

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA



**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA
AEROSPAZIALE**

Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

**PROPAGAZIONE DELLE CRICCHE CON LA
TEORIA PERIDYNAMICS: ANALISI DI
DIFFERENTI LEGGI COSTITUTIVE**

Relatore: *Prof. Mirco Zaccariotto*

Correlatore: *Prof. Ugo Galvanetto*

Laureando: *Luca Rigatelli*

ANNO ACCADEMICO 2014 – 2015

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare sentitamente il professor Mirco Zaccariotto per avermi introdotto ad un argomento tanto innovativo quanto interessante e per la passione e professionalità con cui ha saputo indirizzarmi nei momenti più difficili di questa tesi.

Ringrazio molto anche il professor Ugo Galvanetto per gli insegnamenti profusi durante i miei anni di università, per merito dei quali ho potuto giungere alla stesura del mio elaborato finale.

Una menzione particolare va ai dottorandi e amici Daniele Dipasquale e Giulia Sarego per i loro preziosi consigli.

Un grazie speciale a papà Giovanni e mamma Lucia per il sostegno datomi in questi anni di studio, un affettuoso grazie a mia sorella Cinzia per i bei momenti trascorsi e per la stoicità con cui è riuscita a sopportarmi.

Un caloroso abbraccio è riservato ad Anna per i quattro magnifici anni trascorsi insieme, per le risate, per i momenti felici e per avermi saputo dare un sostegno costante.

Grazie agli amici dell'università che hanno reso speciali questi anni, in particolar modo ai miei ex coinquilini e compagni di corso Matteo Duzzi e Lorenzo Olivieri.

Ringrazio tutti gli amici della bassa per le serate, gli aperitivi e i momenti gogliardici trascorsi insieme.

INDICE

Introduzione	- 9 -
-Capitolo 1-.....	- 13 -
Introduzione alla teoria bond Based Peridynamic	- 13 -
1.1 Equazioni del moto	- 14 -
1.2 Isotropia	- 16 -
1.3 Elasticità	- 17 -
1.4 Relazione con la teoria convenzionale	- 19 -
1.5 Configurazione di equilibrio	- 21 -
1.6 Linearizzazione.....	- 22 -
1.7 Coefficiente di Poisson.....	- 24 -
1.8 Materiale PMB.....	- 27 -
1.9 Condizioni di carico	- 35 -
1.10 Meccanismi di dissipazione dell'energia.....	- 36 -
-Capitolo 2-.....	- 39 -
2.1 Discretizzazione spaziale.....	- 39 -
2.2 Discretizzazione temporale	- 43 -
2.3 Applicazione del carico e problema del softening al contorno	- 44 -
2.4 Analisi dinamica di un modello monodimensionale	- 47 -
-Capitolo 3-.....	- 53 -
3.1 Considerazioni generali.....	- 53 -
3.2 Peridinamica state, ordinaria e non ordinaria	- 56 -
-Capitolo 4-.....	- 61 -
4.1 Energia di frattura nel caso plane stress	- 62 -
4.2 Considerazioni sulla frattura ed il fenomeno di branching.....	- 82 -
4.3 Modello numerico analizzato	- 85 -
4.4 Analisi dei risultati	- 92 -
4.5 Modalità di rilascio dell' energia di frattura	- 149 -
-Conclusioni-	- 159 -

-Appendice A-	- 161 -
A.1 Accenno alla teoria classica di Timoshenko.....	- 162 -
A.2 Formulazione peridinamica di Timoshenko.....	- 164 -
A.3 Trave sottoposta ad uno spostamento flessionale	- 171 -
-Appendice B-	- 177 -
Bibliografia	- 181 -

Introduzione

La dinamica della propagazione della frattura in materiali fragili è tutt'oggi un fenomeno difficile da simulare e prevedere a causa della complessità del meccanismo fisico che viene ad originarsi; tuttavia per motivi economici e di progettazione tale aspetto riveste sempre più un ruolo cruciale nelle attività ingegneristiche a livello progettuale, in cui è ormai noto come l'integrità di un materiale non possa afferire unicamente alla massima sollecitazione a rottura prevista dalla teoria classica.

Uno dei pionieri nel campo della frattura è stato Griffith (1921), il quale ha cercato di elaborare una teoria basata sull'energia di frattura rilasciata all'avanzare della cricca, atta a comprendere, anche se con alcune semplificazioni, il processo che conduceva un materiale fessurato ad arrivare a rottura.

La teoria classica del continuo tuttavia presenta delle difficoltà nel momento in cui si vanno ad analizzare delle discontinuità, quali quelle introdotte dalla propagazione di una cricca, perchè basata su una formulazione differenziale che richiede un certo grado di continuità per essere risolta agevolmente.

Si è cercato perciò di analizzare il problema tramite l'uso di elementi finiti con le metodologie *elementi coesivi* e *VCCT*, i quali però, a meno di applicazioni speciali, incontrano difficoltà nel predire il cammino della cricca, la quale dev' essere "guidata" lungo un percorso di frattura imposto a priori. Oltretutto tali metodi si rivelano particolarmente sensibili al refinement usato nella generazione della mesh, generando dati più accurati all'aumentare del numero di elementi. Ciò che ha portato in alcuni moderni software a generare un affinamento dinamico all'apice della cricca. Per tali motivi si sono cercati metodi alternativi e più efficienti, come gli *XFEM* (*eXtended Finite Element Method*). Questo cerca di risolvere il problema introducendo delle equazioni ausiliarie che hanno il compito di predire la nucleazione e la propagazione della frattura, superando le limitazioni imposte da un approccio puramente differenziale e il problema derivante dal dover imporre un percorso di frattura a priori come nei metodi *FEM* che utilizzano elementi di interfaccia.

Tuttavia tali equazioni spesso non si rivelano agevoli da applicare, soprattutto a problemi tridimensionali, in quanto riservano notevoli difficoltà numeriche.

Consci delle problematiche riscontrate nello sviluppo della teoria della frattura usando un approccio di tipo locale, negli anni si sono cercate strade alternative proponendo nuovi modelli di integrazione ad approccio non locale. Un esempio riguarda il modello atomistico, il

quale richiede comunque di essere supportato da una metodologia *FEM* per incrementare la sua bassa efficienza computazionale e richiede l'uso di step size di integrazione molto piccoli allungando i tempi necessari per concludere le simulazioni.

Recentemente Silling (2000) ha proposto una teoria non locale denominata Peridinamica (dalla radice greca “*intorno*” e “*forza*”) la quale, coadiuvata dalla sua formulazione più generale chiamata *state-based*, in grado di risolvere agevolmente il fenomeno della frattura in un' ampia varietà di materiali.

Tale teoria presenta la caratteristica di usare integrali come sostitutivi alle derivate nella formulazione del continuo, ricavandone un indubbio vantaggio nella soluzione di equazioni in presenza di discontinuità.

Nonostante sia stata presentata in epoca recente, vi sono già molteplici studi realizzati e in fase di realizzazione che mostrano come quest'approccio generi dei risultati fortemente congruenti a quelli ottenuti per via sperimentale su svariati campi di applicazione, quali: failure di materiali fragili e compositi, casi dinamici e statici, problemi a fatica, applicazioni di natura termica-diffusiva e analisi del fenomeno del branching. Si nota un certo grado di interdisciplinarietà dell'approccio peridinamico che ben si presta alla soluzione di problemi di varia specie oltre che restituire un ottimo grado di accuratezza se confrontata con misure dirette dei fenomeni. Ad oggi sono richiesti tempi computazionali relativamente elevati dovuti alla natura del fenomeno di frattura ed al fatto che le equazioni del moto vengono generalmente integrate con metodi espliciti, richiedendo quindi step temporali estremamente piccoli e imponendo per questo un numero considerevole di iterazioni per nodo, superiori a quelle richieste dai metodi impliciti quali i metodi *FEM*.

Tale aspetto viene parzialmente compensato se si considerano i risultati e le casistiche che si possono ottenere da tale metodologia; inoltre programmi sempre più ottimizzati e dedicati allo studio della peridinamica stanno riducendo questo gap.

Vari software vengono utilizzati per la risoluzione dei problemi peridinamici; tra i più famosi troviamo *Peridigm* e *LAMMPS*.

Risulta possibile implementare il codice peridinamico anche con altri strumenti di calcolo come ad esempio *Matlab*, il quale verrà utilizzato per le analisi in questa tesi.

Uno degli aspetti più importanti nella trattazione di un modello peridinamico riguarda la definizione della sua legge costitutiva e cioè come tale materiale si comporta quando

sollecitato da un carico esterno, in particolare come viene rilasciata l'energia di rottura quando nel materiale si genera un percorso di frattura.

La legge costitutiva più utilizzata si riferisce ad un materiale fragile, quindi con legge costitutiva lineare.

La presente tesi si propone di studiare la correlazione tra la morfologia e i parametri di frattura al variare della forma e della tipologia di legge costitutiva, imponendo una stessa area sottesa alla curva che definisce tale legge. Verrà verificato come tale condizione comporti una stessa energia di frattura per unità di area; in tal modo mantenendo costanti geometria, condizioni al contorno e caratteristiche fisiche del materiale si potranno ottenere risultati dalle analisi dipendenti esclusivamente dalla forma assunta dal tipo di legge costitutiva.

Nel primo capitolo verrà esposta la teoria della peridinamica *bond based*, soluzione particolare e semplificata della più generale e recente *state based*.

Tale teoria si rivela necessaria per la comprensione degli argomenti trattati nella tesi.

Il secondo capitolo tratta gli aspetti numerici della teoria peridinamica, soffermandosi sulle caratteristiche di discretizzazione spaziale e temporale e sugli aspetti relativi alle condizioni di contorno e carichi applicati.

Il terzo capitolo è un' introduzione alla teoria *state based* e delle sue estensioni.

Nel quarto capitolo si introducono la base teorica e le dimostrazioni che supportano l'obiettivo della tesi. Successivamente viene introdotto un accenno alla teoria del branching e alcuni elementi utili alla comprensione della realizzazione del codice e infine vengono presentate le simulazioni svolte corredate da risultati e commenti.

La parte finale vede le conclusioni a cui si è giunti in seguito ai risultati ottenuti, oltre a due appendici di approfondimento: una che tratta della teoria di Timoshenko applicata alle travi peridinamiche sottoposte a flessione e l'altra che discute un metodo di importazione della geometria in un codice *Matlab*.

-Capitolo 1-

Introduzione alla teoria bond Based Peridynamic

Il vantaggio della peridinamica rispetto ai metodi tradizionali risiede nella sua caratteristica di fare uso di equazioni integrali, le quali vanno a sostituire quelle differenziali presenti nella teoria del continuo che sono le principali responsabili delle difficoltà di risoluzione in presenza di fenomeni di frattura. L'uso degli integrali, a differenza delle derivate, non presenta problemi quando nel dominio di integrazione sono presenti discontinuità.

In peridinamica si assume il corpo composto da punti materiali; ogni punto materiale può interagire con altri punti entro una distanza finita chiamata *orizzonte*.

Vi è una forza d'interazione che mette in relazione due punti materiali, non necessariamente adiacenti (condizione che fa della peridinamica un modello non locale), che si trovano all'interno della regione che ha come raggio l'orizzonte e come centro un punto detto principale o main; tale forza viene chiamata *peridynamic force* o *pairwise force*.

Nella teoria bond based l'interazione che collega due punti peridinamici che si trovano all'interno dell'orizzonte viene chiamata *bond*.

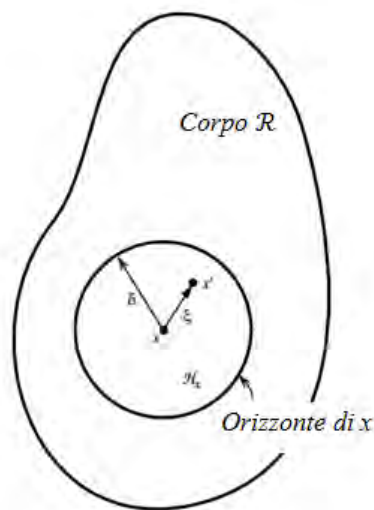


Fig 1.1 Il punto x appartenente al corpo interagisce direttamente con ogni punto appartenente alla regione d'influenza di orizzonte δ tramite dei bond (ξ) , [37]

1.1 Equazioni del moto

Si consideri un corpo nella sua configurazione di riferimento, cioè siano note le posizioni di tutti i suoi punti ad un dato istante (es. $t=0$).

Per la peridinamica bond based, la forza su unità di volume applicata ad un punto x nella sua configurazione di riferimento ad un certo istante t è:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_{H_x} \mathbf{f}[\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}' - \mathbf{x}] dV'_x + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x}' \in H_x \quad (1.1)$$

in cui H_x è la regione di raggio δ (orizzonte) e centro x contenente i punti x' , dV'_x è il volume infinitesimo associato ai punti x' , \mathbf{u} è il vettore spostamento, \mathbf{b} è il vettore body force density cioè il campo di forze esterne applicate al corpo, ρ è la densità e \mathbf{f} è la pairwise force function, il cui significato è quello di una forza per unità di volume al quadrato che il punto materiale x' esercita sul punto x .

Quest'approccio prevede punti materiali di dimensione infinitesima e distanza infinitesima; qualora tali quantità si avvicinassero al limite superiore di zero si ricadrebbe nel caso di materiale continuo.

Si noti la somiglianza di quest'equazione con l'equazione del moto della teoria classica del continuo, in cui il termine integrale viene sostituito da un termine differenziale ($\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$).

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad (1.2)$$

Di frequente si ricorre all'uso di due termini:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}' - \mathbf{x} \quad (1.3)$$

che rappresenta il *vettore posizione relativa* tra due punti materiali nella loro configurazione di riferimento e

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (1.4)$$

che rappresenta il *vettore spostamento relativo* tra due punti materiali nella loro configurazione di riferimento.

Con tale notazione si ha che $|\xi|$ è la lunghezza indeformata del bond (all'istante iniziale), mentre $|\xi + \eta|$ è la lunghezza del bond all'istante generico t .

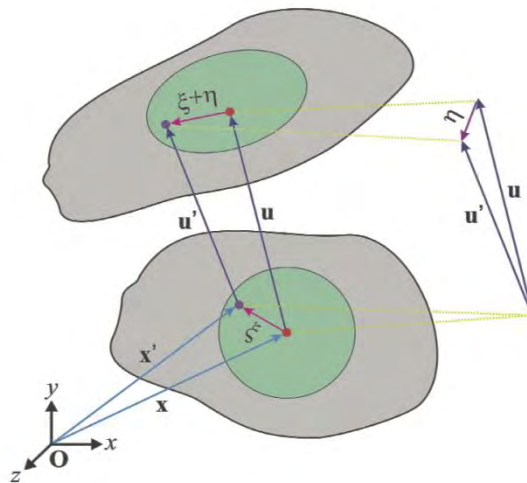


Fig 1.2 Rappresentazione vettoriale della posizione relativa e dello spostamento relativo, [4]

Nella trattazione peridinamica si impone che la pairwise force agisca solo all'interno dell'orizzonte δ , mentre all'esterno di essi assume valore nullo.

La funzione di forza nella peridinamica bond based è vincolata da alcune proprietà quali:

Condizione di ammissibilità lineare, derivata dalla terza legge di Newton.

$$\mathbf{f}(-\boldsymbol{\eta}, -\boldsymbol{\xi}) = -\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (1.5)$$

Tale condizione implica che la forza agente sul punto materiale 1 dovuta al punto materiale 2 sia uguale in modulo ma di verso opposto alla forza agente sul punto materiale 2 dovuta al punto materiale 1.

Condizione di ammissibilità angolare, deriva dalla conservazione del momento angolare.

$$(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (1.6)$$

Tale condizione implica che il vettore \mathbf{f} tra due punti materiali sia parallelo al vettore $(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi})$.

Le condizioni esposte conducono ad una formulazione generale di \mathbf{f} espressa come:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (1.7)$$

con F funzione scalare tale per cui

$$F(-\boldsymbol{\eta}, -\boldsymbol{\xi}) = -F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (1.8)$$

Tali restrizioni vengono superate con l'introduzione della teoria state.

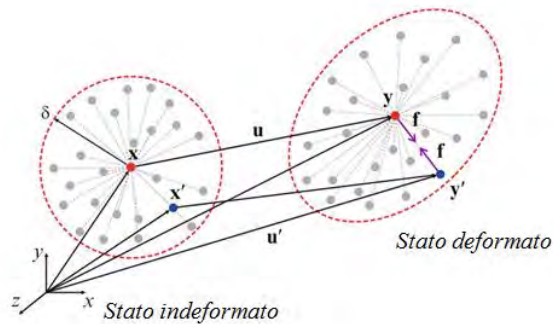


Fig 1.3 Rappresentazione di una regione con nodo centrale x prima e dopo la deformazione, si noti come le pairwise force restino parallele e allineate tra loro, [10]

1.2 Isotropia

Data una pairwise force \mathbf{f} , supponiamo esista un insieme tensoriale $\boldsymbol{\theta}$ formato da tensori con proprietà di ortogonalità tali che

$$\mathbf{f}(Q\boldsymbol{\eta}, Q\boldsymbol{\xi}) = Q\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad \forall Q \in \boldsymbol{\theta} \quad (1.9)$$

Un materiale peridynamico che soddisfa tale proprietà viene detto *isotropo*.

Ciò implica che la risposta del materiale ad una sollecitazione sia indipendente dall'orientazione del materiale, cioè che non esistano direzioni preferenziali.

In modo equivalente a quanto visto prima si può scrivere anche che un materiale è isotropo se e solo se

$$F(Q\boldsymbol{\eta}, Q\xi) = F(\boldsymbol{\eta}, \xi) \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \xi \quad \forall Q \in \boldsymbol{\theta} \quad (1.10)$$

Da quest'ultima relazione è facile notare come, data una coppia di vettori $\boldsymbol{\eta}, \xi$, essi possano essere ruotati liberamente senza che il valore di F venga modificato se e solo se l'angolo tra i due vettori rimane costante durante la rotazione.

1.3 Elasticità

In peridinamica un materiale viene chiamato *microelastico* se

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \xi) \cdot d\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \quad \forall \Gamma, \forall \xi \neq \mathbf{0} \quad (1.11)$$

dove Γ è una curva chiusa e $d\boldsymbol{\eta}$ è il vettore differenziale giacente su Γ [34].

Tale integrale indica che il lavoro fatto su ogni punto materiale \boldsymbol{x}' , dovuto all'interazione con un punto fisso \boldsymbol{x} quando \boldsymbol{x}' si sposta lungo un percorso chiuso, è nullo.

Se \mathbf{f} è continuamente differenziabile in $\boldsymbol{\eta}$, dal teorema di Stoke si ha che

$$\nabla_{\boldsymbol{\eta}} \times \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \xi) = \mathbf{0} \quad \forall \xi \neq \mathbf{0} \quad (1.12)$$

dove " $\nabla_{\boldsymbol{\eta}} \times$ " è l'operatore rotore rispetto $\boldsymbol{\eta}$.

L'equazione (1.12) in forma matriciale risulta

$$\nabla_{\boldsymbol{\eta}} \times \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial\eta_i & \partial/\partial\eta_j & \partial/\partial\eta_k \\ f_i & f_j & f_k \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.13)$$

Un'ulteriore conseguenza del teorema di Stoke è che la pairwise force può essere espressa come la derivata di una funzione scalare w detta *micropotenziale*.

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (1.14)$$

Si può dimostrare come il micropotenziale dipenda dal vettore spostamento relativo $\boldsymbol{\eta}$ solo attraverso la distanza scalare tra due punti deformati; perciò se si assume l'esistenza di una funzione scalare \widehat{w} tale per cui

$$w(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \widehat{w}(|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}|, |\boldsymbol{\xi}|) \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (1.15)$$

andando a sostituire questa nuova equazione nell'equazione (1.14), otteniamo la funzione di forza scritta in termini generali per un materiale *microelastico*:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = H(|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}|, |\boldsymbol{\xi}|)(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (1.16)$$

in cui H è un'altra funzione scalare del tipo

$$H(p, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \widehat{w}}{\partial p}(p, \boldsymbol{\xi}), \quad p = |\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}| \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (1.17)$$

Il significato di \mathbf{f} vista in funzione di H è il seguente: se un materiale è microelastico, ogni coppia di punti x', x è connessa da "molle" in genere non lineari; la forza esercitata da tale interazione dipende unicamente dalla distanza tra i due punti nella configurazione deformata (p).

La microelasticità è un concetto locale, in quanto riguarda solo l'interazione tra coppie di particelle; se si vuole prendere in esame l'intero corpo si deve passare al concetto di *macroelasticità*.

Si consideri ora un corpo microelastico con una funzione w nota. In ogni punto x del corpo in esame viene definita come *densità di energia macroelastica* la seguente funzione:

$$W_u(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{X}} w(u' - u, x' - x) dV' \quad (1.18)$$

Si ricava quindi la funzione di *energia macroelastica totale* come

$$\Phi_u = \int_{\mathcal{R}} W_u(x) dV \quad (1.19)$$

con \mathcal{R} l'intera regione che comprende il corpo.

Utilizzando le proprietà viste in precedenza è possibile ricavare il significato di questi termini andando a considerare un corpo microelastico e la derivata temporale della sua energia macroelastica totale; dopo alcuni passaggi [34] si ricava la seguente

$$\dot{\Phi}_u + \dot{T}_u = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV \quad (1.20)$$

in cui \dot{T}_u è l'energia cinetica totale del corpo.

Tale equazione comporta che il lavoro fatto dalle forze esterne sul corpo sia convertito interamente, senza effetti dissipativi, in energia cinetica e/o densità di energia macroelastica.

Se si sostituisce il termine macroelastico con l'energia di deformazione si ricade nel noto caso della teoria del continuo per un corpo elastico.

1.4 Relazione con la teoria convenzionale

In questo paragrafo verrà discussa la nozione di forza per unità di area (tensione), elemento cruciale nella teoria classica e necessario per relazionarla con la teoria peridinamica.

Si ipotizzi di prendere un corpo microelastico e sottoporlo ad una deformazione omogenea; supponendo ora di far passare per il corpo un piano P tale per cui vengano a crearsi due regioni chiamate \mathcal{R}^+ e \mathcal{R}^- , si ha che \mathcal{R}^+ esercita delle forze su \mathcal{R}^- .

Tali forze non sono applicate solamente sulla superficie creata dall'intersezione tra corpo e piano P (regione \mathcal{R}^-) ma, attraverso "azioni a distanza", anche nei punti interni di tale regione. Se la forza viene divisa per la superficie $P \cap \mathcal{R}$ si ricava la definizione di forza per unità di area.

Definiamo ora la *densità di forza per unità di area* come

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad (1.21)$$

tale densità di forza è vista da un punto $x \in \mathcal{R}$ ed è diretta secondo il versore \mathbf{n} .
Date tali definizioni le regioni \mathcal{R}^+ ed \mathcal{R}^- possono essere identificate come

$$\mathcal{R}^+ = \{x' \in \mathcal{R} : (x' - x) \cdot \mathbf{n} \geq 0\} \quad (1.22)$$

$$\mathcal{R}^- = \{x' \in \mathcal{R} : (x' - x) \cdot \mathbf{n} \leq 0\} \quad (1.23)$$

e dato il seguente set di punti allineati

$$\mathcal{L} = \{\hat{x} \in \mathcal{R}^- : \hat{x} = x - s\mathbf{n}, 0 \leq s < \infty\} \quad (1.24)$$

si può scrivere

$$\boldsymbol{\tau}(x, \mathbf{n}) = \int_{\mathcal{L}} \int_{\mathcal{R}^+} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \hat{\mathbf{u}}, x' - \hat{x}) dV_{x'} d\hat{l} \quad (1.25)$$

in cui $d\hat{l}$ rappresenta il percorso differenziale lungo \mathcal{L} .

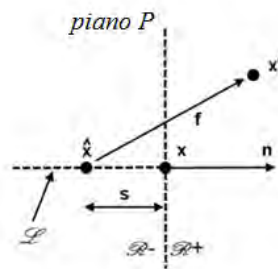


Fig 1.4 [23] Rappresentazione grafica del dominio \mathcal{R} e delle definizioni trattate

Per una deformazione omogenea si può inoltre introdurre il tensore delle tensioni relazionandolo alla densità di forza per unità di area, il quale risulta indipendente dalla scelta tale per cui

$$\boldsymbol{\tau}(x, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad \forall x \in \mathcal{R}^0, \forall \mathbf{n} \quad (1.26)$$

Il tensore delle tensioni è del tipo Piola-Kirchhoff, infatti $\boldsymbol{\tau}$ è una forza per unità di area mentre \mathcal{R}^0 rappresenta la regione interna al corpo di dominio \mathcal{R} , come mostrato in figura 1.5.

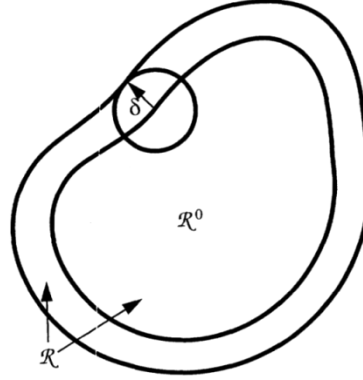


Fig 1.5 Rappresentazione grafica del dominio \mathcal{R} e definizione del sottodominio \mathcal{R}^0 , [34]

1.5 Configurazione di equilibrio

Le restrizioni a cui è soggetta la funzione scalare F possono essere ricercate mediante il calcolo di $\boldsymbol{\tau}$, in configurazione “unstressed”, per un materiale microelastico.

Una configurazione viene detta unstressed se

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}, \forall \boldsymbol{n} \quad (1.27)$$

Data una base ortonormale $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ e imposti $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$, dalle relazioni descritte nel paragrafo precedente si ricava

$$\hat{\boldsymbol{x}} = -s\boldsymbol{e}_1 \quad (1.28)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}' - \hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}' + s\boldsymbol{e}_1 \quad (1.29)$$

Ricordando le proprietà della pairwise force

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) = F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} \quad (1.30)$$

si ricava il valore di $\boldsymbol{\tau}$ lungo la direzione \mathbf{e}_1

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{0}, \mathbf{e}_1) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathcal{R}^+} F(\mathbf{0}, \mathbf{x}' + s\mathbf{e}_1)(\mathbf{x}' + s\mathbf{e}_1) dV_{\mathbf{x}'} ds \quad (1.31)$$

Utilizzando le coordinate sferiche si ottiene [23]

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{0}, \mathbf{e}_1) = \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty F(0, r)r^4 dr = \psi \quad (1.32)$$

Perciò per una configurazione unstressed un'ulteriore restrizione sulla F risulta essere quella per cui

$$\psi = 0 \quad (1.33)$$

1.6 Linearizzazione

La peridinamica non presenta restrizioni per quanto riguarda l'entità di deformazioni e spostamenti, tuttavia può risultare conveniente considerare un campo di piccole deformazioni. Si assuma $|\boldsymbol{\eta}| \ll 1$ in modo tale che la funzione di forza possa essere linearizzata secondo un'espansione di Taylor nel punto $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$ con $\boldsymbol{\xi}$ fissato e $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \quad (1.34)$$

con $\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})$ tensore di ordine due, detto *micromodulo*

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad (1.35)$$

si ottiene così un errore di ordine $O(|\boldsymbol{\eta}|^2)$.

Dalle proprietà della funzione di forza si ricava facilmente che

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\xi} \otimes \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{1} \quad (1.36)$$

in cui \otimes rappresenta il prodotto tensoriale di due vettori e dà come risultante un tensore di ordine due. Sostituendo tale derivata nell'espressione del $\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})$ si ottiene

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi} \otimes \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) + F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{1} \quad \forall \boldsymbol{\xi} \quad (1.37)$$

Si possono ora ricavare due interessanti proprietà del micromodulo; la prima deriva dalle proprietà di \mathbf{f} e dalla definizione stessa di micromodulo

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{C}(-\boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \quad (1.38)$$

la seconda discende direttamente dalla formulazione per un materiale microelastico

$$\nabla_{\boldsymbol{\eta}} \times \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0} \quad (1.39)$$

la quale conduce facilmente [23] all'uguaglianza

$$\frac{\partial f_i}{\partial \eta_j} = \frac{\partial f_j}{\partial \eta_i} \quad \text{per } i, j = 1, 2, 3 \quad (1.40)$$

Perciò per un materiale lineare e microelastico si ottiene la seconda proprietà di $\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})$ (*simmetria*)

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{C}^T(\boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \quad (1.41)$$

Quest'ultima è la condizione necessaria affinché un materiale lineare sia anche microelastico; tuttavia non tutti i materiali lineari sono microelastici, questo perchè in genere la $\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})$ ricavata dalla sua equazione non è simmetrica.

Condizione necessaria e sufficiente affinché sia simmetrica è che esista una funzione scalare $\lambda(\boldsymbol{\xi})$ tale che

$$\xi \otimes \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \xi) = \lambda(\xi) \xi \otimes \xi \quad \forall \xi \quad (1.42)$$

in cui

$$\lambda(\xi) = \frac{\xi}{|\xi|^2} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \xi) \quad (1.43)$$

questo implica che $\partial F / \partial \boldsymbol{\eta}(\mathbf{0}, \xi)$ deve essere parallelo a ξ . In tal caso il micromodulo si può scrivere come

$$\mathbf{C}(\xi) = \lambda(\xi) \xi \otimes \xi + F(\mathbf{0}, \xi) \mathbf{1} \quad \forall \xi \quad (1.44)$$

Si notano le seguenti proprietà:

$$\lambda(\xi) = \lambda(-\xi) \quad \forall \xi \quad (1.45)$$

$$F(\mathbf{0}, \xi) = F(\mathbf{0}, -\xi) \quad \forall \xi \quad (1.46)$$

che derivano dalla prima proprietà del micromodulo.

I valori di $\lambda(\xi)$ per materiali elastici e isotropi si possono ricavare come illustrato in [34].

La pairwise force function linearizzata si può scrivere nel seguente modo:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \xi) = [\lambda(\xi) \xi \otimes \xi + F(\mathbf{0}, \xi) \mathbf{1}] \boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}(\mathbf{0}, \xi) \quad \forall \xi, \boldsymbol{\eta} \quad (1.47)$$

1.7 Coefficiente di Poisson

La peridinamica bond based, come già visto, prende in esame l'interazione tra coppie di punti; questo implica una limitazione sul valore del coefficiente di Poisson, il quale risulta costante per ogni materiale indipendentemente dalle caratteristiche fisiche dello stesso. I valori che può assumere sono: 1/3 nel caso 2D plane stress e 1/4 per tutti gli altri casi.

Si consideri un corpo di materiale isotropo e microelastico in configurazione unstressed, sul quale vengono ipotizzate condizioni di piccole deformazioni e spostamenti.

Sia data una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e un campo di deformazioni omogenee a cui sottoporre il corpo, date da

$$u_1 = c_{11}x_1, \quad u_2 = u_3 = 0 \quad c_{11} = \text{cost.}, \quad |c_{11}| \ll 1 \quad (1.48)$$

si ricava quindi

$$\eta_1 = c_{11}\xi_1, \quad \xi_2 = \xi_3 = 0 \quad (1.49)$$

Utilizzando l'equazione di \mathbf{f} nella sua forma linearizzata si ottiene

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \left\{ \lambda(\boldsymbol{\xi}) \begin{bmatrix} \xi_1^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3 \\ \xi_2\xi_1 & \xi_2^2 & \xi_2\xi_3 \\ \xi_3\xi_1 & \xi_3\xi_2 & \xi_3^2 \end{bmatrix} + F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} \quad (1.50)$$

e risolvendo si ha

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11}[\lambda(\boldsymbol{\xi})\xi_1^3 + F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi})\xi_1] \\ c_{11}\lambda(\boldsymbol{\xi})\xi_1^2\xi_2 \\ c_{11}\lambda(\boldsymbol{\xi})\xi_1^2\xi_3 \end{Bmatrix} \quad (1.51)$$

Il tensore degli stress peridinamici si ottiene da

$$\sigma_{ij} = \tau_j(\mathbf{e}_i) = \int_{\mathcal{L}} \int_{\mathcal{R}^+} f_i dV_{x'} d\hat{l} \quad \text{per } i, j = 1, 2, 3 \quad (1.52)$$

Il tensore, che presenta nove componenti, verrà considerato nel seguito riportando solo i valori della prima riga della matrice tensoriale (lungo il versore \mathbf{e}_1), con il procedimento mostrato in [23] da cui si ottiene

$$\sigma_{11} = c_{11}(\psi + \Lambda) \quad (1.53)$$

$$\sigma_{12} = 0 \quad (1.54)$$

$$\sigma_{13} = 0 \quad (1.55)$$

con $\psi = 0$ dovuto alla configurazione unstressed usata e con

$$\Lambda = \frac{2\pi}{5} \int_0^\infty \lambda(r)r^6 dr \quad (1.56)$$

Allo stesso modo si possono ottenere le altre componenti. La definizione di $\boldsymbol{\sigma}$ lungo la direzione 1 in forma matriciale è

$$[\boldsymbol{\sigma}] = c_{11} \begin{bmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Lambda}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Lambda}{3} \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

Il tensore $\boldsymbol{\sigma}$ può essere calcolato, dato lo stesso strain c_{11} , utilizzando la teoria classica del continuo come

$$[\boldsymbol{\sigma}] = c_{11} \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

dove λ e μ sono rispettivamente la costante di Lamè e il modulo di taglio.

Andando ad eguagliare i due tensori si ricava facilmente che

$$\lambda = \mu = \frac{\Lambda}{3} \quad (1.59)$$

Usando ora le relazioni della teoria classica per materiali isotropi

$$\mu = G \quad (1.60)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \quad (1.61)$$

e data la nota relazione

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.62)$$

e infine combinandole con la relazione trovata precedentemente si ottiene

$$\nu = \frac{1}{4}; \quad E = \frac{5\Lambda}{6}; \quad k = \frac{5\Lambda}{9} \quad (1.63)$$

in cui E , G , k , ν sono detti: modulo di Young, modulo di elasticità tangenziale, modulo di compressibilità o bulk e modulo di Poisson.

Quanto ricavato dimostra come un materiale peridinamico tridimensionale in campo di piccoli spostamenti, sottoposto ad una deformazione omogenea, abbia un modulo di Poisson fisso e pari a 0.25; mentre ci mostra come Λ , termine che non è direttamente misurabile, possa essere relazionato a proprietà facilmente misurabili del materiale.

1.8 Materiale PMB

Il materiale a cui si ricorre più spesso come esemplificativo per la peridinamica bond based è il cosiddetto *Prototype Micro Brittle (PMB)*.

I bond in tale materiale e per materiali sottoposti a piccoli spostamenti e deformazioni hanno le seguenti proprietà:

1. Lo *stretch* (allungamento relativo) s del bond è il rapporto tra la forza peridinamica f e la rigidità del bond rappresentata dal micromodulo elastico c .
2. Il bond raggiunge la rottura quando lo stretch raggiunge un valore limite s_0 detto stretch critico. Quando un bond arriva a rottura non c'è possibilità che possa ripararsi, questa proprietà rende il bond direttamente dipendente dalla sua storia di deformazione.

3. Il bond non arriva mai a rottura se soggetto a compressione (in genere si pone una resistenza di compressione elevata).

Da tali proprietà si può intuire come, specialmente in un materiale PMB, la struttura del corpo venga vista in modo equivalente a tante particelle dotate di massa (punti o nodi peridinamici), legate tra loro da molle con proprietà particolari (i bond) attive entro una certa regione (direttamente legata all'orizzonte).

In un materiale con tali proprietà la funzione scalare H risulta essere ora una funzione lineare di c ; perciò la force function si può scrivere come

$$f(\eta, \xi) = cs\mu(\xi) \frac{\eta + \xi}{|\eta + \xi|} \quad (1.64)$$

dove per piccoli spostamenti si può scrivere

$$f(\eta, \xi) = cs\mu(\xi) \frac{\xi}{|\xi|} \quad (1.65)$$

con lo stretch s definito da

$$s = \frac{|\eta + \xi| - |\xi|}{|\xi|} \quad (1.66)$$

N.B. tali definizioni sono valide generalmente per piccoli spostamenti e deformazioni; si noti inoltre come lo stretch definisca l'allungamento relativo di un bond.

mentre μ rappresenta una funzione scalare tempo-dipendente che rappresenta lo stato del bond e assume i seguenti valori

$$\mu(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } s < s_0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.67)$$

in cui $\mu(\xi) = 1$ identifica un bond ancora attivo, mentre $\mu(\xi) = 0$ identifica un bond irrimediabilmente compromesso e quindi non più in grado di trasmettere una pairwise force function ($\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$).

Definito il parametro μ si può facilmente introdurre il concetto di danno che si presenta come una delle caratteristiche principali della teoria della peridinamica.

La relazione che si usa generalmente per la definizione del danno è la seguente:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \frac{\int_{H_x} \mu dH_{x'}}{\int_{H_x} dH_{x'}} \quad (1.68)$$

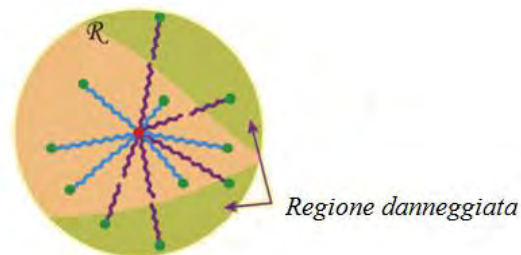


Fig 1.6 Raffigurazione della regione di danneggiamento, [5]

Il danno, definito tramite un indice di danneggiamento (damage index), varia tra un valore unitario (tutti i bond sono rotti) e 0 (nessun bond rotto) e rappresenta il rapporto tra bond rotti e bond integri collegati al nodo main x .

Si ritiene necessario far notare come il valore di $\varphi(\mathbf{x}) = 1$ sia indicativo del fatto che tutti i bond collegati al nodo principale sono stati rotti; tuttavia è necessario solamente un valore di circa 0.39 affinché abbia luogo nel materiale una frattura immediatamente adiacente al nodo sorgente, come chiaramente illustrato in figura 1.7.

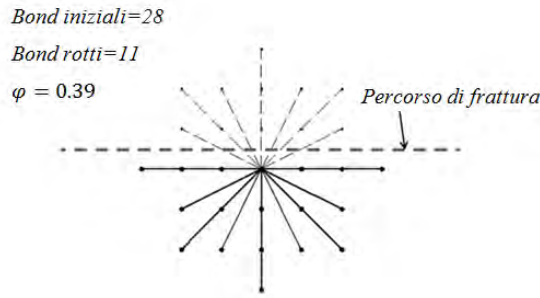


Fig 1.7 Zona di frattura in prossimità di un nodo main con relativo damage index, [31]

La costante peridinamica c può essere espressa in funzione delle proprietà del materiale tramite il concetto di densità di forza per unità d'area.

Si consideri un corpo illimitato (evitando così gli effetti di bordo) sottoposto ad una deformazione omogenea e con s costante $\forall \xi$.

Si pone

$$\xi = |\xi| ; \quad \eta = |\eta| \quad (1.69)$$

Dalla definizione dello stretch si ha che

$$\eta = s\xi \quad (1.70)$$

quindi date tali condizioni, la funzione scalare H si può riscrivere come

$$H = cs = \frac{c\eta}{\xi} \quad (1.71)$$

mentre il micropotenziale per un singolo bond diviene

$$\hat{w} = \int H d\eta = \int \frac{c\eta}{\xi} d\eta = \frac{c\eta^2}{2\xi} = \frac{cs^2\xi}{2} \quad (1.72)$$

Andando ad integrare \hat{w} su tutto il volume della sfera avente per raggio l'orizzonte δ e centro x si ottiene l'energia elastica totale specifica per la sfera considerata:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\delta \left(\frac{cs^2\xi}{2} \right) 4\pi\xi^2 d\xi = \frac{\pi cs^2\delta^4}{4} \quad \text{dove } 4\pi\xi^2 d\xi = dV_x \quad (1.73)$$

dove il valore di 1/2 sta ad indicare che due punti materiali collegati da un bond condividono ciascuno metà dell'energia presente nello stesso; tale energia può essere correlata con l'energia di deformazione elastica specifica derivante dalla teoria classica del continuo per un corpo sottoposto a vari stati di deformazione.

Si consideri, per semplicità, un corpo omogeneo, isotropo e idealmente infinito sottoposto ad uno stato di deformazione idrostatica s ; si ha quindi

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \quad (1.74)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} (2\mu + 3\lambda)s & 0 & 0 \\ 0 & (2\mu + 3\lambda)s & 0 \\ 0 & 0 & (2\mu + 3\lambda)s \end{bmatrix} \quad (1.75)$$

Dalla teoria classica risulta che

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} (2\mu + 3\lambda) s^2 = 3Es^2 \quad (1.76)$$

Andando a eguagliare l'energia in (1.76) con quella della teoria peridinamica (1.73) si ricava il valore del micromodulo per questo specifico caso (ma il concetto esposto è valido in qualunque caso generale):

$$c = \frac{12E}{\pi\delta^4} \quad (1.77)$$

Come si può notare il micromodulo (che non è noto a priori) può essere ricavato note le proprietà fisiche del materiale; questo permette di ricavare il valore di c per una grande varietà di materiali.

Nel caso preso in esame si ottiene un micromodulo costante noto il valore dell'orizzonte, tuttavia non vi è nessuna limitazione alla forma che essi può assumere; vi sono infatti, come

mostrato nella figura sottostante, vari modelli che ne governano il comportamento, i quali permettono la descrizione di materiali diversi dal PMB.

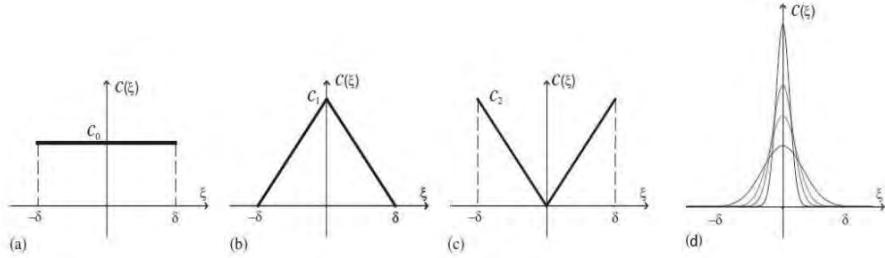


Fig 1.8 Alcune funzioni possibili del micromodulo elastico (a) costante, (b) triangolare, (c) triangolare, (d) a campana, [2]

L'ultimo parametro che rimane da analizzare è lo stretch ed in particolare il valore dello stretch limite (s_0), cioè la massima dilatazione che possono vedere due punti legati da un bond prima che quest'ultimo si rompa.

Tale parametro viene valutato andando a calcolare il tasso di energia di frattura rilasciata durante la creazione di due superfici disgiunte; tale tasso energetico si ottiene risolvendo un integrale [37] valutato su una porzione di dominio sferico di raggio uguale all'orizzonte.

$$G_{ic} = \int_0^\delta dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_z^\delta d\xi \int_0^{\cos^{-1}(\frac{z}{\xi})} d\phi \frac{c(\xi)s_0^2\xi}{2} \sin(\phi)\xi^2 \quad (1.78)$$

in cui

$$\frac{c(\xi)s_0^2\xi}{2} = \hat{w}(\xi) \quad (1.79)$$

dove con G_{ic} ci si riferisce all'energia di frattura del primo modo [12], espressa nel caso 3D per unità di area, con i termini riportati che assumono il significato descritto in figura.

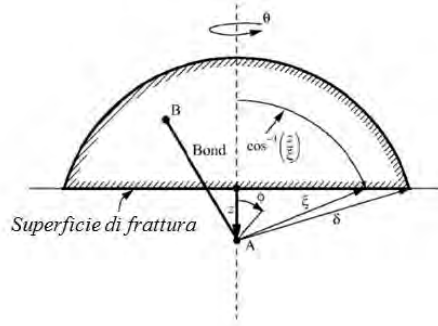


Fig 1.9 Parametri per il calcolo dell'energia di frattura, [37]

Si nota come l'integrale si presenti in forma generale e quindi applicabile anche per materiali non PMB e con un micromodulo elastico del tutto generale.

Verrà ora risolto l'integrale, assumendo le ipotesi fatte per il calcolo del micromodulo per un materiale nel caso geometrico più generale (3D), riportando poi il valore anche per i casi mono e bidimensionale che non sono altro che casi semplificati del primo.

$$G_{ic} = \int_0^{\delta} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_z^{\delta} d\xi \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} d\phi \frac{c(\xi)s_0^2\xi}{2} \xi^2 \sin(\phi) \quad (1.80)$$

Si consideri ora per semplicità $c(\xi) = c$ (costante) in ξ

$$G_{ic} = \pi c s_0^2 \int_0^{\delta} dz \int_z^{\delta} \xi^3 d\xi \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} \sin(\phi) d\phi \quad (1.81)$$

$$G_{ic} = \pi c s_0^2 \int_0^{\delta} dz \int_z^{\delta} \xi^3 \left(-\frac{z}{\xi} + 1\right) d\xi \quad (1.82)$$

$$G_{ic} = \pi c s_0^2 \int_0^{\delta} -\frac{z}{3} (\delta^3 - z^3) + \frac{1}{4} (\delta^4 - z^4) dz \quad (1.83)$$

svolvendo gli ultimi passaggi si ottiene

$$G_{ic} = \frac{\pi c s_0^2 \delta^5}{10} \quad (1.84)$$

da cui si ricava il valore s_0

$$s_0 = \sqrt{\frac{10G_{ic}}{\pi c \delta^5}} = \sqrt{\frac{5G_{ic}}{6E\delta}} \quad (1.85)$$

per il quale è utilizzato il micromodulo precedentemente calcolato.

Il procedimento sopra illustrato si può estendere anche a modelli monodimensionali e bidimensionali andando a modificare opportunamente l'integrale.

Dato l'interesse che possono suscitare riportiamo ora i risultati del calcolo del micromodulo e dello stretch limite per i seguenti casi:

❖ Caso 1D, [31]

$$c = \frac{12E}{\pi \delta^4} ; s_0 = \sqrt{\frac{6G_{ic}}{E\delta}} \quad (1.86)$$

❖ Caso 2D (plane stress), [31]

$$c = \frac{9E}{\pi t \delta^3} ; s_0 = \sqrt{\frac{4\pi G_{ic}}{9E\delta}} \quad (1.87)$$

❖ Caso 2D (plane strain), [31]

$$c = \frac{48E}{5\pi t \delta^3} ; s_0 = \sqrt{\frac{5\pi G_{ic}}{12E\delta}} \quad (1.88)$$

in cui il termine t si riferisce allo spessore (in molti articoli tale parametro non compare in quanto assunto unitario).

1.9 Condizioni di carico

Un aspetto fondamentale di molte applicazioni riguarda la soluzione di sistemi con carichi esterni applicati.

La soluzione utilizzata nel caso della meccanica del continuo in presenza di carichi applicati non può essere ricavata nello stesso modo nella formulazione peridinamica.

Tale diversità può essere illustrata considerando un corpo soggetto a carichi di natura meccanica, il quale viene idealmente diviso in due domini Ω^+ e Ω^- (figura 1.10) ove tra le due parti deve sussistere una forza \mathbf{F}^+ tale per cui l'equilibrio possa essere soddisfatto.

In accordo con la teoria del continuo tale forza può essere calcolata dall'integrale della tensione di trazione sulla superficie che separa i due domini:

$$\mathbf{F}^+ = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{T} dA \quad (1.89)$$

in cui \mathbf{T} è la trazione superficiale.

Nella trattazione peridinamica i punti materiali appartenenti al dominio Ω^+ interagiscono con i punti del dominio Ω^- , in modo tale che la densità di forza \mathbf{L} agente sui punti del dominio Ω^+ si possa determinare andando ad integrare la funzione di forza \mathbf{f} sul dominio Ω^- come segue:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV' \quad (1.90)$$

Infine la forza \mathbf{F}^+ può essere ricavata risolvendo l'integrale di volume sul dominio Ω^+ della densità di forza \mathbf{L} tale per cui

$$\mathbf{F}^+ = \int_{\Omega^+} \mathbf{L}(\mathbf{x}) dV = \int_{\Omega^+} dV \int_{\Omega^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV' \quad (1.91)$$

In tal modo si osserva come i carichi debbano essere applicati sul volume come body force, spostamenti e velocità; infatti nel caso in cui il volume Ω^- risultasse vuoto (cioè si fosse in

presenza di una condizione al contorno su Ω^+ , $L(x)$ risulterebbe nullo in quanto non riferito a nessun volume; per tale motivo le forze al contorno in peridinamica vanno applicate ad un volume non nullo.

