ottenere una stima del comportamento del componente sottoposto a sollecitazioni di vario genere, infatti una volta costruita la matrice di correlazione e date le forze agenti il software calcola gli spostamenti e da questi con semplici passaggi si arriva al calcolo delle tensioni.

Naturalmente più fitta sarà questa griglia di elementi e maggiore sarà l'affidabilità e l'accuratezza della soluzione ottenuta, d'altra parte però l'utilizzo di un numero elevato di elementi comporta una notevole quantità di calcoli e quindi un aumento dei tempi di attesa, si dovrà quindi ricercare un compromesso.

Un metodo utilizzato per trovare un buon compromesso è quello di eseguire un'analisi di sensitività: l'utilizzo di un numero sempre più elevato di elementi non porta ad un cambiamento dei valori ottenuti infatti viene raggiunto un valore asintotico.

Il numero di elementi che va scelto quindi è il minimo che riesce a garantire come soluzione il valore asintotico.

Solitamente viene utilizzata una griglia più fitta nelle zone in cui il componente presenta variazioni geometriche e quindi c'è il bisogno di avere una risoluzione più elevata mentre si utilizza una griglia meno fitta dove il componente è regolare.

1.3 Il programma Ansys

L'analisi agli elementi finiti nel nostro caso sarà effettuata mediante l'utilizzo del programma Ansys.

Questo software consente di ricavare le tensioni, le deformazioni... etc. in tre passi successivi.

1 Fase di Pre-Processing: è la fase in cui si crea un modello del componente da analizzare, vengono definiti gli elementi che andranno a comporre la griglia (la loro geometria, il numero di nodi di cui sono composti...), attraverso l'impostazione di alcuni parametri (come ad esempio il modulo elastico) si definisce il materiale di cui è realizzato il componente, attraverso linee e "keypoints" si realizza poi il modello vero e proprio. La griglia di elementi ("mesh") si realizza suddividendo in maniera più o meno fitta le aree che compongono il componente.

2 Fase di Solution: è la fase in cui vengono imposti vincoli, vengono date le eventuali condizioni di simmetria, viene definito il tipo di carico e infine viene avviata la vera e propria soluzione, vengono quindi risolte le equazioni riguardanti ogni nodo e vengono calcolati spostamenti, tensioni... .

3 Fase di Post-Processing: è la fase in cui abbiamo a disposizione i risultati ottenuti e possiamo elaborarli, possiamo visualizzare la deformazione che le nostre condizioni di carico impongono al componente, l'andamento delle varie componenti di tensione, c'è anche la possibilità di rilevare queste tensioni in alcuni punti o linee del componente, metterle in una tabella ed esportarla per elaborarla in un altro software.

2. Geometria

2.1 Geometria dell'intaglio

Come brevemente introdotto inizialmente si andrà ad analizzare una piastra soggetta a trazione (con un carico costante per le varie piastre di 100 MPa) indebolita da un intaglio a V raccordato al variare di alcuni parametri geometrici.

Più in particolare sarà ricavato l'andamento delle tensioni sulla bisettrice dell'intaglio e sul tratto circolare dello stesso al variare del raggio di raccordo e della larghezza della piastra per fare poi il confronto con i valori calcolati.

L'angolo di apertura non sarà variato e rimarrà costante per tutte le piastre a 90° .

Di seguito viene riportata una figura con la forma dell'intaglio considerato e tutti i parametri che poi andranno a variare e i vari valori che saranno considerati.

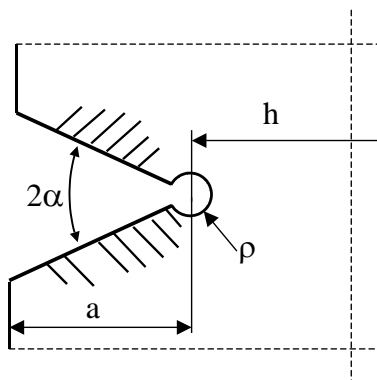


Fig.1 forma dell'intaglio considerato

Per ogni piastra vale $2\alpha=90^\circ$.

Saranno considerate le seguenti geometrie:

1. Piastre con $h=20\text{ mm}$
 - $\rho=0.1\text{ mm}$;
 - $\rho=0.5\text{ mm}$;
 - $\rho=2\text{ mm}$;
 - $\rho=4\text{ mm}$;
2. Piastre con $h=40\text{ mm}$
 - $\rho=0.1\text{ mm}$;
 - $\rho=0.5\text{ mm}$;
 - $\rho=2\text{ mm}$;
 - $\rho=4\text{ mm}$;

3. Piastre con $h = 60$ mm

$\rho = 0.1$ mm;

$\rho = 0.5$ mm;

$\rho = 2$ mm;

$\rho = 4$ mm;

4. Piastre con $h = 80$ mm

$\rho = 0.1$ mm;

$\rho = 0.5$ mm;

$\rho = 2$ mm;

$\rho = 4$ mm;

5. Piastre con $h = 100$ mm

$\rho = 0.1$ mm;

$\rho = 0.5$ mm;

$\rho = 2$ mm;

$\rho = 4$ mm;

2.1 Modello agli elementi finiti della piastra analizzata

Vengono di seguito riportate delle figure che fanno riferimento alla piastra utilizzata, al suo modello agli elementi finiti e alla “mesh” che è stata utilizzata.

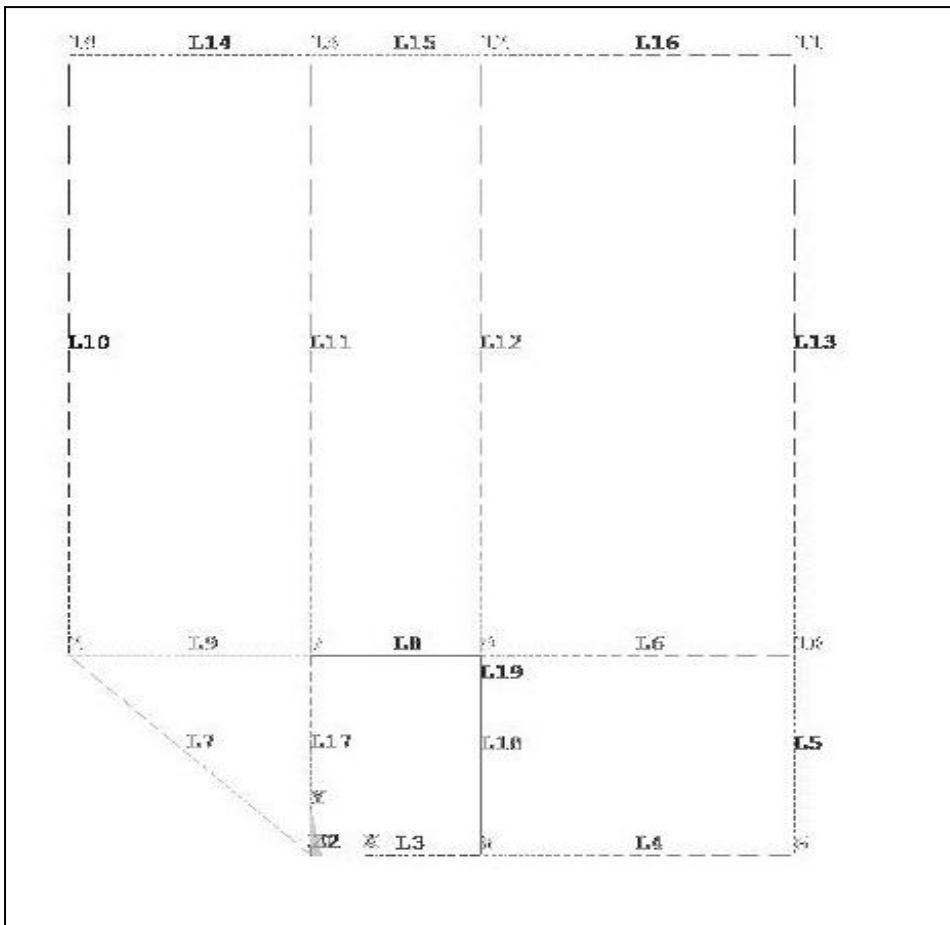


Fig. 2 esempio di modello di una piastra, in particolare $h=20\text{mm}$, $\rho=0.1\text{mm}$.

La Fig.2 riporta in realtà solamente una parte della piastra, in quanto, essendo simmetrica, conviene disegnare solamente un quarto di essa e poi imporre le condizioni di simmetria attraverso l'uso di appositi menù software del programma, si può inoltre notare che, date le piccole dimensioni del raggio di raccordo, esso non risulta visibile, se ne dà di seguito un particolare.

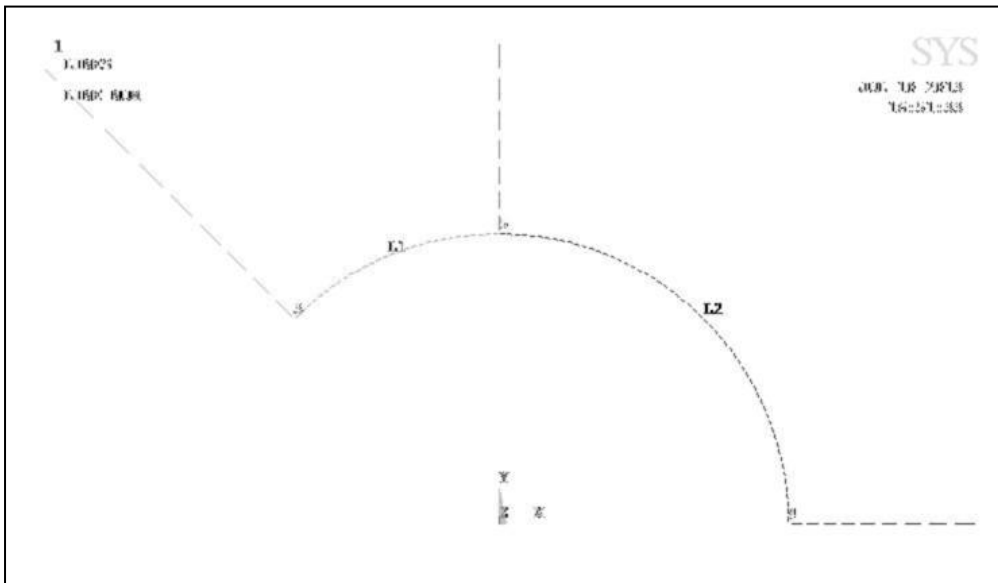


Fig. 3 Particolare dell' intaglio.

In entrambe le figure si può notare che le linee che definiscono la piastra non sono continue bensì tratteggiate, alcune con tratteggio regolare, altre con tratteggio che si “infittisce”. Questa suddivisione delle linee servirà poi per effettuare la “mesh” del pezzo e cioè la suddivisione delle varie aree in un certo numero di elementi. I tratteggi sono irregolari in prossimità delle zone con difformità, la griglia così ottenuta sarà dunque più fitta in tali zone e fornirà quindi dei risultati più accurati.

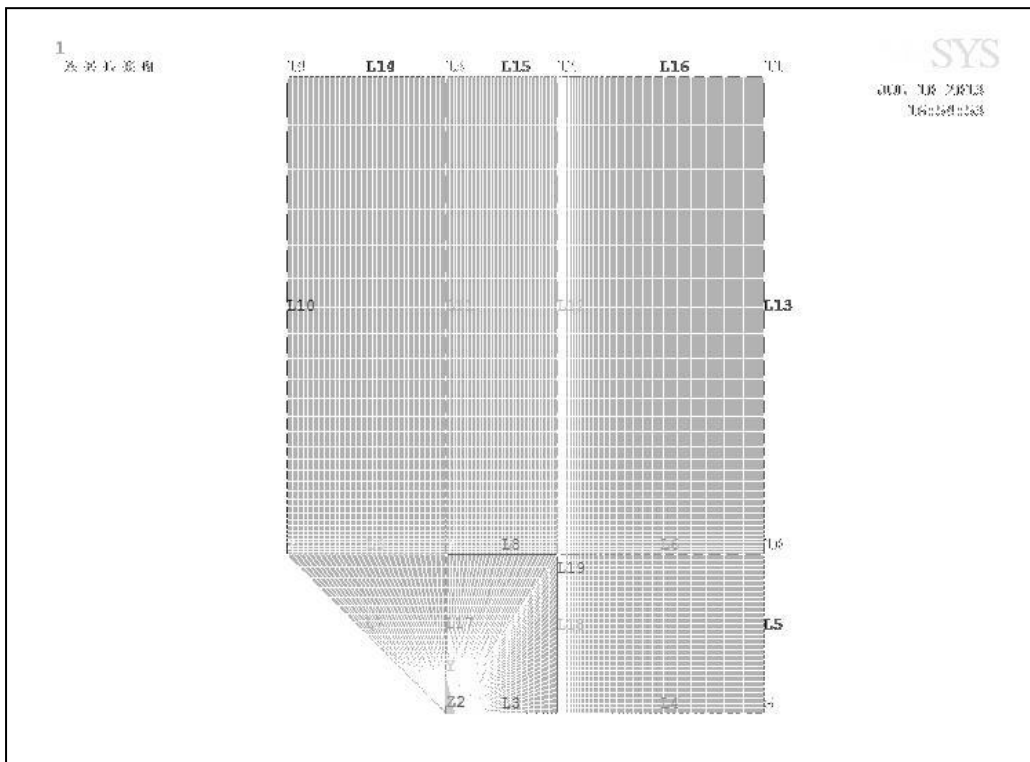


Fig. 4 Mesh utilizzata

La Fig.4 riporta un esempio di “mesh” utilizzata, come si può notare essa non è regolare ma tende ad essere più fitta in prossimità della zona dell’ intaglio.

3. Equazioni utilizzate

Vengono di seguito riportate le equazioni utilizzate per ricavare le tensioni sulla bisettrice dell'intaglio, esse sono tratte da [1].

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\max}}{\tilde{R}_1} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-\lambda_1} \left\{ g_1 + g_2 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\lambda_1} + g_3 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\lambda_1+1} + g_4 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\lambda_1+2} \right\}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_{\max}}{\tilde{R}_1} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-\lambda_1} \left\{ g_5 + g_6 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\lambda_1} - g_3 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\lambda_1+1} - g_4 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\lambda_1+2} \right\}$$

In particolare, lungo la bisettrice risulta $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_y$ e $\sigma_{rr} = \sigma_x$.

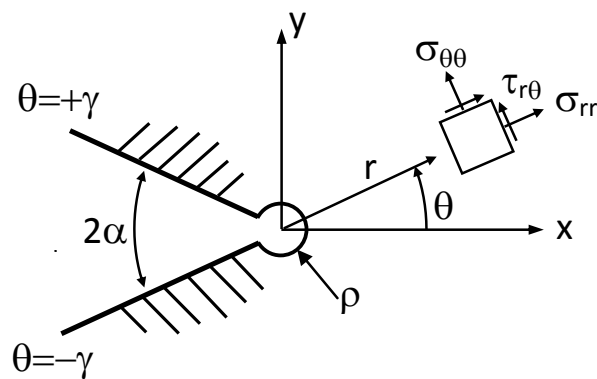


Fig. 5 Intaglio e componenti di tensione

I vari coefficienti che compaiono all' interno delle formule sono tabellati in [1] e variano a seconda dell' angolo di apertura 2α dell' intaglio, mentre σ_{\max} è la σ_y all' apice dell' intaglio. Vengono riportate di seguito le formule con i coefficienti utilizzati per $2\alpha = 90^\circ$.

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\max}}{7.3551} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{0.4555} \left\{ 2.3833 + 1.5116 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1.0890} + 1.3260 \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2.0890} + 2.13424 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{3.0890} \right\}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_{\max}}{7.3551} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{0.4555} \left\{ 1.6167 + 1.8435 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1.0890} - 1.3260 \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2.0890} - 2.1342 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{3.0890} \right\}$$

Per il calcolo delle tensioni sul tratto circolare del profilo invece sono state utilizzate le seguenti relazioni:

$$\sigma_{\theta\theta} = A_1 r^{\lambda_1 - 1} \left\{ \cos(1 - \lambda_1)\theta \left[(1 + \lambda_1) + \tilde{\psi}_{11}(\theta) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\lambda_1} + \tilde{\psi}_{12}(\theta) \tilde{\chi}_{11}(\theta) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\lambda_1 + 1} \right] + \right. \\ \left. + \phi_1(\gamma) \cos(1 + \lambda_1)\theta \left[1 + (1 - \lambda_1) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\lambda_1} + (2 + \lambda_1) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2(\lambda_1 + 1)} \right] \right\}$$

Ed in particolare effettuando il confronto sul tratto circolare vale: $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_1$. Dove $\sigma_1 = \sigma_{\text{princ. max}}$. Le funzioni ausiliarie e il coefficiente A_1 sono stati calcolati utilizzando:

$$\tilde{\psi}_{11}(\theta) = [2 \sin \lambda_1 \theta \cos(\lambda_1 - 1)\theta + (1 - \lambda_1) \sin(2\lambda_1 - 1)\theta] / \sin \theta$$

$$\tilde{\psi}_{12}(\theta) \times \tilde{\chi}_{11}(\theta) = 2(2 - \lambda_1) / \left[1 + \frac{\tan \lambda_1 \theta}{\tan(1 - \lambda_1)\theta} \right]$$

$$A_1 = \frac{\sigma_{\max} \rho^{1 - \lambda_1}}{\left\{ [(1 + \lambda_1) + \tilde{\psi}_{11}(0) + \tilde{\psi}_{12}(0) \tilde{\chi}_{11}(0)] + 4\phi_1(\gamma) \right\}} = \frac{\sigma_{\max} \rho^{1 - \lambda_1}}{\tilde{R}_1}$$

