



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
TESI DI LAUREA

CONTROLLO DI POSIZIONE E DI
VELOCITÀ DEL MOTORE IN
CORRENTE CONTINUA

RELATORE: Ch.ma Prof.ssa Maria Elena Valcher

LAUREANDO: *Michele De Benedet*

Padova, 27 novembre 2012

CONTROLLO DI POSIZIONE E DI VELOCITÀ DEL MOTORE IN CORRENTE CONTINUA

RELATORE: Ch.ma Prof.ssa Maria Elena Valcher

LAUREANDO: Michele De Benedet

A.A. 2012/2013

Indice

Introduzione	1
1 Il motore elettrico	3
1.1 Struttura meccanica	3
1.2 Principio di funzionamento	3
1.3 Modello matematico	5
2 Sintesi del modello	7
2.1 Catena aperta	7
2.2 Catena chiusa	8
2.3 Finalità del controllo	9
3 Controllo di posizione	11
3.1 Sistema retroazionato	14
3.2 Controllore PID	16
3.3 Risposta all'onda quadra	20
4 Controllo di velocità	23
4.1 Sintesi in frequenza	25
4.2 Rete a sella	29
4.3 Risposta alla rampa lineare	30
Bibliografia	32

Introduzione

Scopo dell'ingegnere dell'automazione è lo studio di sistemi fisici e la progettazione dei loro meccanismi di controllo. Per perseguire il proprio obiettivo egli deve fare ricorso a modelli matematici e simulazioni.

Nell'ambito dei sistemi più frequentemente studiati nell'ambito ingegneristico, uno degli elementi fondamentali è l'attuatore, un dispositivo che trasforma un ingresso (di natura elettrica) in movimento. Verrà trattato in questa tesina uno degli attuatori più conosciuti: il motore elettrico in corrente continua. Esso trasforma l'energia elettrica che assorbe in energia meccanica sotto forma di rotazione. La tensione elettrica che riceve in ingresso viene quindi convertita in coppia motrice dall'albero motore, l'organo che permette di sfruttare l'energia meccanica.

Verranno utilizzate le conoscenze acquisite nel corso di Controlli Automatici nell'analisi di un modello che rappresenta (con certe approssimazioni) il sistema reale, e nella sintesi di un relativo sistema di controllo. Saranno implementati alcuni controlli in retroazione, che permettano al sistema di soddisfare determinate specifiche di progetto. Una volta ultimata la modellizzazione, ci occuperemo prima del controllo di posizione dell'albero motore e, nel capitolo successivo, del controllo in velocità. Si proseguirà nell'analisi del sistema in catena aperta, considerando le risposte ai principali segnali canonici. Successivamente, al fine di migliorare le caratteristiche del sistema, si passerà allo studio in catena chiusa, seguito dalla progettazione di diversi controllori. Dopo che il sistema sarà stato filtrato dal controllo, verranno misurate le prestazioni e si potrà concludere di conseguenza circa la robustezza e la prontezza del nuovo sistema. Si suppone il modello a flusso costante di campo magnetico (generato dallo statore), cosicché viene considerato soltanto il controllo di armatura tramite diversi controllori: Proporzionale, PID e ricavato dalla sintesi in frequenza (rete ritardatrice e a sella).

La tesina sarà supportata dall'utilizzo del software MATLAB come principale strumento di calcolo corredato dal toolbox Simulink, per l'analisi e la simulazione dei sistemi dinamici.

Capitolo 1

Il motore elettrico

In questo capitolo viene introdotto il motore elettrico a corrente continua, ne viene spiegato il funzionamento, e vengono ricavate delle leggi che ne governano la dinamica. A partire da queste si ricaverà un modello matematico con il quale ne si studierà il comportamento.

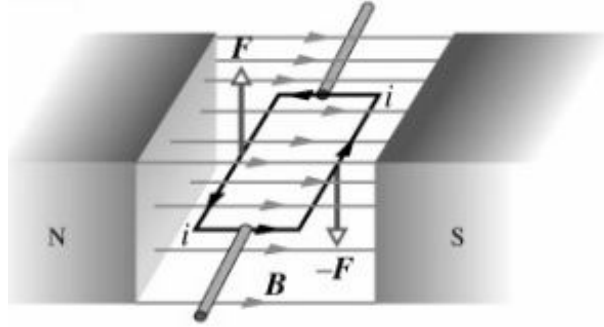
1.1 Struttura meccanica

Il motore elettrico è costituito essenzialmente da due parti: uno statore ed un rotore. Lo statore è la parte esterna, fissa. Nella sua realizzazione più semplice è costituito da due magneti permanenti, generatori di un campo magnetico costante che andrà ad agire sulle spire del rotore.

Il rotore (o armatura) del nostro motore elettrico è la parte che andrà a inserirsi all'interno dello statore. È di forma cilindrica ed avvolto da spire metalliche (solitamente in rame) disposte parallelamente al suo asse. I fili conduttori sono isolati elettricamente tramite una patina e terminano ai due estremi su un collettore. Il collettore consta di due parti di forma semicilindrica, conduttrici, solidali al rotore e isolate una dall'altra. Due spazzole, fisse, insistono ciascuna su una delle due metà del collettore. Queste, toccando il collettore attraverso dei contatti in grafite, permettono il passaggio di corrente elettrica nel motore, essendo collegate l'una al contatto positivo e l'altra al negativo di un generatore di tensione.

1.2 Principio di funzionamento

Diamo ora uno sguardo alla fisica che soggiace il funzionamento del motore elettrico. Per far ciò consideriamo innanzitutto un modello semplificato di motore dove, al posto della bobina del rotore, ci sia un'unica spira.



Al suo interno circola corrente, dovuta al moto degli elettroni, essendo i capi del filo collegati a un generatore. La spira è immersa in un campo magnetico \mathbf{B} , originato dai due magneti permanenti, perpendicolare alle due facce interne dello statore.

A ciascun elettrone si applica la forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

dove \mathbf{v} è la velocità degli elettroni e q la loro carica. Per la seconda legge di Laplace, \mathbf{F} è anche esprimibile nella forma

$$\mathbf{F} = i\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

dove i è la corrente che fluisce nel conduttore e \mathbf{l} la lunghezza del tratto di spira che stiamo considerando. Nei lati (di lunghezza a) perpendicolari al campo magnetico la forza è uscente dal piano della spira, mentre sugli altri due lati (di lunghezza b) la forza è uguale e contraria, agente sulla stessa retta e dà quindi contributo nullo.

Le due forze \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$ (in figura), essendo il circuito indeformabile, formano una coppia di braccio r . Detto θ l'angolo formato tra il versore u_n normale al piano e il campo magnetico \mathbf{B} , il momento meccanico rispetto all'asse di rotazione della spira è definito come

$$\mathbf{M} \doteq r \times \mathbf{F}.$$

Nel nostro caso $r = b \sin\theta$ e $\mathbf{F} = ia\mathbf{B}$, essendo il campo magnetico perpendicolare al lato di lunghezza a in ogni punto. Quindi il modulo del momento meccanico è

$$M = b \sin\theta F = iabB \sin\theta = iAB \sin\theta$$

con A l'area della spira.

Nel motore, il momento meccanico così generato si chiama coppia motrice; i calcoli appena visti valgono anche per le altre spire presenti nel rotore.

Concentrandosi nuovamente su una sola, otteniamo la coppia massima quando il piano formato dai suoi lati è parallelo al campo magnetico e l'angolo θ misura $\pm\pi/2$. La coppia decresce al diminuire dell'angolo e vale 0 quando campo magnetico e piano della spira sono perpendicolari. La spira qui passa da un'alimentazione a quella opposta per effetto dell'azione del collettore; le forze, quindi, cambiano verso ogni mezzo giro e permettono al rotore di continuare il suo moto.

1.3 Modello matematico

Studiamo ora un modello elettrico semplificato di motore con statore a magneti permanenti e conseguentemente campo magnetico costante. Il rotore viene schematizzato con il circuito di figura 1.1, dove V_a è la tensione di armatura, L_a e R_a sono rispettivamente induttanza e resistenza della spira. Infine e è la forza controelettromotrice (fcem). Vengono in questa sede trascurati effetti secondari.

La fcem è dovuta alla Legge di Lentz (*la corrente indotta in una spira ha un verso tale da opporsi alla variazione di flusso che l'ha prodotta*). Il moto degli elettroni genera una forza che contrasta l'effetto della tensione di alimentazione. Tale forza è proporzionale alla velocità di rotazione e ha come effetto principale quello di sottoalimentare il motore: non tutta la potenza fornita si trasforma in lavoro utile.