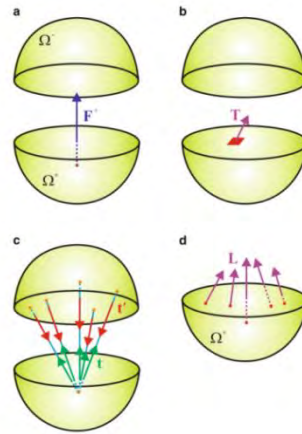


Fig 1.10 Condizioni al contorno (a) Dominio d'interesse (b) Trazione nella meccanica classica (c) Interazione tra un punto materiale nel dominio Ω^+ e altri punti materiali nel dominio Ω^- (d) Densità di forza agente sul dominio Ω^+ dovuta al dominio Ω^- , [10]

1.10 Meccanismi di dissipazione dell'energia

Uno degli aspetti che possono caratterizzare l'interesse nell'ambito di ricerca di strutture o materiali necessari a svolgere particolari funzioni, riguarda lo smorzamento che si riesce a realizzare tramite una certa configurazione e/o l'impiego di determinati materiali.

La peridinamica può facilmente integrare lo smorzamento di una struttura o di un materiale partendo dalla considerazione semplificata che permette di vedere i nodi del modello connessi tra loro da molle con particolari proprietà, una delle quali può essere l'integrazione di uno smorzatore.

Si consideri l'equazione della dinamica di un sistema semplice quale quello massa-molla-smorzatore.

L'equazione si può scrivere come:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} = -kx + F_{ext} \quad (1.92)$$

con F_{ext} forza applicata alla massa m ed x, c, k dotati della canonica definizione.

Andando ora a riscrivere l'equazione del moto della peridinamica si ottiene:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + c_d \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_{H_x} \mathbf{f}[\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}' - \mathbf{x}] dV_{x'} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x}' \in H_x \quad (1.93)$$

in cui c_d assume le proprietà di una costante di smorzamento per unità di volume.

Si noti la somiglianza tra le due equazioni che ben fa comprendere il significato fisico di ogni termine dell'equazione peridinamica, in particolar modo si nota come l'integrale richiami l'azione di una forza interna ($k\mathbf{x}$) che collega il riferimento (nodo \mathbf{x}) con la massa (o le masse) m (nodo o nodi \mathbf{x}').

L'inserimento dello smorzamento permette di andare ad analizzare strutture in capo dinamico che necessitano di essere portate a regime dopo un certo intervallo temporale; il quale risulta funzione del valore di smorzamento.

-Capitolo 2-

Si può notare, sin dal primo capitolo, come le equazioni della peridinamica siano scritte in forma integrale con la presenza di termini differenziali temporali; questo consente di implementare un metodo risolutivo discretizzato che si avvalga della caratteristica di dualità tra integrale e sommatoria in piccoli intervalli spaziali e di un metodo iterativo che consente di ricavare le caratteristiche cinematiche-dinamiche all'interno di piccoli intervalli temporali. In questo capitolo sarà illustrato come implementare numericamente la teoria esposta nel capitolo 1, andando a proporre nella parte finale un semplice esempio di codice.

2.1 Discretizzazione spaziale

Si richiama l'equazione classica della peridinamica.

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_{H_x} \mathbf{f}[\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}' - \mathbf{x}] dV_{x'} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x}' \in H_x \quad (2.1)$$

Per risolvere numericamente tale equazione va effettuata una discretizzazione spazio-temporale, tale per cui l'integrale diventi una sommatoria di termini e le derivate vengano risolte con un approccio numerico alle derivate.

Utilizzando l'approccio peridinamico la discretizzazione spaziale di un corpo viene fatta andando a costruire su di esso un array di punti materiali spaziatati tra loro con una qualsivoglia legge (in genere e per semplicità ci si riferirà ad una spaziatura omogenea tra i punti) generando una griglia in cui i vertici sono i punti materiali (detti nodi peridinamici).

A livello concettuale si può immaginare tale approccio analogo a quello che si viene ad avere utilizzando una metodologia FEM, in cui il corpo viene approssimato usando una mesh di elementi geometrici legati tra loro da nodi; tuttavia si deve tener conto di come la peridinamica sia un approccio mesh-free quindi, se raffrontata alla metodologia FEM, si deve immaginare di eliminare l'elemento e utilizzare solamente i nodi; i quali interagiscono tra loro tramite la pairwise force.

Si consideri una griglia di nodi omogenea ed equispaziata in cui ogni nodo è equispaziato da quelli adiacenti da una distanza Δx .

Si associa ora ad ogni nodo un volumetto che rappresenta il volume materiale del corpo in quella posizione.

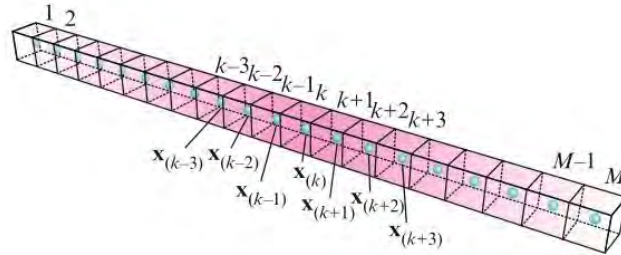


Fig 2.1 Discretizzazione tramite punti materiali di un elemento monodimensionale in cui x_k è il nodo main che “vede” i nodi $x_{k\pm n}$ all’interno del suo orizzonte, [10]

Andando ora a discretizzare l’equazione integrale (2.1) si ottiene

$$\rho \ddot{u}(x_i, t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{f}[\mathbf{u}(x_j, t) - \mathbf{u}(x_i, t), \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i] V_j + \mathbf{b}(x_i, t) \quad (2.2)$$

dove il nodo i è il nodo di riferimento (cioè il nodo di cui si vuole calcolare l’accelerazione, lo spostamento, ecc.. chiamato nodo main) mentre i nodi j sono i nodi famiglia, cioè i nodi che si trovano all’interno dell’orizzonte e che sono collegati al nodo di riferimento tramite un bond. Infine il volume V_j si riferisce al volumetto associato al nodo j -esimo che nelle ipotesi di volume cubico può essere assunto come $(\Delta x)^3$.

Si nota come la sommatoria divenga doppia o tripla nel caso 2D o 3D.

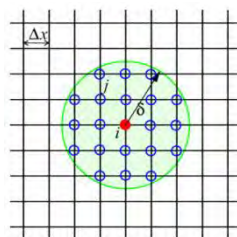


Fig 2.2 Rappresentazione bidimensionale di una discretizzazione spaziale. Rosso = nodo main, blu = nodi family, [23]

Un aspetto che deve essere analizzato nel passaggio da un modello continuo ad uno discretizzato risiede nella convergenza che tale modello ha al variare di determinati parametri. Nel caso della peridinamica i parametri discriminanti sono: orizzonte (δ), dimensione delle celle (Δx) ed il loro rapporto ($m = \delta/\Delta x$).

Noti tali parametri abbiamo due principali tipi di convergenza (più un terzo chiamato δ - m convergenza, in genere meno utilizzato), ossia:

❖ δ -convergenza

Si ha quando $\delta \rightarrow 0$ mentre m rimane costante; in tal caso la soluzione che si ottiene si avvicina a quella della teoria classica del continuo.

❖ m -convergenza

Si ha quando $m \rightarrow \infty$ mentre δ rimane costante; in tal caso la soluzione si avvicina a quella prevista dalle equazioni dalla teoria peridinamica.

Tipicamente il valore di m che viene utilizzato nelle simulazioni è pari a $m = 3$.

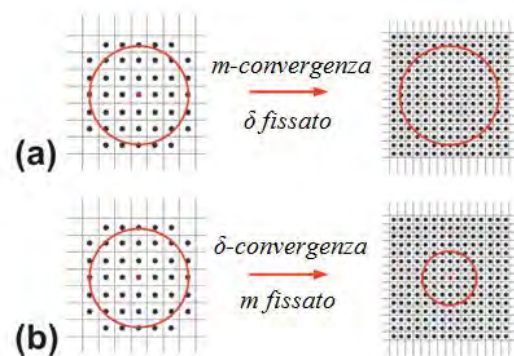


Fig 2.2 Rappresentazione di (a) δ -convergenza, (b) m -convergenza, [46]

Come si può notare l'accuratezza del calcolo dell'integrale in forma discretizzata viene meno lungo il bordo della regione di raggio δ , in quanto si considera un volumetto di dimensione finita, ed essendo considerati solo i nodi all'interno di tale regione una parte del volume viene persa o sovrastimata, perciò la discretizzazione a celle non si rivela efficiente per approssimare una zona circolare.

Si riportano di seguito due approcci classici a tale problema, mentre si rimanda a [23] per una soluzione ancora più accurata.

La prima strategia risulta banalmente quella di aumentare il numero di nodi infittendo in tal modo la griglia, al fine di ottenere una riduzione dell'errore. Tuttavia come è facilmente intuibile tale procedimento porta ad un aumento nelle risorse necessarie a livello computazionale.

Una seconda strategia consiste nell'inserire all'interno dell'equazione del moto un coefficiente correttivo (β) per il volume, detto *fattore di riduzione volumetrica*.

L'equazione della dinamica viene quindi scritta come

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{f}[\mathbf{u}(\mathbf{x}_j, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t), \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i] \beta V_j + \mathbf{b}(\mathbf{x}_i, t) \quad (2.3)$$

con β definito in modo tale per cui

$$\beta = \begin{cases} \frac{\delta + 0.5\Delta x - |\xi|}{\Delta x} & \text{se } |\xi| \leq \delta - 0.5\Delta x \\ 0 & \text{se } \delta - 0.5\Delta x \leq |\xi| \leq \delta + 0.5\Delta x \\ & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.4)$$

Tale approssimazione permette di tenere conto della parte di volume persa da un nodo all'interno dell'orizzonte e di quella che non viene considerata se un nodo si trova subito esterno ad esso.

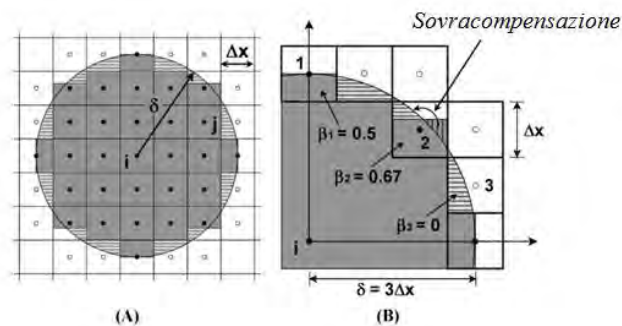


Fig 2.3 (A) Volume perso e sovrastimato (B) Valori assunti da β per i nodi vicino all'orizzonte, [22]

2.2 Discretizzazione temporale

Una volta che il corpo è stato discretizzato spazialmente si deve implementare un metodo per il calcolo della variazione dei suoi parametri nel tempo, si ricade quindi nell'ambito della discretizzazione temporale in cui si valutano i parametri del corpo andando a suddividere l'intervallo di durata dell'analisi (t_{tot}) in piccoli intervalli infinitesimi (Δt) e per ognuno di essi si risolve l'equazione discretizzata a livello spaziale descritta nel paragrafo precedente.

Si ottiene quindi una forma completamente discretizzata del tipo

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_i^n = \sum_{j=1}^N \mathbf{f}[\mathbf{u}_j^n - \mathbf{u}_i^n, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i] V_j + \mathbf{b}_i^n \quad (2.5)$$

dove n è il numero del time-step in cui viene eseguita l'equazione ($n = t_k/\Delta t$, con $t_k \leq t_{tot}$) da cui si può scrivere $\mathbf{u}_i^n = \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t_0 + n\Delta t)$, con generalmente $t_0 = 0$.

Il numero di passi in cui viene discretizzata la linea temporale ha una notevole influenza sulla stabilità della soluzione numerica, infatti è necessario ricordare come la peridinamica utilizzi una soluzione esplicita delle equazioni, ciò porta a non aver nessun controllo in fase di elaborazione della soluzione sull'errore e quindi sulla stabilità della soluzione.

Tale caratteristica porta a dover definire degli intervalli spaziali, ma soprattutto temporali, estremamente piccoli.

Una formulazione indicativa su time-size massimo ammissibile al fine di ottenere una soluzione stabile può essere espressa dall'equazione [23]

$$\Delta t_c = \frac{(|\xi|)_{min}}{(c_k)_{max}} \quad (2.6)$$

in cui $(|\xi|)_{min}$ è la lunghezza minima del più piccolo bond del corpo e $(c_k)_{max}$ è la *bulk sound speed* definita come

$$(c_k)_{max} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.7)$$

con E modulo di elasticità del corpo e ρ la sua densità.

Si ricorre inoltre ad un fattore di sicurezza $\beta_{safe} < 1$ tale per cui si può scrivere

$$\Delta t = \beta_{safe} \Delta t_c \quad (2.8)$$

in cui generalmente si consiglia di assumere almeno $\beta_{safe} = 0.8$.

Un metodo di integrazione spesso usato nello studio di modelli peridinamici è l'algoritmo *Velocity-Verlet* che può essere scritto tramite due equazioni compatte o più chiaramente tramite la loro scomposizione [16]. L'algoritmo si può scrivere come:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}} = \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (2.9)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

Prima di eseguire l'ultimo step d'integrazione si deve aggiornare l'accelerazione utilizzando l'equazione della peridinamica, ottenendo così $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$ ed utilizzandola nell'ultima equazione di Verlet

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (2.11)$$

In appendice verrà illustrato un metodo alternativo presentato recentemente per una nuova teoria applicata alla peridinamica bond based.

2.3 Applicazione del carico e problema del softening al contorno

Come già mostrato nel capitolo 1 le condizioni di carico in ambito peridinamico non possono essere applicate con lo stesso criterio utilizzato nella teoria del continuo.

Questo porta a dover utilizzare forze per unità di volume in sostituzione a forze, mediante la definizione del parametro \mathbf{b} che compare nell'equazione del moto e che viene quindi definito come

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{F}}{V} \quad (2.12)$$

in cui V è un volume e \mathbf{F} è il generico vettore di forza. Tuttavia questa definizione richiede di specificare quale sia il volume da considerare.

Un primo approccio prevede di distribuire la forza sui nodi superficiali del corpo a cui è applicata; ad esempio su una trave messa in trazione avente N nodi, come in figura, si divide la forza per il volumetto che compete l'ultimo nodo.



Fig 2.4 Trave monodimensionale con applicata forza per unità di volume

Quindi, con riferimento al volume definito nei paragrafi precedenti, ad un certo istante n si avrà

$$\mathbf{b}_N^n = \frac{\mathbf{F}}{(\Delta x)^3} \quad (2.13)$$

dove si è considerato $\mathbf{F} = cost$, mentre nei restanti nodi della trave si avrà (sempre ad un certo istante n)

$$\mathbf{b}_i^n = \mathbf{0} \quad \forall i \neq N \quad (2.14)$$

L'approccio descritto, che risulta perfettamente lecito dalla teoria, soffre di un problema denominato *softening*.

Tale termine sta ad indicare un abbassamento di rigidità in prossimità dei bordi del corpo nelle regioni in cui vengono applicate delle condizioni al contorno, quali ad esempio forze o vincoli. Tale decremento della rigidità deriva dalla definizione di orizzonte sferico, in

quanto i nodi al contorno della sfera d'influenza risultano avere un numero di bond inferiore a quelli presenti in un nodo all'interno del corpo, realizzando così una minore energia di frattura e presentando a livello macroscopico un valore minore del modulo di elasticità, risultando quindi più facili da rompere. Si generano in tal modo rotture non previste nelle zone di applicazione di carichi e vincoli.

Una strategia utilizzata per risolvere questo inconveniente consiste semplicemente nell'applicare la forza per unità di volume anche a nodi interni, fino ad una profondità pari a δ . Considerando l'esempio fatto prima si avrà (assumendo $m = 1$)

$$\mathbf{b}_N^n = \mathbf{b}_{N-1}^n = \frac{\mathbf{F}}{2(\Delta x)^3} \quad (2.15)$$

mentre rimane sempre

$$\mathbf{b}_i^n = \mathbf{0} \quad \forall i \neq N, N-1 \quad (2.16)$$

Tale approccio non è il solo possibile, vi è anche la possibilità di utilizzare un fattore di compensazione β_s , che va applicato al volume in modo analogo a quanto fatto con il fattore di riduzione volumetrica.

Il valore di β_s per un generico nodo i è definito da

$$\beta_s = \frac{W_{inf}}{W_{bdry}} \quad (2.17)$$

in cui W_{inf} è la densità di energia elastica locale del nodo i , pensato come interno ad un corpo di estensione infinita, mentre W_{bdry} è la densità di energia elastica locale del nodo i che si trova nel corpo che viene preso in esame. Da ciò risulta chiaro come β_s divenga unitario solo per nodi interni al corpo che si trovano ad una profondità maggiore di un orizzonte.

Da tali definizioni si può ricavare [23]

$$\beta_s = \frac{6\delta^4}{3\delta^4 + 4h\delta^3 - h^4} \quad (2.18)$$

Tale coefficiente va moltiplicato nell'equazione discretizzata della peridinamica, così da ottenere una riduzione dell'effetto dovuto al softening.

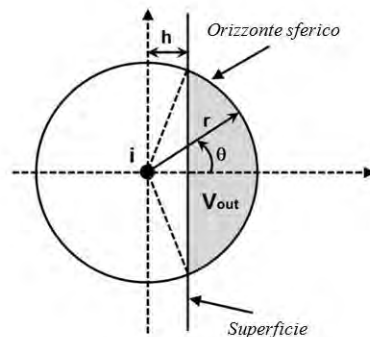


Fig 2.5 Interazione tra il nodo main i e la superficie esterna del corpo in esame, [23]

Si ritiene di dover precisare come i due approcci non vadano mai usati congiuntamente ma sono uno sostitutivo dell'altro.

2.4 Analisi dinamica di un modello monodimensionale

All'inizio del lavoro di tesi è stato proposto un semplice problema da sviluppare, atto a migliorare la comprensione della teoria peridinamica, realizzando un codice Matlab.

Si ritiene che questo esercizio possa essere d'aiuto, come lo è stato al tesista, per comprendere meglio la modalità di applicazione delle basi teoriche apprese, al fine di produrre un codice funzionante.

Il setup del problema è stato fornito in modo del tutto generale per quanto riguarda le caratteristiche fisiche del corpo e la sequenza procedurale nella logica di programmazione; lasciando all'utente la libertà di esplorare modi diversi per raggiungere la soluzione desiderata.

Il testo del problema originario chiedeva di risolvere un' asta posta in trazione agli estremi da due forze uguali in modulo ed opposte in verso, come mostrato in figura 2.6.



Fig 2.6 Asta posta in trazione

Le forze dovevano essere applicate dinamicamente attraverso una funzione a rampa, di ampiezza massima F e poi rilasciate istantaneamente (in realtà, per motivi numerici, è stato scelto uno “scarico” avente una piccola pendenza). Il risultato che si voleva ottenere era l’osservazione dell’oscillazione di un estremo dell’asta ricavandone l’energia elastica, cinetica e totale ad esso associata.

Come già detto tale modello risulta semplificato rispetto alle potenzialità della teoria, non solo per la parte geometrica ma anche per la mancanza di un criterio di rottura (interazione elastica ed “indistruttibile”) e per l’assenza di smorzamento.

Dati utilizzati nella simulazione:

```

ro=8000;           %densità materiale
E=210*10^9;       %modulo elastico materiale
dx=0.1;           %passo tra due nodi
A=0.001;          %area sezione asta
l=2;              %lunghezza asta
Fmax=10^5;        %forza del picco massimo (N)
delta_t=1*10^-8;  %passo di integrazione
t_f_max=delta_t*10^6; %tempo di applicazione carico crescente fino a Fmax
t_s=t_f_max+(t_f_max)/10; %tempo tra Fmax e 0 (zona di scarico)
total_t=2*t_f_max; %tempo di integrazione totale
N=(l/dx)+1;       %numero di nodi
delta=2*dx;       %orizzonte (è stato scelto m=2)
c=2*E/(A*delta^2); %micromodulo elastico
W_s=(pi*c*(delta^4))/4; %energia elastica specifica totale

```

Si procede ora alla presentazione dello schema logico per l’implementazione del problema in codice Matlab.

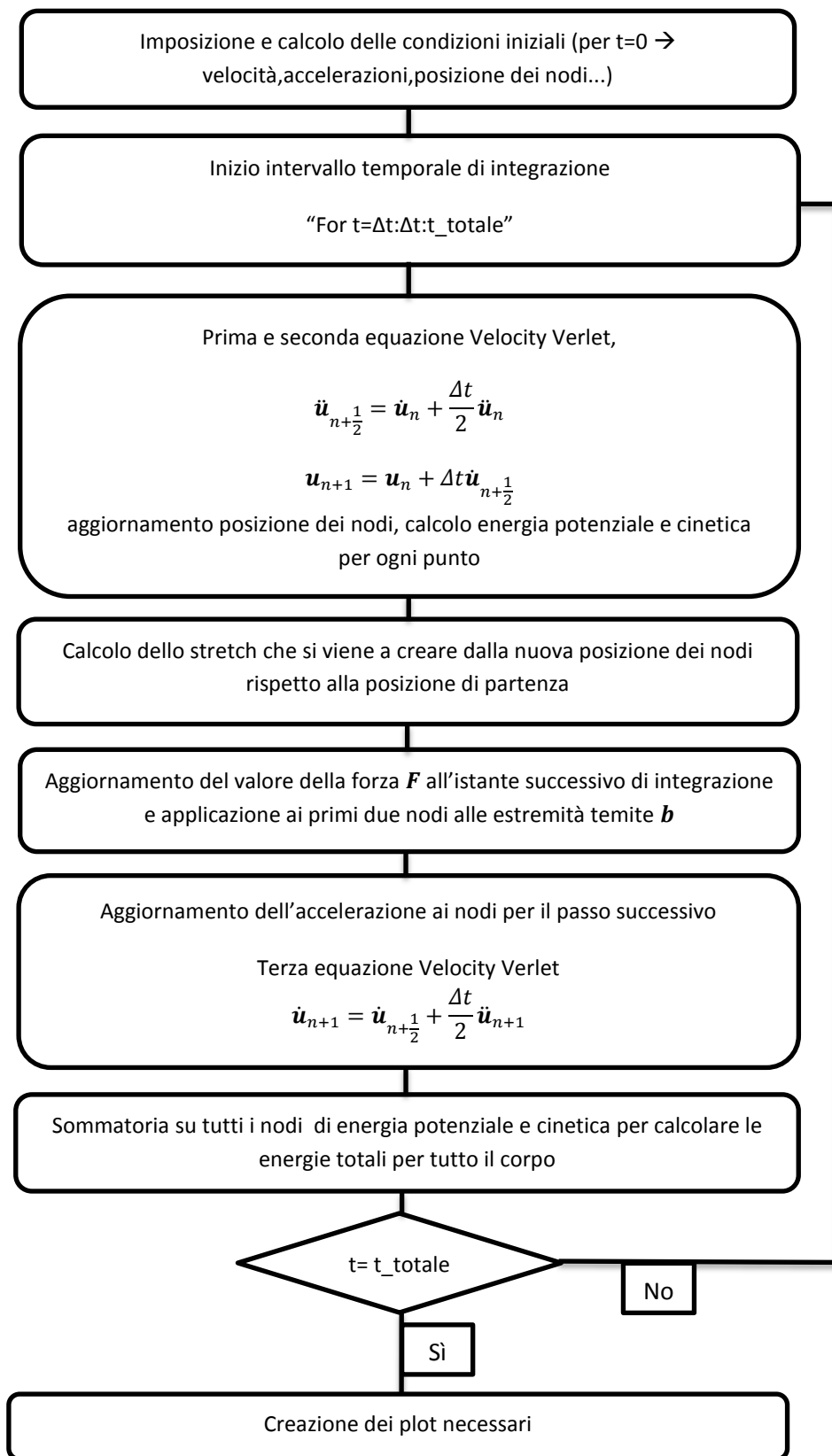


Fig 2.7 Schema concettuale dell'esempio: asta posta in trazione agli estremi

Di seguito vengono riportati i grafici ottenuti dalla simulazione.

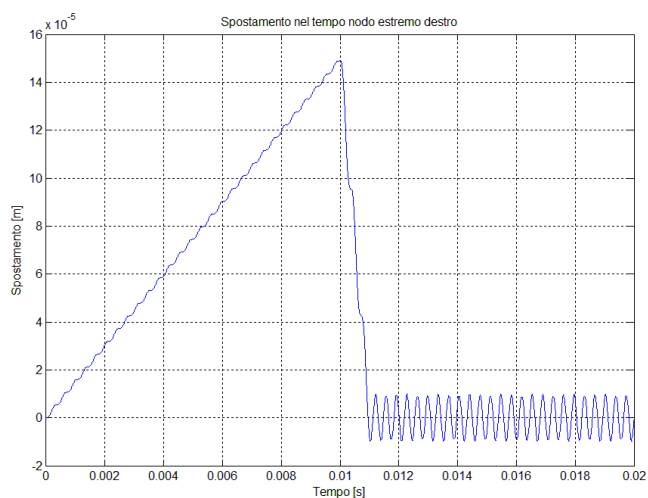


Fig 2.8 Spostamento nodo estremo destro in un tempo pari a 0.02 [s]

Si noti come in assenza di smorzamento la trave, come previsto dalla teoria, continui a vibrare attorno alla sua posizione di equilibrio. Si illustrano ora grafici relativi alle energie.

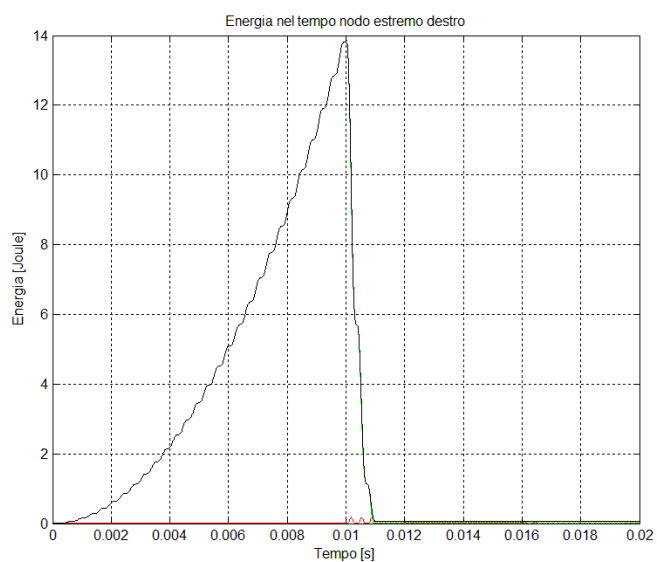


Fig 2.9 Energie nodo estremo destro: linea nera=energia totale, verde=energia potenziale, rossa=energia cinetica

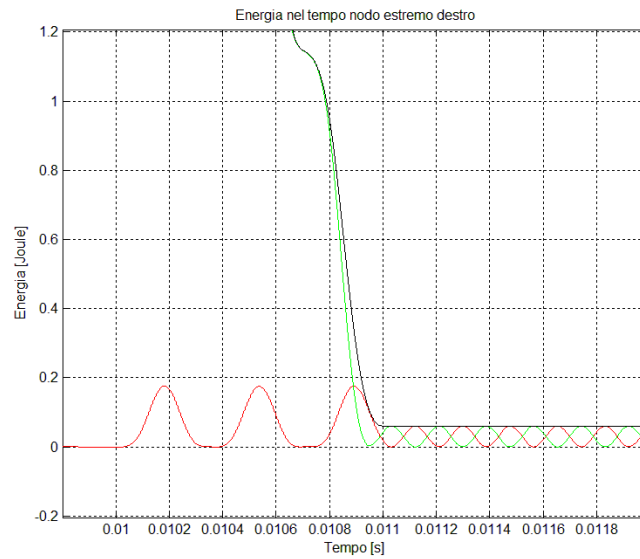


Fig 2.10 Dettaglio della zona finale del rilascio del carico

Analizzando il grafico delle energie si può notare come, nella zona di scarico della forza, l'andamento segua in modo perfetto la teoria della conservazione dell'energia meccanica (o totale), andando ad intercambiare i valori di energia potenziale e cinetica in modo tale per cui l'energia totale risulti sempre costante. Ciò ovviamente viene meno nel caso in cui si voglia inserire uno smorzamento che, come è ben noto dalla teoria, risulta essere un termine dissipativo per l'energia.

-Capitolo 3-

Come già accennato la peridinamica bond based soffre di alcune limitazioni nella sua formulazione, quali l'impossibilità di poter operare con un modulo di Poisson generale e la realizzazione di forze tra nodi peridinamici necessariamente allineate e di modulo uguale ed opposto. Queste caratteristiche portano, ad esempio, all'impossibilità di realizzare travi che prevedano la flessione.

Recentemente (Silling 2007) è stata presentata una formulazione più generale della peridinamica illustrata sinora, chiamata state based, la quale si prefigura il superamento di tali limitazioni e permette l'utilizzo della peridinamica bond based come una sua trattazione particolare.

Nel presente capitolo verrà introdotto un accenno generale alla peridinamica state atto a far comprendere la logica che conduce alla sua formulazione.

3.1 Considerazioni generali

Mentre nella peridinamica bond based la forza vista da un nodo di riferimento è dovuta all'interazione con un altro nodo unicamente tramite la deformazione del bond che li unisce, nella peridinamica state tale concetto viene ampliato mettendo in relazione tale forza con uno stato di deformazione complessivo in cui, ad un certo istante, viene a trovarsi rispetto alla configurazione di partenza.

Si ricorre all'utilizzo di due vettori di dimensione N (detti states) per rappresentare gli stati di deformazione e di forza.

Si consideri $\xi = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ il valore di distanza tra due nodi peridinamici, in cui \mathbf{x} è il nodo di riferimento (main) e \mathbf{x}' un nodo famiglia (family); mentre $\xi + \eta = \mathbf{y}' - \mathbf{y}$ è il valore che assume il bond ad un certo istante di deformazione.

Si può allora dire che il vettore posizione relativa ($\mathbf{y}' - \mathbf{y}$) può essere ottenuto applicando lo stato di deformazione \underline{Y} al vettore posizione iniziale ($\mathbf{x}' - \mathbf{x}$) tale per cui

$$(\mathbf{y}' - \mathbf{y}) = \underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}, t) \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle \quad (3.1)$$

nella quale le parentesi angolate indicano solamente il bond sul quale lo stato viene applicato. In modo analogo si può descrivere la forza che un punto x' esercita su x come

$$\mathbf{f} = \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle \quad (3.2)$$

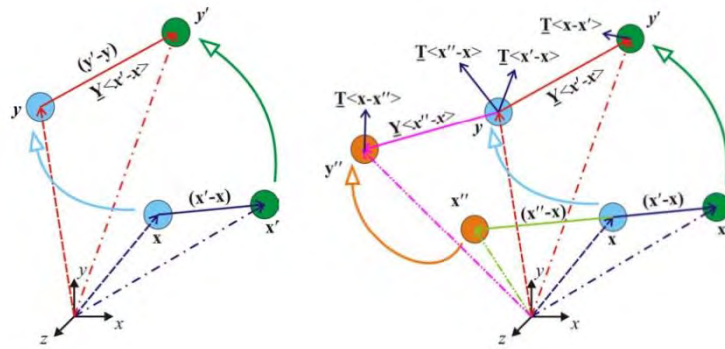


Fig 3.1 Rappresentazione degli stati di deformazione e di forza, [11]

Verrà ora analizzato il concetto di stato andando a considerare una funzione (continua o meno) $g(x)$ in un intervallo infinito.

Si discretizza la funzione nel suo intervallo di esistenza tale da ottenere un insieme di valori $g(x_i)$ per $i = 1 \dots \infty$.

Tali valori possono essere raggruppati in un vettore di dimensione infinita $\underline{\mathbf{G}}$ detto vettore di stato

$$\underline{\mathbf{G}} = \left\{ \begin{array}{c} g(x_1) \\ \dots \\ g(x_i) \\ \dots \\ g(x_\infty) \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

Gli stati possono essere descritti come una forma generale di tensori.

È possibile convertire un tensore in uno stato (espansione) e viceversa (riduzione).

Espansione

Si consideri un tensore del secondo ordine \mathbf{F} operante su un vettore $(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)$; il corrispondente vettore $(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k)$ sarà dato da

$$(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \quad (3.4)$$

I vettori risultanti possono essere inclusi in un vettore di stato $\underline{\mathbf{Y}}$ tale per cui

$$\underline{\mathbf{Y}} = \left\{ \begin{array}{c} (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_k) \\ \dots \\ (\mathbf{y}_\infty - \mathbf{y}_k) \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

Si noti come vi sia una relazione diretta tra vettore di stato e tensore; tale relazione viene detta espansione.

Riduzione

E' il procedimento che consente di passare da un vettore di stato ad un tensore.

Un vettore di stato $\underline{\mathbf{Y}}$ può essere ridotto ad un tensore del secondo ordine \mathbf{F} tale per cui

$$\mathbf{F} = (\underline{\mathbf{Y}} * \underline{\mathbf{X}}) \mathbf{K}^{-1} \quad (3.6)$$

in cui $\underline{\mathbf{X}}$ è il vettore di stato della posizione di riferimento, mentre \mathbf{K} è il tensore di forma

$$\underline{\mathbf{X}}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = \mathbf{x}' - \mathbf{x} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{K} = \underline{\mathbf{X}} * \underline{\mathbf{X}} \quad (3.8)$$

dove il prodotto tra vettori di stato è espresso come

$$\underline{\mathbf{Y}} * \underline{\mathbf{X}} = \int_H \underline{\omega}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \otimes \underline{\mathbf{X}}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) dH \quad (3.9)$$

H assume la classica notazione mentre ω rappresenta una funzione d'influenza chiamata stato scalare.

Da tali definizioni il tensore di forma si scrive come

$$\mathbf{K} = \int_H \underline{\omega}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \underline{\mathbf{X}}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \otimes \underline{\mathbf{X}}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) dH \quad (3.10)$$

mentre la funzione d'influenza viene definita da

$$\underline{\omega}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = \frac{\delta}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \quad (3.11)$$

Utilizzando il principio del lavoro virtuale [11] si ottiene l'equazione del moto per la peridinamica state based nella forma generale

$$\rho(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_H [\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle - \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}', t) \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle] dH + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad (3.12)$$

per la quale restano valide le considerazioni fatte sulle condizioni di carico e al contorno esposte nel capitolo 1.

Utilizzando tale formulazione si può dimostrare come la condizione di ammissibilità lineare sia automaticamente soddisfatta, mentre la condizione di ammissibilità angolare va verificata richiedendo che

$$\int_H [\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}, t) \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle \times \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}', t) \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle] dH = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

3.2 Peridinamica state, ordinaria e non ordinaria

A seconda che la forza tra due punti sia diretta lungo la congiungente o meno si può parlare di peridinamica state ordinaria o non ordinaria.

Prima di andare ad enunciare le due tipologie verrà fatto un accenno a come la teoria bond based possa essere ricavata dalla teoria generale presentata.

Bond based come caso particolare della state

Si consideri di essere nel caso particolare in cui il vettore di forza peridinamico tra due punti, in configurazione deformata, sia allineato alla congiungente tra i nodi con modulo uguale e direzione opposta, come mostrato in figura 3.2.

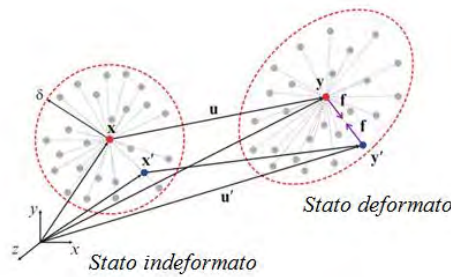


Fig 3.2 Deformazione di un orizzonte con pairwise force allineate e modulo uguale, [10]

Si scrivono i vettori di stato come

$$\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{2} C \frac{\mathbf{y}' - \mathbf{y}}{|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|} = \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}, t) \quad (3.14)$$

$$\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}', t) \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle = -\frac{1}{2} C \frac{\mathbf{y}' - \mathbf{y}}{|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|} = -\frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}, t) \quad (3.15)$$

in cui C è un parametro ausiliario che dipende dalle costanti ingegneristiche del materiale, dallo stretch tra i due nodi e dall'orizzonte. La particolare forma usata per descrivere il vettore di forza deriva dalle considerazioni fatte nella teoria bond based che qui vengono dettate come considerazioni particolari.

Andando a sostituire i vettori di stato ricavati in questo caso nell' equazione del moto del caso state si ottiene

$$\rho(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_H [\mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}, t)] dH + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad (3.16)$$

in cui \mathbf{f} è proprio la pairwise force function, con le proprietà già enunciate nei capitoli precedenti.

Peridinamica state ordinaria

Ci si pone nella stessa configurazione appena trattata, con l'unica differenza che ora il modulo del vettore di forza peridinamica risulta diverso nei due nodi considerati.

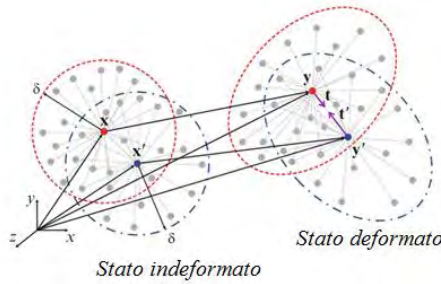


Fig 3.3 Deformazione di un orizzonte con pairwise force allineate e modulo diverso, [10]

Il vettore di stato per la forza si può allora scrivere come

$$\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{2} A \frac{\mathbf{y}' - \mathbf{y}}{|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|} \quad (3.17)$$

$$\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}', t) \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle = -\frac{1}{2} B \frac{\mathbf{y}' - \mathbf{y}}{|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|} \quad (3.18)$$

in cui A e B sono parametri ausiliari funzione delle costanti ingegneristiche del materiale, del campo di deformazione e dell'orizzonte.

Tali parametri possono essere ricavati dalla relazione che lega il vettore di stato della forza con l'energia di deformazione tramite le relazioni

$$\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle \approx \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial (|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|)} \frac{\mathbf{y}' - \mathbf{y}}{|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|} \quad (3.19)$$

$$\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}', t) \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle \approx \frac{\partial W(\mathbf{x}')}{\partial (|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|)} \frac{\mathbf{y} - \mathbf{y}'}{|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|} \quad (3.20)$$

Peridynamica state non ordinaria

Nella formulazione non ordinaria si cade nel caso più generale, in cui il vettore di forza peridynamica risulta, ai due nodi, non allineato e con modulo diverso. In questo caso si deve trovare una forma per il vettore di stato della forza tale per cui risulti verificata la condizione di ammissibilità angolare; condizione che nei casi precedenti era garantita dall'allineamento dei vettori.

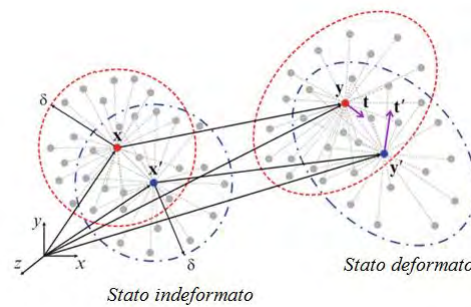


Fig 3.4 Deformazione di un orizzonte con pairwise force non allineate e modulo diverso, [10]

Seguendo la dimostrazione fatta in [9] si arriva alla determinazione del vettore di stato come

$$\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t)\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle = \underline{\mathbf{w}}\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle \mathbf{P} \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \quad (3.21)$$

in cui \mathbf{P} è il tensore degli stress di Piola-Kirchhoff.

Da tale relazione si può notare come il vettore di stato della forza venga correlato al gradiente di deformazione e al tensore degli stress calcolato nel caso della meccanica classica del continuo.

-Capitolo 4-

Nel presente capitolo verrà trattato l'argomento principale della ricerca di questa tesi, la quale si propone di analizzare il comportamento di un materiale al variare unicamente della forma della sua legge costitutiva e quindi al variare del comportamento che assume il bond in funzione dell'allungamento.

L'idea principale alla base di tale analisi consiste nel modificare unicamente la forma della legge costitutiva, mantenendo inalterata le caratteristiche macroscopiche del materiale e studiando uno stesso modello numerico sottoposto alle medesime condizioni al contorno e con uguale geometria. Ciò permette di evitare che i risultati possano essere influenzati dalla variazione di parametri diversi da quelli del tipo di legge costitutiva. Un tipico esempio sulla sensibilità della tipologia di frattura è stato riscontrato alla variazione dell'intensità del carico applicato [20, 21, 45, 46], il quale porta ad una morfologia del crack diversa al variare del modulo della tensione e del tempo di applicazione.

Nei prossimi paragrafi verranno trattate tre principali tipologie di leggi costitutive: lineare, bilineare e trilineare, per le quali verranno previsti dei sottoinsiemi dati dalla variazione di certi parametri caratteristici che saranno illustrati in seguito. La scelta di tali tipologie è stata attuata per i seguenti motivi: il modello lineare è generalmente il più utilizzato; questo ha permesso di recuperare in bibliografia un esempio di benchmark validato e utile a confermare la bontà del codice che è stato implementato, il quale costituisce il punto di partenza per le analisi successive. La tipologia bilineare è meno usata nelle simulazioni peridinamiche e non si è trovato un esempio dotato della stessa energia di frattura di una legge lineare ma soprattutto manca un confronto tra varie leggi costitutive al variare unicamente della loro forma.

Infine, la legge trilineare non è presente in simulazioni dettagliate se non come accenno alle possibili forme che può assumere la legge costitutiva; questa terza legge è tra le altre cose quella che presenta più parametri che possono essere variati e quindi potenzialmente la più interessante da studiare per capire quali elementi possono influenzare la tipologia di frattura.

4.1 Energia di frattura nel caso plane stress

Per poter confrontare il comportamento a rottura di uno stesso materiale al variare della forma della sua legge costitutiva, dove il fattore discriminante per il risultato debba essere unicamente tale variazione, oltre ad impostare uno stesso modello per tutti i casi con le stesse condizioni al contorno e stessa geometria è necessario ipotizzare che l'energia di frattura per unità di area sia la stessa per tutte le leggi costitutive prese in esame.

Consideriamo innanzitutto tre modelli generali di leggi costitutive da cui partire per la modellazione.

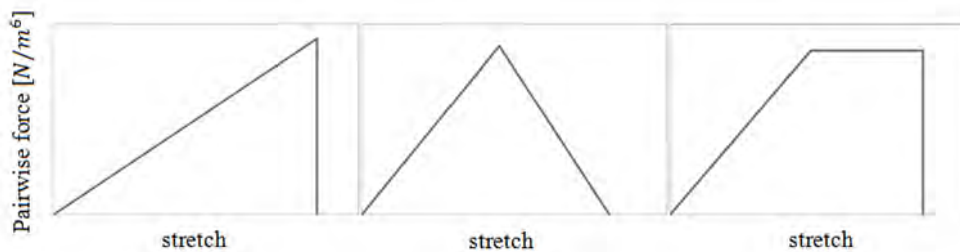


Fig 4.1 Esempio di tre modelli costitutivi, da sinistra a destra si ha rispettivamente la legge: lineare, bilineare e trilineare

Si consideri di essere nel caso 2D plane stress, per tale tipologia l'energia di frattura per unità di lunghezza può essere ricavata in letteratura da prove sperimentali o tramite formulazione analitica come:

$$G_{ic} = \frac{K_{ic}^2}{E} \quad (4.1)$$

Valida per il modo I di rottura; in cui K_{ic} risulta essere il fattore di intensificazione degli sforzi.

Dalla formulazione peridinamica generale dell'energia di frattura, valida nel caso tridimensionale si ottiene

$$G_{ic} = \int_0^\delta dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_z^\delta d\xi \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} d\phi \frac{c(\xi)s_0^2\xi}{2} \xi^2 \sin(\phi) \quad (4.2)$$

con simbologia in riferimento alla figura sottostante

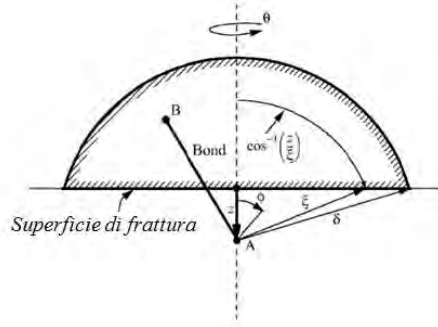


Fig 4.2 Parametri per il calcolo dell'energia di frattura, [36]

Si può ricavare l'integrale per il caso bidimensionale tramite

$$G_{ic} = 2t \int_0^\delta dz \int_z^\delta d\xi \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} d\phi \frac{c(\xi)s_0^2\xi}{2} \xi \quad (4.3)$$

in cui t rappresenta lo spessore della piastra.

Si assume il micromodulo di elasticità $c(\xi) = c$ (micromodulo di elasticità costante) nel caso di legge costitutiva lineare.

Come già mostrato nel capitolo 1 per un materiale PMB il modulo della pairwise force function può essere scritto come

$$f = cs = H \quad (4.4)$$

in cui lo stretch viene assunto uguale a

$$s = \frac{\eta}{\xi} \quad (4.5)$$

Sostituendo si ottiene la formulazione della funzione scalare H per un materiale PMB; si noti come per $s = s_0$ si ricada nella condizione di rottura.

$$H = c \frac{\eta}{\xi} \quad (4.6)$$

Si richiama ora la definizione di micropotenziale per un singolo bond che è legata in modo diretto all'energia di frattura, come già visto nei capitoli precedenti

$$\hat{w} = \int H d\eta = \int \frac{c\eta}{\xi} d\eta = \frac{c\eta^2}{2\xi} = \frac{cs^2\xi}{2} = (\text{Area sottesa})\xi \quad (4.7)$$

in cui *Area sottesa* è l'area sottesa alla curva della legge costitutiva considerata fino ad un valore $s \leq s_0$

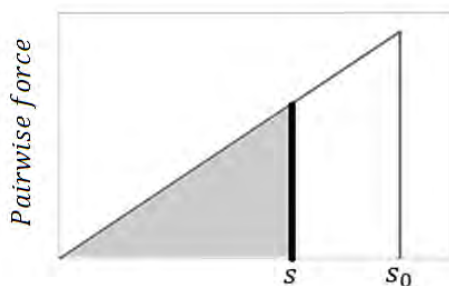


Fig 4.3 Area sottesa alla curva per uno stretch minore del valore massimo

Si nota quindi come vi sia una correlazione tra l'area della legge costitutiva e l'energia di frattura del materiale; questo porta a dover verificare che le aree delle leggi costitutive siano uguali per ogni tipologia impiegata nelle analisi che verranno effettuate.

Per prima cosa si andrà a risolvere l'integrale nel caso plane stress riportando i singoli passaggi effettuati e utilizzando il risultato ottenuto come verifica della correttezza della nostra ipotesi per le leggi bilineare e trilineare che dovranno essere ricavate successivamente.

Si sviluppa ora l'integrale nel caso 2D plane stress, precisando che lo svolgimento effettuato è lo stesso sia nel caso plane stress che nel caso plane strain, con un' unica differenza dovuta al valore assegnato al micromodulo (vedi Cap.1)

$$G_{ic} = 2t \int_0^\delta dz \int_z^\delta d\xi \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} d\phi \frac{c(\xi)s_0^2\xi}{2} \xi \quad (4.8)$$

$$G_{ic} = tcs_0^2 \int_0^\delta dz \int_z^\delta \xi^2 d\xi \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} d\phi \quad (4.9)$$

$$G_{ic} = tcs_0^2 \int_0^\delta dz \int_z^\delta \xi^2 \cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right) d\xi \quad (4.10)$$

Sviluppando il termine integrale in $d\xi$ si ha

$$\begin{aligned} & \int_z^\delta \xi^2 \cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right) d\xi = \\ & = \left\{ \frac{1}{3} \xi^3 \cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right) - \frac{1}{6} z \left[\xi^2 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\xi^2}} + z^2 \ln\left(\xi \sqrt{1 - \frac{z^2}{\xi^2}} + \xi\right) \right] \right\}_z^\delta = \\ & = B \end{aligned} \quad (4.11)$$

Svolgendo il calcolo sugli estremi di integrazione si ottiene

$$B = \frac{1}{3} \delta^3 \cos^{-1}\left(\frac{z}{\delta}\right) - \frac{1}{6} z \left[\delta^2 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + z^2 \ln\left(\delta \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + \delta\right) \right] + \frac{1}{6} z^4 \ln(z) \quad (4.12)$$

perciò

$$G_{ic} = tcs_0^2 \int_0^\delta B dz \quad (4.13)$$

Si sviluppa termine a termine l'integrale:

$$\frac{1}{3} \int_0^\delta \delta^3 \cos^{-1} \left(\frac{z}{\delta} \right) dz = C = \frac{1}{3} \delta^3 \left| z \cos^{-1} \left(\frac{z}{\delta} \right) - \delta \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} \right|_0^\delta \quad (4.14)$$

$$-\frac{1}{6} \int_0^\delta z \delta^2 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} dz = D = -\frac{1}{6} \delta^2 \left| -\frac{1}{3} (\delta - z)(\delta + z) \sqrt{\frac{\delta^2 - z^2}{\delta^2}} \right|_0^\delta \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{6} \int_0^\delta z^3 \ln(z) dz = E = \frac{1}{6} \left| \frac{1}{4} z^4 \ln(z) - \frac{1}{16} z^4 \right|_0^\delta \quad (4.16)$$

$$-\frac{1}{6} \int_0^\delta z^3 \ln \left[\delta \left(\sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + 1 \right) \right] dz = F \quad (4.17)$$

$$F = -\frac{1}{288} \left| 3\delta^4 - 4\delta^2 z^2 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} - 8\delta^4 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + 12\delta^4 \ln \left(\sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + 1 \right) \right. \\ \left. + 12(z^4 - \delta^4) \ln \left(\delta \left(\sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + 1 \right) \right) - 3z^4 \right|_0^\delta \quad (4.18)$$

Semplificando i termini si viene ad ottenere

$$\begin{aligned}
& |C + D + E + F|_0^\delta = \\
& = \left[\frac{1}{3} \delta^3 z c \cos^{-1} \left(\frac{z}{\delta} \right) - \frac{1}{3} \delta^4 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + \frac{1}{18} (\delta^4 - \delta^2 z^2) \sqrt{\frac{\delta^2 - z^2}{\delta^2}} \right. \\
& + \frac{1}{24} z^4 \ln(z) - \frac{1}{96} z^4 - \frac{1}{96} \delta^4 + \frac{1}{72} \delta^2 z^2 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + \frac{1}{36} \delta^4 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} \\
& - \frac{1}{24} \delta^4 \ln \left(\sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + 1 \right) \\
& - \frac{1}{24} z^4 \ln \left[\delta \left(\sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + 1 \right) \right] + \frac{1}{24} \delta^4 \ln \left[\delta \left(\sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + 1 \right) \right] \\
& \left. + \frac{1}{96} z^4 \right]_0^\delta
\end{aligned} \tag{4.19}$$

i quali conducono a

$$|C + D + E + F|_0^\delta = \frac{1}{4} \delta^4 \tag{4.20}$$

Perciò l'integrale risulta infine uguale a

$$G_{ic} = \frac{t c s_0^2 \delta^4}{4} \tag{4.21}$$

Dall'equazione (4.21) si può ricavare lo stretch limite nel caso di un materiale PMB come

$$s_0 = \sqrt{\frac{4G_{ic}}{t c \delta^4}} \tag{4.22}$$

Ricavata l'energia di frattura G_{ic} per il caso più noto e documentato è possibile ricavare tale energia anche per le altre leggi costitutive.

