UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Forma lineare delle equazioni di Friedmann e probabilità quasi-classica

Relatore

Prof. Marco Matone

Laureando

Elia Libera

Anno Accademico 2024/2025

Abstract

Seguendo [1, 2], le equazioni di Friedmann verranno riformulate come una coppia di equazioni differenziali lineari del secondo ordine.
Dopo aver introdotto il tensore energia-impulso dell'universo e la metrica FLRW, si dedurranno le due equazioni di Friedmann, delle quali solo la seconda risulta lineare. Il processo di linearizzazione comincerà da una combinazione lineare delle due, contenente un termine proporzionale alla derivata Schwarziana del β-tempo $t_\beta = \int a^{-2\beta}\, dt'$ — ovvero una generalizzazione del tempo conforme. Dopo alcuni passaggi, si giungerà a un'equazione differenziale del secondo ordine, le cui soluzioni permettono di ricavare il β-tempo — a meno di trasformazioni di Möbius, a causa dell'invarianza della derivata Schwarziana sotto trasformazioni di $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ — e da questo il fattore di scala $a(t)$. Tuttavia, l'equazione ottenuta non è, in generale, lineare, a causa del termine di curvatura k/a^2. Si analizzerà quindi inizialmente il caso a curvatura nulla, da cui emerge un numero infinito di coppie equivalenti di equazioni di Friedmann lineari (due per ogni valore di $\beta \in \mathbb{R}$), e si metterà in evidenza una simmetria interna alle equazioni di Friedmann. In seguito, si prenderà in esame il caso a curvatura arbitraria, per il quale il tempo conforme verrà selezionato in modo naturale tra tutti i possibili β-tempi. La derivata Schwarziana verrà utilizzata per assorbire il termine di curvatura tramite esponenziazione, conducendo a un'equazione lineare che, insieme alla seconda equazione di Friedmann, costituisce un sistema di equazioni lineari del tutto equivalente a quello originale.
Osservando le due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione di Friedmann linearizzata, e sfruttando la relazione di proporzionalità $a \propto p^{-1}$ tra il fattore di scala e il trimomento — derivata dal redshift cosmologico — si noterà una somiglianza con le soluzioni in approssimazione semiclassica WKB dell'equazione di Schrödinger stazionaria in una dimensione. Si ipotizzerà quindi che l'equazione di Friedmann linearizzata rappresenti l'approssimazione semiclassica di un'equazione di Friedmann quantistica, che verrà derivata al termine dell'ultimo capitolo e dalla quale si ricaverà il fattore di scala quantistico a_q.

Indice

1 Introduzione **1**

2 Derivazione delle equazioni di Friedmann **3**
2.1 Prerequisiti matematici . . . 3
2.2 Universo come fluido perfetto . . . 5
2.3 Metrica Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker (FLRW) . . . 7
2.4 Equazioni di Friedmann . . . 10
2.5 Redshift cosmologico e tempo conforme . . . 11

3 Forma lineare delle equazioni di Friedmann **14**
3.1 Trasformazioni di Möbius e derivata Schwarziana . . . 14
3.2 Linearizzazione della prima equazione di Friedmann . . . 16
3.2.1 Curvatura nulla: una nuova simmetria . . . 18
3.2.2 Caso generale: $k \neq 0$ e assorbimento mediante esponenziazione . . . 19

4 Approssimazione WKB e equazione di Friedmann quantistica **22**
4.1 Quantizzazione di Bohr-Sommerfeld . . . 22
4.2 Approssimazione WKB e probabilità quasi classica . . . 23
4.2.1 Regione classicamente permessa . . . 23
4.2.2 Regione classicamente proibita . . . 25
4.2.3 Punti di inversione . . . 26
4.3 Equazione di Friedmann quantistica . . . 29

Capitolo 1

Introduzione

La relatività generale e la meccanica quantistica rappresentano due pilastri della fisica moderna, ma si fondano su principi strutturalmente differenti: la prima è una teoria geometrica e fortemente non lineare, mentre la seconda è intrinsecamente lineare e probabilistica. Questa profonda divergenza ha reso difficile, finora, la formulazione di una teoria unificata che descriva coerentemente la gravità in regime quantistico. Tuttavia, in ambito cosmologico, emergono analogie sorprendenti tra i due formalismi, in particolare quando si analizzano le equazioni di Friedmann che regolano l'evoluzione dell'universo.

In questa tesi, seguendo [1, 2], si propone una reinterpretazione delle equazioni di Friedmann come sistema di equazioni differenziali lineari del secondo ordine, ottenute attraverso un processo di linearizzazione che coinvolge la derivata Schwarziana e una generalizzazione del tempo conforme, denominata β-tempo. Si mostra come, nel caso a curvatura nulla, sia possibile ottenere un numero infinito di coppie equivalenti di equazioni di Friedmann lineari, ciascuna associata a un diverso valore di β. Tra queste, il tempo conforme emerge come caso privilegiato, selezionato naturalmente nel caso a curvatura arbitraria.
Il sistema di equazioni differenziali lineari a cui si giunge:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{d^2}{dt^2} + \dfrac{2\pi G}{3}\left(2\rho + 3p\right)\right]\Psi(t) = \dfrac{\Lambda}{12}\Psi(t) \\ \left[\dfrac{d^2}{dt^2} + \dfrac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3p\right)\right]a(t) = \dfrac{\Lambda}{3}a(t) \end{cases}$$

è del tutto equivalente alle due equazioni di Friedmann di partenza.
Le due soluzioni linearmente indipendenti del problema differenziale:

$$\psi = \sqrt{a}\exp\left(-\frac{i}{2}\sqrt{k}\eta\right) \qquad \psi^D = \sqrt{a}\exp\left(\frac{i}{2}\sqrt{k}\eta\right),$$

utilizzando la relazione di proporzionalità $a \propto p^{-1}$, mostrano una somiglianza strutturale con le soluzioni WKB dell'equazione di Schrödinger stazionaria in una dimensione. Si ipotizza quindi che l'equazione di Friedmann linearizzata rappresenti l'approssimazione semiclassica di una più profonda equazione quantistica, che verrà derivata nell'ultima parte del lavoro:

$$\begin{cases} \left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\kappa}{4a^2(t)}\right]\Psi(t) = 0 & k \neq 0 \\ \left[t_P^2\frac{d^2}{dt^2} \pm \frac{\beta^2}{4a^2(t)}\right]\Psi_0(t) = 0 & k = 0 \end{cases}$$

Due soluzioni linearmente indipendenti nel primo caso con $k \neq 0$ sono:

$$\Psi = \sqrt{a_q}\exp\left(-\frac{i}{2}\sqrt{\kappa}\eta_q\right) \qquad \Psi^D = \sqrt{a_q}\exp\left(\frac{i}{2}\sqrt{\kappa}\eta_q\right),$$

dove η_q e a_q sono il tempo conforme e il fattore di scala quantistici.

Questa prospettiva apre alla possibilità di descrivere l'evoluzione cosmologica non più come un processo deterministico classico, ma come il risultato di una sovrapposizione di stati quantistici, ciascuno associato a una diversa configurazione geometrica dell'universo. Poiché il modulo quadro della funzione d'onda restituisce proprio il fattore di scala a_q, quest'ultimo può essere interpretato come una quantità emergente da un formalismo quantistico. In analogia con la meccanica quantistica, dove $|\Psi|^2$ rappresenta una densità di probabilità, qui $|\Psi|^2 = a_q$ suggerisce che la geometria dell'universo — e in particolare la sua espansione — possa essere descritta come un fenomeno probabilistico, governato da una dinamica quantistica.

Infine, si sottolinea come i risultati ottenuti aprano alla possibilità di ulteriori sviluppi teorici. In particolare, il metodo proposto potrebbe essere esteso all'analisi delle equazioni di campo di Einstein in presenza di una metrica generica, oppure esplorato nel contesto della quantizzazione canonica della gravità, come nel formalismo di Wheeler-DeWitt. Tali prospettive suggeriscono che la linearizzazione delle equazioni cosmologiche non sia soltanto una semplificazione tecnica, ma un possibile indizio di una struttura quantistica più profonda della relatività generale.

Nota. L'intero lavoro è svolto in unità naturali, salvo nell'ultimo capitolo, dove la dimensionalità di $\hbar$ e di c risulta essenziale per l'interpretazione fisica.

Capitolo 2

Derivazione delle equazioni di Friedmann

Nella prima parte della tesi si definirà il tensore energia-impulso per l'universo, analizzandone le possibili forme in funzione della componente energetica dominante. Dopo un'introduzione agli spazi massimamente simmetrici, verrà presentata la metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) in diverse variabili. I risultati ottenuti saranno poi utilizzati per derivare le equazioni di Friedmann. Infine, si discuterà il redshift cosmologico e verrà introdotto il concetto di tempo conforme.

2.1 Prerequisiti matematici

Nel primo paragrafo verranno presentati alcuni risultati matematici e definizioni fondamentali, tratti da [3], che saranno utili per la comprensione dei contenuti sviluppati nel capitolo.

Una *varietà* di dimensione n è uno spazio topologico che localmente è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Si parla di *varietà metrica* quando essa è dotata di un tensore metrico, il quale rappresenta la naturale generalizzazione del prodotto interno tra vettori in $\mathbb{R}^n$ al contesto delle varietà, dove agisce su coppie di vettori appartenenti allo spazio tangente.

Definizione 2.1. (Metrica pseudo-riemanniana) Sia M una varietà differenziabile, e siano X, Y vettori appartenenti allo spazio tangente T_pM in un punto $p \in M$. Una *metrica pseudo-riemanniana* è un campo tensoriale di tipo $(0, 2)$ che, in ogni punto $p \in M$, soddisfa i seguenti assiomi:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \ g|_p\,(X, Y) = g|_p\,(Y, X),\\
&\text{(ii) se}\ \ g|_p\,(X, Y) = 0\ \ \forall X \in T_pM, \text{ allora}\, Y = 0.
\end{aligned}$$

Considerando il prodotto tensoriale tra spazi vettoriali finito-dimensionali, valgono i seguenti isomorfismi fondamentali:

$$\begin{aligned}
V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \ &\cong\ (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^* \ \equiv \mathrm{Hom}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, \mathbb{R})\\
&\cong\ \mathrm{Mult}(V_1 \times \cdots \times V_n, \mathbb{R}),
\end{aligned}$$

dove $\mathrm{Hom}(-,-)$ denota lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari tra due spazi, mentre $\mathrm{Mult}(-,-)$ indica lo spazio delle applicazioni multilineari.
Inoltre è possibile dualizzare $n-k$ fattori e scrivere:

$$\mathrm{Hom}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, \mathbb{R}) \ \cong\ \mathrm{Hom}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k, V_{k+1}^* \otimes \cdots \otimes V_n^*).$$

Nel caso del tensore metrico, si ha che $g|_p \in T_p^*M \otimes T_p^*M$ può essere interpretato in vari modi equivalenti:

- come una mappa bilineare $g : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, simmetrica per (i) e non degenere per (ii), grazie all'isomorfismo $T_p^*M \otimes T_p^*M \cong \mathrm{Bil}(T_pM \times T_pM\,,\,\mathbb{R})$;
- come una mappa lineare $g^\flat : T_pM \to T_p^*M$ che abbassa gli indici, per l'isomorfismo $T_p^*M \otimes T_p^*M \cong \mathrm{Hom}(T_pM\,,\,T_p^*M)$;
- come la sua inversa $g^\sharp : T_p^*M \to T_pM$, che esiste per (ii), usata per alzare gli indici.

La metrica $(g_{\mu\nu})$ può essere rappresentata come una matrice simmetrica, i cui autovalori sono reali. Nel caso di una metrica riemanniana, tutti gli autovalori sono positivi, mentre in una metrica pseudo-riemanniana possono essere anche negativi, pur restando non nulli grazie alla condizione di non degenerazione. Questo implica che, in ogni punto della varietà, il numero di autovalori positivi e negativi è fissato, definendo la segnatura della metrica. Diagonalizzando la matrice mediante un opportuno cambio di base e normalizzando gli autovalori a ± 1, si ottiene una rappresentazione canonica della segnatura, ad esempio $(-, ..., -, +, ..., +)$. Se gli autovalori sono tutti $+1$, la metrica riemanniana è detta *euclidea*. Se invece è presente un solo autovalore negativo, la metrica pseudo-riemanniana prende il nome di *lorentziana*: è questo il caso che si presenta nella relatività ristretta e nella relatività generale.

Si introduce ora il concetto di simmetria della metrica, fondamentale per lo studio delle isometrie e delle proprietà geometriche della varietà.

Definizione 2.2. (Isometria). Sia (M, g) una varietà pseudo-riemanniana. Un diffeomorfismo $f : M \to M$ si dice *isometria* se preserva la metrica

$$f^*\ g|_{f_p} = g|_p$$

ovvero $g|_{f_p}(f_*X, f_*Y) = g|_p(X, Y)$ per $X, Y \in T_pM$.