Anche in queste equazioni i coefficienti utilizzati sono tabellati in [1], in particolare:

$$\lambda_1 = 0.5445$$

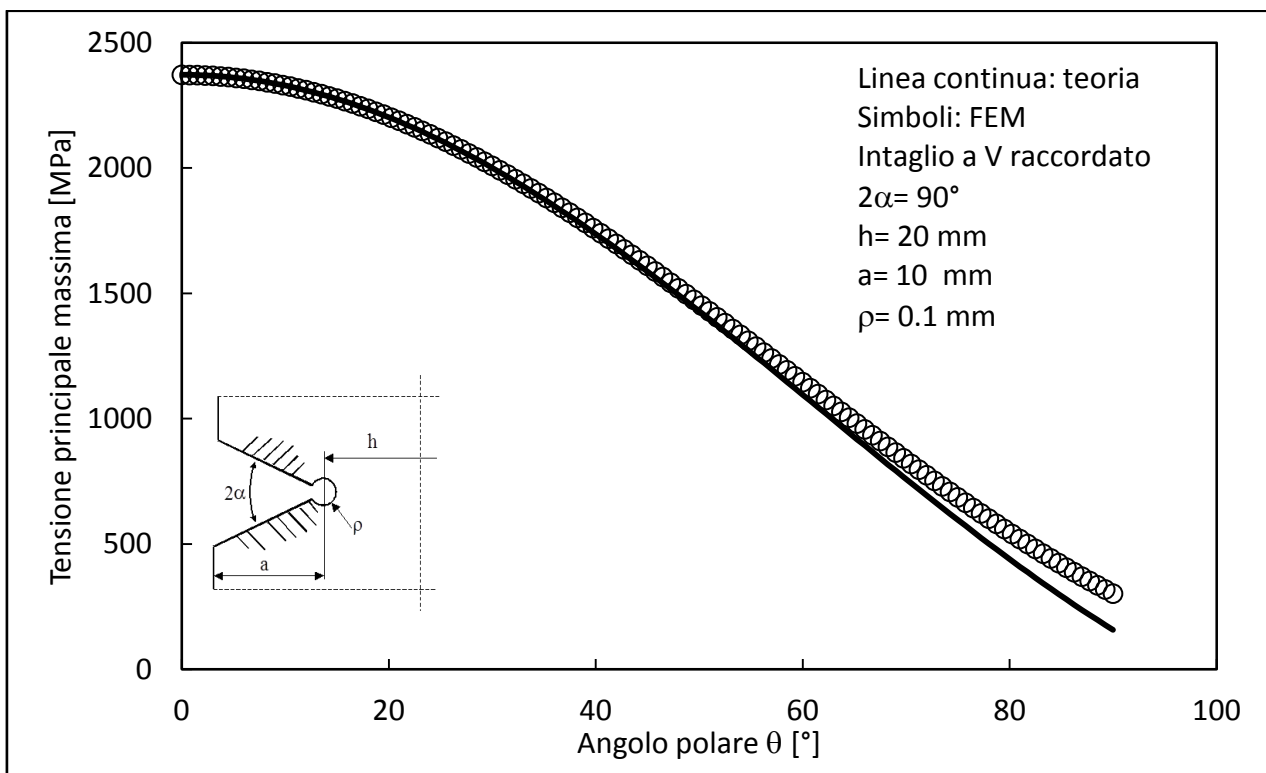
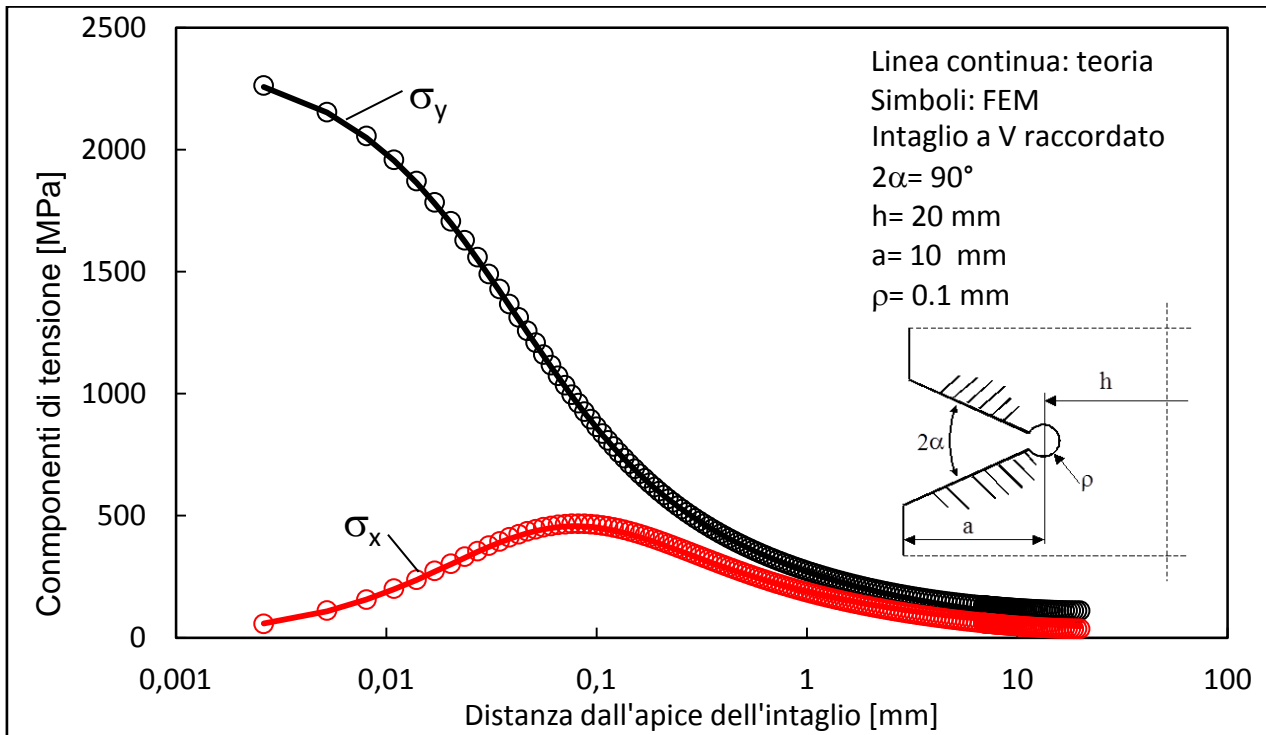
$$\phi(\gamma) = 0.8388$$

$$\tilde{R}_1 = 7.3551$$

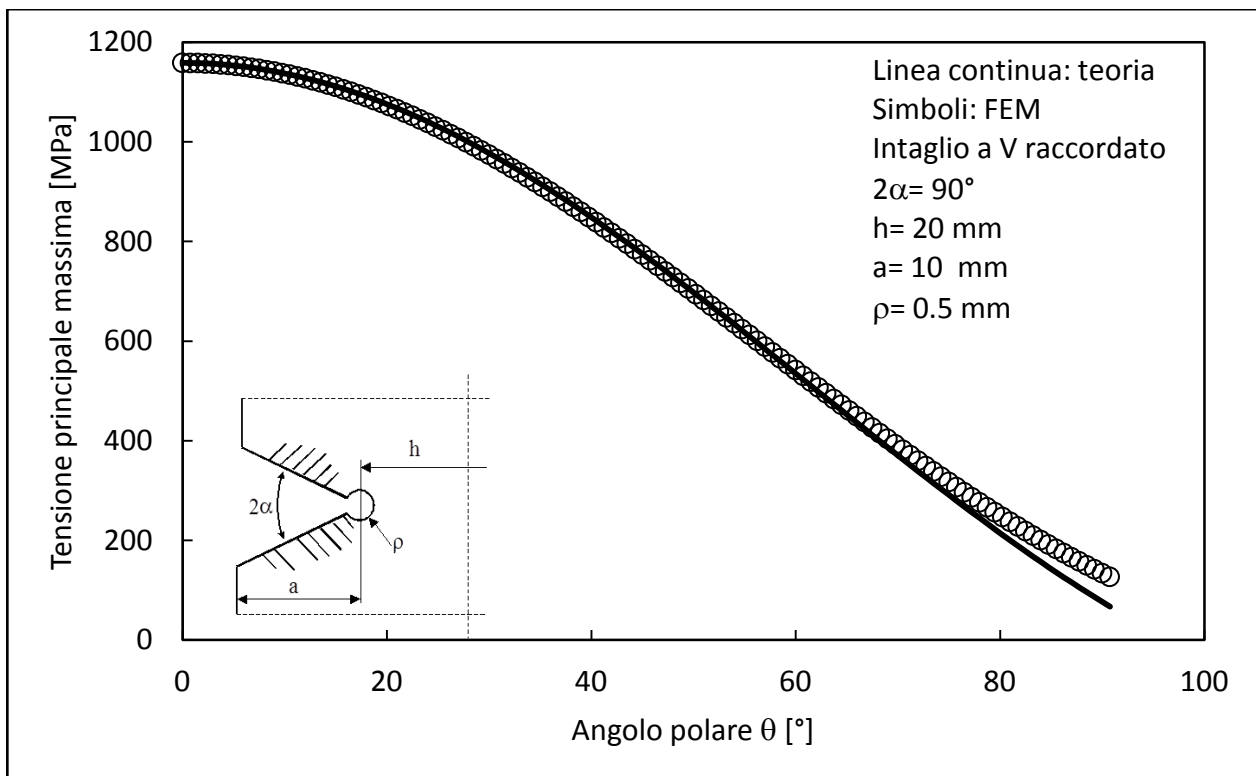
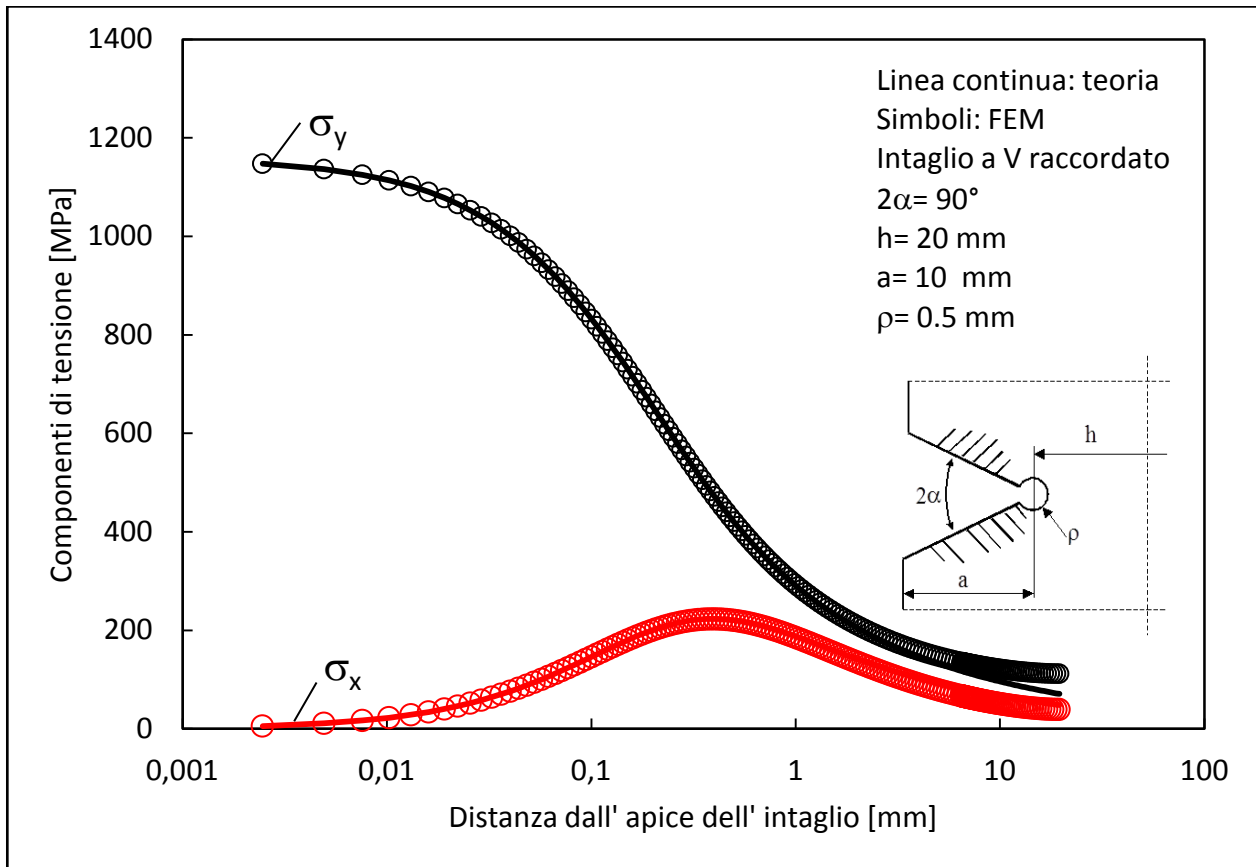
4. Risultati ottenuti

Vengono riportati i risultati ottenuti: il grafico delle tensioni sulla bisettrice dell' intaglio e sul tratto circolare del profilo rispettivamente per ogni piastra analizzata.

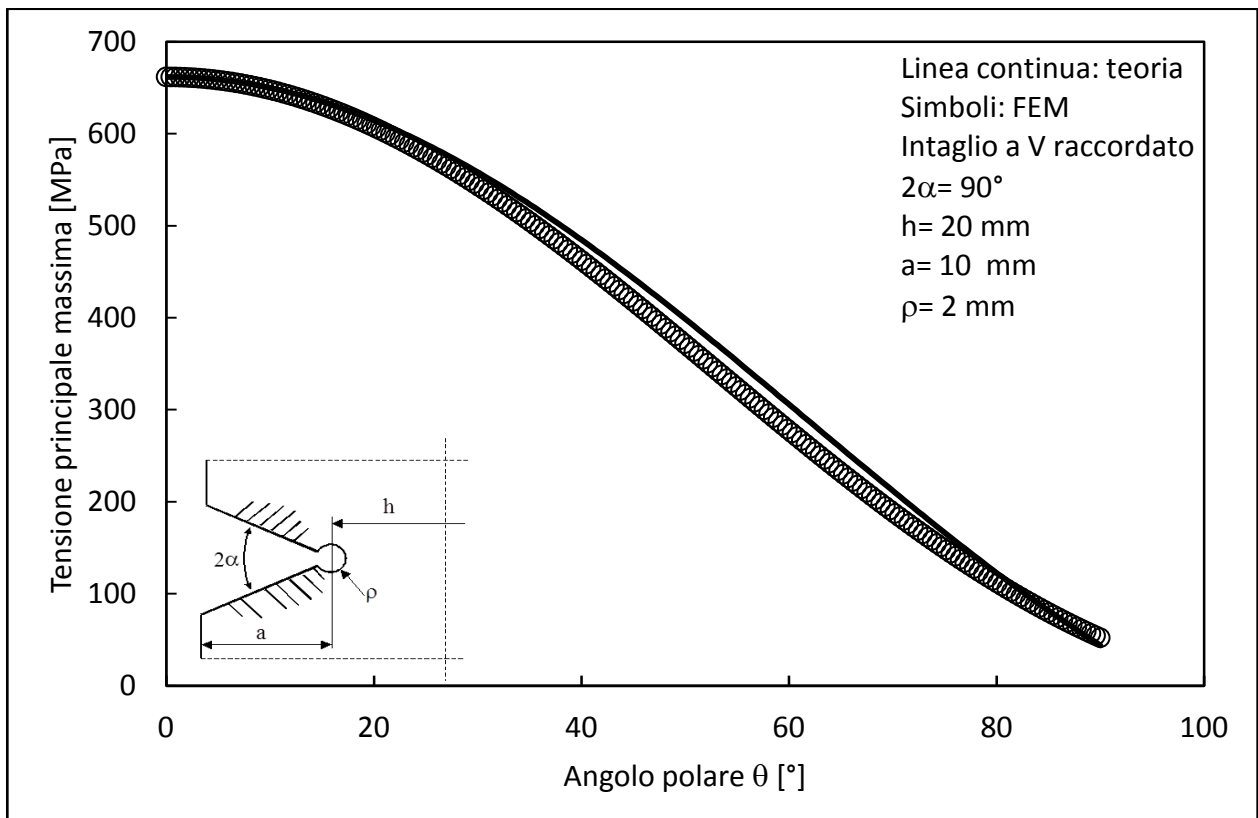
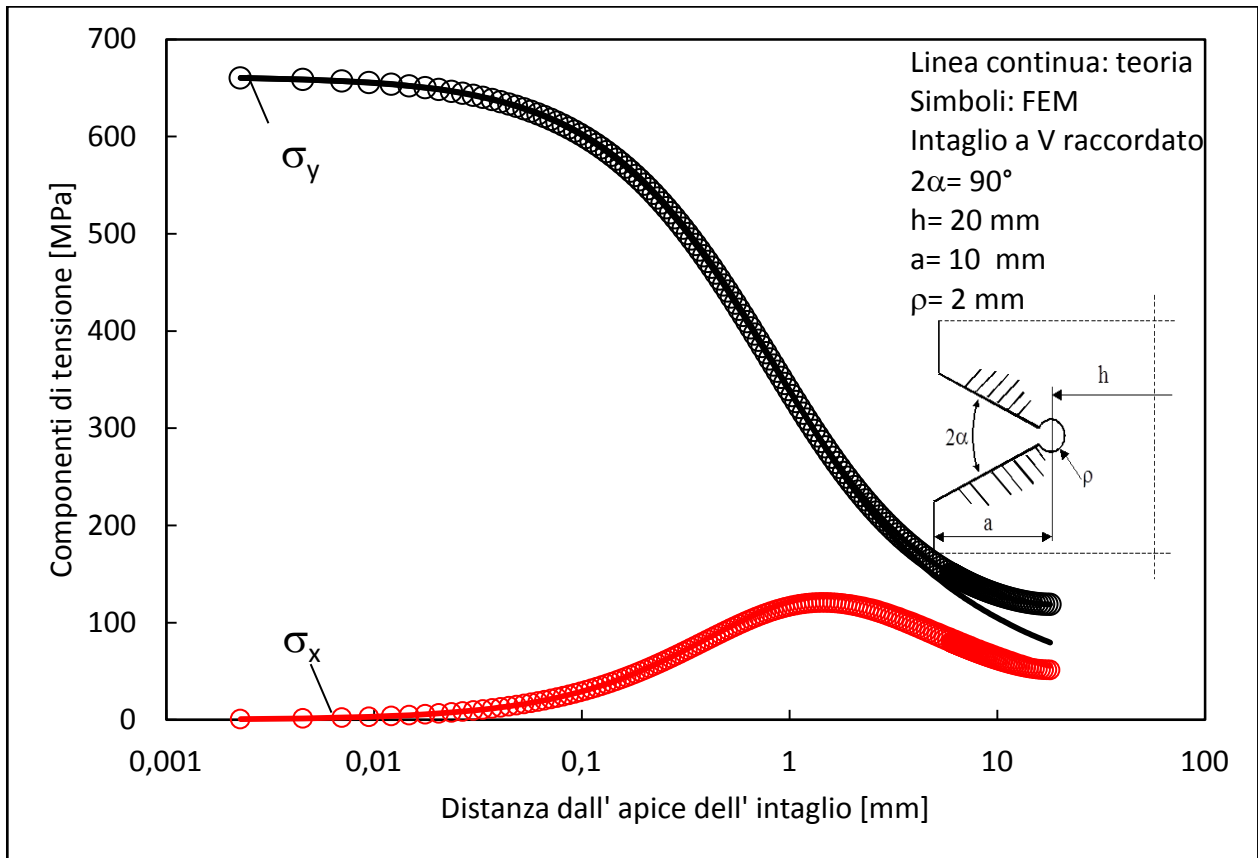
4.1 Piastra $h = 20\text{mm}$; $\rho = 0.1\text{ mm}$



