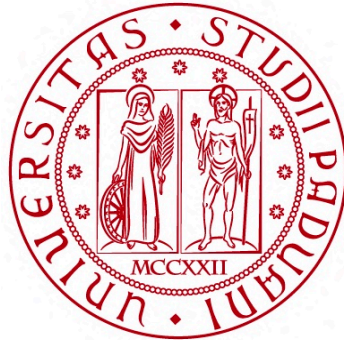


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, EDILE E AMBIENTALE
Department Of Civil, Environmental and Architectural Engineering

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile



TESI DI LAUREA

**SIMULAZIONE MECCANICA
AGLI ELEMENTI FINITI
DI UNO SCARPONE DA SCI**

Laureando: ANDREA VISENTIN
2004108

Relatore:
Chiar.mo PROF. GIANLUCA MAZZUCCO

Correlatori:
CHRISTIAN POZZOBON
STEFANO NOAL

ANNO ACCADEMICO 2021-2022

Indice

INTRODUZIONE	7
CAPITOLO 1 – DESCRIZIONE SCARPONE ANALIZZATO E TEST SPERIMENTALE	11
1.1 DESCRIZIONE DELLO SCARPONE “FORMULA 120”	11
1.1.2 Scarpetta	12
1.1.3 Materiali utilizzati per lo scarpone	13
1.2 TEST SPERIMENTALE	14
1.2.1 Protesi	14
1.2.2 Setup di prova	14
1.2.3 Risultati sperimentali	17
CAPITOLO 2 – ASPETTI TEORICI DEI MODELLI NON LINEARI	21
2.1 NON LINEARITÀ PER CONTATTO NUMERICO	21
2.1.2 Contatto nel caso di sistemi ad un Grado Di Libertà (SDOF)	24
2.1.3 Risoluzione numerica	27
2.1.3.1 Metodo Penalty	27
2.1.3.2 Metodo con i moltiplicatori di Lagrange	30
2.1.4 Tipologie di contatto numerico	32
2.1.5 Contatto normale tridimensionale	32
2.1.6 Esempio analisi agli elementi finiti del contatto di due barre	35
2.2 NON LINEARITÀ PER GEOMETRIA	41
2.2.2 Total Lagrangian formulation	52
2.2.2.1 Equazione di equilibrio	52
2.2.2.2 Rigidezza tangente (operatore tangente)	53
2.2.2.3 Implementazione numerica	55
2.2.3 Update Lagrangian formulation	58
2.2.3.1 Trasformazione da total ad update Lagrangian formulation	58
2.2.3.2 Implementazione numerica	60
CAPITOLO 3 – SEMPLIFICAZIONE DEL MODELLO 3D	63
3.1 GAMBETTO	63
3.2 SCAFO	66

CAPITOLO 4 – MODELLAZIONE NUMERICA..... 69

4.2	REALIZZAZIONE MODELLO: SCARPONE APERTO – FASE 1	71
4.2.2	Caratteristiche del modello – Fase 1	72
4.2.2.1	Caratteristiche del materiale – Fase 1	72
4.2.2.2	Creazione della mesh – Fase 1	73
4.2.2.3	Superfici e tipo di contatto – Fase 1	75
4.2.2.4	Condizioni di vincolo (BCs) , Pressioni ed Amplitude – Fase 1	81
4.2.2.5	Step di carico e tolleranze – Fase 1	91
4.2.3	Chiusura dello scarpone.....	94
4.3	ESPORTAZIONE MODELLO: SCARPONE CHIUSO.....	99
4.3.1	File di input (.inp) – Fase 1	99
4.3.2	File spostamenti (.rpt) – fine Fase 1	101
4.3.3	File di input (.inp) – Fase 2.....	101
4.4	REALIZZAZIONE MODELLO: SCARPONE CHIUSO – FASE 2.....	103
4.4.2	Realizzazione ed importazione protesi	103
4.4.3	Caratteristiche modello – Fase 2: test 1 (senza scarpetta)	105
4.4.3.1	Caratteristiche del materiale – Fase 2: test 1	105
4.4.3.2	Creazione della mesh – Fase 2: test 1	107
4.4.3.3	Superfici e tipo di contatto – Fase 2: test 1	108
4.4.3.4	Condizioni di vincolo (BCs) e Amplitude – Fase 2: test 1	113
4.4.3.5	Step di carico e tolleranze – Fase 2: test 1.....	120
4.4.4	Esecuzione analisi ed esportazione dati – Test 1	123
4.4.5	Realizzazione ed importazione scarpetta semplificata	125
4.4.6	Caratteristiche modello – Fase 2: test 2 (con scarpetta)	126
4.4.6.1	Caratteristiche del materiale della scarpetta.....	127
4.4.6.2	Creazione della mesh della scarpetta.....	127
4.4.6.3	Superfici di contatto – Fase 2: test 2	128
4.4.6.4	Condizioni di vincolo (BCs) e Amplitude – Fase 2: test 2.....	131
4.4.6.5	Step di carico e tolleranza – Fase 2: test 2.....	132
4.4.7	Esecuzione analisi ed esportazione dati – Test 2	133

CAPITOLO 5 – ANALISI DEI RISULTATI..... 137

5.1	CONFRONTO RISULTATI OTTENUTI CON I TEST SPERIMENTALI	137
5.1.1	Test 1 (senza scarpetta).....	137
5.1.2	Test 2 (con scarpetta).....	140
5.1.3	Confronto Test 1 e Test 2	142
5.2	ANALISI RISULTATI AGGIUNTIVI OTTENUTI	144
5.2.1	Test 1 (senza scarpetta).....	144

5.2.1.1 Carico in avanti (+15°) – Test 1	144
5.2.1.2 Carico indietro (–8°) – Test 1	148
5.2.1.3 Valutazioni generali – Test 1	152
5.2.1.4 Valutazione spostamenti in X (U1) – Test 1	152
5.2.1.5 Valutazione spostamenti in Y (U2) – Test 1	152
5.2.1.6 Valutazione spostamenti in Z (U3) – Test 1	154
5.2.1.7 Valutazione tensioni alla Von Mises – Test 1	157
5.2.2 Test 2 (con scarpetta)	161
5.2.2.1 Carico in avanti (+15°) – Test 2	162
5.2.2.2 Carico indietro (–8°) – Test 2	166
5.2.2.3 Valutazioni generali – Test 2	170
5.2.2.4 Valutazione spostamenti in X (U1) – Test 2	170
5.2.2.5 Valutazione spostamenti in Y (U2) – Test 2	170
5.2.2.6 Valutazione spostamenti in Z (U3) – Test 2	172
5.2.2.7 Valutazione tensioni alla Von Mises – Test 2	175
5.2.3 Confronto Test 1 e Test 2	180
CONCLUSIONI	181
RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.....	183

Introduzione

Lo sci è uno degli sport invernali maggiormente praticato anche se, negli ultimi anni, a causa dell'epidemia dovuta al COVID-19 e la successiva chiusura degli impianti sciistici, ha subito un calo di interesse (-51,38%). A riprova dell'apprezzamento di tale sport è infatti salito in trend lo sci alpinismo (+156%), il quale permette agli sciatori di salire in autonomia sulle piste e quindi ovviare le restrizioni definite dalla pandemia [1].

A sostegno di quanto detto anche il mercato globale delle attrezzature da sci, secondo uno studio realizzato da Businesscoot nel 2021, è in crescita, e si stima un ulteriore aumento in vista delle olimpiadi del 2026 che si svolgeranno in Italia, nelle Dolomiti [2].

Elemento fondamentale di questo sport sono gli scarponi, la cui scelta è, come afferma lo studio sopra citato, *“essenziale per il comfort dello sciatore; un errore nello scarpone infatti può portare a problemi di vari gradi di disagio quando si scia, soprattutto per i principianti”*.

Ad oggi la realizzazione di un nuovo prototipo di scarpone segue un percorso tortuoso. Il processo produttivo attuale prevede, infatti, le seguenti fasi: la progettazione (tramite modellazione tridimensionale con CAD 3D); la prototipazione dello scarpone test, per verificare l'estetica e adattare la calzata (tramite stampa 3D); e lo stampaggio dello scarpone da sottoporre a prove sperimentali e valutazioni qualitative prima della messa in produzione (tramite iniezione in stampi prototipo).

Uno dei test principali è quello di sottoporlo, all'interno di una cella frigorifera, ad un carico ciclico simile a quello a cui viene normalmente sollecitato durante una tipica sciata. Tale prova viene realizzata con una strumentazione apposita chiamata scarpometro.

Ciò permette di testare i suoi limiti e le sue prestazioni rallentando però l'iter produttivo.

Il focus di tale tesi, avvenuto in collaborazione con l'azienda HEAD, che nel comune di Altivole (TV) detiene gli uffici tecnici dedicati alla realizzazione dei nuovi prototipi, è perciò lo sviluppo di un nuovo approccio: in sostituzione alle prove sperimentali si ipotizza l'utilizzo di simulazioni numeriche effettuate tramite il metodo agli elementi finiti (FEM), grazie alle quali, sarà possibile diminuire i tempi di industrializzazione di nuovi modelli di scarpone.

In particolare si intende verificare se l'approccio proposto sia fattibile e sviluppabile in un prossimo futuro all'interno dell'azienda, con il vantaggio di svincolare il processo di prototipazione dalla realizzazione dei test fisici/meccanici.

Per tale scopo si realizza quindi un apposito modello FEM che permetta di riprodurre numericamente il comportamento della prova dello scarpometro ed eventualmente arrivare alla sua sostituzione (in particolare si analizza la strumentazione utilizzata dall'azienda, lo Scarpometro della Step-lab [3]).

Inoltre, sviluppare suddetto approccio tramite questa applicazione è vantaggioso, in quanto permette di realizzare valutazioni aggiuntive da affiancare ai dati sperimentali relativi allo scarpometro.

La strumentazione sopra indicata, infatti, permette solamente di estrapolare dei grafici "forza-angolo di rotazione" i quali identificano il ciclo di carico e scarico dello scarpone. Con il modello creato invece, è possibile ricavare informazioni aggiuntive specifiche sia per quanto riguarda le concentrazioni tensionali (valutare a priori se e dove il materiale potrebbe avere delle problematiche), sia per gli spostamenti (valutare se lo scarpone possa dare alcuni problemi di schiacciamento del collo-piede/della pianta, o se si allarghi in maniera eccessiva lateralmente, cosa che può creare dei vuoti d'aria i quali possono comportare uno spostamento del piede e sensazioni di non aderenza dello scarpone), e valutando infine dove e come aumentare/diminuire gli spessori degli elementi che compongono lo scarpone.

Queste valutazioni difatti, ad oggi, non possono che essere realizzate solamente dopo la produzione del modello stesso, tramite l'utilizzo dello scarpone da parte di tecnici specifici.

In particolare, lo scarpone che si intende analizzare è il modello denominato "Formula 120" (la scelta di tale scarpone, in produzione da diversi anni, è stata effettuata in modo da avere a disposizione un repertorio di prove sperimentali a cui fare riferimento).

Per la realizzazione del modello numerico, e la sua relativa soluzione, viene utilizzato il software agli elementi finiti Abaqus.

Nello svolgere tali analisi si riscontrano due non linearità specifiche che è necessario approfondire: la non linearità per contatto e per geometria.

Nello specifico si può affermare che si ha una non linearità per contatto numerico quando, due o più corpi inizialmente separati (in questo caso varie zone di interfaccia dello scarpone), entrano in contatto fra loro durante il processo evolutivo dell'analisi [4]. Ciò comporta la nascita di forze di azione e reazione e di termini di rigidità aggiuntivi i quali permettono ai due elementi di non compenetrare.

Per quanto riguarda invece la non linearità per geometria questa si verifica nei casi in cui la struttura (in questo caso lo scarpone) subisce deformazioni che non possono essere considerate piccole, per cui decade la terza ipotesi alla base del calcolo lineare (cioè quella secondo cui il calcolo delle sollecitazioni avviene sulla geometria della configurazione indeformata). È necessario perciò illustrare due formulazioni, la Total e l'Update Lagrangian Formulation, le quali permettono: la prima di mappare la soluzione finale con riferimento alla configurazione indeformata (iniziale), introducendo però un contributo non lineare in termini deformativi; la seconda di mappare la soluzione finale con riferimento alla configurazione deformata (finale), ma introducendo incrementi di sollecitazione non lineari.

La tesi è stata così suddivisa:

Capitolo Primo: vengono raccolte le informazioni principali relative al modello di scarpone analizzato, le sue caratteristiche e la spiegazione della prova sperimentale scelta.

Capitolo Secondo: viene esposta la teoria fondamentale alla base delle simulazioni realizzate. Nello specifico non linearità per contatto e per geometria e la loro relativa implementazione numerica.

Capitolo Terzo: si descrive come sono stati realizzati i modelli numerici a partire dalla geometria tridimensionale.

Capitolo Quarto: vengono riportate le fasi di realizzazione del modello: la *Fase1* con la realizzazione del primo modello (aperto) e la sua relativa chiusura; la *Fase2* con simulazione della sciata (test dello scarpometro).

Capitolo Quinto: vengono analizzati i risultati e confrontati i cicli di carico ottenuti con quelli relativi ai test sperimentali.

Conclusioni: vengono infine tratte le considerazioni finali sul progetto di tesi.

Capitolo 1

Descrizione scarpone analizzato e test sperimentale

Lo scarpone analizzato in questa tesi è il modello “Formula 120”.
In tale capitolo si illustra nello specifico la sua composizione, le sue peculiarità ed il materiale con cui viene realizzato.

1.1 Descrizione dello scarpone “Formula 120”

In *Figura 1-1* si riporta la geometria dello scarpone in oggetto:



Figura 1-1: Modello scarpone da sci “Formula 120” [5]

Tale scarpone viene realizzato tramite due parti principali: lo scafo (parte inferiore nella quale alloggia il piede) ed il gambetto (parte superiore, la quale avvolge il polpaccio e ne permette il serraggio).

Le due componenti sono realizzate separatamente ed assemblate successivamente, fissate fra loro tramite due borchie (laterali) ed una vite (posteriore), le quali conferiscono la rigidità allo scarpone in fase di piegatura in avanti.

I due elementi non vengono realizzati in maniera speculare ma il gambetto presenta una sovra-chiusura che, una volta assemblati i due pezzi, permette di mantenerli in posizione corretta.

Unite le componenti plastiche vengono aggiunte le componenti metalliche (ganci), le quali permettono chiudere lo scarpone.

1.1.2 Scarpetta

All'interno dello scarpone, successivamente, viene inserita la scarpetta, realizzata come si può vedere in *Figura 1-2*:



Figura 1-2: Scarpetta [5]

Tale scarpetta è definita con il nome di “3D Pro Formula” e viene realizzata unendo fra loro, tramite cuciture, materiali con differenti proprietà meccaniche (di cui non è stato possibile reperire nessuna documentazione).

Principalmente i materiali utilizzati sono di tipo spugnoso, ma, tale elemento nella parte esterna anteriore e posteriore (nella zona relativa al polpaccio), comprende anche delle finiture in materiali plastici i quali le conferiscono una maggior rigidità.

1.1.3 Materiali utilizzati per lo scarpone

Per la realizzazione di tale scarpone viene utilizzato un materiale plastico denominato Elastollan. Per la precisione Elastollan è un poliuretano termoplastico (TPU) dell'azienda BASF.

Nello specifico, lo scarpone considerato viene realizzato con due differenti iniezioni di materiale denominate con le seguenti sigle:

- Materiale che realizza il Gambetto: BASF Elastollan B 64 D -11;
- Materiale che realizza lo Scafo: BASF Elastollan B 60 D -15.

Grazie alle tabelle tecniche [6] si sono potute definire le caratteristiche di tale materiale. I dati di maggiore interesse per le successive analisi estrapolabili dalle tabelle sopra citate sono:

1) Moduli elastici:

- Modulo elastico Gambetto (a +23°C): 320 MPa;
- Modulo elastico Scafo (a +23°C): 240 MPa.

Per quanto riguarda i moduli elastici a temperatura pari a -10°C, questi sono stati definiti dopo aver contattato direttamente l'azienda produttrice del materiale stesso e precisamente hanno i seguenti valori:

- Modulo elastico Gambetto (a -10°C): 587 MPa;
- Modulo elastico Scafo (a -10°C): 549 MPa.

2) Resistenza massima a trazione:

- Resistenza massima a trazione Gambetto: 55 MPa;
- Resistenza massima a trazione Scafo: 55 MPa.

1.2 Test sperimentale

La sperimentazione che è stata riprodotta in questo lavoro di tesi, si avvale di una specifica macchina sperimentale denominata “scarpometro” prodotta dalla società Step-Lab [3].

La prova consiste nel sottoporre lo scarpone ad un carico ciclico ad una temperatura fissata. In questo modo si può valutare la resistenza dello stesso nel lungo periodo ed il suo comportamento ciclico.

Il test è in grado di misurare l’angolo di rotazione del piede all’interno dello scarpone al variare della forza applicata.

1.2.1 Protesi

Per simulare la presenza della gamba viene utilizzata una protesi in resina riportata nella *Figura 1-3 (a)*.

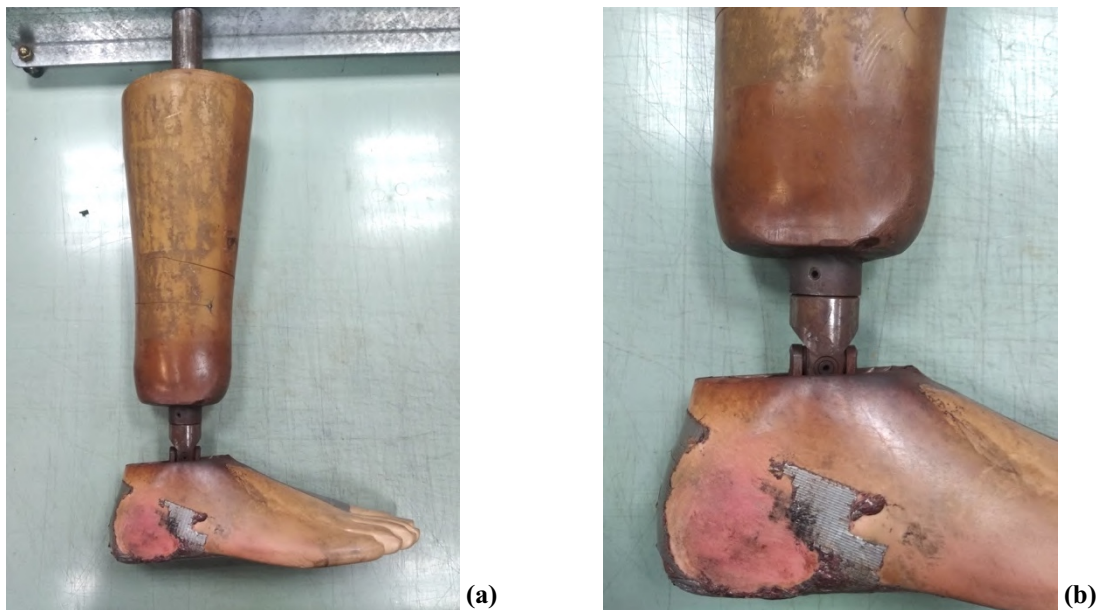


Figura 1-3: *Protesi utilizzata dalla ditta e particolare dello snodo dove avviene la rotazione*

In particolare nella *Figura 1-3 (b)* viene mostrato lo snodo che permette la rotazione della gamba attorno alla caviglia.

1.2.2 Setup di prova

La sperimentazione realizzata, in accordo con la prima simulazione eseguita, non tiene conto della scarpetta all’interno dello scarpone. Per ottenere questa configurazione durante la campagna sperimentale si è tagliata una scarpetta in modo da rimuoverne la parte superiore.

Si è mantenuta invece la parte bassa in modo che la protesi rimanesse comunque in posizione corretta, in quanto fissata nella parte inferiore del piede.

Si è quindi inserita la protesi in questa nuova “scarpetta” come si può vedere in *Figura 1-4*:



Figura 1-4: *Protesi inserita nell'apposita scarpetta tagliata*

E successivamente la protesi e la scarpetta nello scarpone (*Figura 1-5*):



Figura 1-5: *Protesi e scarpetta inseriti nello scarpone (foto solo dimostrativa per evidenziare come si posiziona la scarpetta tagliata all'interno dello scarpone, per la prova allo scarpometro verrà utilizzato uno scarpone non tagliato)*

Per quanto riguarda la prova con la scarpetta il procedimento è lo stesso, solo che si utilizza una scarpetta normale (non tagliata come in questo caso).

Il setup della prova consiste nel fissare inferiormente lo scarpone, come se fosse agganciato ad uno sci, e superiormente la protesi ad un meccanismo che permette di ruotarla in avanti ed indietro. La protesi viene fissata e vincolata con un angolo di partenza rispetto alla verticale di $+11^\circ$, viene ruotata in avanti di 15° ed indietro di 8° (rispetto all'inclinazione di partenza).

Tale configurazione iniziale della prova sperimentale è visibile in *Figura 1-6 (a)* per il test senza scarpetta e *Figura 1-6 (b)* per il test con scarpetta.

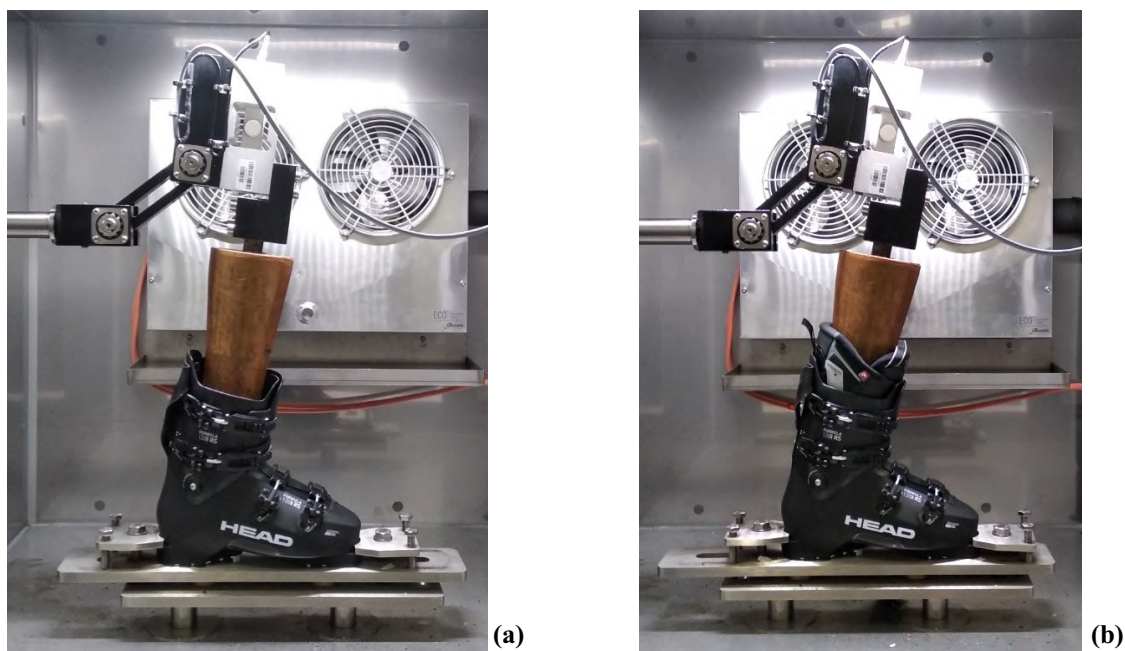


Figura 1-6: Setup di prova dello scarpometro (sia con che senza scarpetta)

La prova meccanica viene realizzata all'interno di una cella frigorifera, la quale può essere portata ad una prefissata temperatura, *Figura 1-7* (in generale la prova viene realizzata a -10°C), collegata ad un computer che memorizza i dati relativi al test eseguito, *Figura 1-8*.

In particolare sono state indagate le seguenti condizioni di carico:

- Due prove senza scarpetta: una a temperatura ambiente ($+23^\circ\text{C}$) ed una alla temperatura alla quale normalmente viene eseguita tale prova (-10°C);
- Due prove con la scarpetta: una a $+23^\circ\text{C}$ ed una a -10°C .



Figura 1-7: Cella che permette allo scarpometro di fissare una determinata temperatura per la prova

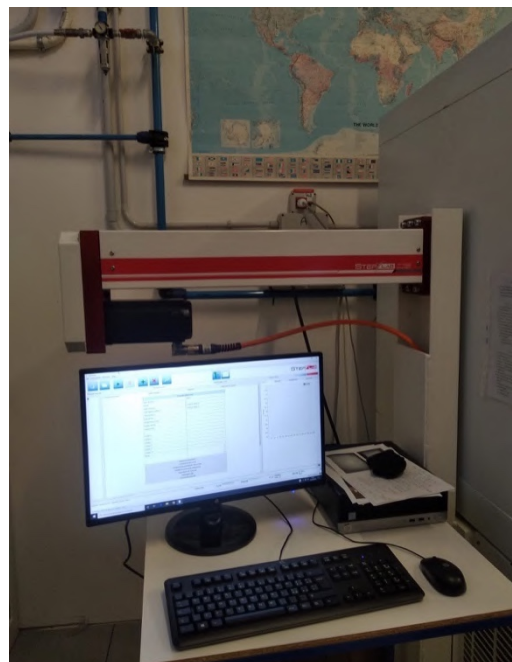


Figura 1-8: PC collegato allo scarpometro che permette di memorizzare e plottare i grafici

1.2.3 Risultati sperimentali

In *Figura 1-9* e *Figura 1-10* è possibile vedere i grafici sperimentali che andranno successivamente presi come riferimento per la simulazione agli elementi finiti.