Le mappe indotte f^* e f_* dal diffeomorfismo f si dicono rispettivamente *pull-back* e *push-forward*, e forniscono un modo naturale per trasferire tensori tra spazi tangenti e cotangenti in punti distinti della varietà. [1]

Le isometrie sono, in definitiva, le simmetrie della metrica. L'insieme delle isometrie in una varietà (pseudo)riemanniana (M, g) costituisce un gruppo di Lie, denotato con $\mathrm{Isom}(M)$. I generatori infinitesimi di questo gruppo, ovvero gli elementi della sua algebra di Lie, sono campi vettoriali detti *campi di Killing*.
A ogni isometria globale è localmente associato, nell'intorno di un punto, un campo di Killing. Tali campi si determinano risolvendo l'equazione di Killing

$$\nabla_{(\mu} X_{\nu)} = 0, \tag{2.1}$$

la quale garantisce che il flusso generato dal campo X preservi localmente la metrica.
Questa condizione può essere espressa in modo equivalente tramite la derivata di Lie

$$(\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} = 0,$$

che implica l'invarianza della metrica lungo il flusso generato da X.

Infine, la *connessione affine* ∇ che si adotterà è l'unica connessione *metrica* rispetto a g — cioè tale che $\nabla_X g = 0\ \forall X \in \mathfrak{X}(M)$ — e priva di torsione. Questa connessione prende il nome di *connessione di Levi-Civita*.
I simboli di Christoffel associati alla connessione di Levi-Civita si calcolano mediante la formula:

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right). \tag{2.2}$$

[1] In questo caso $f^* : T_{f_p}^*M \otimes T_{f_p}^*M \to T_p^*M \otimes T_p^*M$ e $f_* : T_pM \to T_{f_p}M$.

2.2 Universo come fluido perfetto

L'universo su larga scala ($\sim 3 \cdot 10^8$ anni luce e oltre) può essere approssimato come un fluido perfetto, ossia un fluido omogeneo e isotropo completamente descritto da due grandezze: la densità di energia a riposo ρ e la pressione isotropa a riposo p. Questa ipotesi è supportata dalle osservazioni sperimentali, secondo le quali l'universo sarebbe spazialmente isotropo e omogeneo. Una conferma dell'isotropia spaziale proviene, ad esempio, dall'estrema isotropia della temperatura della radiazione cosmica di fondo (CMB), con una fluttuazione relativa dell'ordine di 10^{-5}; inoltre, poiché l'isotropia in ogni punto implica l'omogeneità dello spazio, si assumerà anche quest'ultima.
L'isotropia dello spazio può essere interpretata come invarianza rispetto alle rotazioni, mentre l'omogeneità come invarianza rispetto alle traslazioni. L'unione di queste proprietà corrisponde al massimo numero di isometrie (ovvero al massimo numero di campi di Killing) e si assume quindi che l'universo sia spazialmente massimamente simmetrico.

In questo contesto, il tensore energia-impulso si presenta in forma diagonale nel sistema di riferimento in cui il fluido è a riposo:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene la forma tensoriale del tensore energia-impulso dell'universo, valida in qualsiasi sistema di riferimento

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}, \tag{2.3}$$

dove U^μ è la quadri-velocità del fluido e $g^{\mu\nu}$ è il tensore metrico.

Il prossimo passo consiste nel definire la costante cosmologica Λ.
Esprimendo le equazioni di Einstein nella forma

$$G_{\mu\nu} := Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{2.4}$$

si osserva che la curvatura dello spaziotempo è completamente determinata dal tensore energia-impulso. Contrariamente alla fisica non gravitazionale, dove soltanto la differenza di energia tra due stati è un osservabile fisico misurabile, in cosmologia è rilevante anche il valore assoluto dell'energia. Questa osservazione suggerisce l'esistenza di una densità di energia intrinseca del vuoto.
Affinché il vuoto non presenti direzioni privilegiate, è necessario che il suo tensore energia-impulso sia invariante sotto trasformazioni di Lorentz in un sistema di coordinate localmente inerziali, la cui definizione segue [4, Capitolo 2].

Definizione 2.3. (Coordinate localmente inerziali). Sia (M, g) una varietà pseudo-riemanniana di dimensione m. Allora per ogni punto $p \in M$ esiste un sistema di coordinate $x^{\tilde{\mu}}$ nel quale $g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ assume la forma canonica diag$(-1, -1, ..., +1, +1, ...)$ e le derivate prime $\partial_{\tilde{\sigma}} g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ sono nulle. Queste coordinate sono dette "localmente inerziali" e una base di vettori associata è $\{\frac{\partial}{\partial x^{\tilde{1}}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{m}}}\}$.

Nel caso in esame in cui $m = 4$, il tensore $\eta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ rappresenta l'unico tensore di tipo (0,2) ad essere Lorentz-invariante in coordinate localmente inerziali, ovvero

$$\eta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \Lambda^{\tilde{\mu}}{}_{\tilde{\alpha}} \Lambda^{\tilde{\nu}}{}_{\tilde{\beta}} = \eta'_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}},$$

$$\eta' = \eta.$$

Allora il tensore energia-impulso del vuoto risulta necessariamente proporzionale al tensore metrico

$$T^{(\text{vac})}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = -\rho_{\text{vac}} \eta_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}},$$

dove è immediata la generalizzazione a un sistema di coordinate arbitrario

$$T^{(\text{vac})}_{\mu\nu} = -\rho_{\text{vac}} g_{\mu\nu}. \tag{2.5}$$

Osservazione 2.1. Si osservi che, confrontando tale espressione con quella del tensore energia-impulso dell'universo, definito come $T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}$, il vuoto si comporta come un fluido perfetto in cui pressione e densità di energia sono legate dalla relazione

$$p_{\text{vac}} = -\rho_{\text{vac}}.$$

In effetti, è possibile introdurre un'equazione di stato che lega pressione e densità di energia di un fluido perfetto:

$$p = w\rho. \tag{2.6}$$

La costante di proporzionalità w tra le due grandezze assume valori distinti in funzione del contenuto energetico dominante dell'universo:

$$w = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{radiazione,} \\ 0 & \text{materia,} \\ -1 & \text{vuoto.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Decomponendo il tensore energia impulso che compare nell'equazione (2.4) in una componente di materia $T^{(\text{M})}_{\mu\nu}$ e una componente di vuoto $T^{(\text{vac})}_{\mu\nu} = -\rho_{\text{vac}} g_{\mu\nu}$, le equazioni di campo di Einstein diventano

$$\text{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G\left(T^{(\text{M})}_{\mu\nu} - \rho_{\text{vac}} g_{\mu\nu}\right),$$

o equivalentemente, definendo la costante cosmologica $\Lambda := 8\pi G\rho_{\text{vac}}$

$$\text{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T^{(\text{M})}_{\mu\nu}. \tag{2.8}$$

L'introduzione della costante cosmologica equivale, pertanto, a considerare una densità di energia del vuoto non nulla, e i due termini sono intercambiabili.

Prima di procedere si vuole mostrare un modo per ottenere l'equazione di continuità:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{2.9}$$

che esprime la conservazione del quadrimomento, evidenziando che l'aggiunta di una costante cosmologica non ne preclude la validità.
Partendo dalla seconda identità di Bianchi in coordinate locali

$$\nabla_\kappa R^\xi{}_{\lambda\mu\nu} + \nabla_\nu R^\xi{}_{\lambda\kappa\mu} + \nabla_\mu R^\xi{}_{\lambda\nu\kappa} = 0,$$

si possono contrarre gli indici $\xi \leftrightarrow \mu$. Usando la relazione $\nabla_\kappa R^\mu_{\lambda\mu\nu} = \nabla_\kappa \text{Ric}_{\lambda\nu}$ si ottiene quindi

$$\nabla_\kappa \text{Ric}_{\lambda\nu} + \nabla_\mu R^\mu{}_{\lambda\nu\kappa} - \nabla_\nu \text{Ric}_{\lambda\kappa} = 0.$$

A questo punto si contraggono ulteriormente gli indici $\nu \leftrightarrow \lambda$:

$$\nabla_\mu \left(R\delta^\mu_\kappa - 2\text{Ric}^\mu{}_\kappa\right) = 0.$$

Alzando l'indice κ con la metrica, dividendo entrambi i lati per 2 e riarrangiando i segni si ottiene:

$$\nabla_\mu \left(\text{Ric} - \frac{1}{2}Rg\right)^{\mu\nu} = 0.$$

Infine, ricordando che ∇ è la connessione di Levi-Civita, vale $\nabla g = 0$ e l'identità può essere riscritta come

$$\nabla_\mu \left(\text{Ric} - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g\right)^{\mu\nu} = \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

2.3 Metrica Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker (FLRW)

In questo paragrafo verrà introdotta la metrica FLRW seguendo l'approccio proposto da [4].
Come anticipato in precedenza, le osservazioni sperimentali indicano che l'universo sia spazialmente massimamente simmetrico, ma evolva nel tempo. È tuttavia interessante avviare la trattazione considerando l'intero spaziotempo come massimamente simmetrico, ossia caratterizzato dal numero massimo di isometrie.
Per contare il numero massimo di simmetrie della metrica in uno spazio con curvatura qualsiasi che localmente somiglia a $\mathbb{R}^n$, sarà sufficiente effettuare il conto per $\mathbb{R}^n$ con metrica euclidea [2]. In questo spazio si hanno n assi lungo i quali è possibile muovere un qualsiasi punto infinitesimamente, perciò si contano in tutto n traslazioni. Inoltre, ciascun asse può essere ruotato attorno ai restanti $(n-1)$ assi, per un totale di $\frac{1}{2}n(n-1)$ rotazioni. Si avranno perciò

$$n + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

simmetrie indipendenti.
In una varietà massimamente simmetrica, la curvatura codificata dallo scalare di Ricci R risulta uniforme in ogni punto e in tutte le direzioni. Questa proprietà, insieme alla segnatura della metrica — che, grazie alla sua non degenerazione, permane invariata in ogni punto della varietà — può essere sfruttata per classificare gli spazi massimamente simmetrici. In particolare, in qualunque punto e sistema di coordinate, il tensore di Riemann soddisfa la seguente condizione:

$$R_{\lambda\mu\xi\nu} = k\,(g_{\lambda\mu}g_{\xi\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\xi\mu}), \tag{2.10}$$

dove

$$k = \frac{R}{n(n-1)} \tag{2.11}$$

è la curvatura scalare di Ricci normalizzata.
Se ci si trova in uno spazio quadridimensionale e la segnatura della metrica è $(-+++)$ esistono 3 possibili spazi massimamente simmetrici:

$$\begin{cases} k = 0 & \text{spazio di Minkowski,} \\ k > 0 & \text{spazio de Sitter,} \\ k < 0 & \text{spazio anti-de Sitter.} \end{cases} \tag{2.12}$$

A questo punto si vuole verificare che questi modelli siano soluzioni delle equazioni di Einstein, partendo dal tensore di Ricci e usando la (2.10)

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} &= g^{\alpha\beta}R_{\beta\mu\alpha\nu} = k\,g^{\alpha\beta}\,(g_{\beta\alpha}g_{\mu\nu} - g_{\beta\nu}g_{\mu\alpha}) \\ &= k\,(\delta^{\alpha}{}_{\alpha}g_{\mu\nu} - \delta^{\alpha}{}_{\nu}g_{\mu\alpha}) = 3k\,g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

La curvatura scalare diventa $R = 12k$. Perciò il tensore di Einstein si scrive come

$$G_{\mu\nu} = \mathrm{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -3k\,g_{\mu\nu}.$$

Dal momento che $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$, ci si aspetta che il tensore energia-impulso sia proporzionale alla metrica. Si è visto che un tale $T^{\mu\nu}$ esiste ed è esattamente il caso del tensore energia-impulso del vuoto (2.5), e dunque la relazione diventa

$$G_{\mu\nu} = -3k\,g_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} \Leftrightarrow \Lambda = 3k.$$

Pertanto, se l'universo è dominato dal vuoto, lo spaziotempo assume la forma di de Sitter per $\Lambda > 0$, di Minkowski per $\Lambda = 0$, e di anti-de Sitter per $\Lambda < 0$.

[2] Se la metrica non è riemanniana, e dunque la sua segnatura non è euclidea, alcune rotazioni diventano boosts, ma il conteggio rimane invariato.

Tuttavia, sebbene — come si vedrà più avanti — il nostro universo sia destinato a essere dominato dal vuoto in un futuro remoto, attualmente esso contiene anche materia e radiazione. Se pure si decidesse di trascurare la componente di materia nell'universo attuale, si commetterebbe un errore ignorandola nel passato, quando la densità di materia era significativamente maggiore. Di conseguenza, i modelli di spaziotempo massimamente simmetrici non risultano adatti a descrivere un universo come il nostro, in cui la quantità di materia e radiazione varia nel tempo.
È dunque necessario abbandonare l'idea di uno spaziotempo massimamente simmetrico, in favore di un modello che descriva un universo spazialmente massimamente simmetrico, ma soggetto a evoluzione temporale.

Si consideri uno spazio $\mathbb{R} \times \Sigma$, dove $\mathbb{R}$ rappresenta la direzione temporale e Σ una varietà tridimensionale massimamente simmetrica. A ogni istante temporale, lo spazio presenta sezioni massimamente simmetriche. La metrica assume la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)d\sigma^2, \tag{2.13}$$

dove t è la coordinata temporale, $R(t)$ il "fattore di scala" e $d\sigma^2 = \gamma_{ij}\, du^i du^j$ è la metrica di Σ.