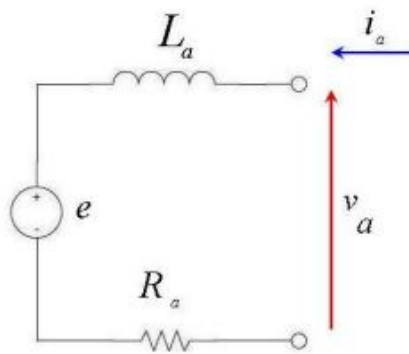


Figura 1.1: Modello elettrico del rotore

Come detto prima, in Figura 1.1 abbiamo rappresentato il motore. e corrisponde effettivamente al rotore e, come in precedenza, indichiamo con θ la posizione angolare dell'asse del motore, con $\dot{\theta}$ o ω la velocità angolare in [rad/s] e con $\ddot{\theta}$ o α l'accelerazione angolare.

Allora

$$e = k_v \dot{\theta}$$

con k_v costante di fceem.

Possiamo quindi scrivere l'equazione della maglia nella forma:

$$v_a(t) = R_a i_a + L_a \frac{\partial i_a}{\partial t} + e.$$

Trasformando secondo Laplace e ipotizzando condizioni iniziali nulle, otteniamo

$$V_a(s) - E(s) = I_a(s) (R_a + sL_a) \quad (1.1)$$

$$V_a(s) - K_v s \Theta(s) = I_a(s) (R_a + sL_a) \quad (1.2)$$

Per la parte meccanica, ricordiamo che la coppia è definita come

$$c(t) = I_m \cdot \alpha(t),$$

dove con I_m si indica il momento d'inerzia del rotore e $c(t)$ è la somma delle coppie agenti sul corpo fisico. A sua volta

$$c(t) = c_m(t) - F_m \omega(t) - c_r(t)$$

in cui i tre addendi a destra dell'uguaglianza corrispondono rispettivamente alla coppia motrice fornita direttamente dal motore, in condizioni ideali di assenza di carico e di attriti, alla coppia di attrito (F_m è il coefficiente di attrito viscoso e viene moltiplicato per la velocità angolare), e alla coppia di carico (resistente).

Di nuovo passiamo al dominio delle trasformate di Laplace combinando le formule (1.1) e (1.2):

$$I_m s^2 \Theta(s) + F_m s \Theta(s) = c_m(s) - c_r(s). \quad (1.3)$$

Abbiamo così ottenuto due equazioni. Ci prefiggiamo ora l'obiettivo di controllare in posizione e in velocità questo motore utilizzando dei comuni metodi d'analisi.

I calcoli appena svolti non ci hanno portato a un sistema SISO. In un motore in corrente continua, però, la coppia è direttamente proporzionale alla corrente di armatura (nel caso in cui il campo magnetico statoriale sia fisso). Chiamato k_t tale rapporto di proporzionalità, esso rappresenta il coefficiente di coppia misurato in [Nm/A] e vale $c_m = k_t \cdot i_a$. Possiamo ora unire le equazioni (1.2) e (1.3) per ottenere un sistema:

$$\begin{cases} (I_m s + F_m) s \Theta(s) = K_t I(s) \\ V_a(s) - K_v s \Theta(s) = (L_a s + R_a) I(s) \end{cases} \quad (1.4)$$

Capitolo 2

Sintesi del modello

2.1 Catena aperta

Esaminiamo ora il sistema (1.4), eliminando $I(s)$ in modo da ricavare la funzione di trasferimento in catena aperta del sistema. Prendendo come uscita la velocità $\dot{\theta}$ e come ingresso la tensione di armatura, il risultato è il seguente:

$$G_1(s) = \frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K}{(I_m s + F_m)(L_a s + R_a) + K^2},$$

K_t e K_v sono state sostituite da K , essendo i due coefficienti sempre uguali.

Se invece l'uscita del sistema è la posizione angolare dell'asse del motore, è sufficiente integrare la velocità, ossia moltiplicare per il fattore s^{-1} l'equazione precedente:

$$G_2(s) = \frac{\Omega(s)}{V_a(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K}{s((I_m s + F_m)(L_a s + R_a) + K^2)}.$$

Grazie al pacchetto Simulink di MATLAB è possibile costruire uno schema a blocchi del sistema (Figura 2.1). Per semplicità riportiamo in questa sede solo quello in cui è la posizione ad essere l'uscita del nostro modello. Per ottenere la velocità basta fermarsi prima dell'ultimo blocco (integratore).

Con questo file, inserendo i valori appropriati dei parametri fisici, siamo in grado di analizzare il comportamento del motore in risposta ai vari ingressi. Come si può facilmente capire, questo modello, in assenza di controllo, non ha delle prestazioni accettabili. Sarà necessario *in primis* l'utilizzo di un sistema di controllo a catena chiusa e *in secundis* la progettazione di un compensatore che permetta di ottenere le prestazioni desiderate.

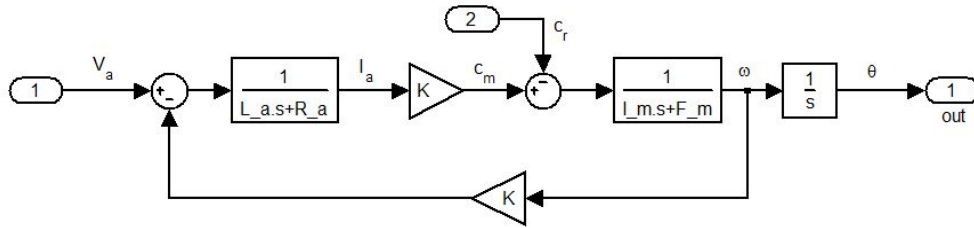


Figura 2.1: Schema a blocchi Simulink del rotore

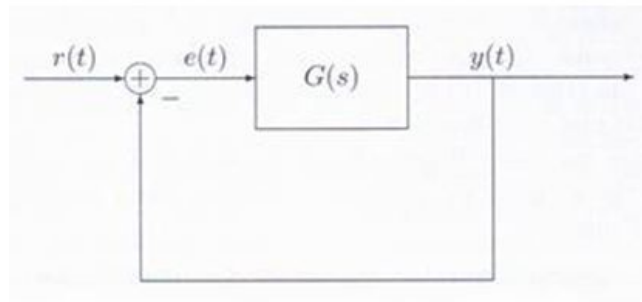


Figura 2.2: Schema a blocchi di retroazione unitaria di $G(s)$

2.2 Catena chiusa

Consideriamo una retroazione unitaria negativa. Lo schema a blocchi corrispondente è quello di Figura 2.2.

$G(s)$ è indifferentemente una delle due funzioni di trasferimento trovate in precedenza, $G_1(s)$ o $G_2(s)$. Se chiamiamo $R(s)$ l'ingresso (in luogo di $V_a(s)$ che ricorda maggiormente l'uso di una tensione), $Y(s)$ l'uscita e poniamo $E(s) = R(s) - Y(s)$. Sapendo che $Y(s) = G(s)E(s)$, giungiamo a $Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}R(s)$. La funzione

$$W(s) := \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

è la funzione di trasferimento del sistema retroazionato. Nei prossimi capitoli analizzeremo il comportamento del sistema ad anello chiuso e aperto e vedremo come varia la stabilità BIBO nei due casi.

Per il modello che verrà sottoposto al nostro esame, una volta introdotti i dati del modello, possiamo calcolare la funzione di trasferimento $W(s)$ e studiarne l'andamento. Nel software MATLAB esiste una funzione che permette di calcolare la funzione di trasferimento del sistema retroazionato. Se, come nel nostro caso, siamo interessati ad una retroazione unitaria, allora il

comando sarà $\text{feedback}(*,1)$, dove con $*$ indichiamo una qualsiasi funzione di trasferimento.

2.3 Finalità del controllo

A partire dal prossimo capitolo tratteremo in diversi modi il controllo del motore, agendo in maniera simile sia per quanto riguarda il controllo della posizione che per la velocità.

Si partirà inizialmente da un semplice studio della stabilità del sistema. Verrà analizzata la risposta in frequenza delle funzioni di trasferimento con l'ausilio di diagrammi di Bode e di Nyquist. In una fase successiva solleciteremo il sistema con diversi ingressi (a gradino, rampa lineare, un segnale sinusoidale e un'onda quadra) così da avere un quadro completo su alcuni parametri caratteristici: il tempo di salita e di assestamento e la sovraelongazione (nel dominio del tempo); la banda passante, la pulsazione e il picco di risonanza (nel dominio della frequenza); il tipo del sistema. Infine, per migliorare le prestazioni del sistema si ricorrerà all'uso di reti anticipatrici, ritardatrici o a sella o a un controllore PID.