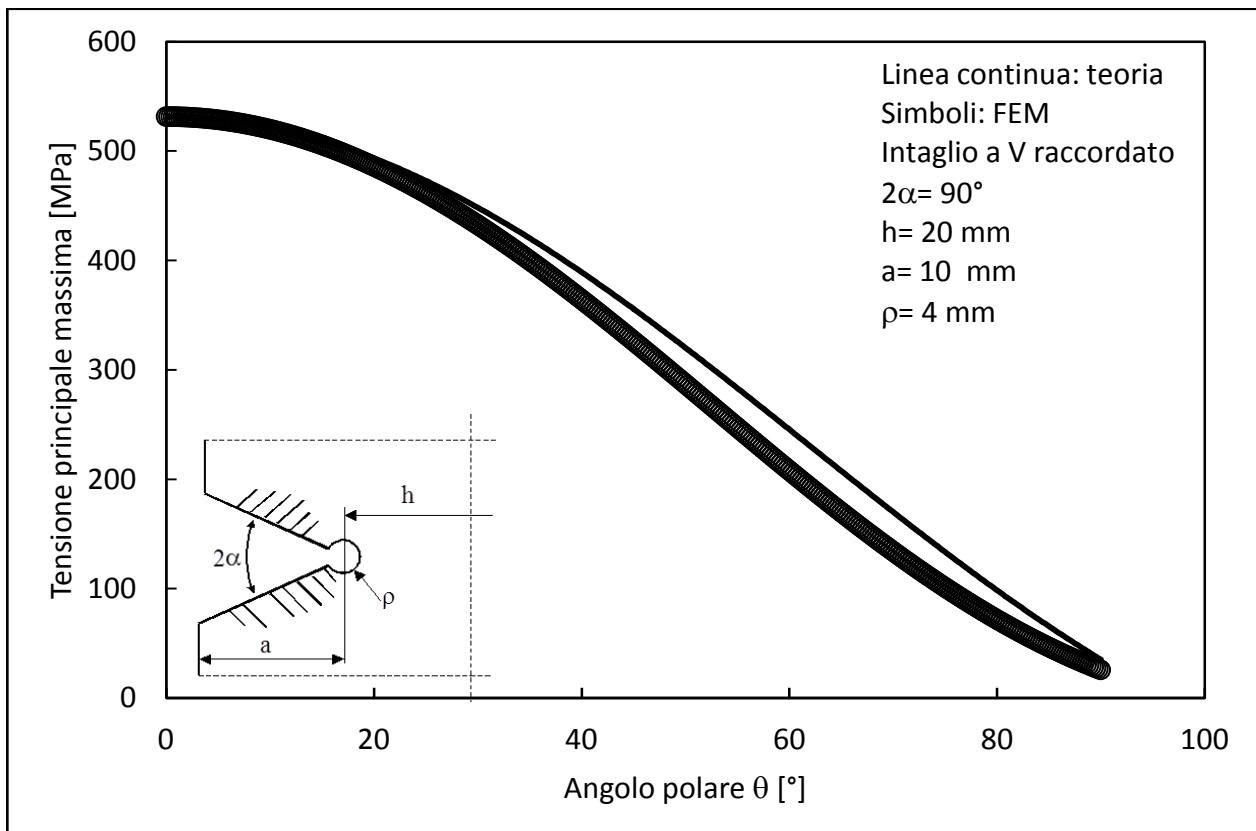
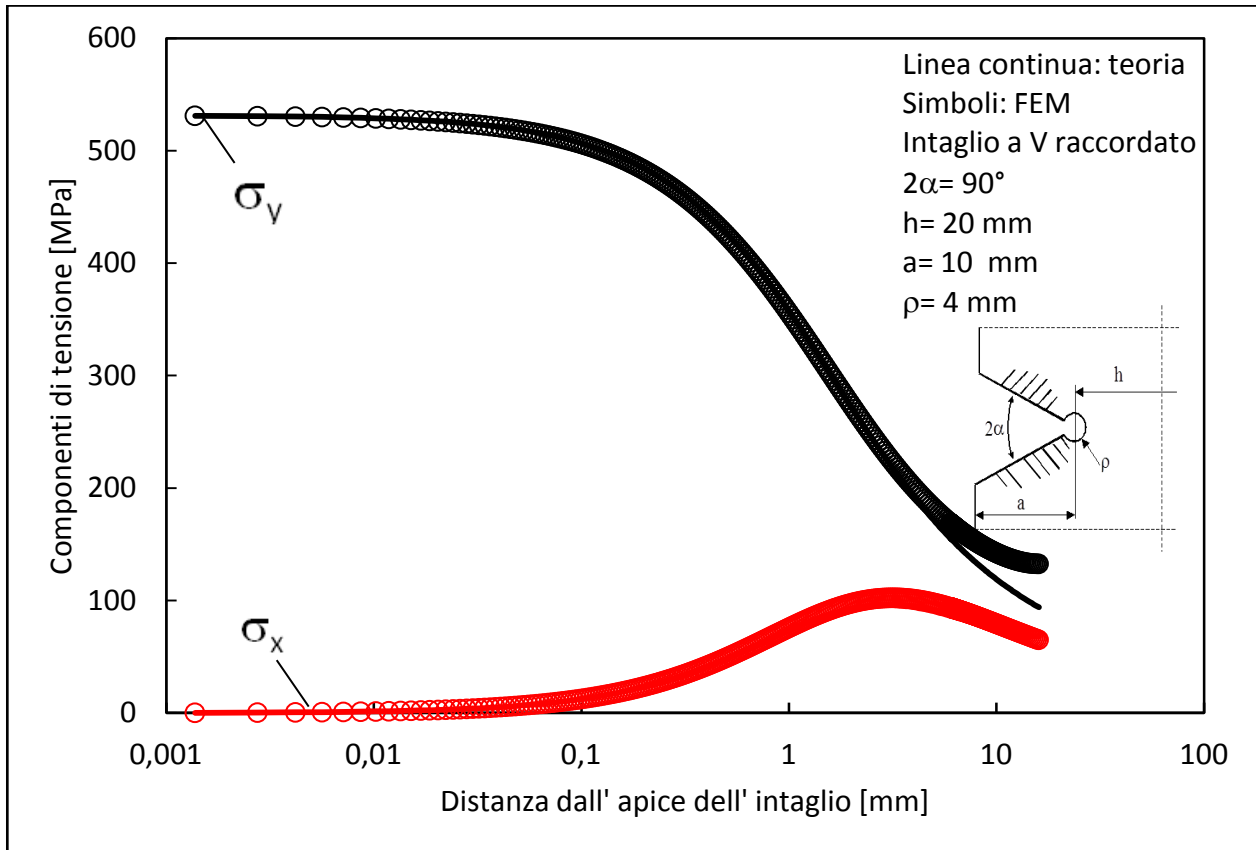
Piastra $h = 20\text{ mm}$; $\rho = 0.5\text{ mm}$



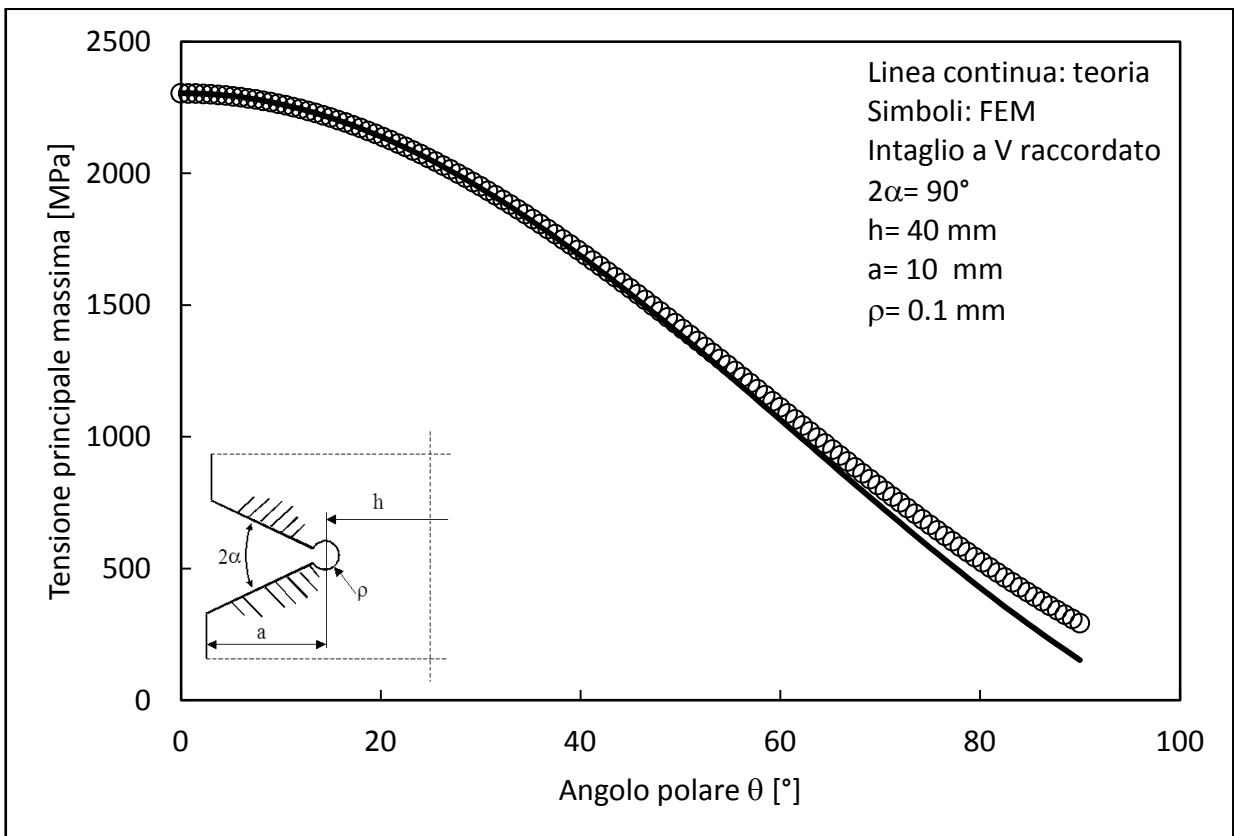
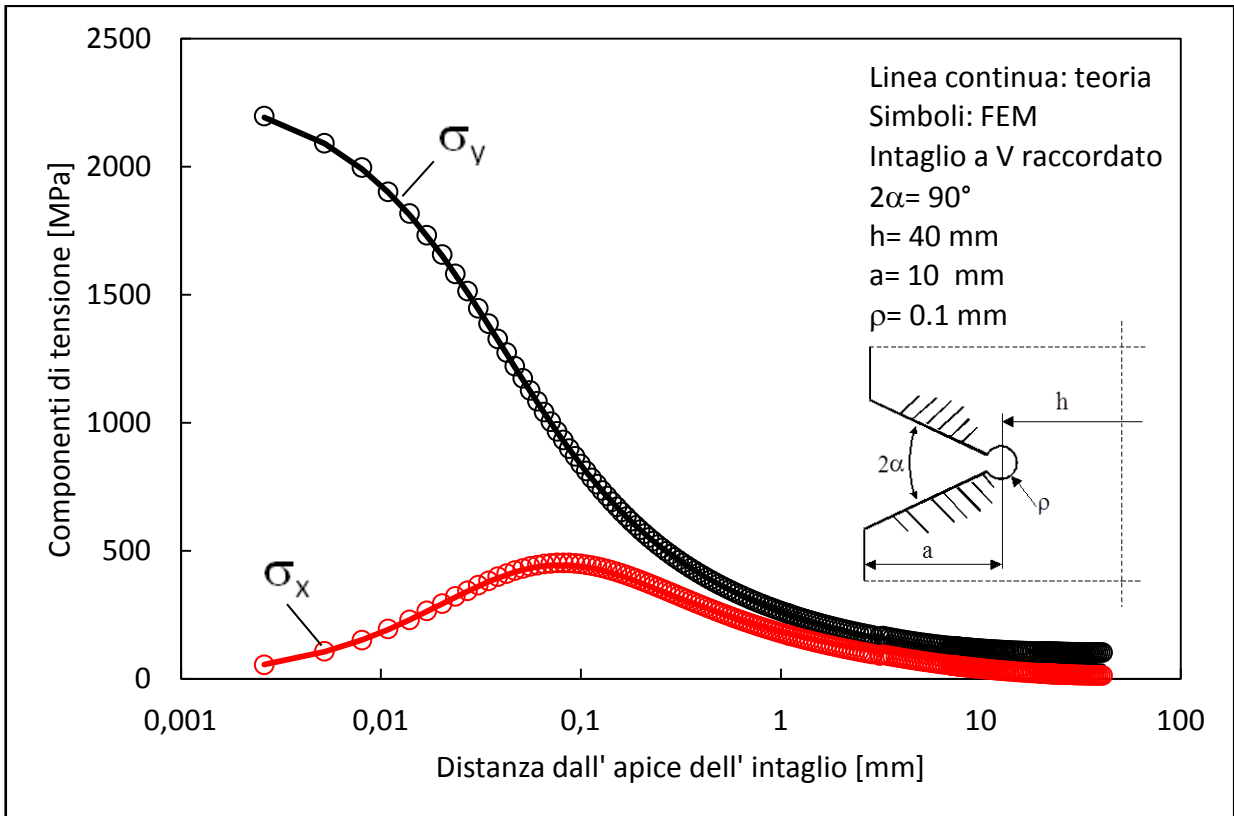
Piastra $h = 20\text{mm}$; $\rho = 2\text{ mm}$



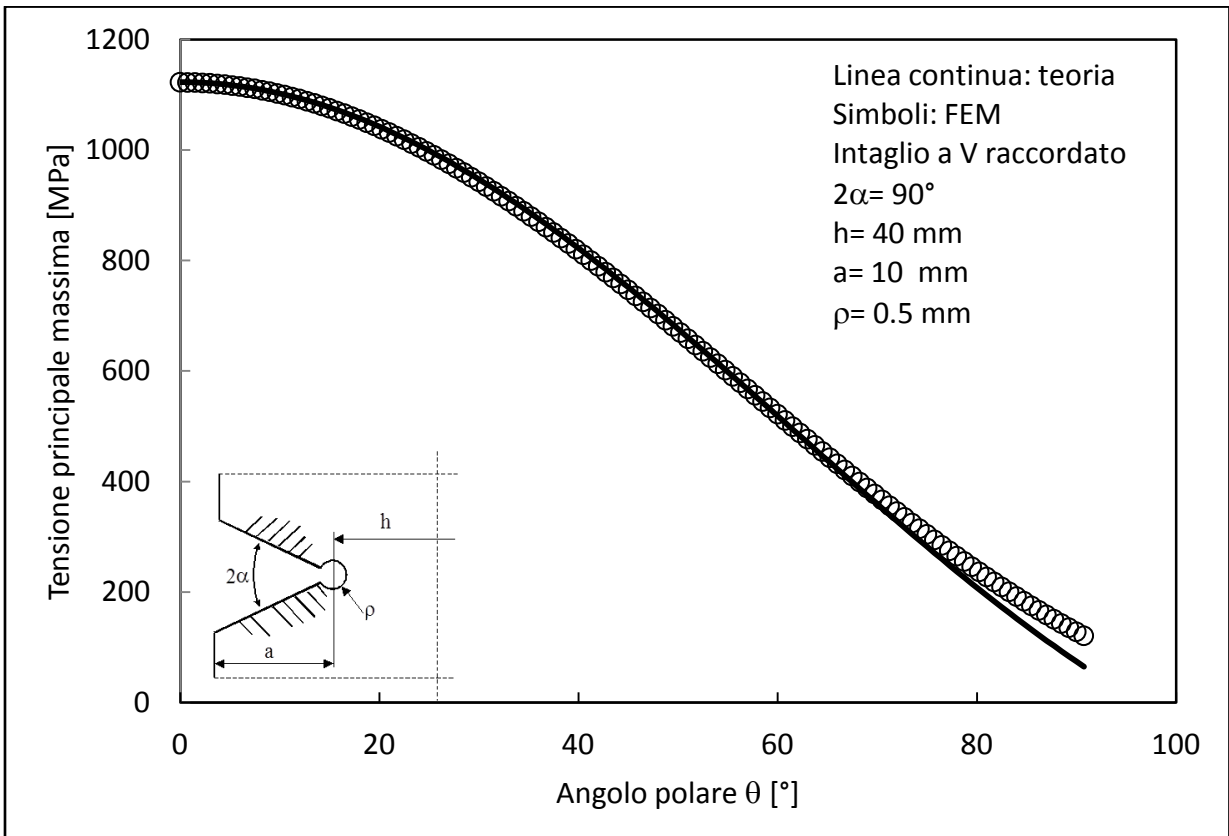
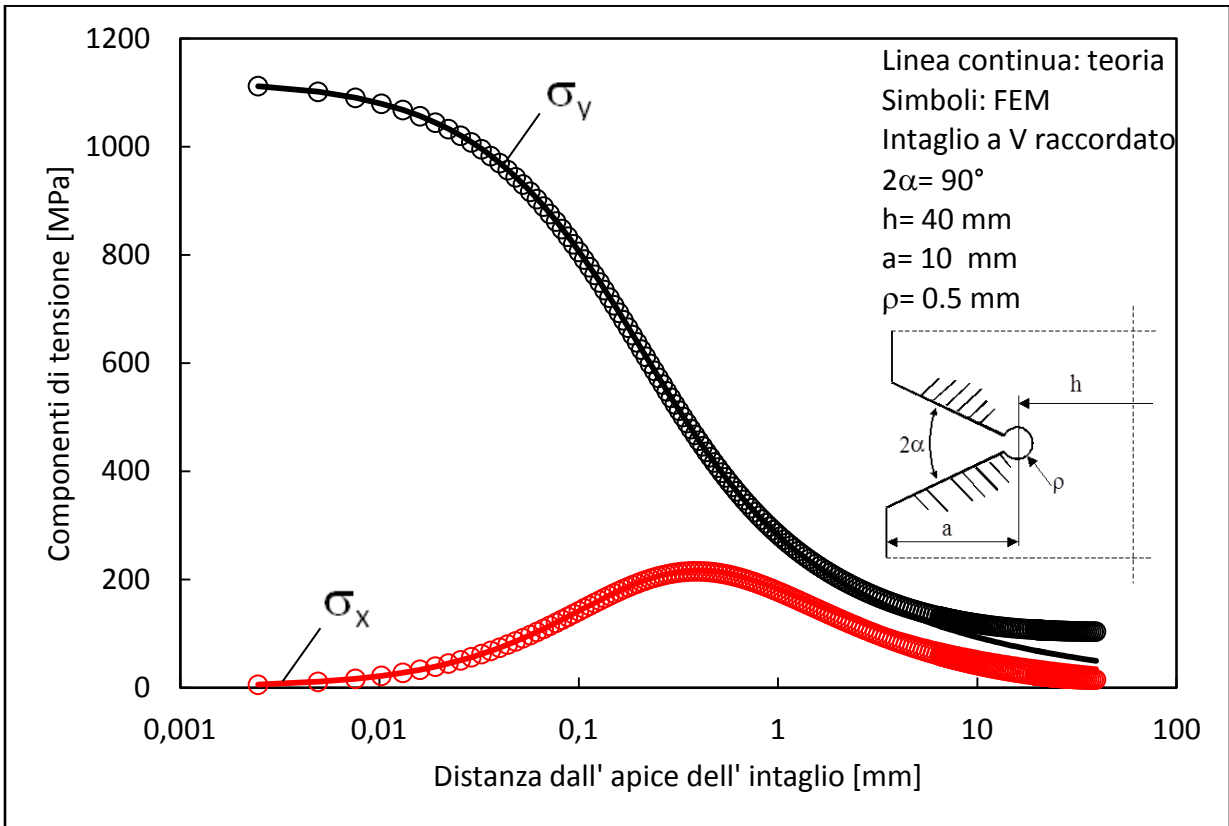
Piastra $h = 20\text{ mm}$; $\rho = 4\text{ mm}$