Osservazione 2.2. La metrica (2.13) è priva di termini incrociati $dtdu^i$ e il coefficiente di dt^2 non dipende da u^i: ciò implica che il tempo scorra allo stesso modo in ogni punto dello spazio. Questo tipo di coordinate è detto *comovente*, e solo un osservatore che si mantenga a u^i costante percepirà l'universo come isotropo. La Terra, tuttavia, non è un osservatore comovente.

In quanto massimamente simmetrica, Σ possiede in particolare simmetria sferica. Pertanto, utilizzando i risultati della soluzione di Schwarzschild esposti in [4, Capitolo 5], la metrica può essere espressa, in coordinate sferiche $(\tilde{r}, \theta, \phi)$, nella forma:

$$d\sigma^2 = e^{2\beta(\tilde{r})} d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right). \tag{2.14}$$

Da una parte calcolando i simboli di Christoffel con la (2.2) è possibile ottenere le componenti del tensore di Riemann:

$$R^i{}_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i{}_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i{}_{kj}}{\partial x^l} + \Gamma^i{}_{k\lambda}\Gamma^\lambda{}_{jl} - \Gamma^i{}_{l\lambda}\Gamma^\lambda{}_{kj}, \tag{2.15}$$

e, successivamente, per contrazione degli indici $i \leftrightarrow k$, quelle del tensore di Ricci R_{jl}.
D'altra parte, riprendendo la relazione (2.10) che deve soddisfare il tensore di Riemann in uno spazio massimamente simmetrico

$$R_{ijkl} = k\,(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}),$$

dove γ_{ij} sono ancora le componenti della metrica $d\sigma^2$, per contrazione degli indici si ottiene il tensore di Ricci

$$R_{jl} = 2k\,\gamma_{jl}.$$

Eguagliando le varie componenti e risolvendo per $\beta(\tilde{r})$ si ottiene $\beta = -\frac{1}{2}ln(1 - k\tilde{r}^2)$ che, sostituita nella (2.14), dà come risultato

$$d\sigma^2 = \frac{d\tilde{r}^2}{1 - k\tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right), \tag{2.16}$$

dove il valore di $k = \frac{R}{n(n-1)} = \frac{R}{6}$ stabilisce la curvatura di Σ.

Osservazione 2.3. Un modo interessante di riscrivere la (2.16) consiste nel normalizzare k in modo tale che:

$$k = \begin{cases} +1 & \text{chiuso} \rightarrow \text{curvatura positiva}, \\ 0 & \text{piatto} \rightarrow \text{metrica euclidea}, \\ -1 & \text{aperto} \rightarrow \text{curvatura negativa}. \end{cases}$$

Facendo poi la seguente sostituzione:

$$d\chi = \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{1-k\tilde{r}^2}}$$

e integrando si ottiene

$$\tilde{r} := S_k(\chi) = \begin{cases} sin(\chi), & k=+1 \\ \chi, & k=0 \\ \sinh(\chi), & k=-1 \end{cases}$$

perciò la metrica assume la forma

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + S_k^2(\chi)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \tag{2.17}$$

Si osservi che per $k=0$ e $k=1$ si ottengono rispettivamente la metrica euclidea e quella della 3-sfera:

$$\begin{cases} d\sigma^2 = d\chi^2 + \chi^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right), \\ d\sigma^2 = d\chi^2 + sin^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right). \end{cases}$$

La metrica dello spaziotempo, aggiungendo la parte temporale e il fattore di scala $R(t)$ alla (2.16), prende il nome di *metrica FLRW* e si scrive

$$ds^2 = -dt^2 + R(t)\left[\frac{d\tilde{r}^2}{1-k\tilde{r}^2} + \tilde{r}^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right]. \tag{2.18}$$

Si possono effettuare dei cambi di variabile facendo in modo che il fattore di scala sia adimensionale, la coordinata radiale abbia dimensioni di una distanza e il parametro di curvatura abbia dimensioni di $[\mathrm{L}]^{-2}$:

$$a(t) := \frac{R(t)}{R_0}, \qquad r := R_0\tilde{r}, \qquad k := \frac{k}{R_0^2}.$$

In queste variabili la metrica FLRW diventa

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + a(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right]} \tag{2.19}$$

Seguendo la (2.2) è possibile calcolare i simboli di Christoffel:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{11} = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} && \Gamma^1_{11} = \frac{kr}{1-kr^2} \\
&\Gamma^0_{22} = a\dot{a}\, r^2 && \Gamma^0_{33} = a\dot{a}\, r^2 \sin^2\theta \\
&\Gamma^1_{01} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{03} = \frac{\dot{a}}{a} && \\
&\Gamma^1_{22} = -r(1-kr^2) && \Gamma^1_{33} = -r(1-kr^2)\,\sin^2\theta \\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} && \\
&\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\,\cos\theta && \Gamma^3_{23} = \cot\theta
\end{aligned}$$

ricordando che Γ è simmetrico negli indici bassi, poiché la connessione di Levi-Civita è priva di torsione. Si possono inoltre calcolare le componenti del tensore di Riemann con la (2.15) e, successivamente, quelle del tensore di Ricci per contrazione degli indici:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ric}_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a} && \mathrm{Ric}_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2} \\
&\mathrm{Ric}_{22} = r^2\left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k\right) && \mathrm{Ric}_{33} = r^2\left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k\right)\sin^2\theta.
\end{aligned}$$

Infine, lo scalare di Ricci vale

$$R = \mathrm{Ric}^{\mu}{}_{\mu} = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right].$$

2.4 Equazioni di Friedmann

Inserendo nelle equazioni di Einstein le componenti del tensore di Ricci, del tensore metrico, del tensore energia-impulso [3] $T^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(\rho, p, p, p)$ e dello scalare di Ricci, si ricavano le due equazioni di Friedmann.

Per le componenti $\mu\nu = 00$, ricordando che $g_{00} = -1$, si ottiene

$$\mathrm{Ric}_{00} - \frac{1}{2} R g_{00} + \Lambda g_{00} = 8\pi G T_{00} = 8\pi G \rho$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-\frac{3\ddot{a}}{a} + 3\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right] - \Lambda = 8\pi G \rho$$

che, riarrangiata a dovere, porta alla *prima equazione di Friedmann*

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(8\pi G \rho + \Lambda\right) - \frac{k}{a^2}.} \tag{2.20}$$

Ora è possibile occuparsi della parte spaziale.
Dal momento che le componenti spaziali del tensore di Ricci possono essere riscritte come

$$R_{ii} = \frac{g_{ii}}{a^2}\left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k\right),$$

per ogni componente $\mu\nu = ii$ si ottiene la stessa equazione:

$$\frac{g_{ii}}{a^2}\left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k\right) - \frac{1}{2}\mathcal{R} g_{ii} + \Lambda g_{ii} = 8\pi G(p)\, g_{ii},$$

da cui, rimuovendo la metrica da entrambi i lati e riarrangiando i termini

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi G p + \frac{\Lambda}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{k}{a^2}. \tag{2.21}$$

A questo punto si osserva che, prendendo la combinazione lineare $2 \cdot (2.21) - (2.20)$, si riesce ad eliminare il termine $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$ ed ottenere così la *seconda equazione di Friedmann*

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3p\right) + \frac{\Lambda}{3}.} \tag{2.22}$$

In conclusione, sono state ottenute due equazioni differenziali linearmente indipendenti che descrivono l'evoluzione del fattore di scala adimensionale $a(t)$. Si osservi che l'equazione (2.20) non è lineare, a differenza della (2.22).
Nel capitolo successivo si mostrerà come derivare da queste un sistema di equazioni differenziali lineari del secondo ordine, anch'esse linearmente indipendenti.

L'ultimo risultato che si intende presentare, prima di concludere il paragrafo, riguarda la relazione che lega la densità di energia ρ al fattore di scala a.
Partendo dalla prima componente dell'equazioni di continuità:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\mu T^\mu{}_0 \\ &= \partial_\mu T^\mu{}_0 + \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda} T^\lambda{}_0 - \Gamma^\lambda{}_{\mu 0} T^\mu{}_\lambda \\ &= -\partial_0 \rho - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) \end{aligned}$$

[3] Come anticipato nel paragrafo 2.2, il tensore energia-impulso ha forma diagonale nel sistema di riferimento in cui il fluido è a riposo

e utilizzando l'equazione di stato riportata nell'osservazione 2.1, ovvero $p = w\rho$, si ottiene l'equazione differenziale

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}$$

che dà come risultato

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}.$$

Inserendo i diversi valori per w dalla (2.7) si ottengono diverse dipendenze per ρ dal fattore di scala, in funzione del contenuto energetico dominante dell'universo. In particolare:

$$\begin{cases} \rho_{\mathrm{R}} \propto a^{-4} & \text{radiazione,} \\ \rho_{\mathrm{M}} \propto a^{-3} & \text{materia,} \\ \rho_{\Lambda} = -p_{\Lambda} = \text{const} & \text{vuoto.} \end{cases}$$

Dal momento che l'universo è in espansione accelerata, ovvero $\ddot{a}(t) > 0$, e le densità di energia di materia e radiazione decrescono con l'espansione dell'universo, ovvero al crescere di a, la componente di energia del vuoto — essendo costante — dominerà l'evoluzione cosmica nel limite temporale asintotico. In questo limite l'universo tenderà allo spaziotempo massimamente simmetrico di de Sitter, di cui si è parlato nella sezione 2.3.

2.5 Redshift cosmologico e tempo conforme

Il redshift cosmologico è una misura dell'allungamento della lunghezza d'onda di una particella, causato dall'espansione dell'universo. Una particella emessa in un'epoca in cui l'universo era più compatto subisce un aumento della lunghezza d'onda durante il suo viaggio attraverso lo spazio, a causa della variazione della metrica che accompagna l'espansione cosmica.
In questo paragrafo verrà mostrato come il redshift cosmologico conduca in modo naturale alla definizione di una nuova coordinata temporale: il tempo conforme.

Seguendo quanto esposto in [5], si introduce la linea di universo di un fotone $x^{\mu}(\sigma)$ parametrizzata dal parametro affine σ. Il quadrimomento del fotone è definito come $P^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\sigma}$.

Definizione 2.4. (Geodetica). Una particella libera segue una traiettoria detta *geodetica*, la cui forma è determinata dalla seguente equazione:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\sigma^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\frac{dx^{\nu}}{d\sigma}\frac{dx^{\rho}}{d\sigma} = 0. \tag{2.23}$$

In particolare, i fotoni seguono traiettorie di tipo luce, dette *geodetiche nulle*, per le quali vale la condizione

$$u^{\mu}u_{\mu} = 0 \Leftrightarrow g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\sigma}\frac{dx^{\nu}}{d\sigma} = 0. \tag{2.24}$$

Si ricordi la metrica (2.17) in coordinate sferiche comoventi (χ, θ, ϕ), riportata nell'osservazione 2.3. Aggiungendo la parte temporale e il fattore di scala, si ottiene:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[d\chi^2 + S_k(\chi)^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right]$$

Si consideri un osservatore situato nell'origine $\chi = 0$ al tempo $t = t_0$, che guarda in una direzione qualsiasi (θ, ϕ). Un fotone viene emesso all'istante t_i, con energia E_{em} in una regione remota dell'universo $(t_i, \chi_i, \theta, \phi)$, e viaggia in direzione radiale χ verso l'osservatore, il quale ne misura un'energia E_{obs} all'istante t_0.
Poiché il fotone si muove radialmente, $P^{\theta} = \frac{d\theta}{d\sigma} = 0$ e $P^{\phi} = \frac{d\phi}{d\sigma} = 0$. Dalla condizione per una geodetica

nulla (2.24), inserendo il quadrimomento del fotone e prendendo la soluzione negativa — dovuta al moto del fotone verso l'osservatore — si ottiene

$$-E^2 + a^2(P^\chi)^2 = 0 \Rightarrow P^\chi = -\frac{E}{a}.$$

L'unico simbolo di Christoffel non nullo tra $\Gamma^t{}_{tt}$, $\Gamma^t{}_{t\chi} = \Gamma^t{}_{\chi t}$ e $\Gamma^t{}_{\chi\chi}$ è proprio $\Gamma^t{}_{\chi\chi} = a\dot{a}$. Inserendo P^χ e $\Gamma^t{}_{\chi\chi}$ nella prima componente dell'equazione della geodetica, $\mu = t$, si ottiene:

$$\frac{dt}{d\sigma} + \Gamma^t{}_{\chi\chi}\left(\frac{d\chi}{d\sigma}\right)^2 = \frac{dE}{d\sigma} + a\dot{a}\left(-\frac{E}{a}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{dE}{d\sigma} = -\frac{\dot{a}}{a}E^2.$$