Nelle prossime pagine si dimostrerà come l'imposizione di un'area uguale per la legge costitutiva conduca ad un'energia di frattura uguale per tutti i casi e si vedrà come siano

sufficienti solamente due formulazioni generali, le quali al variare di alcuni parametri possono dare origine a tutte le tipologie di leggi costitutive prese in considerazione.

Si noter  nel seguito come la formula trovata per la legge bilineare sia dipendente da un rapporto tra determinati stretch caratteristici e come variando tale rapporto si possa ottenere anche la legge lineare; mentre per la legge trilineare tutti i casi possono essere ricavati variando tre tipologie di rapporto. Tuttavia per chiarezza nell'esposizione di seguito verranno presentate delle dimostrazioni che prendono in esame leggi costitutive trilineari particolari dalle quali di volta in volta si ricaveranno solo certi parametri imponendo gli altri noti; mentre nella dimostrazione finale verranno presi in considerazione unitamente tutti e tre i rapporti caratteristici permettendo di scrivere una legge generale per ogni caso.

Nello specifico si analizzeranno le leggi:

- Bilineare (che come gi  detto   un caso generale della lineare)
- Trilineare "brittle" in presenza di un plateau centrale
- Trilineare in presenza di un plateau centrale
- Trilineare "brittle" con pendenza nel tratto centrale
- Trilineare generale (che comprende in s  tutte le tipologie di leggi al variare dei rapporti adimensionali. N.B. nel seguito rapporti adimensionali e parametri adimensionali saranno usati come sinonimi)

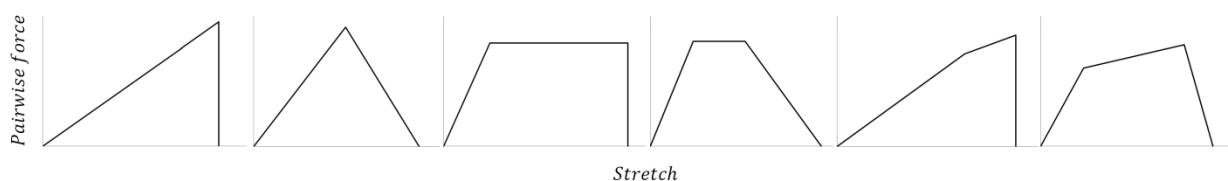


Fig 4.4 Tipologie di leggi costitutive analizzate. Da sinistra a destra: lineare, bilineare, trilineare brittle, trilineare in presenza di un plateau centrale, Trilineare brittle con pendenza nel tratto centrale e Trilineare generale

Nel seguito ci si servir  della definizione di micropotenziale, del suo legame con l'energia di frattura e all'area sottesa alla curva che definisce la tipologia di legge costitutiva; da tale legame verr  ricavata l'energia di frattura per ogni legge costitutiva e si dimostrer  come tale energia sia uguale per tutti i casi scelti. Una volta ricavate le equazioni si   provveduto alla

creazione di un file excel per permettere sia di verificare l'effettiva uguaglianza tra le aree, sia la generazione di varie forme per le date tipologie di leggi costitutive, andando a modificare unicamente i parametri adimensionali ricavati.

Legge costitutiva bilineare

Per sviluppare tale legge si è preso spunto dal lavoro svolto in [31] ricorrendo ad un rapporto adimensionale k_r come illustrato in seguito.

Si consideri una legge bilineare avente stretch massimo a rottura s_0 e punto di “scollinamento” s_p , al quale corrisponde il picco massimo di forza ottenuto tramite la nota formula $f = cs_p$, con c micromodulo.

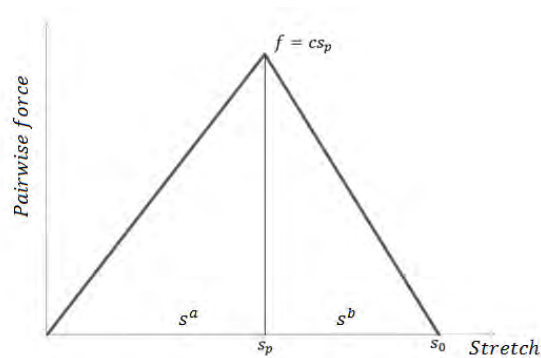


Fig 4.5 Parametri utilizzati per la formulazione della legge bilineare

$$k_r = \frac{s_0}{s_p} \geq 1; \quad s^a = \frac{\eta^a}{\xi}; \quad s^b = \frac{\eta^b}{\xi} \quad (4.23)$$

In cui: $s^a \leq s_p$ e η^a è il vettore posizione relativa per il tratto da 0 a s_p .

$s^b \leq (s_0 - s_p)$ e η^b è il vettore posizione relativa per il tratto da s_p a s_0 .

c = micromodulo elastico. Rappresenta la pendenza del primo tratto lineare.

Si consideri il primo tratto della curva fino a s_p ; dalle equazioni della peridinamica si può scrivere

$$H^a = c s^a \quad (4.24)$$

$$\hat{w}^a = \int H^a d\eta^a = \frac{c s^{a^2} \xi}{2} \quad (4.25)$$

Per $s^a = s_p$ si ricade nel caso di micropotenziale massimo per il tratto in esame

$$\hat{w}^a_{max} = \frac{c s_p^2 \xi}{2} \quad (4.26)$$

Si prenda in considerazione ora il secondo tratto da s_p a s_0 e utilizzando la formula dell'equazione di una retta passante per due punti si ha

$$H^b = -\frac{c s_p}{(s_0 - s_p)} s^b + c s_p \quad (4.27)$$

$$\hat{w}^b = \int H^b d\eta^b = \int -\frac{c s_p}{(s_0 - s_p)} \frac{\eta^b}{\xi} d\eta^b + \int c s_p d\eta^b \quad (4.28)$$

Risolvendo l'integrale si ottiene

$$\hat{w}^b = -\frac{c s_p}{2(s_0 - s_p)\xi} \eta^{b^2} + c s_p \eta^b \quad (4.29)$$

Sostituendo $\eta^b = s^b \xi$ si ha

$$\hat{w}^b = -\frac{c s_p}{2(s_0 - s_p)} s^{b^2} \xi + c s_p s^b \xi \quad (4.30)$$

Consideriamo ora la condizione di micropotenziale massimo per il tratto in esame, in tal caso si può scrivere

$$\hat{w}^b_{max} = -\frac{c s_p}{2(s_0 - s_p)} (s_0 - s_p)^2 \xi + c s_p (s_0 - s_p) \xi = \frac{c s_p (s_0 - s_p)}{2} \xi \quad (4.31)$$

Si consideri il micropotenziale totale massimo di tutta la legge costitutiva come

$$\widehat{w}_{max} = \widehat{w}_{max}^a + \widehat{w}_{max}^b \quad (4.32)$$

da cui si ottiene

$$\widehat{w}_{max} = \left[\frac{cs_p^2}{2} + \frac{cs_p(s_0 - s_p)}{2} \right] \xi \quad (4.33)$$

Si può notare come i termini tra parentesi non siano altro che le aree dei rispettivi tratti d'interesse e come la loro somma sia l'area totale sottesa dalla curva che costituisce la legge bilineare.

Dalla definizione di energia di frattura per unità di area nel caso bidimensionale si ha

$$G_{ic} = 2tcs_0^2 \int_0^\delta dz \int_z^\delta d\xi \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} \widehat{w}_{max} d\phi \quad (4.34)$$

Si noti come il primo termine di \widehat{w}_{max} sia analogo al caso lineare, quindi la soluzione dell'integrale è già stata svolta; anche il secondo termine non necessita di ulteriori passaggi in quanto l'unico parametro variabile è ξ (si è già notato come, anche nel caso lineare, l'integrale dipenda solo da ξ , mentre il termine che rappresenta l'area sottesa dalla curva venga portato fuori dall'integrale stesso. Tale caratteristica si vedrà essere presente in tutte le leggi studiate).

Dividendo l'integrale nelle due zone (prima pendenza e seconda pendenza) si può pervenire alla scrittura dell'energia di frattura come

$$G_{ic} = G_{ic}^a + G_{ic}^b \quad (4.35)$$

in cui come detto

$$G_{ic}^a = \frac{tcs_p^2 \delta^4}{4} \quad (4.36)$$

mentre per quanto esposto sopra

$$G_{ic}^b = \frac{\delta^4}{4} tc s_p (s_0 - s_p) \quad (4.37)$$

Perciò l'energia di frattura totale risulta

$$G_{ic} = \frac{\delta^4}{4} tc s_p s_0 \quad (4.38)$$

che è riconducibile al caso lineare in cui si impone $s_p = s_0$ o ugualmente $kr = 1$.

Utilizzando il parametro adimensionale kr è possibile riscrivere l'equazione rendendola funzione di una sola variabile (s_p o s_0), una volta scelto il valore di kr .

Quindi andando a sostituire la definizione del parametro adimensionale nell'energia di frattura si ottiene

$$G_{ic} = \frac{\delta^4}{4} tc s_p^2 k_r \quad (4.39)$$

da cui si ricava

$$s_p = \sqrt{\frac{4G_{ic}}{\delta^4 tc (k_r)}} \quad (4.40)$$

Scelto kr e ricavato s_p si ricava facilmente s_0 come

$$s_0 = s_p k_r \quad (4.41)$$

Infine si può ottenere il valore del massimo modulo della pairwise force, noto il micromodulo elastico

$$f = c s_p \quad (4.42)$$

Iniziamo a trattare le leggi costitutive trilineari ricavando i parametri per forme via via più complesse fino ad arrivare alla formulazione più generale di una legge costitutiva trilineare.

Legge costitutiva trilineare “brittle” in presenza di un plateau centrale

Utilizzando il processo logico con cui si è svolto il calcolo della legge bilineare si va a suddividere il dominio in due parti convenienti per il calcolo degli integrali, come mostrato in figura 4.6, con i termini aventi significato analogo al caso precedente.

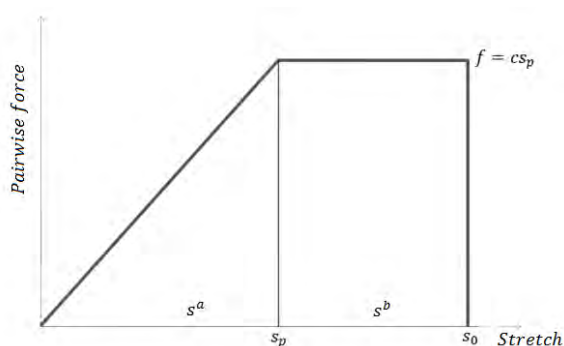


Fig 4.6 Parametri utilizzati per la formulazione della legge trilineare “brittle” in presenza di plateau centrale

$$k_r = \frac{s_0}{s_p} \geq 1; \quad s^a = \frac{\eta^a}{\xi}; \quad s^b = \frac{\eta^b}{\xi} \quad (4.43)$$

In cui: $s^a \leq s_p$ e η^a è il vettore posizione relativa per il tratto da 0 a s_p .

$s^b \leq (s_0 - s_p)$ e η^b è il vettore posizione relativa per il tratto da s_p a s_0 .

c = micromodulo elastico. Rappresenta la pendenza del primo tratto lineare.

Si nota immediatamente come il primo tratto fino a s_p sia lo stesso dei casi precedenti, perciò si può immediatamente concludere che

$$\hat{w}^I_{max} = \frac{c s_p^2 \xi}{2} \quad (4.44)$$

Si va ora ad analizzare il tratto compreso tra s_p e s_0

$$H^b = cs_p = cs_0 \quad (4.45)$$

$$\hat{w}^b = \int H^b d\eta^b = cs_p s^b \xi \quad (4.46)$$

dunque

$$\hat{w}^b_{max} = cs_p(s_0 - s_p)\xi \quad (4.47)$$

Anche in questo caso si ha

$$\hat{w}_{max} = \hat{w}^a_{max} + \hat{w}^b_{max} \quad (4.48)$$

$$\hat{w}_{max} = \left(cs_p s_0 - \frac{1}{2} cs_p^2 \right) \xi \quad (4.49)$$

$$G_{ic} = G_{ic}^a + G_{ic}^b \quad (4.50)$$

Inoltre svolgendo gli integrali come già fatto e considerando la dipendenza solo da ξ si può scrivere facilmente

$$G_{ic} = \frac{\delta^4}{2} ct s_p \left(s_0 - \frac{s_p}{2} \right) \quad (4.51)$$

che risulta analogo al caso lineare se si va ad imporre $s_p = s_0$ o ugualmente $k_r = 1$.

Sostituendo come nel caso precedente $s_0 = k_r s_p$ si ottiene la funzione energia di frattura dipendente unicamente dal punto di “scollinamento” s_p e dal k_r scelto

$$G_{ic} = \frac{\delta^4}{4} t c s_p^2 (2k_r - 1) \quad (4.52)$$

dalla quale, noto il micromodulo, si può ricavare

$$s_p = \sqrt{\frac{4G_{ic}}{\delta^4 t c (2k_r - 1)}} \quad (4.53)$$

I dati mancanti si possono ricavare noti c e k_r .

Legge costitutiva trilineare in presenza di un plateau centrale

Analizzando il seguente caso si andrà ad introdurre un ulteriore parametro adimensionale analogo al kr già presentato e lo nomineremo k_s , cioè il rapporto tra lo stretch massimo a rottura s_0 e un secondo punto di “scollinamento” chiamato s_s .

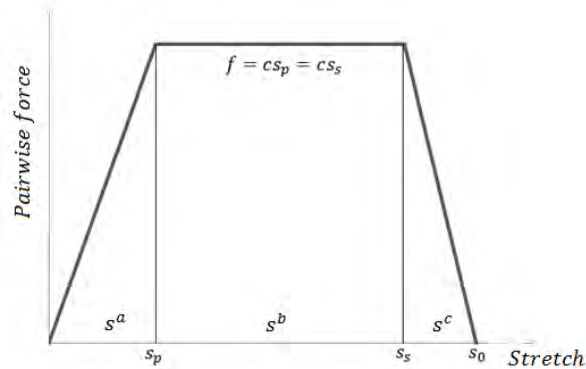


Fig 4.7 Parametri utilizzati per la formulazione della legge trilineare in presenza di plateau centrale

$$k_r = \frac{s_0}{s_p} \geq 1; \quad k_s = \frac{s_0}{s_s} \geq 1 \quad s^a = \frac{\eta^a}{\xi}; \quad s^b = \frac{\eta^b}{\xi}; \quad s^c = \frac{\eta^c}{\xi}; \quad k_r \geq k_s \quad (4.54)$$

In cui: $s^a \leq s_p$ e η^a è il vettore posizione relativa per il tratto da 0 a s_p .

$s^b \leq (s_s - s_p)$ e η^b è il vettore posizione relativa per il tratto da s_p a s_s .

$s^c \leq (s_0 - s_s)$ e η^c è il vettore posizione relativa per il tratto da s_s a s_0 .

c = micromodulo elastico. Rappresenta la pendenza del primo tratto lineare.

Si può notare come il primo tratto (a) e il secondo tratto (b) siano analoghi al caso precedente, a cui va sostituita la nuova nomenclatura. L'ultimo tratto (c), invece, è analogo al tratto finale della legge bilineare.

Da ciò risulta naturale scrivere

$$H^a = cS^a; \quad H^b = cS_p = cS_s; \quad H^c = -\frac{cS_s}{(s_0 - s_s)} s^c + cS_s \quad (4.55)$$

quindi

$$\hat{w}^a = \frac{cS^a{}^2\xi}{2}; \quad \hat{w}^b = cS_p s^b \xi; \quad \hat{w}^c = \frac{cS_s s^c}{2} \xi \quad (4.56)$$

Se ci si pone nel caso di massimo micropotenziale si ottiene

$$\hat{w}^a_{max} = \frac{cS_p{}^2\xi}{2}; \quad \hat{w}^b_{max} = cS_p(s_s - s_p)\xi; \quad \hat{w}^c_{max} = \frac{cS_s(s_0 - s_s)}{2}\xi \quad (4.57)$$

da cui si può notare come i termini diversi da ξ siano ancora una volta le aree delle sezioni che compongono l'area sottesa dalla curva.

Il micropotenziale totale massimo risulta

$$\hat{w}_{max} = \hat{w}^a_{max} + \hat{w}^b_{max} + \hat{w}^c_{max} \quad (4.58)$$

Come nei casi precedenti l'energia di frattura dipende solo da ξ perciò possiamo scrivere

$$G_{ic} = \frac{\delta^4}{2} tS_p \left[\frac{cS_p{}^2}{2} + cS_p(s_s - s_p) + \frac{cS_s(s_0 - s_s)}{2} \right] \quad (4.59)$$

Si noti come per $s_p = s_s = s_0$ o ugualmente $k_r = k_s = 1$, si ricada nel caso lineare.

Si vanno a sostituire le definizioni dei rapporti adimensionali k_r e k_s in modo tale da ottenere un'energia di frattura dipendente solo da s_p

$$G_{ic} = \frac{\delta^4}{4} ct s_p^2 \left(\frac{k_r}{k_s} - 1 + k_r \right) \quad (4.60)$$

da cui risulta

$$s_p = \sqrt{\frac{4G_{ic}}{\delta^4 tc \left(\frac{k_r}{k_s} - 1 + k_r \right)}} \quad (4.61)$$

dalla quale si possono ricavare f, s_s, s_0 noti c, k_r, k_s .

Si ottiene quindi una legge costitutiva che varia forma a seconda dei valori k_r e k_s scelti, ma che mantiene costante la sua area e quindi come dimostrato anche la sua energia di frattura.

Legge costitutiva trilineare “brittle” con pendenza nel tratto centrale

Il caso si presenta analogo a quello lineare con l’inserimento di una seconda pendenza agente da un certo punto di “scollinamento” in poi. Di seguito verrà introdotto un nuovo rapporto adimensionale (k_f) che si prefigura di descrivere il secondo tratto pendente.

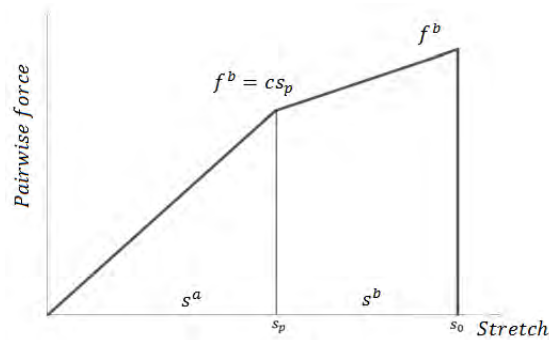


Fig 4.8 Parametri utilizzati per la formulazione della legge trilineare “brittle” con pendenza centrale

$$k_r = \frac{s_0}{s_p} \geq 1; \quad k_f = \frac{f^b}{f^a} \quad s^a = \frac{\eta^l}{\xi}; \quad s^b = \frac{\eta^b}{\xi} \quad f^b = k_f(c s_p) \quad (4.62)$$

In cui: $s^a \leq s_p$ e η^a è il vettore posizione relativa per il tratto da 0 a s_p .

$s^b \leq (s_s - s_p)$ e η^b è il vettore posizione relativa per il tratto da s_p a s_s .

f^b è il valore del modulo della pairwise force nel punto s_0 e c' è il micromodulo del secondo tratto pendente.

c = micromodulo elastico. Rappresenta la pendenza del primo tratto lineare.

Il primo tratto (a) è analogo ad una legge lineare in cui $s_p = s_0$, perciò

$$H^a = c s^a \hat{w}^a = \frac{c s^{a^2} \xi}{2} \quad (4.63)$$

$$\hat{w}^a_{max} = \frac{c s_p^2 \xi}{2} \quad (4.64)$$

Il secondo tratto (b) può essere immaginato come un rettangolo sulla cui base superiore è posto un triangolo. Si consideri per un momento il rapporto $k = c'/c$; si può allora scrivere

$$H^b = k c s^b + c s_p \quad (4.65)$$

$$\hat{w}^b = \int H^b d\eta^b = \frac{k c s^{b^2}}{2} \xi + c s_p s^b \xi \quad (4.66)$$

$$\hat{w}^b_{max} = \frac{k c (s_0 - s_p)(s_0 - s_p)}{2} \xi + c s_p (s_0 - s_p) \xi \quad (4.67)$$

Si noti come $k c (s_0 - s_p)$ non sia altro che l'altezza del triangolo rettangolo e quindi in riferimento alla definizione di k_f si può scrivere

$$k c (s_0 - s_p) = (k_f c s_p - c s_p) \quad (4.68)$$

Sostituendo si ottiene

$$\widehat{w}_{max}^b = \left[\frac{(k_f c s_p - c s_p)(s_0 - s_p)}{2} + c s_p (s_0 - s_p) \right] \xi \quad (4.69)$$

che rappresenta l'area del triangolo più l'area del rettangolo presi in esame e moltiplicati per ξ .

Come già visto si scrive ora

$$\widehat{w}_{max} = \widehat{w}_{max}^a + \widehat{w}_{max}^b \quad (4.70)$$

Ancora una volta l'energia di frattura ha come unica variabile ξ , quindi l'integrale è sempre l'area sottesa dalla curva moltiplicata per ξ come nei casi precedenti e cioè aree sottese dalla legge costitutiva uguali implicano anche in questo caso energia di frattura uguale.

Svolgendo l'integrale come già fatto e sostituendo i rapporti adimensionali si ottiene

$$G_{ic} = \frac{\delta^4}{2} t s_p \left[\frac{c s_p^2}{2} ((k_f - 1)(k_r - 1) + 1) + c s_p^2 (k_r - 1) \right] \quad (4.71)$$

da cui si ricava

$$s_p = \sqrt{\frac{4G_{ic}}{\delta^4 c t [(k_f - 1)(k_r - 1) + 1 + 2(k_r - 1)]}} \quad (4.72)$$

Quindi, come visto in precedenza, si possono ricavare successivamente tutti i parametri necessari alla definizione della legge costitutiva.

Legge costitutiva trilineare generale

Si introduce ora la legge trilineare più generale, la quale comprende in sé tutte le caratteristiche finora presentate. Tutte le leggi trilineari precedentemente trattate possono essere costruite utilizzando questa, adattandone adeguatamente i parametri adimensionali.

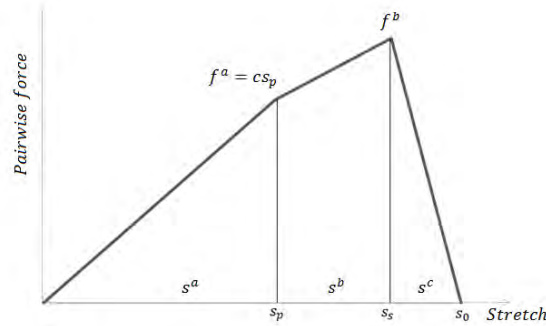


Fig 4.9 Parametri utilizzati per la formulazione della legge trilineare generale

$$k_r = \frac{s_0}{s_p} \geq 1; \quad k_s = \frac{s_0}{s_s} \geq 1; \quad k_f = \frac{f^b}{f^a}; \quad s^a = \frac{\eta^a}{\xi}; \quad s^b = \frac{\eta^b}{\xi}; \quad s^c = \frac{\eta^c}{\xi}; \quad (4.73)$$

$$k_r \geq k_s; \quad f^b = k_f(c s_p); \quad f^b \leq c s_b$$

In cui: $s^a \leq s_p$ e η^a è il vettore posizione relativa per il tratto da 0 a s_p .

$s^b \leq (s_s - s_p)$ e η^b è il vettore posizione relativa per il tratto da s_p a s_s .

$s^c \leq (s_0 - s_s)$ e η^c è il vettore posizione relativa per il tratto da s_s a s_0 .

f^b è il valore del modulo della pairwise force nel punto s_0 e c' è il micromodulo del secondo tratto pendente.

c = micromodulo elastico. Rappresenta la pendenza del primo tratto lineare.

E' immediato notare come la legge sia costituita da un tratto (a) e (b) trilineare brittle con pendenza centrale e da un tratto (c) simile all'ultimo tratto della legge bilineare. Tali analogie permettono di utilizzare i micropotenziali per i tratti in esame già ricavati precedentemente e quindi di scrivere (ricordando che $k = c'/c$)

$$\hat{w}^a = \frac{cs^{a^2}\xi}{2}; \quad \hat{w}^b = \frac{kcs^{b^2}}{2}\xi + cs_p s^b \xi; \quad \hat{w}^c = \frac{k_f cs^c s_p}{2}\xi \quad (4.74)$$

Andando a sostituire

$$kc(s_s - s_p) = (k_f cs_p - cs_p) \quad (4.75)$$

e imponendo la condizione di massimo si ottiene

$$\hat{w}^a_{max} = \frac{cs_p^2 \xi}{2}; \quad \hat{w}^b_{max} = \frac{(k_f cs_p - cs_p)(s_s - s_p)}{2}\xi + cs_p(s_s - s_p)\xi \quad (4.76)$$

$$\hat{w}^c_{max} = \frac{k_f c(s_s - s_p)s_p}{2}\xi$$

Dato che

$$\hat{w}_{max} = \hat{w}^a_{max} + \hat{w}^b_{max} + \hat{w}^c_{max} \quad (4.77)$$

e utilizzando le considerazioni fatte precedentemente si può scrivere

$$G_{ic} = \frac{\delta^4}{4} tcs_p^2 \left[1 + 2\left(\frac{k_r}{k_s} - 1\right) + \left(\frac{k_r}{k_s} - 1\right)(k_f - 1) + k_f \left(k_r - \frac{k_r}{k_s}\right) \right] \quad (4.78)$$

Sempre per mezzo della considerazione di aree uguali e notando ancora una volta che l'energia di frattura ha come unica variabile ξ , si dimostra che ad aree uguali corrisponde uguale energia di frattura.

Dall'equazione precedente si ricava

$$s_p = \sqrt{\frac{4G_{ic}}{\delta^4 ct \left[1 + 2\left(\frac{k_r}{k_s} - 1\right) + \left(\frac{k_r}{k_s} - 1\right)(k_f - 1) + k_f \left(k_r - \frac{k_r}{k_s}\right) \right]}} \quad (4.79)$$

che come già visto consente di ottenere tutti i parametri necessari alla definizione della legge costitutiva.

4.2 Considerazioni sulla frattura ed il fenomeno di branching

In questo paragrafo verranno esposti brevemente dei concetti utili alla comprensione della modalità di frattura in un materiale e delle meccaniche che permettono al branching di presentarsi.

Nel corso degli anni sono stati presentati numerosi criteri nel tentativo di spiegare come nasce e si propaga una cricca instabile all'interno del materiale. Uno dei più noti è il criterio energetico; tale criterio asserisce che l'energia (Γ) richiesta per generare un' area unitaria di superficie di frattura, deve essere uguale all'energia elastica (G) rilasciata dal corpo (energy release rate) per giungere alla nuova configurazione deformata. Tale criterio per una frattura quasi-statica si può scrivere come

$$G = \Gamma \quad (4.80)$$

Per un corpo lineare elastico l'energy release rate può essere calcolata come una funzione del fattore di intensificazione degli sforzi (K) e del suo modulo elastico (E) tale per cui

$$G = \frac{K^2}{E} \quad (4.81)$$

in cui K è stata calcolata per varie configurazioni del modello geometrico e del carico applicato.

Quando all'apice della cricca si ha un valore di $K = K_{IC}$ (in cui è stato considerato il modo I di frattura) si ha che $G = \Gamma$, perciò la cricca inizia a propagarsi nel materiale e se le condizioni di carico non cambiano, la frattura si arresta.

$$G = \frac{K_{IC}^2}{E} = \Gamma \quad (4.82)$$

Tuttavia l'ipotesi di un carico quasi-statico può risultare restrittiva, infatti al di sopra di un certo rate di carico variabile nel tempo vi è un alterazione del valore di K_{IC} [19].

Tramite analisi sperimentali è stata dimostrata la correlazione tra il tipo di frattura e la morfologia che essa assume al propagarsi nel materiale. Senza entrare eccessivamente nel merito si è potuto notare come generalmente la cricca principale assuma via via una morfologia più rugosa all'avvicinarsi del punto in cui inizierà poi il branching; tramite studi microscopici ed utilizzando riprese ad elevata frequenza si è notato come di fronte al percorso di frattura si vada a generare una forte tensione con conseguente comparsa di una serie di microfratture. Tali microfratture appaiono dapprima in modo casuale, per poi unirsi seguendo la direzione della frattura principale. Il fenomeno aumenta man mano che la cricca procede con velocità crescente, generando una zona danneggiata sempre più ampia, finché al raggiungimento di una determinata velocità critica si inizia ad avere il fenomeno del branching.

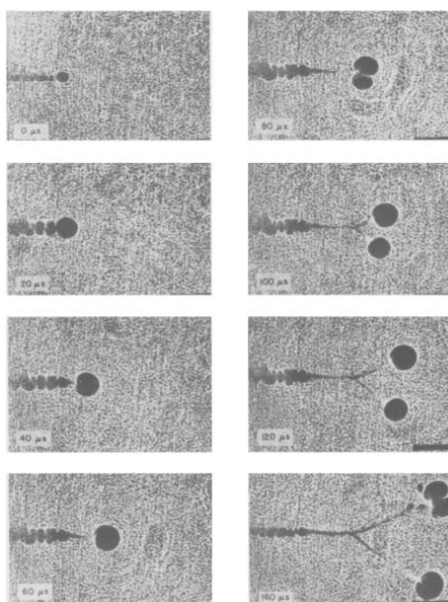


Fig 4.10 Ripresa ad elevata velocità della generazione del branching. Tempi crescenti dall'alto verso il basso e da sinistra verso destra, [21]

La velocità massima raggiungibile dalla frattura è dettata dalla velocità di Rayleigh v_r , la quale tuttavia risulta molto più alta di quella trovata sperimentalmente.

$$\frac{v_r}{v_2} \approx \frac{0.87 + 1.12\nu}{1 + \nu} \quad (4.83)$$

in cui v_r è la velocità di Rayleigh, ν è il coefficiente di Poisson e v_2 è la velocità dell'onda di taglio definita come

$$v_2 = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (4.84)$$

dove T è il modulo di taglio e ρ è la densità del materiale.

La limitazione alla teoria deriva proprio dall'insorgere del branching. Tale discrepanza è spiegata dal fatto che l'energia di frattura assunta costante in realtà varia al variare della velocità (sotto opportune ipotesi), tale per cui

$$\Gamma \approx G(l) \left(1 - \frac{v}{v_r}\right) \quad (4.85)$$

in cui l è la lunghezza istantanea della cricca, $G(l)$ è l'energia per unità di area presente all'apice della cricca, mentre v è la velocità di propagazione della cricca.

Sperimentalmente uno dei motivi del limite alla velocità massima risiede proprio nella formazione di microcracks innanzi alla cricca che richiedono più tempo per la loro formazione e unione al fine di proseguire il percorso rispetto ad una cricca perfettamente rettilinea; questo effetto diventa più rilevante se si pensa alla tridimensionalità in cui tali fratture possono generarsi.

Anche per il branching sono stati proposti vari modelli matematici al fine di spiegare il fenomeno; tuttavia ogni teoria proposta presenta delle incongruenze a livello pratico. Ancora una volta sono state utilizzate analisi sperimentali al fine di capire il meccanismo per cui compare il branching. Alcune considerazioni riportate in [21] sono:

1. E' il risultato dell'interazione con microcracks in fronte alla cricca.

2. Solo poche di queste microfratture crescono di dimensione, mentre le altre si arrestano.
3. Il branching cresce da microcracks parallele alla direzione della cricca principale ma poi devia da essa.
4. Le microfratture non attraversano completamente lo spessore della piastra, alcune sono interne.

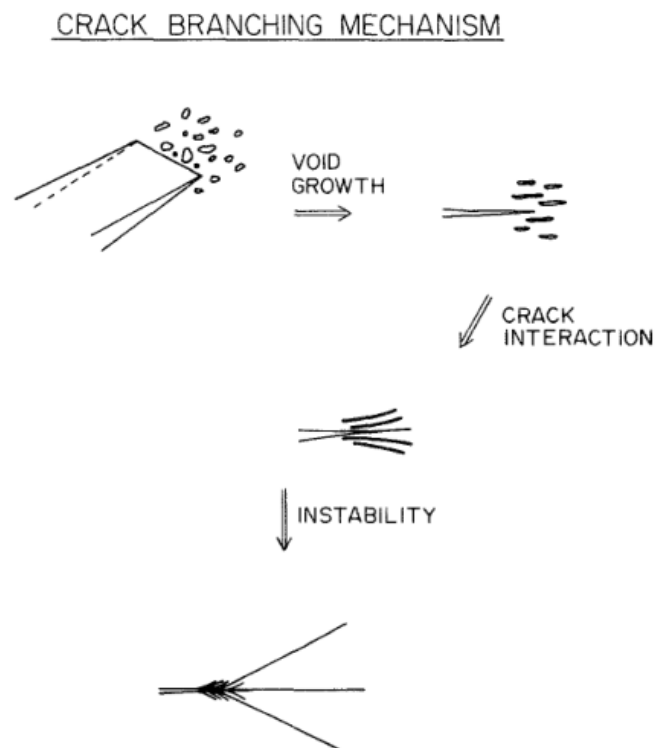


Fig 4.11 Rappresentazione del fenomeno fisico della generazione del branching, [21]

4.3 Modello numerico analizzato

Come già accennato verrà utilizzato un unico modello, con proprietà geometriche, fisiche e al contorno uguali per tutte le leggi costitutive che saranno analizzate, al fine di limitare gli effetti introdotti dalla variazione di tali parametri. L'unica eccezione riguarda la convergenza; infatti verranno costruiti tre modelli: uno da 4000 nodi (coarse) e in seguito, utilizzando il

criterio della δ -convergenza e dell' m -convergenza, altri due da 16000 nodi (refined- δ , refined- m) al fine di ottenere risultati maggiormente raffinati come dimostrato in [45]. Il modello che verrà preso in esame è spesso utilizzato negli articoli di peridinamica, in quanto già validato sotto vari aspetti e del quale è presente una trattazione esaustiva con legge lineare, tale per cui possa essere considerato come modello benchmark sia per verificare la bontà del codice sviluppato con la medesima legge, sia perchè presenta frattura lineare e branching; ciò consente di fare considerazioni su entrambi questi aspetti.

Si consideri una piastra rettangolare con lunghezza $l = 0.1 [m]$ e altezza $h = 0.04 [m]$ incisa mediante una pre-cricca ad una quota pari a $0.02 [m]$ fino ad una estensione di $0.05 [m]$ e caricata sulle due basi con una tensione uniforme σ applicata come una funzione a gradino. Il materiale di tale modello è il vetro Duran 50.

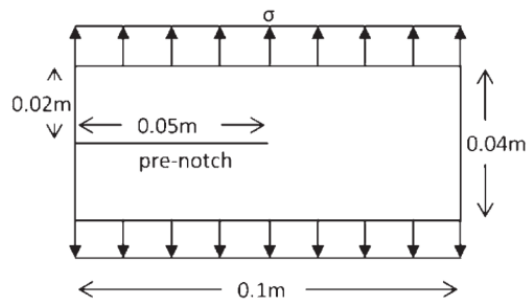


Fig 4.12 Quote piastra Durang 50 glass, [44]

Le proprietà del materiale sono riportate nella tabella sottostante in cui vanno precisati due aspetti:

1. Il modulo di Poisson è quello del materiale reale e ci si deve ricordare in fase di analisi peridinamica che va posto uguale ad $1/3$ nel caso di modello plane stress o $1/4$ nel caso plane strain.
2. Si è già visto come l'energia di frattura vari al variare della velocità di propagazione della cricca, tuttavia per semplicità in tale modello è considerata costante e pari a quella che si registra all'istante in cui avviene il branching.

Materiale	Densità [Kg/m ³]	Modulo elastico [GPa]	Modulo di Poisson	Energia di frattura [J/m ²]	Tensione applicata [MPa]
Duran 50	2235	65	0.2	204	12

Tabella 4.1 caratteristiche Duran 50 e tensione applicata, [44]

Si illustrano ora le caratteristiche dei modelli realizzati in Matlab.

Come già accennato si hanno due densità di mesh, una a 4000 nodi e una a 16000 nodi derivante dalla prova di δ -convergenza ed m -convergenza.

	m	δ [m]	Δx [m]	Δt [s]	Max nodi in orizzonte
4k nodi	3	0.003	0.001	$36.8e^{-9}$	29
16k nodi δ -conv.	3	0.0015	0.0005	$36.8e^{-9}$	29
16k nodi m -conv.	6	0.003	0.0005	$36.8e^{-9}$	113

Tabella 4.2 parametri dei modelli realizzati in Matlab

Si noti come il Δt utilizzato sia uguale per tutti i modelli; tale motivazione va ricercata nel valore del coefficiente β_{safe} della formula (vedi Cap.2)

$$\Delta t = \beta_{safe} \Delta t_c \quad (4.86)$$

che è stato preso uguale a $\beta_{safe} = 0.2$ tale per cui risulti uno step temporale sufficientemente basso per tutti i casi esposti. Per confermare quanto detto sono state fatte varie prove confrontando il Δt preso in esame con un Δt più basso e pari a $25e^{-9}$ s riscontrando in tutti i casi gli stessi valori di output.

Tutti i modelli sono stati analizzati per un un tempo massimo pari a $46 \mu s$, ciò implica un numero di step d'integrazione uguali a 1250.

La dicitura “Max nodi in orizzonte” sta ad indicare il numero massimo di nodi visti da un nodo main all'interno del suo orizzonte (compreso se stesso), il termine max si rende necessario in quanto vicino ai bordi tale numero si riduce a causa della discontinuità del

materiale. Tale effetto verrà compensato utilizzando il coefficiente correttivo (β) per il volume, detto *fattore di riduzione volumetrica*.

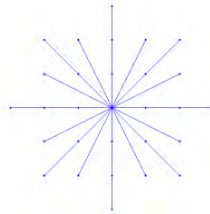


Fig 4.13 Numero massimo di bond appartenenti ad un nodo main

Un altro accorgimento che deve essere preso in considerazione, dovuto alla discontinuità del materiale sui bordi del dominio di integrazione, è il softening. Come già illustrato vi sono due modalità per integrare tale fenomeno: utilizzando la formula di Kebing Yu [23] dalla quale si ottiene il termine correttivo β_s oppure considerando di applicare una serie di forze equivalenti ai volumetti che competono tutti i nodi ad un δ di profondità rispetto al bordo dove è applicata la tensione.

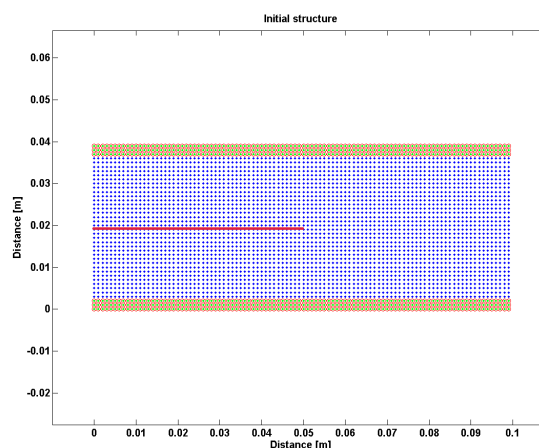


Fig 4.14 Rappresentazione della griglia di nodi peridinamici. Punti blu=nodi interni, punti verdi=nodi sul bordo ad un orizzonte di profondità, cerchi rossi=nodi a cui va applicata la forza per unità di volume, linea rossa=linea lungo la quale viene operato il taglio della pre-cricca

Nonostante l'utilizzo di β_s possa essere considerato un approccio più corretto al problema dei carichi al contorno, nella presente tesi si utilizzerà la metodologia delle forze applicate ad un

raggio di profondità, in quanto l'articolo cui ci si riferisce per i risultati nel caso di legge costitutiva lineare [45] non ne tiene conto; è stato comunque verificato come applicando entrambi i metodi si siano ottenuti risultati maggiormente concordi a quelli di Bobaru [44] utilizzando il metodo delle forze applicate fino ad un orizzonte di profondità.

Per quanto riguarda la generazione della pre-cricca vi sono due possibilità:

1. Eliminare una fila di nodi per una lunghezza pari alla pre-cricca
2. Togliere tutti i bond che attraversano una linea immaginaria tra due file di nodi fino alla profondità che compete la lunghezza reale della pre-cricca.

Nella realizzazione del modello è stato scelto il secondo metodo in quanto il primo andrebbe a togliere una fila di nodi e quindi il loro relativo volume; tale ammanco di volume necessitava di essere successivamente reintegrato nelle equazioni.

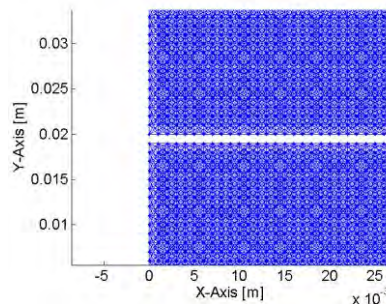


Fig 4.15 Dettaglio della pre-cricca

La legge costitutiva è stata costruita in modo tale da resistere più a compressione (si è utilizzata una resistenza a compressione molto più alta che a trazione); inoltre per le leggi bilineari e trilineari si è reso necessario un metodo che tenesse conto della perdita di energia del bond quando, superato un certo valore di stretch, subiva una compressione mantenendo lo stretch finale sempre positivo.

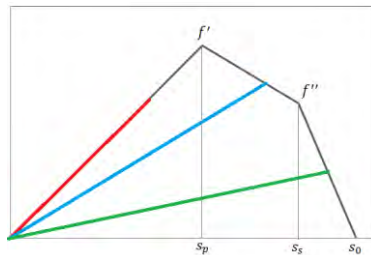


Fig 4.16 Rappresentazione grafica della metodologia applicata per seguire i tratti della legge costitutiva al variare dello stretch

Si consideri il grafico di figura 4.16, il quale descrive cosa avviene al variare dello stretch in un bond. In figura è stata scelta la legge trilineare più generale ma le considerazioni sono valide per ogni legge costitutiva. Nel caso in cui il bond sia sottoposto ad uno stretch inferiore o uguale a s_p ci si “muoverà” sulla curva rossa che si può estendere seguendo la prima pendenza fino a s_p ; sia in caso di trazione che di compressione in bond seguirà sempre tale pendenza (tratto lineare elastico).

Qualora lo stretch superi il valore di s_p si seguirà sempre seguendo la forma della legge costitutiva (linea grigia con $s > s_p$), con la differenza ora che nel caso in cui si avesse una compressione si “tornerebbe indietro” su una curva con pendenza minore rispetto al tratto lineare (es curva azzurra o verde) senza la possibilità di risalire il tratto precedente allo stretch massimo a cui si è giunti. Tale modalità non tiene conto degli effetti plastici del bond, tuttavia si può notare come l’impossibilità di seguire la curva della legge costitutiva, superato il primo tratto lineare nel caso in cui si abbia uno stretch minore del massimo raggiunto ad un dato istante, vada a ridurre l’area disponibile della legge costitutiva e quindi l’energia massima del bond. Ciò implica una perdita graduale di energia (micropotenziale elastico), funzione della forma della legge costitutiva, in tal modo è possibile introdurre un fenomeno di danneggiamento progressivo del bond.

L’unica legge che non presenta tale comportamento è quella di tipo lineare, in cui al raggiungimento di s_0 si ha un immediato rilascio di tutta l’energia associata al bond.

Si illustra ora un accenno alla strategia di risoluzione utilizzata nella realizzazione del codice.

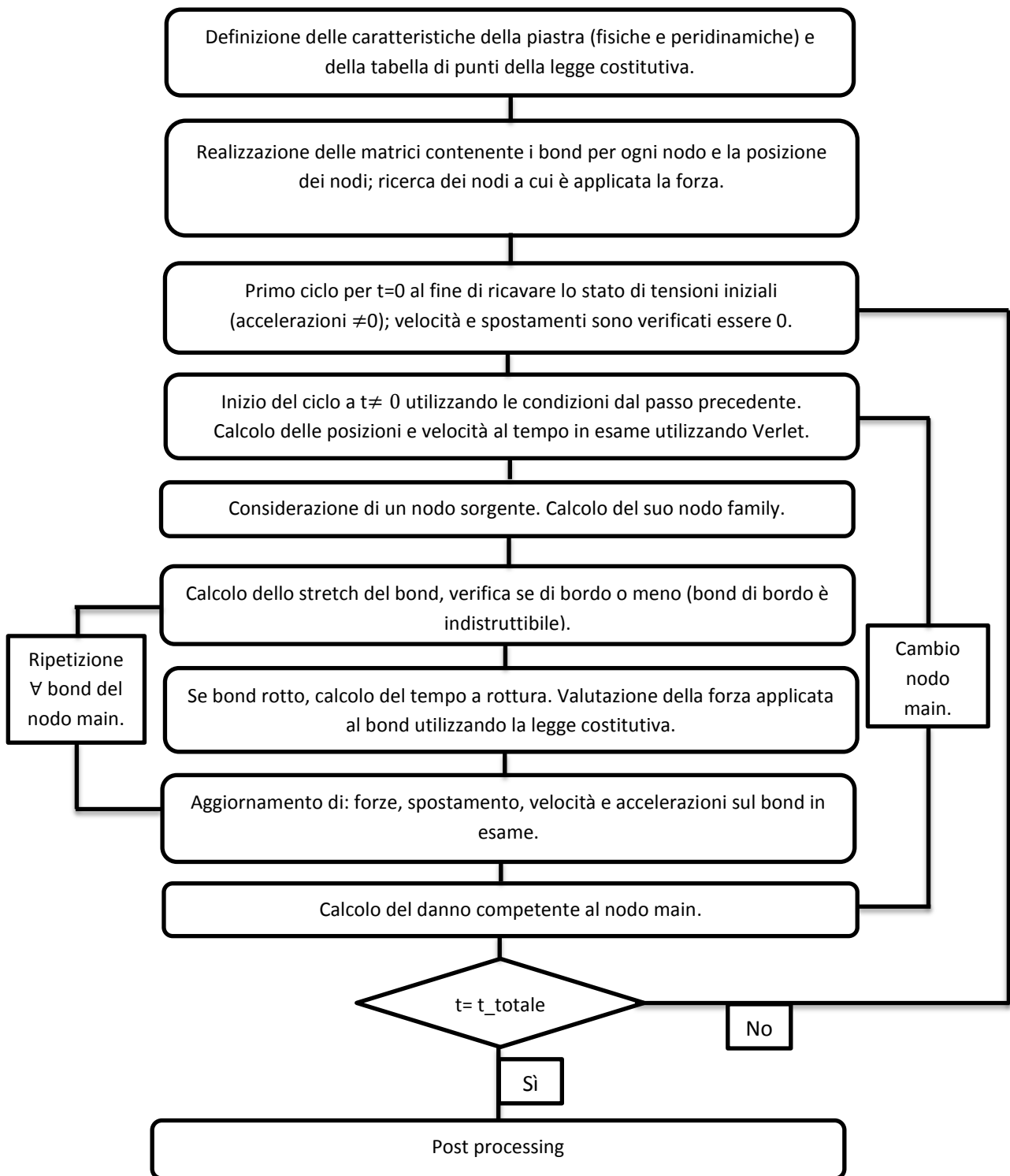


Fig 4.17 Diagramma di flusso concettuale sullo sviluppo del codice peridinamico per i modelli analizzati

4.4 Analisi dei risultati

In questo paragrafo verranno esposte le prove fatte ed i risultati ottenuti utilizzando le diverse tipologie di legge costitutiva. Nelle simulazioni va ricordato che il micromodulo dipende dall'orizzonte, perciò per i casi in cui il δ è diverso cambia anche il micromodulo secondo la formula per il caso plane stress ma i macroparametri del materiale studiato saranno sempre gli stessi.

$$c = \frac{9E}{\pi t \delta^3}; \quad \nu = \frac{1}{3} \quad (4.87)$$

Nel seguito verranno riportati in tabella i dati relativi ai punti utili alla costruzione delle leggi costitutive con la seguente dicitura:

Caso Lineare-Bilineare

Stretch	Force [N/m^6]
s_c	f_c
0	0
s_p	f
s_0	0

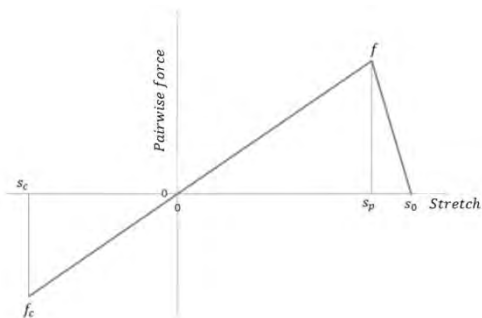


Tabella 4.3 Nomenclatura dati caso Bilineare

Caso Trilineare

Stretch	Force [N/m^6]
s_c	f_c
0	0
s_p	f'
s_s	f''
s_0	0

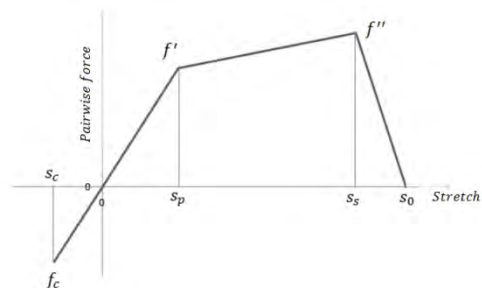


Tabella 4.4 Nomenclatura dati caso trilineare

Fig 4.18 Esempi di legge costitutiva con relativi punti d'interesse. Lo stretch a compressione è stato considerato solo indicativamente in figura. Ciò è stato necessario dato il suo valore elevato rispetto allo stretch a trazione.