Vengono brevemente rivisti ora i parametri appena descritti utili all'analisi delle prestazioni. Dato una risposta al gradino $w_{-1}(t)$, si definiscono:

- t_r **tempo di salita**. È il tempo necessario affinché per la prima volta l'uscita entri in un fissato intorno del valore finale $w_{-1}(+\infty)$. Se ad esempio vogliamo un tempo di salita al 10%, saremo interessati dall'istante in cui l'uscita raggiunge il valore $0.9 \cdot w_{-1}(+\infty)$. Ossia $t_r := \min\{t \geq 0 : |w_{-1}(t) - w_{-1}(+\infty)| \leq 0.1 |w_{-1}(+\infty)|\}$.
- t_s **tempo di assestamento**. Misura il tempo di cui necessita l'uscita per assestarsi definitivamente in un intorno del valore finale; in formule, ipotizzando un tempo di assestamento al 10% abbiamo: $t_s := \min\{t \geq 0 : \forall \tau \geq t, |w_{-1}(\tau) - w_{-1}(+\infty)| \leq 0.1 |w_{-1}(+\infty)|\}$.
- **s sovraelongazione (overshoot)**. Nel caso in cui $W(0)$ sia positivo, rappresenta il massimo scostamento positivo dal valore dell'uscita a regime, definita in termini percentuali come

$$s := \left(\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \frac{w_{-1}(t) - w_{-1}(+\infty)}{w_{-1}(+\infty)} \right) \%.$$

Passando all'analisi della risposta in frequenza $W(j\omega)$ (ossia la $W(s)$ valutata sull'asse immaginario) individuiamo:

- B_p **banda passante.** Se cercata ai 3dB è l'intervallo di pulsazioni $[0, B_p]$ in cui $|W(j\omega)|_{dB} \geq |W(0)|_{dB} - 3 dB$. È indice del fatto che per pulsazioni maggiori, il modulo della $W(j\omega)$ sarà minore di $|W(0)|/\sqrt{2}$.
- ω_r **pulsazione di risonanza.** Se esiste unica è quella frequenza positiva in cui $W(j\omega)$ assume valore massimo: $|W(j\omega_r)| = \max_{\omega>0} |W(j\omega)|$.
- M_{rel} **picco di risonanza relativo.** Rappresenta il rapporto (in dB) tra il modulo della risposta in frequenza alla pulsazione di risonanza e il guadagno a bassa frequenza $|W(0)|$, cioè $M_{rel} := \left(\frac{|W(j\omega_r)|}{|W(0)|} \right)_{dB} = |W(j\omega_r)|_{dB} - |W(0)|_{dB}$.

Infine quando si parla di tipo di un sistema lineare, tempo-invariante, causale e BIBO stabile, tale che la sua funzione di trasferimento sia $W(s)$ e $W(0) \neq 0$, si dice che tale sistema è di tipo k se insegue con errore di regime permanente costante non nullo il segnale canonico $\delta_{-(k+1)}(t) = \frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t)$ cioè il sistema è di tipo k se $e_{rp}^{(k+1)} := \lim_{t \rightarrow +\infty} [\delta_{-(k+1)}(t) - w_{-(k+1)}(t)]$ esiste finito non nullo, dove $w_{-(k+1)}(t)$ è la risposta al segnale di ingresso $\delta_{-(k+1)}(t)$. Per i casi di nostro interesse abbiamo:

- **sistema di tipo 0** se insegue con errore di regime permanente costante non nullo il gradino unitario, ossia $W(0) \neq 1$.
- **sistema di tipo 1** se insegue con errore di regime permanente costante non nullo la rampa lineare, cioè $W(0) = 1$ e $W^{(1)}(0) \neq 0$.

Capitolo 3

Controllo di posizione

Come anticipato studiamo ora con l'ausilio dei diagrammi di Bode e Nyquist il modulo e la fase del sistema a catena aperta rappresentante il nostro motore. Introduciamo, quindi, i valori specifici dei parametri attribuiti nostro modello:

- Resistenza di armatura $R_a = 4 \Omega$;
- Induttanza di armatura $L_a = 2.75 \mu L$;
- Momento d'inerzia $I_m = 3.23 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
- Coefficiente di attrito viscoso $F_m = 3.51 \times 10^{-6} \text{ Nm s}$
- Coefficiente di coppia $k_t = 0.0274 \text{ Nm/A}$;
- Costante di forza contro elettromotrice $k_v = 0.0274 \text{ V/rad/sec}$.

L'analisi fatta in precedenza, con i dati che abbiamo deciso di utilizzare porta a una funzione di trasferimento $G(s)$:

$$G(s) = \frac{\Theta}{V_a(s)} = \frac{0.0274}{s((3.23 \times 10^{-6} s + 3.51 \times 10^{-6})(2.75 \times 10^{-6} s + 4) + 0.0274^2)}$$

e, svolgendo i calcoli si ottiene una funzione in rappresentazione di Bode

$$G(s) = \frac{K_B}{s(1 + \frac{s}{p_1})(1 + \frac{s}{p_2})}$$

dove K_B , il guadagno di Bode, è 35,82, p_1 e p_2 le due pulsazioni di taglio valgono rispettivamente $p_1 = 59.2$ e $p_2 = 1.46 \times 10^6$.

Vediamo subito, già dalla funzione di trasferimento che il sistema ha anche un polo in 0, il sistema dunque non è BIBO stabile. Esisteranno dunque alcuni ingressi causali limitati che porteranno l'uscita a divergere.

```

1  >> I=3.23E-6;
   >> F=3.51E-6;
3  >> L=2.75E-6;
   >> R=4;
5  >> K=0.0274;
   >>
7  >> num=K;
   >> den=[(I*L) (I*R+F*L) (K^2+F*R) 0];
9  >>
   >> G=tf(num,den)
11
Transfer function:
13                0.0274
-----
15 8.882e-012 s^3 + 1.292e-005 s^2 + 0.0007648 s
17 >> bode(G)
   >> nyquist(G)

```

Tale estratto di codice MATLAB permette di graficare gli andamenti dei diagrammi di Bode e di Nyquist, quest'ultimo sia per frequenze positive che negative. **tf(.)** costruisce la funzione di trasferimento del sistema, mentre **bode()** e **nyquist()** restituiscono in uscita le seguenti i diagrammi nelle Figure 3.1 e 3.2 rispettivamente.

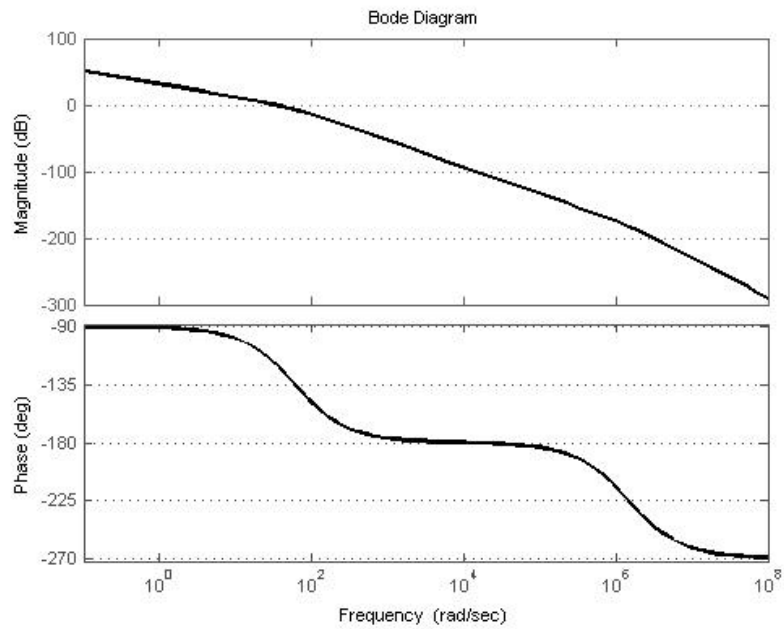
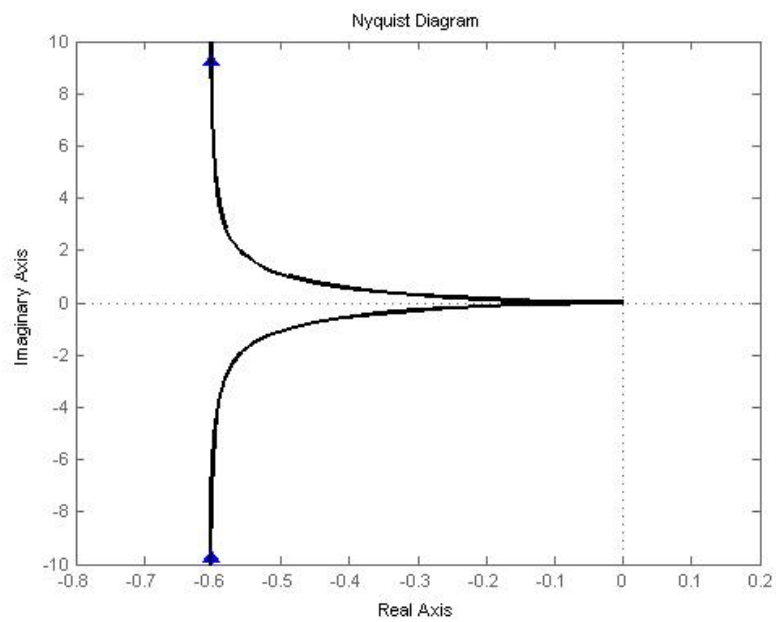
Poiché il nostro obiettivo è riuscire a raggiungere determinate specifiche con l'ingresso a gradino, applichiamo il gradino unitario all'ingresso. Il segnale sarà:

$$V_a(t) = \delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 V, & t < 0; \\ 1 V, & t \geq 0. \end{cases}$$

```

t=0:0.001:0.1;
2 >> [u,t]=step(G,t);
   >> plot(t,u)
4 >> hold on
   >> plot(t,ones(size(t)))
6 >> hold off

```

Figura 3.1: Diagramma di Bode di $G(S)$ Figura 3.2: Diagramma di Nyquist di $G(S)$

Le specifiche da raggiungere in uscita a V_a e vorremmo raggiungere delle prestazioni tali da garantire tempo di assestamento (al 2%) $T_s < 40 \text{ ms}$ e sovraelongazione $s < 5\%$.