Inoltre, ricordando la dipendenza $t(\sigma)$, si può scrivere

$$\frac{dE}{d\sigma} = \frac{dE}{dt}\frac{dt}{d\sigma} = \frac{dE}{dt}\cdot E := \dot{E}E$$

da cui si ottiene

$$\frac{\dot{E}}{E} = -\frac{\dot{a}}{a}.$$

L'equazione differenziale, considerando a_{obs} il fattore di scala misurato all'istante di osservazione t_0, e a_{em} quello all'istante di osservazione t_i, e ricordando che l'energia del fotone è data dalla relazione di Planck $E = \frac{hc}{\lambda}$, conduce al seguente risultato:

$$\frac{E_{em}}{E_{obs}} = \frac{a_{obs}}{a_{em}} \iff \frac{\lambda_{obs}}{a_{obs}} = \frac{\lambda_{em}}{a_{em}} \quad \longrightarrow \quad \lambda \propto a \quad \forall t,$$

da cui si ricava il *redshift cosmologico*

$$\boxed{z := \frac{\lambda_{em} - \lambda_{obs}}{\lambda_{em}}} \tag{2.25}$$

Dal momento che per un fotone vale $E = |\vec{P}| := p$, con l'introduzione della relazione di Planck si ottengono le seguenti relazioni di proporzionalità:

$$E = p \propto a^{-1} \quad \xrightarrow{\text{Planck}} \quad p \propto \lambda^{-1}. \tag{2.26}$$

La generalizzazione alle particelle massive, come discusso in [6], può essere ottenuta considerando una particella situata nelle vicinanze dell'origine, $\chi = 0$. A partire dalla componente $\mu = \chi$ dell'equazione della geodetica, e calcolando i simboli di Christoffel $\Gamma^\chi{}_{\chi\chi} = k\chi$, $\Gamma^\chi{}_{t\chi} = \Gamma^\chi{}_{\chi t} = \frac{\dot{a}}{a}$ e $\Gamma^\chi{}_{tt} = 0$, si ricava l'equazione

$$\frac{d^2\chi}{d\sigma^2} = -k\chi\left(\frac{d\chi}{d\sigma}\right)^2 - \frac{2\dot{a}}{a}\frac{dt}{d\sigma}\frac{d\chi}{d\sigma}$$

che, nel limite $\chi = 0$, si semplifica in

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\chi}{d\sigma}\right) = -\frac{2\dot{a}}{a}\frac{d\chi}{d\sigma},$$

e la cui soluzione è

$$\frac{d\chi}{d\sigma} \propto \frac{1}{a^2(t)}.$$

Sapendo che il modulo del quadrimomento $P^\mu = (E, P^\chi, P^\theta, P^\phi)$ si scrive come $\sqrt{P^\mu P_\mu} = m\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma}}$, concentrandosi sulla parte spaziale si ottiene

$$p = |\vec{P}| = m\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma}} = m\sqrt{a^2(t)\left(\frac{d\chi}{d\sigma}\right)^2} = ma(t)\left(\frac{d\chi}{d\sigma}\right),$$

da cui segue

$$\frac{p}{ma(t)} = \frac{d\chi}{d\sigma} \propto a^{-2}(t) \Rightarrow p \propto a^{-1}, \tag{2.27}$$

che riproduce la stessa relazione di proporzionalità ottenuta in precedenza per i fotoni, esprimendo il redshift cosmologico anche per le particelle massive.
Supponendo che tali particelle siano dotate di una lunghezza d'onda e che valga ancora la relazione $\lambda \propto a(t)$ per ogni istante temporale, si ottiene infine la relazione di de Broglie:

$$p \propto \lambda^{-1}. \tag{2.28}$$

Prima di concludere il capitolo, si introduce il concetto di tempo conforme.
Conoscendo la variazione della lunghezza d'onda di un fotone, è possibile risalire alla distanza alla quale esso è stato emesso.
Poiché i fotoni seguono traiettorie di tipo luce, si ha

$$u^\mu u_\mu = 0 \Leftrightarrow -(u^t)^2 + a^2(u^\chi)^2 = 0.$$

Parametrizzando la linea di universo con il tempo t, la quadrivelocità si esprime come $u^\mu = \left(1, \frac{d\chi}{dt}, 0, 0\right)$, da cui segue

$$-1 + a^2\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{d\chi}{dt} = \pm\frac{1}{a}.$$

Dal momento che il fotone è in moto verso l'osservatore, si sceglie la soluzione negativa.
Assumendo che l'osservatore sia nell'origine $\chi = 0$, e integrando tra l'istante di emissione t_i e quello di osservazione t_0, si ottiene

$$\cancel{\chi_0} - \chi_i = -\int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \Leftrightarrow \chi_i = \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}.$$

Si definisce quindi il *tempo conforme*:

$$\eta(t) := \int \frac{dt}{a(t)} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\dot{\eta}(t) = a^{-1}(t)} \tag{2.29}$$

e si riscrive la distanza comovente come

$$\cancel{\chi_0} - \chi_i = \eta_i - \eta_0 \Leftrightarrow \chi_i = \eta_0 - \eta_i$$

dove η_0 è il tempo conforme dell'osservatore e η_i è quello di emissione.
Dalla relazione infinitesima

$$dt = a\, d\eta$$

si può riscrivere la metrica FLRW raccogliendo il termine di scala:

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-d\eta^2 + d\chi^2 + S_k(\chi)^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right].$$

Capitolo 3

Forma lineare delle equazioni di Friedmann

In questo capitolo, seguendo [1], si illustrerà come ottenere una forma lineare delle equazioni di Friedmann del tutto equivalente alle espressioni (2.20) e (2.22).
Il primo paragrafo è dedicato alla presentazione delle trasformazioni di Möbius e della derivata Schwarziana, concetti fondamentali per lo sviluppo del capitolo.
A partire dal secondo paragrafo, si affronterà il processo di linearizzazione delle equazioni. L'approccio seguito si articolerà lungo due percorsi paralleli:

- Da un lato, si considererà una combinazione lineare delle due equazioni di Friedmann, mostrando come essa possa essere espressa in termini della derivata Schwarziana di una particolare quantità — il β-tempo — dalla quale si ricava il fattore di scala.
- Dall'altro, si introdurrà un'equazione differenziale contenente anch'essa un termine di derivata Schwarziana, le cui soluzioni permettono di determinare il β-tempo.

Sostituendo la derivata Schwarziana, si giungerà a un'equazione differenziale del secondo ordine, non lineare a causa del termine di curvatura.
A questo punto, si analizzerà il caso a curvatura nulla ($k = 0$), per il quale si otterranno infinite coppie di equazioni equivalenti a quelle di Friedmann. Infine, si esaminerà il caso a curvatura arbitraria ($k \neq 0$), in cui la selezione del tempo conforme tra i possibili β-tempi possibili, assieme alla sua esponenziazione, consentirà di ottenere un'equazione lineare che, insieme alla seconda equazione di Friedmann, costituisce un sistema perfettamente equivalente a quello originale.

3.1 Trasformazioni di Möbius e derivata Schwarziana

Si introducono le *trasformazioni di Möbius*, seguendo i risultati esposti in [7], insieme alla definizione e alle proprietà della *derivata Schwarziana*.

Definizione 3.1. (Trasformazione di Möbius). Si consideri lo spazio complesso esteso $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Una trasformazione di Möbius è una mappa

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0,$$

olomorfa e biiettiva, con inversa $f^{-1}(w) = (dw - b)/(-cw + a)$ anch'essa olomorfa. In altre parole, f è un automorfismo di $\mathbb{C}_\infty$.

L'insieme delle trasformazioni di Möbius, denotato

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty) := \left\{ f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty \,\middle|\, f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ ad - bc \neq 0 \right\},$$

ha struttura di gruppo rispetto alla composizione di mappe.
I parametri complessi (a, b, c, d) possono essere pensati come elementi del gruppo di matrici 2×2 invertibili:

Proposizione. *Esiste un omomorfismo di gruppi suriettivo*

$$\Upsilon : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty),$$

dato da $\Upsilon\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, *il cui nucleo è*

$$\ker(\Upsilon) = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{C}^\times\}^1,$$

cioè il sottogruppo delle matrici scalari.

Si noti che due matrici M, N con $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ definiscono la stessa trasformazione di Möbius *se e solo se* $N = \lambda M$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Questo significa che sono mappate tramite Υ nello stesso elemento di $\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$, ovvero Υ non è iniettivo.
Dal momento che l'obiettivo è cercare un isomorfismo di gruppi, cioè un omomorfismo biiettivo, si enuncia il seguente teorema, la cui dimostrazione si trova in [3, Capitolo 3]:

Teorema 3.1. ***(Teorema fondamentale degli omomorfismi).*** *Sia $f : X \to Y$ un omomorfismo. Allora*

$$X/Ker\, f \cong Im\, f$$

Nel caso in esame $Im\, \Upsilon = \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$, in quanto Υ è un omomorfismo suriettivo.
Si definisce perciò il gruppo proiettivo come gruppo quoziente:

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) := \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/Ker(\Upsilon),$$

dove due matrici $M, N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ appartengono alla stessa classe di equivalenza — ovvero sono lo stesso elemento di $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ — se e solo se $M^{-1}N \in Ker(\Upsilon)$. Scegliendo $N = \lambda M$ si ottiene $M^{-1}N = \lambda \mathbb{I} \in Ker(\Upsilon)$, perciò a questo punto vale l'isomorfismo:

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty) \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}).$$

Infine, senza perdere di generalità, si vuole considerare il vincolo sui parametri complessi $ad - bc = 1$, che porta a definire:

$$\begin{aligned} \text{Möb}(\mathbb{C}_\infty) &:= \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty) \mid ad - bc = 1\} \\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) &:= \{M \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \mid \det M = 1\} \end{aligned}$$

a cui discende l'isomorfismo

$$\text{Möb}(\mathbb{C}_\infty) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}). \tag{3.1}$$

Definizione 3.2. (Derivata Schwarziana). Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che f' non sia identicamente nulla. La *derivata Schwarziana* di f in $z \in \mathbb{C}$ è definita come

$$Sf(z) = \{f, z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2.$$

Si enunciano alcune importanti proprietà che verranno utilizzate più avanti:

- *Invarianza sotto trasformazioni di Möbius*
  Siano $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e f la sua trasformazione di Möbius. Allora

$$\{f \circ g, z\} = \{g, z\} \tag{3.2}$$

[1] $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

- *Regola della catena*
  Sia $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa di $y(x)$ tale che f' non sia identicamente nulla, con $x \in \mathbb{C}$. Allora vale la regola della catena

$$\{f(x), x\} = \{f(y), y\} \left(\frac{\partial y(x)}{\partial x}\right)^2 + \{y(x), x\} \tag{3.3}$$

3.2 Linearizzazione della prima equazione di Friedmann

Seguendo [1], si procederà a linearizzare la prima equazione di Friedmann.

Si consideri la seguente combinazione lineare del lato sinistro delle due equazioni di Friedmann:

$$X_\beta(a) = (2.22) + (\beta - 1)(2.20) = \frac{\ddot{a}}{a} + (\beta - 1)\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2. \tag{3.4}$$

dove β è un parametro reale.
Si definisce il β-tempo, una generalizzazione del tempo conforme: (2.29)

$$\dot{t}_\beta := a^{\frac{1}{\delta(\beta)}}$$

dove $\delta(\beta)$ è una funzione di β. Invertendo l'espressione si calcolano le derivate temporali del fattore di scala:

$$\begin{cases} \dot{a} = \delta(\beta)\left(\dot{t}_\beta\right)^{\delta(\beta)-1}\ddot{t}_\beta \\ \ddot{a} = \delta(\beta)\left[(\delta(\beta)-1)\left(\dot{t}_\beta\right)^{\delta(\beta)-2}\left(\ddot{t}_\beta\right)^2 + \left(\dot{t}_\beta\right)^{\delta(\beta)-1}\dddot{t}_\beta\right]. \end{cases}$$

Dividendo ciascuna espressione per il fattore di scala $a = (\dot{t}_\beta)^{\delta(\beta)}$ e inserendole nella combinazione lineare (3.4) si ottiene la sua espressione in funzione del β-tempo:

$$X_\beta(t_\beta) = \delta(\beta)\left[\frac{\dddot{t}_\beta}{\dot{t}_\beta} + \left(\frac{\ddot{t}_\beta}{\dot{t}_\beta}\right)^2(\beta\delta(\beta) - 1)\right].$$

A questo punto si nota che, imponendo $\beta\delta(\beta) - 1 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \delta(\beta) = -\frac{1}{2\beta}$, la quantità racchiusa nelle parentesi quadre corrisponde alla derivata Schwarziana di t_β rispetto a t. La combinazione lineare diventa quindi

$$X_\beta(t_\beta) = -\frac{1}{2\beta}\{t_\beta, t\}. \tag{3.5}$$

Osservazione 3.1. Ora che si è data una forma per $\delta(\beta) = -\frac{1}{2\beta}$, il β-tempo si scrive come

$$\dot{t}_\beta = a^{-2\beta}. \tag{3.6}$$

Trovare un'espressione per t_β è perciò equivalente a risolvere le equazioni di Friedmann, dal momento che si può calcolare $a(t) = \left[\frac{d}{dt}(t_\beta)\right]^{-\frac{1}{2\beta}}$.
Si noti che per $\beta = \frac{1}{2}$ si ottiene il tempo conforme $\dot{t}_{\frac{1}{2}}(t) \equiv \dot{\eta}(t) = a^{-1}(t)$.