Verranno riportati inoltre i valori dei rapporti adimensionali utilizzati e l'indicazione del numero di nodi e del tipo di convergenza usata. Al fine di ottenere dei parametri confrontabili sono stati misurati: la distanza raggiunta dalla cricca all'istante in cui avviene il branching e l'istante temporale stesso, la velocità di propagazione della cricca, l'angolo che assumono i bracci del branching e l'apertura massima della piastra in due punti simmetrici rispetto alla pre-cricca iniziale.

Si riporta l'inclinazione della cricca in gradi ponendo l'origine degli assi nel punto in cui inizia la biforcazione del branching che è stato scelto essere l'ultimo nodo lungo l'asse di frattura per cui si abbia $\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$. Dato che il branching può presentare un comportamento più o meno lineare verranno generalmente presi in considerazione due misure di angoli

chiamati ϑ_i , ϑ_f con la seguente definizione:

- ϑ_i = angolo considerato sull'orizzonte dal punto di inizio branching .
- ϑ_f = angolo considerato sull'orizzonte dal punto di inizio branching al punto finale di un ramo del branching.

Per il calcolo della velocità è stato assunto un criterio analogo a quello per identificare l'apice della cricca all'istante in cui avviene il branching e simile a quanto fatto in [44]; cioè si è proceduto all'individuazione dell'apice della cricca andando a misurarne la distanza dalla pre-cricca iniziale al tempo $\Delta step * \Delta t$ in cui $\Delta step$ è il numero di step temporali Δt dopo i quali si va ad effettuare la misura. All'inizio del branching si è scelto di seguire il ramo superiore per individuarne la velocità , in quanto essendo il modello simmetrico non presenta diversità di comportamento tra i due rami. Il criterio per individuare dopo ogni $\Delta step$ l'apice della cricca consiste nell' individuazione del punto per cui $\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$.

La formula utilizzata per ricavare la velocità risulta essere:

$$V = \frac{\|x_l - x_{l-1}\|}{t_l - t_{l-1}} \quad (4.88)$$

in cui x_l e x_{l-1} rappresentano la posizione dell'apice della cricca all'istante attuale t_l e all'istante considerato precedente t_{l-1} . Nelle analisi il valore di $\Delta step$ è stato mantenuto costante per poter ottenere dati tra loro confrontabili.

Nelle simulazioni effettuate si è scelto un $\Delta step = 35$; ciò porta ad un passo temporale tra due rilevazioni pari a $1.288\mu s$. Il $\Delta step$ è stato scelto sufficientemente piccolo per cercare di ottenere punti di velocità con una buona risoluzione temporale, senza incorrere in forti effetti transitori dovuti alla natura discretizzata del problema (passi eccessivamente piccoli vedrebbero molti punti a velocità nulla, in quanto non si darebbe il tempo necessario alla generazione del danno minimo per passare da un nodo precedente a quello successivo).

Verranno esposti nel seguito, in modo dettagliato, i modelli più significativi delle simulazioni effettuate, utili a comprendere i risultati del lavoro svolto, mentre a fine paragrafo verranno riportati i dati più importanti delle rimanenti prove effettuate.

Modello lineare $k_r=1$

Per evitare problemi numerici è stato utilizzato un k_r leggermente superiore all'unità ($k_r=1.00001$), tale strategia verrà sempre usata in presenza di punti aventi forza diversa e stretch uguale.

Il modello che verrà analizzato servirà per valutare l'effettiva bontà del codice, confrontando i risultati ottenuti con quelli presenti in letteratura. Esso servirà anche come modello base per il confronto con le successive leggi costitutive, le quali non presentano dati noti.

Si considerino i seguenti dati per il calcolo della legge costitutiva.

Punti legge costitutiva

Stretch	Force [N/m^6]
$-2.0e^{-2}$	$-1.379e^{+17}$
0	0
$1.209e^{-3}$	$8.335e^{+15}$
$1.209e^{-3}$	0

Tabella 4.5 Dati modelli 4k, 16k m-convergenza

Stretch	Force [N/m^6]
$-2.0e^{-2}$	$-1.103e^{+18}$
0	0
$1.709e^{-3}$	$9.430e^{+16}$
$1.709e^{-3}$	0

Tabella 4.6 Dati modello 16k δ -convergenza

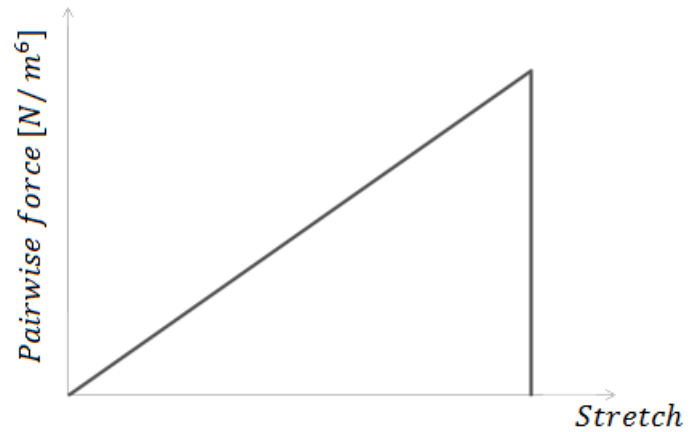


Fig 4.19 Modello lineare PMB

Grafici del danno all'istante finale per i tre modelli presi in esame.

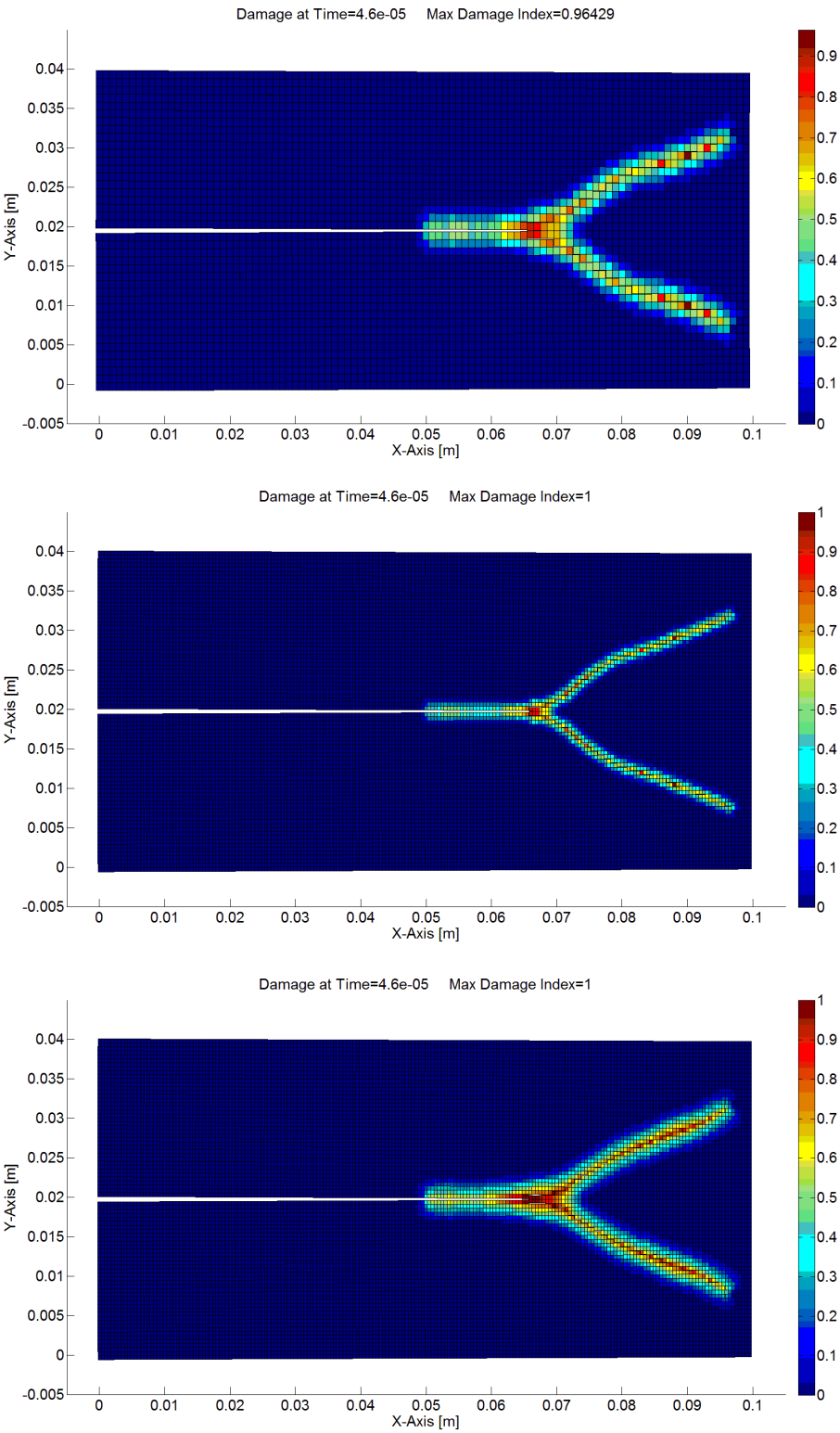


Fig 4.20 Andamento del danno. Modelli dall'alto al basso: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza

Si può notare sin da subito una differenza morfologica nelle tre tipologie di convergenza; il modello a 4000 nodi risulta meno definito e quindi presenta un danno più esteso attorno al percorso di frattura in ragione della sua minor densità nodale; il modello a 16000 nodi δ -convergenza ha una zona di danneggiamento prossima al percorso di frattura mentre il modello a 16000 nodi m -convergenza presenta una migliore densità nodale rispetto a quello coarse; tuttavia, avendo un passo di griglia uguale, ha un maggior numero di bond rispetto ai precedenti due e un orizzonte maggiormente esteso, perciò anche i nodi più lontani dalla frattura subiscono un danno. Si nota inoltre come il danno massimo sia uguale per i due tipi di convergenza mentre risulta inferiore in misura al 3.5% nel modello coarse.

Andando ad analizzare la distanza del crack subito precedente al branching per tutti e tre i modelli e gli angoli relativi ai bracci della biforcazione si ottiene:

Modello	ID nodo	Lunghezza [mm]	Criterio usato	ϑ_i [deg]	ϑ_f [deg]
4k nodi	2072	71	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 34	≈ 28
16k nodi δ -conv.	8140	69	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 35	≈ 28
16k nodi m -conv	8146	72.5	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 35	≈ 28

Tabella 4.7 Lunghezza massima della cricca principale e inclinazione dei bracci del branching. (cfr. fig. 4.20)

La “Lunghezza” è valutata dal lato sinistro della piastra in cui è stato posto il riferimento $x = 0$. Si nota come la lunghezza minore appartenga al modello refined- δ ; dovuta ad una maggior precisione nel passo spaziale e del danno; mentre il modello refined- m abbia una lunghezza maggiore dovuta al danneggiamento meno localizzato. Nonostante vi siano tali differenze si possono ritenere validi sotto quest’aspetto tutti i modelli, in quanto non si discostano molto dai circa 71 mm indicati da Bobaru [44] per tutte le simulazioni. Per meglio comprendere la similitudine di risultati si può operare una semplice media aritmetica sui dati ricavati, ottenendo un valore medio di 70.8 mm. Si può notare un’ ottima corrispondenza in termini angolari del branching per tutti e tre i modelli.

Si illustrano ora i risultati ottenuti dalla simulazione svolta, al fine di individuare dopo quanto tempo dall’inizio della cricca si ha la comparsa del fenomeno del branching.

Nella figura successiva sono stati riportati due istanti temporali: nell’immagine di sinistra è presentato l’istante immediatamente precedente al branching mentre l’immagine di destra riporta l’istante in cui il branching risulta già avvenuto. Tale strategia si è resa necessaria data

la rapidità del fenomeno; per tale motivo al fine di ottenere una valutazione più accurata possibile è stato utilizzato il modello refined- δ .

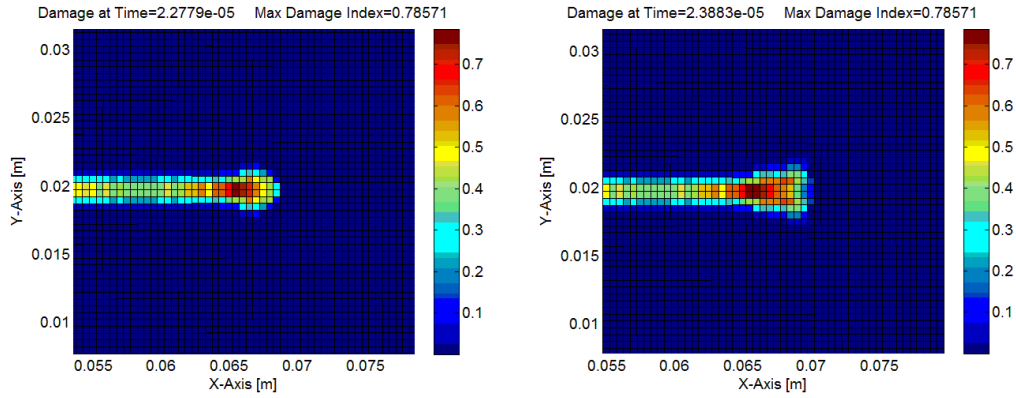


Fig 4.21 Istanti temporali prima e dopo l'inizio del branching

Si nota come l'istante in cui si ha la biforcazione della cricca sia compreso tra circa $22.8 \div 23.9 \mu s$, intervallo temporale che risulta in perfetto accordo con quanto trovato da Bobaru nelle sue simulazione, nelle quali identifica il momento del branching attorno ai $23 \mu s$.

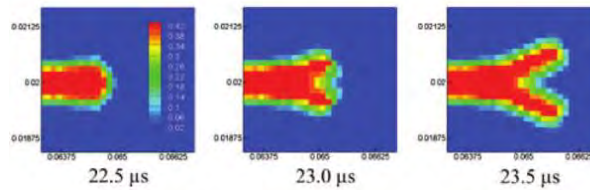


Fig 4.22 Istanti temporali prima e dopo il branching ottenuti come riportato in [45]

Verranno ora riportati i risultati ottenuti dal calcolo delle velocità, le quali saranno confrontate con i dati sperimentali ottenuti da Döll.

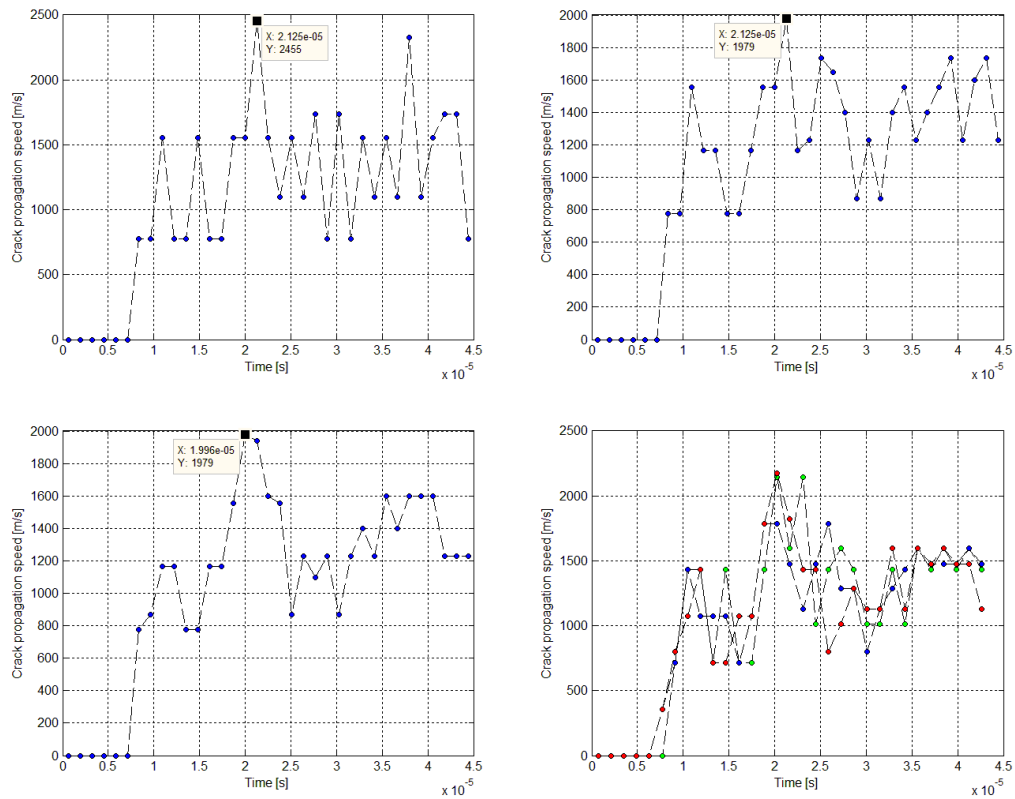


Fig 4.23 Grafici delle velocità di propagazione della cricca per i modelli in esame. Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso, modello: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza e unione dei tre grafici in cui verde=4k nodi, blu=16k nodi δ -convergenza, rosso=16k nodi m -convergenza

Si riportano in tabella le velocità massime ottenute:

Modello	Velocità max [m/s]	Criterio usato
4k nodi	2455	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$
16k nodi δ -conv.	1979	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$
16k nodi m -conv	1979	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$
Sperimentale (Döll)	1958	//

Tabella 4.8 Velocità massime ottenute e criterio utilizzato per il calcolo della velocità

Si osserva come all'aumentare del numero di nodi la velocità massima si avvicini al dato sperimentale, senza rilevabili differenze tra i modelli refined- δ e refined- m , mentre l'errore maggiore si presenta nel modello coarse. Inoltre è visibile dai grafici come, per la legge

costitutiva del materiale PMB, il branching avvenga nell'istante in cui si raggiunge la velocità massima; istante che sembra essere sostanzialmente lo stesso nei tre modelli, tenendo in considerazione l'errore di approssimazione temporale.

Infine si riporta la deformata dei tre modelli, in cui è stato ricavato il valore di apertura della piastra a partire dai primi due nodi appartenenti all'altezza sinistra della piastra sopra e sotto l'intaglio (pre-cricca).

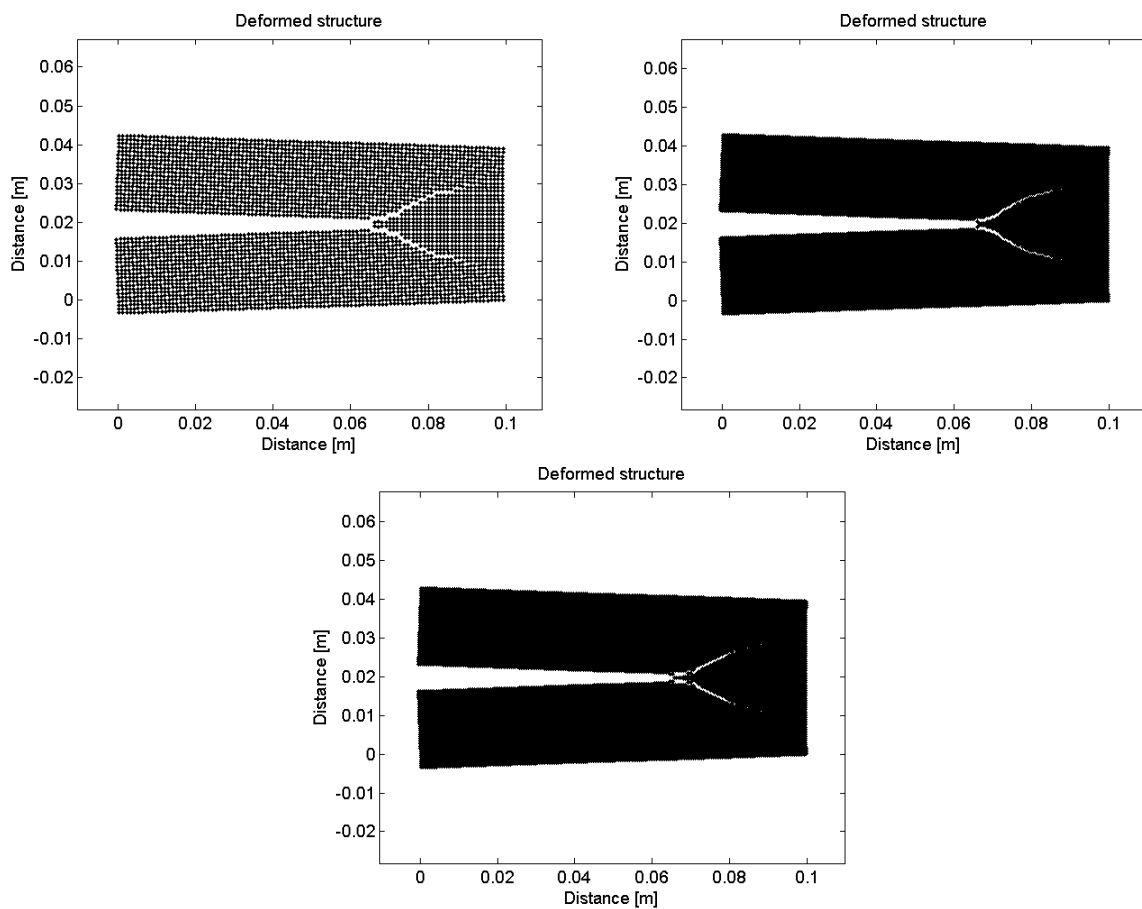


Fig 4.24 Deformata all'istante finale dell'integrazione con spostamenti amplificati di 10 volte. Da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso, modello: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza

Modello	ID nodi [sup, inf]	Apertura [mm]
4k nodi	[2001,1901]	0.6670
16k nodi δ -conv.	[8001,7801]	0.6739
16k nodi m -conv	[8001,7801]	0.6721

Tabella 4.9 Apertura stimata e relativi nodi di riferimento

Al fine di confermare che il Δt considerato sia sufficientemente piccolo si riportano alcuni valori per un $\Delta t = 25 \text{ ns}$ (il Δt nelle simulazioni effettuate è invece di 36.8 ns):

Modello	Lunghezza [mm]	Criterio usato	ϑ_i [deg]	ϑ_f [deg]	Velocità max [m/s]
4k nodi	71	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 34	≈ 28	2455
16k nodi δ -conv.	69	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 35	≈ 28	1979
16k nodi m -conv	72.5	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 35	≈ 28	1979

Tabella 4.10 Dati ottenuti utilizzando un $\Delta t=25 \mu\text{s}$

Si nota come i risultati delle simulazioni siano gli stessi utilizzando un Δt più basso di quello considerato nelle simulazioni. I dati sinora ottenuti mostrano la bontà del codice sviluppato.

Modello bilineare $k_r=1.8$

Viene ora presentata la prima legge bilineare che si andrà a trattare; la simulazione si è svolta utilizzando sempre 3 modelli: il primo di tipo coarse, il secondo di tipo refinement- δ ed il terzo di tipo refined- m sui quali è stata costruita la legge bilineare avente i seguenti parametri:

Punti legge costitutiva

Stretch	Force [N/m^6]
$-2.0e^{-2}$	$-1.379e^{+17}$
0	0
$9.008e^{-4}$	$6.213e^{+15}$
$1.622e^{-3}$	0

Tabella 4.11 Dati modelli 4k, 16k m -convergenza

Stretch	Force [N/m^6]
$-2.0e^{-2}$	$-1.103e^{+18}$
0	0
$1.274e^{-3}$	$7.030e^{+16}$
$2.293e^{-3}$	0

Tabella 4.12 Dati modello 16k δ -convergenza

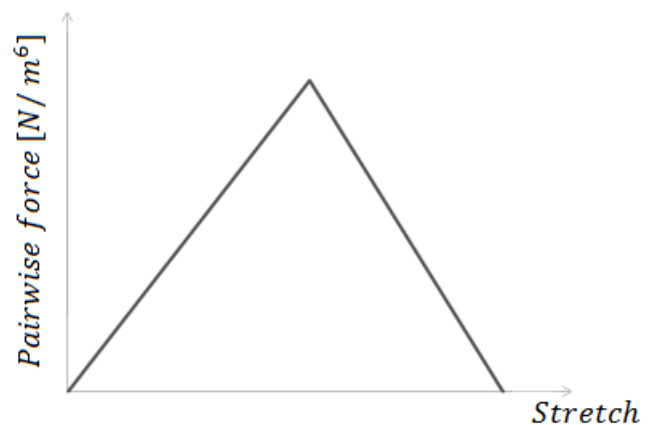


Fig 4.25 Modello bilineare $k_r=1.8$

Grafici del danno all'istante finale per i tre modelli presi in esame.

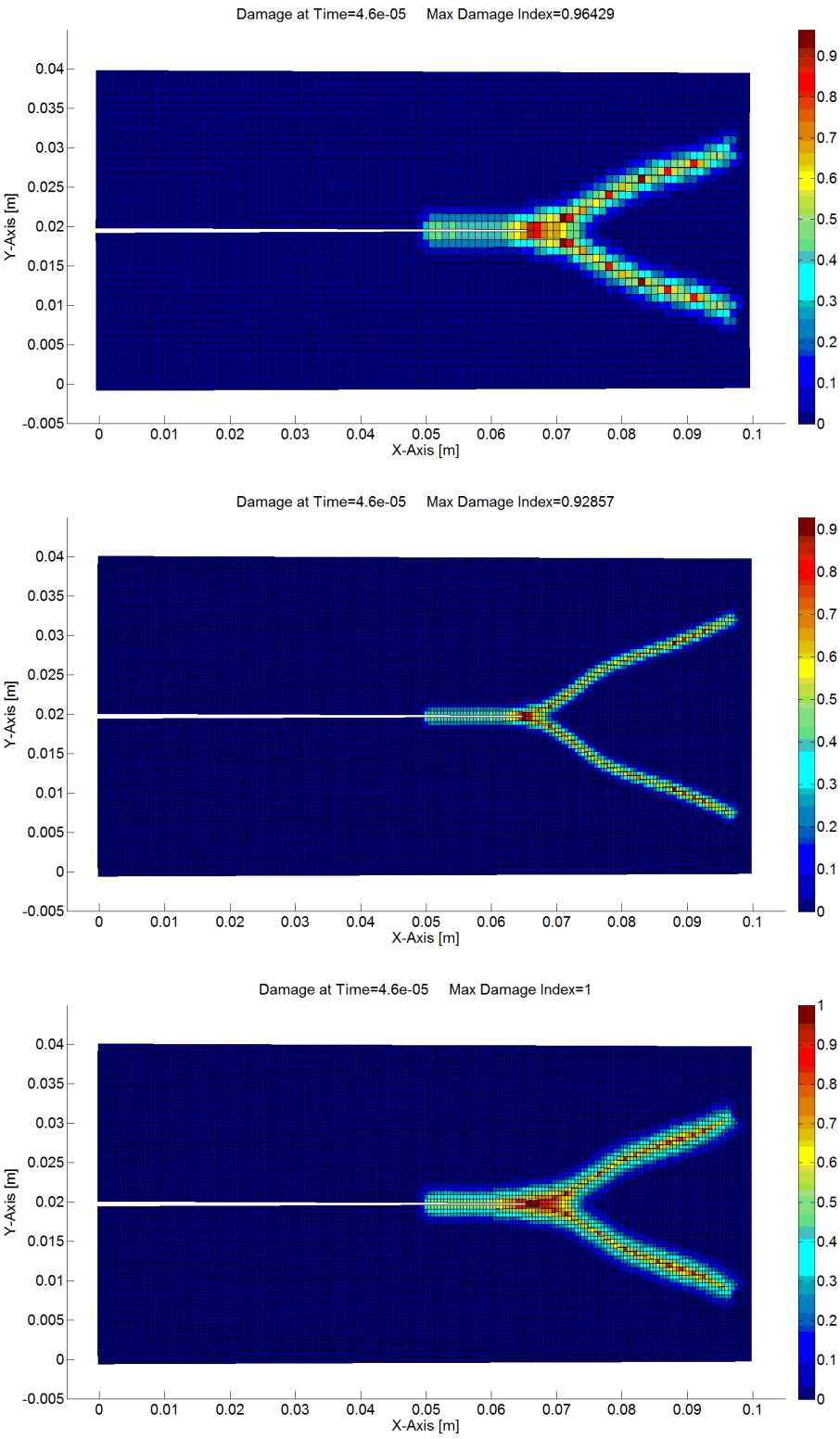


Fig 4.26 Andamento del danno. Modelli dall'alto al basso: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza

Come per il caso lineare il modello refined- δ presenta una minor dispersione del danno, il quale si concentra lungo i nodi prossimi alla zona di frattura. Si riporta la tabella con la lunghezza della cricca immediatamente prima della biforcazione e gli angoli assunti dai rami del branching:

Modello	ID nodo	Lunghezza [mm]	Criterio usato	ϑ_i [deg]	ϑ_f [deg]
4k nodi	2074	73	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 33	≈ 28
16k nodi δ -conv.	8137	68	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 34	≈ 28
16k nodi m -conv.	8147	73	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 34	≈ 28

Tabella 4.13 Lunghezza massima della cricca principale e inclinazione dei bracci del branching. (cfr. fig. 4.26)

Aumentando il valore del rapporto kr , rispetto al caso precedente, si nota una discrepanza maggiore tra i dati ottenuti con i tre modelli, con un abbassamento minimo della lunghezza rispetto al caso lineare nel modello refined- δ e una lunghezza maggiore nel modello coarse rispetto all'analogo modello lineare; così come accade nel modello refined- m , da cui si ottiene un valore congruente al caso coarse, anche se la variazione percentuale risulta inferiore rispetto agli altri due casi. Un'ulteriore prova, esposta nel seguito, è stata fatta con un rapporto $k_r = 2.2$, al fine di confrontarne i dati. Si è notato che per tale rapporto i risultati risultino sostanzialmente uguali a quelli ottenuti usando il rapporto $k_r = 1.8$, tranne per il valore della lunghezza nel modello refined- δ che presenta un lieve aumento pari a 0.0685 [m]. Si può notare un'ottima corrispondenza dei termini angolari del branching, i quali risultano comparabili al modello lineare. Si va ora ad analizzare l'intervallo di tempo in cui avviene la biforcazione.

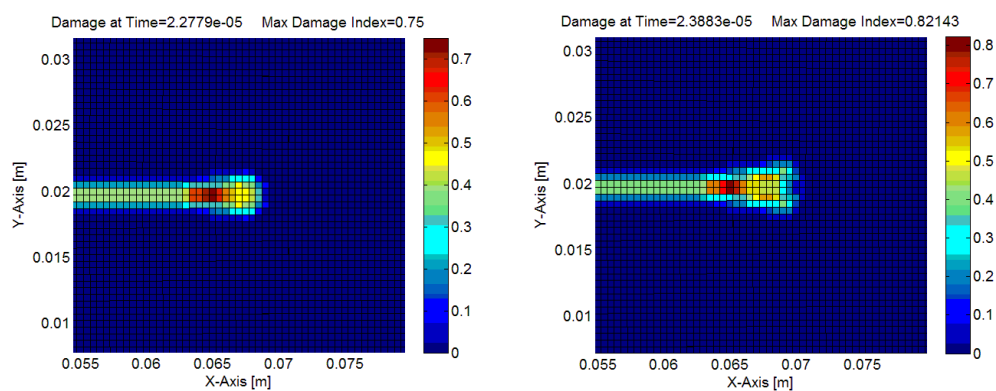


Fig 4.27 Istanti temporali prima e dopo l'inizio del branching

Si osserva come l'intervallo di tempo sia simile al caso lineare, considerando un margine d'errore dovuto alla velocità del fenomeno e alla discretizzazione del modello. Perciò, come nel caso lineare, si nota come la biforcazione della cricca avviene in un intervallo compreso tra circa $22.8 \div 23.9 \mu\text{s}$.

Confrontiamo i grafici delle velocità ottenute dai tre modelli.

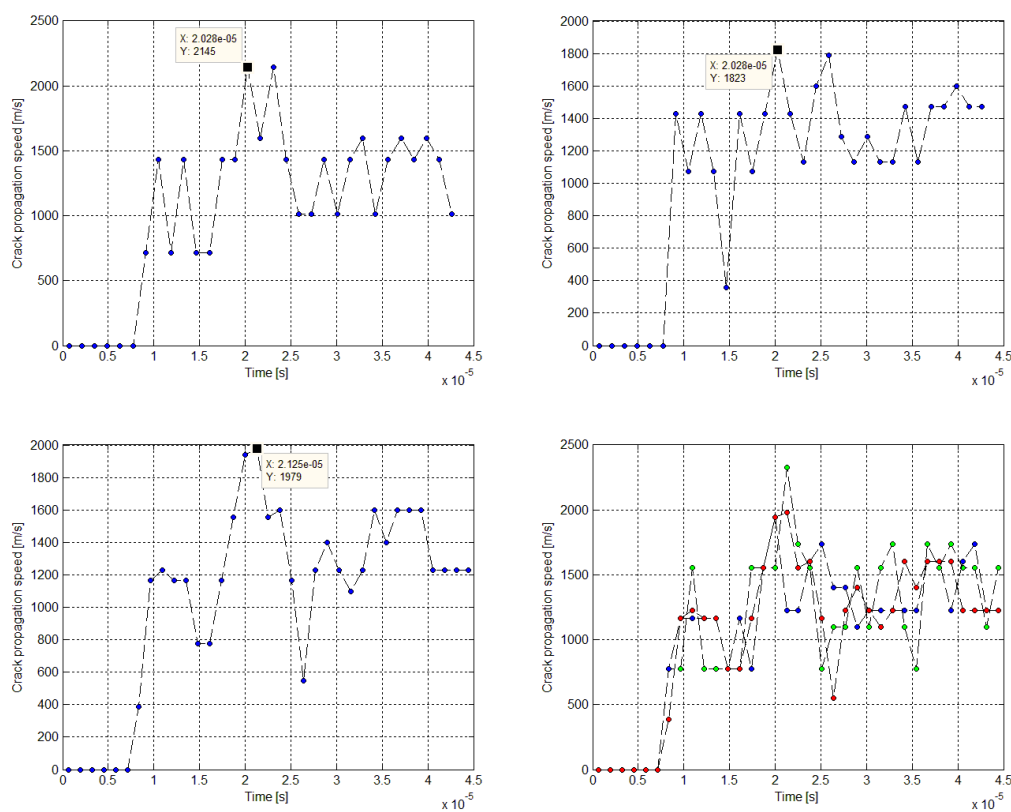


Fig 4.28 Grafici delle velocità di propagazione della cricca per i modelli in esame. Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso, modello: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza e unione dei tre grafici in cui verde=4k nodi, blu=16k nodi δ -convergenza, rosso=16k nodi m -convergenza

Modello	Velocità max [m/s]	Criterio usato
4k nodi	2145	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$
16k nodi δ -conv.	1823	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$
16k nodi m -conv.	1979	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$

Tabella 4.14 Velocità massime ottenute e criterio utilizzato per il calcolo della velocità

Si nota anche in questo caso che la velocità minore è ottenuta con il modello refined- δ con una variazione del 8% rispetto al caso lineare; tale variazione non risulta tuttavia da considerarsi elevata, fermo restando la differenza di legge costitutiva. La variazione più importante compete il modello coarse, mentre il modello refined- m presenta il medesimo valore del caso lineare. Non è più possibile confrontare tali velocità con modelli sperimentali in quanto ora la legge usata non è più appannaggio di un modello fragile. In questo caso sembra esserci una differenza più marcata tra i modelli a δ -convergenza ed m -convergenza. Si riporta la deformata dei modelli usati ed il valore di apertura massima all'istante finale della simulazione.

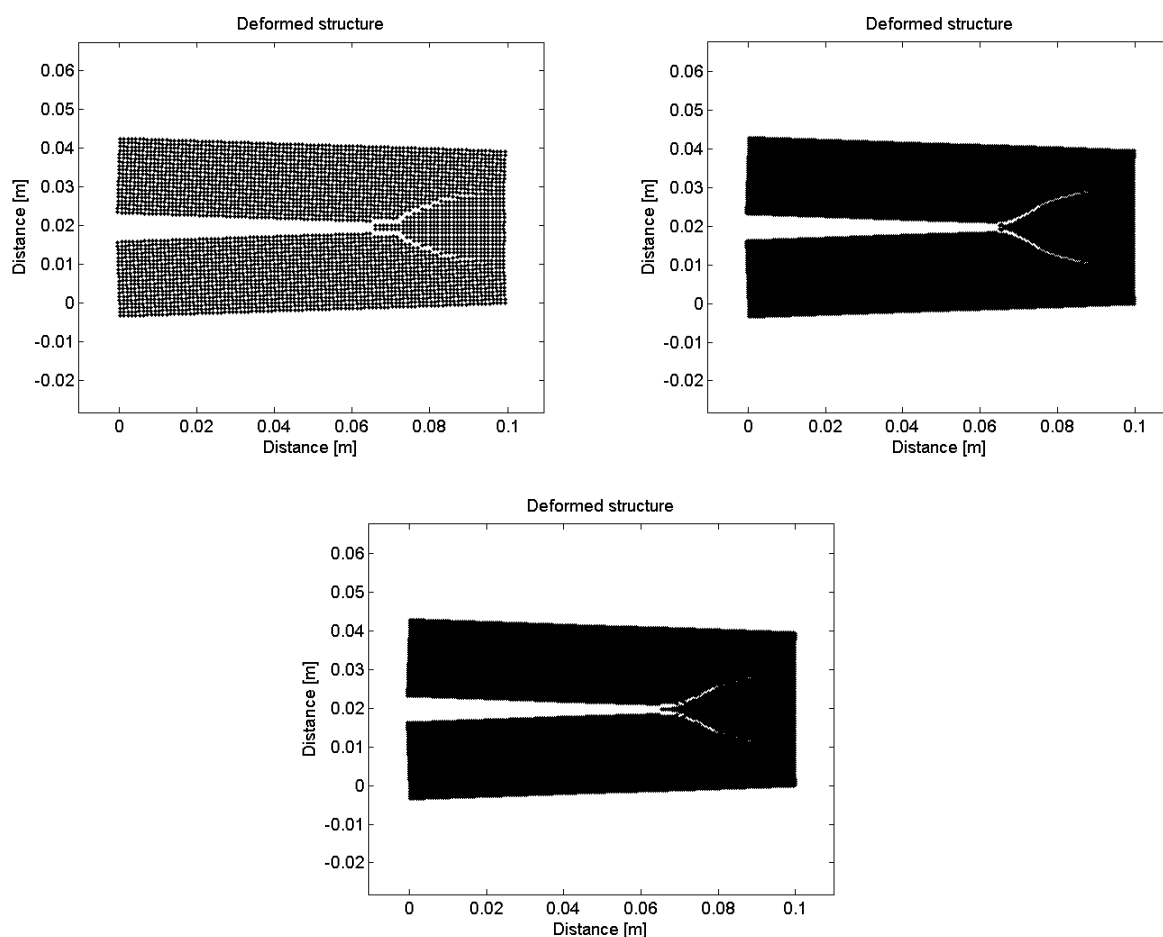


Fig 4.29 Deformata all'istante finale dell'integrazione con spostamenti amplificati di 10 volte. Da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso, modello: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza

Modello	ID nodi [sup, inf]	Apertura [mm]
4k nodi	[2001,1901]	0.6667
16k nodi δ -conv.	[8001,7801]	0.6735
16k nodi m -conv.	[8001,7801]	0.6718

Tabella 4.15 Apertura stimata e relativi nodi di riferimento

Si osserva una lieve diminuzione di apertura rispetto al modello lineare, mentre rimane ancora un' apertura maggiore nei modelli refined rispetto al modello coarse.

Modello bilineare $k_r=4$

Si analizza ora una legge bilineare con il primo tratto particolarmente pendente e si va ad analizzare la differenza che comporta una tale forma della legge costitutiva.

Punti legge costitutiva

Stretch	Force [N/m^6]
$-2.0e^{-2}$	$-1.379e^{+17}$
0	0
$6.043e^{-4}$	$4.168e^{+15}$
$2.417e^{-3}$	0

Tabella 4.16 Dati modelli 4k, 16k m -convergenza

Stretch	Force [N/m^6]
$-2.0e^{-2}$	$-1.103e^{+18}$
0	0
$8.546e^{-4}$	$4.715e^{+16}$
$3.418e^{-3}$	0

Tabella 4.17 Dati modello 16k δ -convergenza



Fig 4.30 Modello bilineare $k_r=4$

Si riportano i grafici del danno all'istante finale per i tre modelli presi in esame.

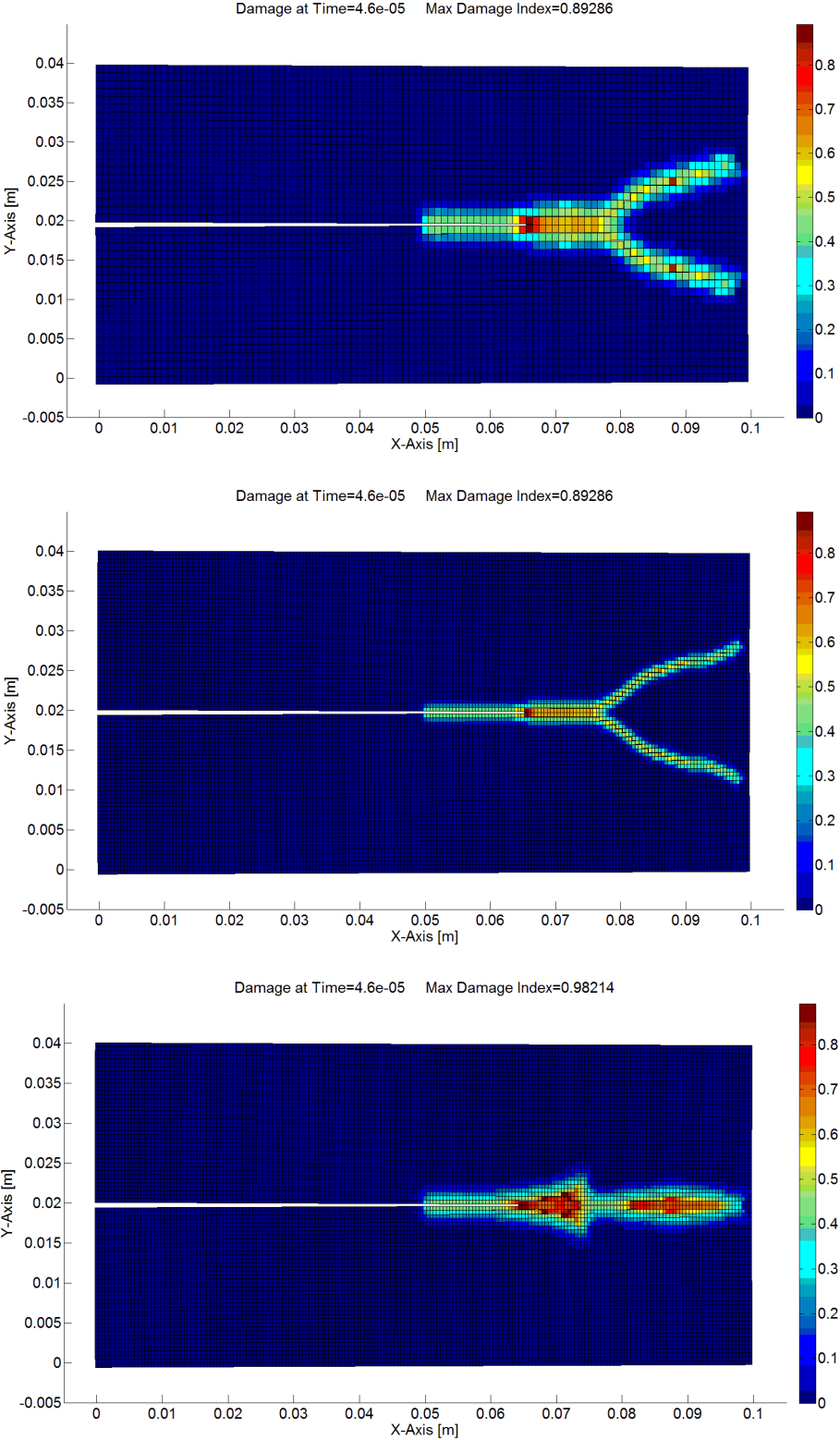


Fig 4.31 Andamento del danno. Modelli dall'alto al basso: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza

Si nota una forte differenza morfologica tra i primi due modelli e il modello refined- m . Il modello a 4000 nodi risulta come al solito meno definito e quindi presenta un danno più esteso attorno al percorso di frattura in ragione della sua minor densità nodale; il modello refined- δ ha una zona di danneggiamento prossima al percorso di frattura, mentre il modello refined- m non presenta il branching ma mostra una zona allargata a circa metà percorso di frattura in cui sembra poter avvenire la biforcazione, la quale si arresta per proseguire lungo l'asse di simmetria del modello. Si vede inoltre come questa zona presenti un forte danneggiamento che porta ad innalzare il massimo damage index di circa il 10% rispetto ai primi due modelli.

Si illustra la distanza del crack immediatamente precedente al branching per tutti e tre i modelli e gli angoli relativi ai bracci della biforcazione:

Modello	ID nodo	Lunghezza [mm]	Criterio usato	ϑ_i [deg]	ϑ_f [deg]
4k nodi	2080	79	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 35	≈ 23
16k nodi δ -conv.	8155	77	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 34	≈ 22
16k nodi m -conv	//	//	//	//	//

Tabella 4.18 Lunghezza massima della cricca principale e inclinazione dei bracci del branching. (cfr. fig. 4.31)

Si può osservare come la lunghezza totale della cricca per il modello refined- δ sia aumentata aumentando il parametro kr , andando a superare quella registrata per lo stesso modello nel caso lineare dopo un iniziale abbassamento di tale valore per $kr=1.8$, mentre per il modello coarse si è registrato sempre un aumento. Questo, unitamente al comportamento appena visto per il modello refined- m , porta a considerare una certa sensibilità della tipologia di convergenza usata in funzione del tipo e forma di legge costitutiva, andando ad originare comportamenti diversi rispetto ai dati attesi.

Si nota inoltre come l'angolo iniziale del branching sia rimasto sostanzialmente invariato, mentre è diminuito sensibilmente l'angolo finale in ragione anche della minor estensione dei bracci del branching.

Intervallo temporale in cui avviene il fenomeno del branching.