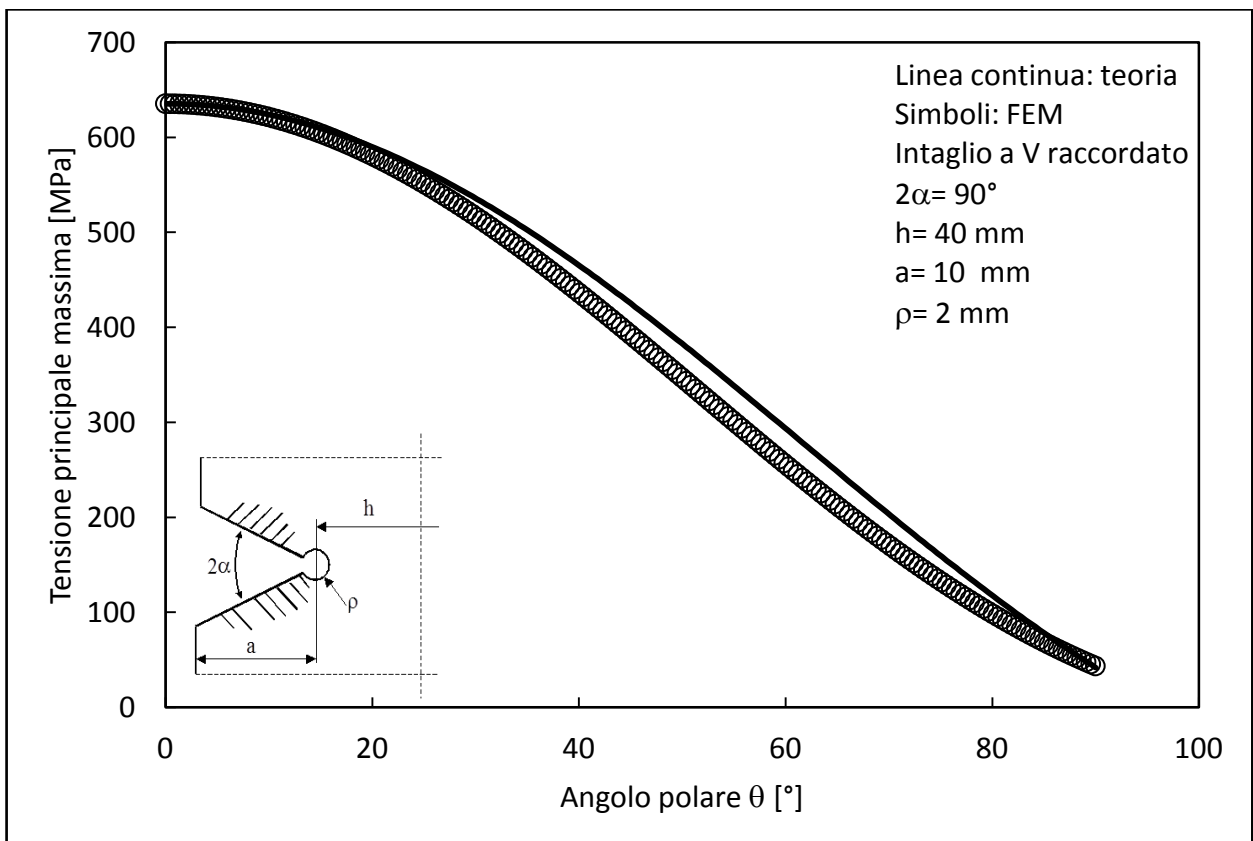
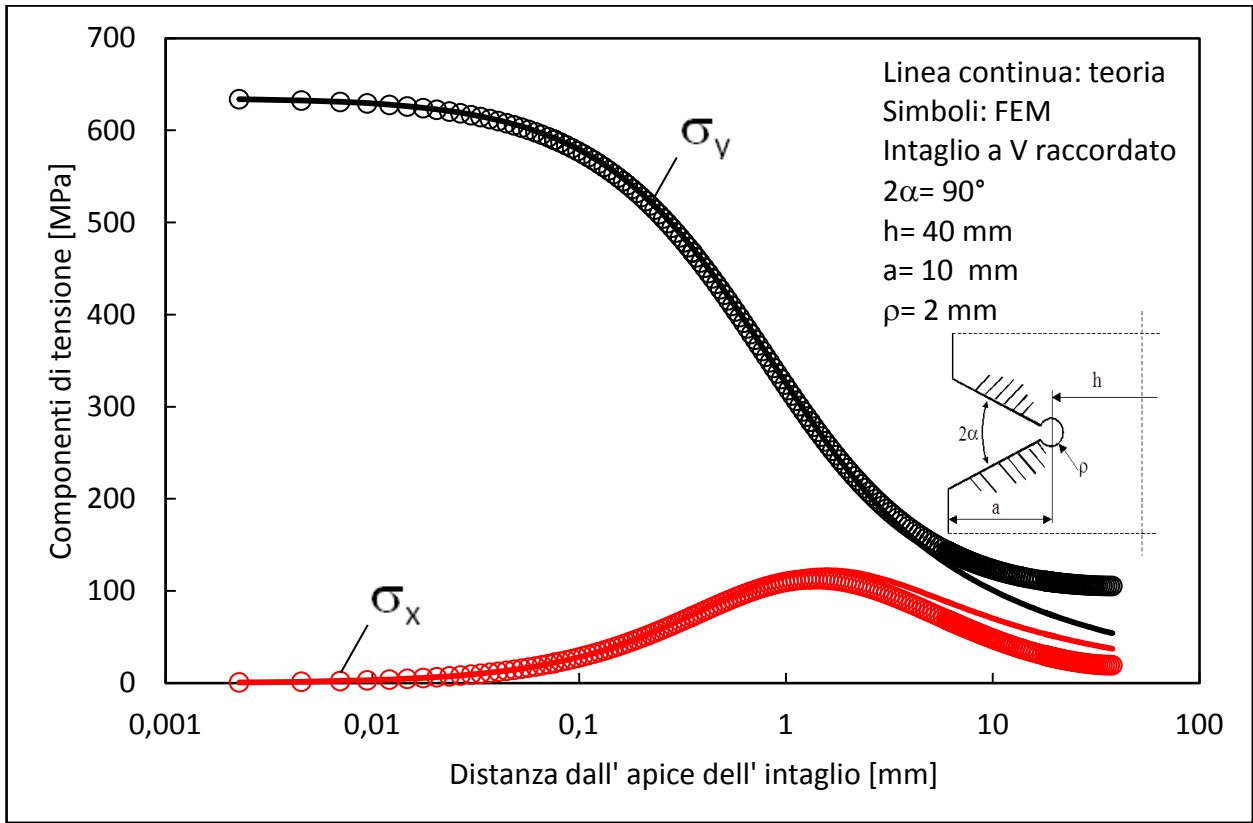
Piastra $h = 40\text{ mm}$; $\rho = 0.1\text{ mm}$



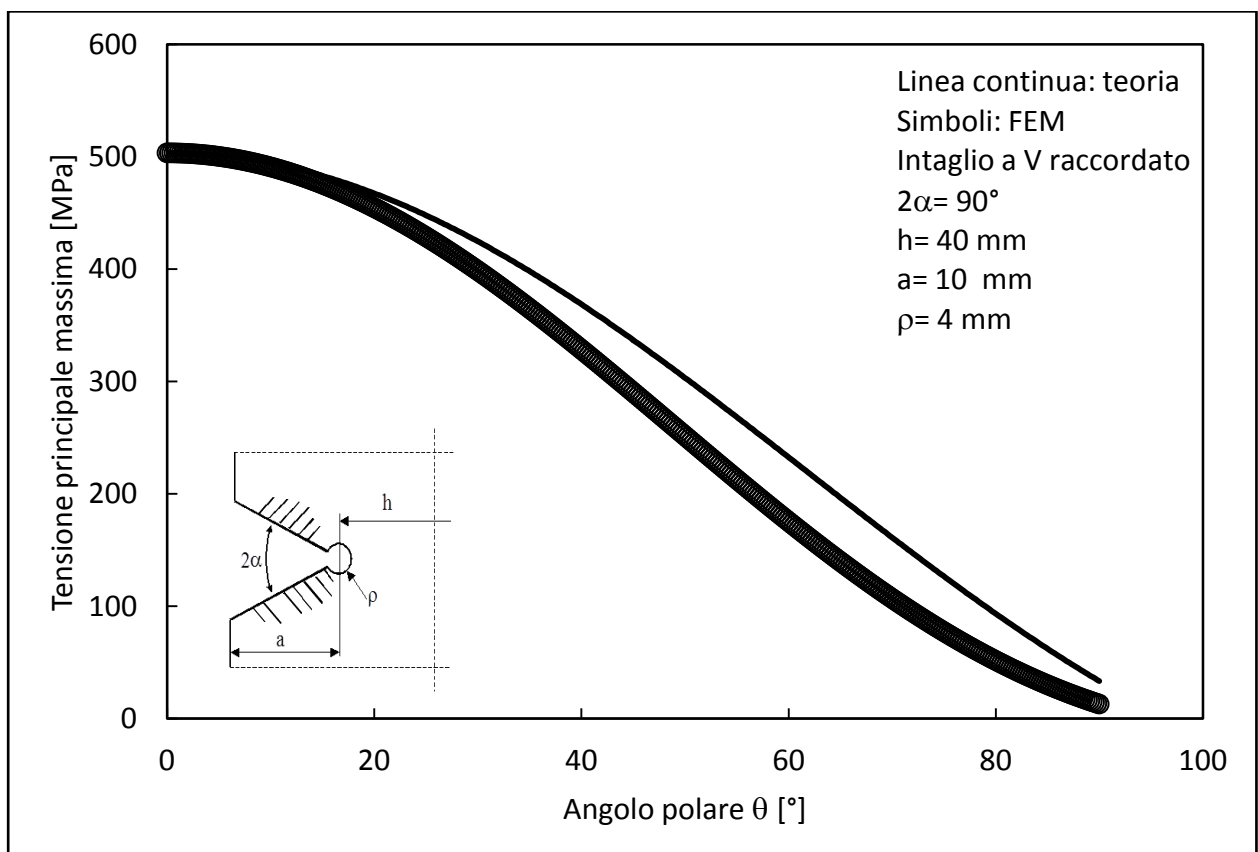
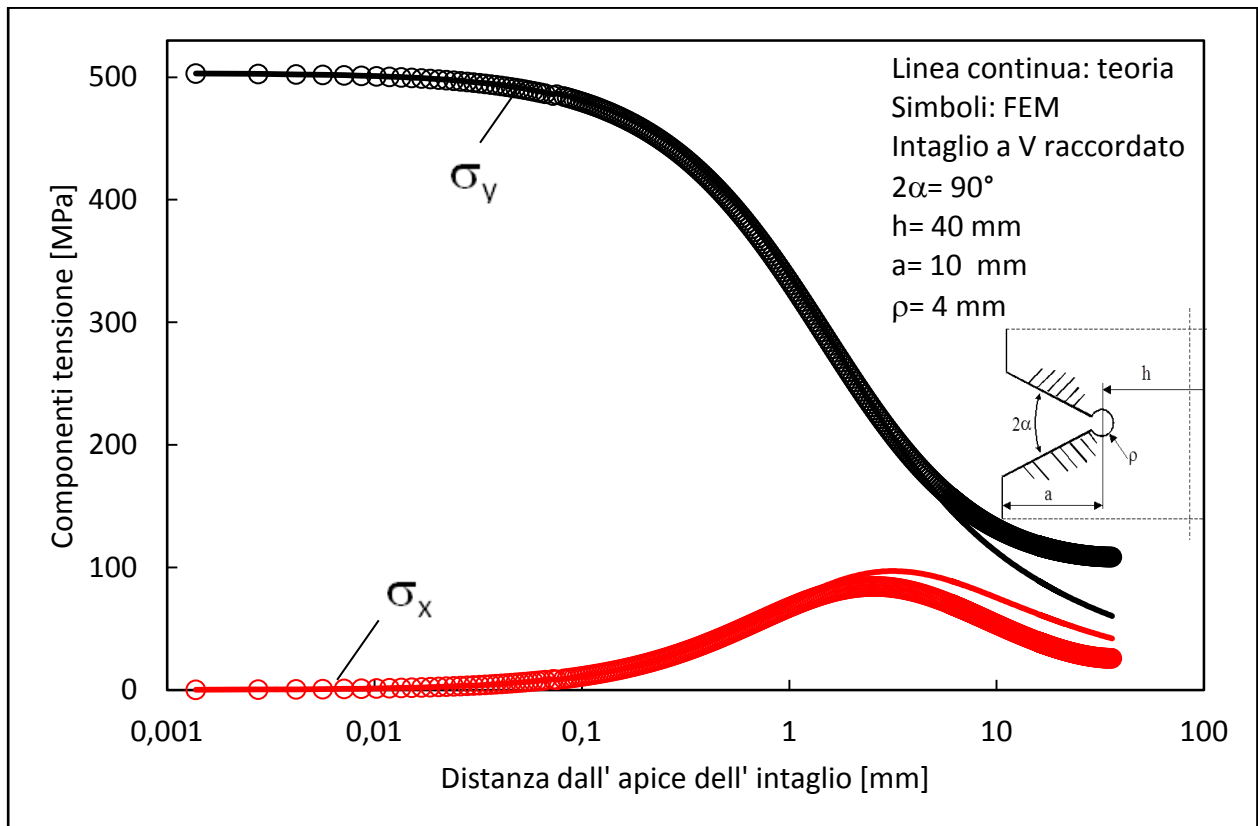
Piastra $h = 40\text{ mm}$; $\rho = 0.5\text{ mm}$



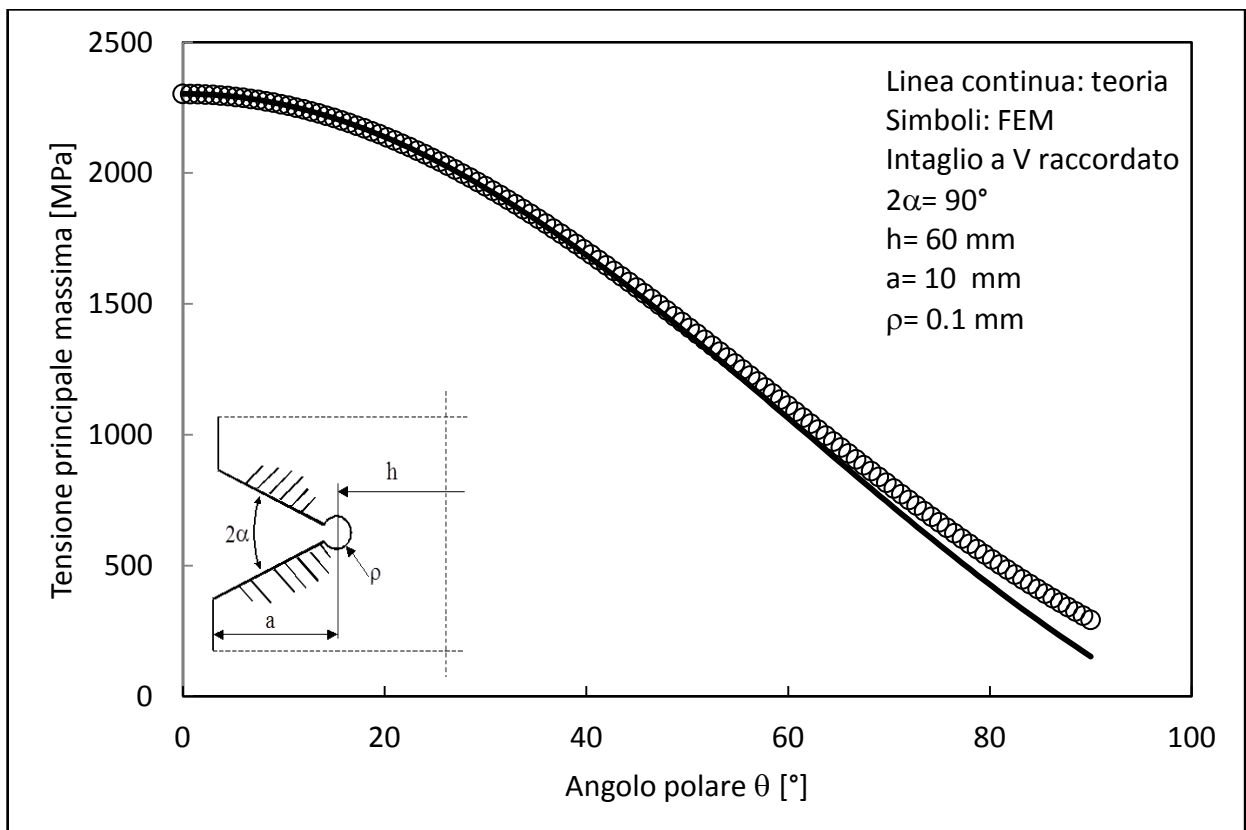
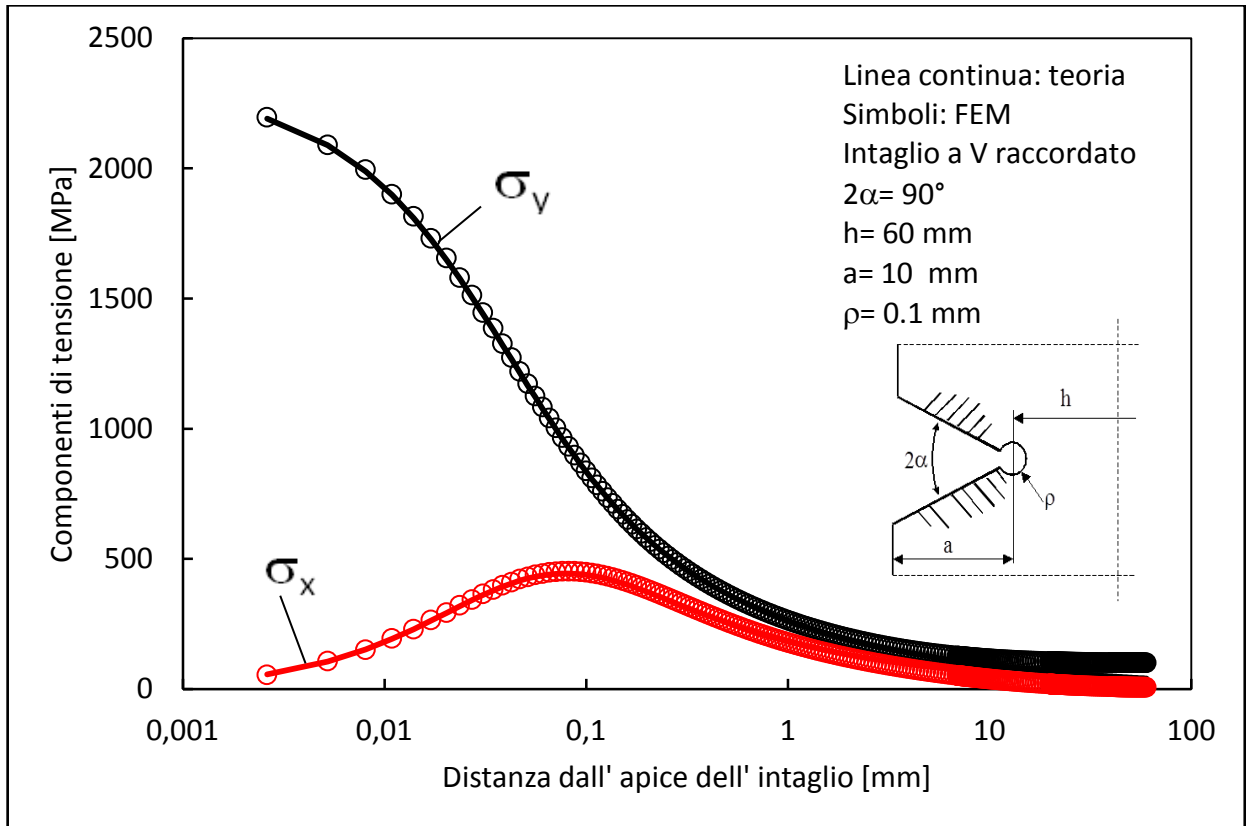
Piastra $h = 40\text{ mm}$; $\rho = 2\text{ mm}$