Si consideri ora la seguente equazione differenziale:

$$\dot{t}_\beta^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}\left(\dot{t}_\beta^{-1}\frac{d}{dt}\left(\dot{t}_\beta^{\frac{1}{2}}\phi_\beta\right)\right) = 0, \tag{3.7}$$

dove ϕ_β è una funzione liscia di t. L'equazione può essere risolta facilmente mediante una sostituzione del tipo $u_\beta(t) = \dot{t}_\beta^{\frac{1}{2}}\phi_\beta$, da cui si ottiene uno spazio bidimensionale di soluzioni:

$$\mathcal{S} = \text{span}\{\dot{t}_\beta^{-1/2}, \dot{t}_\beta^{-1/2}t_\beta\} = \text{span}\{a^\beta, a^\beta t_\beta\}.$$

Sviluppando le derivate della (3.7) si ottiene un'equazione differenziale del tutto equivalente:

$$\dot{t}_\beta^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{3}{4}\dot{t}_\beta^{-\frac{5}{2}}\ddot{t}_\beta^2+\frac{1}{2}\dot{t}_\beta^{-\frac{3}{2}}\dddot{t}_\beta+\dot{t}_\beta^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dt^2}\right)\phi_\beta=0 \Leftrightarrow \left(\underbrace{\frac{1}{2}\frac{\dddot{t}_\beta}{\dot{t}_\beta}-\frac{3}{4}\left(\frac{\ddot{t}_\beta}{\dot{t}_\beta}\right)^2}_{\frac{1}{2}\{t_\beta,t\}}+\frac{d^2}{dt^2}\right)\phi_\beta=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{2}\{t_\beta,t\}\right)}_{:=A_\beta}\phi_\beta=0,$$

dove ancora una volta è stata riconosciuta la derivata Schwarziana ed è stato definito l'operatore

$$A_\beta := \left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{2}\{t_\beta,t\}\right).$$

Pertanto, il Ker di A_β, che corrisponde allo spazio di soluzioni dell'equazione differenziale del secondo ordine

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{2}\{t_\beta,t\}\right)\phi_\beta=0 \;\Leftrightarrow\; A_\beta\,\phi_\beta=0, \tag{3.8}$$

è esattamente lo stesso spazio di soluzioni della (3.7), ovvero

$$Ker\,A_\beta=\mathrm{span}\{\psi_\beta,\psi_\beta^D\}=\mathrm{span}\{a^\beta,a^\beta t_\beta\}.$$

Il vantaggio di tali soluzioni risiede nella loro forma molto particolare: osservando i generatori dello spazio $(\psi_\beta,\psi_\beta^D)$, si nota che dal loro rapporto si ottiene un'espressione per il β-tempo:

$$t_\beta=\frac{\psi_\beta^D}{\psi_\beta},$$

Grazie a questa proprietà, la risoluzione delle equazioni di Friedmann diventa equivalente alla risoluzione del problema differenziale (3.8), da cui si ottiene un'espressione per t_β — e quindi per a.

Osservazione 3.2. Non è necessario che il rapporto avvenga esattamente tra i generatori, ma può avvenire anche tra due loro combinazioni lineari indipendenti. Infatti, scelte

$$\begin{pmatrix}\psi_\beta'^{D'}\\ \psi_\beta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_\beta^D\\ \psi_\beta\end{pmatrix},$$

il rapporto $\frac{\psi_\beta'^D}{\psi_\beta'}=\frac{At_\beta+B}{Ct_\beta+D}=t_\beta'$ è la trasformazione di Möbius di t_β, dalla quale si computa la trasformazione del fattore di scala:

$$a'=\left(\dot{t}_\beta'\right)^{-\frac{1}{2\beta}}=(AD-BC)(Ct_\beta+D)^{\frac{1}{\beta}}a$$

Ebbene, ricordando l'invarianza della derivata Schwarziana sotto trasformazioni di Möbius (3.2) — che, in questo caso, si esprime come $\{t_\beta,t\}=\{t_\beta',t\}$ — e che dalla (3.5) X_β è funzione della derivata Schwarziana di t_β, si avrà che

$$X_\beta(t_\beta)=X_\beta(t_\beta')\;\Leftrightarrow\;X_\beta(a)=X_\beta(a').$$

Pertanto, la soluzione cercata è t_β a meno di trasformazioni di Möbius.

Il passo successivo per la risoluzione del problema (3.8) consiste nel sostituire la derivata Schwarziana, presente nell'operatore A_β, con la combinazione lineare X_β, che a sua volta dipende dalla derivata Schwarziana di t_β.
Inserendo nella (3.4) il lato destro delle equazioni di Friedmann, si ottiene:

$$X_\beta = -\frac{1}{2\beta}\{t_\beta, t\} = \underbrace{-\frac{4\pi G}{3}(\rho+3p)+\frac{\Lambda}{3}}_{(2.22)} + (\beta-1)\underbrace{\left(\frac{8\pi G\rho+\Lambda}{3}\right)-\frac{k}{a^2}}_{(2.20)},$$

che, sostituita nel problema (3.8), porta all'equazione differenziale:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}\underbrace{-\beta X_\beta}_{+\frac{1}{2}\{t_\beta,t\}}\right)\phi_\beta = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{d^2}{dt^2}+\beta\frac{4\pi G}{3}(\rho+3p)-\beta\frac{\Lambda}{3}-\beta(\beta-1)\left(\frac{8\pi G\rho+\Lambda}{3}\right)+\beta(\beta-1)\frac{k}{a^2}\right)\phi_\beta = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{d^2}{dt^2}\underbrace{-\frac{4}{3}\pi G\beta\left[(2\beta-3)\rho-3p\right]}_{:=V_\beta(\rho,p)}+\beta(\beta-1)\frac{k}{a^2}-\beta^2\frac{\Lambda}{3}\right)\phi_\beta = 0 \tag{3.9}$$

Quest'ultima equazione è chiaramente non lineare per via del termine k/a^2, ma si linearizza nel caso di curvatura nulla. L'obiettivo è analizzare dapprima questo caso semplificato, per poi affrontare il caso generale assorbendo la curvatura e riscrivendo la (3.9) in forma lineare.

3.2.1 Curvatura nulla: una nuova simmetria

In primo luogo si impone $k = 0$, si porta la costante cosmologica al secondo membro e si definiscono gli operatori

$$\begin{cases} V_\beta(\rho,p) := -\frac{4}{3}\pi G\beta\left[(2\beta-3)\rho-3p\right] \\ O_\beta := \left(\frac{d^2}{dt^2}+V_\beta(\rho,p)\right) \end{cases} \tag{3.10}$$

dove O_β è l'operatore di Klein-Gordon indipendente dallo spazio. Con queste definizioni, l'equazione (3.9) si riscrive come

$$O_\beta\,\phi_\beta = \beta^2\frac{\Lambda}{3}\,\phi_\beta. \tag{3.11}$$

Si osservi che, presi due valori qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^\times$, con $\alpha \neq \beta$, si ha che le due combinazioni lineari delle equazioni di Friedmann $X_\alpha(a)$, $X_\beta(a)$ *non* sono tra loro proporzionali, e naturalmente vale lo stesso per i corrispettivi operatori O_β , O_α. Pertanto, esse sono sufficienti a ricostruire l'intero contenuto dinamico delle due equazioni originali.
Ne consegue che, riscrivendo il problema (3.11) in forma a blocchi, si ottiene un *problema agli autovalori in forma canonica* del tutto equivalente alle equazioni di Friedmann:

$$\begin{pmatrix} O_\alpha & 0 \\ 0 & O_\beta \end{pmatrix}\Psi_{\alpha\beta} = \frac{\Lambda}{3}\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}\Psi_{\alpha\beta}, \tag{3.12}$$

dove

$$\Psi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a^\alpha t_\alpha \\ a^\alpha \\ a^\beta t_\beta \\ a^\beta \end{pmatrix}$$

e, come già visto nell'osservazione 3.2, ciascuna coppia di soluzioni linearmente indipendenti $(a^i t_i, a^i)$ può essere rimpiazzata con un'arbitraria combinazione lineare delle due.

Inoltre, guardando la (3.11), si nota che per ogni $\beta \in \mathbb{C}^\times$ esiste una soluzione $\phi_{-\beta}$ che ha lo stesso autovalore.[2] Pertanto, l'insieme di tutte le possibili forme canoniche (3.12) si può raggruppare in modo elegante come:

$$\begin{pmatrix} O_\beta & 0 \\ 0 & O_{-\beta} \end{pmatrix} \Psi_{\beta-\beta} = \frac{\Lambda}{3} \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 \end{pmatrix} \Psi_{\beta-\beta},$$

ovvero un insieme infinito — al variare di β — di coppie di equazioni differenziali lineari che, come già detto, sono legate da una dipendenza non lineare. È proprio quest'ultimo fatto che suggerisce la presenza di una simmetria non banale.
In effetti, è possibile mappare un'equazione nell'altra prendendo le potenze di a con la trasformazione $a \to a^\alpha$, che corrisponde a $t_\beta \to t_{\alpha\beta}$.[3] Ricordando che $\dot{t}_\beta = a^{-2\beta}$, si ottiene $\dot{t}_{\alpha\beta} = a^{-2\alpha\beta} = (\dot{t}_\beta)^\alpha$.
Si calcola come trasforma la derivata Schwarziana:

$$\begin{aligned} \{t_{\alpha\beta}, t\} &= \frac{\dddot{t}_{\alpha\beta}}{\dot{t}_{\alpha\beta}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\ddot{t}_{\alpha\beta}}{\dot{t}_{\alpha\beta}}\right)^2 = \alpha(\alpha-1)\left(\frac{\ddot{t}_\beta}{\dot{t}_\beta}\right)^2 + \alpha\frac{\dddot{t}_\beta}{\dot{t}_\beta} - \frac{3}{2}\alpha^2\left(\frac{\ddot{t}_\beta}{\dot{t}_\beta}\right)^2 = \\ &= \alpha\{t_\beta, t\} - \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\left(\frac{\ddot{t}_\beta}{\dot{t}_\beta}\right)^2. \end{aligned}$$

Inoltre dalla (3.9) ci si accorge che il termine di potenziale $V_\beta(\rho, p)$ è anch'esso esprimibile in funzione della derivata Schwarziana: $V_\beta(\rho, p) = \frac{1}{2}\{t_\beta, t\} + \beta^2\frac{\Lambda}{3}$, dove è stato imposto $k = 0$.
Aggiungendo e togliendo la stessa quantità $3\alpha^2\rho$, si avrà dunque:

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta}(\rho, p) = \frac{1}{2}\{t_{\alpha\beta}, t\} + \alpha^2\beta^2\frac{\Lambda}{3} &= -\frac{4}{3}\pi G\alpha\beta\left[(2\alpha\beta - 3)\rho - 3p\right] + 3\alpha^2\rho - 3\alpha^2\rho = \\ &= -\frac{4}{3}\pi G\beta\left[(2\beta - 3)\alpha^2\rho - 3(\alpha p - \alpha(\alpha-1)\rho)\right], \end{aligned}$$

$$\iff V_{\alpha\beta}(\rho, p) = V_\beta(\alpha^2\rho\,,\, \alpha p - \alpha(\alpha-1)\rho).$$

Dall'ultima identità seguono le seguenti trasformazioni:

$$\begin{cases} a \to a^\alpha \\ \rho \to \alpha^2\rho \\ p \to \alpha p - \alpha(\alpha-1)\rho \\ \Lambda \to \alpha^2\Lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} a \to a^\alpha \\ \rho \to \alpha^2\rho + (\alpha^2-1)\dfrac{\Lambda}{8\pi G} \\ p \to \alpha p - \alpha(\alpha-1)\rho + (1-\alpha^2)\dfrac{\Lambda}{8\pi G} \\ \Lambda \to \Lambda \end{cases}$$

che sono simmetrie per (3.12), e dunque per le equazioni di Friedmann in uno spazio piatto.

3.2.2 Caso generale: $k \neq 0$ e assorbimento mediante esponenziazione

Si procede considerando il caso generale a curvatura arbitraria.
Riprendendo dall'equazione (3.9) la relazione $\frac{1}{2}\{t_\beta, t\} = V_\beta(\rho, p) - \beta^2\frac{\Lambda}{3} + \beta(\beta-1)\frac{k}{a^2}$ — che era già stata introdotta nella precedente sezione per $k = 0$ — si sceglie $\beta = \frac{1}{2}$, che equivale a selezionare il tempo conforme $\eta = t_{\frac{1}{2}}$ tra tutti i β-tempo possibili. Ricordando che $\dot{\eta} = a^{-1}$, si ricava

$$\{\eta, t\} = \frac{4}{3}\pi G(2\rho + 3p) - \frac{\Lambda}{6} - \frac{k}{2}\dot{\eta}^2. \tag{3.13}$$

Introducendo la derivata Schwarziana $\{e^{i\sqrt{k}\eta}, t\}$ e applicando la regola della catena (3.3), si ottiene $\{e^{i\sqrt{k}\eta}, t\} = \dot{\eta}^2\{e^{i\sqrt{k}\eta}, \eta\} + \{\eta, t\}$. A questo punto si computa la prima derivata Schwarziana rispetto a η, che porta all'identità:

$$\{e^{i\sqrt{k}\eta}, t\} = \{\eta, t\} + \frac{k}{2}\dot{\eta}^2. \tag{3.14}$$

[2] mapando $\beta \to -\beta$, il termine $\beta^2\frac{\Lambda}{3}$ rimane invariato.
[3] Ad esempio, considerando una coppia qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^\times, \alpha \neq \beta$, si ha $a^\beta \to (a^\beta)^{\frac{\alpha}{\beta}} = a^\alpha \;\Rightarrow\; t_\beta \to t_{\frac{\alpha}{\beta}\beta} = t_\alpha$.