Il risultato ottenuto, visibile in Figura 3.3 non è decisamente soddisfacente. Il polo nell'origine rende instabile il sistema e la posizione tende a divergere in breve tempo. Inoltre nessuna specifica di progetto è stata rispettata. In questo momento non ha ovviamente senso provare a inserire un ingresso di tipo superiore in quanto il risultato sarebbe scontato.

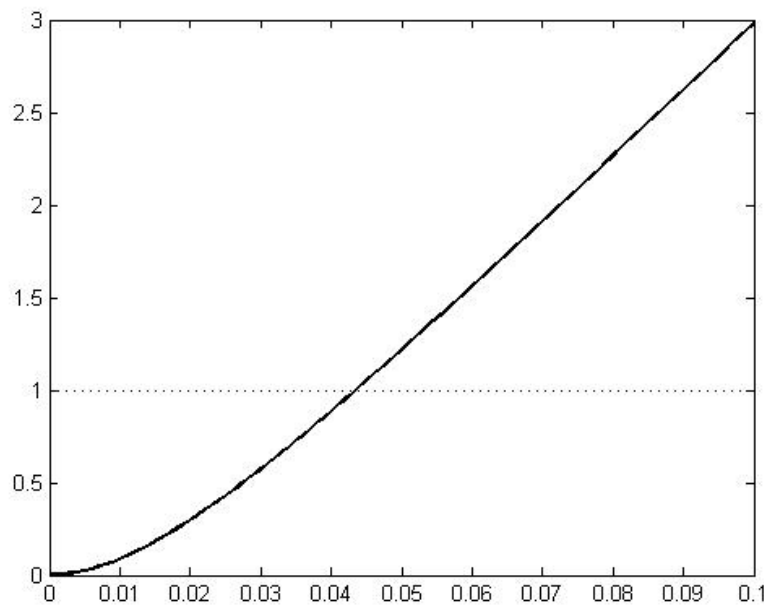


Figura 3.3: Risposta al gradino del sistema in catena aperta

3.1 Sistema retroazionato

Il primo passo verso la risoluzione del problema è quello di retroazionare il sistema. Come già fatto in precedenza $W(s)$ è la funzione di trasferimento del nuovo sistema. E se $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ allora

$$W(s) = \frac{n(s)}{d(s) + n(s)}.$$

In questo modo riusciamo a spostare i poli della $G(s)$. L'unico polo che prima ci dava fastidio era quello nell'origine ma, poichè la $W(s)$ per basse

frequenze verifica $|W(s)| = 1$, il sistema retroazionato garantisce la stabilità BIBO. Si poteva concludere allo stesso modo guardando il diagramma di Nyquist. Applicando infatti il criterio di Nyquist (nella variante con percorso modificato) avremmo visto che $W(s)$ non ha poli a parte reale positiva.

Data ora la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{0.0274}{8.88 \times 10^{-12}s^3 + 1.292 \times 10^{-5}s^2 + 7.65 \times 10^{-4}s + 0.0274}$$

ne studiamo di nuovo la risposta al gradino. Abbiamo utilizzato il comando `feedback(G,1)` in MATLAB, poi abbiamo agito in maniera simile all'esempio precedente.

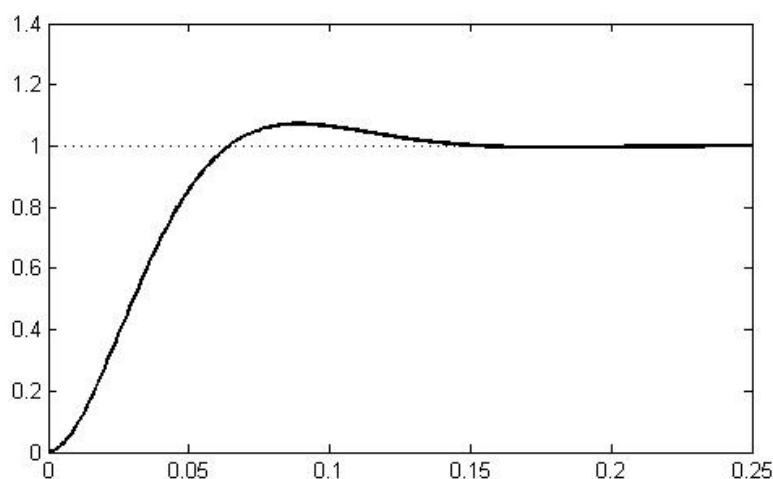


Figura 3.4: Risposta al gradino del sistema retroazionato

La regolazione indotta dalla retroazione permette infatti di stimare un errore (chiamato errore di regolazione) e di far tendere la posizione verso quella voluta. Simulink mette a disposizione tra le altre cose uno strumento che permette di conoscere le caratteristiche della risposta al gradino. Nell'ultimo caso considerato, visibile in Figura 3.4 abbiamo:

- $t_r = 0.043 \text{ s}$;
- $t_s = 0.13 \text{ s}$;

- $s = 7.17\%$ (al2%).

Uno dei poli della $W(s)$ è in alta frequenza e il suo effetto poco concorre nella determinazione di tempo di assestamento e sovraelongazione. Gli altri due poli sono complessi coniugati e MATLAB grazie alla funzione **damp()** ci mette a conoscenza di posizione, smorzamento e frequenza di attraversamento di ogni polo. Per questi ultimi due risulta $\xi = 0.643$ e $\omega_n = 46.1$ e in questi casi risulta per ogni polo p :

$$s = \exp\left(\frac{-p\pi}{\sqrt{1-p^2}}\right) = 0.0717 = 7.17\%$$

$$t_s = \frac{4}{p\omega_n} = 0.13.$$

Non siamo ancora riusciti a rispettare le specifiche di progetto, pur essendo il sistema di tipo 0. Continueremo l'analisi nel prossimo paragrafo tramite l'utilizzo di controllori PID.

3.2 Controllore PID

In uno schema a blocchi, il compensatore deve essere messo in serie al blocco che rappresenta il motore, $G(s)$, quindi la funzione di trasferimento complessiva ad anello chiuso risulta:

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}.$$

Un tipico compensatore è il PID (Proporzionale, Integrativo, Derivativo). È una tipologia di controllo molto facile da programmare e implementare e per questo una delle più usate. Nella sua forma completa, il controllore presenta due zeri e un polo, ma si utilizzano spesso versioni senza la componente derivativa (PI) o senza parte integrativa e derivativa (P). Il problema dell'improprietà del controllore viene di solito risolto mediante l'introduzione di un polo in alta frequenza.

La funzione di trasferimento di un controllore PID è:

$$C(s) = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s}$$

dove è chiaro a cosa si riferiscano i tre coefficienti. Poiché il nostro sistema è lineare, possiamo utilizzare la sovrapposizione degli effetti e renderci conto

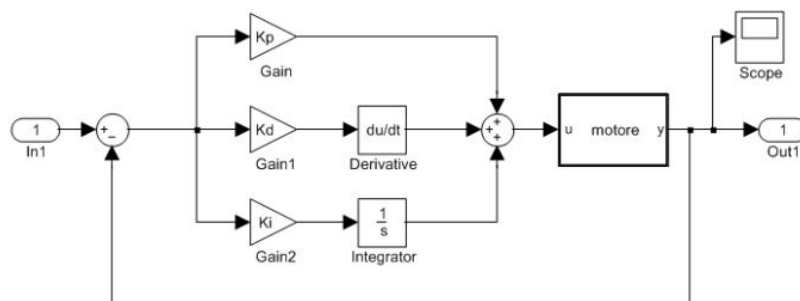


Figura 3.5: Schema a blocchi Simulink del controllore PID

che l'uscita $V_a(t)$ è la somma di tre tensioni, ognuna derivante dal contributo o proporzionale o integrativo o derivativo, in sintesi

$$V_a(t) = V_P(t) + V_D(t) + V_I(t)$$

In Figura 3.5 lo schema a blocchi completo (Simulink) che permette di scegliere il controllore adatto variando i 3 parametri di progetto. È stato trascurato l'ingresso $c_r(t)$ che andrebbe in entrata al blocco motore, in parallelo al PID. Infatti, facciamo l'ipotesi di lavorare in assenza di carico.