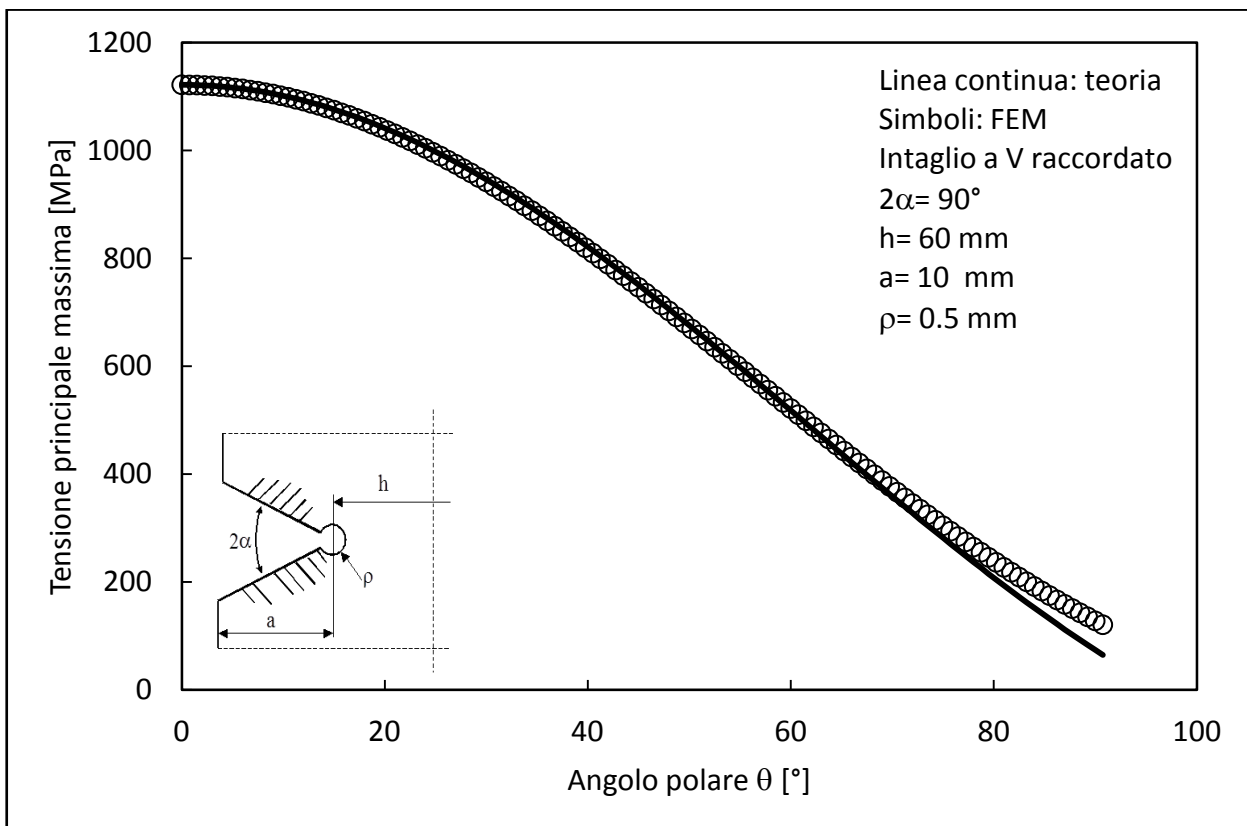
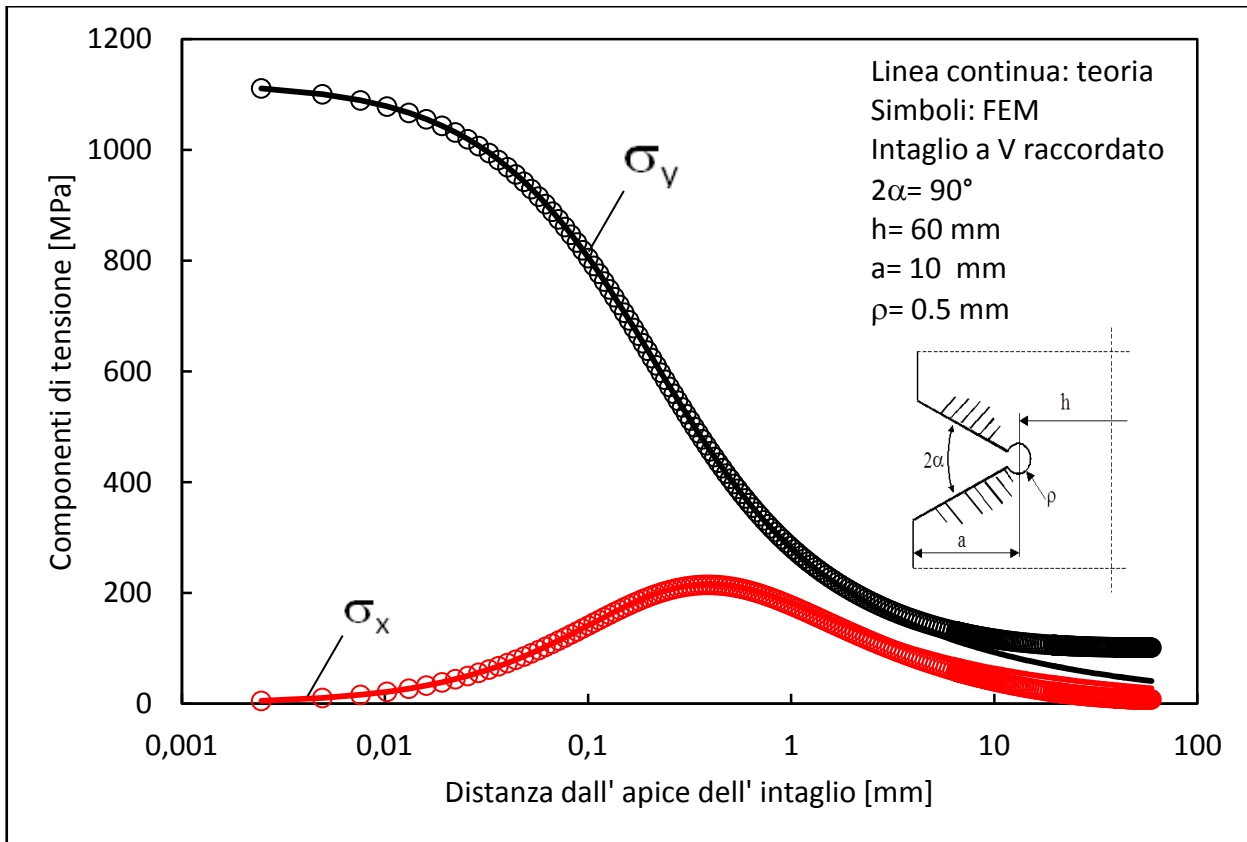
Piastra $h = 40\text{mm}$; $\rho = 4\text{ mm}$



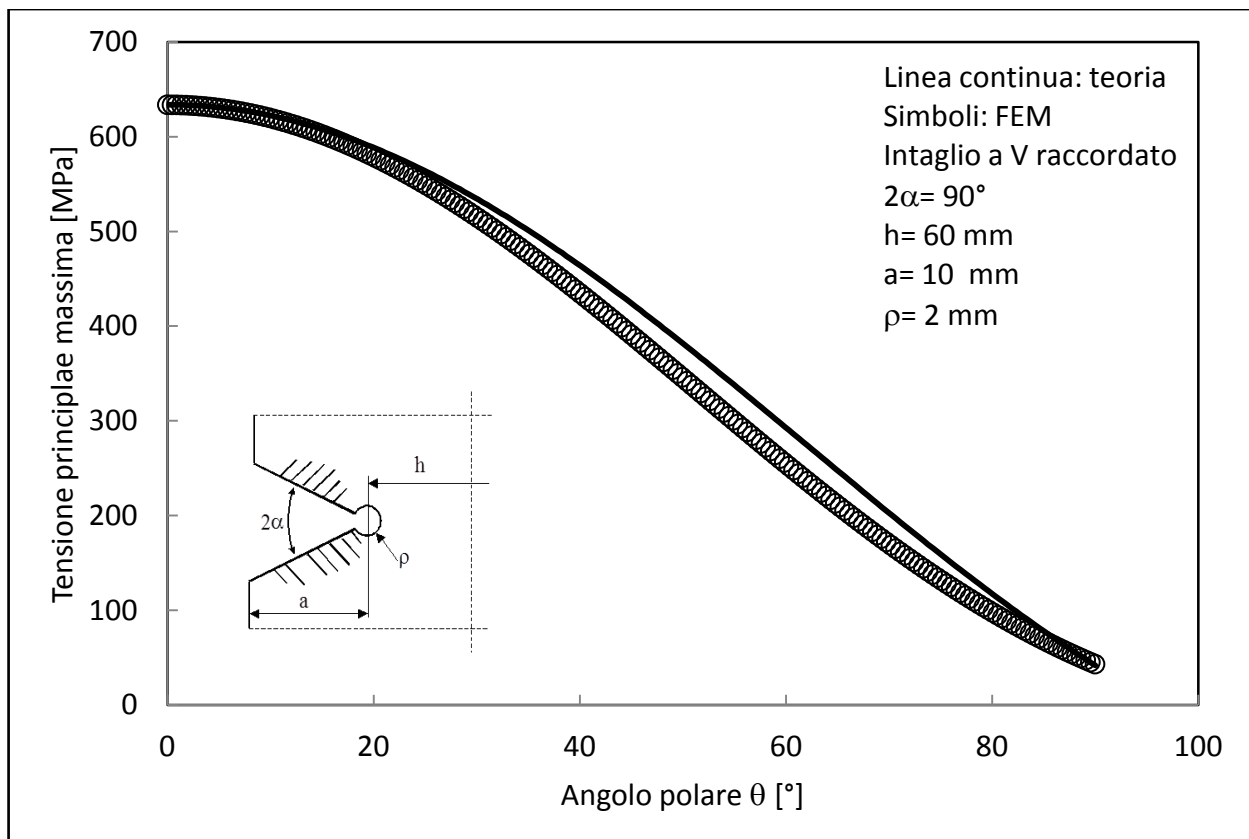
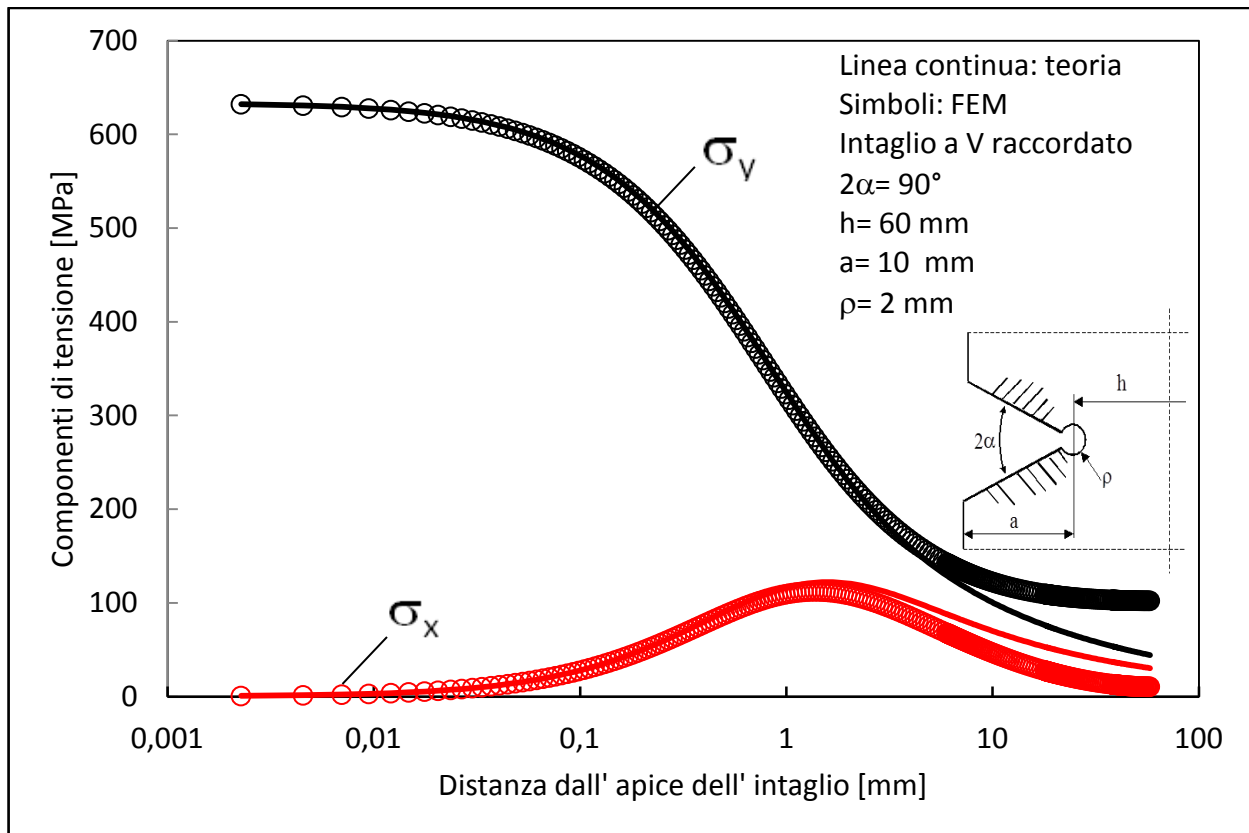
Piastra $h = 60\text{mm}$; $\rho = 0.1\text{ mm}$



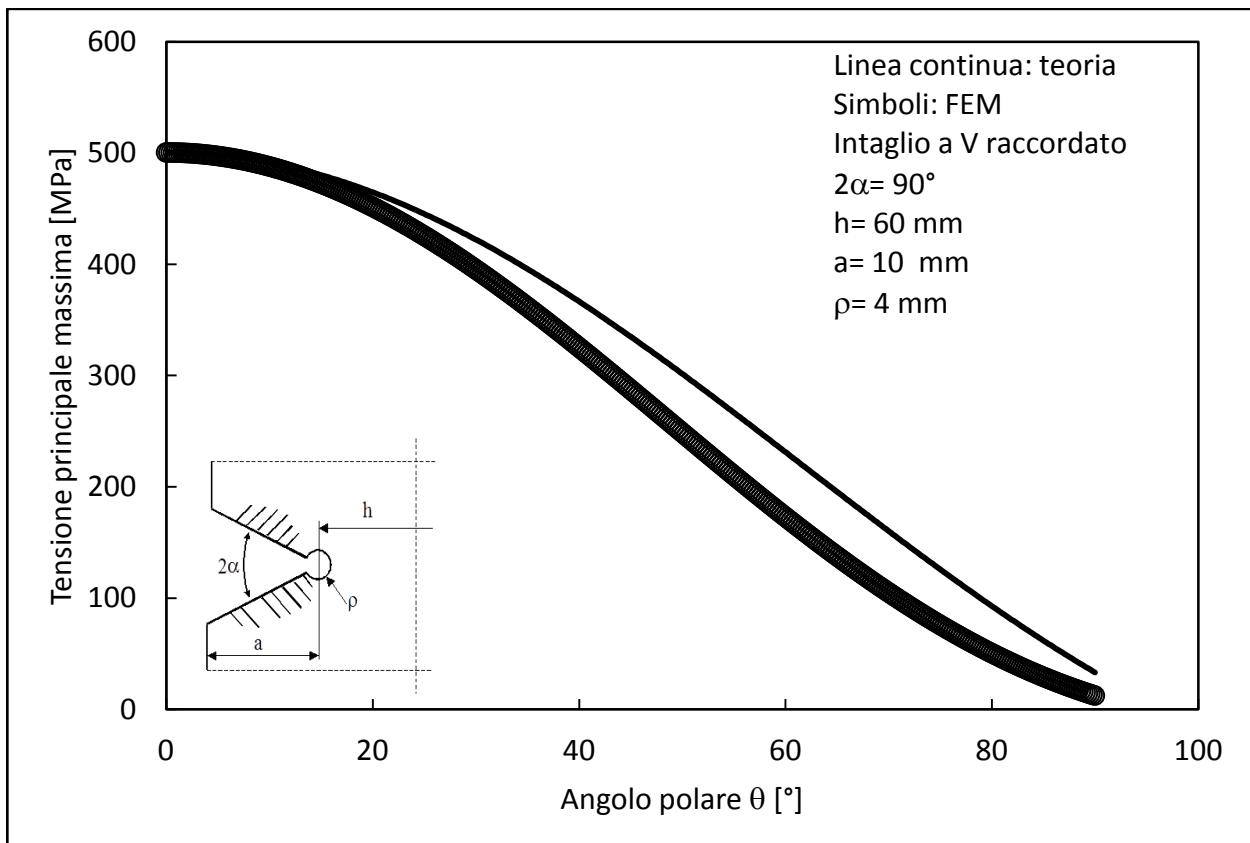
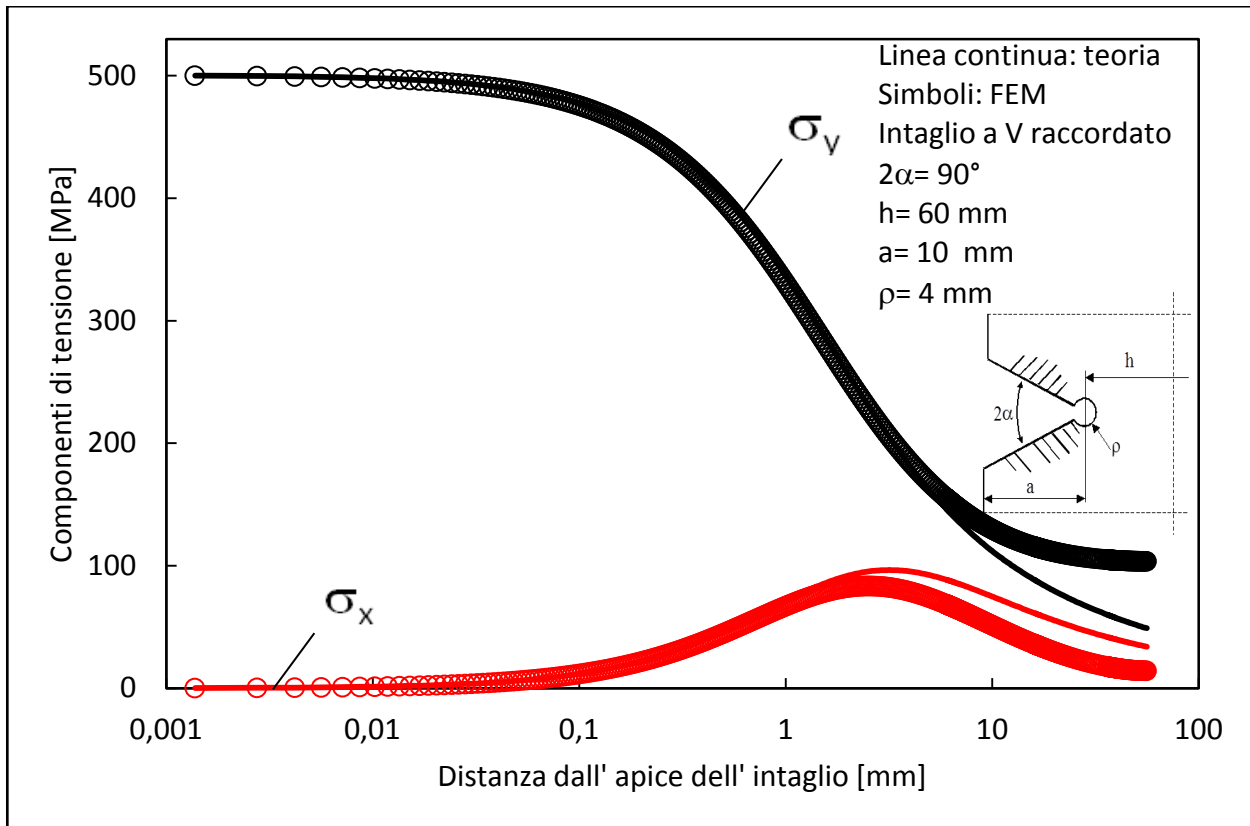
Piastra $h = 60\text{ mm}$; $\rho = 0.5\text{ mm}$