Vengono accorpate nello stesso grafico le due prove a temperature differenti e vengono invece suddivise in due grafici la prova “senza scarpetta” e la prova “con scarpetta”.

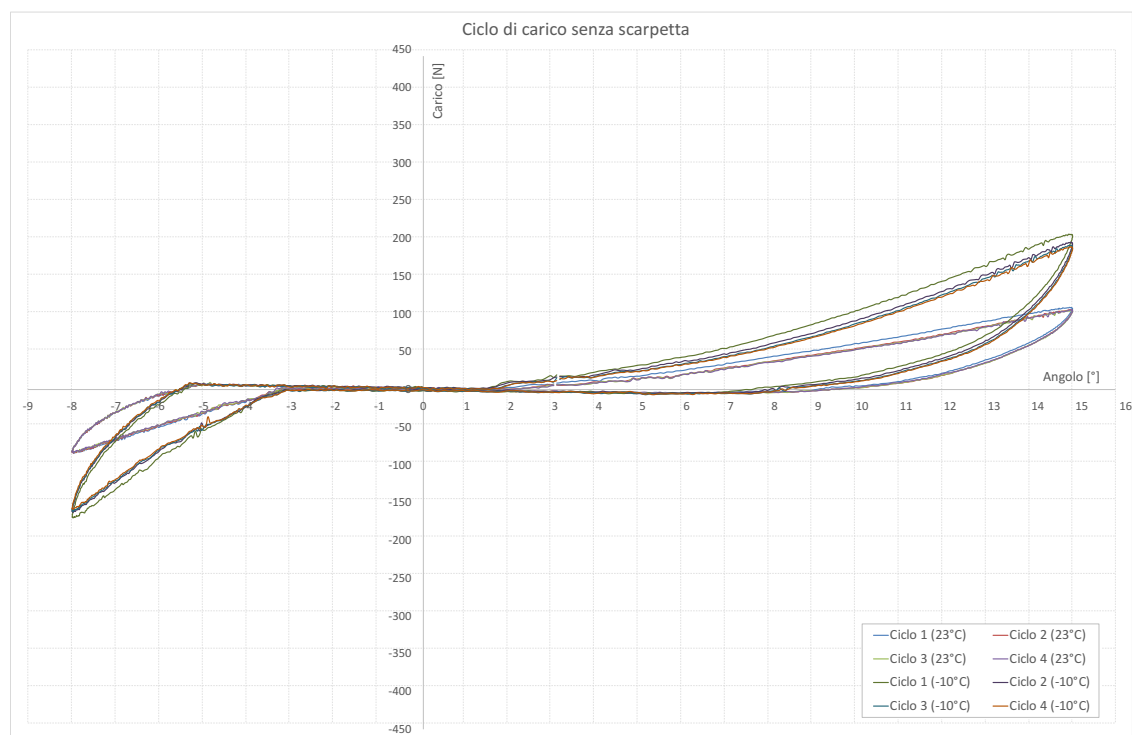


Figura 1-9: Dati sperimentali ottenuti dalla prova senza scarpetta a +23°C e a -10°C

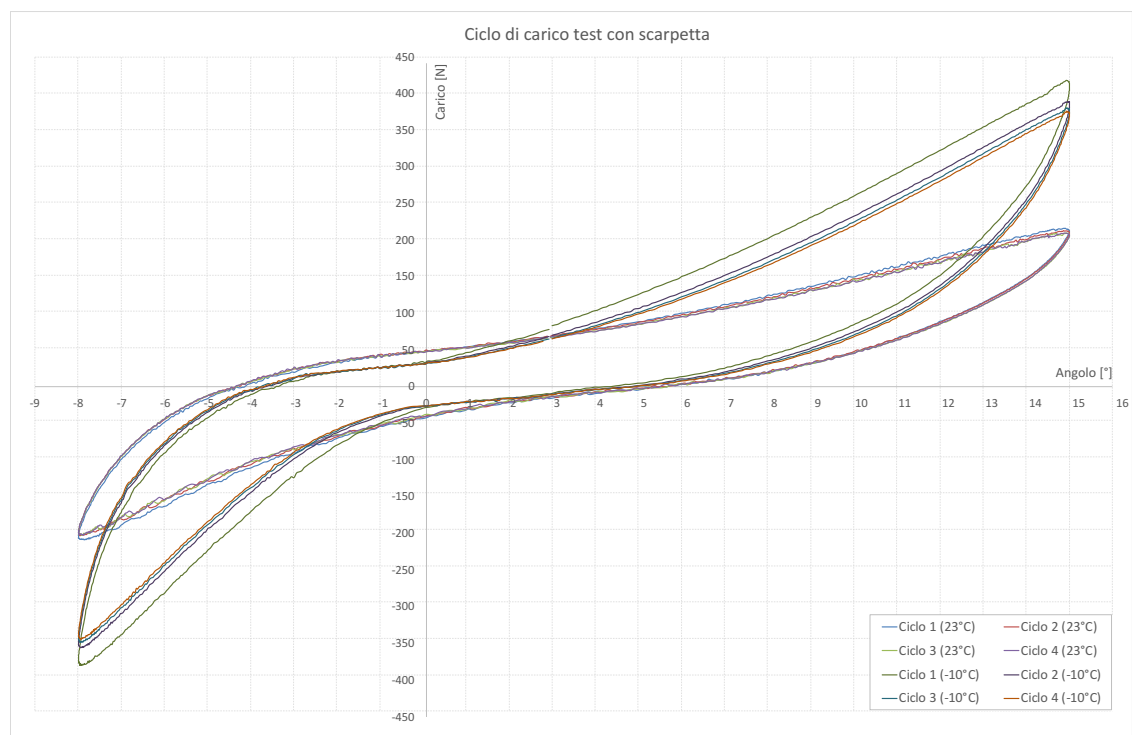


Figura 1-10: Dati sperimentali ottenuti dalla prova con scarpetta a +23°C e a -10°C

Confrontando i cicli ottenuti dalle prove sperimentali realizzate alle due differenti temperature (23°C e -10°C) si può notare un andamento simile per angoli piccoli (precisamente compresi fra +4° e -3°), ma successivamente i grafici si discostano l'uno dall'altro e tendono a valori massimi e minimi molto diversi fra loro. Questo è dovuto alla forte variabilità del materiale con l'abbassamento della temperatura. Le sue caratteristiche infatti, come si è visto al §1.1.3 cambiano di molto, il modulo elastico aumenta notevolmente (quasi raddoppia) e di conseguenza aumenta la rigidità del materiale.

Confrontando invece i due differenti test (“con” e “senza” scarpetta) si nota che, nel primo caso (senza scarpetta), il ciclo rimane sullo zero per più tempo sia nel carico che nello scarico. Questo andamento è dovuto al fatto che, non essendoci la scarpetta nella zona del gambetto, la protesi deve ruotare molto prima di entrare in contatto con lo scarpone. Perciò, durante questa rotazione, non incontra nessuna resistenza e di conseguenza le reazioni vincolari sono nulle.

Questo non avviene invece nel secondo caso (con scarpetta). Una volta chiuso lo scarpone attorno alla protesi infatti, il contatto avviene immediatamente grazie allo spessore della scarpetta, questo genera quindi un ciclo più “aperto”.

Oltre alla differenza di andamento fra i due test sopra citati, si devono fare altre considerazioni in merito all'evidente differenza nei valori massimi e minimi.

La variazione di risultati che si riscontra tra i test “con” e “senza” scarpetta è ovviamente dovuta al fatto che la presenza di tale elemento manda in contatto la protesi con lo scarpone per angoli inferiori rispetto al test in cui questa è stata rimossa.

Mantenendo lo stesso angolo di rotazione (15° in avanti e 8° indietro), infatti, l'inclinazione finale dello scarpone, quando la protesi lo schiaccia in avanti/indietro, è maggiore, in quanto influenzato dallo spessore aggiuntivo dovuto alla presenza della scarpetta. Si hanno quindi reazioni vincolari molto più elevate.

Capitolo 2

Aspetti teorici dei modelli non lineari

Le simulazioni effettuate sono state realizzate mediante solutori di tipo Statico non lineare.

In particolare due problematiche sono state trattate in questo studio:

- Non linearità per contatto numerico;
- Non linearità per geometria.

2.1 Non linearità per contatto numerico

Il contatto numerico è quella procedura che si riscontra quando due o più corpi, inizialmente separati, entrano in contatto fra loro durante il processo evolutivo dell'analisi [4]. Poiché i corpi, essendo dei solidi, non permettono la compenetrazione, quando si spinge l'uno verso l'altro, si genera un'interazione tra gli stessi i quali inizieranno a trasmettersi delle forze di azione e reazione. La trasmissione di tali forze avverrà nella zona cosiddetta di contatto, definita per ogni coppia di corpi da due specifiche superfici definite come superfici di contatto, una appartenente al corpo m_1 e l'altra appartenente al corpo m_2 come si può vedere in *Figura 2-1*.

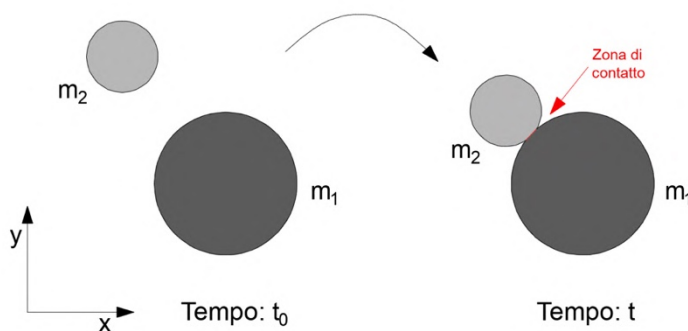


Figura 2-1: Identificazione della "zona di contatto" fra due corpi inizialmente separati

Quando i due corpi, come in questo caso, si toccano e nasce cioè una zona di contatto/zona di interfaccia, si verifica la cosiddetta condizione di contatto chiuso/gap chiuso.

Per risolvere il problema possono essere utilizzate le seguenti formulazioni:

- Formulazione forte (forma differenziale)

$$\begin{cases} \nabla \sigma + F = 0 & \text{in } \Omega \\ f = \sigma n & \text{in } \Gamma_f \\ u = \bar{u} & \text{in } \Gamma_{\bar{u}} \end{cases} \quad (2.1)$$

- Formulazione debole (forma integrale)

Tale formulazione serve per passare da un sistema di equazioni differenziali (formulazione forte) ad un sistema di equazioni integrali (formulazione debole).

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon : \sigma \, \partial \Omega = \int_{\Omega} \delta u \cdot F \, \partial \Omega + \int_{\Gamma} \delta u \cdot f \, \partial \Gamma \quad (2.2)$$

Dove:

$$V_i = \text{lavoro interno} = \int_{\Omega} \delta \varepsilon : \sigma \, \partial \Omega \quad (2.3)$$

$$V_e = \text{lavoro esterno} = \int_{\Omega} \delta u \cdot F \, \partial \Omega + \int_{\Gamma} \delta u \cdot f \, \partial \Gamma \quad (2.4)$$

Queste formulazioni però non riescono a tenere in considerazione che i solidi vengono in contatto fra loro (ad un certo tempo t dell'analisi) e quindi a definirne l'interazione e le forze di azione e reazione che si generano, in particolare i due elementi risultano compenetrare.

Ciò avviene poiché i solidi sono definiti in modo separato, in particolare quando vengono discretizzati non presentano nodi in comune.

Dal punto di vista della matrice di rigidità, ciò significa che le equazioni afferenti al primo corpo non risultano combinate alle equazioni afferenti al secondo.

Procedendo in tale direzione si risolverebbe cioè il problema come se fosse composto da due sistemi disaccoppiati.

Il contatto numerico serve perciò a gestire la problematica appena descritta. Si definisce quindi una equazione in grado di rappresentare le forze esterne che nascono nella superficie di contatto.

Come prima ipotesi si va a considerare un corpo unico, successivamente diviso in due parti, le quali entrano in contatto fra loro come si può vedere in *Figura 2-2*:

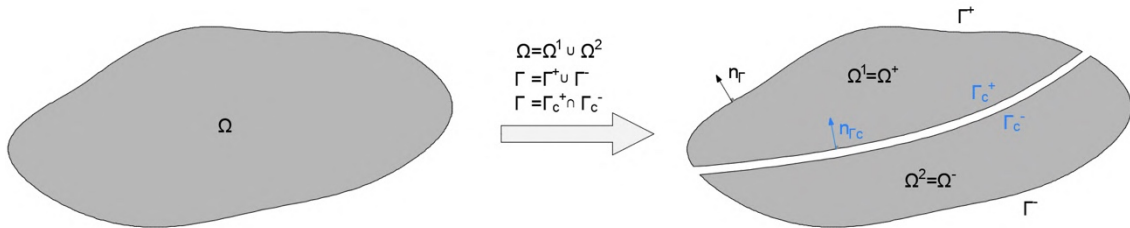


Figura 2-2: Semplificazione del contatto considerando un corpo unico successivamente diviso

L'equazione che governa questo nuovo sistema è la seguente, simile a quella presentata precedentemente ma che aggiunge una componente dovuta al contatto fra i due corpi:

$$\int_{\Omega} B^T \sigma \partial \Omega = \int_{\Omega} N^T F \partial \Omega + \int_{\Gamma} N^T f \partial \Gamma + \int_{\Gamma_c} N^T (\sigma n_c) \partial \Gamma_c \quad (2.5)$$

Dove:

$$F_i = \text{forze interne} = \int_{\Omega} B^T \sigma \partial \Omega \quad (2.6)$$

$$F_e = \text{forze esterne} = \int_{\Omega} N^T F \partial \Omega + \int_{\Gamma} N^T f \partial \Gamma + \int_{\Gamma_c} N^T (\sigma n_c) \partial \Gamma_c \quad (2.7)$$

$$F_c = \text{forze di contatto} = \int_{\Gamma_c} N^T (\sigma n_c) \partial \Gamma_c \neq 0 \quad \text{se} \quad \Gamma_c > 0 \quad (\text{contatto chiuso}) \quad (2.8)$$

La formulazione appena riportata continua a descrivere l'uguaglianza tra il lavoro interno e il lavoro esterno (lavoro virtuale) con l'aggiunta però di forze di contatto diverse da zero. Avendo inserito la parte relativa alle forze di contatto all'interno dell'equazione dei lavori virtuali, infatti, quando il contatto viene chiuso (quindi i due corpi interagiscono fra loro) si innescano delle forze di azione e reazione che garantiscono la non compenetrazione fra gli stessi.

La trasmissione dell'azione avviene, come spiegato precedentemente ed illustrato nella *Figura 2-1*, nella zona di contatto o zona di interfaccia, definita per ogni coppia di corpi da due superfici, appartenenti rispettivamente al primo e al secondo corpo.

Per la velocizzazione dei tempi delle procedure di analisi, vengono quindi identificate a livello locale le superfici di contatto tra i corpi.

Tali superfici vengono chiamate superficie "master" e superficie "slave".

2.1.2 Contatto nel caso di sistemi ad un Grado Di Libertà (SDOF)

Si considera un corpo di massa m collegato ad una molla di rigidezza k posto ad un'altezza iniziale h da una superficie come si può vedere in *Figura 2-3* [4].

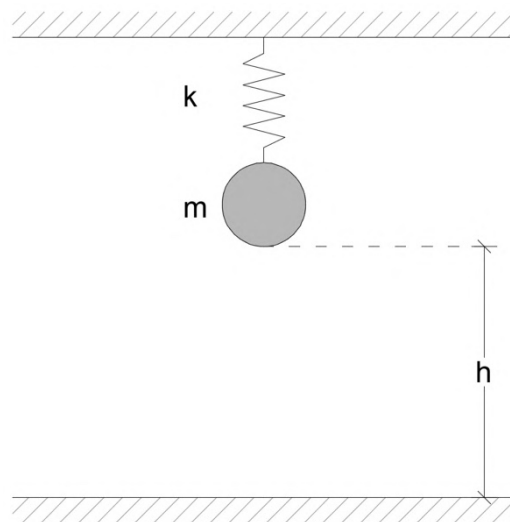


Figura 2-3: Configurazione iniziale nel caso di sistema ad un Grado Di Libertà (SDOF)

Considerando al tempo iniziale t_0 la massa soggetta ad accelerazione gravitazionale e la molla scarica, quando essa sarà libera di muoversi ($t > t_0$), il sistema passerà dalla configurazione iniziale a quella finale, in cui la massa si troverà ad una quota minore rispetto a quella iniziale (si abbasserà di una quantità u), fino al raggiungimento del minimo dell'energia potenziale (Π).

Come si può vedere a pagina successiva in *Figura 2-4*.

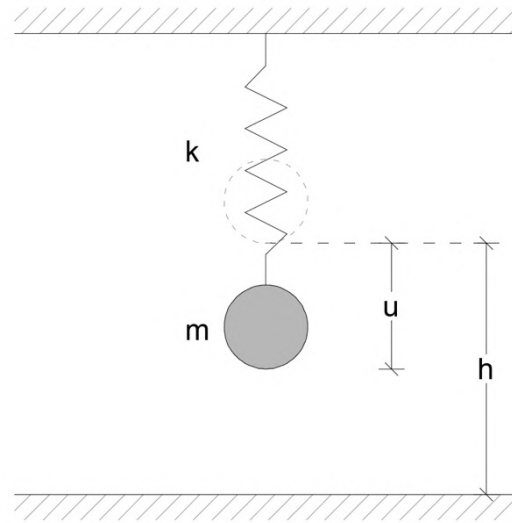


Figura 2-4: Configurazione finale nel caso di sistema ad un Grado Di Libertà (SDOF)

Definendo l'energia potenziale come segue:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}ku^2 - (mG)u \quad (2.9)$$

Il suo minimo è definito come:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} = ku - mG = 0 \quad (2.10)$$

Dalla quale si può determinare l'abbassamento u della massa m :

$$u = \frac{mG}{k} \quad (2.11)$$

Supponendo la presenza di un supporto infinitamente rigido ad un'altezza h rispetto alla posizione della massa al tempo t_0 (dove viene vincolata la molla), si impone un ulteriore vincolo al sistema, il quale si esplica andando a definire una condizione aggiuntiva denominata come **funzione di gap**:

$$g(u) = h - u \geq 0 \quad (2.12)$$

Si possono perciò presentare due casi:

- $g(u) = 0 \rightarrow$ La massa tocca il supporto e il contatto è detto chiuso;
- $g(u) > 0 \rightarrow$ La massa non ha ancora toccato il supporto e il contatto è detto aperto.

Nel caso in cui la condizione di minimo definita precedentemente (equazione 2.10) restituisse uno spostamento $u > h$, tale spostamento non sarebbe ammesso dalla condizione di vincolo relativa al supporto rigido (equazione 2.12) la quale imporrebbe $u = h$ ciò comporterebbe che la condizione di minimo (Π_{min}) non possa essere raggiunta e per questo motivo si individuerrebbe una nuova condizione di minimo detta di “minimo consentito” (Π_{min}^c), la quale sarà pari al valore dell’energia potenziale sostituendo al valore di u il valore di massimo abbassamento consentito h (contatto chiuso).

Graficamente tale situazione è visibile in *Figura 2-5*.

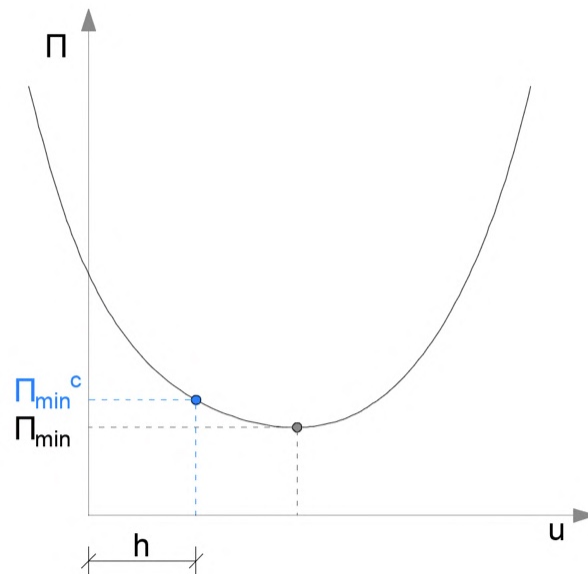


Figura 2-5: Rappresentazione dell’energia potenziale, della condizione di minimo e di minimo consentito

Quando si riscontra la condizione di gap chiuso o di contatto chiuso, la massa trasferisce al supporto rigido una forza e ne riceverà da quest’ultimo una uguale e contraria.

Definendo con R_N la reazione vincolare espressa dall'interazione tra la massa m ed il supporto, nel caso in cui il contatto si verifichi solo per compressione dei corpi (quindi nel caso più semplice la reazione può essere solo ≤ 0), si possono verificare le seguenti due condizioni:

$$\begin{cases} R_N = 0; & g(u) > 0; & u < h \\ R_N < 0; & g(u) = 0; & u = h \end{cases} \quad (2.13)$$

Il contatto si può allora definire tramite tre condizioni fondamentali:

- Condizioni di Hertz-Signorini-Moreau:

- Condizione di impenetrabilità: $g(u) \geq 0$ (2.14)

- Condizione di azione e reazione: $R_N \leq 0$ (2.15)

- Condizione di complementarità di Kuhn-Tucker: $R_N g(u) = 0$ (2.16)

2.1.3 Risoluzione numerica

2.1.3.1 Metodo Penalty

Nella meccanica del contatto è possibile creare una soluzione approssimata, accettando una leggera compenetrazione tra i corpi, ed il livello di accuratezza si può modificare andando a modificare la condizione di impenetrabilità.

Il primo caso che si andrà a studiare è la possibilità di utilizzare il metodo penalty, il quale, rispetto al caso descritto al §2.1.2, quando il contatto risulta essere chiuso si procede all'inserimento di un nuovo termine, all'interno dell'equazione dell'energia potenziale, il quale corrisponde ad una molla aggiuntiva:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}ku^2 - (mG)u + \frac{1}{2}e[g(u)]^2 \quad (2.17)$$

Dove “ e ” viene chiamato coefficiente penalty e corrisponde alla rigidezza della nuova molla considerata (quando il contatto risulta essere chiuso) ed è definita maggiore di zero. Nella *Figura 2-6* è possibile vedere questa nuova configurazione.

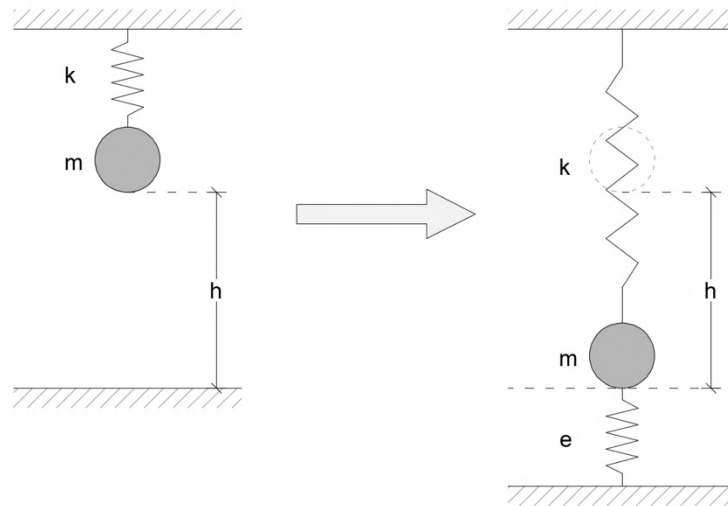


Figura 2-6: Rappresentazione grafica della semplificazione eseguita con il metodo Penalty

Il minimo dell'energia potenziale è quindi definito come segue:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} = ku - mG - eg(u) = 0 \quad (2.18)$$

Da tale formulazione si può ricavare lo spostamento u della molla:

$$u = \frac{mG + eh}{k + e} \quad (2.19)$$

La funzione di gap assume quindi la seguente funzione:

$$g(u) = h - u = h - \frac{mG + eh}{k + e} = \frac{kh - mG}{k + e} \quad (2.20)$$

Dove si ottiene la condizione di contatto chiuso, quindi $g(u) = 0$, se si pone $e = \infty$, cioè considerando il supporto infinitamente rigido .

Nel caso in cui la funzione di gap risulti essere negativa quindi $kh < mG$, corrispondente alla condizione in cui la massa compenetri nel supporto, la compenetrazione dei due corpi sarà dipendente dal coefficiente penalty.

In particolare, all'aumentare di e (rigidezza della molla) la compenetrazione si riduce. L'accoppiamento che si crea fra i due corpi è rappresentabile in maniera semplificata come segue.

Si considera un esempio semplificato come due elementi Truss, inizialmente separati, come si può vedere in *Figura 2-7 (a)*, le matrici di rigidezza dei due elementi risultano essere fra loro indipendenti.

Una volta che i due corpi vengono in contatto tra loro, però, compaiono dei termini di accoppiamento fra gli stessi come si può vedere in *Figura 2-7 (b)*,

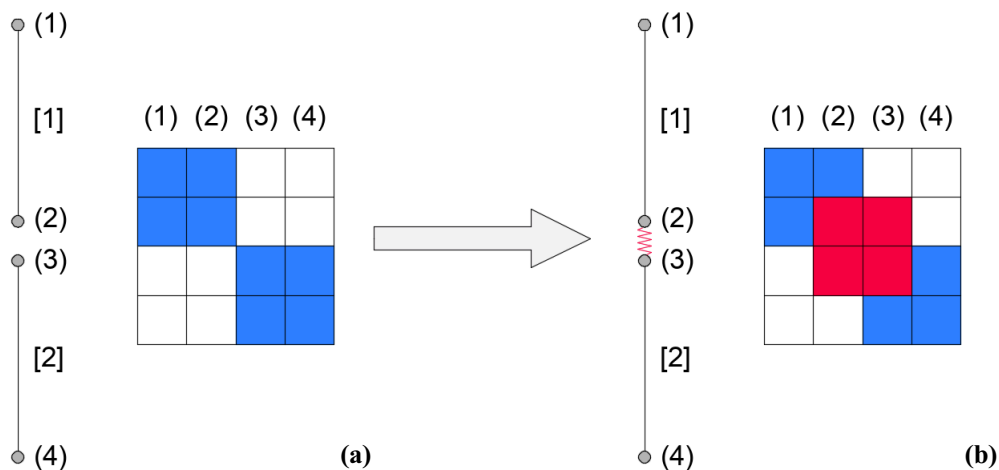


Figura 2-7: Contatto di tipo Penalty fra due elementi Truss

Si è perciò intuito, da quanto spiegato precedentemente, che questo tipo di contatto prevede una tolleranza di compenetrazione fra i corpi.