Sostituendo a $\{\eta, t\}$ la (3.13), si osserva che la curvatura viene assorbita mediante l'esponenziazione $\eta \to e^{\pm i\sqrt{k}\eta}$ nella derivata Schwarziana, e l'equazione diventa:

$$\{e^{i\sqrt{k}\eta}, t\} = \frac{4}{3}\pi G(2\rho + 3p) - \frac{\Lambda}{6}, \tag{3.15}$$

che, naturalmente, è invariante sotto trasformazioni di Möbius di $e^{i\sqrt{k}\eta}$.

Osservazione 3.3. Come ci si aspetta dalla relazione $\dot{\eta} = a^{-1}$, la trasformazione del tempo conforme è analoga a quella del fattore di scala:

$$\eta \to e^{\pm i\sqrt{k}\eta} \iff a \to \frac{a}{\sqrt{k}} e^{\mp i\sqrt{k}\eta}.$$

L'assorbimento della curvatura risulta estremamente conveniente: anziché risolvere, per $\beta = \frac{1}{2}$, l'equazione differenziale (3.8)

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{2}\{\eta, t\}\right)\phi_{\frac{1}{2}} = 0,$$

la quale, una volta sostituito $X_{\frac{1}{2}}$ come è stato fatto nella (3.9), presenta il termine non lineare dovuto alla curvatura, e successivamente fare il rapporto tra le soluzioni per determinare η e a, si può invece risolvere il problema differenziale

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{2}\{e^{i\sqrt{k}\eta}, t\}\right)\Psi = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{2}{3}\pi G(2\rho + 3p)\right)\Psi = \frac{\Lambda}{12}\Psi, \tag{3.16}$$

per poi prendere il logaritmo delle soluzioni e determinare η e a.

Si osservi che, dalla regola della catena per la derivata Schwarziana (3.14), esponenziando un generico t_β si ottiene che il termine di curvatura risulta proporzionale a $\dot{t}_\beta^2$. Per questa ragione, il tempo corretto da scegliere inizialmente, tra tutti i possibili β-tempi, affinché la curvatura si semplifichi, è proprio il tempo conforme η.
Sembrerebbe dunque che il tempo conforme — che, si ricorda, corrisponde alla scelta temporale per cui un osservatore comovente percepisce l'universo come piatto e non in espansione — sia privilegiato rispetto a tutte le altre possibilità: è infatti l'unico caso in cui il problema può essere linearizzato assorbendo la curvatura.

Non essendoci altri β-tempi nel caso $k \neq 0$, l'unico sistema di equazioni differenziali che rappresenti le originarie equazioni di Friedmann in forma lineare è costituito dalla (3.16) insieme alla seconda equazione di Friedmann (2.22). Infatti, una qualsiasi altra forma si otterrebbe aggiungendo la (2.22) alla (3.16), ma tale operazione comprometterebbe la linearità del sistema.

Nota. È importante sottolineare che, scegliendo un valore di $\beta \neq 0$, è comunque possibile trovare un problema equivalente alle equazioni di Friedmann. Tuttavia, la prima equazione non può essere linearizzata assorbendo la curvatura, come invece avviene in questo caso.

Due soluzioni linearmente indipendenti del problema (3.16) sono

$$\psi = \sqrt{a}\exp\left(-\frac{i}{2}\sqrt{k}\eta\right) \qquad \psi^D = \sqrt{a}\exp\left(\frac{i}{2}\sqrt{k}\eta\right), \tag{3.17}$$

e, sostituendole nell'equazione, si riottiene la combinazione lineare delle equazioni di Friedmann di partenza:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4}{3}\pi G(2\rho + 3p) - \frac{\Lambda}{6} - \frac{k}{2a^2}.$$

Le soluzioni sono oscillanti per $k > 0$ e iperboliche per $k < 0$. La combinazione lineare che, nel limite per $k \to 0$, riproduce $\psi_{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ e $\psi^D_{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}\,\eta$, esposte nella precedente sessione, è data da:

$$\hat{\psi} = \sqrt{a}\cos\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\,\eta\right) \qquad\qquad \hat{\psi}^D = 2\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{k}}\sin\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\,\eta\right),$$

da cui si ricava

$$a = |\hat{\psi}|^2 + \frac{k}{4}\,|\hat{\psi}^D|^2. \tag{3.18}$$

Richiamando la definizione dell'operatore O_β dalla (3.10), si possono scrivere in definitiva le due *equazioni di Friedmann in forma lineare*. Per la prima (3.16) si utilizza $O_{\frac{1}{2}}$ e per la seconda O_1.

$$\boxed{\begin{aligned} &O_{\frac{1}{2}}\,\Psi = \frac{\Lambda}{12}\Psi \\ &O_1\,a = \frac{\Lambda}{3}a \end{aligned}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\begin{aligned} &\left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\pi G}{3}\,(2\rho + 3p)\right]\Psi(t) = \frac{\Lambda}{12}\Psi(t) \\ &\left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{4\pi G}{3}\,(\rho + 3p)\right]a(t) = \frac{\Lambda}{3}a(t) \end{aligned}} \tag{3.19}$$

dove Ψ è, in generale, una combinazione lineare delle due soluzioni indipendenti (3.17) $(\psi\,,\ \psi^D)$.

Prima di concludere, si desidera collegare il risultato ottenuto con la relazione di redshift cosmologico $a \propto p^{-1}$, esaminata nel paragrafo 2.5.
Sostituendo tale espressione nella (3.17), si ottengono, in unità naturali e a meno di costanti moltiplicative, le seguenti soluzioni:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{p}}\exp\left(-\frac{i}{2}\sqrt{k}\int p(t')\,dt'\right) \qquad\qquad \psi^D = \frac{1}{\sqrt{p}}\exp\left(\frac{i}{2}\sqrt{k}\int p(t')\,dt'\right), \tag{3.20}$$

Tali forme richiamano l'approssimazione WKB della soluzione dell'equazione di Schrödinger stazionaria in una dimensione.
Questo aspetto verrà approfondito nel capitolo successivo.

Capitolo 4

Approssimazione WKB e equazione di Friedmann quantistica

Seguendo l'approccio di [8, Capitolo 15], nei primi due paragrafi saranno determinate le soluzioni approssimate dell'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo nel regime semiclassico WKB.
In seguito, sulla base di [2], le soluzioni delle equazioni di Friedmann lineari verranno reinterpretate come soluzioni semiclassiche di un sistema quantistico e si formulerà una versione quantistica dell'equazione di Friedmann.

4.1 Quantizzazione di Bohr-Sommerfeld

Si consideri un sistema a un grado di libertà, la cui Hamiltoniana è data da:

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V(x),$$

che rappresenta una particella in una dimensione. Il suo moto periodico, associato a un'energia E può essere visto come un insieme di livello dell'Hamiltoniana, corrispondente a una curva chiusa nello spazio delle fasi:

$$\mathscr{C} = \{(x,p) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x,p) = E\},$$

Si immagini ora di definire una funzione oscillante su C che rappresenti un'onda, il cui numero d'onda locale — seguendo l'ipotesi di de Broglie — sia dato da $k(x) = p(x)/\hbar$. L'onda può essere espressa come:

$$\psi(x) = A(x) \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^{x} p(x')\, dx'\right),$$

dove x_0 è un punto arbitrario lungo la curva e $p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}$ è il momento canonico. I due esponenziali complessi rappresentano localmente un'onda che avanza $(+)$ e una che retrocede $(-)$
La richiesta di periodicità della fase dell'onda lungo la curva chiusa, che prende il nome di *condizione di Bohr-Sommerfeld*, si esprime come

$$\begin{aligned} \psi(x) = \psi(x + \mathscr{C}) \quad &\iff \quad \exp\left(\frac{i}{\hbar} \oint_{\mathscr{C}} p(x')\, dx'\right) = 1 \\ &\iff \quad \frac{1}{\hbar} \oint_{\mathscr{C}} p(x')\, dx' = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

I livelli energetici sono quei valori di E tali per cui la curva di livello corrispondente soddisfa la condizione di quantizzazione (4.1). Sebbene la quantizzazione di Bohr-Sommerfeld abbia avuto successi — in particolare nello spiegare i livelli energetici dell'atomo di idrogeno — essa fallì nel descrivere correttamente i sistemi più complessi.

Per sistemi con un grado di libertà, nell'approssimazione semiclassica dei livelli energetici, una traccia dell'approccio di Bohr-Sommerfeld sopravvive anche nella moderna teoria quantistica, purché si introduca la correzione di Maslov $n \to n + 1/2$:

$$\frac{1}{\hbar} \oint_{\mathscr{C}} p(x')\, dx' = 2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.2}$$

Con tale correzione, l'onda acquisisce una fase di 180° dopo un giro completo attorno a $\mathscr{C}$.
L'integrale lungo la curva ha le dimensioni di un'azione (energia×tempo) e prende il nome di *funzione caratteristica di Hamilton* o *azione ridotta*:

$$S(x) := \int p(x')\, dx'.$$

La condizione di Bohr-Sommerfeld corrisponde dunque alla quantizzazione dell'azione della particella.

4.2 Approssimazione WKB e probabilità quasi classica

L'approssimazione WKB consente di determinare soluzioni approssimate dell'equazione di Schrödinger stazionaria:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \big(V(x) - E\big)\psi = 0.$$

Il metodo WKB opera nel regime semiclassico, ovvero quando

$$\frac{S(x)}{\hbar} \gg 1,$$

dove $S(x)$ è l'azione ridotta.
Poiché si intende analizzare il caso più semplice e al contempo significativo, si introdurranno alcune ipotesi semplificative sul potenziale $V(x)$.

Assunzione. *Si consideri un potenziale liscio $V(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ a valori reali sufficientemente regolare, tale che $V(x) \to +\infty$ per $x \to \pm\infty$. Si assume inoltre che le funzioni $V'(x)/V(x)$ e $V''(x)/V(x)$ siano limitate per $x \to \pm\infty$, al fine di controllare la crescita di $V(x)$ agli estremi.*

Siano inoltre $E_1, E_2 \in \mathbb{R}$ due valori arbitrari di energia, con $E_1 > \inf_{x\in\mathbb{R}} V(x)$; si suppone che $\forall E \in [E_1, E_2]$ esistano esattamente due punti a_E, b_E, con $a_E < b_E$, tali che $V(a_E) = V(b_E) = E$, e che la derivata $V'(x)$ valutata in a_E e b_E sia diversa da zero. Tali punti sono detti punti di inversione, in quanto corrispondono ai punti in cui, classicamente, una particella di energia E cambia direzione.

Infine, si suppone che il potenziale vari lentamente su scale locali, in modo che la funzione d'onda possa essere approssimata come un'onda piana o esponenziale secondo la regola WKB.

Dato un valore di energia E, l'obiettivo è analizzare il comportamento delle soluzioni dell'equazione di Schrödinger nei seguenti 3 casi distinti:

- nella regione classicamente permessa $\{x \in \mathbb{R} \,|\, E > V(x)\}$;
- nella regione classicamente proibita $\{x \in \mathbb{R} \,|\, E < V(x)\}$;
- vicino ai punti di inversione $\{a_E, b_E \in \mathbb{R} \,|\, V(a_E) = V(b_E) = E\}$.

4.2.1 Regione classicamente permessa

Partendo dal primo caso, la soluzione dell'equazione di Schrödinger nella regione classicamente permessa è del tipo:

$$\psi(x) = A(x) \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} S(x) \right) = A(x) \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^{x} p(x')\, dx' \right), \tag{4.3}$$

come per la vecchia teoria dei quanti. L'ampiezza $A(x)$ è una funzione liscia, $A \in C^\infty(\mathbb{R})$, a valori complessi, indipendente da $\hbar$ e lentamente variabile rispetto alla fase oscillante $S(x)/\hbar$.

Il primo risultato che si intende mostrare è che, per qualsiasi valore E — non necessariamente nello spettro dell'operatore H — tale che esista una regione classicamente permessa, ovvero maggiore del minimo del potenziale, e per qualsiasi scelta ragionevole dell'ampiezza $A(x)$, si ottiene una soluzione approssimata dell'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo, con un errore dell'ordine di $\hbar$.