Dei tre blocchi in parallelo, il primo controlla la parte proporzionale ed è facile capire che $V_P(t) = K_P \cdot e(t)$. Un valore più elevato del coefficiente per mette di avere una banda passante arbitrariamente alta. Ma se da un lato questo fatto si tramuta in una notevole prontezza del sistema, dall'altro introduce una sovralongazione non trascurabile.

Grazie al blocco integratore sarà possibile migliorare le specifiche sul tipo di sistema o limitare l'errore il più possibile nel caso sia sufficiente un sistema di tipo 0. In ultimo, con il blocco derivativo sarà possibile migliorare sensibilmente il tempo di assestamento. Di solito K_D viene scelto abbastanza piccolo in quanto molto la parte derivativa è molto sensibile alle oscillazioni.

Ora a partire da K_P , con successivi tentativi cercheremo di portare il sistema ad assumere le caratteristiche da noi indicate. Di seguito vengono mostrati alcuni tentativi.

Dal primo grafico (Figura 3.6) possiamo osservare che per ogni valore di K_P riusciamo a inseguire il gradino e questo perché è già presente un integratore nella funzione di trasferimento. Pur aggiungendo una sovralongazione significativa e un tempo di assestamento più lungo, scegliamo $K_P = 21$ che porta ai migliori risultati in termini di tempo di salita. Sarà infatti possibile, successivamente, con gli altri due controlli migliorare la risposta del sistema.

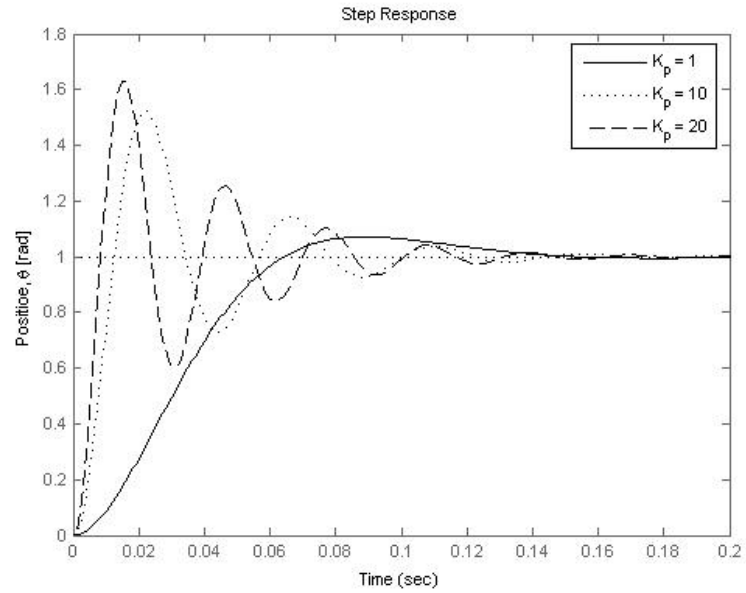
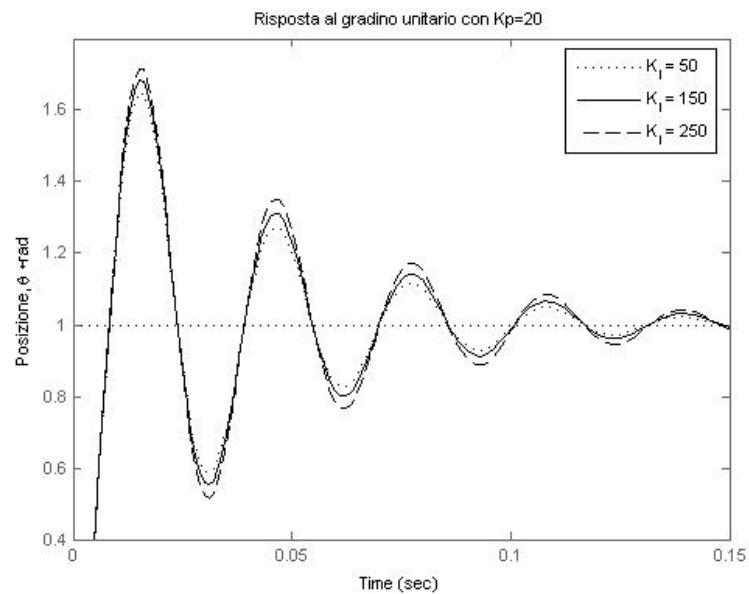


Figura 3.6: Risposta al gradino con solo blocco proporzionale

Figura 3.7: Risposta al gradino con $K_p = 20$ e K_I variabile

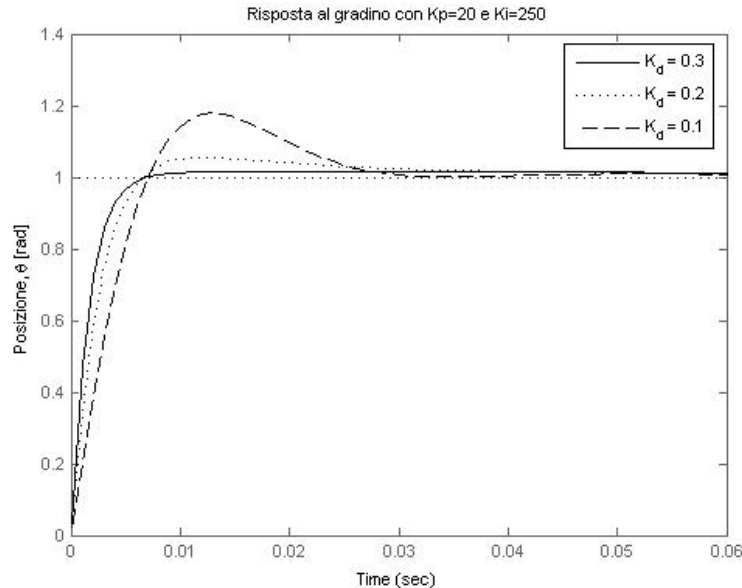


Figura 3.8: Risposta al gradino con $K_P = 20$, $K_I = 250$ e K_D variabile

Il controllore integrale nel caso di interesse per la nostra tesi non modifica molto il comportamento del sistema, tutt'altro, sembra addirittura peggiorarne le caratteristiche: le oscillazioni hanno una frequenza maggiore e si raggiungono picchi più elevati (Figura 3.7). Come accennato in precedenza, il fatto di riuscire a seguire perfettamente il gradino rende non necessaria la funzione di K_I . Questo controllo diventa invece fondamentale quando viene applicato un disturbo, come può essere un carico sul motore. In ogni caso si nota un lieve miglioramento sul tempo di salita all'aumentare del coefficiente.

Per ultimo vediamo come un piccolo contributo derivativo possa modificare notevolmente le caratteristiche della risposta al gradino: riusciamo a diminuire significativamente la sovralongazione e ridurre il tempo di assestamento mantenendo inalterato il tempo di salita (Figura 3.8). Se le specifiche fossero molto stringenti (ad esempio tempo di assestamento all'1%) un coefficiente troppo alto non riuscirebbe a soddisfare i requisiti. Riporto i parametri raggiunti in quest'ultima simulazione:

- $t_r = 3.2 \text{ ms}$
- $t_s = 5.5 \text{ ms}$
- $s = 1.62\%$

I risultati ottenuti si devono quindi al compensatore:

$$C(s) = 20 + 0.3s + \frac{250}{s}$$

I tre parametri verificano le specifiche che ci eravamo ripromessi di raggiungere inizialmente anzi, si è perfino ottenuto un tempo di assestamento di un ordine di grandezza inferiore a quello richiesto.

3.3 Risposta all'onda quadra

I motori elettrici trovano largo impiego nell'Automatica. Un problema di interesse è: dato l'asse del motore in una certa posizione a riposo, vogliamo portarci nella posizione desiderata e poi tornare indietro. Ripetere questo ciclo più volte equivale a seguire un'onda quadra opportunamente scalata e sfasata. Tale segnale sarà responsabile della tensione di armatura. L'onda avrà un *duty cycle* (percentuale di tempo passata alla tensione alta) pari al 50% in modo da rendere il movimento simmetrico. Possiamo già fare delle considerazioni preliminari: l'onda quadra si ottiene dalla somma algebrica di segnali a gradino traslati, quindi ci attendiamo già alcuni comportamenti per il sistema senza andare a calcolarli. Se trascorrerà un tempo sufficiente tra un fronte di salita e il successivo fronte di discesa, e viceversa, il rotore potrà portarsi alla posizione voluta. Altrimenti, nei casi in cui il periodo dell'onda quadra sia troppo breve non riusciremo a portarci a regime.