Per diminuire tale compenetrazione, quindi, il coefficiente penalty può essere assunto variabile in funzione dello spostamento. Nello specifico le tipologie di coefficiente penalty più utilizzate all'interno della meccanica del contatto sono le seguenti:

- Costante;
- Lineare;
- Esponenziale.

Graficamente è possibile identificare le varie configurazioni in *Figura 2-8*.

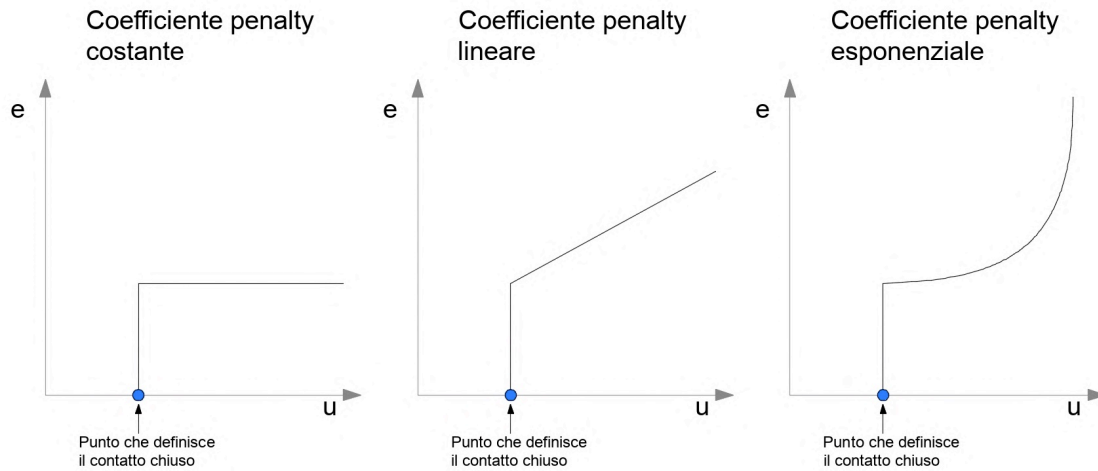


Figura 2-8: Rappresentazione grafica delle possibili assunzioni del coefficiente Penalty

2.1.3.2 Metodo con i moltiplicatori di Lagrange

Questo metodo, a differenza del metodo penalty, di cui al §2.1.3.1, quando il contatto si chiude, non tiene conto di una molla fittizia, ma tiene conto della vera condizione di vincolo dovuta al corpo infinitamente rigido.

In particolare la funzione di gap sarà definita come segue:

$$g(u) = h - u \geq 0 \quad (2.21)$$

Mentre la funzione dell'energia potenziale è definita come:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}ku^2 - (mG)u + \lambda g(u) \quad (2.22)$$

Si identifica quindi con “ λ ” il moltiplicatore di Lagrange (cioè la reazione vincolare che si genera a contatto chiuso).

Il minimo dell'energia potenziale a questo punto si ottiene:

$$\partial\Pi = 0 \Rightarrow \begin{cases} ku\partial u - (mG)\partial u + \lambda\partial u = 0 \\ \partial\lambda g(u) = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Graficamente è invece possibile identificare tale schema nella *Figura 2-9*:

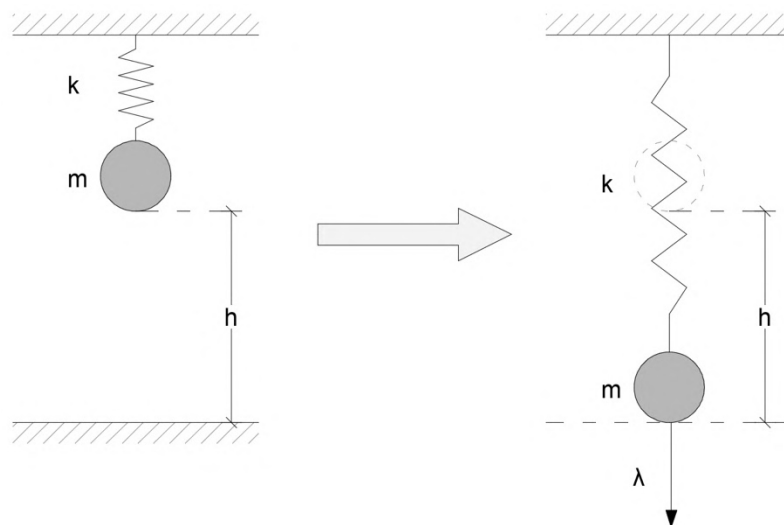


Figura 2-9: Rappresentazione grafica del contatto eseguito con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Dalla seconda *equazione* della 2.23 si capisce come, con i moltiplicatori di Lagrange, le forze di contatto risultano essere delle variabili da calcolare e che, la matrice di rigidità del sistema, dovrà tener conto di tali incognite aggiuntive.

In particolare, bisognerà andare a risolvere un sistema il cui numero di gradi di libertà sarà variabile a seconda se il contatto risulta essere chiuso o aperto.

Andando a vedere anche questa volta una semplificazione tramite degli elementi Truss, è possibile identificare tale metodo grazie alla *Figura 2-10*.

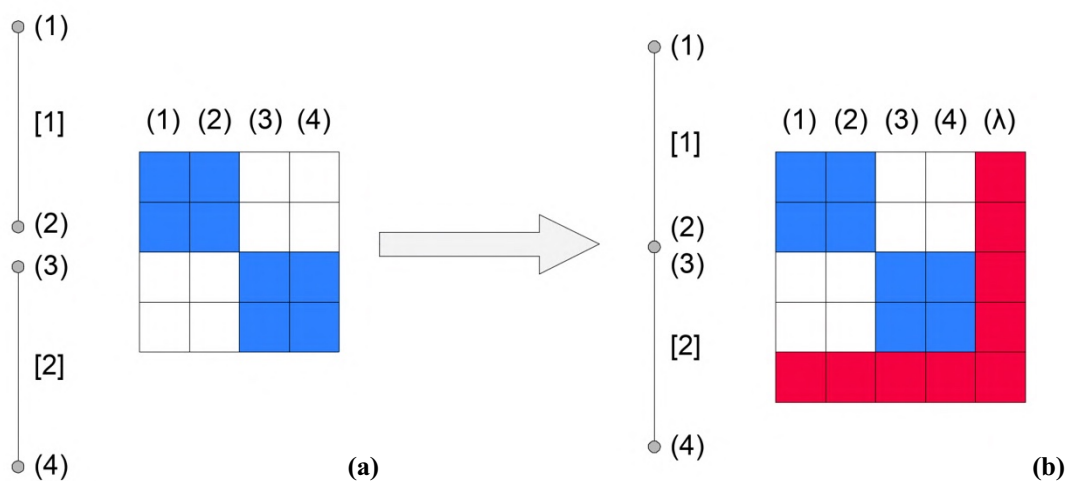


Figura 2-10: Contatto con i moltiplicatori di Lagrange fra due elementi Truss

2.1.4 Tipologie di contatto numerico

Esistono varie tipologie di contatto numerico, di seguito se ne riportano solo alcune:

- Normale: risente solo di uno sforzo normale di compressione;
- Ad attrito: si assegna un coefficiente d'attrito μ che, in presenza di uno sforzo normale N , genera forze di attrito fino ad un valore massimo pari a μN , superato il quale, si verifica uno scorrimento. Se N risulta maggiore di zero, il contatto è aperto;
- Attrito infinito: come la tipologia di contatto al punto recedente ma non è previsto scorrimento;
- Coesivo: presenta resistenza anche a trazione con la possibilità di danneggiarsi (*es. colle...*);
- Vincolato: serve a rendere due mesh congruenti.

2.1.5 Contatto normale tridimensionale

Nel caso di contatto numerico in un approccio tridimensionale si complica di poco la parte matematica del problema, ma concettualmente rimane valido ciò che è stato detto per il caso monodimensionale.

Per fare un esempio si considerano due corpi che entrano in contatto fra loro in uno spazio tridimensionale come si può vedere in *Figura 2-11*.

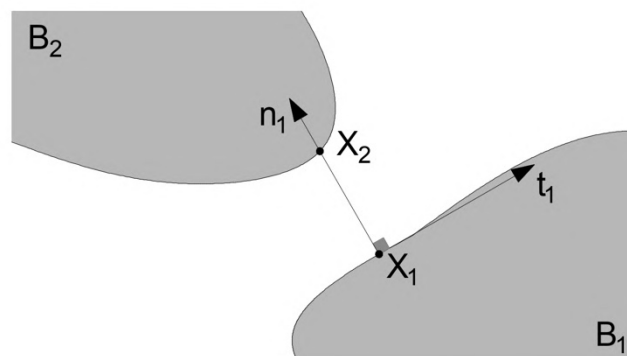


Figura 2-11: Contatto fra due corpi tridimensionali

Grazie a quanto visto precedentemente ora si sa che, nella zona di interfaccia, nasce una condizione di non penetrazione la quale si può esprimere come si può vedere a pagina successiva tramite l'equazione 2.24.

$$(x_1 - x_2) \cdot n_1 \geq 0 \quad (2.24)$$

In questa equazione è stato definito come x_i il vettore posizione al tempo corrente (t). Considerando la configurazione iniziale X_i al tempo t_0 , il vettore posizione al tempo corrente, è determinabile tramite la seguente somma vettoriale:

$$x_i = X_i + u_i \quad (2.25)$$

Dove è stato definito con u_i il vettore spostamento del punto i -esimo.

Nell'equazione 2.24 è stato poi identificata con n_1 la normale al punto x_1 passante per il punto x_2 che coincide quindi con la condizione di minima distanza.

È stata dunque identificata la cosiddetta coppia di contatto definita appunto dalla coppia di punti (x_1, x_2) e grazie alla loro distanza si definisce la funzione di gap.

Grazie a tale coppia di contatto sarà allora possibile identificare anche le condizioni di contorno fra i corpi.

Per semplicità, e per diminuire l'onere computazionale, quindi, le superfici di contatto, saranno specifiche e definite in fase di input.

Tali superfici, come anticipatamente detto, sono denominate superficie "master" e superficie "slave" appartenenti rispettivamente al corpo B_1 ed il corpo B_2 ed i punti che le caratterizzano sono i *punti master* ed i *punti slave*.

Tale approccio viene chiamato "node to surface" o "surface to surface" proprio perché, come spiegato, viene preso un nodo della discretizzazione della superficie slave ed il punto perpendicolare della superficie master passante per tale nodo slave, come si può vedere in *Figura 2-12*.

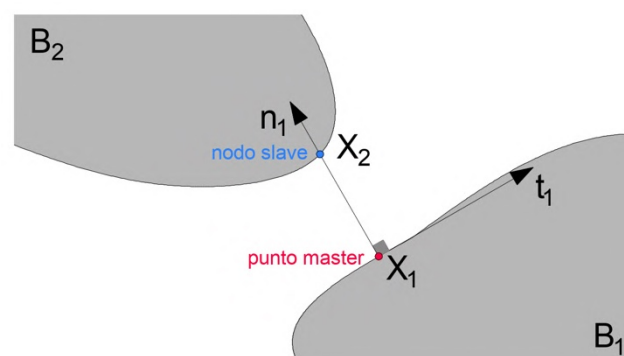


Figura 2-12: Identificazione del nodo slave e del punto master (coppia di contatto)

Nel passato si utilizzava un ulteriore metodo denominato “*node to node*”, il quale per definire la coppia di punti utilizzava due nodi della mesh, di conseguenza implicava che le mesh dei due corpi fossero speculari, cosa molto difficile da realizzare su corpi irregolari.

Ogni coppia di punti, individuata per stabilire la condizione di contatto, quindi, sarà sempre definita da un nodo appartenente alla superficie slave (*nodo slave*) e un punto appartenente alla superficie master (*punto master*).

In generale, le superfici master e slave, possono essere intercambiabili, è buona norma però assumere come superficie slave quella più discretizzata, in quanto si avranno un numero di coppie di punti di contatto maggiori e quindi una miglior precisione della soluzione ricercata.

Più nello specifico andiamo a vedere come poter calcolare e risolvere le equazioni nel caso tridimensionale.

Considerando un sistema di riferimento locale (ξ_1, ξ_2) nel corpo B_1 associato alla superficie di contatto Γ_1 il punto x_1 potrà sempre essere rappresentato tramite le coordinate di tale sistema di riferimento:

$$x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2) \tag{2.26}$$

Essendo $x_1 \in \Gamma_1$.

È perciò possibile definire il problema della minima distanza fra la superficie Γ_1 ed il punto x_2 tramite la seguente equazione:

$$d(\xi_1, \xi_2) = |x_2 - x_1| = \min(x_2 - x_1(\xi_1, \xi_2)) \tag{2.27}$$

Questa equazione è simile a quanto già visto per il caso ad un grado di libertà, è dunque necessario risolvere tale problema di minimo andando a definire la derivata prima della distanza ed imponendola uguale a zero:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} d(\xi_1, \xi_2) = \frac{x_2 - x_1(\xi_1, \xi_2)}{|x_2 - x_1|} \frac{\partial x_1(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_i} = 0 \tag{2.28}$$

La soluzione del sistema definisce il vettore cercato, cioè quel vettore normale alla superficie Γ_1 e passante per il punto x_2 .

Una volta quindi definita la coppia di contatto (x_1, x_2) viene identificata la zona di interfaccia nella quale i due corpi entreranno in contatto e perciò dove si dovranno generare le forze di azione e reazione.

Precisamente, la distanza fra il nodo slave ed il punto master coincide con il valore della funzione di gap precedentemente definita.

Bisogna infine specificare che non sempre aver definito il punto di minima distanza significa aver determinato la coppia di contatto, infatti:

- Non è sempre detto che il punto di minimo ricada all'interno dell'elemento master considerato. Nel caso in cui la soluzione non rispettasse i limiti dell'elemento unitario, quindi che le coordinate siano comprese fra -1 e 1 , infatti, il punto di minimo identificato non apparterebbe all'elemento e non potrebbe quindi essere assunto;
- Per ogni nodo slave definito, la ricerca del punto di minima distanza dovrà essere eseguita su ogni elemento di contatto appartenente alla rispettiva superficie master.

Potrebbe quindi presentarsi il caso in cui due o più elementi vicini soddisfino la condizione presentata al punto precedente e quindi, definiscano al loro interno un punto di minimo rispetto al nodo slave considerato.

In questo caso si dovrà allora prendere come punto master (della coppia di contatto) il punto che darà la distanza minima in assoluto tra i minimi relativi trovati.

2.1.6 Esempio analisi agli elementi finiti del contatto di due barre

Si realizza ora un esempio il quale permette di comprendere meglio quanto illustrato nei paragrafi precedenti e che mostra che, anche per un sistema costituito da due semplici elementi con comportamento geometricamente elastico lineare, si ha una curva di risposta non lineare in caso di contatto. Ciò è dovuto al cambiamento di rigidità all'interno del sistema nel processo di contatto.

L'energia potenziale di una barra caricata puntualmente, trascurando le forze distribuite lungo la stessa, è la seguente:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{(l)} EA[u'(x)]^2 dx - \sum_i F_i u(x_i) \quad (2.29)$$

Dove EA indica la rigidezza assiale, $u(x)$ è lo spostamento della barra, F_i descrive un carico puntuale applicato nel punto x_i [4].

Nella *Figura 2-13* è possibile vedere un sistema composto da due barre sperate fra loro da uno spazio denominato g .

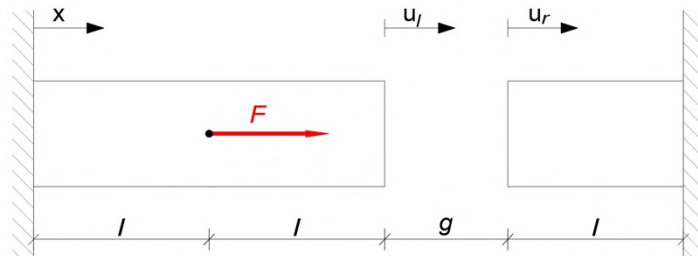


Figura 2-13: Sistema composto da due barre, di cui una è soggetta ad una forza “ F ” nel suo punto medio, inizialmente separate da una distanza “ g ”

Quando la forza F , che agisce ad una distanza $x = l$, è sufficientemente grande, tale spazio si chiude ed i due corpi vanno in contatto fra loro.

Assumendo che non ci sia alcuna compenetrazione fra le due barre si produce la seguente condizione di vincolo:

$$u_l - u_r \leq g \tag{2.30}$$

Finché $u_l - u_r < g$ non avviene nessun contatto, mentre i due corpi si toccano quando $u_l - u_r = g$.

Il sistema proposto per tale esempio è composto da tre elementi finiti, due per la barra di sinistra ed uno per quella di destra. In particolare, come si può vedere nella *Figura 2-14*, vengono scelte funzioni di forma lineari che soddisfino le condizioni al contorno alle estremità di destra e di sinistra.

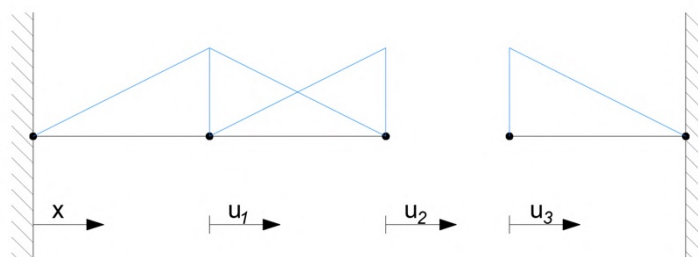


Figura 2-14: Andamento delle funzioni di forma

La forma esplicita di tali funzioni di forma è la seguente:

$$\begin{aligned}
 0 \leq x \leq l & : u(x) = \frac{x}{l} u_1 & u'(x) &= \frac{u_1}{l} \\
 l < x \leq 2l & : u(x) = \left(2 - \frac{x}{l}\right) u_1 + \left(\frac{x}{l} - 1\right) u_2 & u'(x) &= -\frac{u_1}{l} + \frac{u_2}{l} \\
 2l < x \leq 3l & : u(x) = \left(3 - \frac{x}{l}\right) u_3 & u'(x) &= -\frac{u_3}{l}
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

Inserendo queste interpolazioni nell'equazione 2.29 si può definire la formulazione discretizzata dell'energia potenziale. Realizzando l'integrale si ottiene quindi:

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} [u_1^2 + (u_2 - u_1)^2 + u_3^2] - F u_1
 \tag{2.32}$$

Mentre la variazione dell'energia potenziale è data da:

$$\partial \Pi = \frac{EA}{l} [u_1 \partial u_1 + (u_2 - u_1)(\partial u_2 - \partial u_1) + u_3 \partial u_3] - F \partial u_1 = 0
 \tag{2.33}$$

La condizione di vincolo definita dall'equazione 2.30 si definisce ora come $u_2 - u_3 \leq g$ e stabilisce due differenti casistiche:

- 1) Caso in cui $u_2 - u_3 < g$, $u_3 = 0$, nessun contatto.

In questo caso si dice che la condizione di vincolo non è attiva e che quindi c'è ancora dello spazio residuo fra le due barre.

In questo caso la soluzione segue direttamente dall'equazione 2.33 la quale si può riscrivere in forma matriciale come segue:

$$(\partial u_1, \partial u_2, \partial u_3) \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} (2u_1 - u_2) - F \\ \frac{EA}{l} (u_2 - u_1) \\ \frac{EA}{l} u_3 \end{pmatrix} = 0
 \tag{2.34}$$

La quale, per spostamenti virtuali arbitrari ∂u_i , porta al sistema di equazioni:

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Che ha per soluzione:

$$u_1 = u_2 = \frac{Fl}{EA} \quad ; \quad u_3 = 0 \quad (2.36)$$

- 2) Caso in cui il carico viene aumentato fino a $F > EA g/l$, $u_2 - u_3 = g$, condizione di contatto chiuso.

In questo secondo caso lo spazio fra le due barre viene chiuso e quindi si attiva la condizione di vincolo. La soluzione in questo caso può essere calcolata, come illustrato nei paragrafi precedenti, sia con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange sia con il metodo Penalty.

Nei due casi l'energia potenziale assumerà le seguenti forme:

$$\Pi_{M.di\ Lagrange} = \Pi + \lambda g(u) = \Pi + \lambda(g + u_3 - u_2) \quad (2.37)$$

$$\Pi_{Penalty} = \Pi + \frac{1}{2} e [g(u)]^2 = \Pi + \frac{1}{2} e (g + u_3 - u_2)^2 \quad (2.38)$$

Per questo esempio si sceglie di risolvere il sistema con i moltiplicatori di Lagrange. La variazione di energia potenziale può quindi essere scritta come:

$$\partial \Pi_{M.L.} = \partial \Pi + \lambda (\partial u_3 - \partial u_2) + \partial \lambda (g + u_3 - u_2) = 0 \quad (2.39)$$

Dove il secondo termine è associato alla forza di reazione nello spazio vuoto (contatto aperto) mentre il terzo denota la chiusura del contatto e quindi della condizione di vincolo.

La forma matriciale di tale equazione è la seguente:

$$(\partial u_1, \partial u_2, \partial u_3, \partial \lambda) \begin{pmatrix} \frac{EA}{l}(2u_1 - u_2) - F \\ \frac{EA}{l}(u_2 - u_1) - \lambda \\ \frac{EA}{l}u_3 + \lambda \\ g + u_3 - u_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.40)$$

La quale, per spostamenti virtuali arbitrari ∂u_i e moltiplicatori virtuali di Lagrange $\partial \lambda$, porta al sistema di equazioni:

$$\begin{bmatrix} 2\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

La soluzione del sistema per u_2 e λ è la seguente:

$$u_2 = \frac{1}{3} = \left(2g + \frac{Fl}{EA}\right), \quad \lambda = \frac{1}{3} \left(EA \frac{g}{l} - F\right) \quad (2.42)$$

Grazie a questa equazione è possibile ora definire la dipendenza fra il carico F e lo spostamento u_2 :

$$F = EA \left(3 \frac{u_2}{l} - 2 \frac{g}{l}\right) \quad (2.43)$$

In *Figura 2-15*, viene illustrata la curva di carico-deformazione non lineare per la completa evoluzione dell'analisi.

Come preannunciato si può notare che la rigidità del sistema aumenta al momento del contatto. Si può osservare infatti che il carico deve essere tre volte maggiore, per ottenere lo stesso incremento di spostamento quando le due barre sono attaccate rispetto a quando non lo sono.

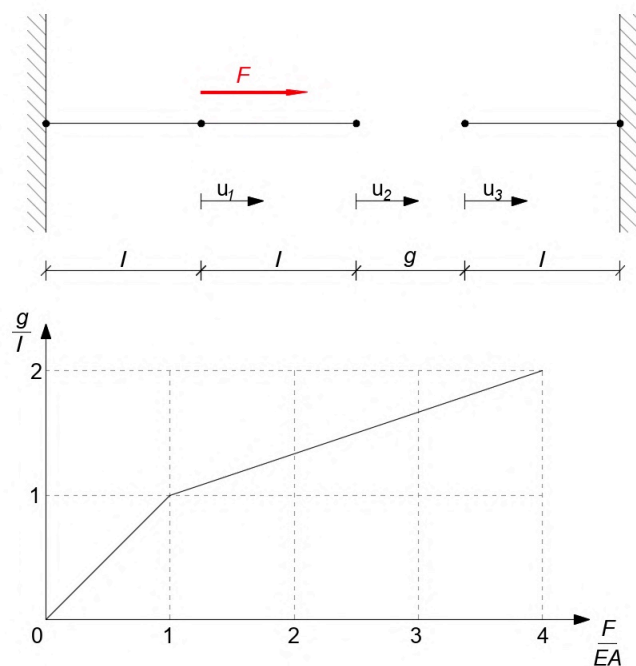


Figura 2-15: Discretizzazione delle barre con elementi finiti e andamento della curva di carico-deformazione

In generale si può osservare quindi che, in questo tipo di problemi, sono possibili due sistemi differenti: uno correlato al gap aperto (si veda *caso 1*) ed uno correlato al gap chiuso (*caso 2*). Entrambi i casi sono stati svolti in maniera differente, ciò indica quindi che la tipologia di sistema cambia lungo l'evoluzione dell'analisi. Ciò porta in evidenza una delle difficoltà nella risoluzione dei problemi di contatto e cioè il cambiamento di dimensioni della matrice del sistema.

Inoltre, come visto e come spiegato nei paragrafi precedenti, sono possibili vari metodi di risoluzione di questi problemi, in questo esempio è stato utilizzato il metodo dei moltiplicatori di Lagrange il quale ha il vantaggio di soddisfare correttamente l'equazione di vincolo ma lo svantaggio di introdurre variabili aggiuntive al problema. Altro metodo di risoluzione utilizzabile, come visto, sarebbe potuto essere quello Penalty il quale ha il vantaggio di non avere variabili aggiuntive però, porta con sé, una compenetrazione la quale deve essere tenuta sotto controllo tramite una tolleranza.