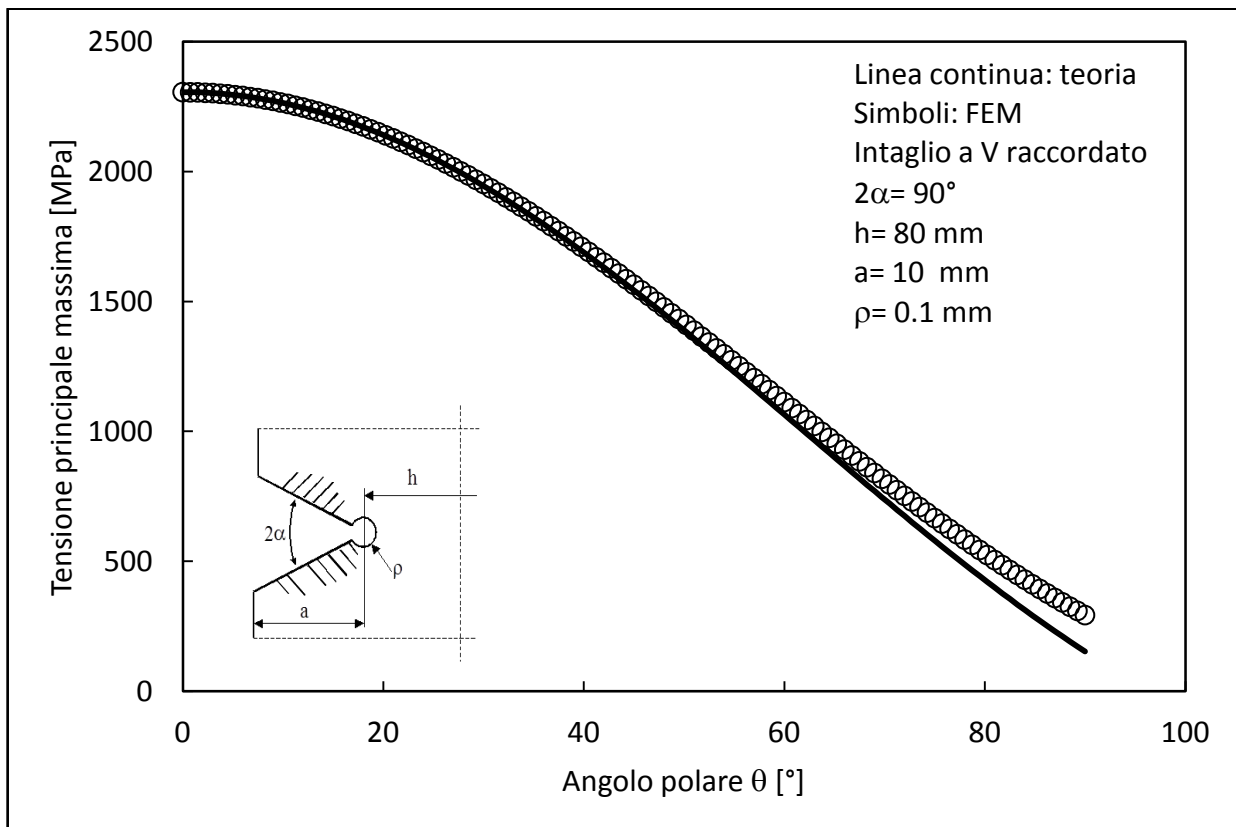
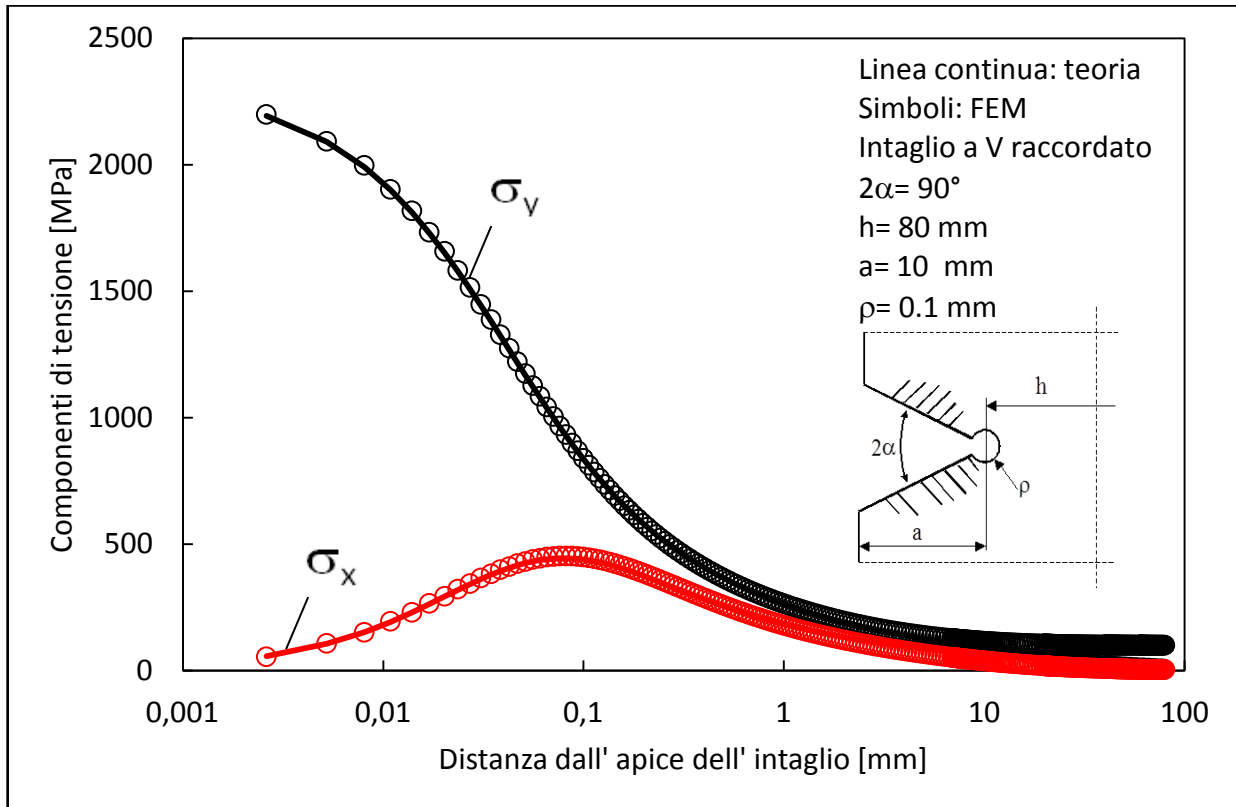
Piastra $h = 60\text{mm}$; $\rho = 2\text{ mm}$



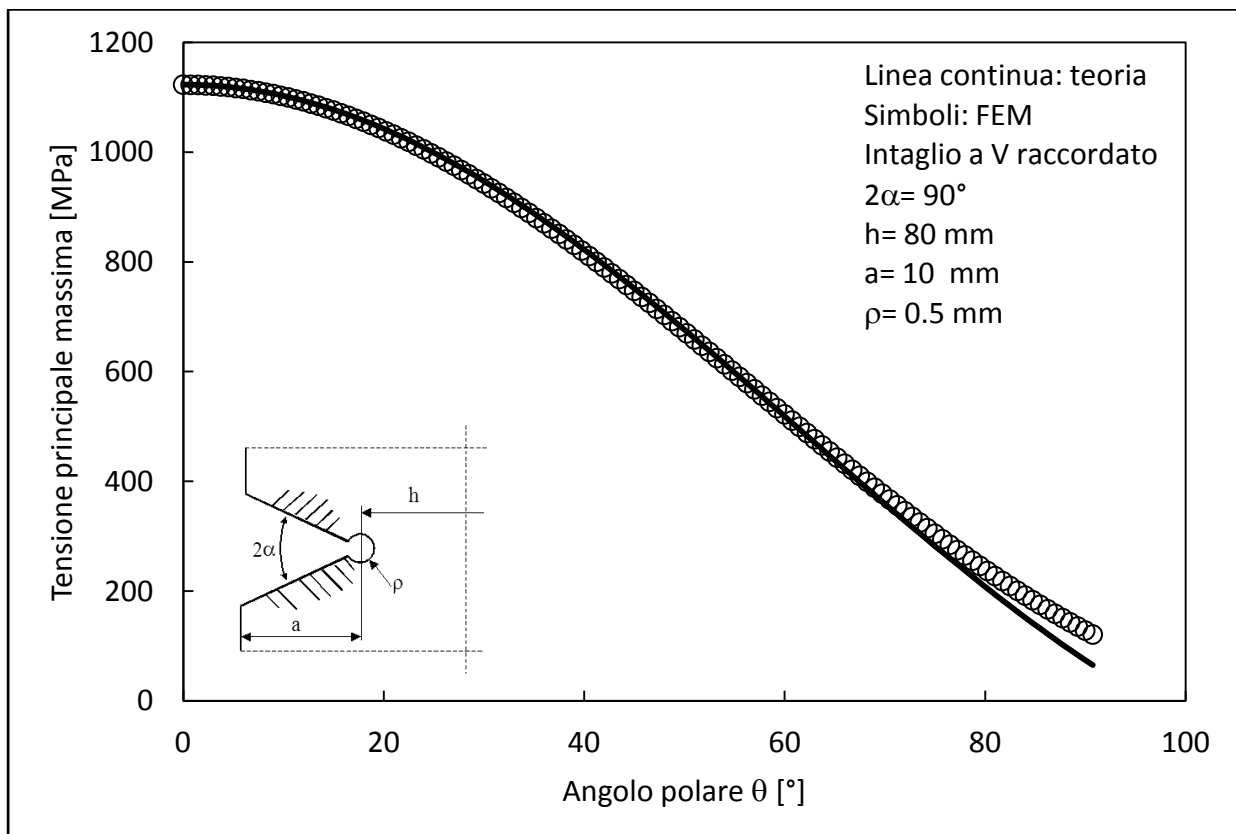
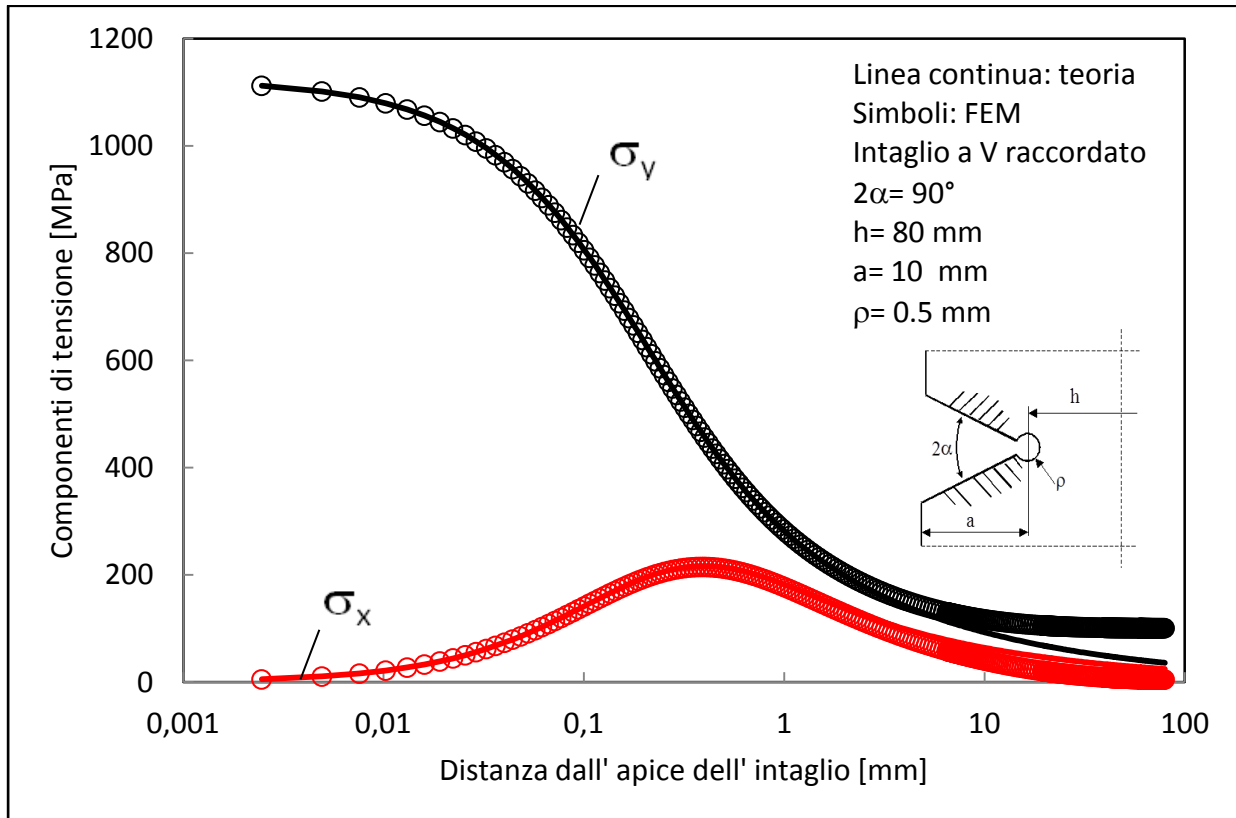
Piastra $h = 60\text{mm}$; $\rho = 4\text{ mm}$



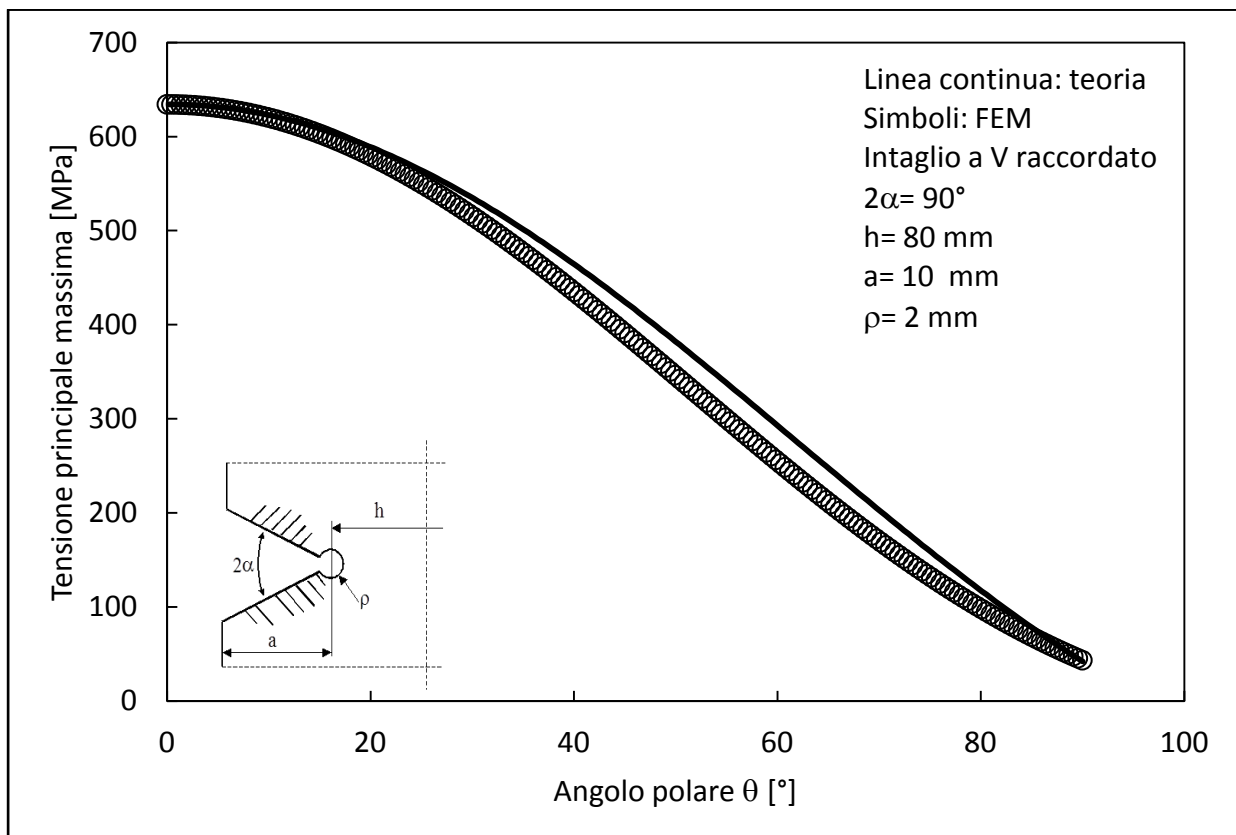
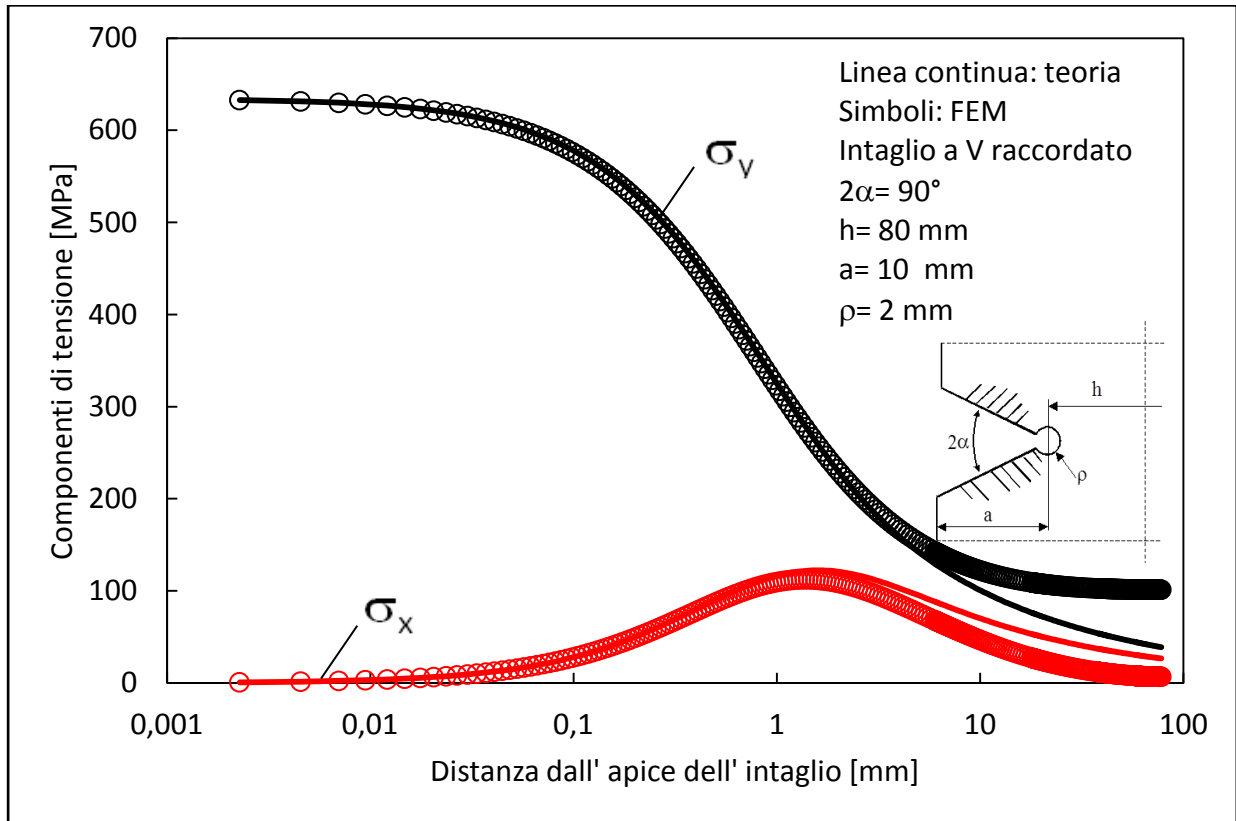
Piastra $h = 80\text{ mm}$; $\rho = 0.1\text{ mm}$