Sebbene nelle applicazioni servirà una precisione molto accurata, per questo esempio ci consideriamo a regime quando l'errore di inseguimento del segnale è minore del 10%. Utilizzeremo come funzione di trasferimento, $W(s)$, quella trovata alla fine del paragrafo precedente, in quanto sappiamo inseguire molto prontamente il gradino unitario. La specifica appena indicata si traduce nell'arrivare oltre il 90% del valore a regime quando il segnale è alto e sotto il 10% quando il segnale è a livello basso.

Se invece l'onda quadra considerata si sposta tra le tensioni di riferimento $+1V$ e $-1V$ la posizione del rotore dovrà riuscire a coprire una distanza doppia rispetto a quella considerata per la risposta al gradino unitario. Dalla Figura 3.9, ottenuta con MATLAB, si vede come il sistema abbia un tempo di salita per un segnale di ingresso del valore di $2V$ di circa $6ms$. Il valore ottenuto è sovrastimato in quanto il nostro problema richiede una variazione da $+90\%$ a -90% del valore a regime mentre noi ne consideriamo uno senza la tolleranza inferiore.

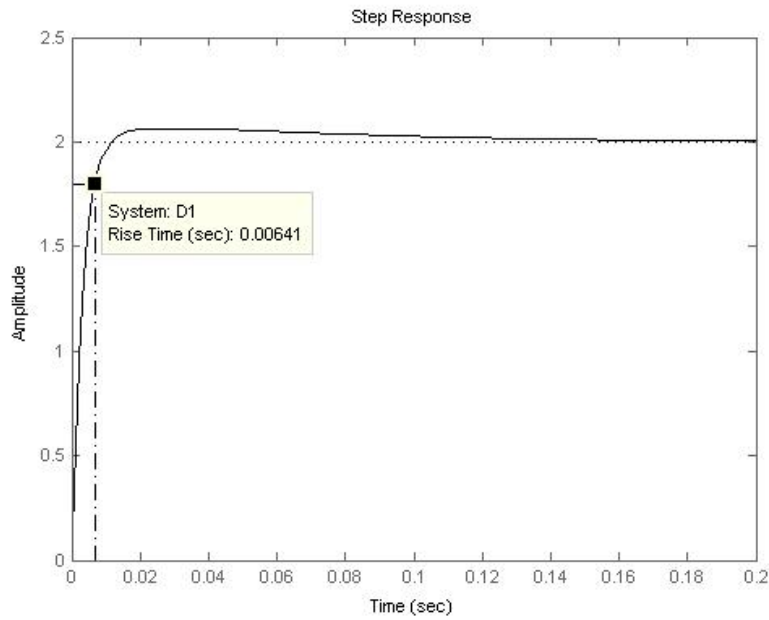


Figura 3.9: Risposta a un ingresso doppio rispetto $\delta_{-1}(t)$

Possiamo comunque concludere che se il periodo T dell'onda quadra è almeno doppio di questo tempo di salita, ovvero $T = 12.8 \text{ ms}$ il rotore riuscirà a inseguire il segnale rispettando le specifiche richieste.

Capitolo 4

Controllo di velocità

Come prima ripartiamo dallo studio della funzione di trasferimento in catena aperta $G(s)$, sappiamo già che ci saranno meno problemi nel controllo grazie al fatto che siamo sicuri di non avere un polo nell'origine

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K}{(I_m s + F_m)(L_a s + R_a) + K^2}$$

Naturalmente ci possiamo ricondurre a una forma simile a quella utilizzata in precedenza, per la precisione

$$G(s) = \frac{K_B}{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right)\left(1 + \frac{s}{p_2}\right)}$$

I dati del motore utilizzati fin qui però non sono adatti ad un controllo in velocità. Per questo introduciamo dei nuovi dati:

- $R_a = 1 \Omega$;
- $L_a = 0.5 L$;
- $I_m = 0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
- $F_m = 0.1 \text{ Nm/s}$;
- $K = 0.01 \text{ Nm/A}$.

L'utilizzo di specifiche diverse per il motore, si traduce anche in una diversa scelta per i parametri di riferimento da raggiungere mediante il controllo. Le nuove specifiche di progetto sono infatti: un segnale causale in entrata di 1 rad/s , tempo di assestamento $T_s < 2 \text{ s}$, sovraelongazione $s < 5\%$ e errore a regime $e_{rp} < 1\%$.

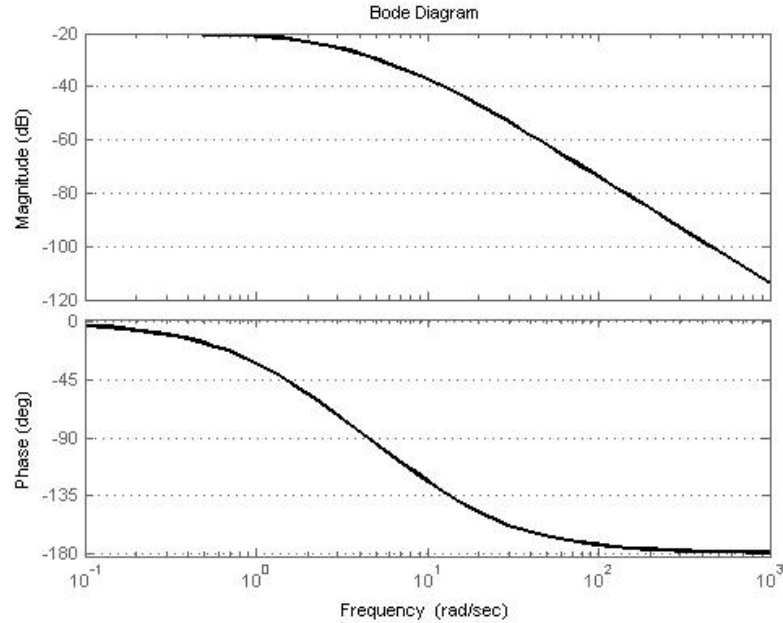


Figura 4.1: Diagramma di Bode di $G(s)$

Ora cambieranno sia il guadagno di Bode che i valori assoluti dei due poli: $K_B = 2$, $p_1 = 2.003$ e $p_2 = 9.998$. La differenza sostanziale rispetto al caso precedente è la mancanza di un polo in 0 e vedremo ora cosa implica.

Dal diagramma di Bode in Figura 4.1 possiamo osservare che il contributo del secondo polo (quello in -10) è irrilevante rispetto alla funzione svolta dal primo (in -2). Possiamo dire che tale polo sia dominante: è responsabile della banda passante e, rimandando tale discussione al paragrafo successivo, anche del tempo di salita e di assestamento. Volendo, quindi, non sarebbe limitante (nel senso che non introdurrebbe elevati errori) considerare il sistema come un modello del primo ordine anziché del secondo.

Per quanto riguarda la risposta al gradino abbiamo un'uscita che raggiunge un valore a regime decisamente troppo alto (vedi Figura 4.2). Possiamo calcolare a quanto si porta il sistema a regime grazie al comando MATLAB `dcgain()` che nel nostro caso dà come risultato 0.1.

$$e_{rp} = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\delta_{-1}(t) - w_{-1}(t)| = 0.9$$

Il motore non è sufficientemente pronto poiché pur rispondendo al gradino monotonicamente, mostra un tempo di salita di 1.14s e di assestamento di 2.07s e il valore che assume a transitorio terminato è decisamente inaccettabile.