2.2 Non linearità per geometria

In tale paragrafo si vuole definire due formulazioni, precisamente la *Total Lagrangian Formulation* e la *Update Lagrangian Formulation* le quali vengano applicate nella teoria agli elementi finiti per ottenere la soluzione di un continuo soggetto a condizioni di non linearità per geometria.

Come prima cosa si va quindi a vedere graficamente le due configurazioni del corpo che si possono avere (*Figura 2-16*):

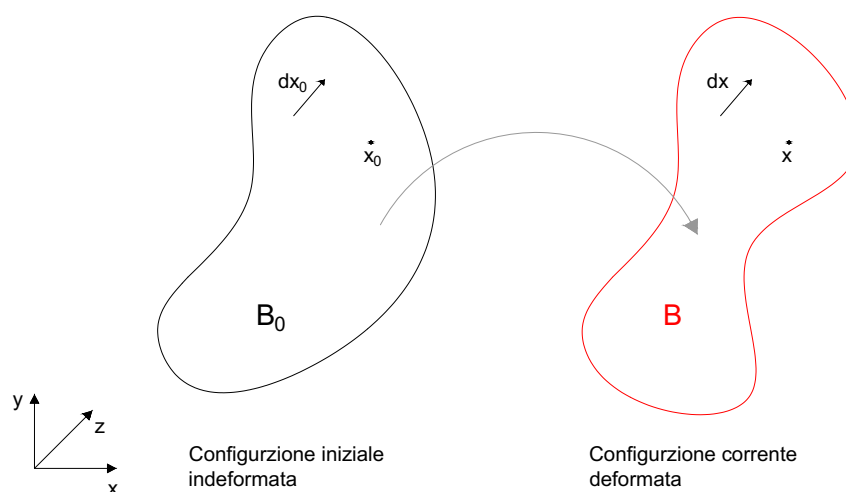


Figura 2-16: Configurazione iniziale e configurazione deformata di un generico corpo B_0

Queste formulazioni vengono utilizzate, come si può vedere dall'immagine precedente, quando la configurazione finale è molto diversa da quella iniziale.

Si parte, ora, dalla configurazione iniziale indeformata del corpo la quale funge da configurazione di riferimento (*Figura 2-17*).

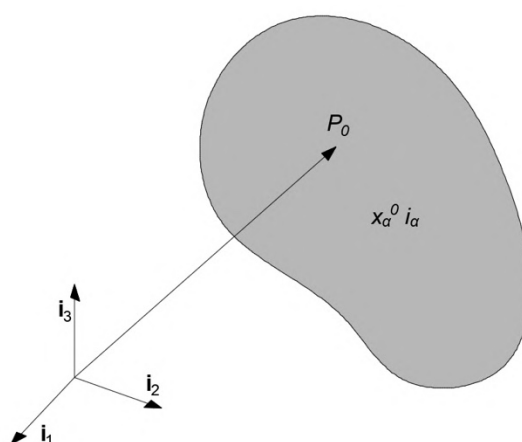


Figura 2-17: Configurazione iniziale indeformata

In questa configurazione ogni punto del corpo ha un vettore posizione identificato con x_0 . Viene quindi introdotto un sistema di coordinate cartesiane sulla base di vettori unitari ortogonali definiti come i_1, i_2, i_3 [7].

Il vettore di posizione iniziale potrà allora essere scritto sotto forma di componenti come si può vedere di seguito:

$$x_0 = x_1^0 i_1 + x_2^0 i_2 + x_3^0 i_3 \quad (2.44)$$

La quale può essere riscritta in una notazione ad indici come:

$$x_0 = x_\alpha^0 i_\alpha \quad (2.45)$$

Ciascun insieme di coordinate x_α^0 definisce quindi una parte materiale nella configurazione iniziale indeformata.

A questo punto, ogni parte materiale viene spostata dalla sua posizione iniziale x_0 , alla sua posizione finale x tramite un vettore spostamento u , con la seguente formulazione:

$$x = x(x_0) = x_0 + u \quad (2.46)$$

Come si può intuire meglio in *Figura 2-18*.

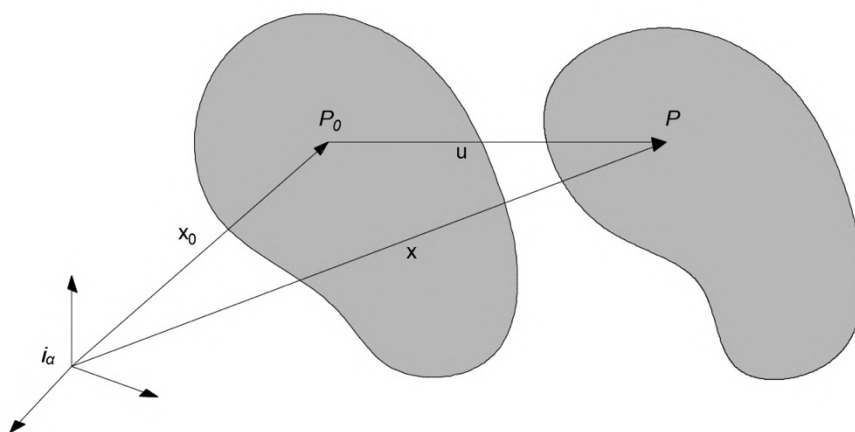


Figura 2-18: Identificazione vettore spostamento fra configurazione iniziale e finale

È possibile riscrivere, ora, l'equazione 2.46 sotto forma indiciale, dove sono state indicate con x_γ^0 le coordinate nella configurazione materiale e x_α le coordinate nella posizione corrente.

$$x_\alpha(x_\gamma^0) = x_\alpha^0 + u_\alpha(x_\gamma^0) \quad (2.47)$$

Questo tipo di formulazione, in cui lo spostamento, e quindi la posizione attuale, è espresso in termini di coordinate della posizione iniziale, è chiamata formulazione Lagrangiana.

Si introduce ora la deformazione non lineare. In generale si può affermare che una misura di deformazione in un corpo solido deve riuscire a caratterizzare lo stato di deformazione in ogni punto del corpo stesso. Questo quindi include la capacità di descrivere diversi allungamenti in diverse direzioni.

Si precisa poi che, nel campo del continuo, la deformazione è una proprietà dei punti, cioè possono essere utilizzate misure di lunghezza solo infinitesime.

Si considera allora un vettore dx_0 di lunghezza infinitesima ds_0 nella configurazione iniziale come si può vedere in *Figura 2-19*.

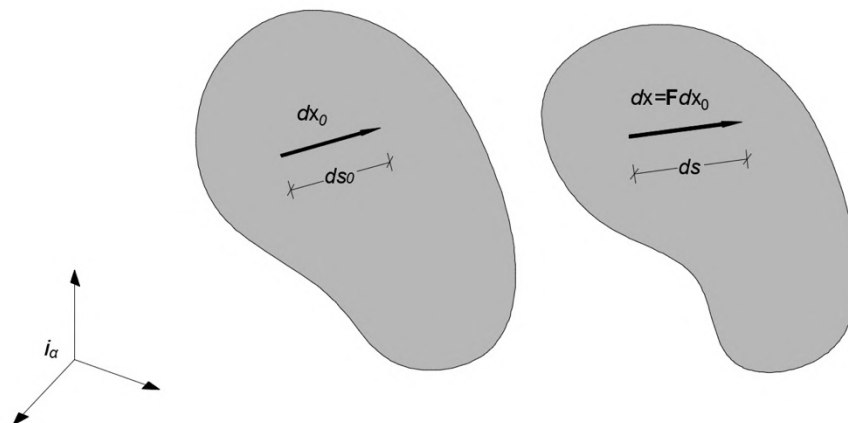


Figura 2-19: Identificazione vettore infinitesimo nella configurazione iniziale e finale

La lunghezza ds_0 sarà definibile come:

$$ds_0^2 = dx_0^T dx_0 \quad (2.48)$$

Mentre, la lunghezza nella configurazione deformata ds , si potrà esprimere con l'equazione 2.49 (visibile a pagina successiva).

$$ds^2 = dx^T dx \quad (2.49)$$

Le coordinate correnti dx del vettore iniziale dx_0 , sono definite dalle derivate parziali della funzione $x(x_0)$ nell'equazione 2.46 come segue:

$$dx = \mathbf{F} dx_0 \quad (2.50)$$

Dove \mathbf{F} è il **tensore del gradiente di deformazione** con le seguenti componenti:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial x_1^0 & \partial x_1 / \partial x_2^0 & \partial x_1 / \partial x_3^0 \\ \partial x_2 / \partial x_1^0 & \partial x_2 / \partial x_2^0 & \partial x_2 / \partial x_3^0 \\ \partial x_3 / \partial x_1^0 & \partial x_3 / \partial x_2^0 & \partial x_3 / \partial x_3^0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Le derivate parziali del vettore spostamento sono poste in modo simile nel **tensore del gradiente di spostamento** \mathbf{D} il quale ha le seguenti componenti:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \partial u_1 / \partial x_1^0 & \partial u_1 / \partial x_2^0 & \partial u_1 / \partial x_3^0 \\ \partial u_2 / \partial x_1^0 & \partial u_2 / \partial x_2^0 & \partial u_2 / \partial x_3^0 \\ \partial u_3 / \partial x_1^0 & \partial u_3 / \partial x_2^0 & \partial u_3 / \partial x_3^0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Si intuisce allora che, dall'equazione lineare 2.46, il tensore gradiente di deformazione può essere scritto in termini del tensore gradiente di spostamento come:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{D} \quad (2.53)$$

Dove \mathbf{I} è il tensore unitario.

Le componenti del gradiente di deformazione hanno una interpretazione diretta. Se si considera infatti un vettore unitario $\mathbf{i}_1 = dx_0 / dx_1^0 = [1, 0, 0]^T$ lungo l'asse x_1 segue dall'equazione 2.50 che la posizione corrente di questo vettore è data dalla prima colonna della matrice del gradiente di deformazione.

Si può quindi affermare che le tre colonne $\partial x / \partial x_\alpha^0$ della matrice \mathbf{F} definiscono le componenti correnti dei tre vettori unitari i_1, i_2, i_3 .

Tale relazione è identificabile tramite la *Figura 2-20* la quale illustra lo spostamento e la deformazione dei tre bordi di un cubo unitario originariamente allineato con gli assi delle coordinate.

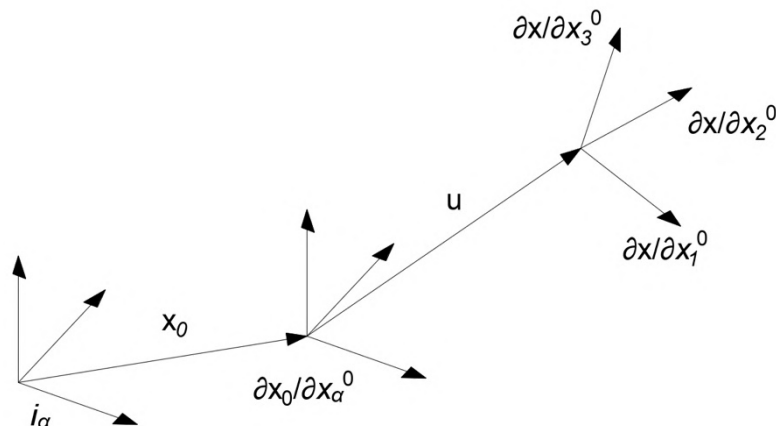


Figura 2-20: Spostamento e rotazione di un cubo unitario originariamente allineato con gli assi

È intuibile dunque che, il vettore spostamento descrive una traslazione, mentre le nove componenti del gradiente di deformazione combinano una rotazione ed una deformazione del cubo stesso. Mentre la deformazione dipende dai carichi e dal comportamento costitutivo del materiale, la rotazione non cambia lo stato del materiale.

È importante perciò separare tali movimenti, operazione effettuabile tramite la decomposizione polare. Ovviamente, un cambiamento della distanza fra due punti di un corpo solido, è indipendente da qualsiasi rotazione/movimento del corpo stesso.

È possibile allora definire la componente di **deformazione assiale di Green** la quale sarà data da:

$$\varepsilon_G = \frac{ds^2 - ds_0^2}{2ds_0^2} = \frac{dx^T dx - dx_0^T dx_0}{2ds_0^2} \quad (2.54)$$

Sostituendo la deformazione corrente come definita nell'equazione 2.50 si ottiene:

$$\varepsilon_G = \frac{dx_0^T}{ds_0} \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \frac{dx_0}{ds_0} \quad (2.55)$$

Il primo e l'ultimo fattore definiscono la direzione iniziale, mentre il fatto centrale è definito come il **tensore di deformazione di Green** (equazione 2.56 a pagina successiva).

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T) + \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{D} \quad (2.56)$$

La seconda espressione, definita in termini di gradiente di spostamento, deriva dall'uso dell'equazione 2.53. A questo punto, sostituendo le componenti del gradiente di spostamento, si ottiene le componenti del tensore di deformazione di Green:

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta^0} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha^0} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\alpha^0} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta^0} \quad (2.57)$$

Il primo termine definisce il contributo di deformazione nell'analisi lineare a piccole deformazioni, mentre il secondo è il contributo non lineare quando si passa a grandi deformazioni. È necessario ora, definire la variazione del tensore di deformazione di Green, la quale può essere espressa come:

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \delta \mathbf{D} + \delta \mathbf{D}^T \mathbf{F}) \quad (2.58)$$

Che corrisponde a scrivere:

$$\delta E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\alpha^0} \frac{\partial (\delta u_\gamma)}{\partial x_\beta^0} + \frac{\partial (\delta u_\gamma)}{\partial x_\alpha^0} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\beta^0} \right) \quad (2.59)$$

Si può notare che sia il tensore di deformazione di Green che la sua variazione sono simmetrici quindi hanno solo sei componenti indipendenti, mentre il gradiente di deformazione e la sua variazione sono in generale non simmetrici e perciò hanno nove componenti indipendenti. Le tre componenti aggiuntive infatti descrivono la rotazione rigida.

Si vuole passare ora dalle deformazioni alle tensioni. Per fare questo si scrive il teorema dei lavori virtuali uguagliando le forze interne con quelle esterne:

$$F_{est} = F_{int} \rightarrow V_{est} = V_{int} \quad (2.60)$$

Si definiscono le componenti di sollecitazione associate alle componenti di deformazione di Green $\delta E_{\alpha\beta}$ come $S_{\alpha\beta}$. L'equazione del lavoro virtuale si può allora scrivere come segue:

$$\int_{V_0} \delta E_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} dV_0 = \int_{S_0} \delta u_\gamma t_\gamma^0 dS_0 + \int_{V_0} \delta u_\gamma p_\gamma^0 dV_0 \quad (2.61)$$

Dove $p_\gamma^0 dV_0$ sono le componenti di forza di volume e $t_\gamma^0 dS_0$ sono le componenti di forza di superficie.

Le deformazioni virtuali $\delta E_{\alpha\beta}$ come visto, sono simmetriche. Saranno simmetriche quindi anche le componenti di sollecitazione, ovvero, $S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$.

Il primo integrale potrà dunque essere espresso sostituendo la sola componente non simmetrica nell'equazione 2.59 ottenendo così:

$$\int_{V_0} \delta E_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} dV_0 = \int_{V_0} \frac{\partial(\delta u_\gamma)}{\partial x_\beta^0} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\alpha^0} S_{\alpha\beta} dV_0 \quad (2.62)$$

Utilizzando ora il teorema della divergenza nell'equilibrio dei lavori virtuali si ottiene:

$$\int_{V_0} \frac{\partial(\delta u_\gamma)}{\partial x_\beta^0} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\alpha^0} S_{\alpha\beta} dV_0 = \int_{S_0} \delta u_\gamma \left(\frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\alpha^0} S_{\alpha\beta} \right) n_\beta^0 dS_0 - \int_{V_0} \delta u_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\beta^0} \left(\frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\alpha^0} S_{\alpha\beta} \right) dV_0 \quad (2.63)$$

Inserendo tale forma nell'equazione del lavoro virtuale esterno nella 2.61 si trova che l'equazione di equilibrio:

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta^0} \left(\frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\alpha^0} S_{\alpha\beta} \right) + p_\gamma^0 = 0 \quad \text{con } \gamma = 1,2,3 \quad (2.64)$$

La quale è soddisfatta in V_0 se il contributo di trazione superficiale è definito come:

$$t_\gamma^0 = \left(\frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\alpha^0} S_{\alpha\beta} \right) n_\beta^0 \quad \text{con } \gamma = 1,2,3 \quad (2.65)$$

In S_0 .

Le componenti di sollecitazione $S_{\alpha\beta}$ introdotte in questo modo corrispondono al **secondo tensore delle sollecitazioni di Piola – Kirchhoff**. Queste componenti di sollecitazione, come spiegato anche precedentemente, sono simmetriche, tuttavia come si può vedere dalle equazioni precedenti, in generale, sono usate comunemente nella forma:

$$P_{\gamma\beta} = \frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\alpha^0} S_{\alpha\beta} \quad (2.66)$$

Questa forma è definita come il **primo tensore delle sollecitazioni di Piola – Kirchhoff**. Le sollecitazioni di Piola – Kirchhoff fino ad ora esposte sono definite nel volume indeformato, si vuole cioè identificare i relativi stati di sollecitazione e deformazione nel volume corrente (deformato).

Nel caso di piccoli spostamenti du imposti allo stato attuale, quindi descritti con le coordinate x , le deformazioni introdotte si possono scrivere tramite la parte lineare delle deformazioni di Green, considerando però come riferimento lo stato attuale, come segue:

$$d\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(du_\alpha)}{\partial x_\beta} + \frac{\partial(du_\beta)}{\partial x_\alpha} \right) \quad (2.67)$$

Queste deformazioni possono essere correlate agli incrementi della deformazione di Green esposta nell'*equazione 2.59*.

Si ottiene quindi:

$$dE_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\alpha^0} \frac{\partial(\delta u_\gamma)}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\beta^0} + \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\alpha^0} \frac{\partial(\delta u_\gamma)}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\beta^0} \right) \quad (2.68)$$

La quale in altra forma può essere scritta come:

$$d\mathbf{E} = \mathbf{F}^T d\varepsilon \mathbf{F} \quad (2.69)$$

Si può ora introdurre il **tensore delle sollecitazioni di Cauchy**, σ , con componenti $\sigma_{\alpha\beta}$, come il coniugato delle deformazioni correnti definite nell'*equazione 2.67* quando si utilizzano il volume e la superficie corrente.

Ciò significa dire che, il lavoro virtuale della sollecitazione di Cauchy attraverso la deformazione virtuale, è uguale al lavoro virtuale della sollecitazione di Piola – Kirchhoff attraverso la deformazione virtuale di Green:

$$\int_{V_0} \delta E_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} dV_0 = \int_V \delta \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} dV \quad (2.70)$$

La relazione fra le due componenti di sollecitazione si ottiene introducendo l'equazione 2.69, nelle componenti di deformazione virtuale ottenendo così una relazione fra il volume di riferimento indeformato dV_0 e l'elemento corrente deformato dV .

È possibile quindi scrivere:

$$dV = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_1^0} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_2^0} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_3^0} \right) dV_0 = \det \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta^0} \right) dV_0 \quad (2.71)$$

Introducendo il determinante Jacobiano $J = \det(\mathbf{F})$, la relazione appena scritta, si riduce a quanto segue:

$$dV = J dV_0 = \det(\mathbf{F}) dV_0 \quad (2.72)$$

Ora, l'introduzione di tale relazione e dell'equazione 2.69 nel lato sinistro dell'equazione 2.70 del lavoro virtuale interno, mi fornisce la formula per il tensore di Cauchy:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (2.73)$$

La quale può essere scritta in forma di indici come:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{J} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\gamma^0} S_{\gamma\delta} \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\delta^0} \quad (2.74)$$

È possibile, infine, introdurre il **tensore di Kirchhoff** in modo analogo a quanto fatto per il tensore di Cauchy ma utilizzando l'elemento di volume corrente dV_0 .

Tramite l'identità del lavoro virtuale si potrà quindi scrivere che:

$$\int_{V_0} \delta E_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} dV_0 = \int_V \delta \varepsilon_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} J^{-1} dV \quad (2.75)$$

La quale, se viene confrontata con l'equazione 2.69, mi permette di indentificare il tensore di Kirchhoff con la seguente forma:

$$\tau = J\sigma = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (2.76)$$

In generale, si può quindi dire che, le componenti di sollecitazione di Piola – Kirchhoff, descrivono le tensioni che nascono sulla superficie del materiale e la loro variazione è da attribuire al comportamento costitutivo del materiale stesso. Le componenti di sollecitazione di Cauchy e Kirchhoff invece, sono differenti, in quanto si riferiscono a tensioni su superfici fissate nello spazio.

Pertanto si può affermare che un corpo, con uno stato di sollecitazione costante e sottoposto ad un movimento rigido, non avrà nessuna variazione delle componenti di sollecitazione di Piola – Kirchhoff, ma il suo cambiamento di coordinate nello spazio implicherà in generale un cambiamento delle sollecitazioni di Cauchy e Kirchhoff.

Si possono introdurre a questo punto le due formulazioni annunciate ad inizio paragrafo.

- Total Lagrangian formulation

Questa formulazione è definita nella configurazione del corpo indeformata B_0 e le misure di tensione e di deformazione utilizzate sono le seguenti:

- Misure di tensione:

$$\left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow \text{Secondo tensore di Piola – Kirchhoff} \\ P = FS = \frac{\partial x}{\partial x_0} S \rightarrow \text{Primo tensore di Piola – Kirchhoff} \end{array} \right. \quad (2.77)$$

- Misure di deformazione:

$$\left\{ E \rightarrow \text{Tensoriale di deformazione di Green} \right. \quad (2.78)$$

In questa formulazione il moto dei punti materiale è descritto dal campo di spostamento totale $u(x_0)$ con riferimento alla posizione iniziale x_0 del punto materiale. Tale approccio ha il vantaggio di mappare la soluzione secondo le condizioni iniziali (come appena detto), lo svantaggio però è quello che nel termine deformativo bisogna tenere conto di un contributo non lineare, proprio perché queste si riferiscono alla condizione iniziale.

- Update Lagrangian formulation

Tale formulazione, a differenza di prima, è definita nella configurazione del corpo corrente B , quindi quella deformata, e le misure di tensione e di deformazione utilizzate sono le seguenti:

- Misure di tensione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{1}{J} F S F^T \rightarrow \text{Tensoriale di Cauchy} \\ \tau = J \sigma = F S F^T \rightarrow \text{Tensoriale di Kirchhoff} \end{array} \right. \quad (2.79)$$

- Misure di deformazione:

$$\left\{ \varepsilon \rightarrow \text{Deformazione di Green} \right. \quad (2.80)$$

Questa formulazione definisce gli incrementi di spostamento $du(x)$ con riferimento allo stato corrente x . Ciò offre il vantaggio che gli incrementi di deformazione possono essere introdotti in maniera lineare, tuttavia gli incrementi di sollecitazione risultano essere misure non oggettive e quindi non lineari. La scelta quindi se utilizzare una formulazione o l'altra deve essere fatta in base alla forma specifica delle equazioni non lineari che si vuole risolvere.

Come prima cosa si decide di vedere come si ottiene la soluzione applicando il primo approccio cioè la total Lagrangian formulation.

2.2.2 Total Lagrangian formulation

Si decide di dividere la soluzione del problema meccanico in tre step principali:

- Equazione di equilibrio;
- Rigidezza tangente;
- Implementazione numerica.

2.2.2.1 Equazione di equilibrio

Si definisce inizialmente la condizione di equilibrio del corpo, la quale corrisponde all'uguaglianza delle forze esterne e le forze interne come fatto nell'*equazione 2.60*.

L'equazione di equilibrio quindi, grazie alle componenti di sollecitazione di Piola-Kirchhoff, può essere scritta, come già fatto nell'*equazione 2.64*, come segue:

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta^0} \left(\frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\alpha^0} S_{\alpha\beta} \right) + p_\gamma^0 = 0 \quad \text{in } V_0 \quad (2.81)$$

L'equazione del lavoro virtuale si ottiene moltiplicando questa equazione per lo spostamento virtuale δu_γ e successivamente integrando nel volume V_0 in modo da passare dalla forma differenziale forte a quella integrale debole (Krenk, 2009).

Si ottiene allora:

$$\int_{V_0} \delta u_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\beta^0} \left(\frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\alpha^0} S_{\alpha\beta} \right) dV_0 + \int_{V_0} \delta u_\alpha p_\alpha^0 dV_0 = 0 \quad (2.82)$$

Utilizzando ora il teorema della divergenza, espresso anche nell'*equazione 2.63*, questa relazione, può essere scritta sotto forma di uguaglianza di lavori virtuali:

$$\int_{V_0} \delta E_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} dV_0 = \int_{S_0} \delta u_\gamma t_\gamma^0 dS_0 + \int_{V_0} \delta u_\gamma p_\gamma^0 dV_0 \quad (2.83)$$

Dove è stato definito $\delta E_{\alpha\beta}$ come il tensore virtuale di deformazione di Green.