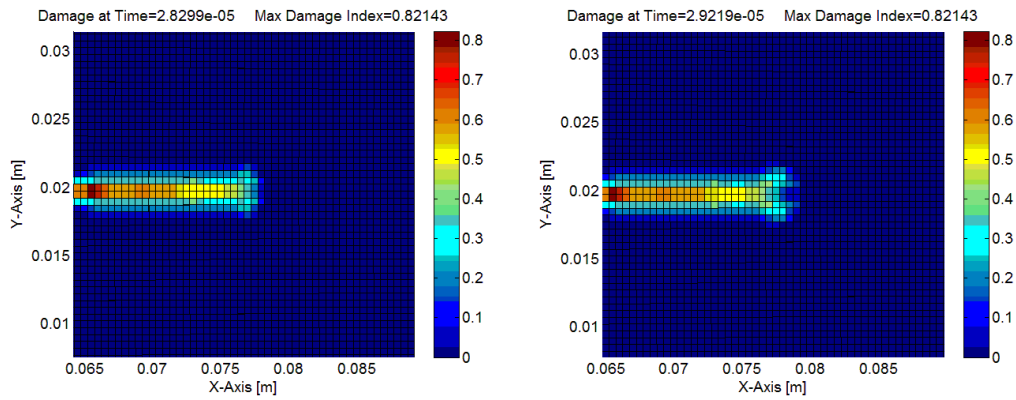


Fig 4.32 Istanti temporali prima e dopo l'inizio del branching

Dalle immagini si evince come l'istante in cui inizia il branching sia aumentato rispetto alle analisi precedenti, tale differenza è dovuta ad un aumento della lunghezza del crack principale che porta ad avere il fenomeno della biforcazione in un intervallo temporale compreso tra $28.3 \div 29.2 \mu s$. Il branching avviene ad un danneggiamento inferiore rispetto al caso lineare, dopo una zona altamente danneggiata.

Si osservano ora i profili di velocità ottenuti.

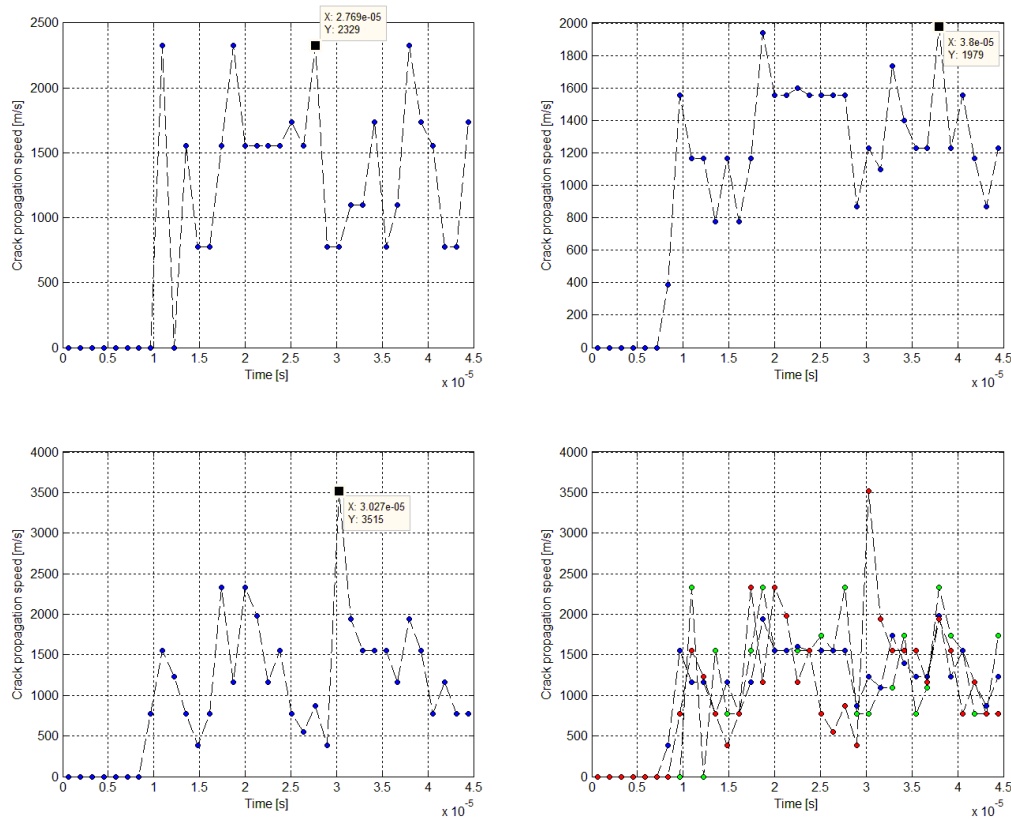


Fig 4.33 Grafici delle velocità di propagazione della cricca per i modelli in esame. Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso, modello: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza e unione dei tre grafici in cui verde=4k nodi, blu=16k nodi δ -convergenza, rosso=16k nodi m -convergenza

Dai grafici riportati si può osservare una velocità massima molto alta nel del modello ad m -convergenza, in controtendenza con la diminuzione della velocità massima all'aumento del numero di elementi per tutte le tipologie di convergenza visto finora; si nota anche un andamento maggiormente diversificato rispetto ai grafici del modello coarse e δ -convergenza. Questi aspetti rafforzano ulteriormente l'ipotesi di sensibilità di tale convergenza alla tipologia di legge costitutiva. Si nota inoltre un punto a velocità zero dovuto probabilmente alla discretizzazione grossolana del modello coarse.

Modello	Velocità max [m/s]	Criterio usato
4k nodi	2329	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$
16k nodi δ -conv.	1979	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$
16k nodi m -conv	3515	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$

Tabella 4.19 Velocità massime ottenute e criterio utilizzato per il calcolo della velocità

Rispetto al caso lineare il modello coarse ha una velocità leggermente inferiore, mentre il modello refined- δ presenta un valore di velocità massima equivalente. La velocità del modello refined- m risulta estremamente elevata, probabilmente a causa della forte divergenza della sua soluzione.

Deformata dei modelli e valore di apertura massima all'istante finale della simulazione.

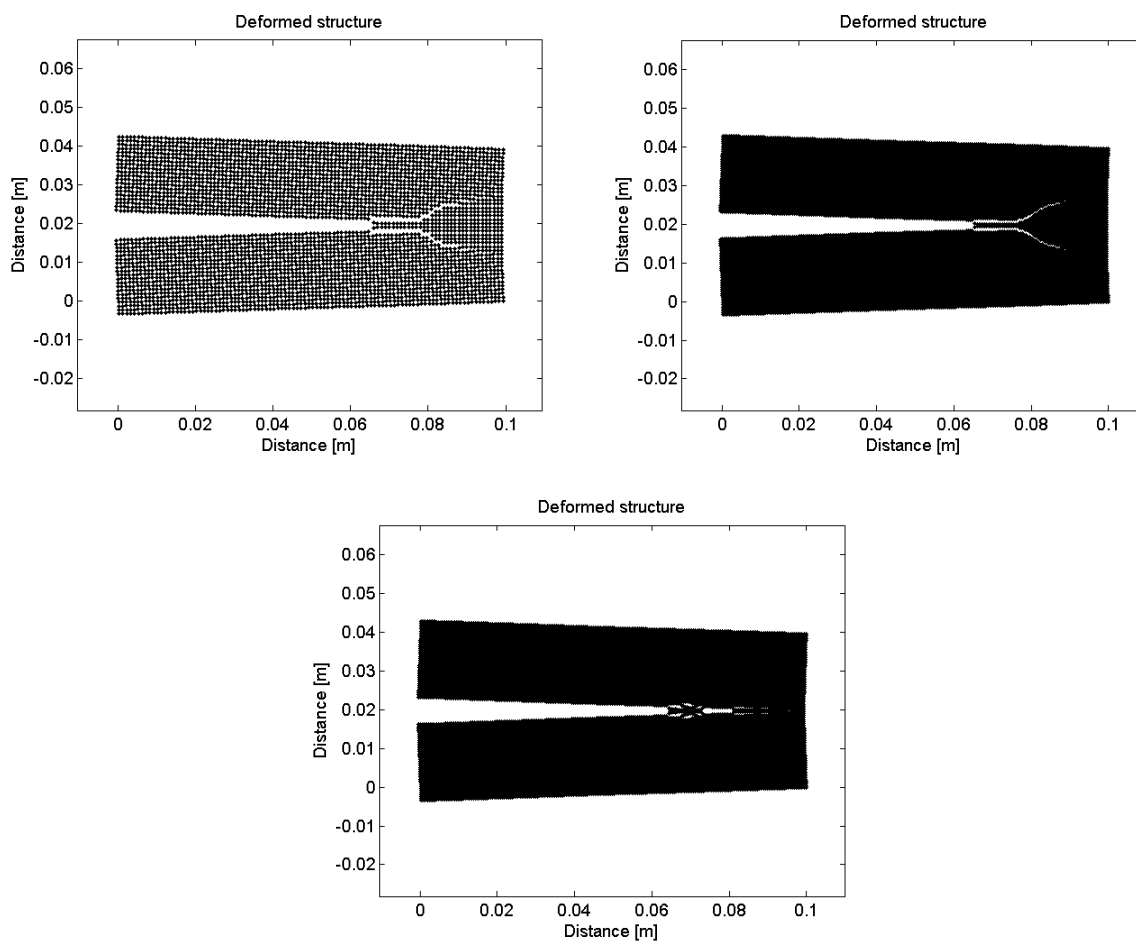


Fig 4.34 Deformata all'istante finale dell'integrazione con spostamenti amplificati di 10 volte. Da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso, modello: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza

Modello	ID nodi [sup, inf]	Apertura [mm]
4k nodi	[2001,1901]	0.6666
16k nodi δ -conv.	[8001,7801]	0.6738
16k nodi m -conv	[8001,7801]	0.6713

Tabella 4.20 Apertura stimata e relativi nodi di riferimento

In tutti i casi si ha un' apertura minore rispetto al modello lineare. Ancora una volta il modello coarse presenta l'apertura minima, seguito dal modello refined- m , per terminare infine con il modello refined- δ che possiede il valore più alto tra i tre. Dalla deformata è interessante notare come nel modello refined- m vi sia una frattura iniziale frastagliata che assomiglia ad un piccolo branching che va a congiungersi successivamente in una frattura lineare per poi separarsi nuovamente, rimanendo sempre concentrata nell'intorno dell'asse orizzontale di simmetria del modello.

Modello trilineare $k_r=4, k_s=1$

Si introduce il primo dei modelli trilineari che verranno affrontati. Nel seguito saranno presentati solamente modelli trilineari con $k_r = 4$ in quanto si è visto, come si dimostrerà alla fine delle analisi, che tale parametro può essere generalmente considerato anche come un parametro di amplificazione degli effetti, quali: la lunghezza della cricca principale e l'influenza dei parametri k_s e k_f .

Punti legge costitutiva

Stretch	Force [N/m^6]
$-2.0e^{-2}$	$-1.379e^{+17}$
0	0
$4.568e^{-4}$	$3.150e^{+15}$
$1.827e^{-3}$	$3.150e^{+15}$
$1.827e^{-3}$	0

Tabella 4.21 Dati modelli 4k, 16k m-convergenza

Stretch	Force [N/m^6]
$-2.0e^{-2}$	$-1.103e^{+18}$
0	0
$6.460e^{-4}$	$3.564e^{+16}$
$2.584e^{-3}$	$3.564e^{+16}$
$2.584e^{-3}$	0

Tabella 4.22 Dati modello 16k δ -convergenza

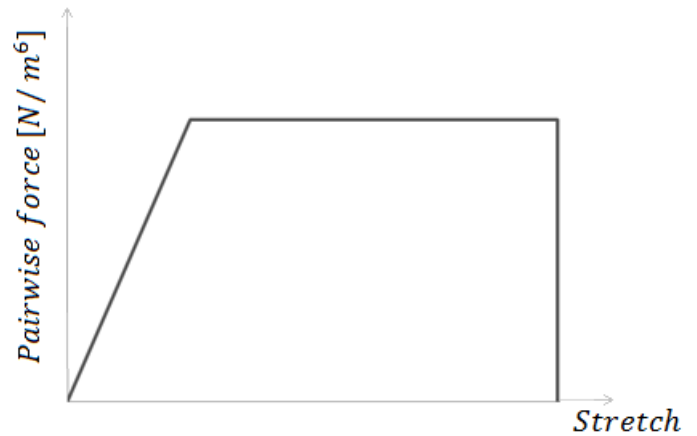


Fig 4.35 Modello trilineare $k_r=4, k_s=1$

Grafici del danno all'istante finale per i tre modelli presi in esame.

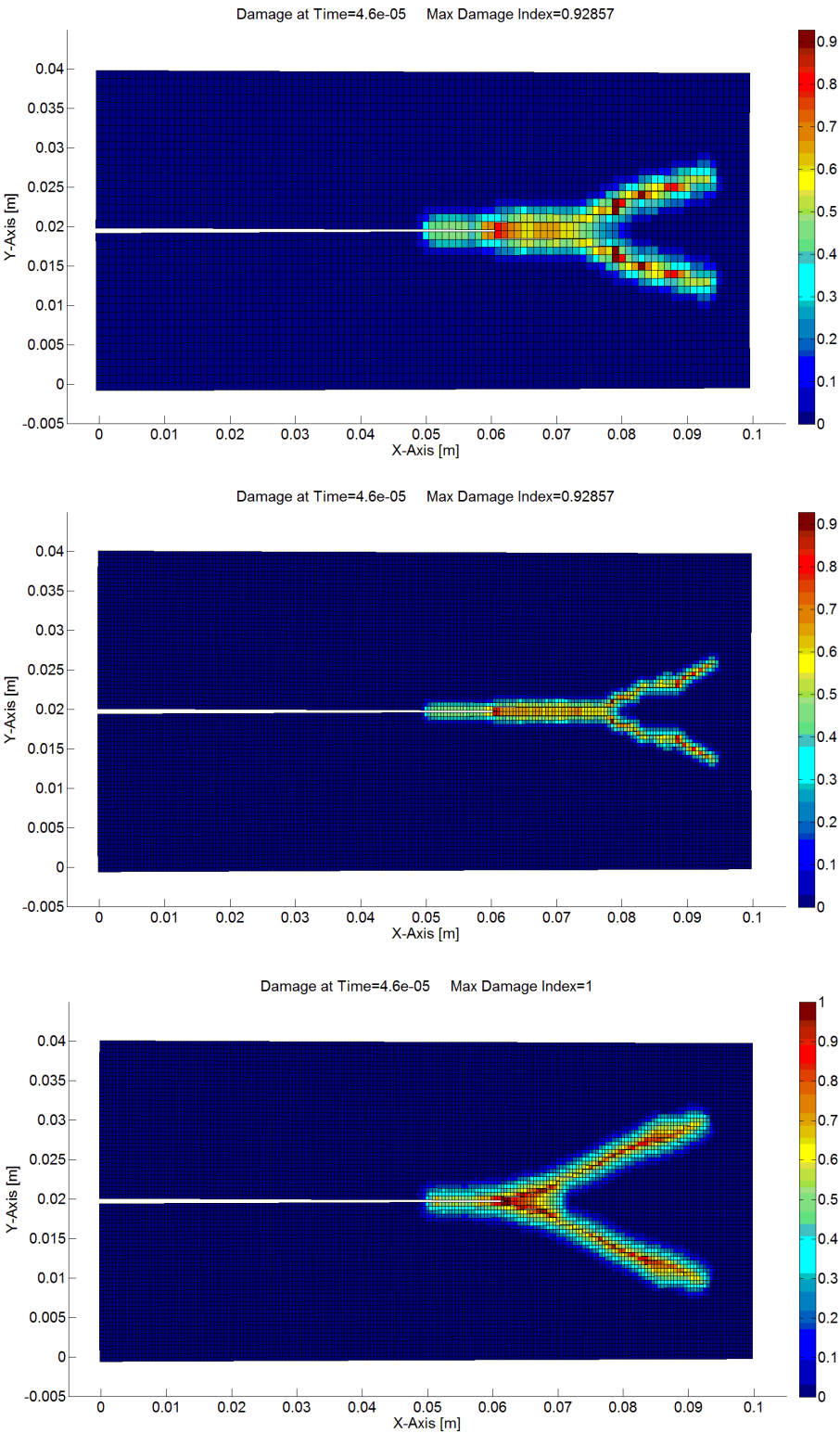


Fig 4.36 Andamento del danno. Modelli dall'alto al basso: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza

Il modello refined- δ riesce a catturare chiaramente una frattura irregolare nella zona del branching, la quale alla fine subisce una netta deviazione di circa 40 gradi rispetto alla zona immediatamente precedente; dettaglio che viene meno nel modello coarse. In entrambi si può notare una zona di pre-biforcazione con un danno più esteso rispetto al modello lineare e una maggiore lunghezza della cricca primaria. L'indice massimo del danno rimane uguale al variare del numero di nodi, tranne nel modello refined- m che ancora una volta sembra essere sensibile al cambio di legge costitutiva, con una zona danneggiata molto ampia e una forma di frattura marcatamente diversa, presentando nella parte finale del branching un'estensione del danno con forma ad "uncino", mentre la zona precedente perde del tutto la morfologia irregolare che è ben visibile nel modello refined- δ .

Tabella della lunghezza della cricca primaria e degli angoli del branching:

Modello	ID nodo	Lunghezza [mm]	Criterio usato	ϑ_i [deg]	ϑ_f [deg]
4k nodi	2077	76	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 40	≈ 23
16k nodi δ -conv.	8158	78	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 43	≈ 22
16k nodi m -conv	8140	69.5	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 40	≈ 27

Tabella 4.23 Lunghezza massima della cricca principale e inclinazione dei bracci del branching. (cfr. fig. 4.36)

Anche in questo caso, come nel caso $k_r = 4$, la cricca principale risulta avere una lunghezza sensibilmente maggiore rispetto al caso lineare, anche se inferiore rispetto all'analisi precedente. Si osserva una netta discordanza nella lunghezza della cricca principale tra il caso refined- m e gli altri due. Gli angoli del branching sono confrontabili per il modello coarse e refined- δ , tenendo comunque in considerazione le differenze di discretizzazione. Il modello refined- m invece soffre di un'apertura iniziale più piccola, mentre presenta una biforcazione nettamente più ampia alla fine e un massimo damage index superiore dell'8% agli altri due modelli.

Il fattore $k_s = 1$ rispetto all'analisi precedente sembra aver influito creando una frattura maggiormente irregolare con angolo iniziale più ampio che va poi a restringersi per aumentare nuovamente nella fase finale.

E' evidente come la sensibilità della m -convergenza alla legge costitutiva influisca in modo rilevante sul risultato finale.

Intervallo temporale in cui avviene il fenomeno del branching.

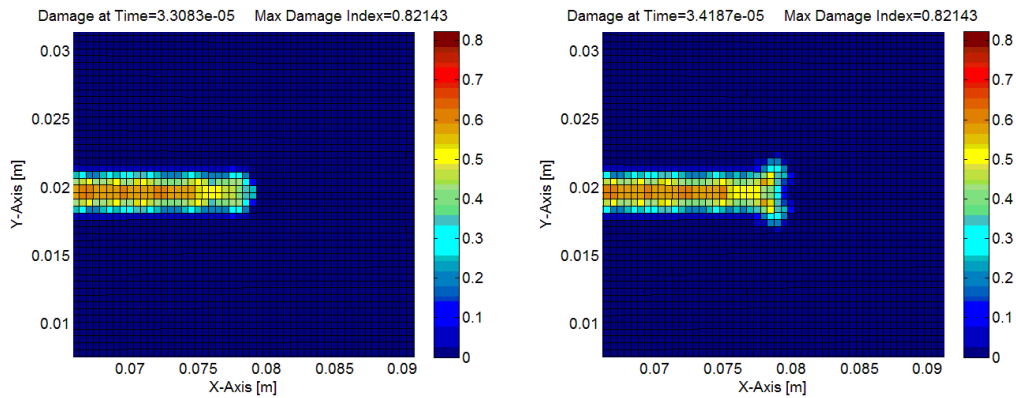


Fig 4.37 Istanti temporali prima e dopo l'inizio del branching

Come nel caso $k_r = 4$ l'intervallo temporale è spostato a valori più alti rispetto al caso lineare con un intervallo temporale compreso tra $33.1 \div 34.2 \mu s$. Si nota come il branching avvenga ad un danneggiamento molto basso del materiale rispetto alle analisi precedenti. Tale aspetto, osservato anche nel caso $kr = 4$, porta a considerare come l'allontanarsi dalla forma della legge lineare modifichi il comportamento del materiale nei confronti del branching. Se si considera il modello di perdita di energia descritto nel paragrafo 4.3, si può ipotizzare un continuo indebolimento dei bond in fronte all'apice della cricca, i quali permettono alla frattura di seguire un comportamento lineare più a lungo per poi biforcarsi ad una lunghezza di cricca maggiore.

Profili delle velocità.

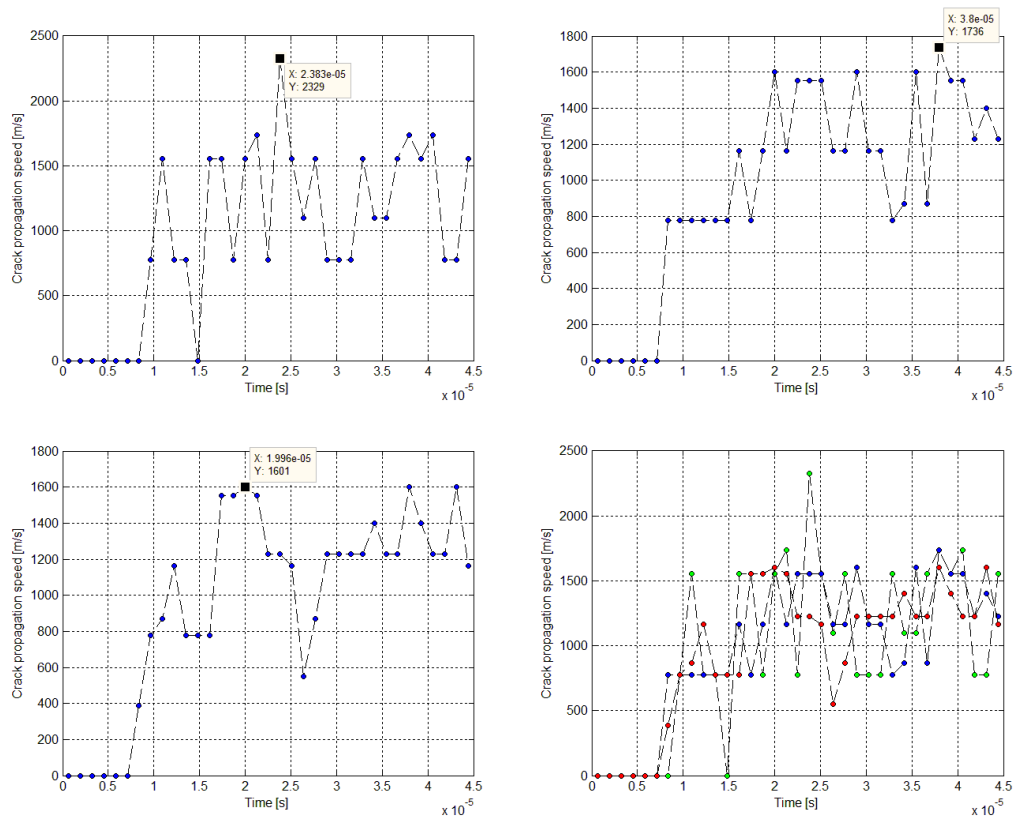


Fig 4.38 Grafici delle velocità di propagazione della cricca per i modelli in esame. Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso, modello: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza e unione dei tre grafici in cui verde=4k nodi, blu=16k nodi δ -convergenza, rosso=16k nodi m -convergenza

Dai grafici si evince un andamento maggiormente irregolare per il modello coarse, con un punto che va a zero (dovuto probabilmente alla discretizzazione più grezza) e un picco massimo ben definito, il quale presenta la medesima velocità del caso precedentemente trattato. Il modello refined- δ ha una velocità più bassa anche confrontandolo al modello precedente, mentre il refined- m presenta la velocità minore tra i tre:

Modello	Velocità max [m/s]	Criterio usato
4k nodi	2329	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$
16k nodi δ -conv.	1736	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$
16k nodi m -conv	1601	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$

Tabella 4.24 Velocità massime ottenute e criterio utilizzato per il calcolo della velocità

Dai dati si osserva come il parametro introdotto non modifichi la velocità massima nel modello coarse, a differenza del modello refined- δ che vede un abbassamento della sua velocità pari a circa il 12%. La variazione maggiore si ha nel modello refined- m in cui la velocità massima varia del 54%.

Deformata e valore di apertura massima all'istante finale.

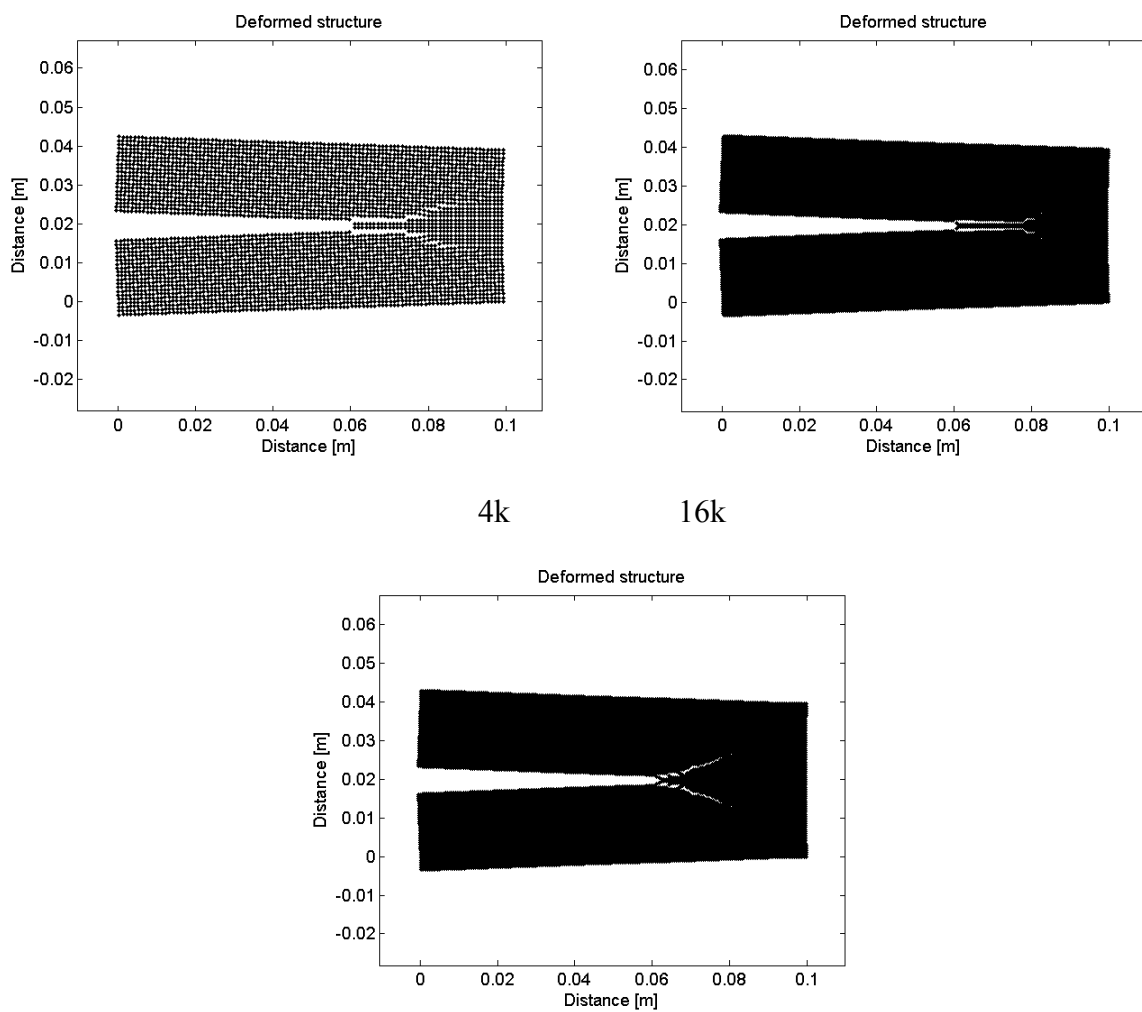


Fig 4.39 Deformata all'istante finale dell'integrazione con spostamenti amplificati di 10 volte. Da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso, modello: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza

Modello	ID nodi [sup, inf]	Apertura [m]
4k nodi	[2001,1901]	0.6738
16k nodi δ -conv.	[8001,7801]	0.6824
16k nodi m -conv.	[8001,7801]	0.6776

Tabella 4.25 Apertura stimata e relativi nodi di riferimento

In tabella è evidente come siano aumentati i valori di apertura sia rispetto al modello lineare, sia rispetto al modello precedente. In questo caso è il modello refined- δ a presentare il valore maggiore, in contrasto con quanto visto finora. Il valore intermedio è appannaggio ancora del modello refined- m .

Modello trilineare $k_r=4, k_s=1.8$

Si introduce il modello trilineare con doppia pendenza agli estremi e quindi con $k_s > 1$.

Punti legge costitutiva

Stretch	Force [N/m^6]
$-2.0e^{-2}$	$-1.379e^{+17}$
0	0
$5.289e^{-4}$	$3.648e^{+15}$
$1.175e^{-3}$	$3.648e^{+15}$
$2.116e^{-3}$	0

Tabella 4.26 Dati modelli 4k, 16k m -convergenza

Stretch	Force [N/m^6]
$-2.0e^{-2}$	$-1.103e^{+18}$
0	0
$7.479e^{-4}$	$4.127e^{+16}$
$1.662e^{-3}$	$4.127e^{+16}$
$2.992e^{-3}$	0

Tabella 4.27 Dati modello 16k δ -convergenza

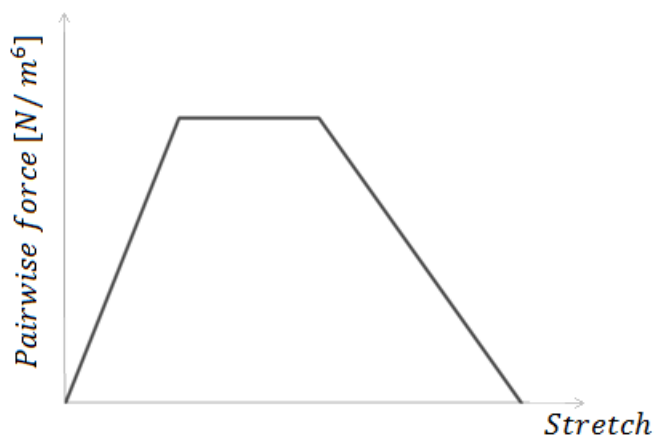


Fig 4.40 Modello trilineare $k_r=4, k_s=1.8$

Grafici del danno all'istante finale per i tre modelli presi in esame.

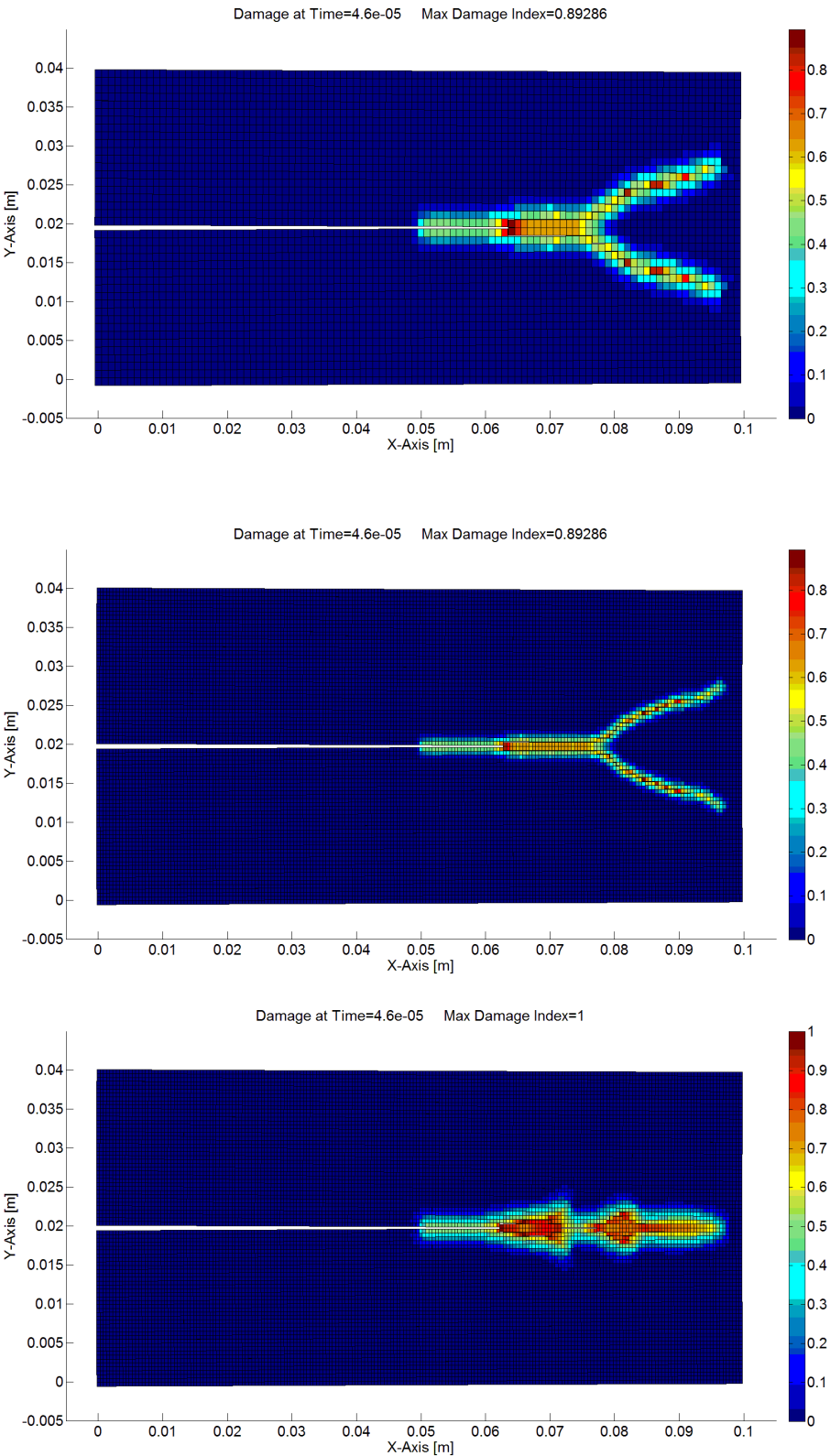


Fig 4.41 Andamento del danno. Modelli dall'alto al basso: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza

Si può notare un'ottima somiglianza tra il caso coarse e refined- δ per quanto riguarda la morfologia della frattura, sia nella zona di pre-biforcazione sia nei rami del branching. Tali rami risultano meno frastagliati e più lineari rispetto al caso precedente, del quale rimane il caratteristico cambio di inclinazione alla fine dei bracci. Come per l'analisi con $k_r = 4$ si nota una forte divergenza della soluzione nel modello refined- m il quale presenta una morfologia simile a tale analisi ma con la presenza di due zone allargate e ampiamente danneggiate anzichè una, quasi come se vi fosse la tendenza ad attuare due punti di branching che tuttavia non riescono a svilupparsi. Il massimo damage index del modello refined- m risulta, in analogia al modello $k_r = 4$, dell'11% maggiore rispetto ai due casi qui presentati.

Tabella della lunghezza della cricca primaria e degli angoli del branching:

Modello	ID nodo	Lunghezza [mm]	Criterio usato	ϑ_i [deg]	ϑ_f [deg]
4k nodi	2078	77	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 39	≈ 27
16k nodi δ -conv.	8157	78	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 37	≈ 26
16k nodi m -conv.	//	//	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	//	//

Tabella 4.28 Lunghezza massima della cricca principale e inclinazione dei bracci del branching. (cfr. fig. 4.41)

Si nota come, anche in questa legge costitutiva, vi sia un inizio del branching ad una lunghezza maggiore rispetto a quanto generalmente visto sin qui. Il parametro $k_s > 1$ unitamente ad un k_r elevato sembra aver sortito l'effetto di "chiudere" la biforcazione all'inizio e aumentarne l'apertura angolare verso la fine, se confrontata al caso precedente; mentre i valori di lunghezza della cricca principale non hanno subito variazioni apprezzabili. Infine si fa notare come vi sia un'ottima corrispondenza tra gli angoli del branching valutati per il modello coarse e per il modello refined- δ .

Intervallo temporale in cui avviene il fenomeno del branching.

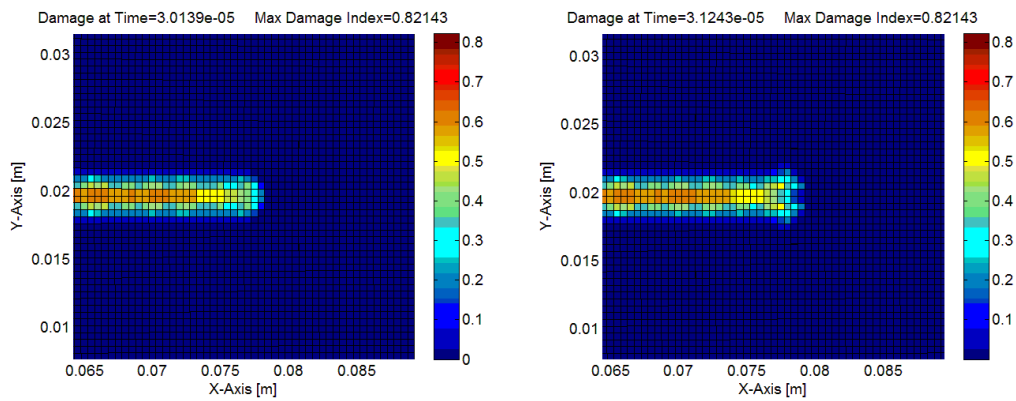


Fig 4.42 Istanti temporali prima e dopo l'inizio del branching

L'intervallo temporale risulta leggermente più basso del caso precedente ed è compreso tra $30.1 \div 31.2 \mu s$. Il fatto non deve stupire, in quanto la distanza massima deve essere poi analizzata con l'ausilio dei profili di velocità per poter apprezzare quanto rapidamente la cricca principale raggiunga lo stato di inizio branching. Anche in tale analisi la biforcazione inizia ad uno stato di danneggiamento nettamente inferiore al massimo raggiunto.

Profili delle velocità.

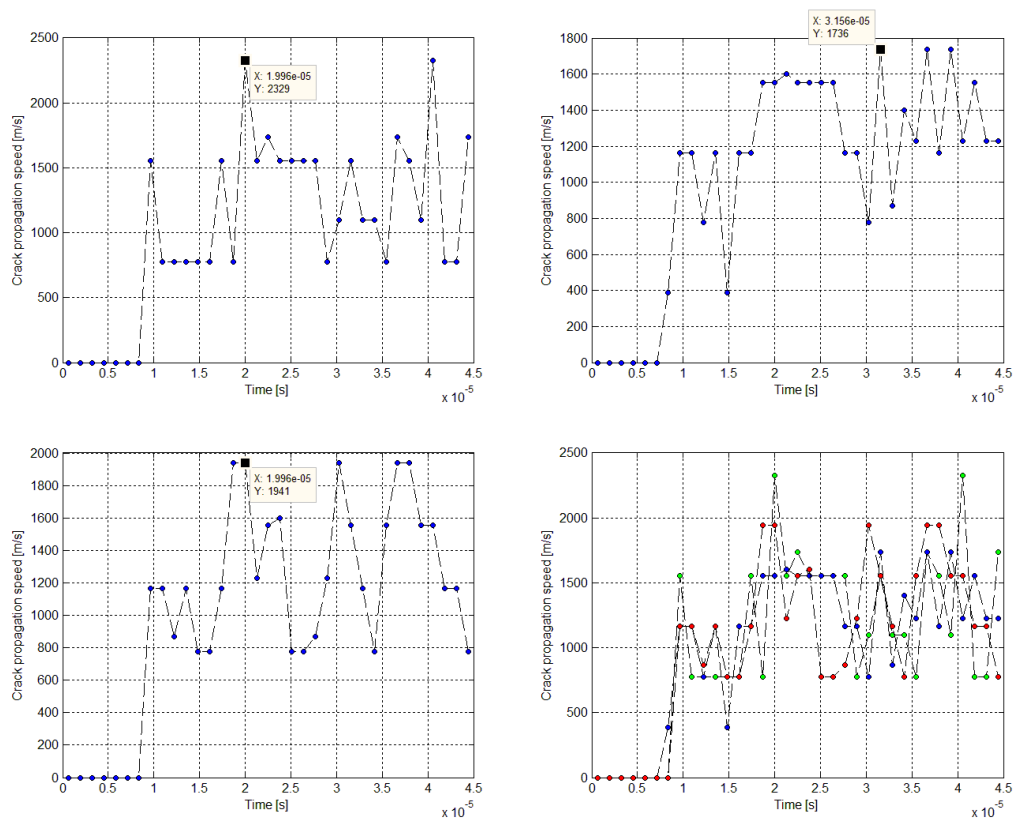


Fig 4.43 Grafici delle velocità di propagazione della cricca per i modelli in esame. Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso, modello: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza e unione dei tre grafici in cui verde=4k nodi, blu=16k nodi δ -convergenza, rosso=16k nodi m -convergenza

I profili di velocità per i modelli coarse e refined- δ hanno un andamento simile, tranne in alcuni particolari punti; il profilo di velocità del modello refined- m presenta invece un andamento più irregolare.

Modello	Velocità max [m/s]	Criterio usato
4k nodi	2329	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$
16k nodi δ -conv.	1736	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$
16k nodi m -conv.	1941	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$

Tabella 4.29 Velocità massime ottenute e criterio utilizzato per il calcolo della velocità

I valori delle velocità massime risultano identici a quelli del caso $k_r = 4$, $k_s = 1$ per i modelli coarse e refined- δ , rispettando l'andamento che impone la velocità registrata con il modello refined minore di quella ottenuta con il modello coarse. Il modello refined- m presenta invece una velocità superiore all'analisi precedente di circa il 17%, dimostrando ancora una volta come il tipo di convergenza possa influenzare notevolmente i risultati della simulazione.

Deformata e valore di apertura massima all'istante finale.

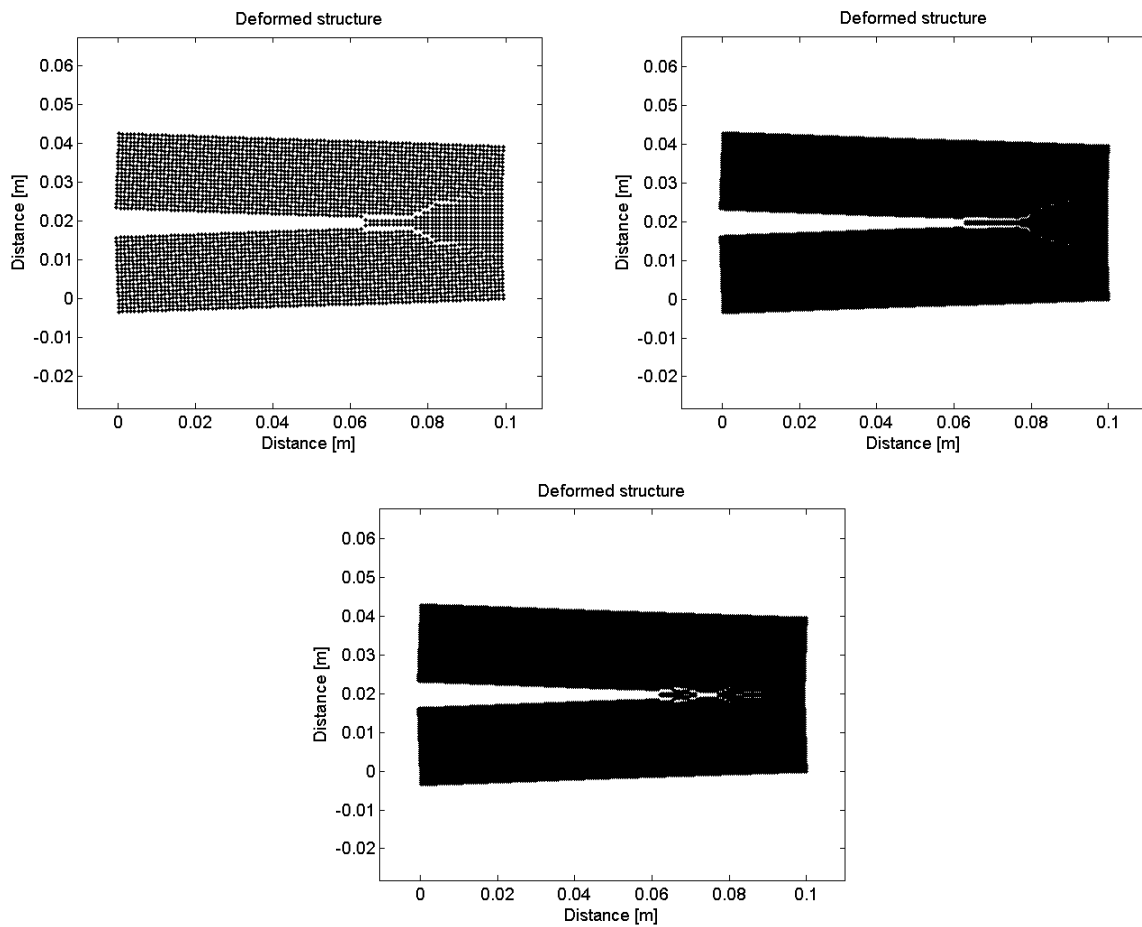


Fig 4.44 Deformata all'istante finale dell'integrazione con spostamenti amplificati di 10 volte. Da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso, modello: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza

Modello	ID nodi [sup, inf]	Apertura [mm]
4k nodi	[2001,1901]	0.6698
16k nodi δ -conv.	[8001,7801]	0.6775
16k nodi m -conv.	[8001,7801]	0.6743

Tabella 4.30 Apertura stimata e relativi nodi di riferimento

Il modello refined- δ presenta ancora apertura maggiore, seguito dal modello refined- m ; mentre il valore minore è riservato nuovamente al modello coarse. Si osservi come, anche in questo caso, il modello refined- m presenti un branching molto stretto ad inizio cricca, il quale va poi a riunirsi successivamente in un frattura lineare per poi biforcarsi ancora una volta e infine riunirsi.

Modello trilineare $k_r=4, k_s=1, k_f=1.3$

Con il presente modello si introduce nella legge costitutiva la pendenza nel tratto compreso tra il primo punto di “scollinamento” e lo stretch massimo; tale pendenza verrà considerata tramite l’introduzione del parametro adimensionale k_f .

Punti legge costitutiva

Stretch	Force [N/m^6]
$-2.0e^{-2}$	$-1.379e^{+17}$
0	0
$4.300e^{-4}$	$2.966e^{+15}$
$1.720e^{-3}$	$3.855e^{+15}$
$1.720e^{-3}$	0

Tabella 4.31 Dati modelli 4k, 16k m -convergenza

Stretch	Force [N/m^6]
$-2.0e^{-2}$	$-1.103474e^{+18}$
0	0
$1.014e^{-3}$	$5.596e^{+16}$
$1.826e^{-3}$	$7.275e^{+16}$
$1.826e^{-3}$	0

Tabella 4.32 Dati modello 16k δ -convergenza

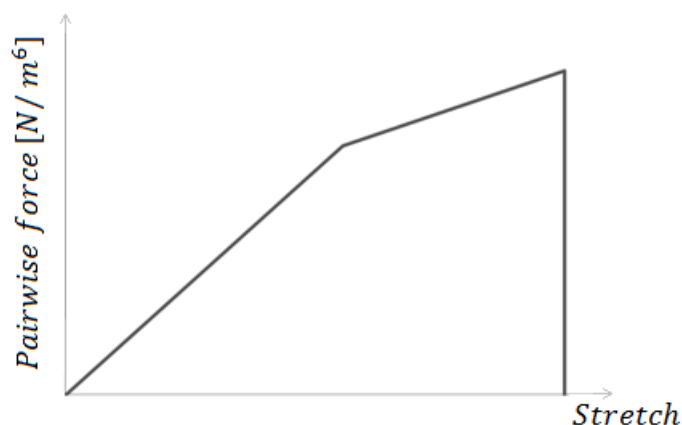


Fig 4.45 Modello trilineare $k_r=4, k_s=1, k_f=1.3$

Grafici del danno all'istante finale per i modelli presi in esame.