Proposizione. *Siano $E_1, E_2 \in \mathbb{R}$, con $E_1 > \inf_{x\in\mathbb{R}} V(x)$. Esistono una costante $K > 0$ e una funzione liscia $A \in C^\infty(\mathbb{R})$ tali che, $\forall\, E \in [E_1, E_2]$, se l'ampiezza A è limitata ($|A| < +\infty$) nella regione classicamente permessa per E, allora la funzione*

$$\psi(x) = A(x) \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x')\, dx'\right)$$

soddisfa la stima

$$||H\psi - E\psi|| \leq K\hbar\, ||\psi||$$

Dimostrazione. Per ogni $E \in [E_1, E_2]$, la regione classicamente permessa per E contiene la regione classicamente permessa per E_1, poiché all'aumentare dell'energia la regione in cui $E > V(x)$ si estende. Si procede con un calcolo diretto:

$$(H-E)\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[A''(x) \pm \frac{2i}{\hbar}A'(x)p(x) \pm \frac{i}{\hbar}A(x)p'(x) - \frac{1}{\hbar^2}p^2(x)A(x)\right] e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int p(x')\,dx'} + (V(x)-E)\psi(x).$$

Dal momento che $p^2 = 2m(V(x) - E)$, il termine contenente p^2 si cancella con $(V(x) - E)\psi(x)$, lasciando:

$$(H - E)\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[A''(x) \pm \frac{2i}{\hbar}A'(x)p(x) \pm \frac{i}{\hbar}A(x)p'(x)\right] e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int p(x')\,dx'}.$$

Assumendo che tutti i segni $\pm$ siano concordi (tutti positivi o tutti negativi) e applicando la disuguaglianza triangolare, si ottiene:

$$||H\psi - E\psi|| \leq \frac{\hbar^2}{2m}||A''|| + \frac{\hbar}{2m}||2A'p + Ap'||.$$

Poiché $||\psi|| = ||A||$ è indipendente da $\hbar$, il termine a destra è dell'ordine di $\hbar||\psi||$.
Infine, la quantità $||2A'p + Ap'||$ è limitata[1] per ogni $E \in [E_1, E_2]$, in quanto $A(x)$ è limitata nella regione classicamente permessa per E, e $V(x)$ è continua e limitata in tale regione (essendo $V(x) < E$). □

Per comprendere meglio il significato della proposizione precedente, si consideri un potenziale che soddisfi le ipotesi già introdotte, in particolare $V(x) \to +\infty$, per $x \to \pm\infty$. In tale contesto, lo spettro dell'operatore H è totalmente discreto. Dato un valore qualsiasi $E \in [E_1, E_2]$, maggiore del minimo del potenziale, esiste un autovalore $\tilde{E}$ di H tale che

$$||H\psi - E\psi|| \leq K\hbar\, ||\psi|| \quad \Longrightarrow \quad |\tilde{E} - E| \leq K\hbar.$$

In altre parole, per ogni energia classica E esiste un autovalore quantistico $\tilde{E}$ che discosta da E di una quantità dell'ordine di $\hbar$.
Ne consegue che, nel limite semiclassico $\hbar \to 0$, lo spettro dell'operatore quantistico H tende a riempire l'intero intervallo di energie classiche accessibili. Questo risultato rappresenta una manifestazione concreta del principio di corrispondenza tra meccanica quantistica e meccanica classica: nel limite semiclassico, la quantizzazione restituisce una densità spettrale compatibile con il comportamento classico del sistema.

[1] Si ricordi che $p(x)$ dipende da E e da $V(x)$.

Poiché si desidera ottenere una soluzione approssimata con un errore di ordine inferiore a $\hbar$, si riprende il calcolo di $(H-E)\psi$ svolto nella dimostrazione precedente, imponendo che si annullino i termini proporzionali a $\hbar$. Si ottiene dunque:

$$2A'(x)p(x) = -p'(x)A(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{A'(x)}{A(x)} = -\frac{1}{2}\frac{p'(x)}{p(x)},$$

da cui segue immediatamente

$$A(x) = C\,p(x)^{-\frac{1}{2}}, \qquad C \in \mathbb{C}. \tag{4.4}$$

Con questa scelta per l'ampiezza $A(x)$, l'errore residuo della soluzione è dell'ordine di $\hbar^2$:

$$(H-E)\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{A''(x)}{A(x)}\psi(x).$$

Sostituendo la relazione la (4.4) nella forma generale (4.3), si ottiene la soluzione:

$$\psi(x) = \frac{C}{\sqrt{p(x)}}\exp\left(\pm\frac{i}{\hbar}\int_{x_0}^{x} p(x')\,dx'\right), \tag{4.5}$$

nota come *funzione WKB oscillante*. La soluzione generale è data da una combinazione lineare dei due esponenziali complessi, uno con esponente positivo e l'altro con esponente negativo.

Osservazione 4.1. Si osservi che, in prossimità dei punti di inversione a_E e b_E, dove $p(x) \to 0$, l'ampiezza $A(x)$ diverge. Per questa ragione, le soluzioni WKB sono considerate valide solo *lontano* dai punti di inversione, che verranno trattati separatamente in seguito.

Introducendo il postulato di Born, la densità di probabilità $\mathscr{P}(x)$ associata alla funzione $\psi(x)$ è data da:

$$\mathscr{P}(x) = \frac{|\psi(x)|^2}{||\psi(x)||^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{P}(x) \propto \frac{1}{p(x)},$$

oppure, equivalentemente:

$$\mathscr{P}(x) \propto \frac{1}{v(x)},$$

dove $v(x)$ è la velocità classica della particella.
Si consideri un intervallo $I = [x_1, x_2] \subset]a(E), b(E)[$. La probabilità $\mathcal{P}$ di trovare la particella all'interno dell'intervallo è:

$$\mathcal{P}(x \in I) = \int_{x_1}^{x_2} \mathscr{P}(x')\,dx' = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx'}{v(x')}.$$

Sia $x(t)$ la traiettoria classica e siano t_1, t_2 tali che $x(t_1) = x_1$ e $x(t_2) = x_2$. Allora la probabilità può essere riscritta come:

$$\mathcal{P}(x \in I) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{v(x(t'))}{v(x(t'))}\,dt' = \int_{t_1}^{t_2} dt' = t_2 - t_1 = \Delta t_{12},$$

e prende il nome di *probabilità quasi classica*. Questo risultato mostra che, nel regime semiclassico dell'approssimazione WKB, la probabilità di trovare una particella in un certo intervallo I è tanto maggiore quanto più tempo la particella spende in tale intervallo.

4.2.2 Regione classicamente proibita

Nella regione classicamente proibita, il momento $p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}$ risulta complesso, in quanto $E < V(x)$. Si introduce quindi la quantità reale:

$$q(x) := \sqrt{2m(V(x) - E)},$$

in modo da riscrivere la soluzione dell'equazione di Schrödinger nella forma

$$\psi(x) = A(x) \exp\left(\pm\frac{1}{\hbar}\int_{x_0}^{x} q(x')\,dx'\right).$$

Ripercorrendo il procedimento adottato per la regione classicamente permessa, si ottiene nuovamente che esiste un'unica scelta per l'ampiezza $A(x)$ — a meno di costanti moltiplicative — tale da annullare il termine di ordine $\hbar$. Essa è data da:

$$A(x) = C\,q(x)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.6}$$

Dal momento che le funzioni d'onda devono essere modulo quadro integrabili, si seleziona la soluzione con segno negativo nell'intervallo $(b_E, +\infty)$ e quella con segno positivo nell'intervallo $(-\infty, a_E)$. Per quest'ultima, è conveniente invertire gli estremi di integrazione per mantenere il segno negativo all'esponente. Le soluzioni assumono quindi la forma:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{C_1}{\sqrt{q(x)}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{a_E} q(x')\,dx'\right) \qquad x \in (-\infty, a_E) \\ \psi(x) &= \frac{C_2}{\sqrt{q(x)}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_{b_E}^{x} q(x')\,dx'\right) \qquad x \in (b_E, +\infty). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Queste soluzioni sono dette *funzioni WKB esponenziali.*

Dalla teoria generale delle ODE è noto che ogni soluzione associata a un potenziale liscio è anch'essa liscia. Di conseguenza, le singolarità che emergono nei pressi dei punti di inversione non sono intrinseche alla funzione d'onda, ma derivano dal metodo di approssimazione WKB.
La soluzione esatta, pertanto, seguirà l'approssimazione WKB finché x rimane sufficientemente lontano dai punti di inversione. In prossimità di questi, la funzione d'onda può crescere, ma rimane comunque finita e regolare, a differenza della divergenza artificiale introdotta dall'approssimazione.

Nota. D'ora in poi si ometterà il pedice E ai punti di inversione per semplificare la notazione.

4.2.3 Punti di inversione

La prima cosa da notare per analizzare quest'ultimo caso è che, con le ipotesi fatte in precedenza sul potenziale $V(x)$, valgono:

$$V'(a) < 0 \qquad\qquad V'(b) > 0,$$

per ogni $E \in [E_1, E_2]$, con $E_1 > \inf_{x\in\mathbb{R}} V(x)$.
Ad esempio, si consideri il punto di inversione sinistro a. Si è mostrato nelle sezioni precedenti che, a sufficiente distanza da a, le soluzioni assumono la forma:

$$\begin{cases} \psi(x) = \dfrac{C}{\sqrt{q(x)}} \exp\left(-\dfrac{1}{\hbar}\displaystyle\int_{a}^{x} q(x')\,dx'\right) & x < a, \\ \psi(x) = \dfrac{C_+}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(+\dfrac{i}{\hbar}\displaystyle\int_{a}^{x} p(x')\,dx'\right) + \dfrac{C_-}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(-\dfrac{i}{\hbar}\displaystyle\int_{a}^{x} p(x')\,dx'\right) & x > a. \end{cases}$$

Adottando la convenzione che $\psi(x)$ sia reale nella regione classicamente permessa [2], si impone la condizione che $C_+ = C_-^*$. In questo modo le soluzioni diventano:

$$\begin{cases} \psi(x) = \dfrac{C}{\sqrt{q(x)}} \exp\left(-\dfrac{1}{\hbar}\displaystyle\int_{a}^{x} q(x')\,dx'\right) & x < a. \\ \psi(x) = \dfrac{R}{\sqrt{p(x)}} \cos\left(\dfrac{1}{\hbar}\displaystyle\int_{a}^{x} p(x')\,dx' - \delta\right) & x > a \end{cases}$$

[2] Tale operazione è lecita in quanto le funzioni d'onda sono sempre definite a meno di una fase globale.

A breve distanza dal punto di inversione a, ovvero per piccoli valori di $|x-a|$, è possibile espandere $V(x)$ al primo ordine, approssimandolo localmente con una funzione lineare [3]:

$$E - V(x) = -V'(a)(x-a) + \mathcal{O}((x-a)^2).$$

L'equazione di Schrödinger può quindi essere approssimata come:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V'(a)(x-a)\,\psi = 0,$$

da cui, effettuando il cambio di variabile $u = \left(\frac{-2mV'(a)}{\hbar^2}\right)^{1/3}(a-x)$, si ottiene l'*equazione di Airy*:

$$\frac{d^2\psi(u)}{du^2} - u\,\psi(u) = 0. \tag{4.8}$$

Due soluzioni linearmente indipendenti sono $\mathrm{Ai}(u)$ e $\mathrm{Bi}(u)$. Tuttavia, si seleziona soltanto $\mathrm{Ai}(u)$:

$$\mathrm{Ai}(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{y^3}{3} + uy\right)\,dy,$$

in quanto è l'unica che decresce per $u > 0$, ovvero per $x < a$, coerentemente con la soluzione WKB esponenziale. Mediante integrazione per parti si può verificare che l'integrale converge. Intuitivamente, la convergenza è garantita dal fatto che, per elevati valori di y, l'integrando oscilla molto rapidamente: le oscillazioni del coseno causano la cancellazione reciproca dei contributi positivi e negativi, riducendo così l'apporto complessivo all'integrale.
A questo punto, è utile analizzare il comportamento dell'integrale al variare di u, per confermare che si tratta della soluzione corretta per il punto di inversione sinistro a. All'aumentare di $|u|$, ovvero allontanandosi dal punto di inversione, l'integrando diventa sempre più oscillante, e il valore dell'integrale tende a diminuire progressivamente.L'unica eccezione a questo andamento si verifica quando la derivata dell'argomento del coseno, $(y^3/3 + uy)$, rispetto a y, si annulla. Imponendo questa condizione si ottiene $y = \sqrt{-u}$, che rappresenta un punto critico per l'argomento del coseno se e solo se $u < 0$, ovvero $x > a$. In prossimità di tale punto, il coseno oscilla più lentamente, e l'integrale riceve un contributo significativo — in accordo con il comportamento oscillante previsto dalla soluzione WKB nella regione classicamente permessa. Al contrario, se $u > 0$, l'argomento del coseno non presenta punti critici reali, e ci si aspetta che l'integrale decresca rapidamente per $u \to +\infty$, ovvero per $x \to -\infty$, come previsto dalla soluzione WKB esponenziale nella regione classicamente proibita.

Di seguito si riportano le funzioni d'onda approssimate WKB, valide lontano dai punti di inversione, raccordate localmente con le funzioni di Airy. Per approfondimenti sul collegamento tra i due metodi si rimanda a [8, Capitolo 15].