Tale tensore, già definito nell'*equazione 2.59*, ha la forma che segue a pagina successiva.

$$\delta E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\alpha^0} \frac{\partial(\delta u_\gamma)}{\partial x_\beta^0} + \frac{\partial(\delta u_\gamma)}{\partial x_\alpha^0} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\beta^0} \right) \quad (2.84)$$

Mentre t_γ^0 è il vettore di trazione superficiale, definito nell'equazione 2.65, come:

$$t_\gamma^0 = \left(\frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\alpha^0} S_{\alpha\beta} \right) n_\beta^0 \quad \text{con } \gamma = 1,2,3 \quad (2.85)$$

Si può perciò affermare che, la parte destra dell'equazione del lavoro virtuale, corrisponde al lavoro virtuale esterno:

$$\delta V_{est} = \int_{S_0} \delta u_\gamma t_\gamma^0 dS_0 + \int_{V_0} \delta u_\gamma p_\gamma^0 dV_0 \quad (2.86)$$

Mentre il lato sinistro definisce il lavoro virtuale interno:

$$\delta V_{int} = \int_{V_0} \delta E_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} dV_0 \quad (2.87)$$

Si può allora definire l'equazione di equilibrio da risolvere nella seguente forma:

$$\delta V_{int} = \delta V_{est} \quad (2.88)$$

2.2.2.2 Rigidezza tangente (operatore tangente)

Per ottenere la rigidezza tangente viene utilizzata una forma incrementale dell'equazione del lavoro virtuale.

Precisamente deriva dall'incremento del lavoro virtuale interno:

$$d(\delta V_{int}) = d \int_{V_0} \delta E_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} dV_0 \quad (2.89)$$

A questo punto si può sostituire il tensore $\delta E_{\alpha\beta}$ definito precedentemente. Derivando quindi si ottiene l'operatore tangente cercato:

$$d(\delta V_{int}) = \int_{V_0} \frac{\partial(\delta u_\gamma)}{\partial x_\alpha^0} S_{\alpha\beta} \frac{\partial(du_\gamma)}{\partial x_\beta^0} dV_0 + \int_{V_0} \delta E_{\alpha\beta} dS_{\alpha\beta} dV_0 \quad (2.90)$$

Concludendo, si definisce la legge elastica lineare che lega $dS_{\alpha\beta}$ e $dE_{\alpha\beta}$, in quanto la parte non lineare è quella della geometria, e si definisce:

$$dS_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta}^0 dE_{\gamma\delta} \quad (2.91)$$

Si ottiene allora la seguente relazione:

$$d(\delta V_{int}) = \int_{V_0} \frac{\partial(\delta u_\gamma)}{\partial x_\alpha^0} S_{\alpha\beta} \frac{\partial(du_\gamma)}{\partial x_\beta^0} dV_0 + \int_{V_0} \delta E_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma\delta}^0 dE_{\gamma\delta} dV_0 \quad (2.92)$$

Si può infine distinguere due contributi della rigidità tangente. Si definisce un primo contributo di rigidità costitutiva pari a:

$$\int_{V_0} \delta E_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma\delta}^0 dE_{\gamma\delta} dV_0 \quad (2.93)$$

Ed un contributo di rigidità geometrica:

$$\int_{V_0} \frac{\partial(\delta u_\gamma)}{\partial x_\alpha^0} S_{\alpha\beta} \frac{\partial(du_\gamma)}{\partial x_\beta^0} dV_0 \quad (2.94)$$

2.2.2.3 Implementazione numerica

All'interno del metodo degli elementi finiti il modo più comune per discretizzare i problemi di meccanica dei solidi consiste nel rappresentare il campo di spostamento $u(x_0)$ in termini di spostamento \mathbf{u}_n ai nodi selezionati $\mathbf{x}_n^0, n = 1, 2, \dots$

Ciò corrisponde ad una scrittura del seguente tipo:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_0) = \sum_n h_n(\mathbf{x}_0) \mathbf{u}_n \quad \text{per ogni nodo } n \quad (2.95)$$

Dove sono state definite $h_n(\mathbf{x}_0)$ le funzioni di forma corrispondenti ad uno spostamento unitario per il nodo n .

Queste funzioni di forma devono dunque rispettare le seguenti condizioni:

$$h_n(\mathbf{x}_0) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases} \quad (2.96)$$

Sostituendo una rappresentazione virtuale del campo di spostamenti si ottiene:

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) = \sum_n h_n(\mathbf{x}_0) \delta \mathbf{u}_n \quad (2.97)$$

Si può quindi definire ora il lavoro virtuale esterno e le forze esterne con la seguente relazione:

$$\delta V_{est} = \delta \mathbf{u}_n^T \mathbf{f}_n^{est} = \delta \mathbf{u}_n^T \left\{ \int_{S_0} h_n(\mathbf{x}_0) \mathbf{t}_0 dS_0 + \int_{V_0} h_n(\mathbf{x}_0) \mathbf{p}_0 dV_0 \right\} \quad (2.98)$$

Le forze nodali esterne, a questo punto, si ottengono integrando la trazione superficiale e la forza volumetrica pesata della corrispondente funzione di forma.

$$\mathbf{f}_n^{est} = \int_{S_0} h_n(\mathbf{x}_0) \mathbf{t}_0 dS_0 + \int_{V_0} h_n(\mathbf{x}_0) \mathbf{p}_0 dV_0 \quad (2.99)$$

Si passa ora ad analizzare il lavoro virtuale interno.

Grazie alla simmetria delle componenti di sollecitazione e di deformazione, è possibile scrivere le sei componenti del lavoro virtuale come segue:

$$\delta E_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = \delta E_{11} S_{11} + \delta E_{22} S_{22} + \delta E_{33} S_{33} + 2\delta E_{23} S_{23} + 2\delta E_{31} S_{31} + 2\delta E_{12} S_{12} \quad (2.100)$$

Questa espressione può, in alternativa, essere formata mediante l'uso di due tensori, rispettivamente pari a:

$$\delta \mathbf{E} = [\delta E_{11}, \delta E_{22}, \delta E_{33}, 2\delta E_{23}, 2\delta E_{31}, 2\delta E_{12}]^T \quad (2.101)$$

$$\mathbf{S} = [S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{23}, S_{31}, S_{12}]^T \quad (2.102)$$

Si può a questo punto riscrivere la prima equazione nel seguente modo:

$$\delta \mathbf{E} = \mathbf{F} \delta \mathbf{D} \quad (2.103)$$

Dove sono state definite le seguenti quantità:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x_{\beta}^0} \quad (2.104)$$

$$\delta \mathbf{D} = \frac{\partial(\delta u_{\alpha})}{\partial x_{\beta}^0} \quad (2.105)$$

A questo punto è possibile, come fatto anche precedentemente per i lavori esterni, sostituire agli spostamenti virtuali le funzioni di forma e si ottiene quindi:

$$\delta \mathbf{D} = \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial x_{\beta}^0} = \sum_n \frac{h_n}{\partial x_{\beta}^0} \delta \mathbf{u}_n = \sum_n h_{n,\beta} \delta \mathbf{u}_n \quad (2.106)$$

Si può ora ridefinire la $\delta \mathbf{E}$ grazie alle funzioni di forma nel seguente modo:

$$\delta \mathbf{E}(\mathbf{x}_0) = \sum_n \mathbf{F} \mathbf{B}_n \delta \mathbf{u}_n = \sum_n \mathbf{B}_n^0(\mathbf{x}_0) \delta \mathbf{u}_n \quad (2.107)$$

Dove è stata definita con $\mathbf{B}_n^0(\mathbf{x}_0)$ la matrice contenente le derivate delle funzioni di forma. È allora possibile a questo punto definire anche il lavoro virtuale interno:

$$\delta V_{int} = \delta \mathbf{u}_n^T \mathbf{f}_n^{int} = \delta \mathbf{u}_n^T \left\{ \int_{V_0} \mathbf{B}_n^0(\mathbf{x}_0)^T \mathbf{S} dV_0 \right\} \quad (2.108)$$

Si ottengono quindi anche le forze virtuali interne che saranno pari a:

$$\mathbf{f}_n^{int} = \int_{V_0} \mathbf{B}_n^0(\mathbf{x}_0)^T \mathbf{S} dV_0 \quad (2.109)$$

Sono stati definiti quindi sia il lavoro virtuale interno che quello esterno (e anche le forze interne ed esterne) tramite le funzioni di forma, quello che manca ora da definire, per concludere l'implementazione, è il calcolo della rigidezza tangente.

Definite le precedenti quantità, è però immediato definire anche la rigidezza tangente svolgendo la derivata del lavoro virtuale interno.

Si ottiene perciò:

$$d(\delta V_{int}) = \delta \mathbf{u}_n^T \left\{ \mathbf{I} \int_{V_0} \frac{\partial h_n}{\partial x_\alpha^0} S_{\alpha\beta} \frac{\partial h_m}{\partial x_\beta^0} dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{B}_n^{0T} \mathbf{C}_0 \mathbf{B}_m^0 dV_0 \right\} d\mathbf{u}_m \quad (2.110)$$

Dove \mathbf{I} è il tensore unitario 3x3 con componenti $\delta_{\alpha\beta}$ e \mathbf{C}_0 è la matrice 6x6 definita anche precedentemente che lega deformazioni e tensioni nel seguente modo: $d\mathbf{S} = \mathbf{C}_0 d\mathbf{E}$.

Si conclude quindi definendo la matrice di rigidezza tangente come:

$$\mathbf{K}_{nm} = \mathbf{I} \int_{V_0} \frac{\partial h_n}{\partial x_\alpha^0} S_{\alpha\beta} \frac{\partial h_m}{\partial x_\beta^0} dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{B}_n^{0T} \mathbf{C}_0 \mathbf{B}_m^0 dV_0 \quad (2.111)$$

Si ottiene dunque:

$$d(\delta V_{int}) = \delta \mathbf{u}_n^T \mathbf{K}_{nm} d\mathbf{u}_m \quad (2.112)$$

2.2.3 Update Lagrangian formulation

Come accennato anche precedentemente, a differenza della total Lagrangian formulation, dove la non linearità entra nel contributo dell'incremento di deformazione, nella Update Lagrangian formulation ogni incremento utilizza come riferimento la configurazione corrente. Questo metodo fornisce alcune semplificazioni nella descrizione cinematica, però, le misure di tensione, devono essere riformulate in maniera oggettiva.

Per questa seconda formulazione si andranno a ricavare le relazioni utilizzando la formulazione precedente.

2.2.3.1 Trasformazione da total ad update Lagrangian formulation

Un modo per ottenere questa nuova formulazione, come detto, è quello di trasformare il formato totale appena descritto.

Le quantità che bisogna identificare come fatto precedentemente sono quindi:

- Il lavoro virtuale interno;
- Il lavoro virtuale esterno;
- La rigidità tangente.

Per quanto riguarda il lavoro virtuale esterno, questo è identificabile immediatamente introducendo però t_γ come vettore di trazione con riferimento alla superficie corrente dS e p_γ come intensità di carico riferita al volume corrente dV (Krenk, 2009).

Avrà quindi la seguente forma:

$$\delta V_{est} = \int_S \delta u_\gamma t_\gamma dS + \int_{V_V} \delta u_\gamma p_\gamma dV \quad (2.113)$$

In modo analogo si può determinare il lavoro virtuale interno cambiando il formato in deformazione e tensione riferite al volume corrente:

$$\delta V_{int} = \int_V \delta \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} dV \quad (2.114)$$

Si vuole infine determinare la rigidità tangente derivando il lavoro virtuale interno. Per fare questo si guardano separatamente le due componenti sopra citate di rigidità costitutiva e rigidità geometrica.

Per quanto riguarda la componente di rigidità geometrica è possibile scrivere:

$$\int_{V_0} \frac{\partial(\delta u_\gamma)}{\partial x_\alpha^0} S_{\alpha\beta} \frac{\partial(du_\gamma)}{\partial x_\beta^0} dV_0 = \int_V \frac{\partial(\delta u_\gamma)}{\partial x_k} \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_\alpha^0} \frac{S_{\alpha\beta}}{J} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\beta^0} \right) \frac{\partial(du_\gamma)}{\partial x_\lambda} dV \quad (2.115)$$

Dove è stato anche aggiornato il volume corrente utilizzando la relazione $dV = JdV_0$.

Ci si accorge poi che il contributo fra parentesi rappresenta il tensore delle tensioni di Cauchy:

$$\sigma_{k\lambda} = \frac{1}{J} \frac{\partial x_k}{\partial x_\alpha^0} S_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\beta^0} \quad (2.116)$$

Il secondo termine, invece, quello di rigidità costitutiva, può essere riscritto nel seguente modo:

$$\int_{V_0} \delta E_{\alpha\beta} dS_{\alpha\beta} dV_0 = \int_V \delta \varepsilon_{\alpha\beta} \dot{D}\sigma_{\alpha\beta} dV \quad (2.117)$$

Dove, come fatto precedentemente, si può definire la seguente legge:

$$\dot{D}\sigma_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} d\varepsilon_{\gamma\delta} \quad (2.118)$$

È quindi a questo punto possibile identificare la rigidità tangente, sommando quella costitutiva e quella geometrica. Si ottiene cioè:

$$d(\delta V_{int}) = \int_V \frac{\partial(\delta u_\gamma)}{\partial x_\alpha} \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial(du_\gamma)}{\partial x_\beta} dV + \int_V \delta \varepsilon_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma\delta} d\varepsilon_{\gamma\delta} V \quad (2.119)$$

A tale soluzione si sarebbe potuto arrivare direttamente anche dalle equazioni di equilibrio nella configurazione corrente ed il risultato sarebbe stato identico.

2.2.3.2 Implementazione numerica

L'implementazione agli elementi finiti della Update Lagrangian formulation è simile a quella della Total Lagrangian formulation, ma contiene tre differenze essenziali: viene utilizzata la geometria corrente, quindi considerando le superfici e volumi correnti, le deformazioni virtuali e incrementali sono semplificate, perché si riferiscono alla geometria attuale e infine le componenti di sollecitazione devono essere aggiornate dall'incremento oggettivo fornito dalla relazione costitutiva per riferirsi a coordinate spaziali fisse.

Nella Update Lagrangian formulation gli spostamenti virtuali e incrementali $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$ e $d\mathbf{u}(\mathbf{x})$ sono considerati come funzioni dell'attuale configurazione \mathbf{x} .

Ciò implica una rappresentazione degli spostamenti virtuali nella seguente forma:

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_n h_n(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}_n \quad (2.120)$$

Il lavoro virtuale esterno si definisce perciò come:

$$\delta V_{est} = \delta \mathbf{u}_n^T \mathbf{f}_n^{est} = \delta \mathbf{u}_n^T \left\{ \int_S h_n(\mathbf{x}) \mathbf{t} dS + \int_{V_0} h_n(\mathbf{x}) \mathbf{p} dV \right\} \quad (2.121)$$

Dove, quindi, a differenza di prima, i carichi si riferiscono alla superficie e al volume corrente come si è appena visto. Come fatto anche precedentemente da questa relazione è possibile determinare le forze nodali esterne integrando la trazione superficiale e la forza volumetrica pesata della corrispondente funzione di forma.

Si ottiene allora:

$$\mathbf{f}_n^{est} = \int_S h_n(\mathbf{x}) \mathbf{t} dS + \int_{V_0} h_n(\mathbf{x}) \mathbf{p} dV \quad (2.122)$$

Si passa ora ad analizzare il lavoro virtuale interno.

Anche le componenti delle sollecitazioni di Cauchy, come fatto anche precedentemente, soddisfano le condizioni di simmetria. È quindi possibile passare da una forma a nove ad una forma a sei componenti:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}]^T \quad (2.123)$$

Mentre le corrispondenti deformazioni virtuali sono:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = [\delta \varepsilon_{11}, \delta \varepsilon_{22}, \delta \varepsilon_{33}, 2\delta \varepsilon_{23}, 2\delta \varepsilon_{31}, 2\delta \varepsilon_{12}]^T \quad (2.124)$$

Come fatto anche per la Total Lagrangian formulation si va ora ad inserire le funzioni di forma e si ottiene:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_n \mathbf{B}_n(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}_n \quad (2.125)$$

Dove anche questa volta la matrice $\mathbf{B}_n(\mathbf{x})$ è la matrice che contiene le derivate delle funzioni di forma, ma ora rispetto alla configurazione attuale e non a quella iniziale come fatto per la Total Lagrangian formulation.

È dunque a questo punto possibile definire anche il lavoro virtuale interno e quindi anche le forze nodali interne:

$$\delta V_{int} = \delta \mathbf{u}_n^T \mathbf{f}_n^{int} = \delta u_n^T \left\{ \int_V \mathbf{B}_n(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\sigma} dV \right\} \quad (2.126)$$

$$\mathbf{f}_n^{int} = \int_V \mathbf{B}_n(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.127)$$

Si vuole infine definire anche la rigidità tangente che sarà data da:

$$d(\delta V_{int}) = \delta \mathbf{u}_n^T \left\{ \mathbf{I} \int_V \frac{\partial h_n}{\partial x_\alpha} \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial h_m}{\partial x_\beta} dV + \int_V \mathbf{B}_n^T \mathbf{C} \mathbf{B}_m dV \right\} d\mathbf{u}_m \quad (2.128)$$

Dove \mathbf{I} è il tensore unitario bidimensionale e \mathbf{C} è la matrice 6x6 che lega deformazioni e tensioni definita nel seguente modo:

$$\dot{\mathbf{D}}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.129)$$

Si conclude definendo la matrice di rigidità tangente nel caso della Update Lagrangian formulation come:

$$\mathbf{K}_{nm} = \mathbf{I} \int_V \frac{\partial h_n}{\partial x_\alpha} \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial h_m}{\partial x_\beta} dV + \int_V \mathbf{B}_n^T \mathbf{C} \mathbf{B}_m dV \quad (2.130)$$

E si ottiene quindi:

$$d(\delta V_{int}) = \delta \mathbf{u}_n^T \mathbf{K}_{nm} d\mathbf{u}_m \quad (2.131)$$

Capitolo 3

Semplificazione del modello 3D

Per la realizzazione del modello numerico da utilizzare per tale tesi si prende come riferimento il modello utilizzato dall'azienda per lo stampaggio dello scarpone stesso. In particolare, nella realtà, vengono realizzati separatamente due pezzi, il gambetto e lo scafo, i quali sono assemblati insieme successivamente, andando così a comporre la struttura dello scarpone. Le due parti sono fissate fra loro tramite due borchie (laterali) ed una vite (posteriore), le quali conferiscono la rigidità allo scarpone in fase di piegatura in avanti/indietro.

In questo capitolo si procede quindi alla semplificazione della geometria di entrambe le componenti, per passare dal modello utilizzato per la stampa ad uno più semplice, adeguato ad uno studio agli elementi finiti.

3.1 Gambetto

Il modello 3D relativo al gambetto per lo stampaggio è il seguente (*Figura 3-1*):

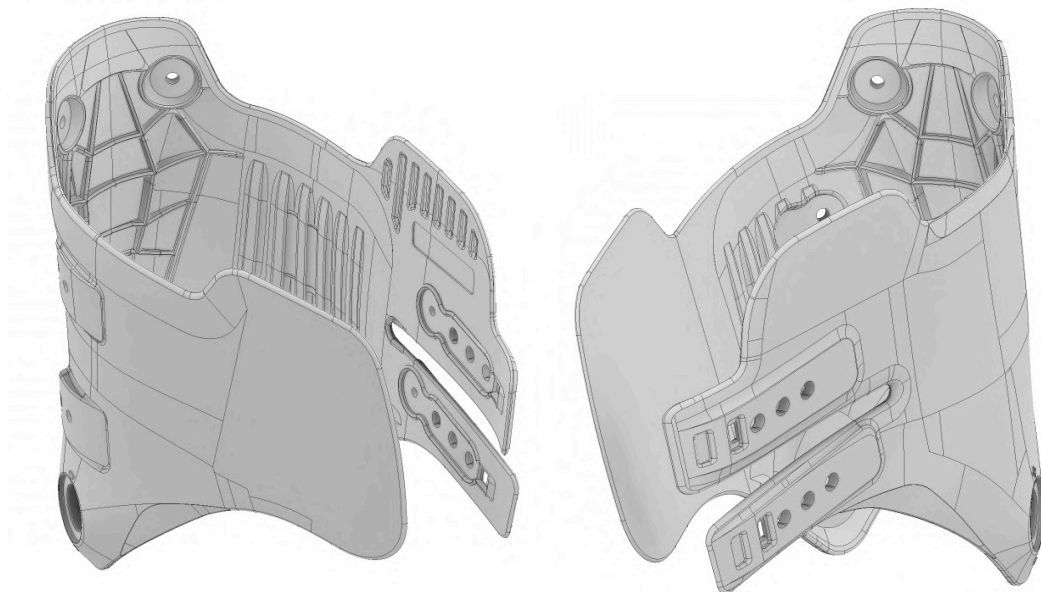


Figura 3-1: Modello 3D iniziale del gambetto

Tale modello risulta essere molto particolareggiato, caratteristica che renderebbe necessaria, per la sua corretta rappresentazione, la realizzazione di una mesh con densità notevolmente elevata. Si è quindi optato per effettuare una semplificazione geometrica delle componenti in modo tale da ottenere un modello semplificato che permetta, allo stesso tempo, di avere una geometria rappresentativa senza però appesantire troppo l'analisi.

In generale, perciò, si vuole mantenere tutti gli elementi strutturali, andando a rimuovere tutte le parti non necessarie.

Come prima cosa vengono rimossi tutti gli smussi realizzati in ogni angolo del pezzo. Si passa quindi da elementi curvilinei ad elementi squadrati a spigolo vivo, come si può vedere in *Figura 3-2*:

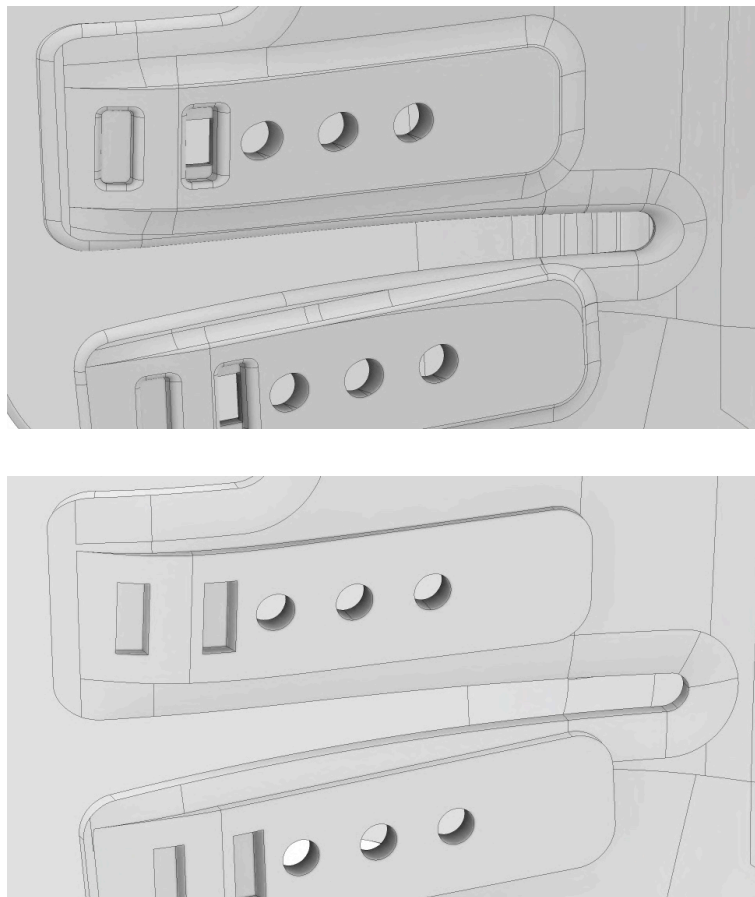


Figura 3-2: *Semplificazione degli smussi sostituiti con spigoli vivi*

In seguito si eliminano le nervature che non sono di tipo strutturale ma solo realizzate ai fini di alleggerire lo scarpone e si mantengono quelle invece che donano una maggior rigidità al modello stesso.

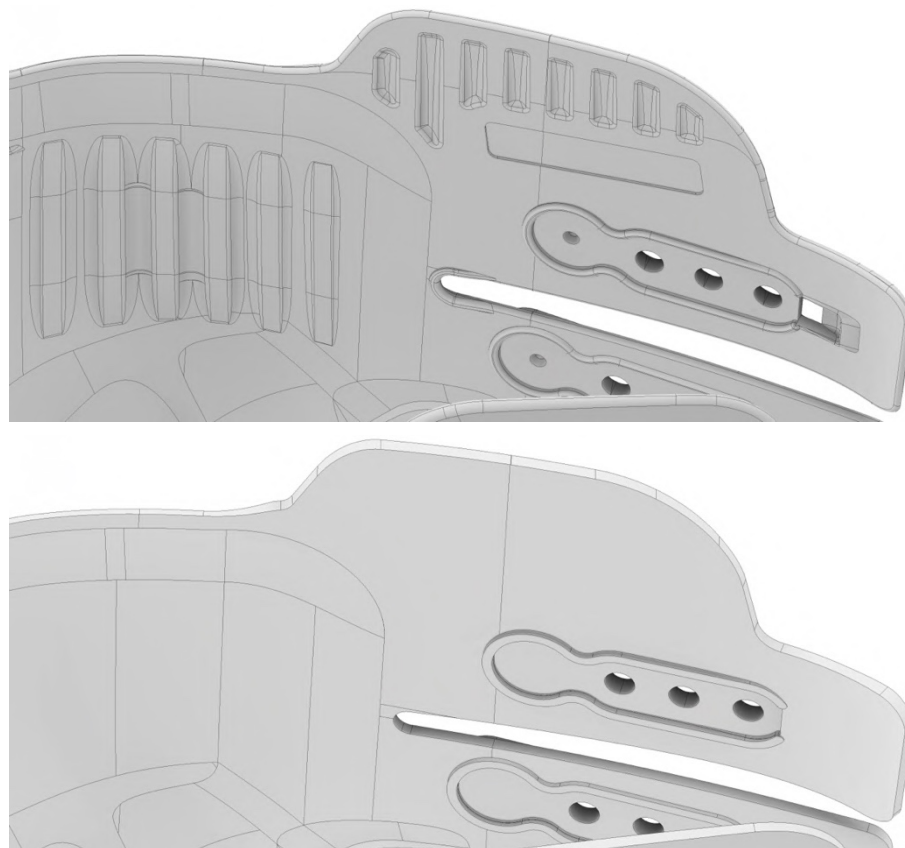


Figura 3-3: Rimozione di alcune delle nervature interne

In particolare, come si può vedere in *Figura 3-3*, le nervature laterali vengono eliminate mentre, come si nota in *Figura 3-4*, le nervature posteriori, le quali servono ad irrigidire il gambetto, vengono mantenute ma semplificate eliminando gli smussi.