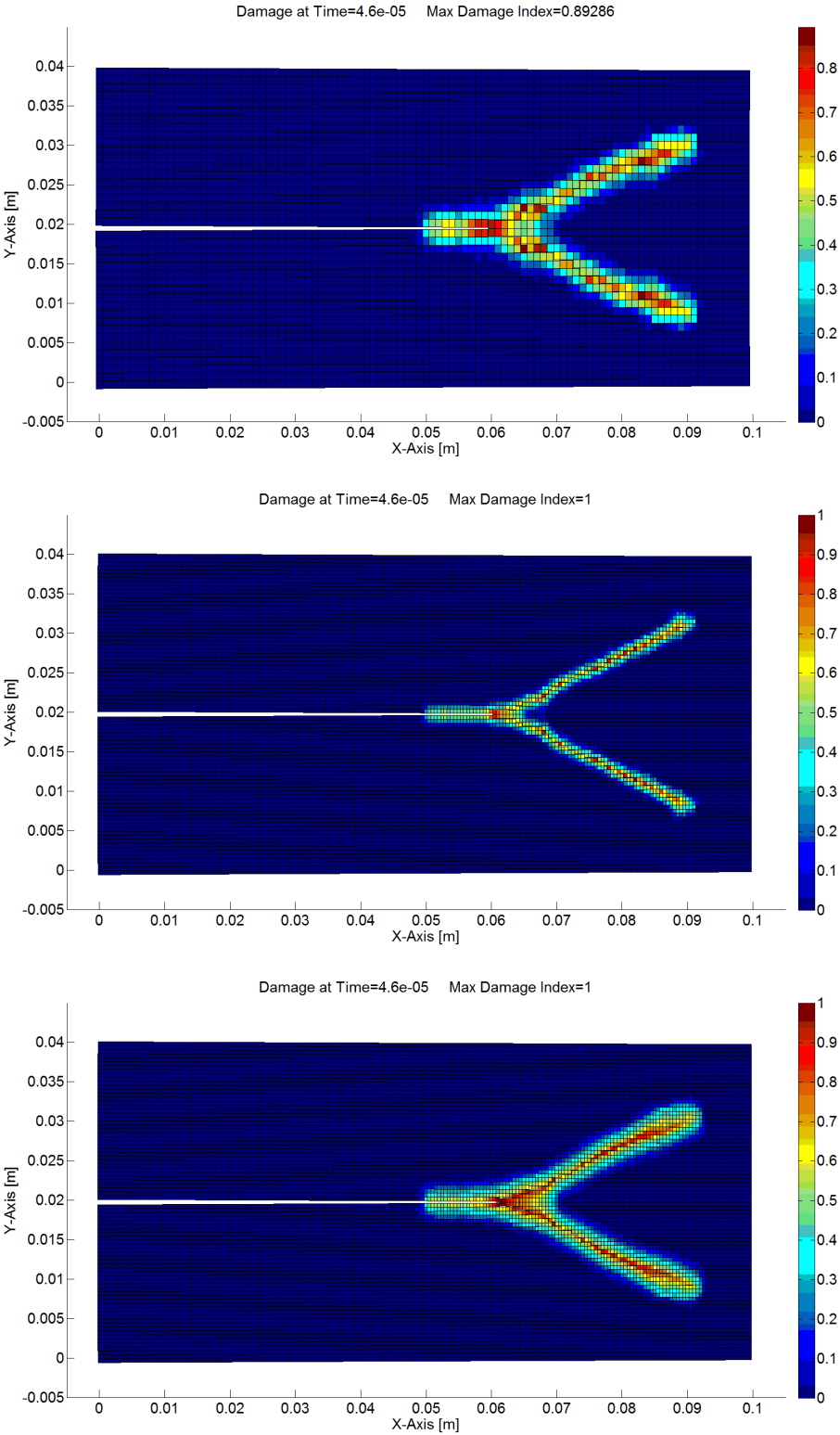


Fig 4.46 Andamento del danno. Modelli dall'alto al basso: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza

Si nota una certa somiglianza morfologica nel modello coarse e nel modello refined- δ , salvo nella parte finale del branching in cui il modello più rifinito presenta una lieve divergenza verso l'esterno; caratteristica non presente nel modello coarse. Il modello refined- m sembra essere quello con la maggior differenza morfologica, presentando una certa somiglianza con lo stesso modello del caso $k_r = 4, k_s = 1$; in particolare si possono ancora notare gli estremi del branching con una forma ad "uncino". A prima vista sembra che l' m -convergenza, in questo caso, sia poco sensibile all'introduzione del parametro k_f .

Tabella della lunghezza della cricca primaria e degli angoli del branching:

Modello	ID nodo	Lunghezza [mm]	Criterio usato	ϑ_i [deg]	ϑ_f [deg]
4k nodi	2062	61	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 32	≈ 27
16k nodi δ -conv.	8129	64	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 30	≈ 29
16k nodi m -conv.	8138	68.5	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 37	≈ 29

Tabella 4.33 Lunghezza massima della cricca principale e inclinazione dei bracci del branching. (cfr. fig. 4.46)

Si nota, nei modelli coarse e refined- δ , come, rispetto al caso in cui non è presente k_f , vi sia un' apice della cricca principale nettamente più corta, un' apertura finale maggiore ed un branching decisamente più lineare; la morfologia della frattura assomiglia più al caso lineare che al caso $k_r = 4$, infatti osservando il grafico della legge costitutiva si nota una somiglianza più vicina al caso $k_r = 1$; tuttavia in antitesi con i modelli a $k_r = 4$ vi è una biforcazione avvenuta ad una lunghezza inferiore, anche rispetto al caso lineare, quindi si può per ora ipotizzare che tale comportamento sia dovuto al nuovo parametro $k_f > 1$. L'angolo iniziale del branching sembra svilupparsi a 45 gradi per poi chiudersi velocemente quasi parallelo alla frattura principale; tale comportamento genera un angolo medio di 30 gradi, mentre la successiva apertura della cricca porta ad ottenere il valore più alto dell'angolo finale finora registrato. Il modello refined- m presenta invece una buona somiglianza con l'analisi $k_r = 4, k_s = 1$; infatti la lunghezza della cricca principale è sostanzialmente la medesima per i due casi, mentre gli angoli presentano delle variazioni tali per cui sia all'inizio sia alla fine il branching risulta un po' più chiuso. Rispetto ai modelli coarse e refined- δ di quest'analisi, quello a m -convergenza presenta un angolo iniziale maggiore mentre il finale risulta sostanzialmente lo stesso.

Intervallo temporale in cui avviene il fenomeno del branching.

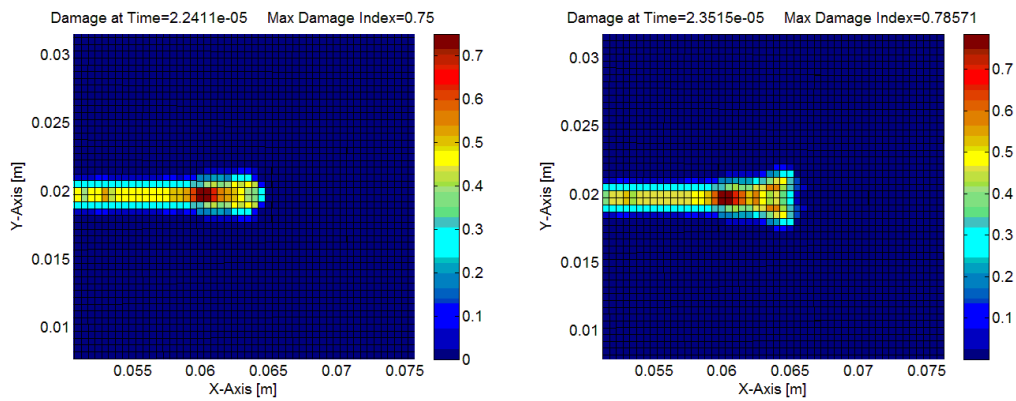


Fig 4.47 Istanti temporali prima e dopo l'inizio del branching

Si ottiene un intervallo temporale in cui si sviluppa il fenomeno della biforcazione attorno ai $22.4 \div 23.5 \mu s$. Nonostante la lunghezza della cricca principale sia molto corta, l'istante in cui avviene il branching è estremamente simile all'intervallo del caso lineare. Tale risultato, come si vedrà in seguito, è dovuto ad una velocità massima nettamente più bassa. Come per il caso lineare, il branching avviene subito dopo una zona altamente danneggiata; tale comportamento si evince anche dagli istanti in cui si ha la velocità massima; tali istanti coincidono con quelli in cui inizia la biforcazione, caratteristica che non era presente nelle analisi successive alla lineare.

Profili delle velocità.

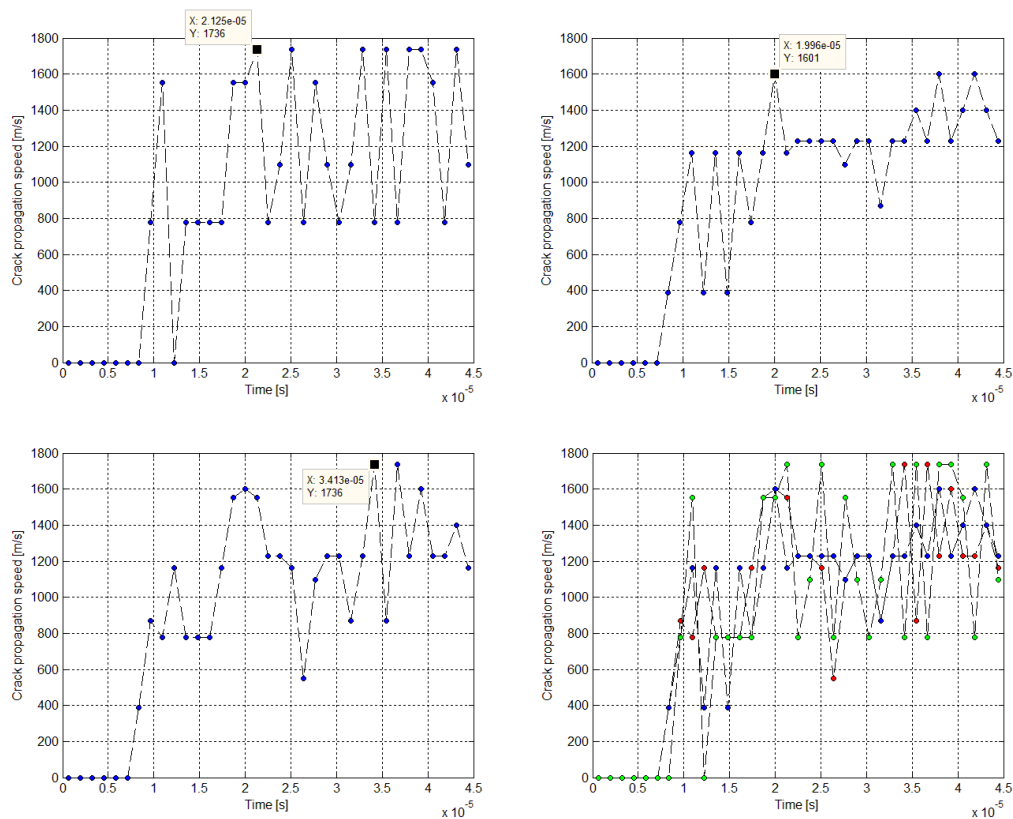


Fig 4.48 Grafici delle velocità di propagazione della cricca per i modelli in esame. Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso, modello: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza e unione dei tre grafici in cui verde=4k nodi, blu=16k nodi δ -convergenza, rosso=16k nodi m -convergenza

Il modello coarse presenta un profilo nettamente più frastagliato con molti punti ad elevata velocità; ciò può essere dovuto ad un numero di $\Delta step$ non ottimale per la descrizione di tale modello; nonostante ciò per permettere un confronto con tutti i casi è stato scelto di tenere tale valore invariato. I modelli refined presentano un profilo più simile tra loro rispetto al modello coarse.

Modello	Velocità max [m/s]	Criterio usato
4k nodi	1736	$\varphi(x) > 0.35$
16k nodi δ -conv.	1601	$\varphi(x) > 0.35$
16k nodi m -conv.	1736	$\varphi(x) > 0.35$

Tabella 4.34 Velocità massime ottenute e criterio utilizzato per il calcolo della velocità

Si nota come le velocità massime del modello coarse e refined- m coincidano, mentre il modello refined- δ presenta il valore minore. Rispetto al caso lineare si ha una diminuzione delle velocità massime, mentre se si considera il caso $kr = 4$, $ks = 1$ si nota come i valori delle velocità si siano invertiti per i modelli refined.

Deformata e valore di apertura massima all'istante finale.

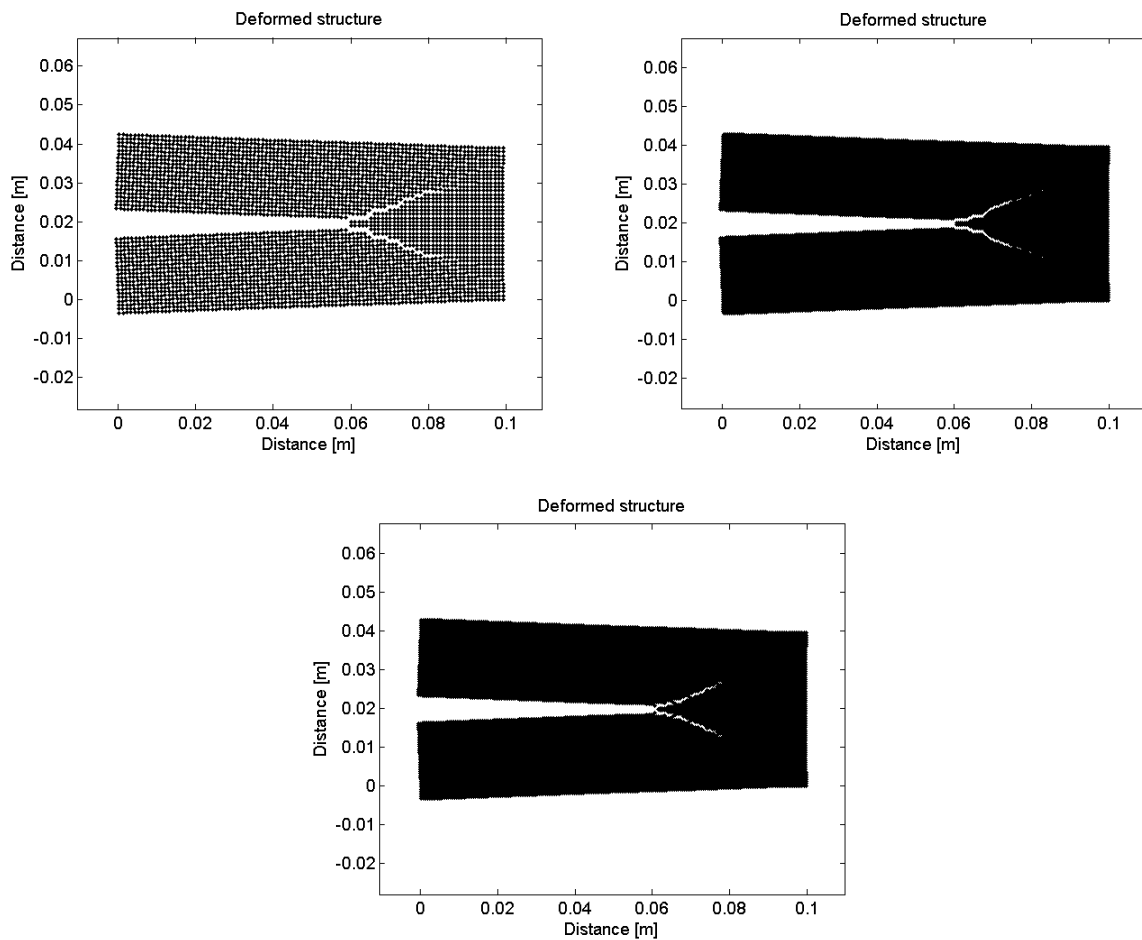


Fig 4.49 Deformata all'istante finale dell'integrazione con spostamenti amplificati di 10 volte. Da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso, modello: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza

Modello	ID nodi [sup, inf]	Apertura [mm]
4k nodi	[2001,1901]	0.6755
16k nodi δ -conv.	[8001,7801]	0.6821
16k nodi m -conv.	[8001,7801]	0.6773

Tabella 4.35 Apertura stimata e relativi nodi di riferimento

Come si può notare, anche in questo caso, il modello coarse presenta un'apertura minore rispetto ai modelli refined. Dalle deformate è ben visibile il comportamento diverso assunto dal modello ad m -convergenza, il quale presenta inizialmente una pendenza del tratto della biforcazione maggiore e un branching più lineare rispetto agli altri due modelli.

Modello trilineare $k_r=4, k_s=1, k_f=0.7$

Tale modello vede l'inserimento di una modifica alla pendenza del secondo tratto lineare, in modo tale che risulti negativa al fine di ottenere un confronto al variare di k_f con il modello precedentemente esposto.

Punti legge costitutiva

Stretch	Force [N/m^6]
$-2.0e^{-2}$	$-1.379e^{+17}$
0	0
$4.893e^{-4}$	$3.375e^{+15}$
$1.957e^{-3}$	$2.362e^{+15}$
$1.957e^{-3}$	0

Tabella 4.36 Dati modelli 4k, 16k m -convergenza

Stretch	Force [N/m^6]
$-2.0e^{-2}$	$-1.103e^{+18}$
0	0
$6.920e^{-4}$	$3.818e^{+16}$
$2.768e^{-3}$	$2.673e^{+16}$
$2.768e^{-3}$	0

$k_f=0.7$

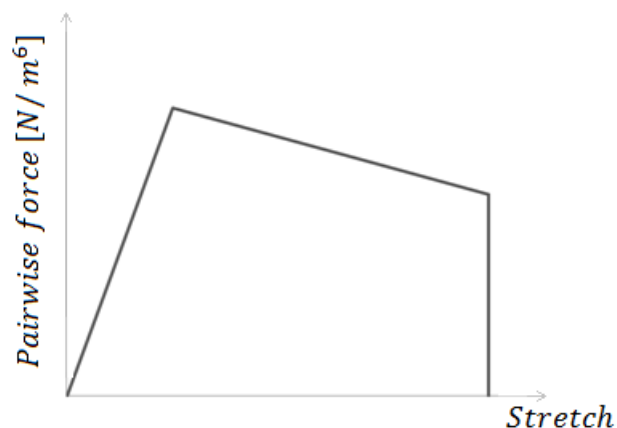


Fig 4.50 Modello trilineare $k_r=4, k_s=1,$

Tabella 4.37 Dati modello 16k δ -convergenza

Grafici del danno all'istante finale per i modelli presi in esame

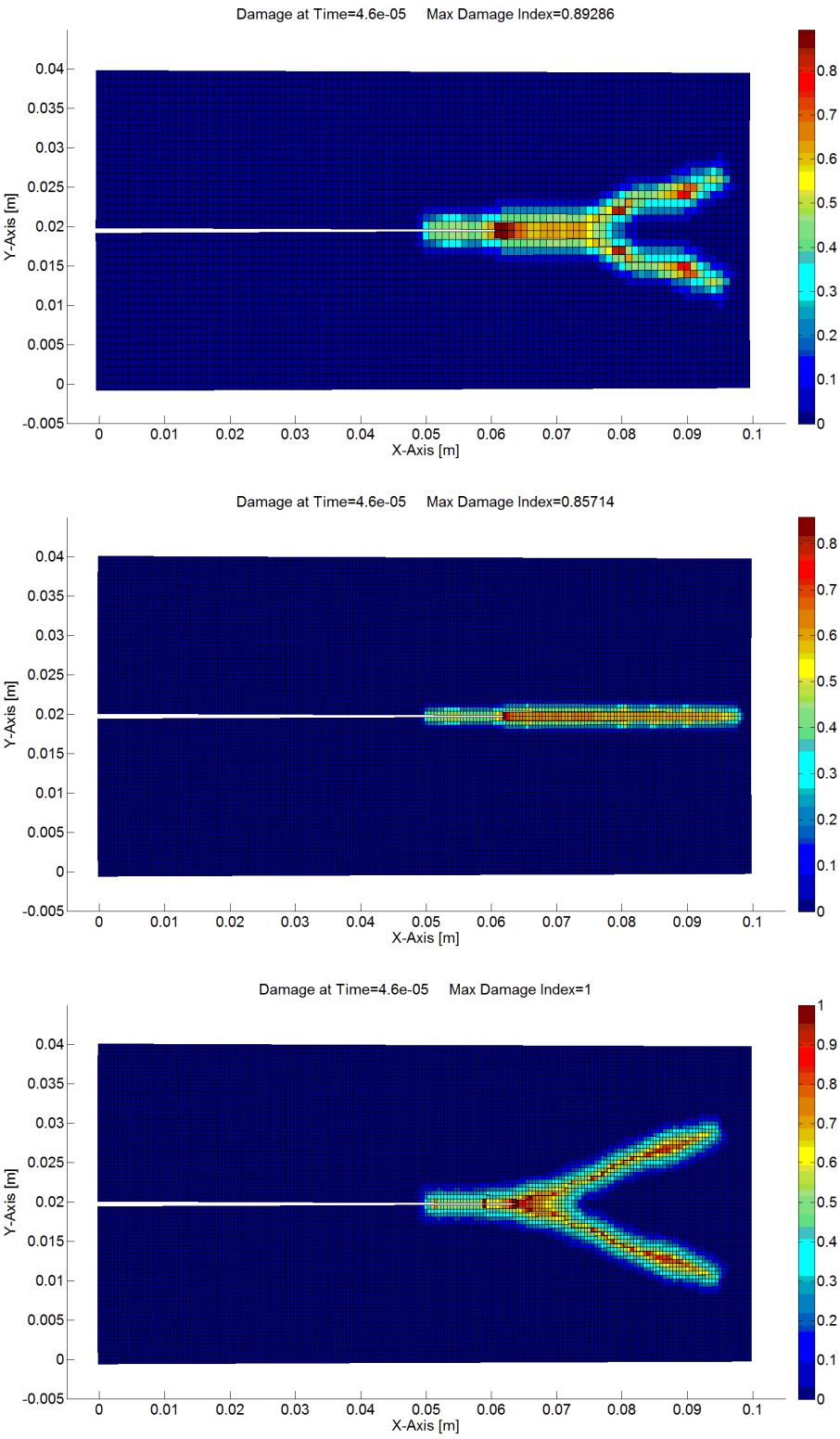


Fig 4.51 Andamento del danno. Modelli dall'alto al basso: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza

In figura 4.47 è possibile notare come questa volta il modello refined- δ , a differenza del modello coarse e del refined- m , non presenti il branching, generando una frattura estremamente lineare. Questo fa presupporre una sensibilità alla legge costitutiva anche per i modelli a δ -convergenza la quale, sebbene sembri essere meno sensibile rispetto alla m -convergenza, non è immune a tale effetto al variare della forma della legge costitutiva che, nel caso specifico, è la meno somigliante ad una tipologia lineare o bilineare. Il modello refined- m invece si presenta ora come il più simile al caso coarse.

Tabella della lunghezza della cricca primaria e degli angoli del branching:

Modello	ID nodo	Lunghezza [mm]	Criterio usato	ϑ_i [deg]	ϑ_f [deg]
4k nodi	2078	77	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 34	≈ 23
16k nodi δ -conv.	//	//	//	//	//
16k nodi m -conv.	8144	71.5	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 34	≈ 24

Tabella 4.38 Lunghezza massima della cricca principale e inclinazione dei bracci del branching. (cfr. fig. 4.51)

Rispetto al modello visto precedentemente si osserva come il parametro $k_f < 1$ abbia portato un notevole allungamento della frattura pre-branching ed un angolo iniziale di biforcazione maggiore, mentre il valore inferiore dell'angolo finale è indice di un branching più chiuso. Tali differenze risultano meno marcate nel modello refined- m .

Intervallo temporale in cui avviene il fenomeno del branching (modello coarse).

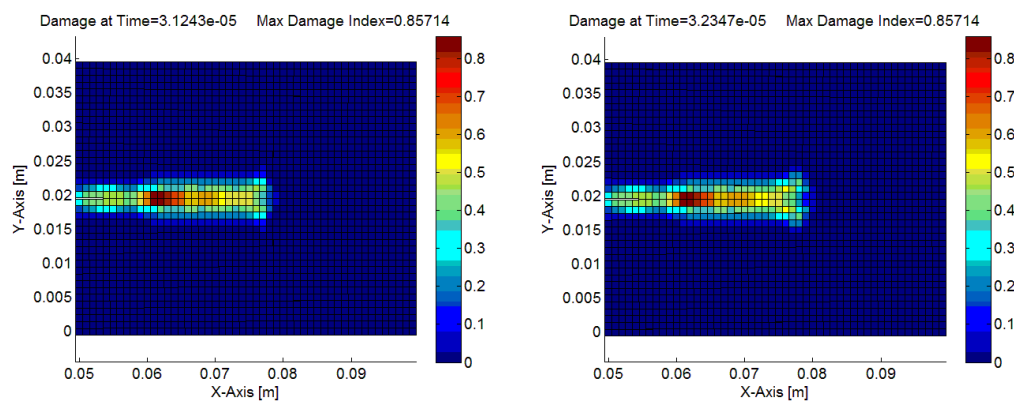


Fig 4.52 Istanti temporali prima e dopo l'inizio del branching

Rispetto a quanto visto precedentemente l'intervallo temporale è spostato a valori maggiori, in relazione all' aumento della distanza a cui inizia la biforcazione, tale intervallo ora è compreso tra $31.2 \div 32.3 \mu s$.

Profili delle velocità.

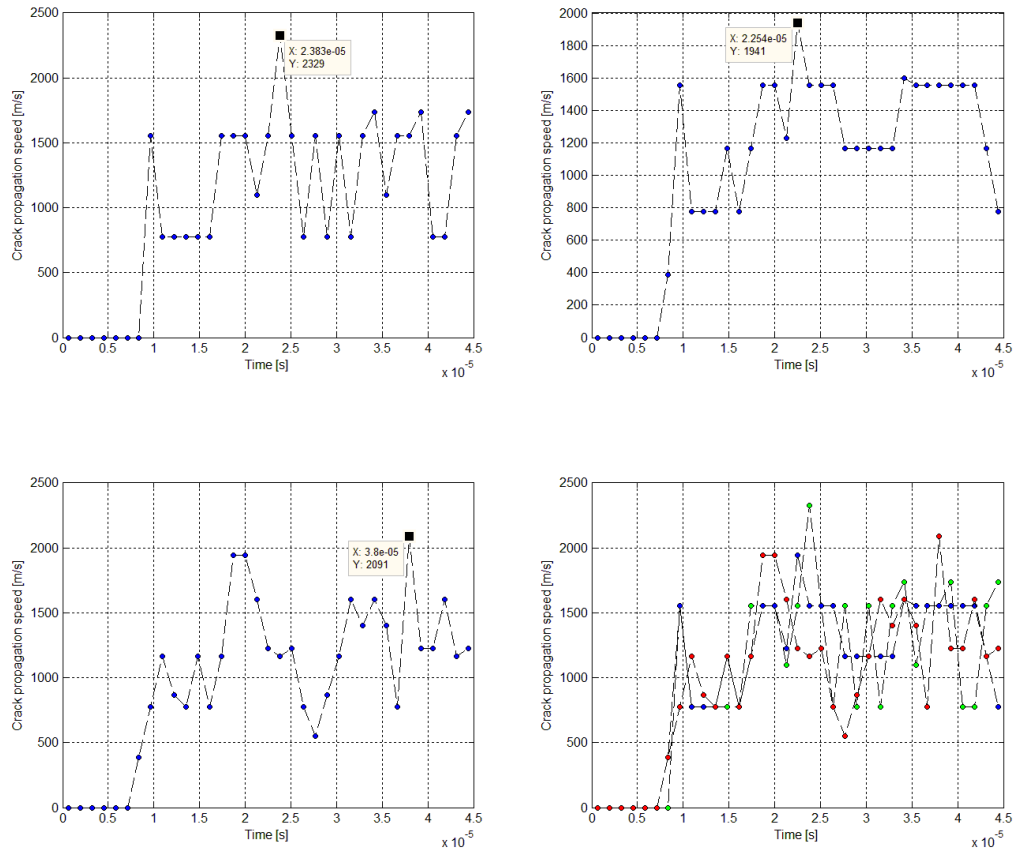


Fig 4.53 Grafici delle velocità di propagazione della cricca per i modelli in esame. Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso, modello: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza e unione dei tre grafici in cui verde=4k nodi, blu=16k nodi δ -convergenza, rosso=16k nodi m -convergenza

È evidente come, sino al raggiungimento del picco di velocità massima, vi sia una corrispondenza quasi perfetta tra i primi due grafici in alto, la quale viene meno al superamento di tale valore. Il grafico del modello a m -convergenza sembra distaccarsi in modo netto dai primi due.

Modello	Velocità max [m/s]	Criterio usato
4k nodi	2329	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$
16k nodi δ -conv.	1941	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$
16k nodi m -conv.	2091	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$

Tabella 4.39 Velocità massime ottenute e criterio utilizzato per il calcolo della velocità

Si nota in tabella un valore del modello refined- m superiore al modello refined- δ . I valori delle velocità massime sono nettamente superiori rispetto a quelli dell'analisi precedente e si avvicinano notevolmente all'analisi $k_r = 4, k_s = 1.8$.

Deformata e valore di apertura massima all'istante finale.

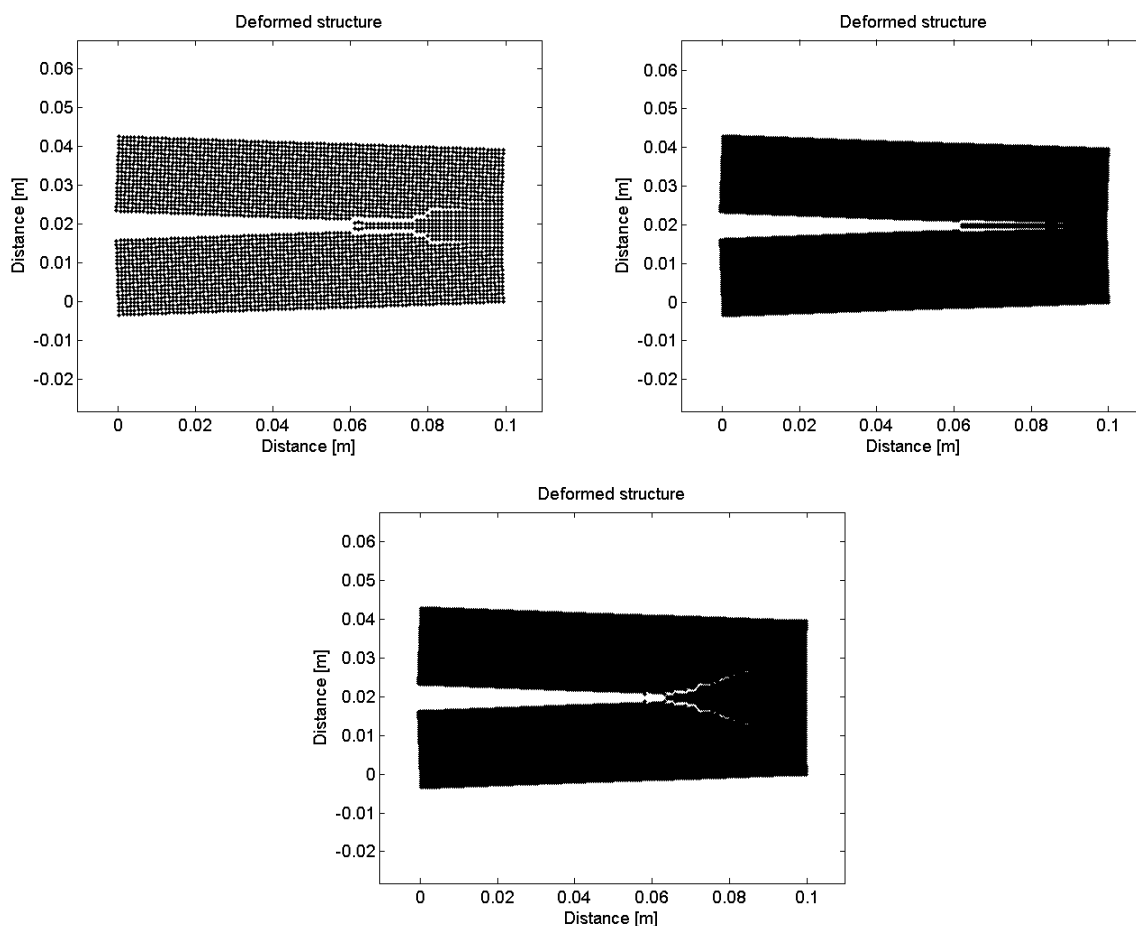


Fig 4.54 Deformata all'istante finale dell'integrazione con spostamenti amplificati di 10 volte. Da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso, modello: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza

Modello	ID nodi [sup, inf]	Apertura [mm]
4k nodi	[2001,1901]	0.6721
16k nodi δ -conv.	[8001,7801]	0.6782
16k nodi m -conv.	[8001,7801]	0.6750

Tabella 4.40 Apertura stimata e relativi nodi di riferimento

Dalle deformate si osserva la linearità della frattura del modello refined- δ , la frattura del modello refined- m risulta la più frastagliata. Infine il modello coarse presenta chiaramente una cricca principale più allungata.

Modello trilineare $k_r=4$, $k_s=2.2$, $k_f=1.3$

L'ultimo modello che verrà presentato nel dettaglio è analogo al terzultimo caso tranne per il fatto che è stata aumentata la pendenza nella terza zona della legge costitutiva. Ciò è dovuto ad un incremento del parametro k_s , permettendo così di valutare l'influenza di tale parametro su una legge trilineare generale.

Punti legge costitutiva

Stretch	Force [N/m^6]
$-2.0e^{-2}$	$-1.379e^{+17}$
0	0
$5.054e^{-4}$	$3.486e^{+15}$
$9.189e^{-3}$	$4.531e^{+15}$
$2.022e^{-3}$	0

Tabella 4.41 Dati modelli 4k, 16k m -convergenza

Stretch	Force [N/m^6]
$-2.0e^{-2}$	$-1.103474e^{+18}$
0	0
$7.148e^{-4}$	$3.944e^{+16}$
$1.300e^{-3}$	$5.127e^{+16}$
$2.859e^{-3}$	0

Tabella 4.42 Dati modello 16k δ -convergenza



Fig 4.55 Modello trilineare $k_r=4$, $k_s=2.2$, $k_f=1.3$

Grafici del danno all'istante finale per i modelli presi in esame

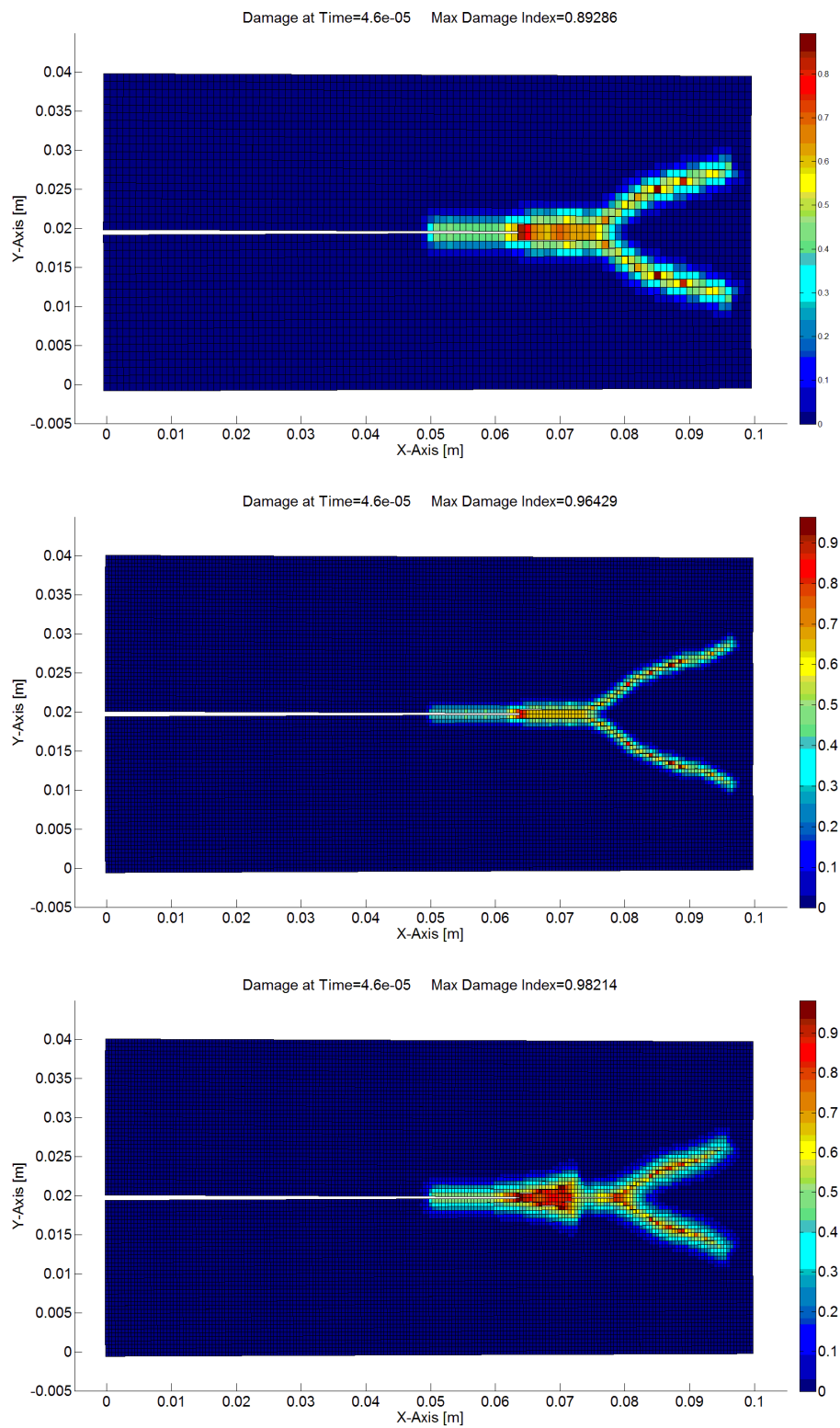


Fig 4.56 Andamento del danno. Modelli dall'alto al basso: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza

Il modello coarse, come si può notare, riesce a rappresentare sufficientemente bene la morfologia del crack, individuando lungo la linea di propagazione della frattura due zone: la prima corrisponde ad un danneggiamento minore e più confinato, mentre la seconda ad un danneggiamento maggiore e più disperso; caratteristica riconoscibile chiaramente anche nel modello refined- δ . Il modello refined- m presenta invece una forma di frattura differente: prestando maggiormente attenzione si possono riconoscere degli elementi comuni ai due modelli appena descritti, infatti è presente una zona di pre-branching con danneggiamento maggiore rispetto all'inizio della cricca e una forma della biforcazione analoga al modello coarse e refined- δ .

Sembra quindi che in quest'ultima analisi la sensibilità dell' m -convergenza si sia presentata parzialmente rispetto ad altre analisi viste precedentemente. Nella fattispecie si registra una frattura simile al modello $k_r = 4, k_s = 1.8$ e al modello $k_r = 4, k_s = 1, k_f = 1.3$, il quale presenta una certa similitudine con i restanti modelli coarse e refined della propria analisi. Da ciò sembrerebbe che il parametro k_f riesca a rendere meno sensibile l' m -convergenza, mentre un parametro più elevato di k_s , unitamente al già citato k_r , tenda all'opposto.

Tabella della lunghezza della cricca primaria e degli angoli del branching:

Modello	ID nodo	Lunghezza [mm]	Criterio usato	ϑ_i [deg]	ϑ_f [deg]
4k nodi	2078	77	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 40	≈ 26
16k nodi δ -conv.	8152	75.5	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 36	≈ 26
16k nodi m -conv.	8164	81.5	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.39$	≈ 32	≈ 28

Tabella 4.43 Lunghezza massima della cricca principale e inclinazione dei bracci del branching. (cfr. fig. 4.56)

L'aumento del valore di k_s oltre l'unità ha portato ad una frattura principale più lunga con valori analoghi a quanto visto nel caso precedente. L'angolo è generalmente aumentato all'inizio della biforcazione mentre risulta a valore inferiore alla fine; un comportamento che ricorda quanto visto in precedenza, sebbene con valori leggermente differenti. Sembra quindi plausibile, ma meriterebbe un'analisi più approfondita, un comportamento di $k_s > 1$ analogo a quanto si può ottenere con $k_f < 1$ nel caso trilineare con pendenza centrale, almeno per i casi coarse e refined- δ .

Intervallo temporale in cui avviene il fenomeno del branching.

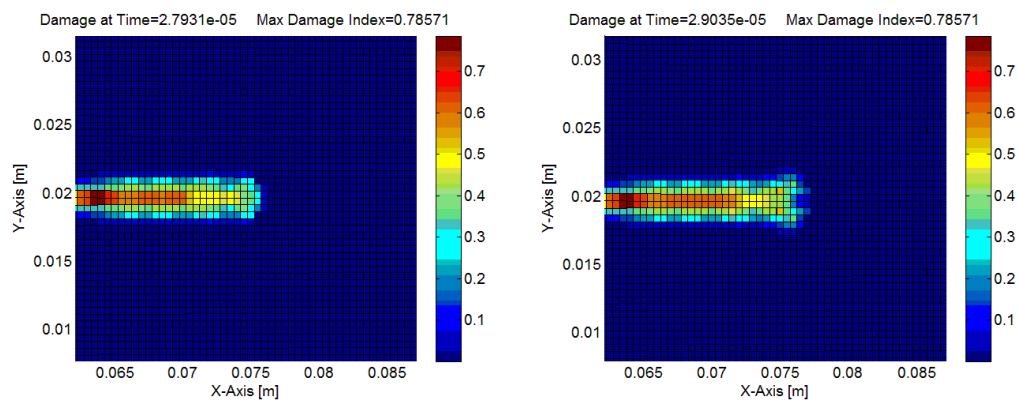


Fig 4.57 Istanti temporali prima e dopo l'inizio del branching

L'intervallo temporale in cui avviene il fenomeno di branching è compreso tra $27.9 \div 29 \mu\text{s}$ che come si può notare si avvicina ai valori del caso precedente, in cui l'errore più grande può essere imputato al fatto di aver dovuto utilizzare il modello coarse per il calcolo dell'intervallo temporale.

Profili delle velocità.

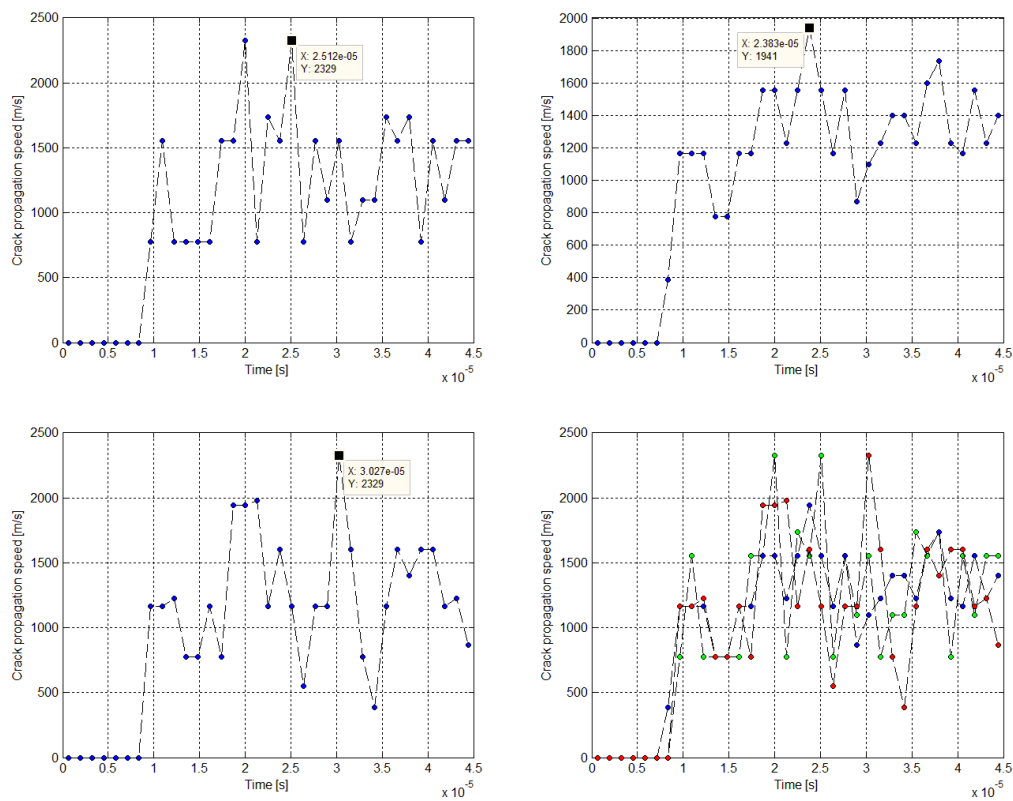


Fig 4.58 Grafici delle velocità di propagazione della cricca per i modelli in esame. Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso, modello: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza e unione dei tre grafici in cui verde=4k nodi, blu=16k nodi δ -convergenza, rosso=16k nodi m -convergenza

Se si confrontano i profili di velocità attuali con quelli presentati precedentemente possiamo osservare una netta somiglianza per il caso coarse e refined- m e ugualmente, anche se in maniera minore passato il punto di massima velocità, per il caso refined- δ . Tali aspetti rafforzano la teoria che nel modello trilineare generale k_f e k_s abbiano ruoli analoghi e inversamente proporzionali tra loro.

Modello	Velocità max [m/s]	Criterio usato
4k nodi	2329	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$
16k nodi δ -conv.	1941	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$
16k nodi m -conv.	2329	$\varphi(\mathbf{x}) > 0.35$

Tabella 4.44 Velocità massime ottenute e criterio utilizzato per il calcolo della velocità

Anche le velocità massime sono uguali al caso precedente (tranne per il caso refined- m che risulta avere un picco di velocità maggiore) e mantengono il rapporto velocità massima coarse maggiore di quella refined- δ . La velocità differente nel caso a m -convergenza tuttavia può essere dovuta ad un' approssimazione del grafico, data dalla natura discreta con cui tale grafico è stato realizzato.

Deformata e valore di apertura massima all'istante finale.

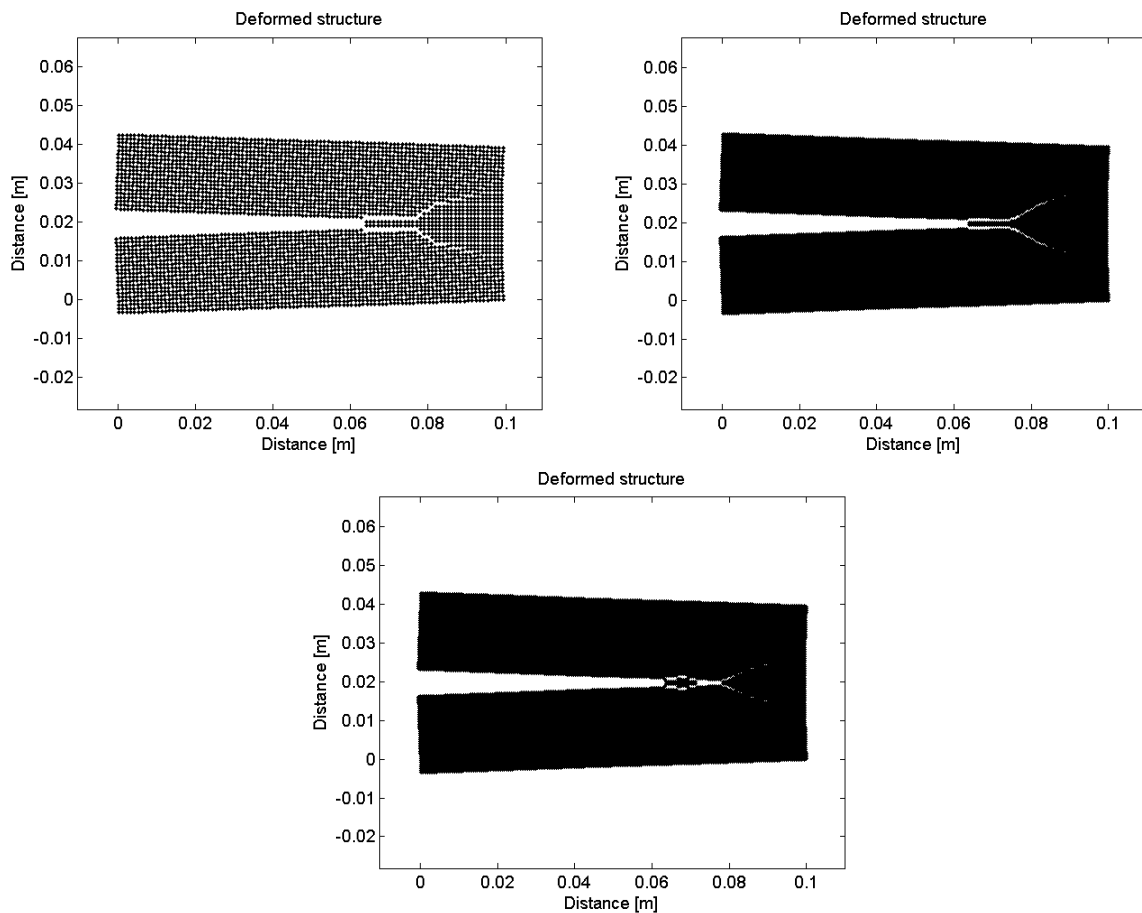


Fig 4.59 Deformata all'istante finale dell'integrazione con spostamenti amplificati di 10 volte. Da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso, modello: 4k nodi, 16k nodi δ -convergenza, 16k nodi m -convergenza

Modello	ID nodi [sup, inf]	Apertura [mm]
4k nodi	[2001,1901]	0.6684
16k nodi δ -conv.	[8001,7801]	0.6768
16k nodi m -conv.	[8001,7801]	0.6734

Tabella 4.45 Apertura stimata e relativi nodi di riferimento

I modelli refined hanno apertura maggiore rispetto al coarse. E' interessante osservare come, anche in questo caso di m -convergenza in cui si è notata una certa sensibilità alla tipologia di legge costitutiva, all'inizio della cricca vi sia un accenno di branching che va a richiudersi successivamente per poi finire nella biforcazione vera e propria.