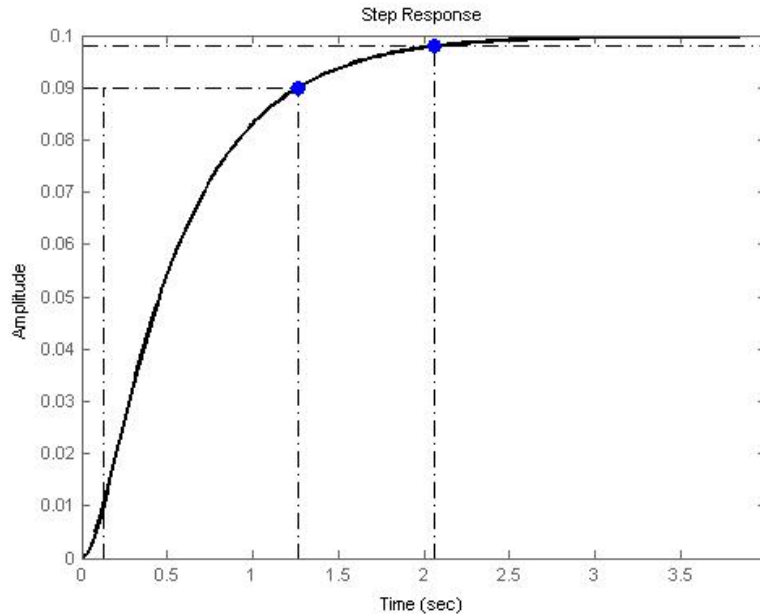


Figura 4.2: Risposta al gradino in catena aperta

4.1 Sintesi in frequenza

Partendo dal diagramma di Bode riportato nel paragrafo precedente possiamo osservare come, mancando una pulsazione di attraversamento, il margine di fase risulti indefinito. Questo segno è indice di robustezza: osservando il diagramma di Nyquist (in Figura 4.3 ne abbiamo riportato solo la parte significativa), vediamo infatti che esso passa ben distante dal punto critico $-1 + j0$ quindi anche in presenza di disturbi, tali variazioni non vanno a inficiare la validità delle nostre considerazioni. Inoltre possiamo contare sull'assenza di sovralongazione.

D'altro canto il fatto che il guadagno in frequenza sia sempre minore di 0 dB (nel diagramma di Nyquist si traduce in un grafico completamente all'interno del cerchio di raggio 1 e centro l'origine) introduce errori nell'inseguimento di segnali. Come abbiamo visto prima nella risposta al gradino, il segnale si mantiene ben distante dal valore unitario.

Tentiamo quindi di migliorare il margine di fase; se consideriamo 60° un angolo adatto, vediamo che la possibile pulsazione di attraversamento sarebbe in corrispondenza di 10 rad/s . Sempre da MATLAB con il comando `bode(fdt, ω)` possiamo conoscere le informazioni necessarie, che in questo caso restituiscono $\phi = -123.68^\circ$, quindi $m_\phi = 56.32^\circ$. Il guadagno in $\omega =$

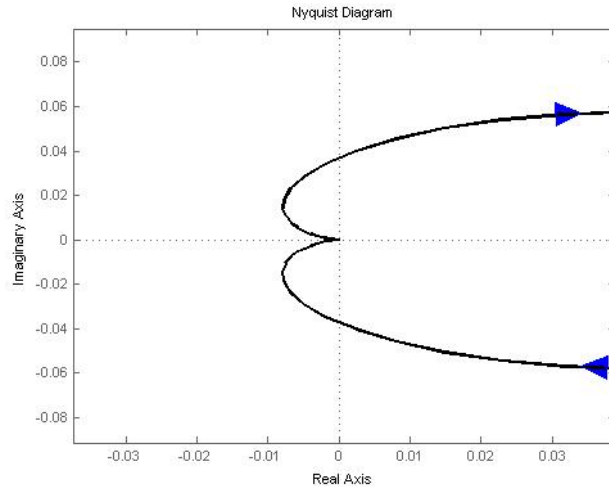


Figura 4.3: Particolare del diagramma di Nyquist di $G(s)$

10 vale -37.1 dB che, in lineare, porta a un guadagno effettivo di 0.0139. Abbiamo raggiunto il primo passo per costruire un compensatore. Per quanto riguarda la parte esclusivamente proporzionale basterà infatti moltiplicare il guadagno per la funzione di trasferimento $G(s)$ (o dividere quest'ultima per l'attenuazione che vale, in lineare $72 = \left(\frac{1}{0.0139}\right)$).

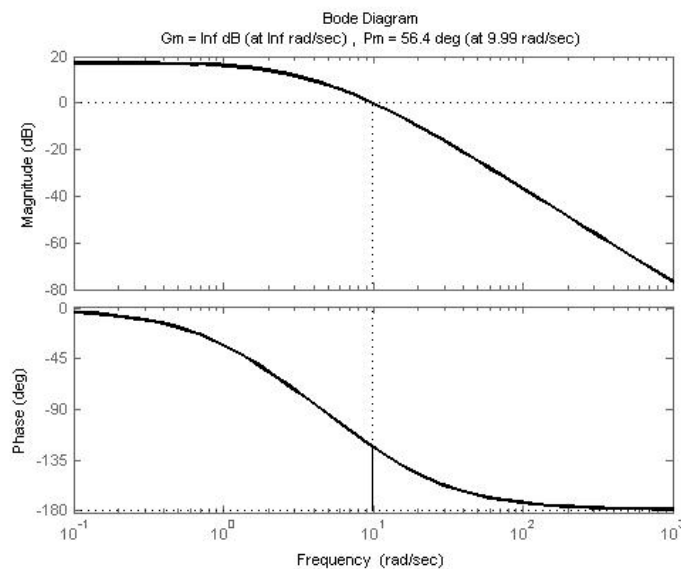


Figura 4.4: Diagramma di Bode di $G(s)$ con compensatore proporzionale

Alla pagine precedente (Figura 4.5) vediamo l'effetto del compensatore proporzionale che, come ci aspettavamo ha alzato il diagramma di Bode del guadagno in modo da ottenere una fase che non porti il sistema all'instabilità.

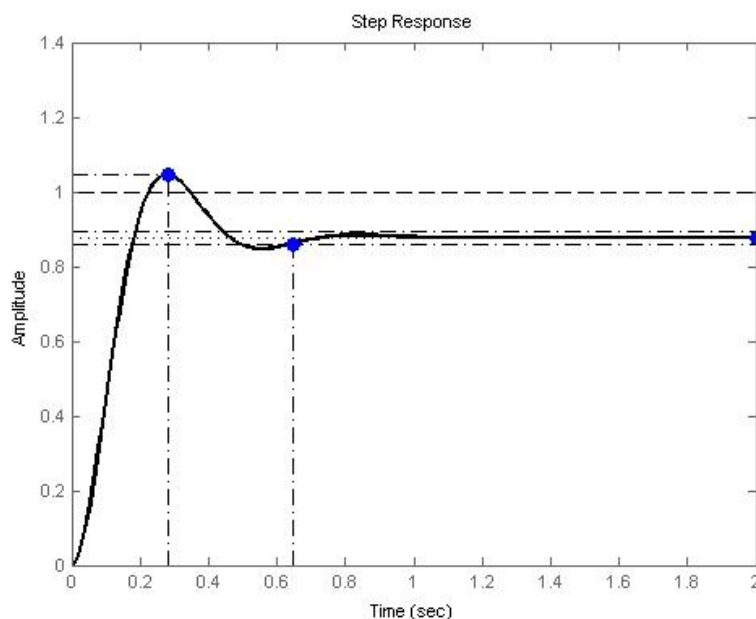


Figura 4.5: Risposta al gradino del sistema retroazionato

Di nuovo riportiamo la risposta al gradino del sistema retroazionato, Figura 4.5. Il sistema ad anello chiuso presenta ancora errore a regime: $w_{-1}(+\infty) = 0.878$. D'altra parte abbiamo ottenuto un tempo di assestamento di 0.65 s e un overshoot del 18.9%. Come sappiamo la sovraelongazione è causata da un valore eccessivo del guadagno proporzionale, ma diminuirlo causerebbe un peggioramento della robustezza del sistema poiché si andrebbe ad intaccare il margine di fase (ricordiamo che deve essere mantenuto un margine di fase maggiore di 52° per non avere lunghi transitori).

Considerato che si deve mantenere inalterato il guadagno in continua e che dobbiamo abbassare la pulsazione di attraversamento, propendiamo per la scelta di una rete ritardatrice anche se peggiora il margine di fase. Per ovviare questo inconveniente, basterà scegliere la coppia zero polo in modo che $|p| < |z| < |\omega_a|$ in modo da non disturbare la fase nella regione di interesse. Per far ciò il compensatore sarà:

$$C(s) = 100 \cdot \frac{1 + 10s}{1 + 1000s}.$$

Dato che il guadagno in continua di $C(s)$ è di 40 dB possiamo ridurre il coefficiente del guadagno proporzionale a 40. Grafichiamo quello che è stato appena descritto nel diagramma di Bode e nel tempo (vedi Figure 4.6 e 4.7).