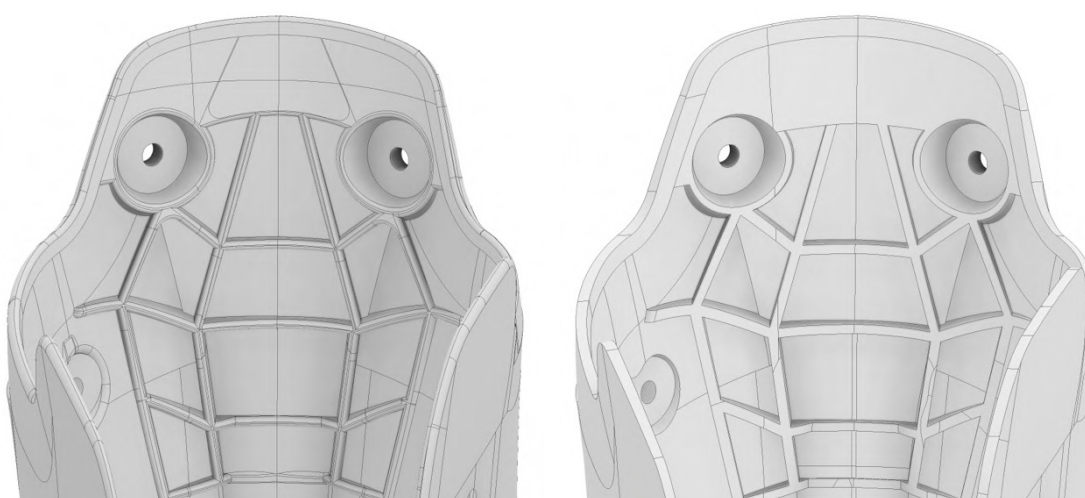


Figura 3-4: Rimozione degli smussi nelle nervature strutturali mantenute

Il gambetto risulta così correttamente semplificato per lo studio che si effettuerà successivamente e quindi può essere importato nel software Abaqus.

In particolare dopo le semplificazioni fatte si presenta come segue in *Figura 3-5*:

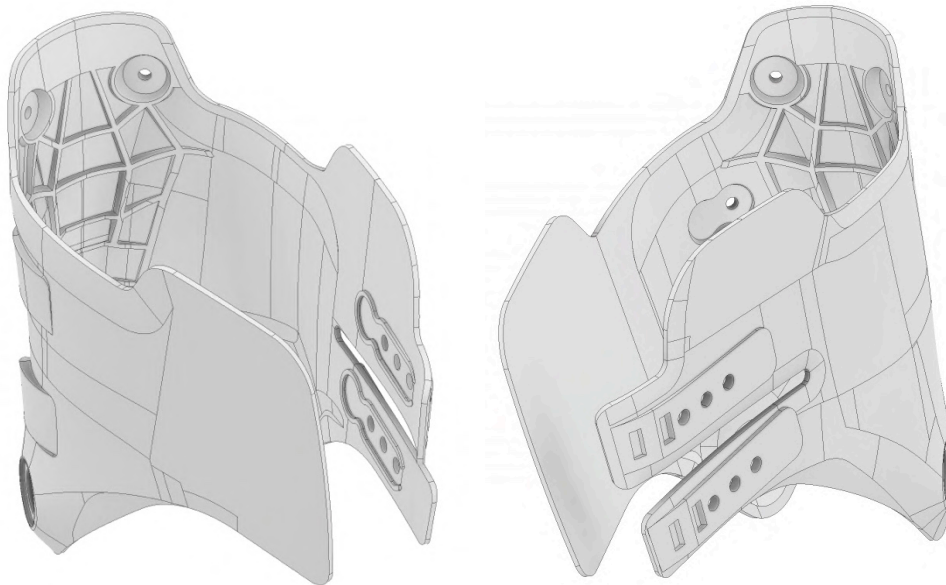


Figura 3-5: *Modello 3D semplificato del gambetto*

3.2 Scafo

Il modello 3D relativo allo scafo per lo stampaggio è il seguente (*Figura 3-6*):

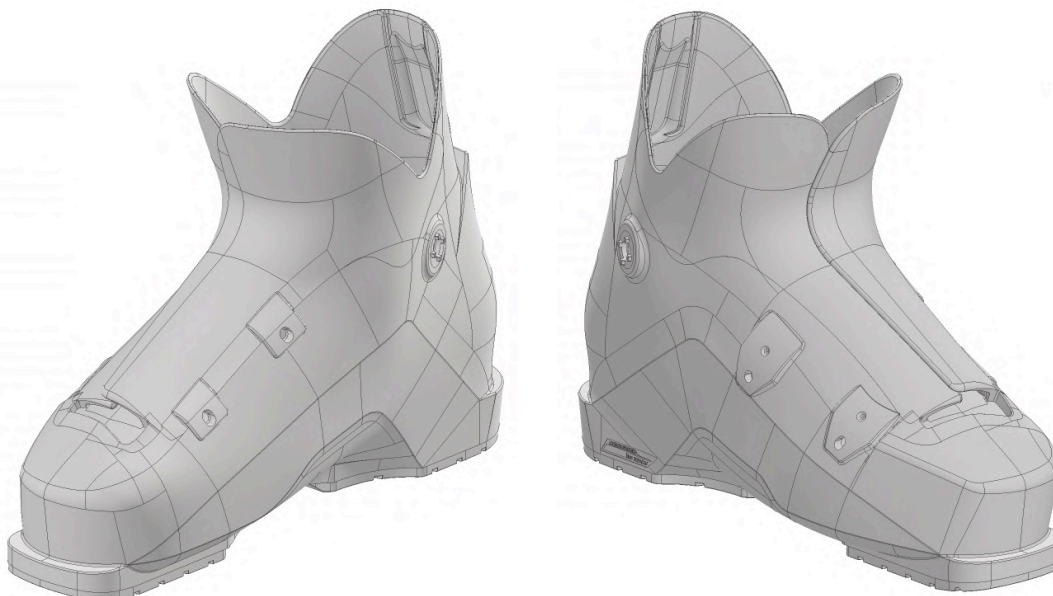


Figura 3-6: *Modello 3D iniziale dello scafo*

Come detto per il gambetto, anche per lo scafo, il modello risulta essere molto particolareggiato. Si procede perciò ad una sua semplificazione.

Come svolto precedentemente, la prima componente da togliere sono gli smussi i quali vengono sostituiti con spigoli vivi (*Figura 3-7*).

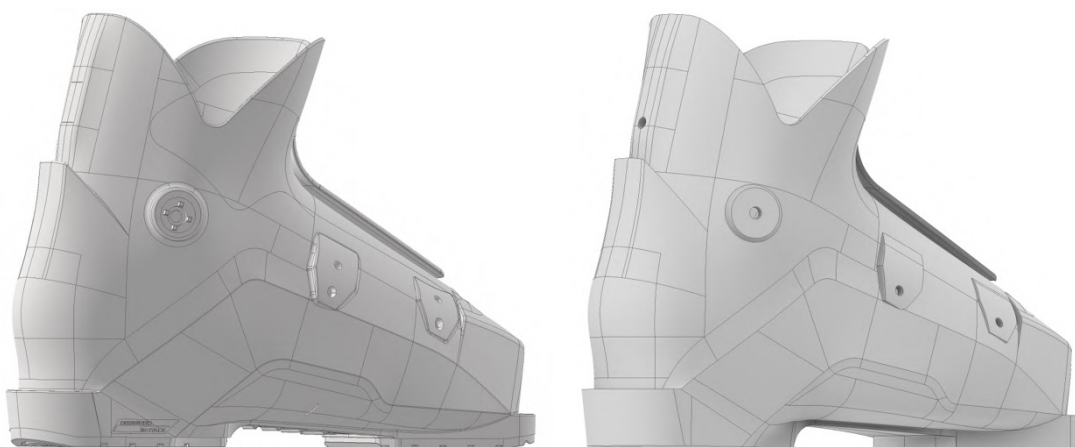


Figura 3-7: *Semplificazione degli smussi sostituiti con spigoli vivi*

Successivamente si eliminano tutte quelle componenti estetiche aggiuntive che renderebbero il modello troppo complesso. In particolare si semplifica completamente la punta ed il tacco dello scafo (*Figura 3-8*). Queste componenti, infatti, da stampaggio, hanno delle zigrinature che permettono di dare maggior grip allo scarpone quando si sta camminando, e delle scritte in rilievo, le quali invece sono solo di natura estetica.

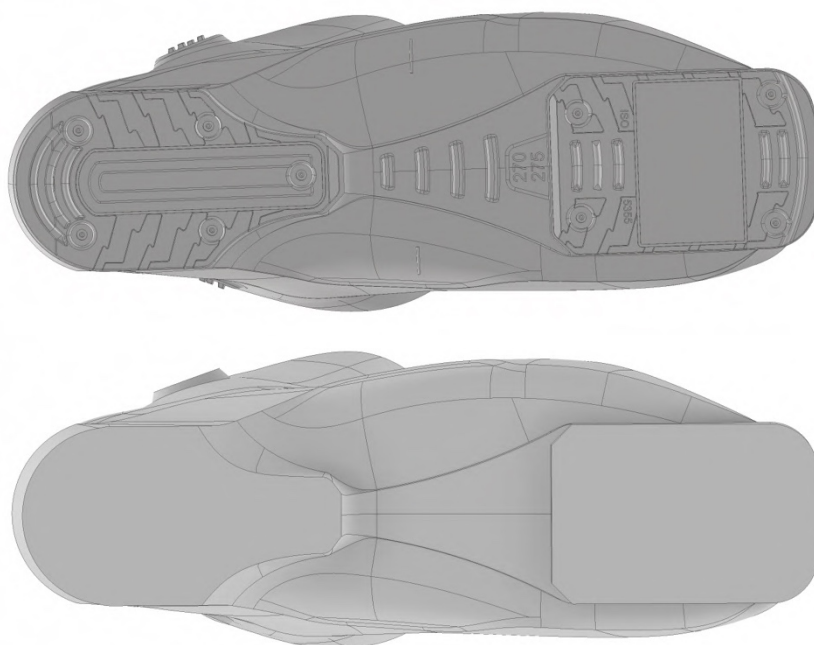


Figura 3-8: *Rimozione della zigrinatura e delle scritte sulla suola dello scarpone*

Infine si semplifica la parte interna. Lo scarpone infatti internamente non avrebbe una superficie liscia, in quanto una volta stampato, viene inserito un plantare in materiale

differente il quale stabilisce un maggior confort. Questo viene incastrato tramite dei particolari ganci come si può vedere nella *Figura 3-9*. Per semplificazione, nel modello in esame, si considera una superficie liscia, la quale, è stata realizzata prendendo come riferimento le sole componenti strutturali e resistenti dello scarpone.

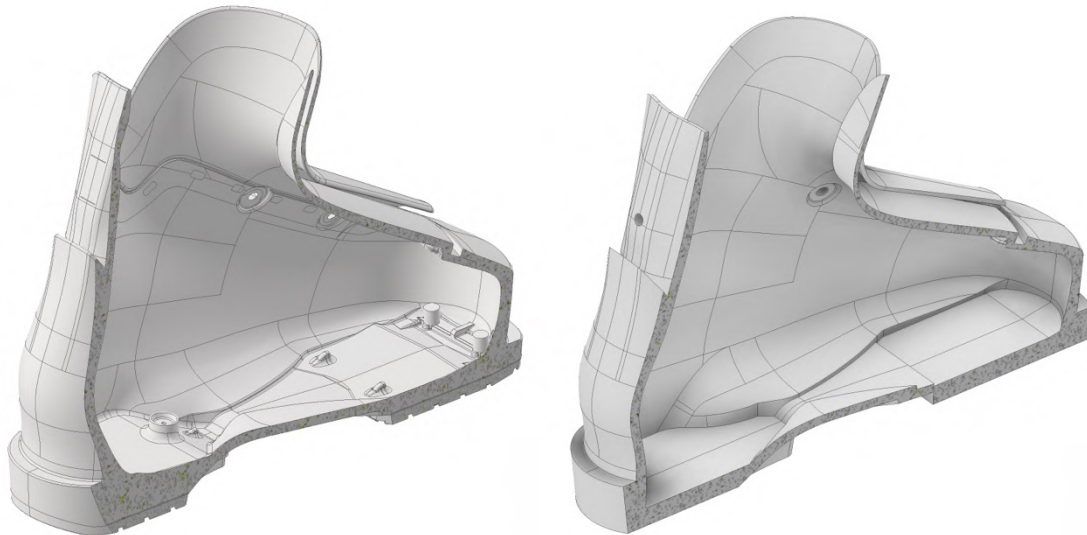


Figura 3-9: *Semplificazione della superficie interna dello scafo nella parte relativa alla soletta*

Il modello semplificato dello scafo si presenta dunque come segue in *Figura 3-10*.



Figura 3-10: *Modello 3D semplificato dello scafo*

La semplificazione dei modelli risulta quindi essere completata, a questo punto è possibile esportare i modelli realizzati in formato “.stp” in modo da poterli importare correttamente nel software di calcolo Abaqus per iniziare l’analisi agli elementi finiti.

Capitolo 4

Modellazione numerica

Nel seguente capitolo si analizza lo sviluppo del modello FEM e la sua risoluzione, necessaria a svolgere le analisi di simulazione della prova dello scarpometro.

Il modello 3D realizzato nel capitolo precedente è il modello di partenza. Va specificato, come detto, che tale modello è stato semplificato dai file 3D forniti dall'azienda, relativi allo stampaggio dei componenti plastici dello scarpone.

Tale modello, una volta concluso, si presenta come segue in *Figura 4-1*:

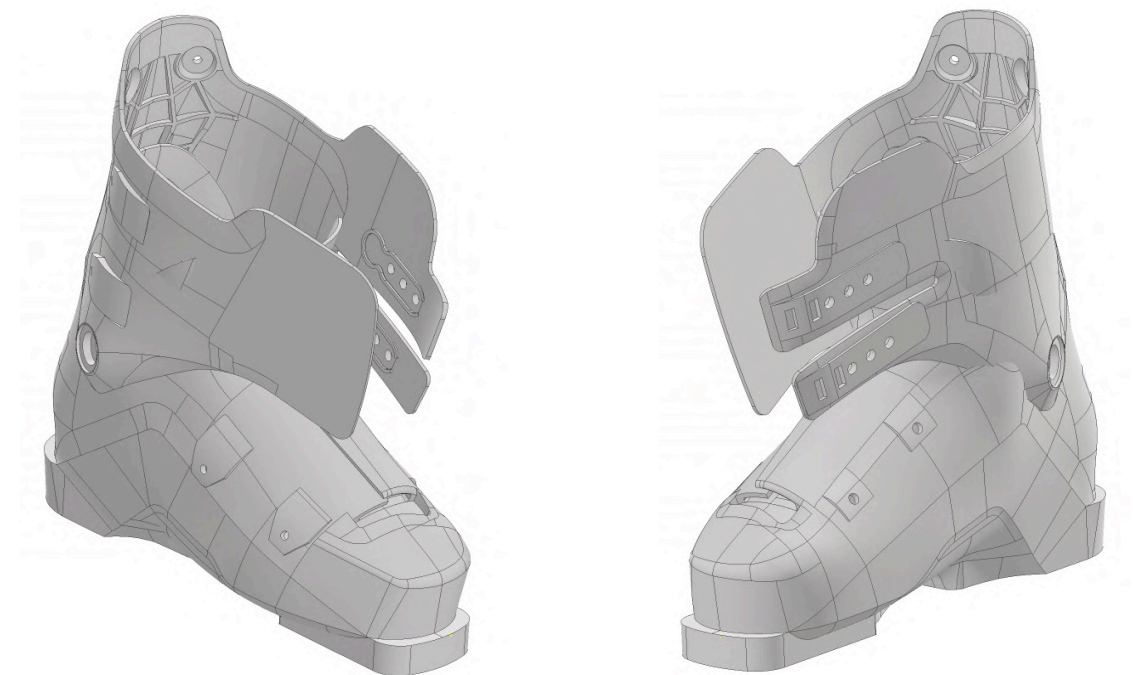


Figura 4-1: Modello tridimensionale assemblato dello scarpone

Come si può vedere lo scarpone risulta essere in una configurazione iniziale aperta. I pezzi, infatti, vengono stampati nel seguente modo e vengono assemblati solo successivamente. In alcuni punti, come si può vedere a pagina successiva in *Figura 4-2*, la parte di gambetto risulta anche compenetrare nella parte dello scafo. Questo avviene perché, scafo e gambetto, una volta stampati, vengono incastrati fra loro e, nei modelli, è data una sovra chiusura in modo che le due componenti una volta assemblate risultino ben incastrate.

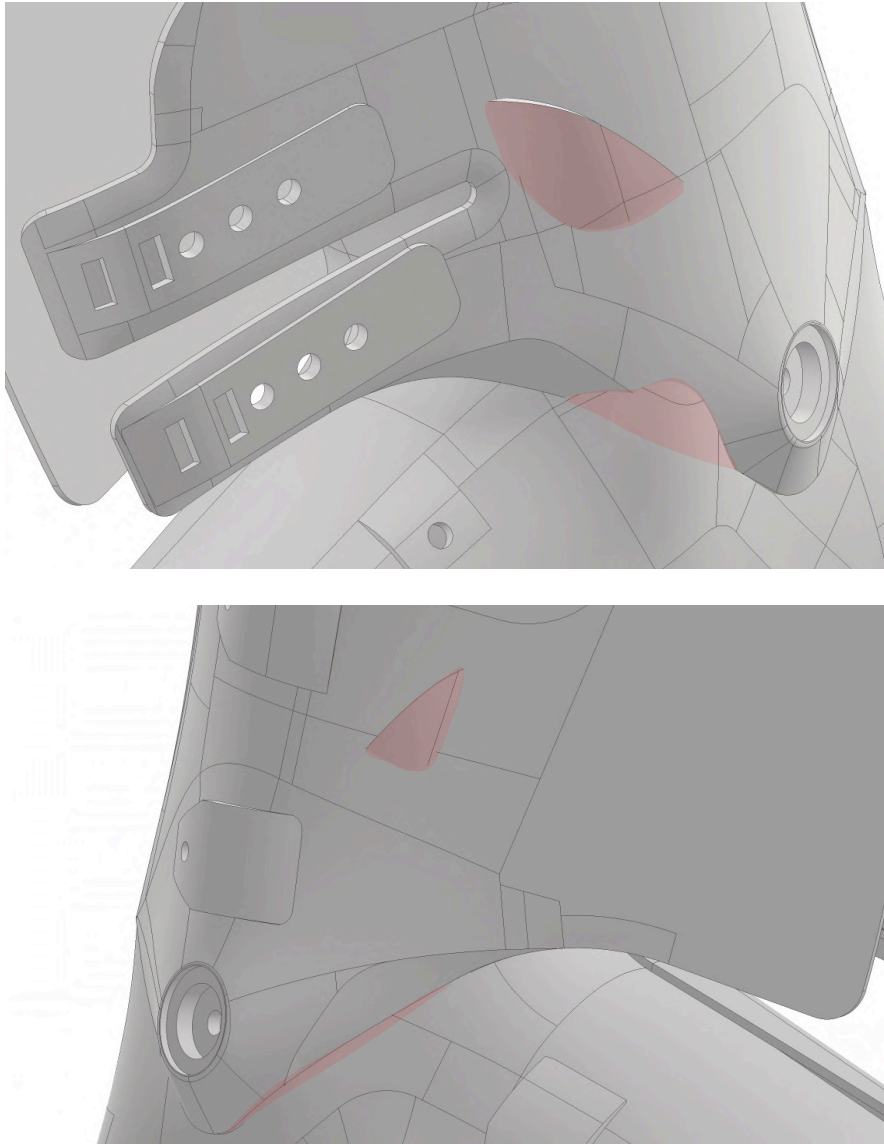


Figura 4-2: Punti particolari relativi alle compenetrazioni fra scafo e gambetto

La prima parte di tale capitolo è quindi dedicata alla realizzazione del modello di scarpone aperto (*Fase1*), alle sue caratteristiche e alla sua relativa chiusura.

Bisogna infatti, come prima cosa, chiudere lo scarpone e portarlo alla sua configurazione finale.

Una volta conclusa questa prima fase di chiusura si può, come viene successivamente illustrato, esportare il modello chiuso ed importarlo in un nuovo file (in maniera tale da de-tensionarlo) passando così alla fase successiva (*Fase2*).

La seconda parte del capitolo è invece dedicata alla realizzazione del nuovo modello (di *Fase 2*). Questo è comprensivo inizialmente di protesi e in seguito anche di scarpetta (rispettivamente *Test 1* e *Test 2*).

A questo punto si possono effettuare le analisi di simulazione della prova sperimentale dello scarpometro (spiegata nel primo capitolo).

4.2 Realizzazione modello: Scarpone aperto – Fase 1

Come prima cosa, una volta aperto il programma Abaqus, si procede ad importare i modelli realizzati nel *Capitolo 3*.

Questi due modelli (lo scafo ed il gambetto) vengono importati come due parti differenti, come si può vedere nella *Figura 4-3*, in modo che possano interagire fra loro.

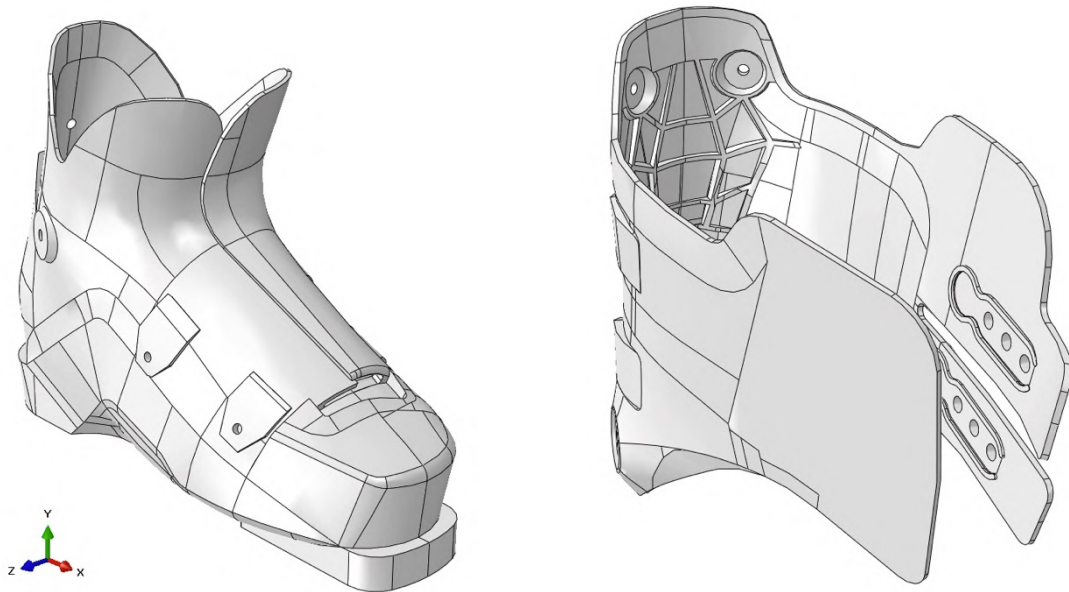


Figura 4-3: Parti scafo e gambetto importate in Abaqus

Per entrambe le parti, quindi, vanno definite le rispettive proprietà e caratteristiche (materiale, sezione, mesh, condizioni di vincolo).

Per quanto riguarda questa prima fase, cioè quella che comprende la chiusura dello scarpone, le due componenti dello scarpone (scafo e gambetto) vengono considerate con le stesse caratteristiche, in termini di materiale.

In questa fase, infatti, non si sta eseguendo uno studio sullo scarpone, ma lo scopo è solamente quello di deformare il modello in maniera adeguata (portarlo cioè in posizione di chiusura).

Per la fase successiva, invece, è necessario definire proprietà diverse fra le due parti.

4.2.2 Caratteristiche del modello – Fase 1

Una volta importate le due parti è possibile attribuire loro le varie proprietà. Si inizia quindi con l'assegnare loro il materiale e la relativa "sezione".

4.2.2.1 Caratteristiche del materiale – Fase 1

Questa fase, come accennato precedentemente, ha il solo scopo di definire la forma finale dello scarpone per quanto riguarda le proprietà dei materiali, perciò, vengono assegnate in maniera fittizia in modo che permettano di diminuire l'onere computazionale e di far convergere l'analisi il più facilmente possibile.

Per la precisione si decide di assumere un materiale elastico lineare con le seguenti caratteristiche:

- Modulo elastico: $E = 50 \text{ MPa}$;
- Coefficiente di Poisson: $\nu = 0$.

Successivamente si crea una sezione omogenea con il materiale appena creato e si assegna tale materiale ad entrambe le parti importate.