Il presente modello è l'ultimo per i quali verrà esposta un' analisi dettagliata.

Sono ora presentati modelli ottenuti variando i parametri adimensionali che presentano minime differenza con quanto già esposto; tali modelli vengono inseriti sia per completezza nella trattazione del problema, sia per rimarcare come alcuni parametri siano meno sensibili di altri alla variazione del loro valore. Le prove che seguiranno sono state sviluppate sia con modelli coarse sia con i modelli refined. Per tutti i modelli verranno riportate le lunghezze massime della cricca principale e le velocità massime registrate.

Altre analisi

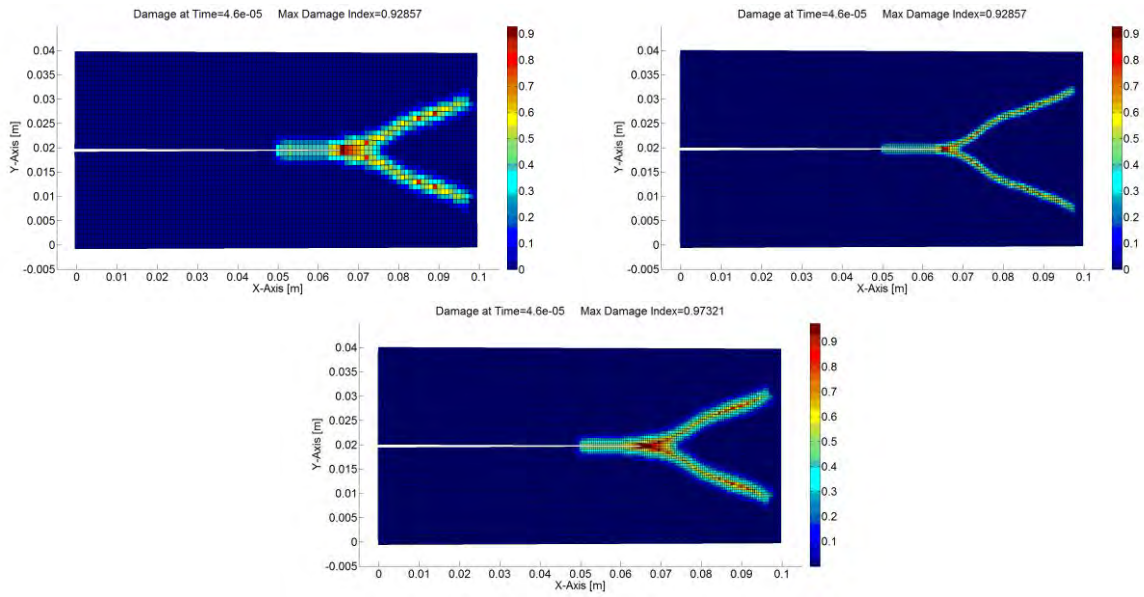


Fig 4.60 $k_r=2.2$ (1). Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso: coarse, refined- δ , refined- m

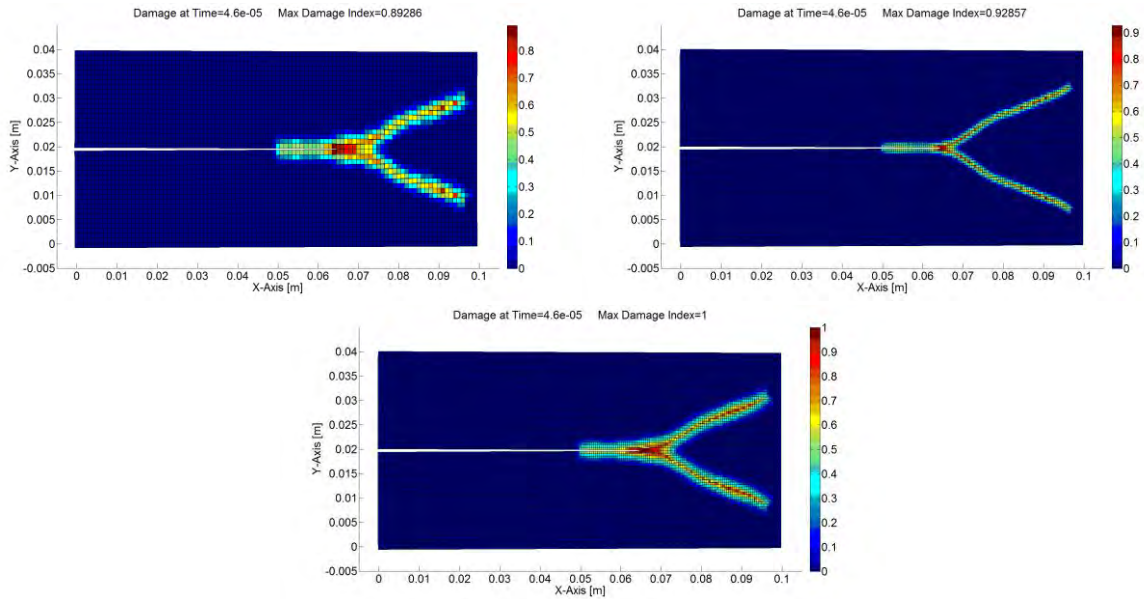
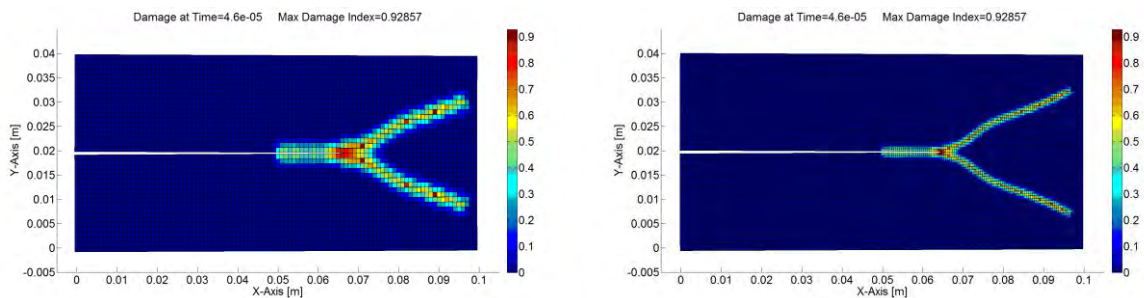


Fig 4.61 $k_r=1.8$, $k_s=1$ (2). Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso: coarse, refined- δ , refined- m



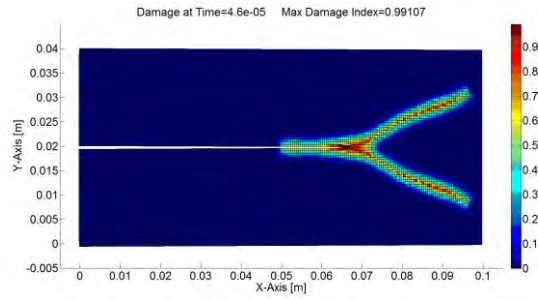


Fig 4.62 $k_r=1.8$, $k_s=1.2$ (3). Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso: coarse, refined- δ , refined- m

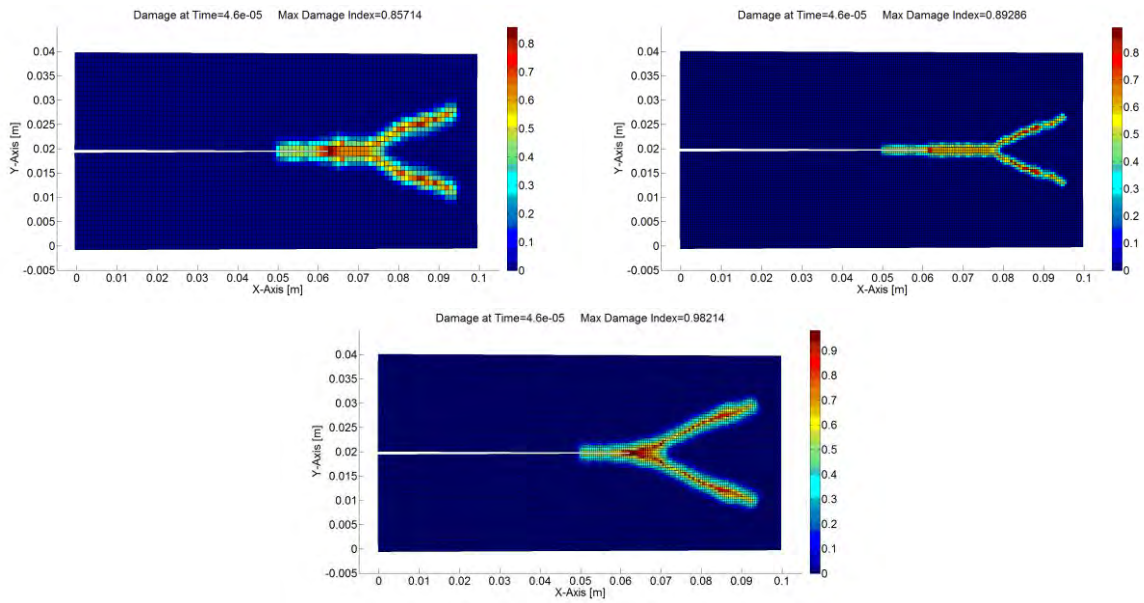


Fig 4.63 $k_r=4$, $k_s=1.2$ (4). Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso: coarse, refined- δ , refined- m

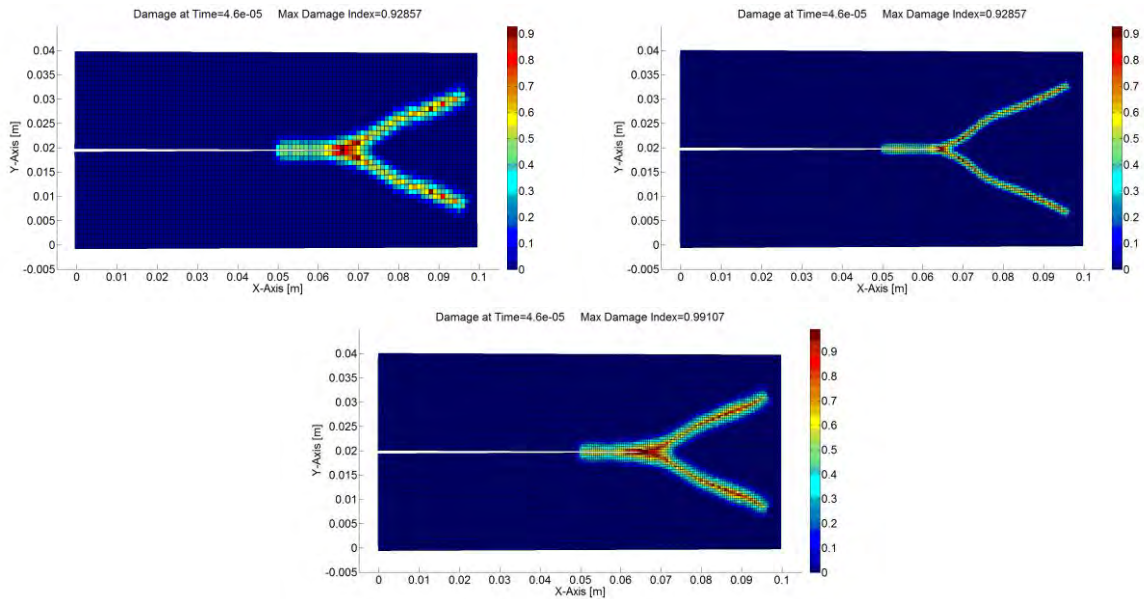


Fig 4.64 $k_r=1.8$, $k_s=1$, $k_f=1.3$ (5) Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso: coarse, refined- δ , refined- m

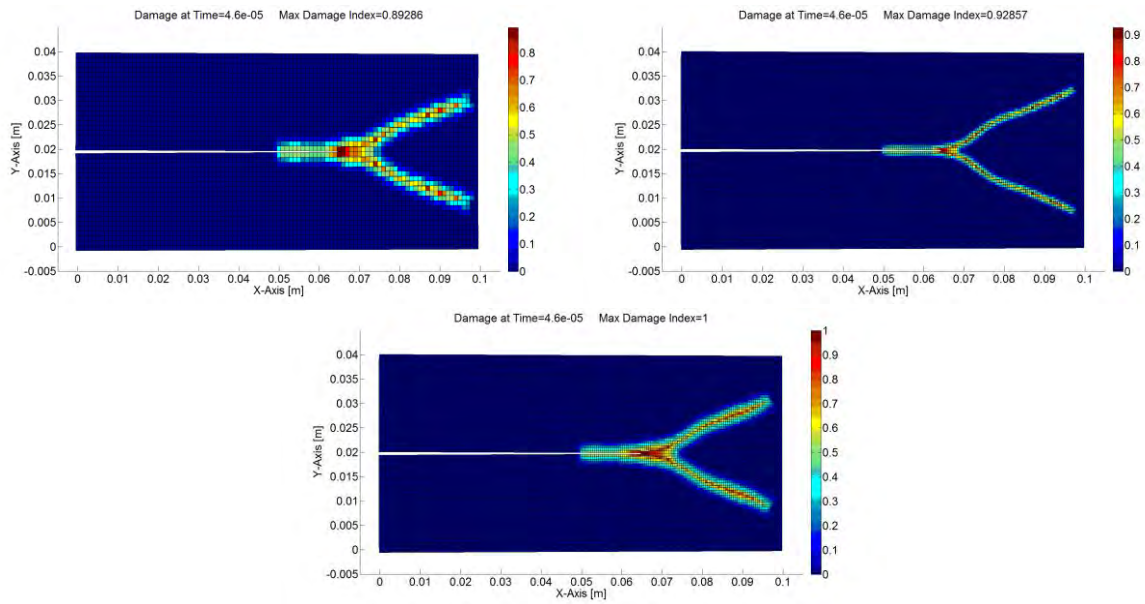


Fig 4.65 $k_r=1.8$, $k_s=1$, $k_f=0.7$ (6) Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso: coarse, refined- δ , refined- m

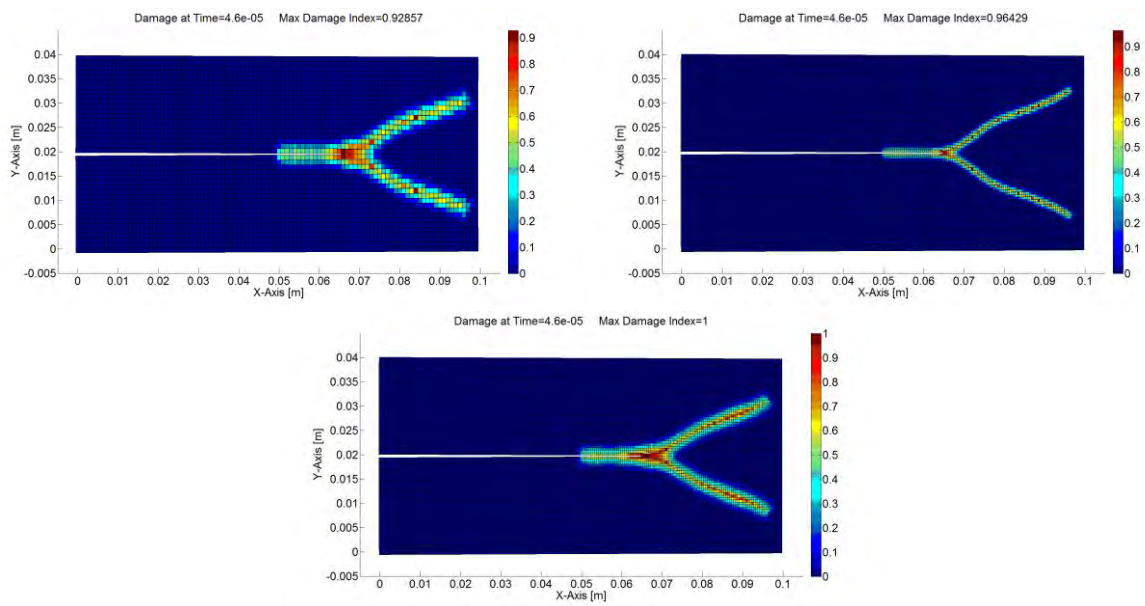
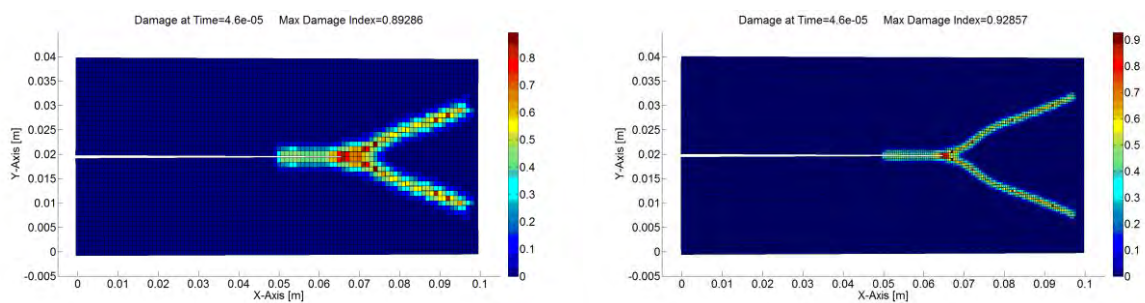


Fig 4.66 $k_r=1.8$, $k_s=1.2$, $k_f=1.3$ (7) Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso: coarse, refined- δ , refined- m



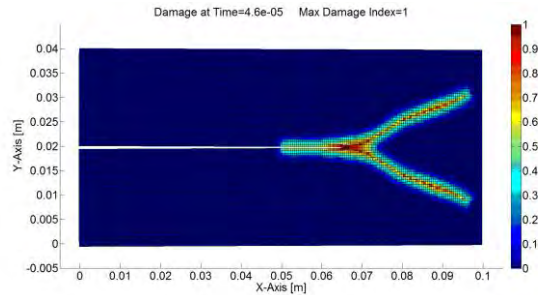


Fig 4.67 $k_r=1.8$, $k_s=1.2$, $k_f=0.7$ (8) Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso: coarse, refined- δ , refined- m

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
k_r	2.2	1.8	1.8	4	1.8	1.8	1.8	1.8
k_s		1	1.2	1.2	1	1	1.2	1.2
k_f					1.3	0.7	1.3	0.7

Tabella 4.46 Legenda dei parametri adimensionali relazionati al numero della simulazione trattata

	4000 nodi		16000 nodi δ -conv.		16000 nodi m -conv.	
	Lungh. [mm]	Vel.max[m/s]	Lungh. [m]	Vel.max[m/s]	Lungh. [m]	Vel.max[m/s]
(1)	73	2455	68.5	1941	73	2329
(2)	73	2455	67.5	1736	73	1979
(3)	72	2329	67.5	1736	72.5	1979
(4)	75	2329	78.5	1601	70	1601
(5)	71	2329	66.5	1941	72	1979
(6)	73	2329	68.0	1979	73	1941
(7)	72	2329	67.5	1736	72	1979
(8)	73	2455	68.0	1941	73	2329

Tabella 4.47 Dati riassuntivi di “altre analisi”, modelli coarse, redined- δ , refined- m

I valori dei dati ricavati per leggi costitutive analoghe non variano apprezzabilmente al variare dei rapporti adimensionali; questo suggerisce una sensibilità maggiore su alcuni parametri in relazione ad alcune leggi, come ad esempio i parametri k_s e k_f nelle leggi trilineari con $k_s = 4$. Si richiama l'attenzione sulla simulazione (4) e soprattutto sul modello ad m -convergenza dove $k_s = 1.8$ dà origine ad un branching, mentre nello stesso modello in cui $k_s = 2.2$ si origina una frattura senza una biforcazione estesa. Anche in queste ultime analisi, come nelle precedenti, si nota un indice di massimo danneggiamento più alto nei modelli refined- m ; i quali sembrano ora avere risultati maggiormente concordi con quelli ottenuti dal modello coarse. Sembra quindi che, nel caso di un k_r non eccessivamente elevato, il modello

ad m -convergenza dia risultati maggiormente congruenti al modello coarse, mentre il modello refined- δ si discosti in modo più netto; l'esatto contrario accade nei modelli a $k_r = 4$, tranne nell' analisi vista precedentemente, in cui $k_r = 4$, $k_s = 1$, $k_f = 0.7$.

Tali considerazioni valgono evidentemente per la lunghezza della cricca prima del branching, mentre una considerazione sulle velocità risulta più complessa. Si è visto in bibliografia e comprovato in questa tesi, come all'aumentare del numero di nodi, almeno nel modello lineare PMB, la velocità dei modelli refined sia minore a quella del modello coarse e sia vicina ai dati sperimentali. Tuttavia la mancanza di tali dati per le varie leggi non permette di poter affermare quale modello refined sia più attinente alla realtà, lasciando supporre che se due su tre modelli hanno dati simili il terzo sia quello dotato di accuratezza minore. Le analisi sul modello lineare PMB hanno infatti evidenziato come la misura della lunghezza del crack principale rimanga simile utilizzando un modello coarse o un modello refined, anche se le velocità massime risultano notevolmente diverse. Tale ipotesi fa propendere ad una certa sensibilità anche della convergenza di tipo δ , soprattutto in ragione di valori non elevati di k_r . Si riportano nel seguito alcune considerazioni sull'influenza dei parametri adimensionali .

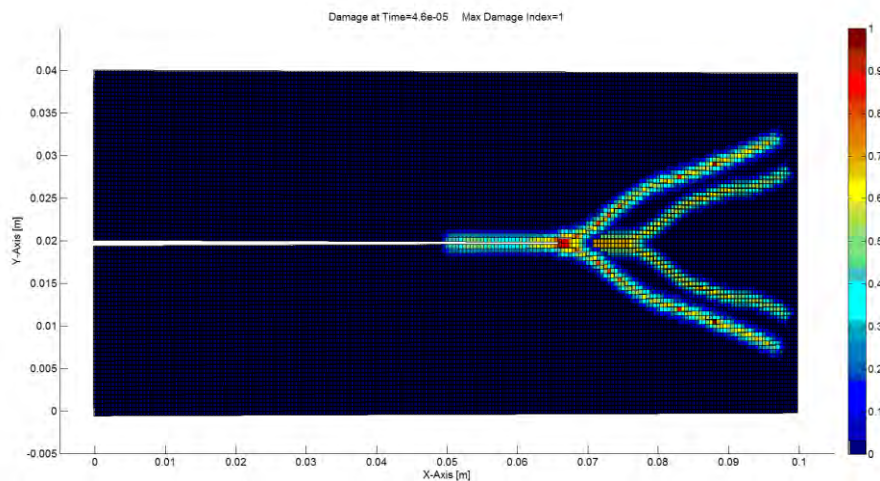


Fig 4.68 Sovrapposizione dei modelli refined- δ a $k_r=1, 1.8, 2.2, 4$; il modello $k_r=4$ è l'unico non sovrapposto

In figura 4.68 sono mostrati quattro modelli (uno lineare e tre bilineari) al variare del valore di k_r per il modello refined- δ . Si nota come per tale convergenza fino a $k_r < 4$ non vi siano differenze nette nella morfologia del crack, mentre per $k_r = 4$ la cricca principale divenga nettamente più lunga e il branching di conseguenza più stretto, con una forma divergente nella

parte finale. Per quanto illustrato in precedenza e dai dati in tabella 4.24, si può intuire come l'allungamento della cricca principale sia in realtà un parametro che aumenta all'aumentare del parametro kr ma con una sensibilità non elevata (per $k_r=1.8$ e $k_r=2.2$ si registra una lunghezza simile). Dalle simulazioni svolte si nota come i modelli con i soli parametri k_r e k_s non offrano grandi differenze al variare di k_s per un dato k_r relativamente basso; mentre i modelli a $k_r = 4$ presentano una differenza più marcata all'aumentare del parametro k_s , fino al punto in cui, per $k_s=1.8$, si ha una frattura nel modello refined- m completamente diversa rispetto al modello refined- δ e coarse. Ciò porta a considerare come il parametro k_s influenzi la soluzione in modo proporzionale al valore di k_r ad esso associato. Il calcolo degli angoli del branching per tali modelli sembra confermare una tendenza ad aumentare l'angolo finale della biforcazione all'aumento del valore di k_s , mentre l'angolo iniziale tende a chiudersi. Le velocità massime invece restano costanti per i modelli coarse, mentre i modelli refined hanno dei valori che oscillano tra circa 1600 e 1940 [m/s]. Infine per i modelli a tre parametri (k_r , k_s , k_f) valgono le considerazioni già fatte con una menzione particolare al parametro k_f , il quale se > 1 porta ad una lunghezza della frattura principale inferiore e ad una velocità massima più bassa per tutti i modelli rispetto all'analisi con $k_f < 1$. Gli angoli del branching risultano più piccoli all'inizio e nettamente più ampi alla fine per $k_f > 1$ rispetto a $k_f < 1$. Si nota nell'ultimo modello esposto dettagliatamente come un valore di k_s più elevato ($k_s = 2.2$ rispetto a $k_s = 1$) porti ad ottenere una soluzione con $k_f > 1$ simile alla soluzione ottenuta con $k_s = 1$ e $k_f < 1$ nel modello coarse, anche se con una morfologia del branching diversa, mentre le convergenze δ e m si scambiano il ruolo di modello a sensibilità maggiore.

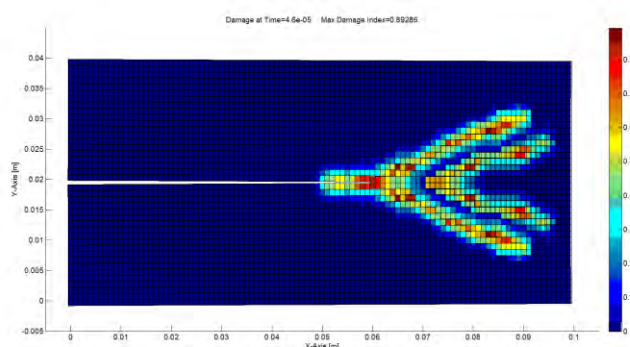


Fig 4.69 Sovrapposizione dei modelli coarse $k_r=4, k_s=1, k_f=1.3$ e $k_r=4, k_s=1, k_f=0.7$

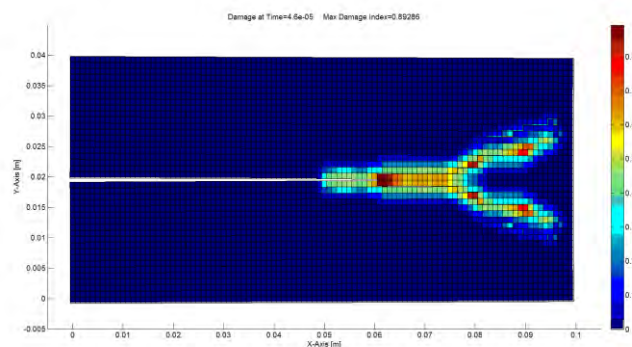


Fig 4.70 Sovrapposizione dei modelli coarse $k_r=4, k_s=2.2, k_f=1.3$ e $k_r=4, k_s=1, k_f=0.7$

4.5 Modalità di rilascio dell' energia di frattura

Le considerazioni evidenziate nel paragrafo 4.1 sull'energia di frattura ricavata per ogni legge costitutiva prevedono il calcolo del valore di G_{IC} come l'ammontare dell'energia rilasciata alla rottura di tutti i bond che attraversano una superficie (o linea) di frattura appartenenti ai nodi compresi in un orizzonte. Tale energia quindi è l'energia massima per unità di area che si ha a rottura avvenuta. Tuttavia come illustrato in [27] serve un certo spostamento affinché tutti i bond che attraversano la superficie di frattura risultino rotti. Dall' equazione del micropotenziale è evidente come il valore dell'energia dipenda sia dallo stretch s all'istante considerato sia dalla lunghezza iniziale ξ del bond in esame; ciò porta a considerare una rottura iniziale dei bond più corti e successivamente una rottura dei bond più lunghi. Tale fenomeno comporta una rottura graduale dei bond in una zona vicino alla superficie di frattura e lungo la verticale di separazione perpendicolare alla zona di frattura; tale zona diviene più ampia all'aumentare dell' allungamento che i bond subiscono durante il processo di separazione tra i nodi sopra e sotto la linea di frattura.

Consideriamo un orizzonte in cui vi sia una separazione tra due sue parti, come mostrato in figura 4.71.

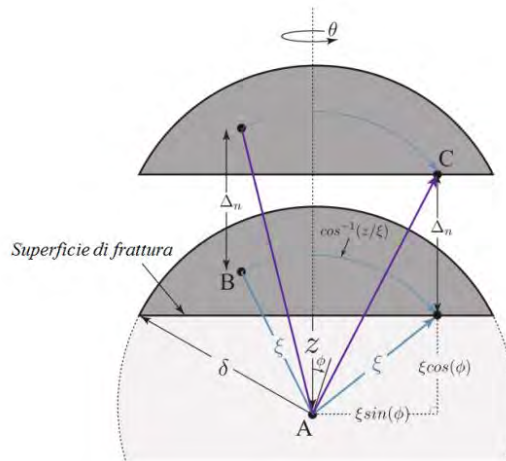


Fig 4.71 Orizzonte tagliato da una linea di frattura. La zona grigio scuro rappresenta la regione sottoposta allo spostamento Δ_n , gli altri termini sono analoghi a quelli di figura 4.2 , [27]

Si definisce Δ_n lo spostamento infinitesimo lungo la verticale $-z$ a cui sono sottoposti ugualmente tutti i nodi appartenenti alla regione sopra la linea di frattura; tale parametro è analogo al vettore posizione relativa $\boldsymbol{\eta}$.

In figura si evince come per $\xi = \|\boldsymbol{\xi}\|$ e $\eta = \|\boldsymbol{\eta}\|$ si abbia

$$\overline{AC} = \sqrt{\xi^2 + \Delta_n^2 + 2\xi\Delta_n\cos(\phi)} \quad (4.89)$$

da cui si ottiene il valore dello stretch per ogni bond di valore iniziale ξ (si ricordi che ξ varia da nodo a nodo, con eccezione dei nodi appartenenti ad un arco di circonferenza a raggio costante).

$$s_{AC} = \frac{\overline{AC}}{\xi} - 1 = \sqrt{1 + 2\left(\frac{\Delta_n}{\xi}\right)\cos(\phi) + \left(\frac{\Delta_n}{\xi}\right)^2} - 1 \quad (4.90)$$

Tale equazione permette di ricavare il valore dello stretch per ogni Δ_n imposto, note le condizioni iniziali dei nodi che vengono spostati.

Imponendo la condizione di stretch massimo e cioè $s_{AC} = s_0$ e risolvendo l'equazione per ξ si ricava

$$\xi_0 = \frac{\Delta_n \left(\cos(\phi) + \sqrt{\cos^2(\phi) + 2s_0 + s_0^2} \right)}{s_0(2 + s_0)} \quad (4.91)$$

la quale indica che tutti i bond con una lunghezza iniziale minore o uguale a ξ_0 si sono rotti.

Le equazioni finora scritte permettono di investigare il comportamento energetico di ogni singolo bond che viene messo in trazione, per mezzo di parametri dipendenti dalla posizione dei nodi e dallo spostamento Δ_n imposto.

Per meglio comprendere i fenomeni di frattura apparsi nel paragrafo precedente si utilizzerà il metodo appena descritto al fine di analizzare il comportamento energetico dei bond delle varie leggi costitutive imponendo via via spostamenti maggiori fino ad arrivare alla rottura completa.

Per fare ciò è stato implementato un codice che consente di valutare ad ogni spostamento imposto l'ammontare di energia che non è più possibile recuperare nella legge costitutiva se si volesse tornare ad uno stretch nullo dalla condizione in cui ci si trova.

Per svolgere le simulazioni è stato preparato un "orizzonte di test" con un raggio pari a 0.03 [m], un $\Delta x = \Delta y = 0.00015$ [m] e un Δz unitario; le caratteristiche fisiche e l'energia a rottura sono uguali a quelle utilizzate nei modelli analizzati nel paragrafo precedente.

Come si può notare si è scelto un valore elevato del parametro m tale per cui $m = 20$ che si è reso necessario al fine di minimizzare l'errore dovuto alla discretizzazione utilizzata per la costruzione della regione di raggio δ . Successivamente tale regione è stata divisa in due parti come mostrato in figura 4.72.

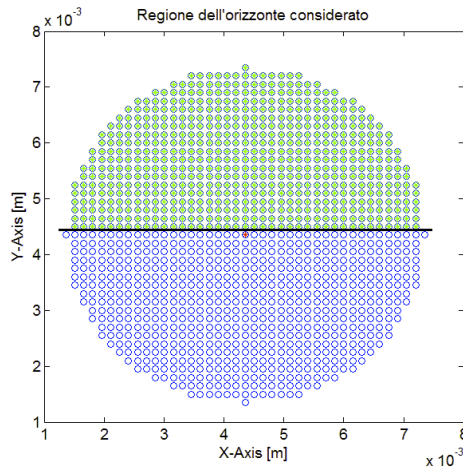


Fig 4.72 Raffigurazione dell'orizzonte preso in esame. Il nodo main è rappresentato in rosso, i nodi verdi sono i nodi sopra la linea di frattura (linea nera continua) ai quali viene applicato lo spostamento Δ_n , i nodi in blu sono i rimanenti nodi dell'orizzonte

I nodi sottostanti il nodo main, lungo la verticale perpendicolare alla linea di frattura fino ad una profondità pari all'orizzonte, sono i nodi che verranno utilizzati per l'integrazione. Ogni nodo in tale linea verticale è collegato a tutti i nodi sopra l'orizzonte di frattura che si trovano ad una distanza massima pari all'orizzonte dal nodo preso in considerazione. Ciò consente di ottenere un integrale discretizzato per il calcolo dell'energia totale dei bond che attraversano la superficie di frattura ad ogni spostamento imposto. L'integrale per il calcolo dell'energia per unità di area può essere discretizzato nel seguente modo:

$$G = \frac{\sum_{l=1}^M \sum_{i=1}^{N_M} w(l, i) (dq)^3 (dq)^3}{(dq)^2} \quad (4.92)$$

in cui M è il numero di nodi lungo la verticale collegati ad almeno un nodo nella regione sopra la superficie di frattura, N_M è il numero di nodi a cui si applica uno spostamento collegati al nodo M , dq rappresenta il lato del volumetto di controllo di ogni nodo, infine $w(l, i)$ rappresenta il micropotenziale del bond legato al nodo l e al nodo i ad un certo istante di spostamento e quindi ad un certo valore dello stretch del bond. Nel momento in cui tutti i bond vengono rotti G diviene uguale all'energia di frattura per unità di area.

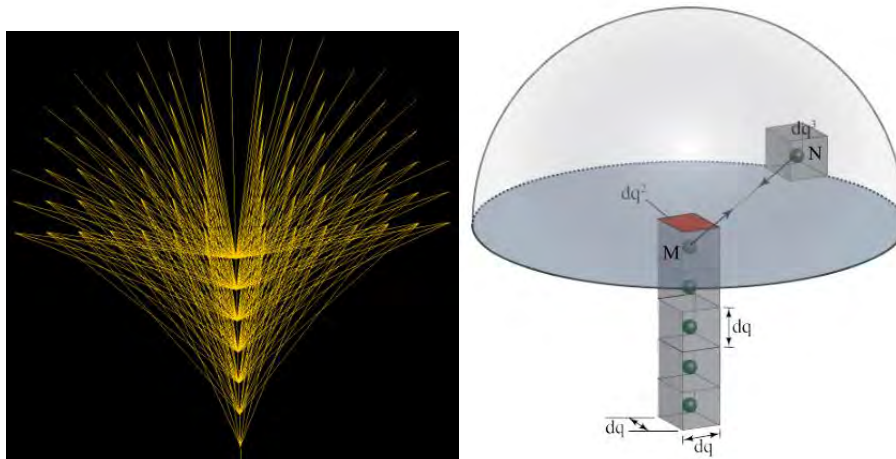


Fig 4.73 A sinistra sono rappresentati tutti i bond che attraversano una superficie di frattura, a destra è raffigurata la modalità di discretizzazione per il calcolo dell'integrale in 3D, [27]

Si illustra ora il concetto utilizzato per il calcolo dell'energia persa ad un certo valore di stretch del bond nelle varie leggi costitutive. Come già accennato nel paragrafo precedente ogni legge costitutiva (esclusa la lineare brittle che presenta un ammontare di area persa solo a rottura avvenuta) è dotata di un primo tratto lineare elastico, in cui il materiale non subisce danneggiamento, che si estende fino ad un valore s_p dello stretch; qualora avvenga una diminuzione dello stretch in tale zona la linea da seguire rimarrà la medesima. Superato s_p , nel caso di una diminuzione dello stretch, si seguirà una retta che dal punto di massimo stretch raggiunto si collegherà al punto a stretch nullo. Ciò genererà un' area sottesa inferiore all'area totale della legge costitutiva in cui la parte mancante costituirà un' area (e quindi un' energia) irrimediabilmente persa (o rilasciata).

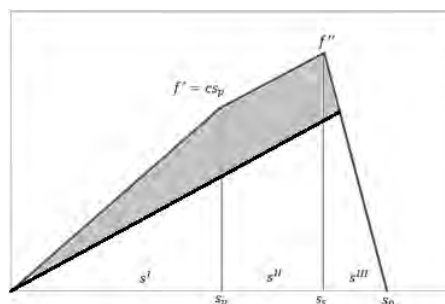
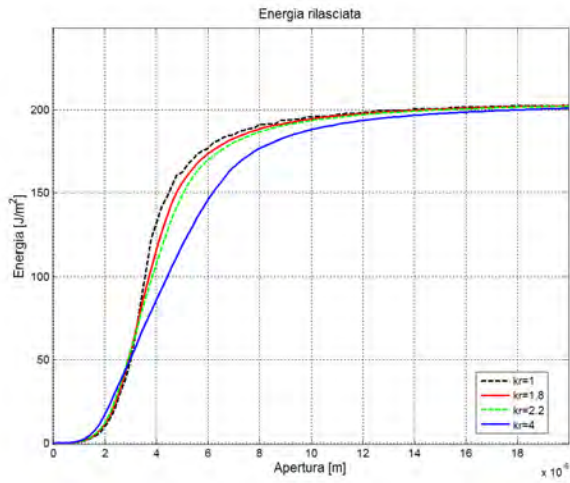
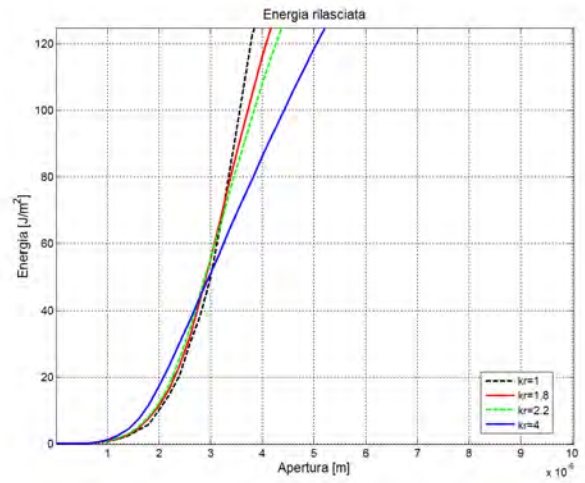


Fig 4.74 Esempio di legge costitutiva per il calcolo dell'energia rilasciata. L'area grigia è analoga all'energia persa per il dato bond, mentre l'area bianca è analoga all'energia che è ancora potenzialmente disponibile

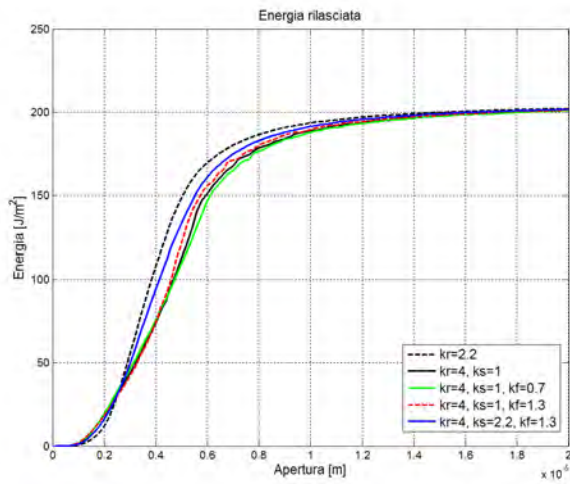
Nel seguito sono illustrati i grafici ottenuti dal calcolo dell'energia rilasciata per unità di area di frattura in rapporto allo spostamento imposto. Si fa notare sin d'ora come la massima energia dei grafici sia esattamente il valore dell'energia di frattura; è stato verificato come tale valore si attesti tra $201 - 203 \text{ [J/m}^2\text{]}$ in base alla legge costitutiva analizzata; tale differenza dev'essere ricercata nell'errore dovuto al calcolo discretizzato dell'area persa nelle leggi costitutive a forma più complessa. Il passo Δ_n è stato inizialmente scelto utilizzando la relazione $\Delta_n = s_0 \xi_{min} / \zeta$ in cui nel caso in esame $\xi_{min} = \Delta x$, mentre ζ rappresenta un coefficiente naturale >1 . Tuttavia svolgendo le simulazioni si è notato come un valore inferiore non modificasse il grafico risultante; per tale motivo è stato scelto un valore di Δ_n pari a $2e^{-7} \text{ [m]}$.



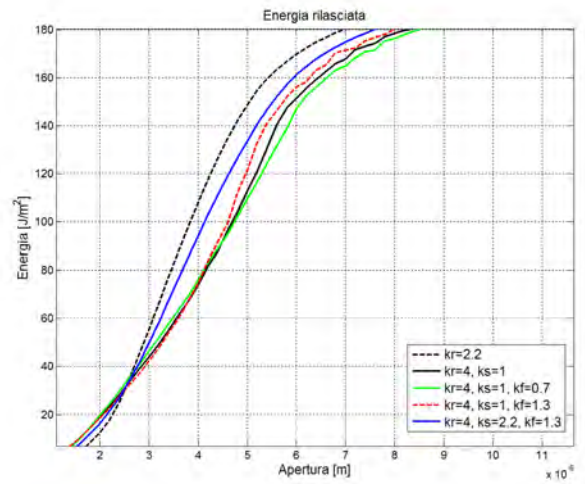
1)



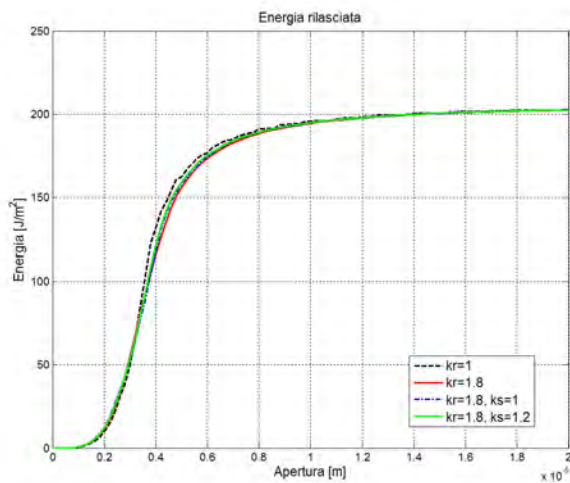
2)



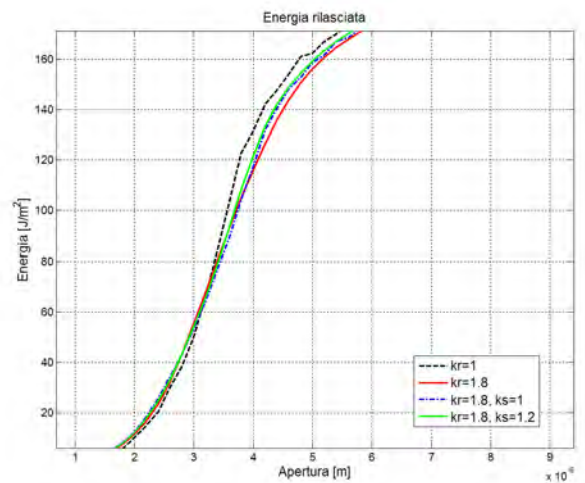
3)



4)



5)



6)

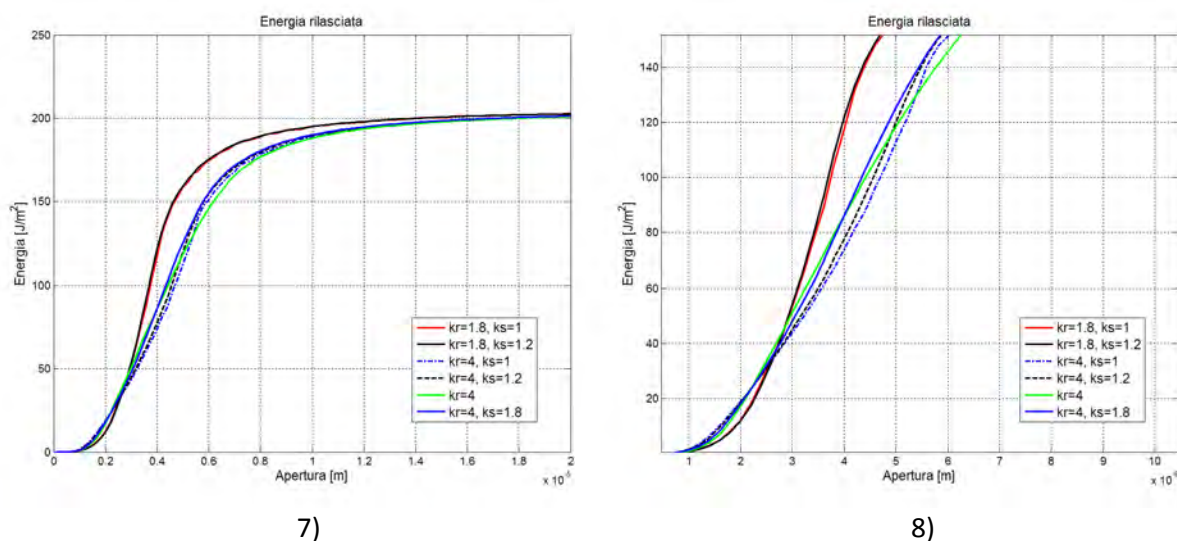


Fig 4.75 Grafici dell'energia rilasciata per differenti leggi costitutive e rispettivi ingrandimenti. Ogni grafico mette in relazione leggi costitutive tali per cui vi siano degli elementi di confronto da analizzare

Nei grafici 1) e 2) vengono messe in relazione la legge lineare con le leggi bilineari. Si nota come all'aumentare di k_r la pendenza del grafico aumenti per un primo breve tratto per poi diminuire in relazione alla legge lineare. Per k_r , fino a 2.2, si ha una certa somiglianza con il modello lineare, mentre per $k_r = 4$ la curva si distacca nettamente dalle altre. Tale comportamento si nota anche nei dati esposti nel paragrafo precedente, soprattutto nella lunghezza della cricca pre-branching. Questo fatto dimostra come k_r sia un parametro importante, soprattutto per valori elevati. Un abbassamento della pendenza della curva sembra quindi condurre, per i casi lineare e bilineare, ad una cricca più lunga. Ciò dimostra che un materiale che non cede istantaneamente, come può essere un materiale fragile, ha una comparsa del branching ad profondità di piastra più elevata.