Proposizione. *Se ψ_1 è soluzione dell'equazione di Schrödinger che tende a 0 per $x \to -\infty$, allora essa può essere normalizzata affinché valgano le seguenti approssimazioni:*

$$\begin{cases} \psi_1(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{q(x)}}\exp\left(-\dfrac{1}{\hbar}\displaystyle\int_x^a q(x')\,dx'\right) & x < a \\ \psi_1(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(-2mV'(a)\hbar)^{1/6}}\,\mathrm{Ai}\left(\left(\dfrac{-2mV'(a)}{\hbar^2}\right)^{1/3}(a-x)\right) & \text{vicino a } x = a \\ \psi_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{p(x)}}\cos\left(\dfrac{1}{\hbar}\displaystyle\int_a^x p(x')\,dx' - \dfrac{\pi}{4}\right) & a < x < b. \end{cases}$$

[3] A differenza delle regioni in cui è valida l'approssimazione WKB, dove il potenziale viene considerato localmente costante.

Similmente, se ψ_2 è soluzione dell'equazione di Schrödinger che tende a 0 per $x \to +\infty$, allora essa può essere normalizzata affinché valgano le seguenti approssimazioni:

$$\begin{cases} \psi_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{p(x)}} \cos\left(-\dfrac{1}{\hbar}\displaystyle\int_x^b p(x')\,dx' + \dfrac{\pi}{4}\right) & a < x < b. \\ \psi_2(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(2mV'(b)\hbar)^{1/6}}\ \mathrm{Ai}\left(\left(\dfrac{2mV'(b)}{\hbar^2}\right)^{1/3}(x-b)\right) & \text{vicino a } x = b \\ \psi_2(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{q(x)}} \exp\left(-\dfrac{1}{\hbar}\displaystyle\int_b^x q(x')\,dx'\right) & x > b \end{cases}$$

Inoltre, le soluzioni ψ_1 e ψ_2 nella regione classicamente permessa risultano compatibili se e solo soddisfano la condizione di quantizzazione:

$$\frac{1}{\hbar}\int_a^b p(x)\,dx = \pi\left(n + \tfrac{1}{2}\right), \tag{4.9}$$

la quale, tenendo conto che la curva dell'energia classica $\mathscr{C}$ è costituita dai due rami $(x, p(x))$ e $(x, -p(x))$, corrisponde esattamente alla condizione di Bohr-Sommerfeld con correzione di Maslov (4.2).

I coefficienti delle funzioni WKB oscillanti R e esponenziali C sono stati scelti in modo tale che $R = 2C$, garantendo la corretta normalizzazione tra le regioni. Le fasi δ delle funzioni oscillanti spiegano il fatto che, ad ogni attraversamento di un punto di inversione classico, la funzione d'onda accumula uno sfasamento pari a $\pi/4$. Poiché il sistema presenta due punti di inversione, il contributo totale allo sfasamento è pari a $\pi/2$, che giustifica la correzione di Maslov e assicura la continuità della funzione d'onda tra le regioni classicamente permessa e proibita.

Esempio illustrativo: La figura 4.1, tratta da [8, Capitolo 15], mostra la funzione d'onda approssimata completa, costruita raccordando le soluzioni WKB con le funzioni di Airy nei pressi dei punti di inversione. Il valore di $\hbar$ è stato scelto in modo che la condizione (4.9) fosse valida con $n = 39$. Si notino in particolare gli sfasamenti di $\pi/4$ agli estremi della regione classicamente permessa.

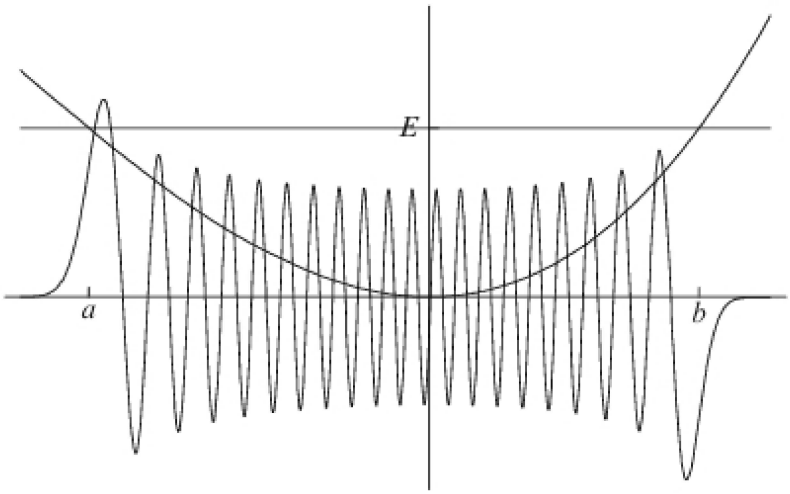

Figura 4.1: Funzione d'onda approssimata con $n = 39$.

4.3 Equazione di Friedmann quantistica

Seguendo [2], in quest'ultimo paragrafo verrà formulata una versione quantistica dell'equazione di Friedmann.

Il primo passo consiste nell'evidenziare la somiglianza tra le soluzioni delle equazioni di Friedmann (3.17) e quelle dell'equazione di Schrödinger nell'approssimazione semiclassica.
Si ricordi che, nella convenzione adottata fin'ora, k ha le dimensioni di $[L]^{-2} = [T]^{-2}$ in unità naturali. Ripristinando le unità del SI, partendo da k con dimensioni di $[T]^{-2}$ e usando il tempo di Planck $t_P = \sqrt{\hbar G/c^5}$, è possibile rendere la curvatura adimensionale:

$$k/t_P^2 \longmapsto k.$$

Inoltre, dalla relazione del redshift cosmologico $a(t)p(t) = a(t_0)p(t_0)$, si sceglie la normalizzazione $2a(t_0)p(t_0) = \sqrt{\hbar c^3/G}$, in modo tale che le soluzioni delle equazioni di Friedmann (3.17) assumano la forma:

$$\begin{cases} \psi = \frac{1}{\sqrt{p}} \exp\left(-i\frac{c\sqrt{k}}{\hbar}\int p(t')\,dt'\right) \\ \psi^D = \frac{1}{\sqrt{p}} \exp\left(+i\frac{c\sqrt{k}}{\hbar}\int p(t')\,dt'\right), \end{cases} \tag{4.10}$$

da cui è immediato notare la somiglianza con le soluzioni WKB, d'ora in avanti indicate come ψ_{WKB}. In questa analogia, una soluzione generale Ψ, ottenuta come combinazione lineare delle (4.10), può essere interpretata come una soluzione in approssimazione semiclassica di un'equazione di Friedmann quantistica.

Per cominciare la derivazione dell'equazione quantistica si osservi che, dalla relazione $a \propto p^{-1}$, l'equazione di Schrödinger può essere riscritta come:

$$\left(-\hbar^2\frac{d^2}{dx^2} + p^2\right)\psi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\alpha}{a^2}\right)\Psi = 0 \tag{4.11}$$

dove α è una costante.
Partendo dall'equazione a sinistra, si introduce un operatore X tale che la soluzione approssimata ψ_{WKB} soddisfi:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V - E + X\right)\psi_{WKB} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \psi_{WKB}^{-1}\frac{d^2}{dx^2}\psi_{WKB} = \frac{2m}{\hbar^2}(V - E + X). \tag{4.12}$$

D'altra parte, svolgendo il conto al primo termine dell'equazione, si ottiene:

$$\begin{aligned} \psi_{WKB}^{-1}\frac{d^2}{dx^2}\psi_{WKB} &= \psi_{WKB}^{-1}\left(-\frac{p^{3/2}}{h^2} - \frac{p''}{2\,p^{3/2}} + \frac{3}{4}\frac{(p')^2}{p^{5/2}}\right)\exp\left(\frac{i}{h}\int p(x')\,dx'\right) \\ &= -\frac{p^2}{\hbar^2} - \frac{p''}{2p} + \frac{3}{4}\frac{(p')^2}{p^2}, \end{aligned}$$

da cui, sostituendo la relazione $p = S'$, è immediato ricavare:

$$\psi_{WKB}^{-1}\frac{d^2}{dx^2}\psi_{WKB} = -\frac{p^2}{\hbar^2} - \frac{1}{2}\{S, x\}. \tag{4.13}$$

Eguagliando le due espressioni (4.12) e (4.13), l'equazione diventa

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar^2}{4m}\{S, x\} = -(V - E + X),$$

che, sostituendo $p^2 = 2m(E - V)$, porta a $X = -\frac{\hbar^2}{4m}\{S, x\}$. Pertanto, l'equazione di Schrödinger soddisfatta da ψ_{WKB} si scrive:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V - E - \frac{\hbar^2}{4m}\{S, x\}\right)\psi_{WKB} = 0. \tag{4.14}$$

Dal momento che l'equazione di Schrödinger esatta si ottiene dalla (4.14) aggiungendo $\hbar^2\{S,x\}/4m$, si può ipotizzare che l'equazione di Friedmann esatta — nella sua forma quantistica — si ottenga aggiungendo alla prima delle equazioni lineari di Friedmann (3.19)

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{2\pi G}{3}\left(2\rho+\frac{3p}{c^2}\right)-\frac{\Lambda c^2}{12}\right)\Psi(t)=0,$$

la quantità $-\{\eta,t\}/2$, la cui espressione è data nella (3.13).
Il risultato è l'*equazione di Friedmann quantistica* per $k\neq 0$:

$$\boxed{\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{\kappa}{4a^2(t)}\right)\Psi(t)=0} \tag{4.15}$$

dove κ è stato ridefinito in modo tale da avere le dimensioni di $[T]^{-2}$:

$$\kappa := k/t_P^2$$

Il termine $a(t)$ denota l'espressione esplicita del fattore di scala in termini di t, che può essere ottenuta risolvendo le equazioni di Friedmann.

Le soluzioni esatte della (4.15) per $k\neq 0$ si esprimono come:

$$\Psi=\sqrt{a_q}\exp\left(-\frac{i}{2}\sqrt{\kappa}\eta_q\right) \qquad \Psi^D=\sqrt{a_q}\exp\left(\frac{i}{2}\sqrt{\kappa}\eta_q\right), \tag{4.16}$$

dove

$$\eta_q=\int\frac{dt'}{a_q(t')}$$

è il tempo conforme quantistico.

Per il caso a curvatura nulla $k=0$, si consideri una soluzione simile all'approssimazione WKB:

$$\Psi_0(t)=\sqrt{a(t)}\exp\left(\frac{b}{t_P}\int a^{-1}(t')dt'\right),$$

dove b è una costante. Derivando come fatto in precedenza, si ottiene

$$\Psi_0^{-1}\frac{d^2}{dt^2}\Psi_0=\frac{\ddot{a}}{2a}-\frac{\dot{a}^2}{4a^2}+\frac{b^2}{t_P^2\,a^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\ddot{a}}{a}-\frac{\dot{a}^2}{2a^2}\right]+\frac{b^2}{t_P^2\,a^2}. \tag{4.17}$$

D'altra parte, dalla prima delle equazioni lineari di Friedmann (3.19), si ha

$$\Psi_0^{-1}\frac{d^2}{dt^2}\Psi_0=-\frac{2\pi G}{3}\left(2\rho+\frac{3p}{c^2}\right)+\frac{\Lambda c^2}{12}=\frac{1}{2}\left[-\frac{4\pi G}{3}\left(2\rho+\frac{3p}{c^2}\right)+\frac{\Lambda c^2}{6}\right], \tag{4.18}$$

Osservando che le due espressioni tra parentesi quadre nella (4.17) e nella (4.18) sono la stessa quantità, il termine aggiuntivo che compare nell'equazione esatta quantistica è proprio $b^2/(t_P^2\,a^2)$.
Pertanto, l'equazione di Friedmann quantistica, nel caso $k=0$, si scrive come:

$$\boxed{\left(t_P^2\frac{d^2}{dt^2}\pm\frac{\beta^2}{4a^2(t)}\right)\Psi_0(t)=0} \tag{4.19}$$

dove si è posto $b=\beta/2$ oppure $b=i\beta/2$, $\beta\in\mathbb{R}$, per invarianza delle equazioni di Friedmann sotto riscalamento. Le soluzioni esatte in questo caso sono:

$$\Psi_0=\sqrt{a_q}\exp\left(-\frac{b\,\eta_q}{t_P}\right) \qquad \Psi_0^D=\sqrt{a_q}\exp\left(\frac{b\,\eta_q}{t_P}\right). \tag{4.20}$$

Bibliografia

[1] Marco Matone. Universe as klein–gordon eigenstates. *The European Physical Journal C*, 81(12), December 2021.

[2] Marco Matone and Nikolaos Dimakis. Quantum mechanics from general relativity and the quantum friedmann equation, 2025.

[3] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics.* Hilger, 2003. Bristol, UK: Hilger (1990) 505 p. (Graduate student series in physics).

[4] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity.* Cambridge University Press, 2019.

[5] Christopher M. Hirata. Lecture notes, physics 217bc: The standard model - cosmology. `http://www.tapir.caltech.edu/~chirata/ph217/lec02.pdf`, 2006. TAPIR (Theoretical AstroPhysics Including Relativity and Cosmology), Caltech (California Institute of Technology), Lecture 2.

[6] Steven Weinberg. *Cosmology.* Oxford University Press, 2008.

[7] John Olsen. The geometry of möbius transformations, 2010. Accessed: 2025-08-10.

[8] Brian C. Hall. *Quantum Theory for Mathematicians.* Number 267 in Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.

[9] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation.* W. H. Freeman I& Co., 1973.