Una volta assegnate le proprietà alle parti si può notare che l'elemento passa dal colore bianco (*Figura 4-3*) ad un colore verdino come si può vedere in *Figura 4-4*:

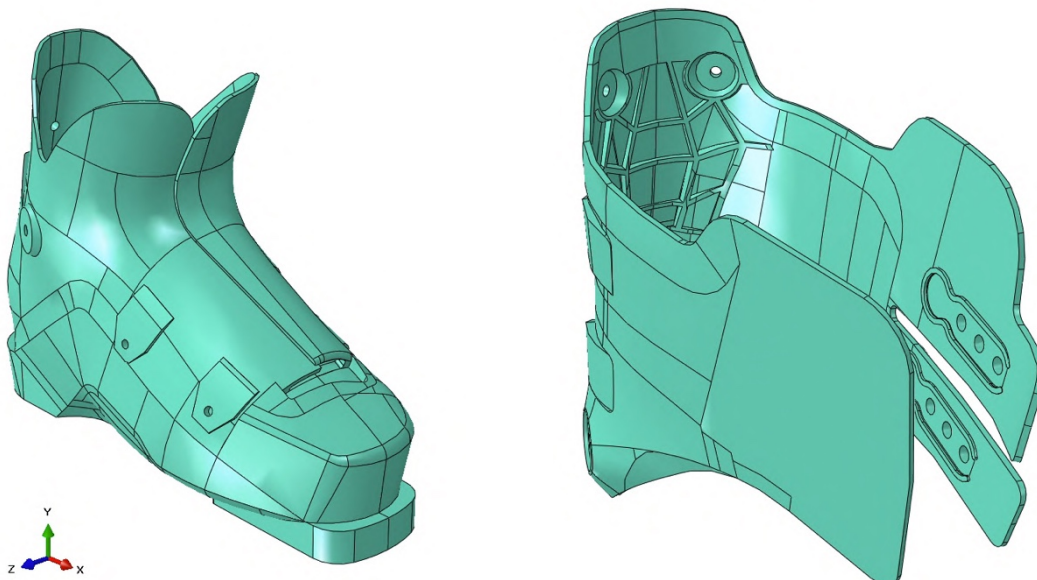


Figura 4-4: Scafo e gambetto dopo aver assegnato le relative proprietà del materiale

4.2.2.2 Creazione della mesh – Fase 1

Si crea ora una istanza di tipo indipendente contenente entrambe le parti importate. Avendo mantenuto le parti nella loro posizione corretta (nello spazio tridimensionale) si può vedere, a questo punto, che il modello risulta essere “assemblato” (Figura 4-5).

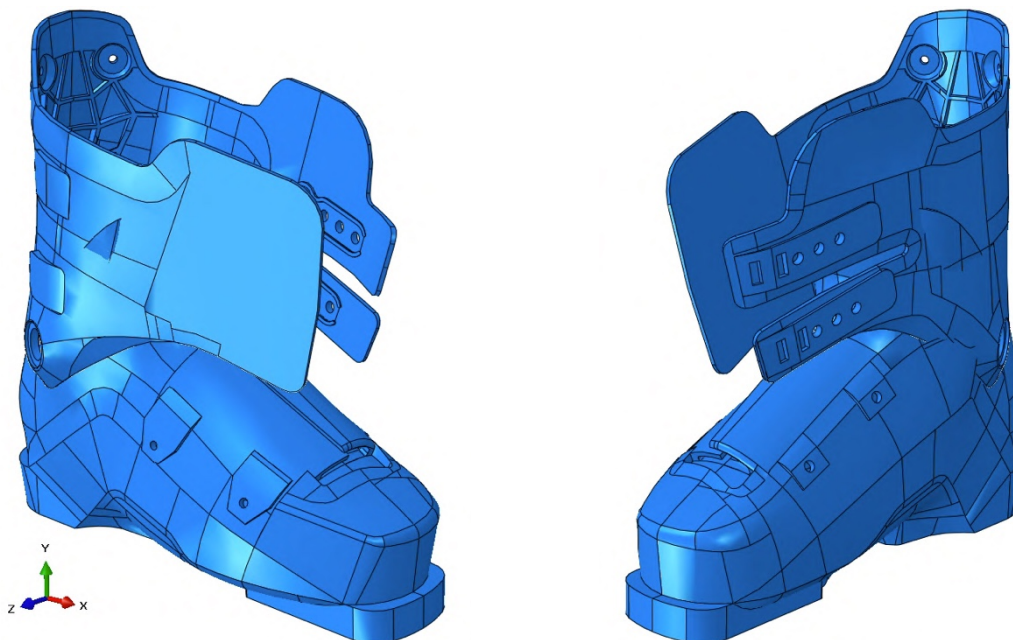


Figura 4-5: Modello assemblato in Abaqus

Si deve ora realizzare la meshatura. Il modello, anche se è stato semplificato, risulta essere complesso. È perciò molto oneroso riuscire a realizzare una mesh strutturata o di tipo quadratico. Si sceglie quindi di utilizzarne una “libera” di tipo tetraedrico. Questa viene realizzata con funzioni di forma di tipo lineare, scelta che permette, a discapito di un po' di precisione, di avere un modello più leggero essendo analisi molto complesse e con una durata di risoluzione molto elevata (Figura 4-6).

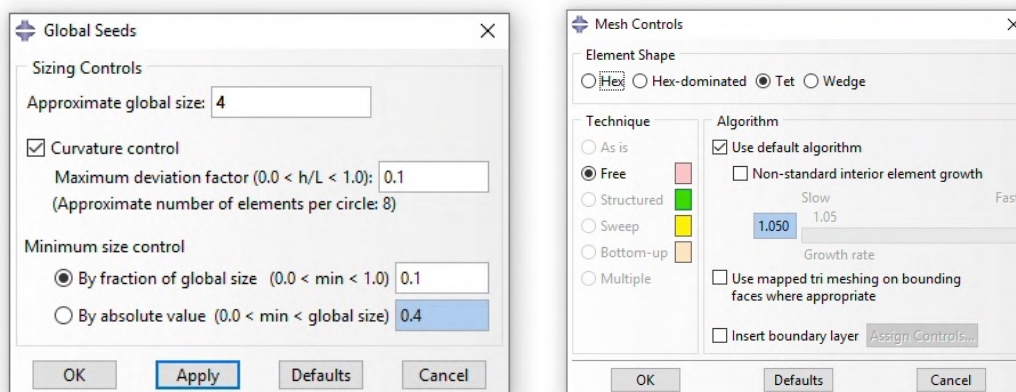


Figura 4-6: Caratteristiche iniziali per la creazione della mesh

Una volta impostata quindi il tipo di mesh e la sua dimensione (si assume una dimensione approssimata di 4 mm di lato) si ottiene il modello visibile nella *Figura 4-7*.

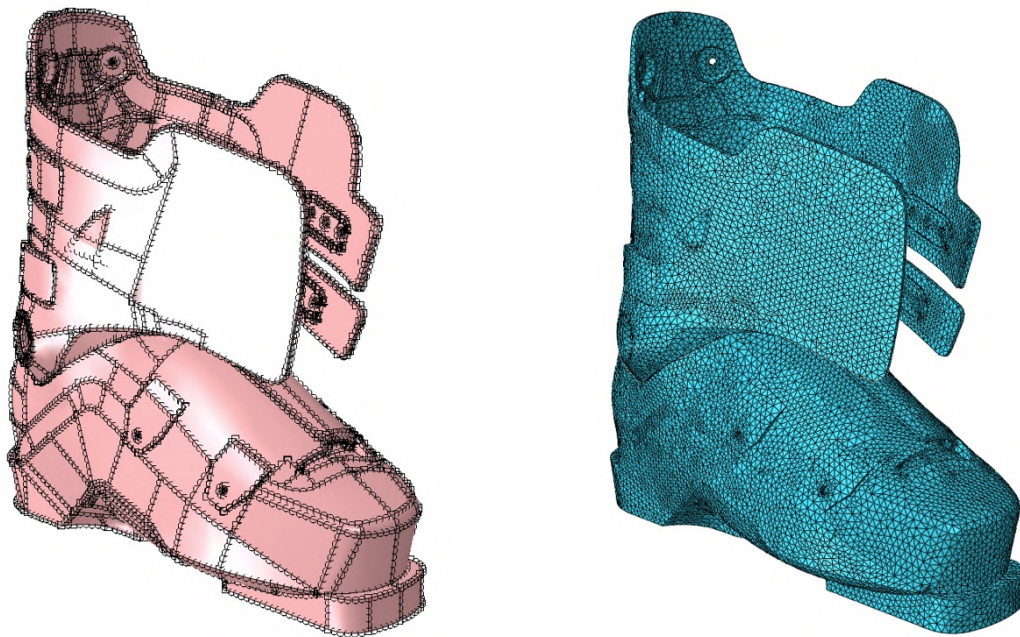


Figura 4-7: Realizzazione della meshatura del modello

Come detto si sceglie di usare elementi tetraedrici a 4 nodi, quindi con funzioni di forma lineari come si può vedere nella *Figura 4-8*.

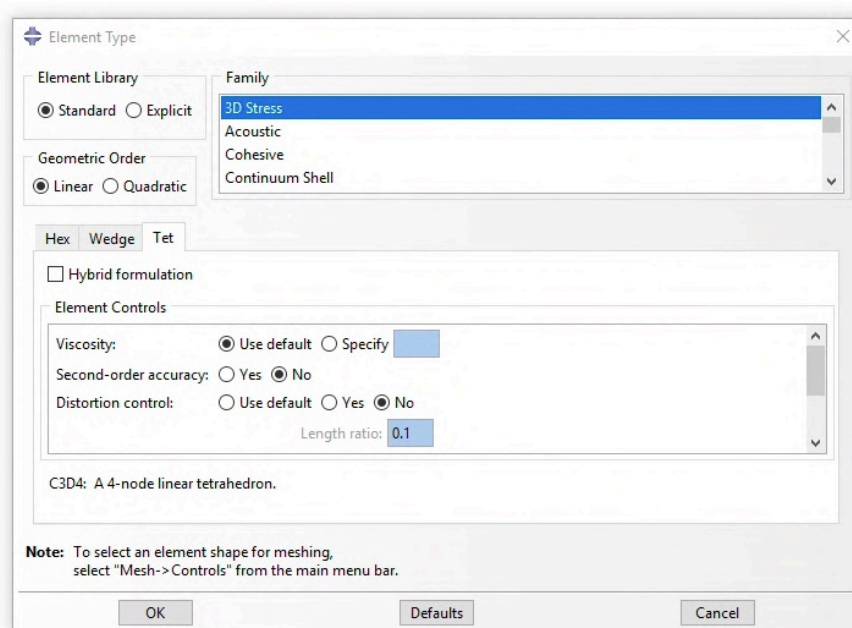


Figura 4-8: Caratteristiche della mesh

Altra cosa visibile in *Figura 4-8* è che, per questa prima fase, si è scelto di togliere il controllo automatico di distorsione della mesh, scelta che permette di avere una convergenza migliore.

Questo va a discapito della precisione dei risultati del modello, ma, in questo momento, come spiegato, l'unico obiettivo è quello di arrivare alla configurazione di scarpone chiuso.

4.2.2.3 Superfici e tipo di contatto – Fase 1

È necessario, ora, individuare le superfici cosiddette di contatto descritte precedentemente, alle quali, successivamente, vengono attribuite le caratteristiche di superficie master e superficie slave.

Vengono quindi realizzate delle superfici apposite in tutte le aree in cui ci si aspetta di avere un contatto fra le varie facce dello scarpone durante la fase di chiusura dello stesso. Per la precisione vengono identificate le seguenti superfici:

- Superfici di contatto fra Gambetto e Scafo:

Le superfici di contatto fra gambetto e scafo sono suddivise in tre differenti parti (visibili nelle *Figure 4-9, 4-10, 4-11, 4-12*).

Questo viene fatto in quanto le proprietà relative al tipo di contatto sono differenti. È necessario quindi distinguerle anticipatamente.

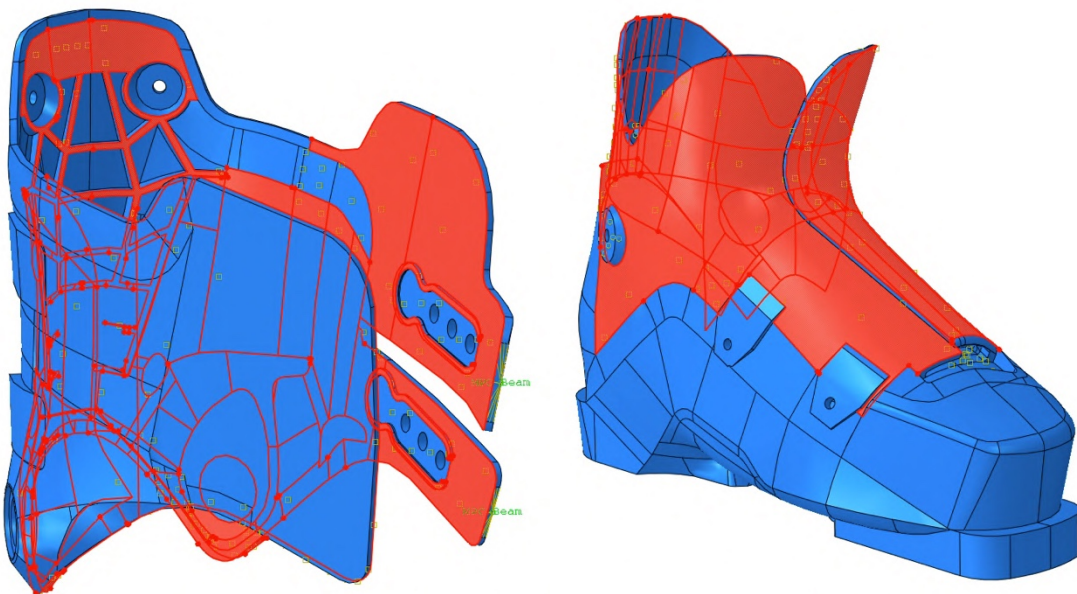


Figura 4-9: Superfici di contatto generali fra gambetto e scafo vista sinistra

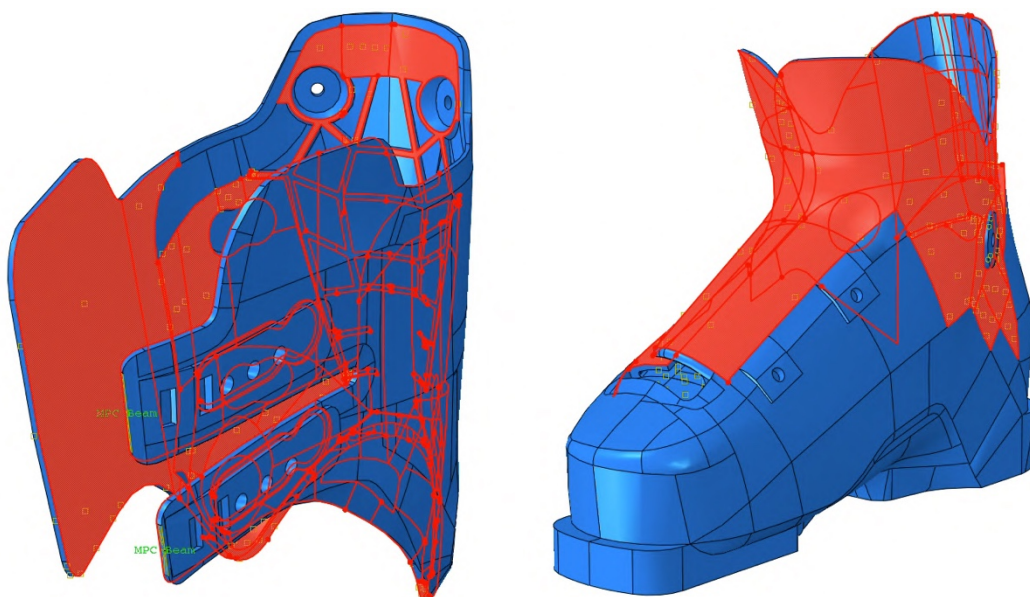


Figura 4-10: *Superfici di contatto generali fra gambetto e scafo vista destra*

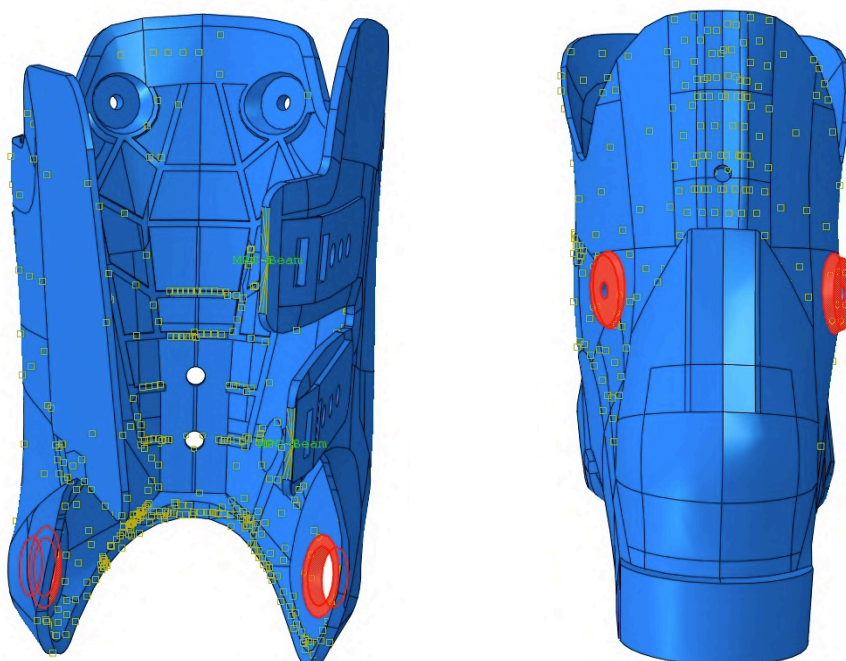


Figura 4-11: *Superfici di contatto specifiche fra gambetto e scafo nella zona relativa alle borchie*

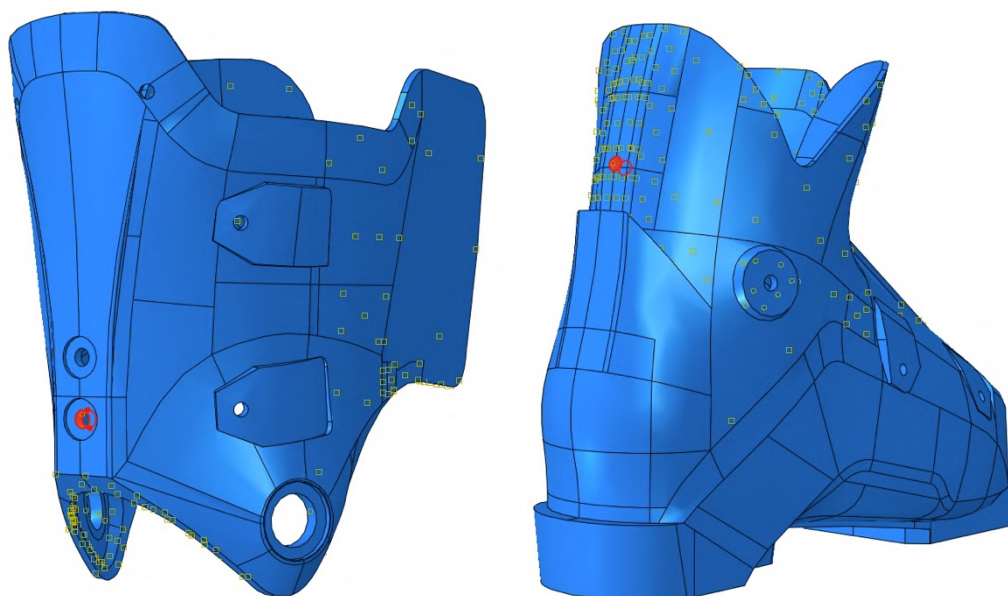


Figura 4-12: *Superfici di contatto specifiche fra scafo e gambetto relative alla vite di fissaggio*

- Superfici di contatto fra Gambetto e Gambetto (*Figura 4-13*):

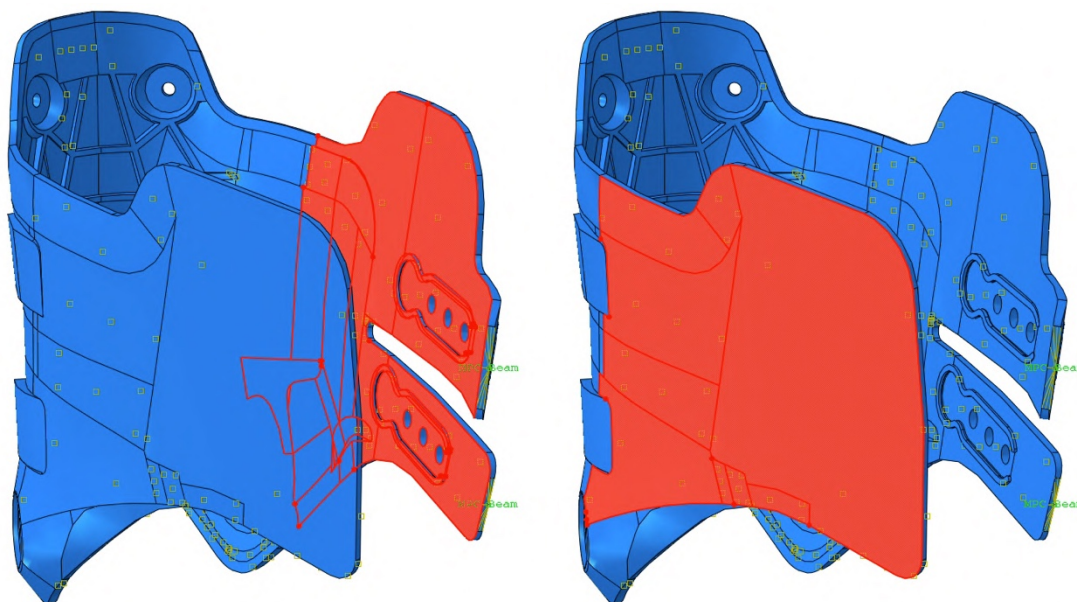


Figura 4-13: *Superfici di contatto fra i due lembi del gambetto*

- Superfici di contatto fra Scafo e Scafo:

(Figura 4-14 a pagina successiva)

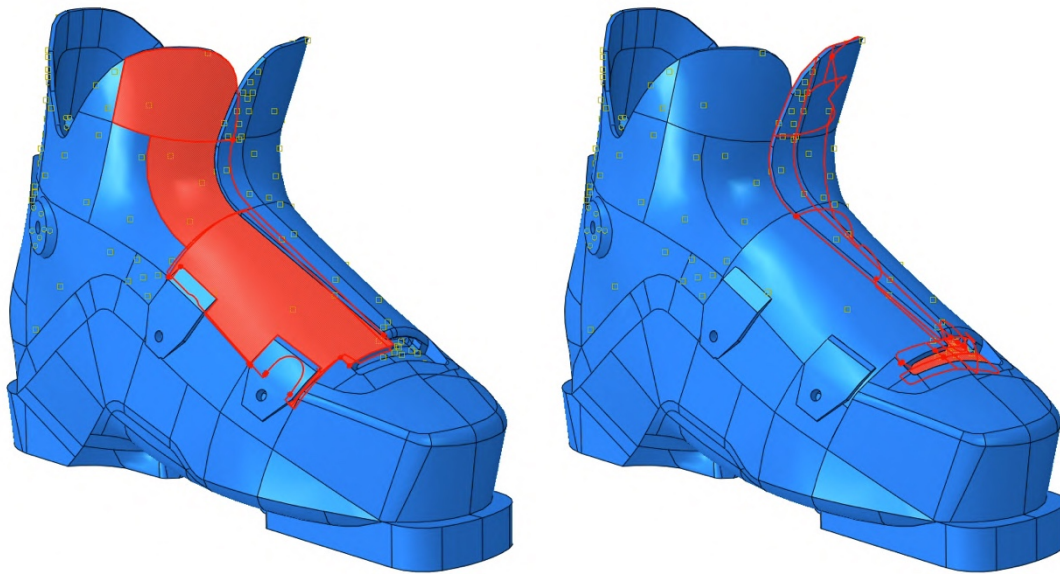


Figura 4-14: Superfici di contatto fra i due lembi dello scafo

Si definisce ora il tipo di interazione/contatto che si vuole creare.

Per il tipo di applicazione da eseguire è possibile trascurare la componente di attrito, si opta quindi per un contatto normale (Normal Behavior) di tipo “Hard” Contact.

Il software, a questo punto, permette di scegliere quale metodo di risoluzione utilizzare. Di default viene utilizzato il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, il quale, però, aumenta le incognite del sistema e quindi anche i tempi di analisi.

Si sceglie perciò il metodo Penalty il quale, come spiegato al §2.1.3.1, non aumenta il numero di incognite del sistema, e quindi rende l’analisi più veloce, ma permette una piccola compenetrazione fra i solidi (in rapporto alla rigidità della molla fittizia, che, in questo caso, viene calcolata in automatico dal software).

In questo caso, tale metodo, è adeguato allo scopo e permette di risolvere l’analisi in tempi più veloci senza perdere di affidabilità.

Si procede ora con la creazione delle interazioni fra le differenti superfici create precedentemente.

Come anticipatamente accennato le superfici sono state separate in base al tipo di contatto che si deve applicare. Per la precisione vengono scelte due interazioni differenti: Surface to Surface e Tie Constrain. Questo viene fatto in base al tipo di contatto e vincolo che deve esserci fra le superfici. Le prime sono utilizzate per il contatto che si deve generare lungo l’evoluzione dell’analisi (quelle parti cioè che quando entrano in contatto fra loro non possono compenetrare ma possono scorrere l’una sull’altra); le seconde invece, sono quelle parti che, già dalla prima iterazione, sono in contatto e che, lungo tutto il processo evolutivo dell’analisi, sono vincolate fra loro.