Nei grafici 3) e 4) si analizzano i modelli con k_f raffrontandoli al modello $k_r = 4, k_s = 1$ e al modello $k_r = 2.2$. Si osserva come, fino ad uno spostamento piccolo pari a circa $4.5e^{-6}$ [m], non vi sia differenza tra essi, tranne per $k_s = 2.2, k_f = 1.3$. Tale modello risulta atipico in quanto i dati raccolti dovrebbero indicare una somiglianza più netta con la legge a $k_s = 1, k_f = 0.7$. Nonostante questa considerazione possa sembrare in contraddizione con quanto trovato nel paragrafo precedente si può notare come le pendenze dei grafici siano tutte molto simili, anche se traslate, per la maggior parte dello spostamento imposto, tranne per il

modello $k_s = 1, k_f = 1.3$ che assume una pendenza maggiore e simile ai modelli bilineari con $k_r < 4$, producendo infatti una linea di frattura pre-branching più corta.

I grafici 5) e 6) dimostrano come per k_r bassi non vi sia una grande differenza nell'ammontare di energia persa, nemmeno con l'introduzione del parametro k_s .

Infine nei grafici 7) e 8) compariamo i modelli con $k_r = 4$ e k_s variabile raffrontandoli ad altri che risultano interessanti nel paragone. Il parametro k_s risulta essere più incisivo rispetto ai modelli con k_r basso, pur non costituendo un elemento nettamente discriminante. Nei dati ricavati nel paragrafo precedente non si hanno grandi differenze tra i modelli a $k_r = 4$, se non in alcune convergenze (es: analisi per $k_r = 4, k_s = 1.2$ nel modello a 4000 nodi). In antitesi con quanto appena detto i grafici riportano curve energetiche differenti tra loro, tuttavia una più accurata osservazione rivela un alternarsi di cambi di pendenza tali da far pensare che le differenze locali presenti in alcuni punti dei grafici possano diventare similitudini se considerate nella loro interezza. Si nota inoltre come i modelli con $k_r = 4$ e k_s variabile da 1 a 1.8 abbiano una lunghezza di cricca uguale (vedi paragrafo precedente) mentre, si ha una morfologia della biforcazione irregolare per $k_s = 1$ che diviene più regolare all'aumentare di tale valore. Si nota come il modello a $k_s = 1.2$ possiede una morfologia del branching che può essere considerata una forma di "transizione" tra il modello a $k_s = 1$ e quello a $k_s = 1.8$. Quest'affermazione permette di fare delle considerazioni sui grafici dell'energia rilasciata, in cui si nota come la curva a $k_s = 1.2$ si avvicini in un primo istante al modello a $k_s = 1$ per poi cambiare pendenza avvicinandosi al modello a $k_s = 1.8$. Sembra quindi, almeno per queste leggi, che la variazione di pendenza delle curve mostri un'influenza morfologica sulla biforcazione.

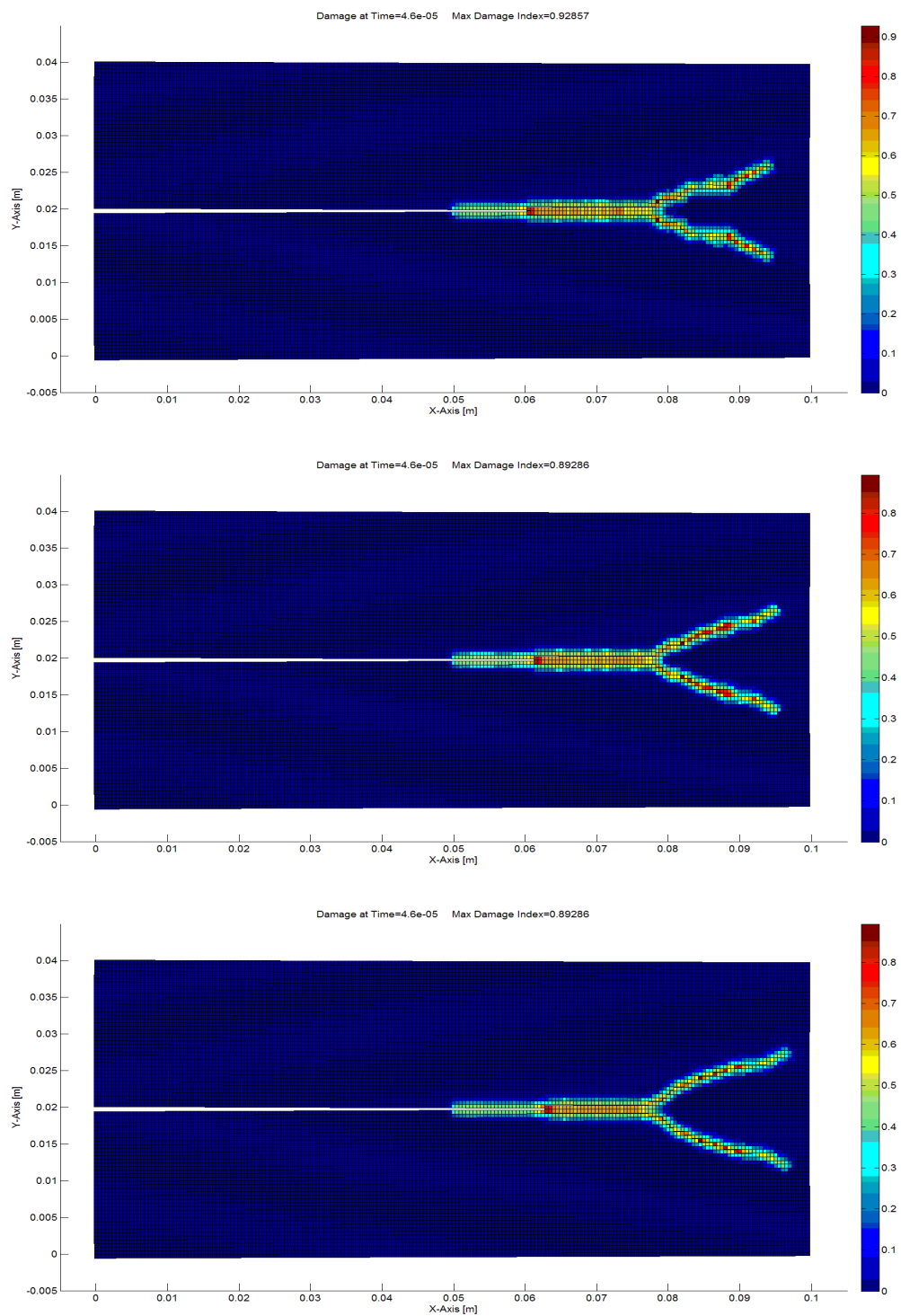


Fig 4.76 Comparazione sulla morfologia del branching: dall'alto verso il basso sono presentati i modelli a $k_r=4$ e $k_s=1, 1.2, 1.8$

-Conclusioni-

Nella presente tesi è stata analizzata l'influenza che la forma della legge costitutiva ha su un materiale. Sono stati quindi ricavati lunghezza della cricca principale, grafici delle velocità del crack, istante temporale in cui avviene il fenomeno del branching, angoli della biforcazione e valori dell'apertura massima della piastra; infine sono state realizzate le curve di energia rilasciata.

Dalle analisi effettuate si è visto come l'energia di frattura per un materiale non sia l'unico parametro energetico necessario al fine di descrivere la propagazione della cricca nel materiale.

È stato dimostrato come, a parità di energia di frattura, una diversa legge costitutiva possa variare, anche notevolmente, i risultati delle analisi. Nello specifico è stata riscontrata una certa sensibilità al variare del parametro adimensionale kr nelle leggi bilineari, sia per modelli con stessa convergenza sia nel confronto tra convergenze diverse.

Analizzando le leggi costitutive trilineari si è visto come i tre parametri kr , ks e kf assolvano funzioni differenti in base ai valori che vanno ad assumere; nella fattispecie è stata verificata una tendenza del parametro kr , per valori elevati, a divenire analogo ad un fattore di amplificazione degli effetti.

Sono state inoltre effettuate considerazioni sulle tipologie di convergenza utilizzate; in particolare si è notato una sensibilità della convergenza di tipo δ per valori bassi di kr , mentre per valori più elevati tale sensibilità si mostrava marcatamente sui modelli ad m -convergenza, arrivando a descrivere fratture estremamente incongruenti rispetto al modello coarse e refined- δ . Si è visto come la forma della legge costitutiva, e quindi la modalità con cui l'energia dei bond viene rilasciata, influenzi la soluzione del problema peridynamico sia per modelli ad uguale convergenza e diversa legge costitutiva, sia per modelli con convergenza diversa e stessa legge costitutiva.

La sensibilità osservata nelle varie convergenze rende ancora più importante il ruolo della legge costitutiva utilizzata; è stato visto ad esempio come un modello possa essere ben rappresentato con la convergenza di tipo δ , mentre dia risultati inaspettati con l'utilizzo della convergenza di tipo m . Dalle prove svolte è evidente come la convergenza di tipo δ soffra in misura inferiore di questa sensibilità rispetto alla convergenza di tipo m .

Da tali considerazioni fisico-energetiche si può concludere che la legge costitutiva è a tutti gli effetti un parametro estremamente importante nella trattazione peridinamica della frattura e che va attentamente analizzata.

Sviluppi futuri potrebbero mettere in relazione la forma della legge costitutiva, e quindi il valore dei parametri adimensionali, con la modalità di rilascio dell'energia durante la propagazione della cricca nel materiale.

-Appendice A-

Durante lo studio di articoli bibliografici è stato analizzato un lavoro recentemente proposto da E.Moyer [8]. Tuttavia, data la scarsità di materiale pubblicato non è stato possibile risolvere completamente il problema; nonostante ciò sono state superate svariate difficoltà e quindi si ritiene utile, a chi vorrà proseguire lo sviluppo di tale argomento, l'inserimento in appendice di una sezione riportante i risultati finora ottenuti.

Una delle limitazione che presenta tuttora la peridinamica bond based risiede nell'impossibilità di trattare stati di sollecitazione a flessione per le travi 1D e a bending per le piastre sottili. Una strategia per superare tale ostacolo consiste nel creare modelli tridimensionali al fine di permettere l'analisi di tali componenti.

Tuttavia è già stato discusso precedentemente come un modello tridimensionale comporti un elevato numero di nodi i quali conducono inevitabilmente ad aumentare sensibilmente il tempo di calcolo. Per questi motivi si stanno studiando delle soluzioni che permettano alla teoria bond based di poter essere applicata a travi monodimensionali soggette a flessione e piastre bidimensionali soggette a bending.

Nel presente capitolo verrà fatto un accenno riguardante la flessione, utilizzando modelli monodimensionali trattati come travi di Timoshenko, i quali verranno risolti con un nuovo metodo di integrazione. Tale metodo, estendibile anche al caso di trazione semplice, risulta necessario al fine di ottenere una trattazione numerica della densità di forza di taglio peridinamica e della densità di momento peridinamico: entità analoghe a quella pairwise force function che ha caratterizzato i capitoli precedenti.

Infine verrà presentato un esempio applicativo della teoria confrontandolo con una soluzione ottenuta tramite FEM.

A.1 Accenno alla teoria classica di Timoshenko

La teoria di Timoshenko è stata proposta come migliorativa della teoria di Eulero-Bernulli, la quale risulta semplicistica nel calcolo della flessione di una trave; essa infatti non prevede che una sezione normale alla linea media si mantenga tale anche a flessione. Ciò nella realtà non si verifica in quanto la sezione tende a ruotare rispetto alla normale a causa delle azioni di taglio che vengono a generarsi quando, ad esempio, la trave è sottoposta ad un carico normale alla linea media. Timoshenko permette di tener conto di tale fattore superando così il limite di eccessiva rigidità che caratterizza la teoria di Eulero-Bernulli, mantenendo nel contempo una certa semplicità analitica.

Ipotesi di Timoshenko:

1. Spostamenti verticali e assiali dei punti della linea media sono funzioni unicamente della variabile x .
2. Segmenti perpendicolari alla linea media si conservano segmenti (sezioni piane restano piane).
3. La sezione della trave a seguito della rotazione non si mantiene perpendicolare alla linea media ma ruota di un angolo addizionale ψ .

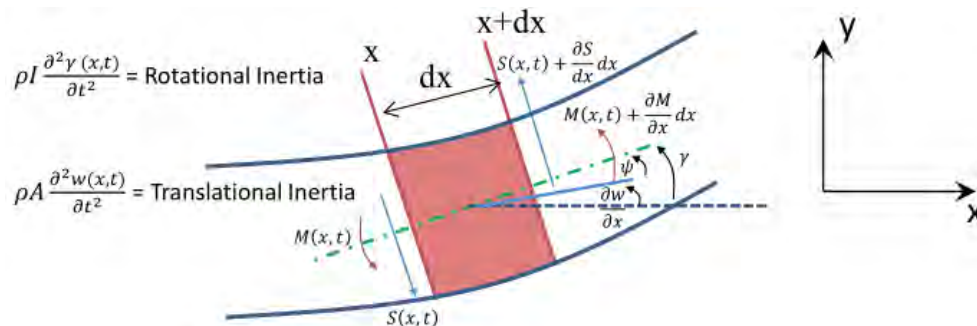


Fig A.1 Convenzione utilizzata per la trattazione del modello di Timoshenko, [8]

Dalla figura A.1 e dalle ipotesi poste segue che

$$\psi = \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma \quad (1)$$

in cui ψ è l'angolo addizionale dovuto agli effetti del taglio sulla sezione, w è lo spostamento in direzione y della linea media e γ è la rotazione dovuta alla flessione nel caso di Eulero-Bernulli.

Tralasciando le dimostrazioni che conducono alle equazioni della dinamica ed ipotizzando l'assenza di spostamento assiale, si possono ricavare le equazioni di equilibrio per il taglio e per il momento tali per cui

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \chi AG \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) + q(x, t) \quad (2)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = \chi AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \gamma \right) + EI \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \right) + m(x, t) \quad (3)$$

con A area della sezione della trave, G modulo di taglio, E modulo di Yung, ρ densità del materiale, χ fattore di taglio e q, m rispettivamente carico e momento distribuito (per unità di lunghezza).

La tabella sottostante riporta il valore per il fattore di taglio per diverse sezioni inflesse.



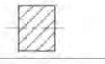
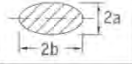


$\chi = \frac{7 + 6\nu}{6(1 + \nu)}$	
$\chi = \frac{(7 + 6\nu)(1 + m)^2 + 4m(5 + 3\nu)}{6(1 + \nu)(1 + m^2)^2}$ $m = b/a$	
$\chi = \frac{12 + 11\nu}{10(1 + \nu)}$	
$\chi = \frac{40 + 37\nu + m(16 + 10\nu) + \nu m^2}{12(1 + \nu)(3 + m)}$ $m = b/a$	
$\chi = \frac{4 + 3\nu}{2(1 + \nu)}$	
$\chi = \frac{48 + 39\nu}{20(1 + \nu)}$	

Fig A.2 Fattore di taglio calcolato per diverse forme di sezione, [1]

A.2 Formulazione peridinamica di Timoshenko

Si consideri una trave composta da un materiale microelastico. Con riferimento a quanto visto prima si possono riscrivere le equazioni di equilibrio come

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \int_{V_{x'}} \mathcal{F}_s(x', \mathbf{x}) dV_{x'} + \mathbf{s} \quad (4)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \boldsymbol{\gamma}}{\partial t^2} = \int_{V_{x'}} \mathcal{M}(x', \mathbf{x}) dV_{x'} + \mathbf{m} \quad (5)$$

in cui x è il nodo di riferimento a cui è associato un bond con un generico nodo famiglia x' , \mathcal{F}_s è la densità di forza di taglio peridinamica, \mathcal{M} è la densità di momento peridinamico ed \mathbf{s} e \mathbf{m} sono forze e momenti per unità di volume (analoghe al termine \mathbf{b}). Si noti che nella prima equazione si è già diviso per A .

Per analogia con la teoria della trave di Timoshenko si può scrivere:

$$\mathcal{F}_s = a \frac{\boldsymbol{\psi}(x' - \mathbf{x})}{(x' - x)} \quad (6)$$

$$\mathcal{M} = b \frac{[\boldsymbol{\gamma}(x') - \boldsymbol{\gamma}(x)]}{|x' - x|} + c\boldsymbol{\psi}(x) \quad (7)$$

Ciò porta a riscrivere le equazioni come segue:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = A \int_{V_{x'}} a \frac{\boldsymbol{\psi}(x' - \mathbf{x})}{(x' - x)} dx' + \mathbf{s} \quad (8)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \boldsymbol{\gamma}}{\partial t^2} = A \int_{V_{x'}} \left\{ b \frac{[\boldsymbol{\gamma}(x') - \boldsymbol{\gamma}(x)]}{|x' - x|} + c\boldsymbol{\psi}(x) \right\} dx' + \mathbf{m} \quad (9)$$

in cui si è posto il volume infinitesimo $dV_{x'} = A dx'$

Ora nelle ipotesi di piccole deformazioni si introduce la notazione

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x} \quad (10)$$

la quale va definita nell'estensione dell'orizzonte, tale per cui

$$-\delta \leq \varepsilon \leq \delta \quad (11)$$

Quindi le equazioni di equilibrio si riscrivono nella loro forma finale come:

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} + c_d \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} = A \int_{V_{x'}} a \frac{\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varepsilon})}{\varepsilon} d\varepsilon + \boldsymbol{s} \quad (12)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \boldsymbol{\gamma}}{\partial t^2} = A \int_{V_{x'}} \left\{ b \frac{[\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x})]}{|\boldsymbol{\varepsilon}|} + c \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) \right\} d\varepsilon + \boldsymbol{m} \quad (13)$$

in cui nella prima equazione è stato inserito il termine di smorzamento viscoso rappresentato dalla costante di smorzamento su unità di volume c_d .

Si raccolgono ora i termini costanti fuori dall'integrale e si discretizza la trave in N nodi equispaziati tra loro, considerando un orizzonte di dimensione δ .

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = C_1 I_i - \frac{c_d}{\rho} \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{s}_i}{\rho} \quad (14)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \boldsymbol{\gamma}}{\partial t^2} = C_2 J_i + C_3 K_i + \frac{\boldsymbol{m}_i}{\rho I} \quad (15)$$

dove $i = 1, \dots, N$; mentre

$$I_i = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{\varepsilon})}{\varepsilon} d\varepsilon, \quad J_i = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{[\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}_i)]}{|\boldsymbol{\varepsilon}|} d\varepsilon, \quad K_i = \int_{-\delta}^{\delta} c \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_i) d\varepsilon \quad (16)$$

Tali integrali vengono approssimati a sommatorie utilizzando la ben nota regola dei trapezi

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (17)$$

in cui a e b sono gli estremi dell'intervallo di integrazione. Nel caso in esame si riporta un esempio di svolgimento per $m = 1$ e quindi $\delta = \Delta x$.

Si riscrive il primo integrale dividendo l'integrazione negli intervalli proposti come

$$I_i = \int_{-\Delta x}^{0-} \frac{\psi(x_i + \varepsilon)}{\varepsilon} d\varepsilon + \int_{0+}^{\Delta x} \frac{\psi(x_i + \varepsilon)}{\varepsilon} d\varepsilon \quad (18)$$

La funzione ψ assume i seguenti valori ai nodi "peridinamici" $i, i + 1, i - 1$.

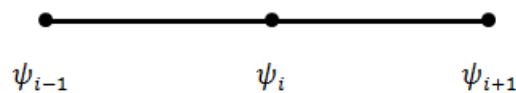


Fig A.3 Rappresentazione dell'indice di ψ rispetto al nodo main i

Utilizzando la formula dei trapezi, dopo semplici passaggi si ottiene:

$$\frac{2\Delta x}{2} \left(\frac{\psi_{i+1}}{\Delta x} - \frac{\psi_{i-1}}{\Delta x} \right) \quad (19)$$

perciò per $m = 1$

$$I_i = \psi_{i+1} - \psi_{i-1} \quad (20)$$

mentre per m generale si ricava

$$I_i^j = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m-1} \left\{ \frac{\psi_{i-m+l-1}^j}{l-m-1} + \frac{\psi_{i-m+l}^j}{l-m} \right\} + \psi_{i+1} - \psi_{i-1} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m-1} \left\{ \frac{\psi_{i+l}^j}{l} + \frac{\psi_{i+l+1}^j}{l+1} \right\} \quad (21)$$

in cui l'apice j sta ad indicare l'intervallo temporale preso in considerazione.

Utilizzando passaggi analoghi si possono ricavare le seguenti formule:

$$J_i^j = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m-1} \left\{ \frac{\gamma_{i-m+l-1}^j - \gamma_i^j}{l-m-1} + \frac{\gamma_{i-m+l}^j - \gamma_i^j}{l-m} \right\} + \frac{\gamma_{i+1}^j - 2\gamma_i^j + \gamma_{i-1}^j}{2} \quad (22)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m-1} \left\{ \frac{\gamma_{i+l+1}^j - \gamma_i^j}{l} + \frac{\gamma_{i+l+1}^j - \gamma_i^j}{l+1} \right\}$$

$$K_i^j = 2\delta\psi_i^j \quad (23)$$

Le costanti C_1, C_2, C_3 vengono definite come

$$C_1 = \frac{\chi G}{2\delta\rho}, \quad C_2 = \frac{2E}{\delta^2\rho}, \quad C_3 = \frac{A\chi G}{2\delta\rho l} \quad (24)$$

Tali costanti sono state ricavate confrontando le equazioni della peridynamica per $m = 1$ con le equazioni di Timoshenko; il confronto non si rivela una limitazione in quanto le costanti possono essere utilizzate anche nel caso $m > 1$.

Note le equazioni discretizzate spazialmente è stata effettuata una discretizzazione temporale tale da poter essere affiancata ad un metodo numerico per il calcolo delle condizioni cinematiche nel tempo.

Si propone un' integrazione di Verlet per la seconda equazione, mentre è richiesta un' integrazione Leapfrog-Verlet per la prima, essendo presente il termine smorzamento che richiede la conoscenza della velocità all'istante di osservazione (velocità che è considerata in modo esplicito in Leapfrog [8]).

Schema integrativo temporale Leapfrog-Verlet 1° equazione

$$\begin{aligned}\widehat{vw}_i^{j+\frac{1}{2}} &= vw_i^{j-\frac{1}{2}} + \Delta t \left[C_1 I_i^j - \frac{c_d}{\rho} vw_i^{j-\frac{1}{2}} + \frac{b_i^j}{\rho} \right] \\ \widehat{w}_j^{i+1} &= w_i^j + \Delta t \widehat{vw}_i^{j+\frac{1}{2}} \\ \widehat{vw}_i^j &= \frac{\widehat{w}_j^{i+1} - w_i^{j-1}}{2\Delta t}\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}vw_i^{j+\frac{1}{2}} &= vw_i^{j-\frac{1}{2}} + \Delta t \left[C_1 I_i^j - \frac{c_d}{\rho} \widehat{vw}_i^j + \frac{b_i^j}{\rho} \right] \\ w_j^{i+1} &= w_i^j + \Delta t vw_i^{j+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Con la scrittura $\widehat{}$ viene inteso un parametro di servizio; ciò deriva dal fatto che in peridinamica il Δt deve essere estremamente ridotto, quindi la differenza tra un parametro ad un passo $\Delta t/2$ e quello ad un passo Δt si può considerare piccola. Si utilizza tale strategia al fine di ricavare la velocità all'istante j (utilizzando un' approssimazione del secondo ordine per la derivata dello spostamento) necessaria per il calcolo dello smorzamento. Tale approccio non si rende necessario, come si vedrà in seguito, per il calcolo delle condizioni sulla seconda equazione, in quanto non si considera nessuno smorzamento di tipo rotazionale.

Schema integrativo temporale Verlet 2° equazione

$$\begin{aligned}v\gamma_i^{j+\frac{1}{2}} &= v\gamma_i^{j-\frac{1}{2}} + \Delta t \left[C_2 J_i^j + C_3 K_i^j + \frac{m_i^j}{\rho I} \right] \\ \gamma_j^{i+1} &= \gamma_i^j + \Delta t v\gamma_i^{j+\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{26}$$

Alla fine di ogni step integrativo (j) si ottengono le rotazioni e gli spostamenti calcolati per il passo successivo ($j + 1$); questo si rende necessario al fine di calcolare la variabile ψ che come noto dalla teoria si scrive:

$$\psi_i^{j+1} = \frac{\partial w_i^{j+1}}{\partial x} + \gamma_j^{i+1} \quad (27)$$

in cui la derivata dello spostamento viene approssimata con una derivazione numerica alle differenze centrali

$$\frac{\partial w_i^{j+1}}{\partial x} = \frac{w_{i+1}^{j+1} - w_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} \quad (28)$$

Note le quantità γ_j^{i+1} e ψ_i^{j+1} si possono preparare gli integrali I_i^{j+1} , J_i^{j+1} , K_i^{j+1} da usare nell'integrazione temporale successiva.

Si deve far notare come questo metodo d'integrazione richieda la conoscenza dello stato anche in nodi al di fuori del dominio reale dell'asta; tali nodi vengono chiamati nodi ghost.

Il calcolo delle condizioni ai nodi ghost (spostamenti, rotazioni, ...) deve essere fatto tramite l'ausilio dell'espansione in serie di Taylor delle variabili necessarie, ad esempio nel caso dello spostamento w in cui ci si ferma alla derivata prima dell'espansione:

$$w_g^j \approx w_0^j - \frac{\partial w_0^j}{\partial x} \Delta x; \quad g < 0 \quad (29)$$

$$w_g^j \approx w_N^j + \frac{\partial w_N^j}{\partial x} \Delta x; \quad g > N \quad (30)$$

in cui g è l'indice di nodo ghost mentre 0 ed N sono i nodi iniziali e finali della regione del dominio reale.



Fig A.4 Rappresentazione dei nodi peridinamici di un' asta (in nero) e dei nodi ghost alle estremità (in rosso)

Questo nel caso di una trave porta ad avere un numero di nodi ghost agli estremi del dominio come quelli rappresentati in figura A.4 (non necessariamente simmetrici).

Tali nodi non sono nodi reali, ma semplici estensioni utili per l'integrazione.

Maggiore è l'ordine di approssimazione della derivata ed il grado di derivata che viene tenuto nell'approssimazione di Taylor, maggiore è l'accuratezza dei risultati.

Esistono vari metodi di approssimazione delle derivate, uno dei quali è stato già trattato utilizzando le differenze centrali.

Altri metodi consistono nell'uso delle differenze in avanti e all'indietro, utilizzate in quanto richiedono, ad esempio, la conoscenza di due punti precedenti (noti) per il calcolo di un punto successivo.

Riportiamo per completezza le approssimazioni in avanti e all'indietro utilizzando un metodo del secondo ordine:

Approssimazione alle differenze in avanti

$$\frac{\partial w_i}{\partial x} = \frac{-w_{i+2} + 4w_{i+1} - 3w_i}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (31)$$

Approssimazione alle differenze all' indietro

$$\frac{\partial w_i}{\partial x} = \frac{3w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (32)$$

A.3 Trave sottoposta ad uno spostamento flessionale

Verrà di seguito presentata un' applicazione della teoria trattata nel paragrafo precedente.

Il set-up analizzato vede una trave incastrata con un estremo libero sottoposto ad una sollecitazione di spostamento sinusoidale. L'analisi vuole mostrare la bontà della teoria nel caso flessionale di una trave, confrontando i risultati ottenuti con un metodo agli elementi finiti.

Il problema viene trattato anche in [8], tuttavia data l'incompletezza dei dati si è ritenuto utile svilupparlo e riportarne in questa tesi risultati e considerazioni.

La trave analizzata si presenta come in figura:



Fig A.5 Trave sottoposta ad una forza perpendicolare all'asse neutro, [8]

Lo spostamento che è stato imposto si presenta nella forma

$$sp(t) = \begin{cases} 0.1 \sin(200\pi t) & \text{per } t < 0.0925 \\ 0.1 & \text{per } t > 0.0925 \end{cases} \quad (33)$$

con condizioni al contorno (Dirichlet) tali che

$$w(x = 0) = 0; \quad w(x = L) = sp(t) \quad (34)$$

$$\gamma(x = 0) = 0; \quad \gamma(x = l) = 0 \quad (35)$$

in cui $x = 0$ è la posizione del nodo all'incastro ed L è la lunghezza dell'asta.

Riportiamo di seguito le caratteristiche (nel sistema S.I.) della trave, prese direttamente dal codice.

```

L=2.54;           %lunghezza trave
A=0.0103;        %sezione trave
E=206.8*10^9;    %modulo young acciaio
ro=7800;         %densità acciaio
cd=8000/(2.54*0.0103); %coeff di smorzamento trave
k=6/5;          %fattore di taglio sezione quadrata
dx=(0.0254);    %delta_x
G=77.44*10^9;   %modulo di taglio acciaio
m=5;            %rapporto delta/dx
delta=dx*m;     %orizzonte
N=round(L/dx)+1; %numero nodi
dt=7*10^(-7);  %delta_t di integrazione
In=8.844*10^-6; %inerzia sezione quadrata trave

```

Come si può notare si è scelto un valore di $m = 5$, anche se il programma è scritto per poter supportare qualsiasi valore $m \geq 1$.

Si ritiene necessario aprire una parentesi sul valore di c_d . Esso infatti nel testo di riferimento non veniva assegnato, ma indicato come ricavato alla prima frequenza di smorzamento (di entità pari a 82.4 Hz) considerando un valore di smorzamento critico definito "light". Tale informazione tuttavia non si è rivelata corretta, infatti da un'analisi modale realizzata utilizzando Msc Patran 2013 e Msc Nastarn 2013 si è osservato come questo fosse in realtà il valore del secondo modo di vibrare dell'asta.

E' stata quindi cercata una strategia per definire tale parametro. Dopo numerosi tentativi si è giunti alla conclusione che il metodo più semplice potesse essere quello di rappresentare il sistema come un corpo ad un grado di libertà calcolandone lo smorzamento avendo noti la frequenza naturale e lo smorzamento critico.

La frequenza naturale può essere ricavata tramite metodologia FEM o semplicemente mediante la formula

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (36)$$

Il pedice i indica il modo preso in esame, λ_i è una costante per il modo i -esimo, L è la lunghezza dell'asta, mentre μ rappresenta la massa per unità di lunghezza.

La costante di smorzamento è stata ricavata da

$$c = 2\xi m \omega_i \quad (37)$$

con ξ coefficiente di smorzamento, m massa asta e ω_i frequenza naturale del modo i -esimo (nell'esercizio si considera il secondo modo).

È stato quindi ricavato un valore approssimato del c_d che, come si vedrà poi dal confronto tra i risultati ottenuti con il metodo FEM e con il codice peridinamico, può essere considerato come l'elemento di maggior errore tra le due soluzioni.

Risulta conveniente specificare fin d'ora che il metodo numerico alle derivate usato nella realizzazione del codice per il calcolo delle variabili ai nodi ghost è stato scelto del secondo ordine, con la stessa forma espressa nel paragrafo precedente. Nonostante ciò anche un ordine inferiore avrebbe portato a risultati analoghi.

Viene ora proposto un diagramma di flusso esplicativo della strategia usata nella realizzazione di questo codice peridinamico.

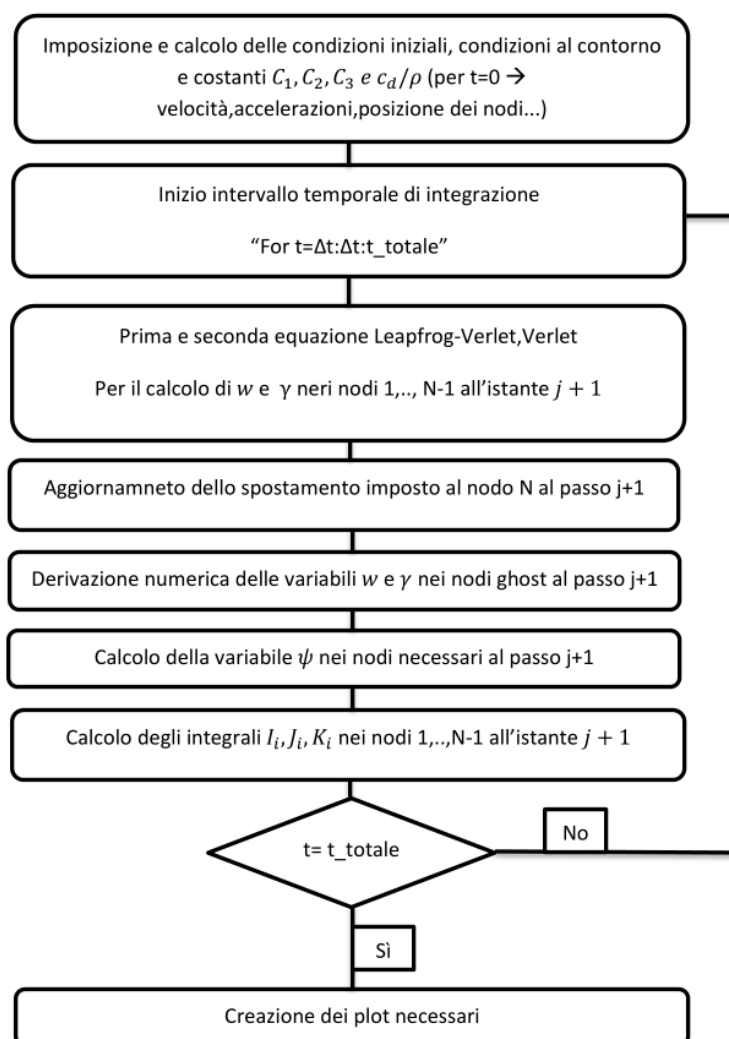


Fig A.6 Diagramma di flusso esplicativo della metodologia utilizzata nella creazione del codice in Matlab

Si riporta il grafico dello spostamento dell'ultimo nodo a cui è applicata la forza sinusoidale e del nodo di mezzeria.

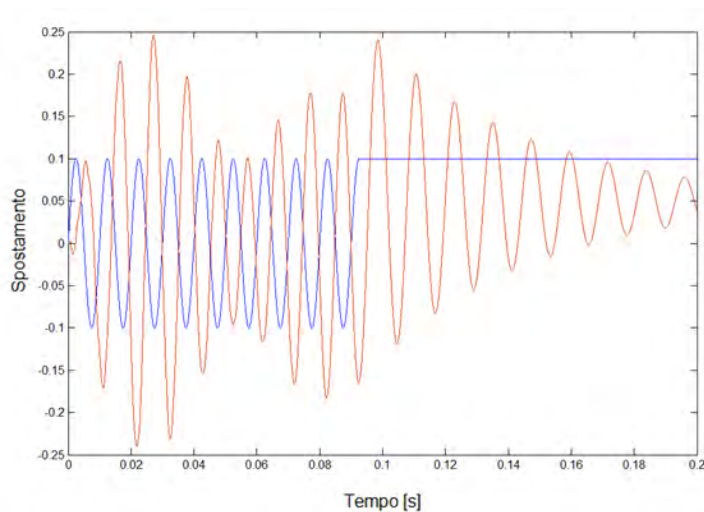


Fig A.7 Grafico dell'oscillazione nel tempo dell'ultimo nodo (linea blu) e del nodo di mezzerie (linea rossa) con $m=5$ e l'asta composta da 101 nodi

Di seguito sono mostrati gli stessi valori ottenuti mediante l'utilizzo di un software FEM, quale Msc Patran.

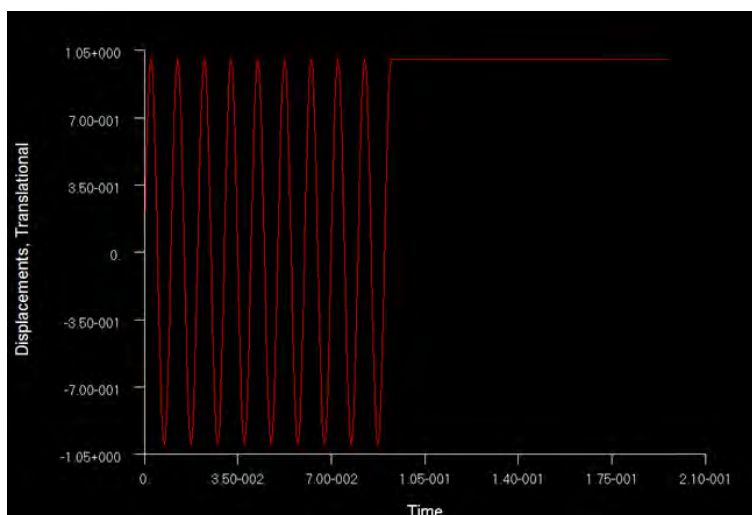


Fig A.8 Oscillazione nel tempo dell'ultimo nodo. Gli spostamenti sono moltiplicati di un fattore 10, l'asta è formata da 100 elementi

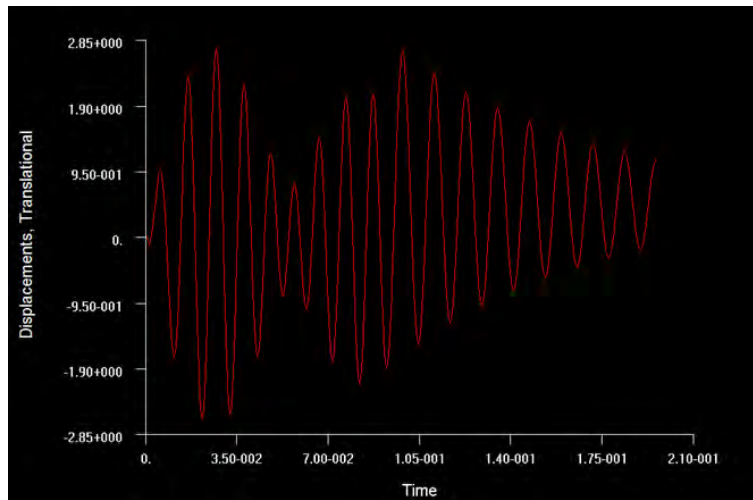


Fig A.9 Oscillazione nel tempo del nodo di mezzeria. Gli spostamenti sono moltiplicati di un fattore 10, l'asta è formata da 100 elementi

È evidente come vi sia nel caso esaminato con gli elementi finiti una sovraelongazione e una tendenza a smorzare in un tempo maggiore; tale fenomeno è stato verificato esser dovuto al valore di c_d scelto. Al variare di tale parametro varia la velocità con cui la vibrazione si smorza e l'ampiezza dei picchi. Per ottenere soluzioni più vicine a quelle FEM si dovrebbe risolvere la matrice di rigidità per N elementi e calcolare lo smorzamento per N gradi di libertà, cosa che viene eseguita in modo automatico dal post-processor Msc Nastran. Il fattore moltiplicativo nei grafici ottenuti con Msc Patran non ne influenza il comportamento, in quanto è stato applicato in fase di post-processing per visualizzare in modo più accurato la deformata risultante.

-Appendice B-

Dato il crescente interesse nella peridinamica come metodo risolutivo per lo studio di impatti e fratture, è logico ipotizzare che nel futuro verranno implementati modelli geometrici sempre più complessi, dei quali si dovranno studiare le modalità di failure.

Si pensi, ad esempio, alla criticità nel campo aeronautico di elementi come la struttura di un'ala o della carlinga di un aereo; nell'utilizzo dei FEM si è avvantaggiati a livello geometrico in quanto tutti i solutori sono supportati da un pre-processor che generalmente permette la creazione di strutture complesse con una certa facilità e precisione, elemento che viene meno con il software utilizzato per le simulazioni in questa tesi.

L'idea che viene proposta è quella di servirsi di un pre-processor per creare una geometria complessa, la quale poi possa essere importata come una serie di punti (nodi peridinamici) all'interno di una matrice in Matlab.

Si pensi, ad esempio, ad un tubo realizzato in Patran (o altri software con interfaccia cad, come Solidworks), sul quale verrà poi creata una mesh opportuna. Si è visto come i nodi della mesh vengano salvati in un file (.bdf) come una serie di coordinate (x,y,z); tale procedura è presente nella quasi totalità dei software cad più famosi e in alcuni (es. Rhinoceros) è presente una modalità diretta per esportare tali informazioni in un file che è possibile far elaborare a Matlab al fine di creare una matrice in cui si abbia righe=nr nodi e colonne=coordinate(x,y,z). Il procedimento qui esposto prende in considerazione il software Msc Patran.

- Si procede con la costruzione della geometria voluta e della sua mesh
- Si esegue un'analisi (fittizia) atta solo alla creazione del file .bdf
- Si apre il file e si cercano le coordinate dei nodi della mesh, le quali vanno copiate e incollate su un foglio word
- Tramite il tasto alt si selezionano solo le coordinate (escludendo l'ID dei nodi o eventuali commenti) e si incollano su un documento notepad (o equivalente).
È importante mantenere la formattazione classica di una matrice e quindi le coordinate allineate tra loro.
- Salvare e nominare il file in una cartella
- Aprire Matlab utilizzando tale cartella come directory di lavoro

- Scrivere il comando `load -ascii nome_file.estensione_file` per caricare il file come matrice.

Di seguito verrà presentato un semplice script con relativo plot per visualizzare i nodi della mesh di un cubo realizzato con Patran.

```
%modello 3d
load -ascii modello.txt;
%carica il file.txt e ne legge i dati mettendoli nella matrice modello
for i=1:402
%creo 3 vettori contenenti le coordinate x,y,z (riga i esima della matrice) per
ogni punto
    x(1,i)=modello(i,1);
    y(1,i)=modello(i,2);
    z(1,i)=modello(i,3);
end

plot3(x,y,z, '*'),axis([-0.1,1.1,-0.1,1.1,-0.1,0.6]);
%grafico i punti (rappresentandoli con il simbolo simbolo*e dò l'intevallo in cui
graficarli
```

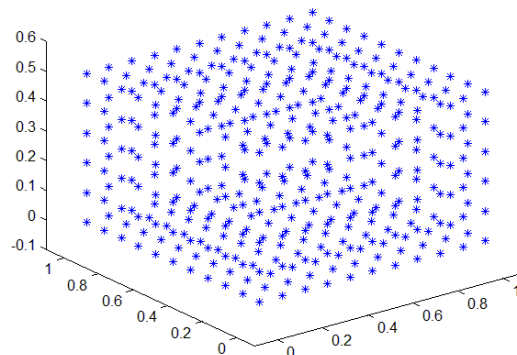


Fig B.1 Cubo ottenuto importando le coordinate dei nodi da un modello CAD

Quest'approccio permette di semplificare e velocizzare la costruzione di un programma Matlab che debba utilizzare un modello geometrico complesso.

Bibliografia

1. A.Gugliotta (2002). *Elementi finiti-Parte I*. Politecnico di Torino
2. Abigail Agwai (2011). *A peridynamic approach for cupled fields*. Dep. of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Arizona.
3. B. Kilic, E. Madenci (2010). *Coupling of Peridynamic Theory and the Finite Element Method*. Journal of mechanics of materials and structures, Vol.5, No5.
4. B. Kilic, A. Agwai, E. Madenci (2009). *Peridynamic Theory for Progressive Damage Prediction in Center-Cracked Composite Laminates*. Composite Structures, 90, 141–151.
5. Bahattin Kilic (2008). *Peridynamic theory for progressive failure prediction in homogeneous and heterogeneous materials*. Department of Aerospace and Mechanical Engineering.
6. Claudio Franciosi (2011). *La teoria di Timoshenko per le travi alte*.
7. E. Oterkus, A. Barut, and E. Madenci (2010). *Damage Growth Prediction from Loaded Composite Fastener Holes by Using Peridynamic Theory*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
8. E. Thomas Moyer, Michael J. Miraglia (2014). *Peridynamic Solutions for Timoshenko Beams*. Engineering, 6, 304-317
9. Eran Sharon, Jay Fineberg (1999). *Confirming the Continuum Theory of Dynamic Brittle Fracture for Fast Cracks*. Nature, Vol 397, 333-335.
10. Erdogan Madenci, Erkan Oterkus (2014). *Peridynamic Theory and Its Applications*. Springer Science+Business Media
11. Erkan Oterkus (2010). *Peridynamic Theory for Modeling Three-Dimensional Damage Growth in Metallic and Composite Structures*. Dep. of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Arizona.
12. Fabrizio Barpi. *Modelli numerici er lo studio dei fenomeni fessurativi nelle dighe*. Elementi di Meccanica della Frattura, Cap.3.
13. J.Fineberg, M.Marder (1999). *Instability in dynamic fracture*. Physics Reports, 313, 1-108
14. James O’Grady, John Foster (2014). *Peridynamic beams: A non-ordinary, state-based model*. International Journal of Solids and Structures, 51, 3177–3183.
15. James O’Grady, John Foster (2014). *Peridynamic plates and flat shells: A non-ordinary, state-based model*. International Journal of Solids and Structures.
16. Jean M. Standard (2013). *The verlet algorithm for molecular dynamics simulations*. Chemistry 380.37.
17. Jeong-Hoon Song, Hongwu Wang, Ted Belytschko (2008). *A comparative study on finite element methods for dynamic fracture*. Comput Mech, 42, 239–250.

18. K.Ravi-Chandar (1998). *Dynamic fracture of nominally brittle materials*. Int J Fract, 90, 83-102.
19. K.Ravi-Chandar, W.G.Knauss (1984). *An experimental investigation into dynamic fracture: I. Crack initiation and arrest*. Int J Fract, 25, 247-262.
20. K.Ravi-Chandar, W.G.Knauss (1984). *An experimental investigation into dynamic fracture: II. Microstructural aspects*. Int J Fract, 26, 65-80.
21. K.Ravi-Chandar, W.G.Knauss (1984). *An experimental investigation into dynamic fracture: III. On steady-state crack propagation and crack branching*. Int J Fract, 26, 141-154.
22. K.Ravi-Chandar, W.G. Knauss (1984). *An experimental investigation into dynamic fracture: IV. On the interaction of stress waves with propagatin*. Int J Fract, 26, 189-200.
23. Keping Yu (2011). *Enhanced integration methods for the peridynamic theory*. Kansas state university
24. Lucio Demeio (2012). *Corso di analisi numerica: derivazione numerica*.
25. M.Braun, J.Fernández-Sáez (2014). *A new 2D discrete model applied to dynamic crack propagation in brittle*. Materials International Journal of Solids and Structures, 51, 3787–3797.
26. Michael Parks (2012). *Computational peridynamics*. Computing Research Center Sandia National Laboratories.
27. Michael Scot Breitenfeld (2014). *Quasi-static non-ordinary state-based peridynamics for the modeling of 3D fracture; Cap.6*. Phd in Aerospace Engineering, University of Illinois.
28. Michael Taylor, David J Steigmann (2014). *A two-dimensional peridynamic model for thin plates*. Mathematics and Mechanics of Solids.
29. M. Zaccariotto, F. Luongo, G. Sarego, D. Dipasquale, U. Galvanetto (2013). *Fatigue crack propagation with peridynamics: a sensitivity study of paris law parameters*. Department of Industrial Engineering, University of Padova.
30. Mirco Zaccariotto, Fabio Luongo, Giulia Sarego, Ugo Galvanetto. *Application of peridynamic theory to the solution of static problems*. Department of Industrial Engineering, University of Padova.
31. Mirco Zaccariotto, Fabio Luongo, Giulia Sarego, Ugo Galvanetto. *Examples of applications of the peridynamic theory to the solution of static equilibrium problem*. The Aeronautical Journal.
32. Mirco Zaccariotto, Ugo Galvanetto (2012). *Crack propagation simulations using Peridynamics*. Department of Industrial Engineering, University of Padova.
33. Peter Young. *Leapfrog method and other “symplectic” algorithms for integrating Newton’s laws of motion*. Physics 115/242
34. S.A. Silling(1998). *Reformulatioln of Elasticity Theory for Discontinuities and Long-Range Forces*. Sandia National Laboratories.

35. Stewart A. Silling (2009). *Linearized Theory of Peridynamic States*. Sandia National Laboratories.
36. Stewart A. Silling (2012). *Introduction to Peridynamics*. Sandia National Laboratories.
37. S.A. Silling, E. Askari (2005). *A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics*. Computers and Structures, 83, 1526–1535.
38. S.A.Silling, O.Weckner, E.Askari, Florin Bobaru Ph.D (2010). *Crack nucleation in a peridynamic solid*. Int J Fract, 162, 219–227.
39. Th. Seelig, D.Gross (1999). *On the interaction and branching of fast running cracks, a numerical investigation*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 47, 935-952.
40. W.Döll (1975). *Investigations of the crack branching energy*. Int J Fract, 11, 184-186.
41. Walter Gerstle, Nicolas Sau, Stewart Silling (2007). *Peridynamic modeling of concrete structures*. Nuclear Engineering and Design, 237, 1250–1258
42. Wenyang Liu (2012). *Discretized bond-based Peridynamics for solid mechanics*. Michigan State University.
43. William F. Stokey. *Vibration of systems having distributed mass and elasticity*. University of Rennes.
44. X.P.Xu, A.Needleman (1994). *Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids*. J. Mech. Phys. Solids, Vol.42, No.9, 1397-1434.
45. Youn Doh Ha, Florin Bobaru (2010). *Studies of dynamic crack propagation and crack branching with peridynamics*. Department of Engineering Mechanics, 71.
46. Youn Doh Ha, Florin Bobaru (2011). *Characteristics of dynamic brittle fracture captured with peridynamics*. Engineering Fracture Mechanics, 78, 1156–1168.