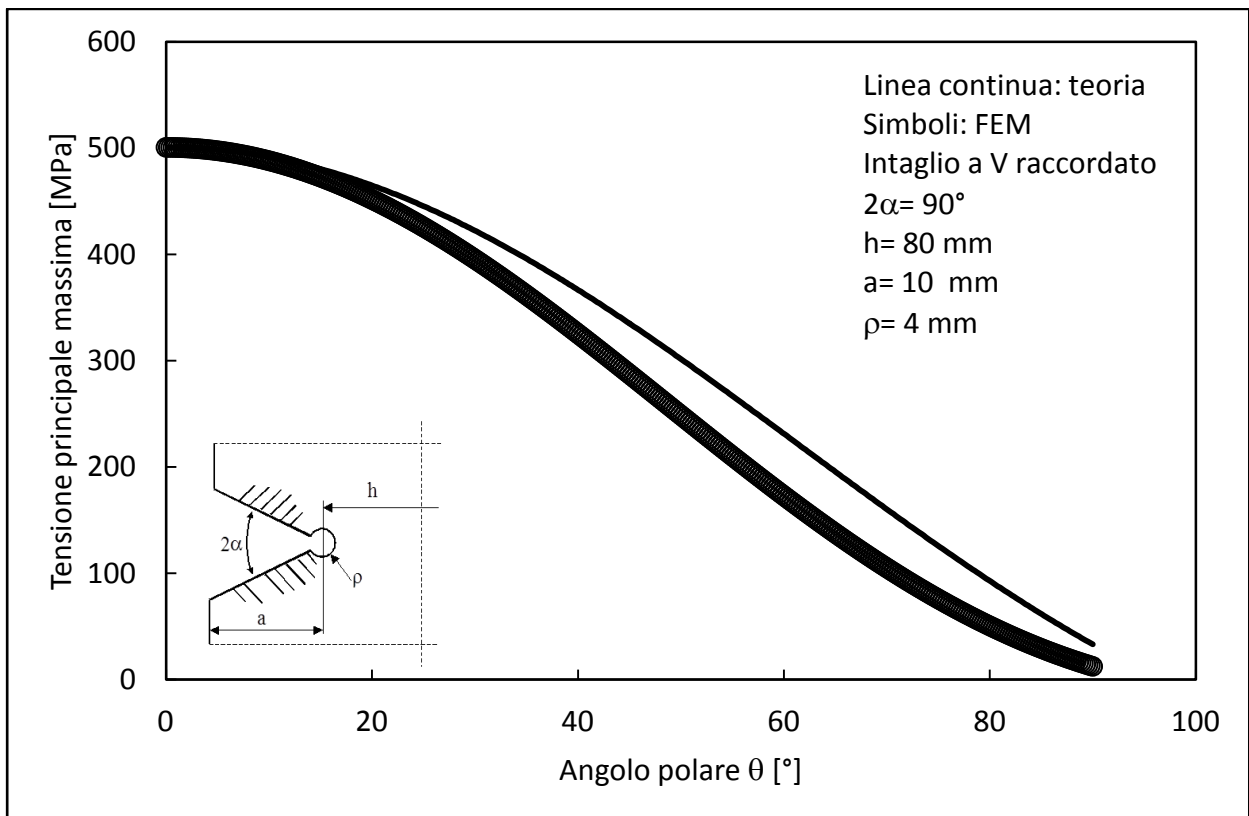
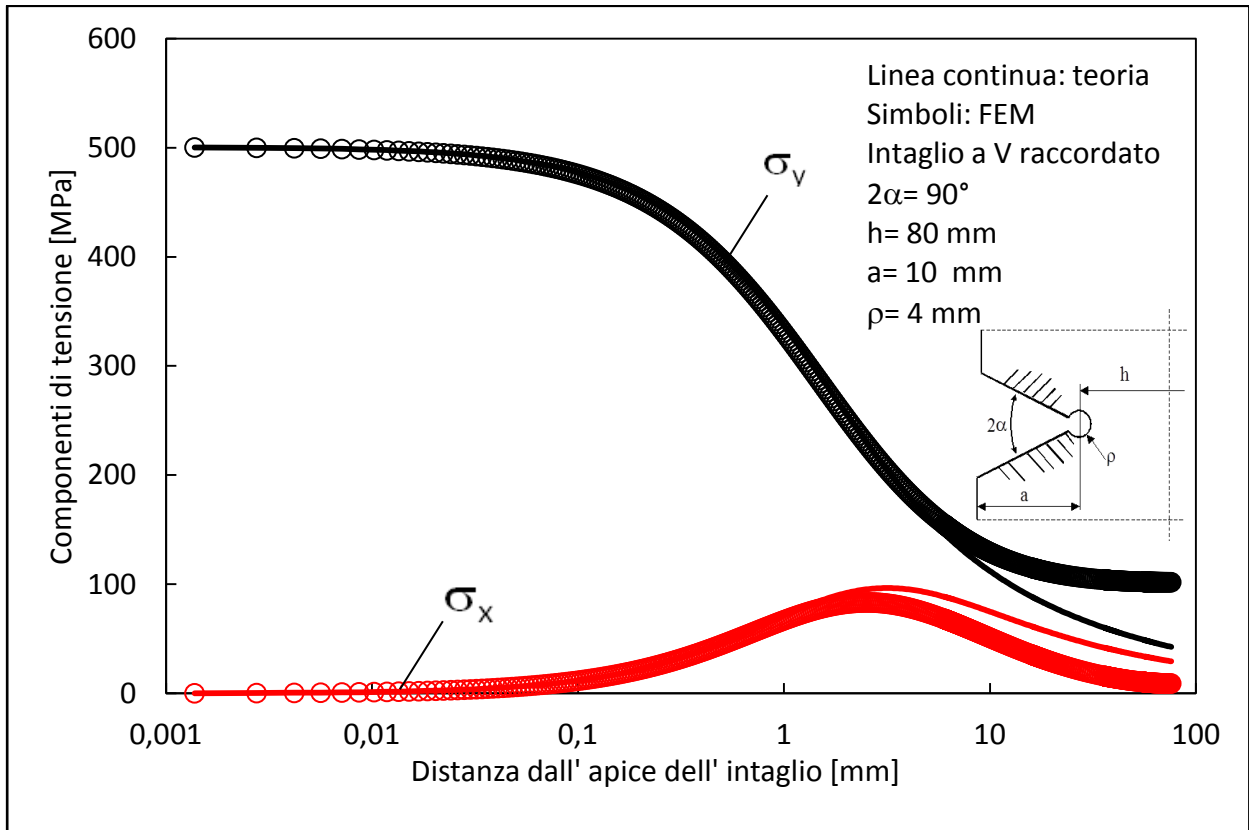
Piastra $h = 80\text{ mm}$; $\rho = 0.5\text{ mm}$



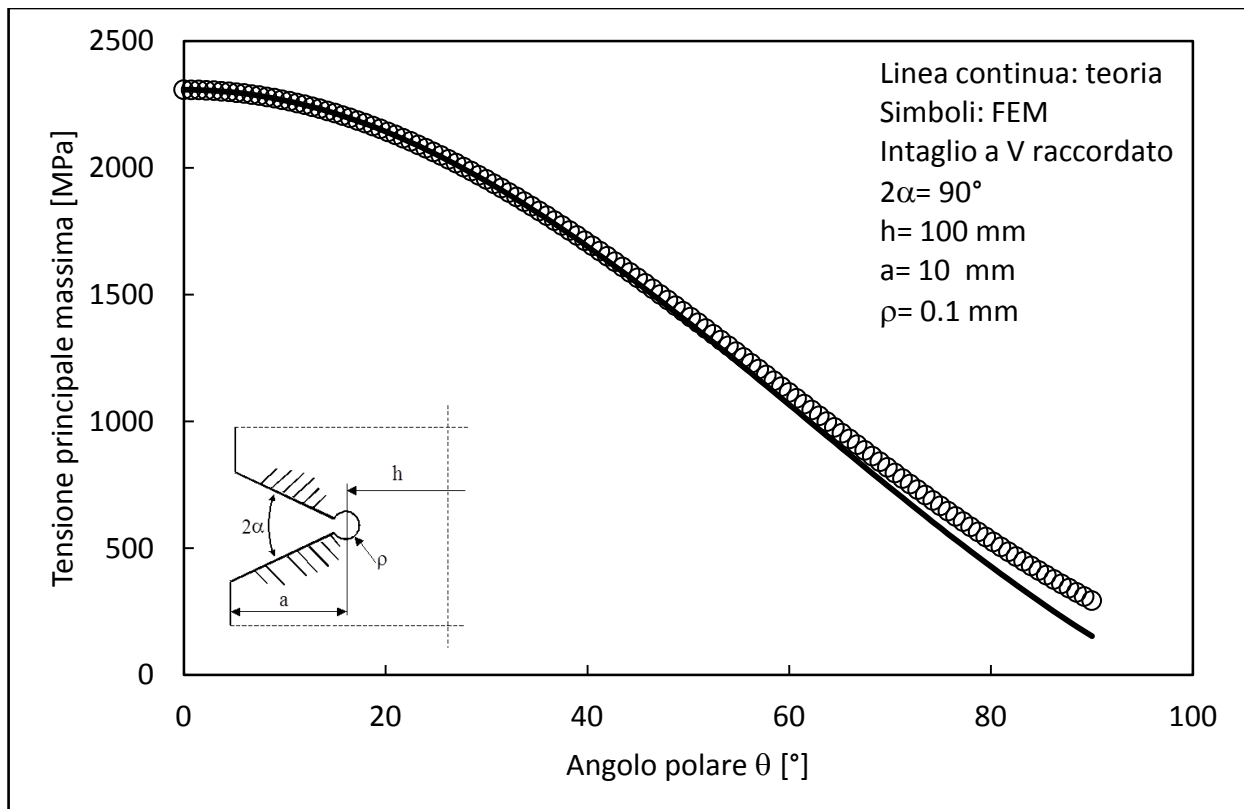
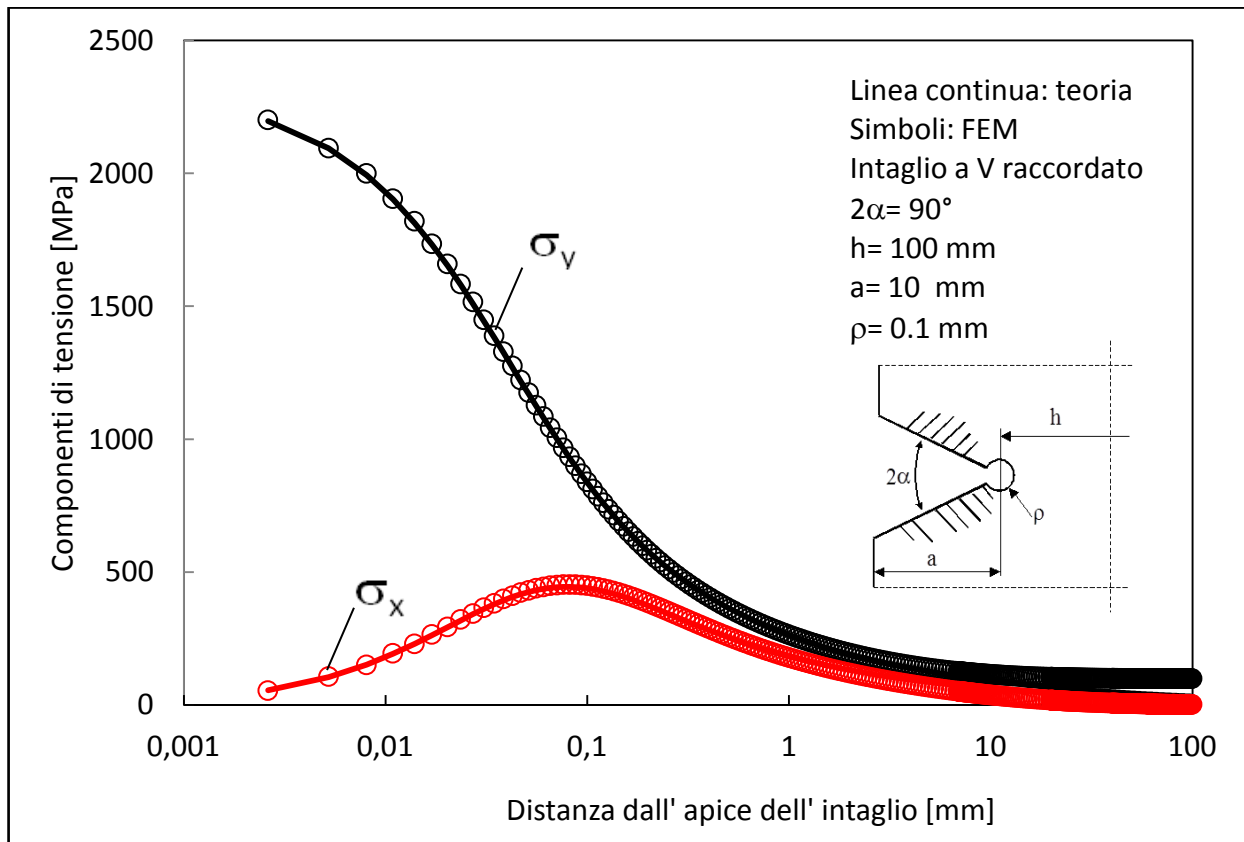
Piastra $h = 80\text{mm}$; $\rho = 2\text{ mm}$