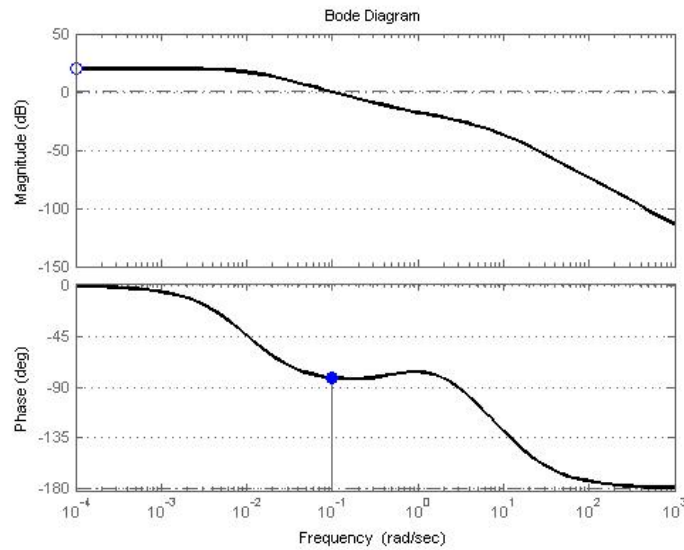


Figura 4.6: Diagramma di Bode di $C(s)G(s)$

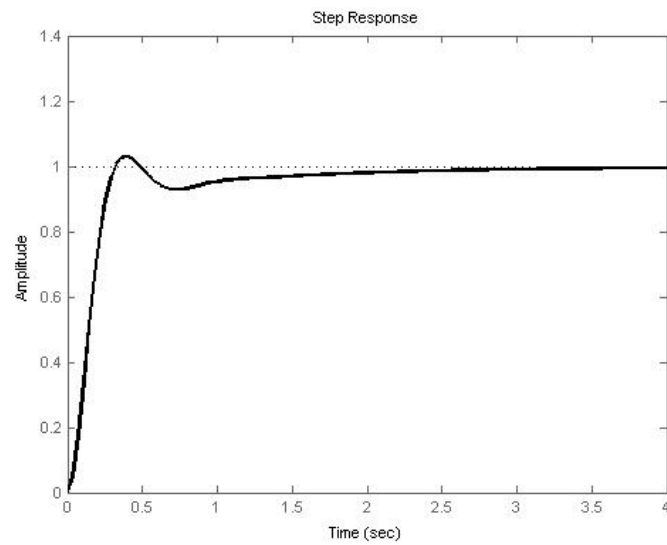


Figura 4.7: Risposta al gradino del sistema con rete ritardatrice

Siamo infine riusciti a raggiungere le specifiche di progetto. I parametri ottenuti per la risposta al gradino sono:

- $t_r = 204$ ms;
- $t_s = 1.88$ s;
- $s = 3.1\%$;
- $w_{-1}(+\infty) = 0.995$, $e_{rp} = 0.005 < 1\%$.

4.2 Rete a sella

Nel paragrafo precedente siamo riusciti ad ottenere un risultato che ha soddisfatto i nostri requisiti, ma se fossero stati richiesti dei valori più stringenti, con la sola rete ritardatrice non avremmo potuto ottenere una risposta adeguata. È soprattutto il tempo di assestamento a non essere accettabile.

L'obiettivo è ora provare a migliorare la risposta al gradino, magari limitando l'undershoot dopo il primo picco (Figura 4.7). Per far ciò utilizziamo una rete a sella, che altro non è che la giustapposizione di una rete anticipatrice e una ritardatrice. Per la parte ritardatrice viene utilizzata quella trovata in precedenza, in quanto ottenuta *ad hoc*. Ricordiamo che una rete a sella è rappresentata da una funzione di trasferimento

$$C(s) = \frac{(1 + \frac{s}{z_1})(1 + \frac{s}{z_2})}{(1 + \frac{s}{p_1})(1 + \frac{s}{p_2})}$$

dove z_1 e p_1 sono quelli della rete ritardatrice. Per gli altri due deve valere $|z_1| < |z_2| < |p_2|$.

Scegliamo sempre poli e zeri distanti da quelli della funzione di trasferimento in catena aperta. La prima ipotesi fatta è uno zero in -100 e un polo la decade dopo. Non riporto i grafici ma la sovralongazione raggiunge il 20% pur venendo rispettate le altre specifiche. Spostando ulteriormente il polo in alta frequenza otteniamo

$$\tilde{C}(s) = \frac{s + 100}{s + 10000} = 100 \frac{1 + 0.01s}{1 + 0.0001s}$$

dove \tilde{C} il compensatore rappresentante la sola rete anticipatrice. Il risultato finale è riportato in Figura 4.8

Tutte le specifiche sono state ampiamente rispettate e il sistema si porta perfettamente a regime in un tempo molto breve.

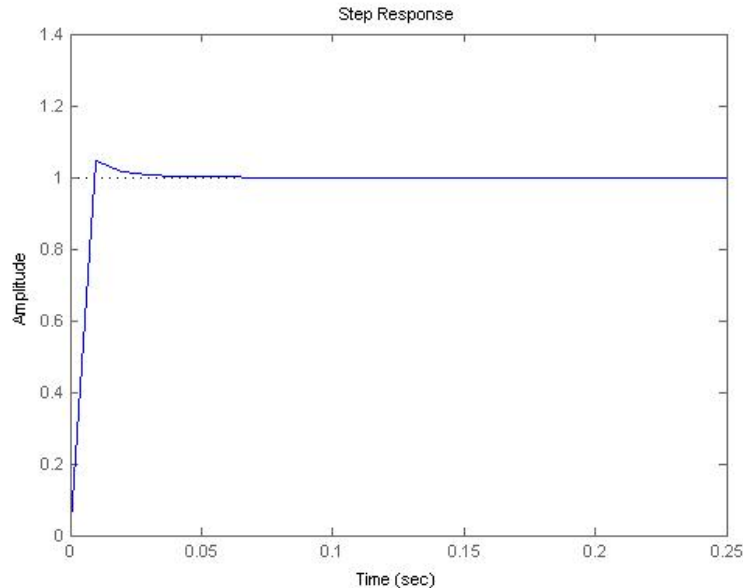


Figura 4.8: Risposta del sistema controllato con rete a sella

4.3 Risposta alla rampa lineare

Un altro segnale di interesse, in corrispondenza del quale vogliamo soltanto analizzare il comportamento del sistema, è la rampa lineare. Si vuole valutare la risposta del sistema al segnale di ingresso

$$V_a(t) = t\delta_{-1}$$

segnale causale, nullo sul semiasse negativo, e pari a t stesso, per valori positivi di t . Il comando `lsim()` di MATLAB restituisce la risposta di un sistema lineare a un ingresso arbitrario. Inseriamo la funzione di trasferimento in catena aperta; avremo il seguente codice

```
>> G=tf(0.01 , [(0.01*0.5) (0.1*0.5+0.01) (0.01*0.01+0.1)])
2 >>
>> t=0:0.01:4;
4 >> l=t;
>> [y,t]=lsim(G,l,t);
6 >> plot(t,y)
>>
8 >> hold on
>> plot(t,l)
```

```
10 >> hold off
```

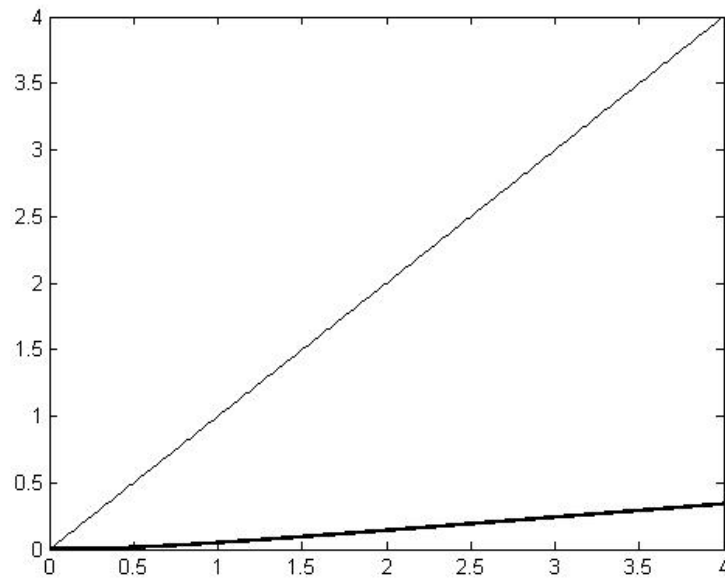


Figura 4.9: Risposta in catena aperta alla rampa lineare

In Figura 4.9 si nota che l'uscita tende ad allontanarsi velocemente dal segnale di ingresso. A regime l'errore sarà infinito, quindi il sistema considerato non è di tipo 1. Possiamo perciò evitare di inserire in ingresso altri segnali canonici (rampa parabolica, ...), poiché il sistema non potrà far altro che inseguire i segnali con errore infinito.

Bibliografia

- [1] M. William, T. Dawn (1998), *Control Tutorials for MATLAB and Simulink*. Michigan College of Engineering, disponibile a ctms.engin.umich.edu [ultimo accesso 22 novembre 2012].
- [2] M.Bisiacco, M.E. Valcher (2008), *Controlli Automatici*. Ed. Libreria Progetto, Padova.
- [3] R. Dorf, R. Bishop (1995), *Modern Control Systems*. Addison-Wesley, Massachusetts.