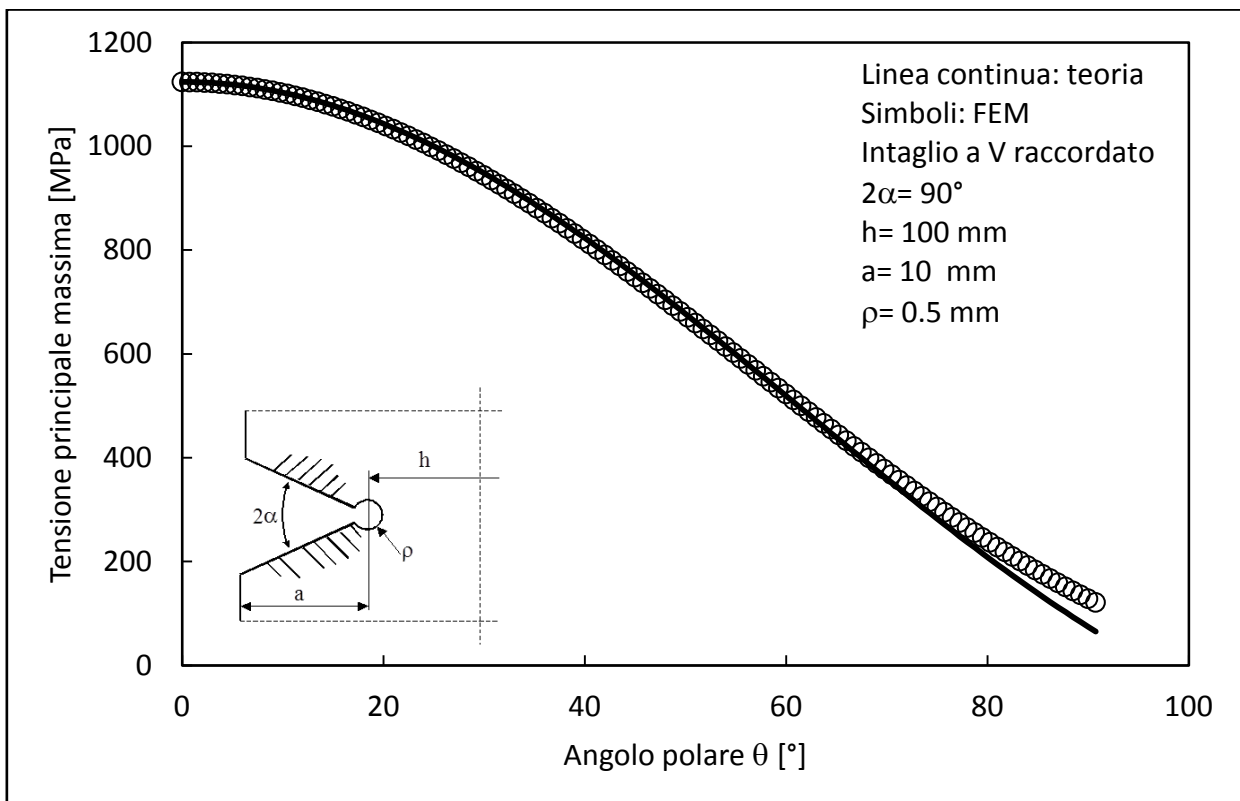
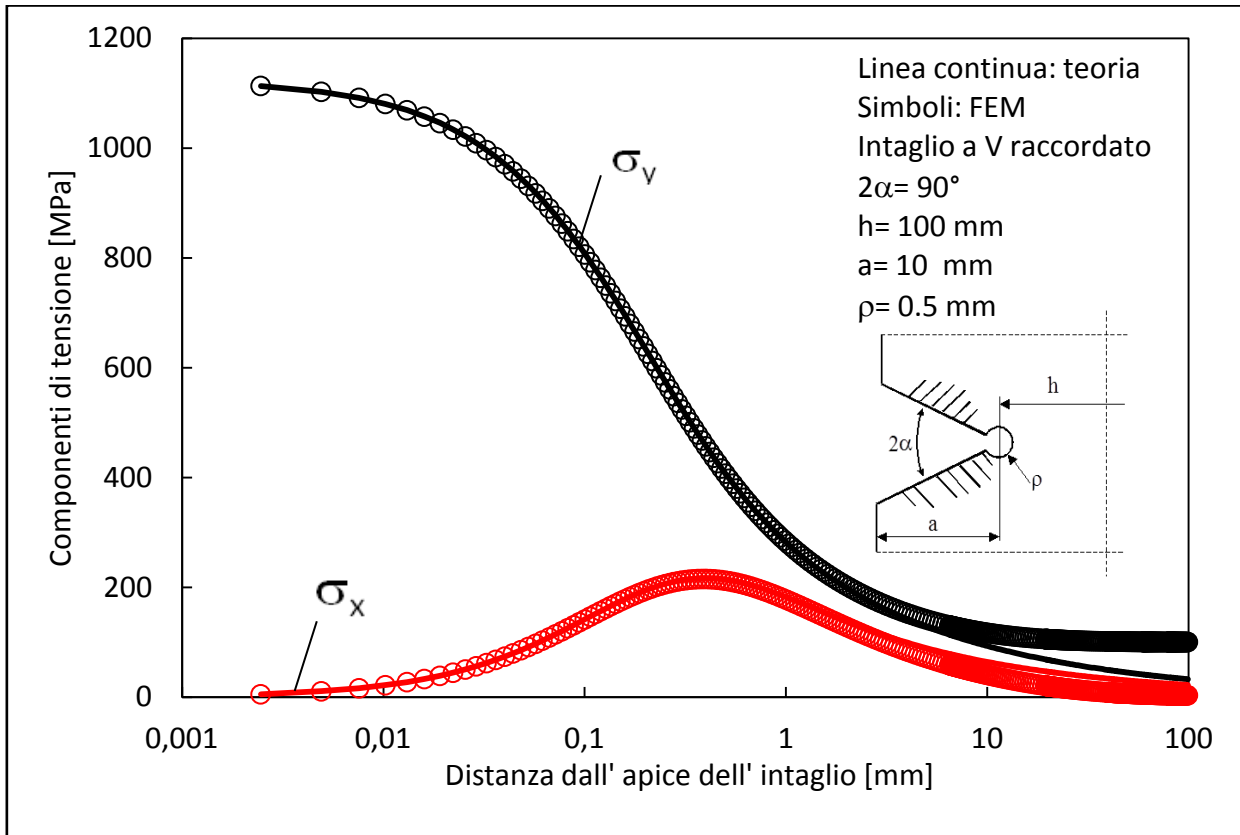
Piastra $h = 80\text{mm}$; $\rho = 4\text{ mm}$



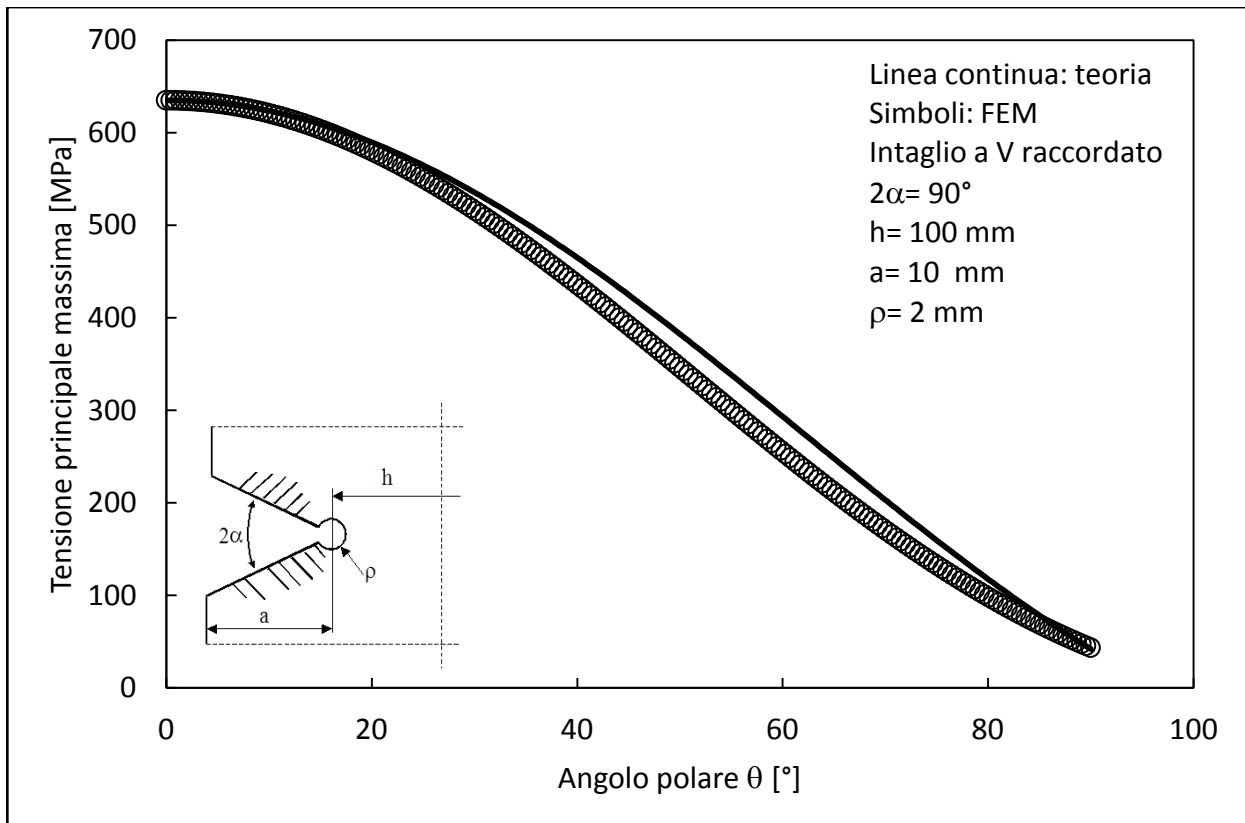
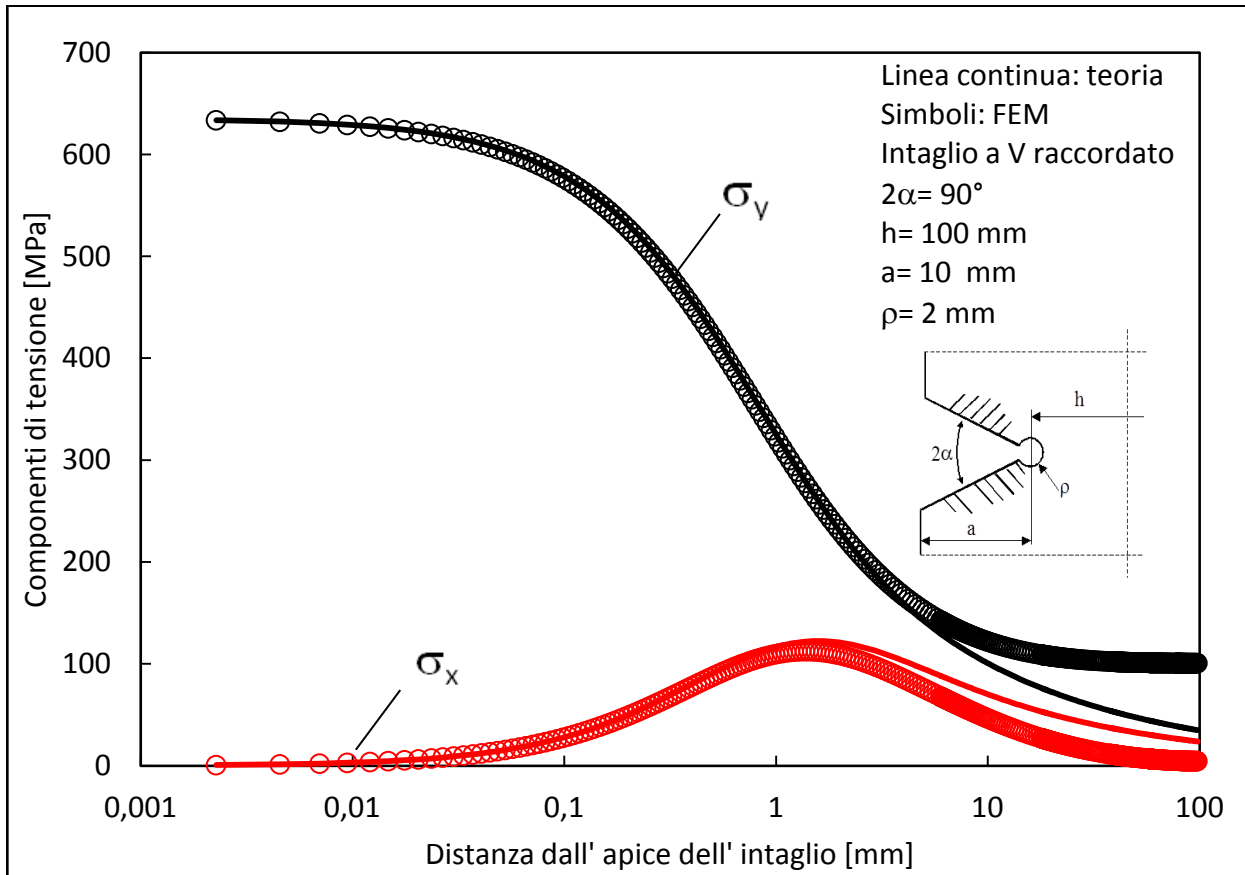
Piastra $h = 100\text{mm}$; $\rho = 0.1\text{ mm}$



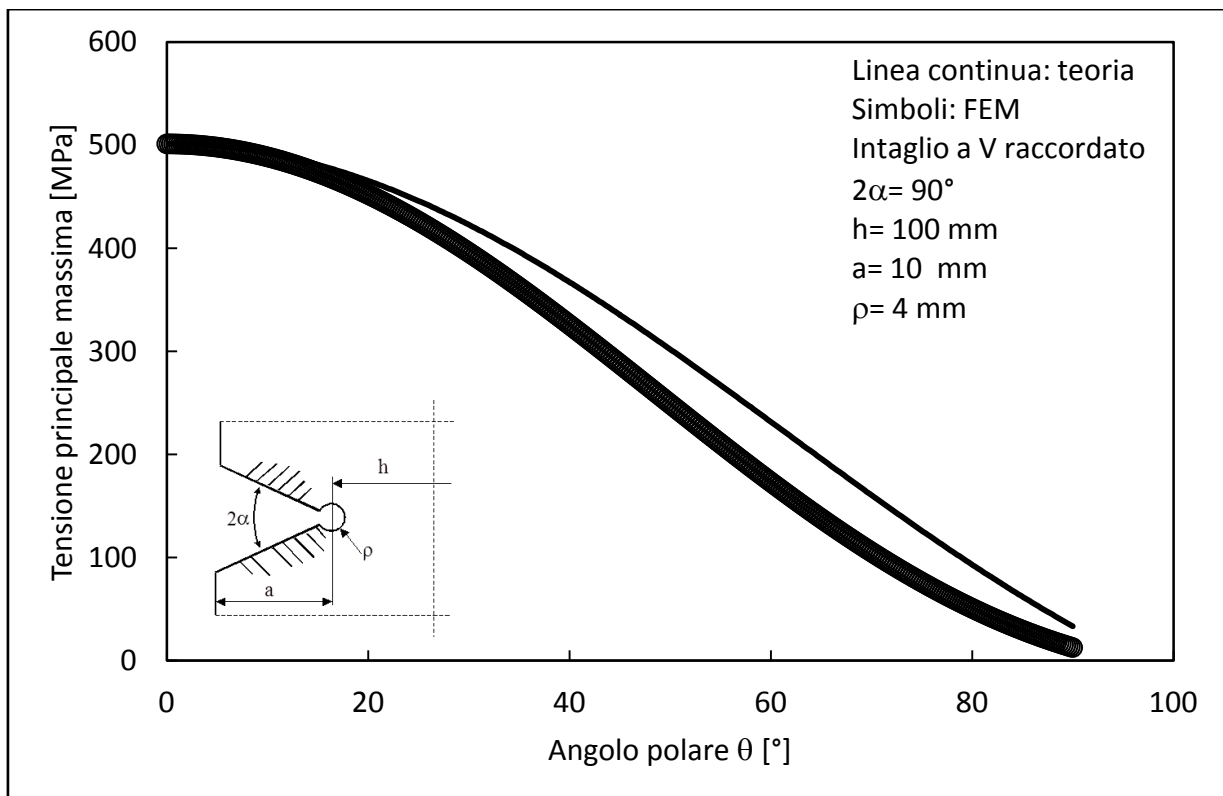
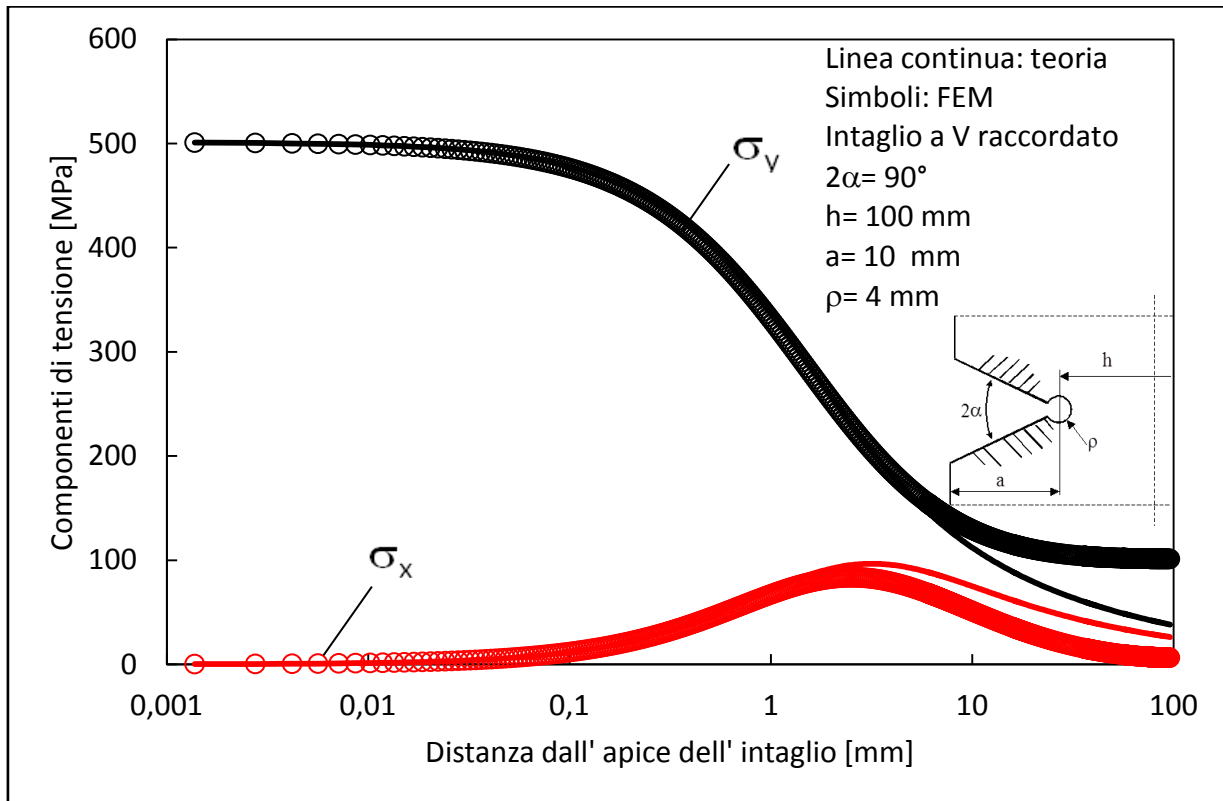
Piastra $h = 100\text{mm}$; $\rho = 0.5\text{ mm}$



Piastra $h = 100\text{mm}$; $\rho = 2\text{ mm}$



Piastra $h = 100\text{mm}$; $\rho = 4\text{ mm}$



5. Conclusioni

Dai grafici riportati per il confronto delle tensioni sulla bisettrice dell'intaglio possiamo notare che i valori teorici ottenuti approssimano molto bene i valori ottenuti con il metodo FEM.

In particolare si ottengono valori praticamente coincidenti nelle adiacenze dell'apice dell'intaglio mentre si discostano all'aumentare della distanza da esso.

Possiamo inoltre notare che le stime teoriche peggiorano all'aumentare del raggio di raccordo ρ e della larghezza della piastra h , anche se quest'ultimo parametro influisce in maniera marginale, ma rimangono comunque molto accurate in prossimità dell'intaglio, infatti i due andamenti tendono a discostarsi solo lontano dall'apice.

Nelle zone in cui i due andamenti si discostano le formule utilizzate tendono a sottostimare la σ_y mentre tendono a sovrastimare la σ_x .

Dai grafici riguardanti il tratto circolare del profilo invece possiamo notare che sostanzialmente gli andamenti non cambiano all'aumentare di h , infatti per raggi di raccordo uguali gli andamenti dei grafici sono molto simili, a meno dei valori assunti dalle tensioni ovviamente, in particolare per valori di ρ "piccoli" e cioè 0.1 e 0.5 mm l'andamento teorico sottostima quello dell'analisi FEM, mentre per ρ più grandi e cioè 2 e 4 mm i valori teorici sono una sovrastima di quelli FEM.

Anche in questo caso al variare dei parametri geometrici i valori teorici approssimano in maniera molto accurata le tensioni sull'asse dell'apice, mentre i due andamenti tendono a discostarsi all'aumentare dell'angolo considerato, osservando i grafici infine possiamo dire che per valori di $\rho = 0.5$ mm la stima delle tensioni sul raccordo è più accurata rispetto agli altri valori.

6. Bibliografia

[1] M.Zappalorto , P.Lazzarin (2011) In plane and out-of-plane stress field solutions for V-notches with and holes. Int J Fract 168:167-180