1) Contatto di tipo Tie Constrain

Per quanto riguarda le borchie e la vite posteriore, come si può vedere in *Figura 4-15*, viene creato un contatto di tipo Tie Constrain: il cosiddetto contatto vincolato. Questo tipo di interazione fra le superfici, infatti, simula in maniera adeguata la presenza, nella realtà, delle viti di serraggio. Vincola cioè le superfici fra loro andando a togliere possibili labilità del sistema.

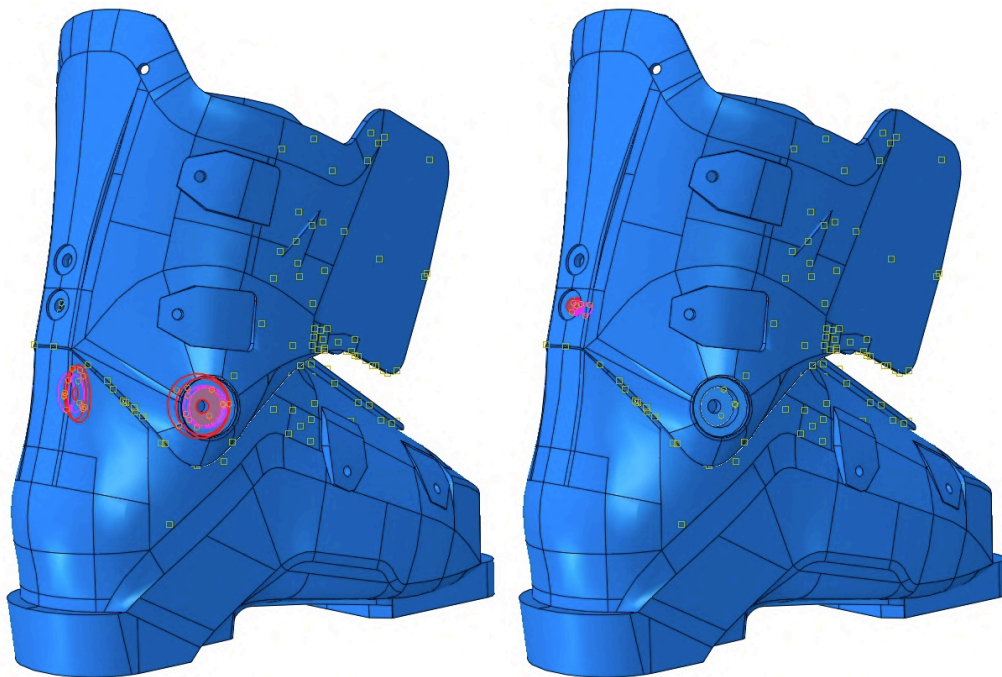


Figura 4-15: Identificazione del contatto di tipo Tie Constrain

2) Contatto di tipo Surface to Surface

Per tutte le altre superfici anticipatamente create, si definisce invece, un contatto di tipo “Surface to Surface (standard)”. Questo tipo di interazione è di tipo normale e permetterà alle superfici di non compenetrare fra loro utilizzando come soluzione il metodo di tipo Penalty già definito. Essendo tutte superfici discretizzate allo stesso modo, in questa applicazione, non serve prestare particolare attenzione a quale fra le due risulti essere la superficie master e quale invece la superficie slave. In caso contrario, come già spiegato al §2.1.5, sarebbe stata buona norma identificare come superficie slave quella più discretizzata in modo da avere un numero maggiore di nodi per creare le coppie di contatto. Si generano quindi tre interazioni differenti, una per quanto riguarda il contatto fra lo scafo ed il gambetto (*Figura 4-16*), una per il contatto fra gambetto-gambetto (*Figura 4-17 (a)*) ed una fra scafo-scafo (*Figura 4-17 (b)*).

La formulazione per gli scorrimenti scelta è di tipo “Finite Sliding”, cioè a scorrimenti finiti. Ciò indica che le coppie di contatto vengono ricalcolate ad ogni incremento di carico. Questo comporta un onere computazionale maggiore, ma, un approccio differente (“Small Sliding” - scorrimenti infinitesimi, approccio che calcola le coppie di contatto una sola volta ad inizio analisi) non sarebbe stato adeguato per simulare, come in questo caso, spostamenti elevati dei nodi.

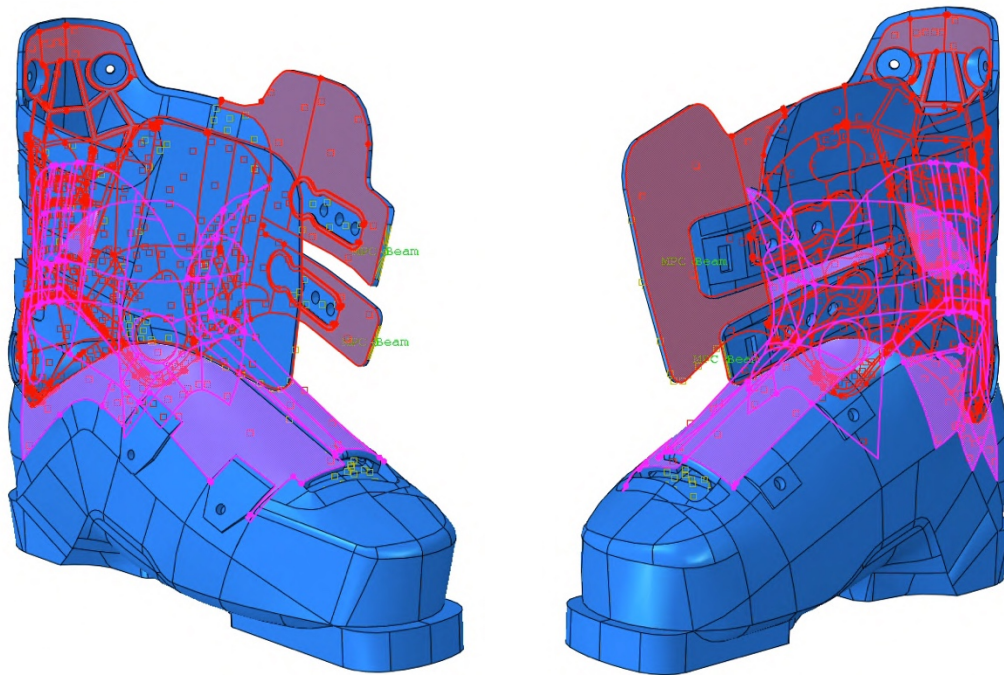


Figura 4-16: Identificazione del contatto di tipo Surface to Surface fra gambetto e scafo

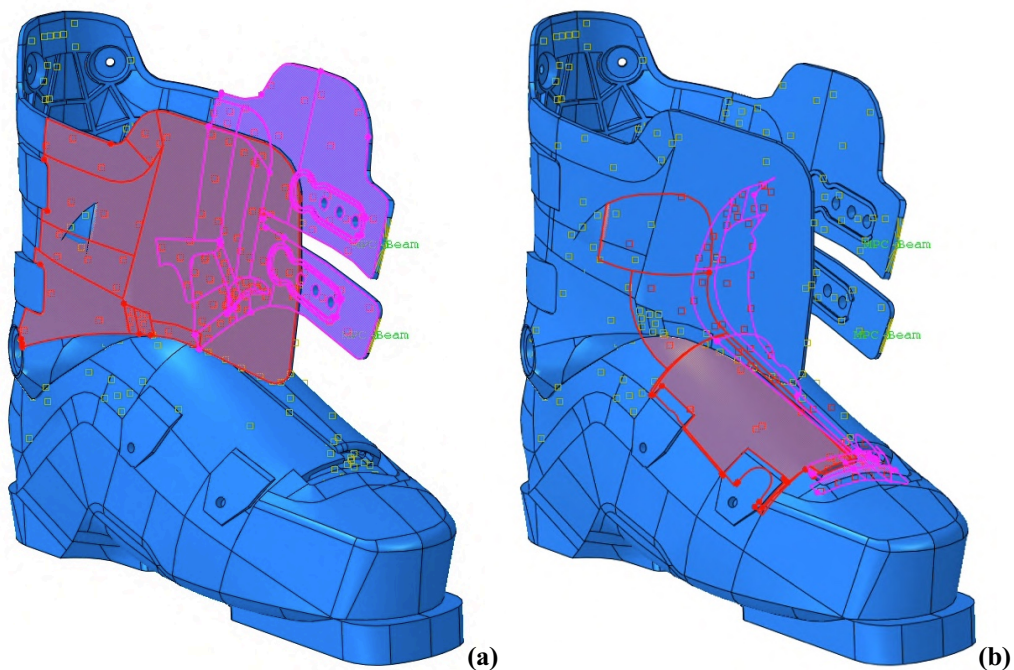


Figura 4-17: Identificazione del contatto di tipo Surface to Surface fra i lembi di scafo e gambetto

4.2.2.4 Condizioni di vincolo (BCs) , Pressioni ed Amplitude – Fase 1

Prima di procedere con la realizzazione delle condizioni al contorno è necessario creare delle superfici ausiliarie aggiuntive. Per la precisione vengono creati dei Multi Point Constrain (MPC) comprendenti le superfici finali dei lembi del gambetto, come si può vedere in *Figura 4-18*:

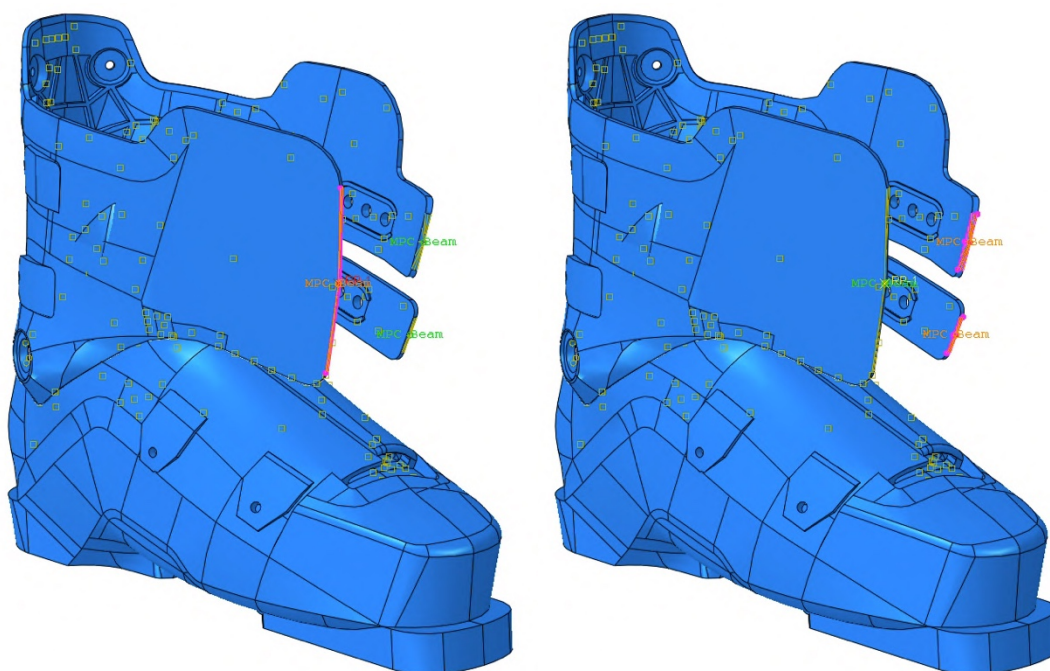


Figura 4-18: Realizzazione dei Multi Point Constrain (MPC) nella zona finale dei lembi del gambetto

I MPC creati sono dei vincoli che permettono di fissare l'intera superficie selezionata con il movimento di un singolo punto.

Ciò consentirà di applicare le condizioni di spostamenti imposti ad il solo MPC agevolando l'operazione di chiusura dello scarpone.

In particolare, per il lembo di destra, i due MPC sono stati creati in maniera separata. Questo infatti ha permesso di chiudere il lembo superiore e quello inferiore in maniera indipendente e quindi avvicinarsi il più possibile alla configurazione reale di chiusura.

Si procede ora ad impostare le condizioni al contorno (cioè fissare dei vincoli al modello) ed i carichi/spostamenti imposti.

Tali condizioni vengono divise, per semplicità, in tre categorie: le condizioni di vincolo (che permettono di togliere le labilità al sistema); gli spostamenti imposti (che permettono di deformare il modello per portarlo alla configurazione finale) e le pressioni (applicate nei punti in cui è necessario deformare in maniera meno significativa).

1) Condizioni di vincolo (Border Conditions – BCs)

Per bloccare lo scarpone si sceglie di vincolarlo alla base. Precisamente sulla superficie inferiore della suola dello scafo, in tutte le direzioni, in modo da togliere ogni possibile labilità al modello (il gambetto, essendo vincolato allo scafo con il vincolo di Tie Constrain risulta essere anch'esso fissato).

I vincoli che vengono applicati sono quindi i seguenti, come si può vedere in *Figura 4-19*:

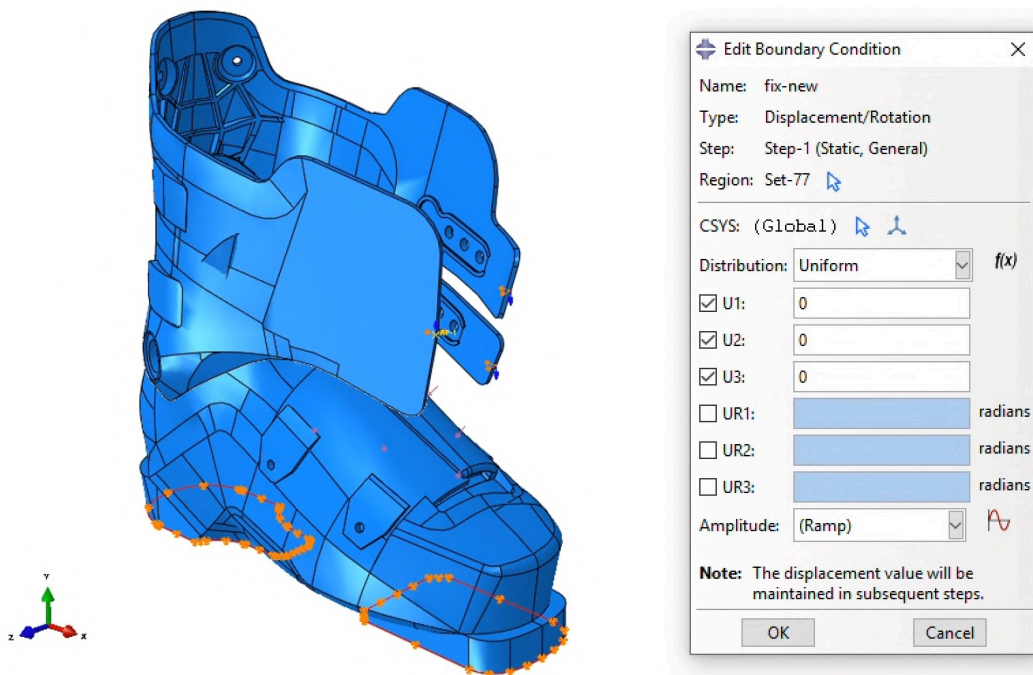


Figura 4-19: Condizioni di vincolo del modello FEM

2) Spostamenti imposti

È necessario ora applicare degli spostamenti imposti in modo da riuscire a chiudere lo scarpone in maniera corretta. Per fare questo come prima cosa, orientativamente, sono state prese delle misure di massima nello scarpone reale in modo tale da identificare come debbano chiudersi i lembi e quale debba essere la loro posizione finale. Si devono quindi applicare delle rotazioni e delle traslazioni ai punti nei quali è stato creato il MPC in modo che ruoti o trasli l'intera faccia vincolata con tale costrizione (*Figure 4-21,4-23,4-25*). Questi spostamenti imposti vengono applicati per quanto riguarda i lembi dello scarpone, i quali, hanno degli spostamenti molto elevati. Per quanto riguarda lo scafo, invece, si sceglie di applicare solamente delle pressioni che vadano a simulare la chiusura data dai ganci.

Tali spostamenti vengono applicati separatamente in due direzioni ed in una rotazione in modo che, successivamente, sia possibile applicare delle funzioni che permettano di scegliere quando attivare tali vincoli lungo l'evoluzione dell'analisi.

Sarà necessario, infatti, chiudere in primo luogo il lembo di sinistra e lo scafo, e solo successivamente il lembo di destra. Dopo opportune valutazioni gli spostamenti e le rotazioni imposte calcolate sono le seguenti (Figura 4-20):

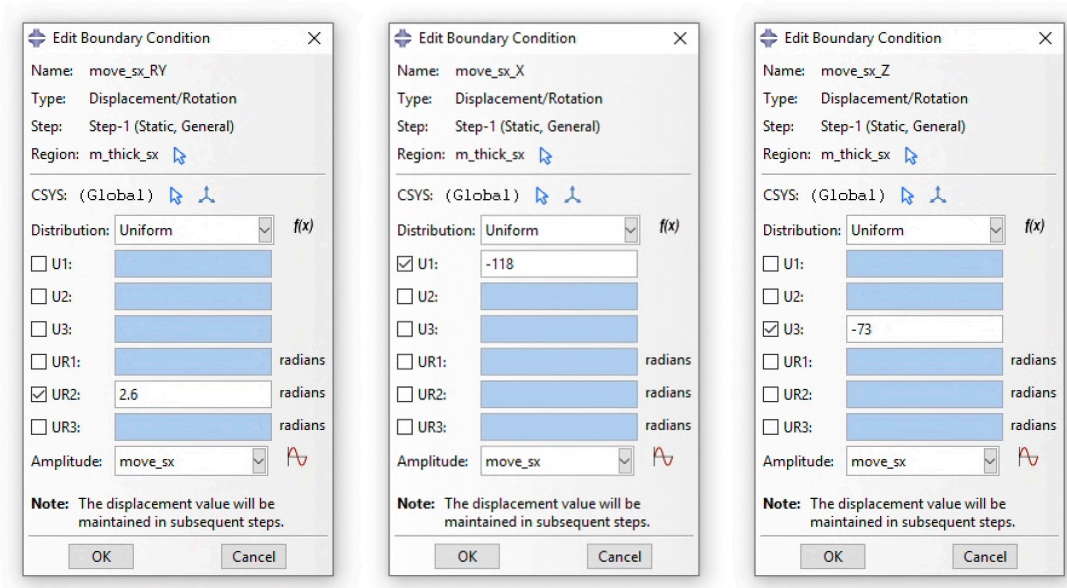


Figura 4-20: Valori spostamenti/rotazioni imposte del lembo di sinistra per la chiusura del gambetto

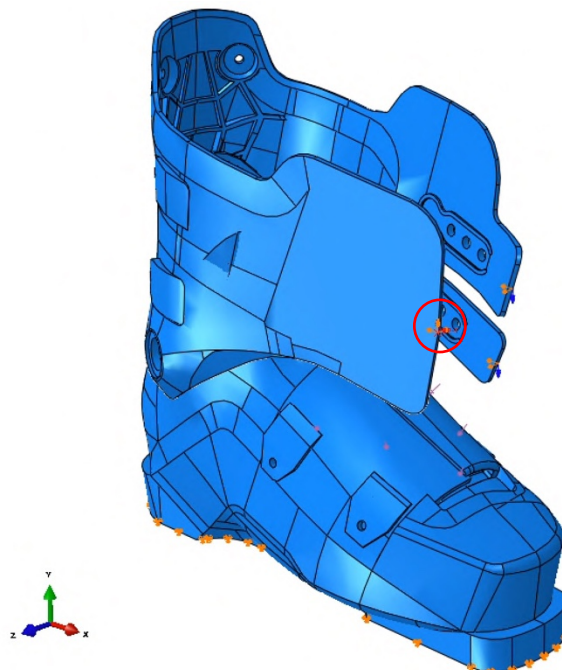


Figura 4-21: Identificazione MPC dove vengono applicati gli spostamenti imposti

Si sono anche divisi gli spostamenti fra il lembo di destra superiore (Figura 4-23) ed inferiore (Figura 4-25). Lo spostamento dei due lembi (Figure 4-22 e 4-24), infatti, è simile ma non uguale, in quanto, questi devono tendere alla posizione dei ganci i quali sono posti a differenti altezze. Oltre a questo è diversa anche la rotazione in quanto l'inclinazione di partenza è differente.

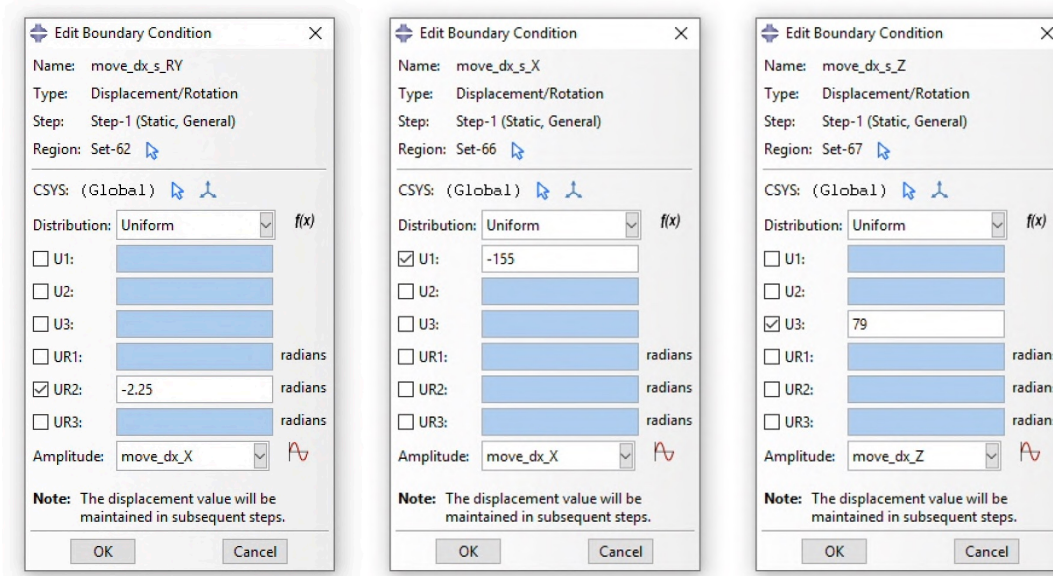


Figura 4-22: Valori spostamenti imposti del lembo di destra superiore per la chiusura del gambetto

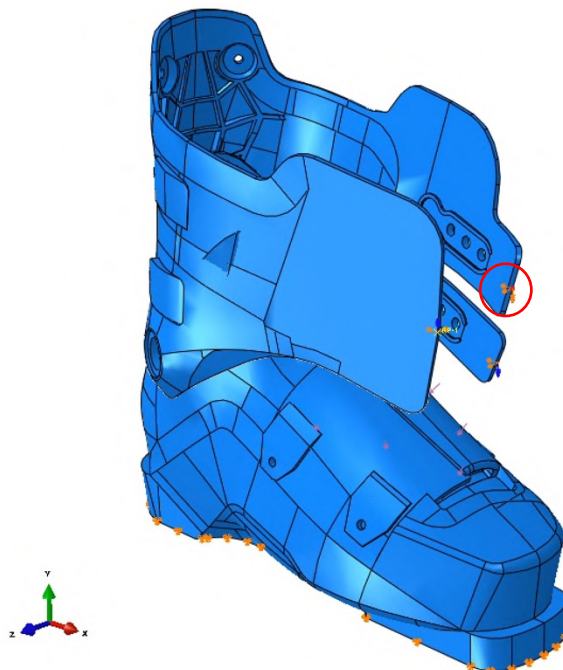


Figura 4-23: Identificazione MPC dove vengono applicati gli spostamenti imposti

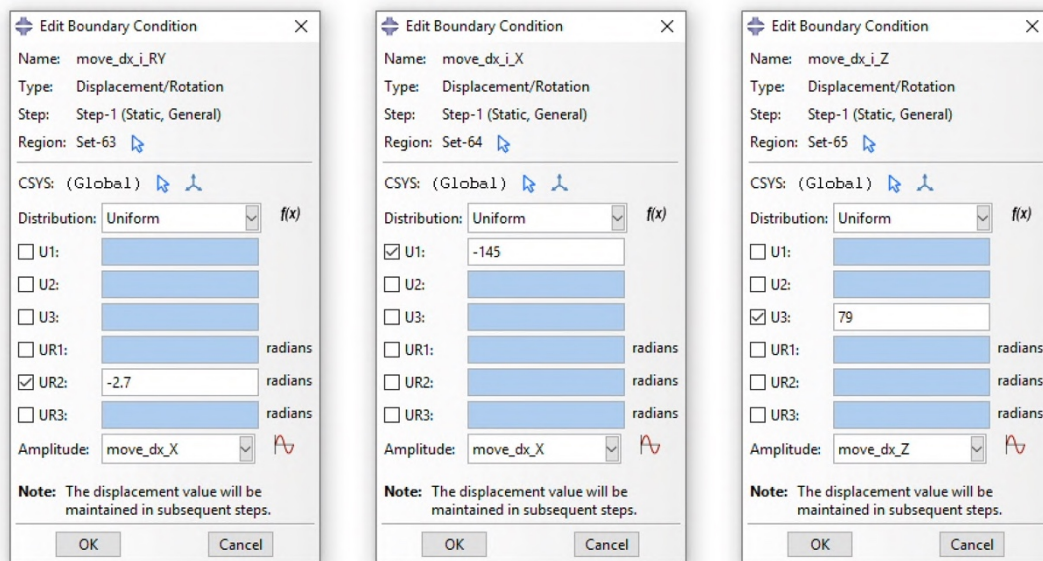


Figura 4-24: Valori spostamenti imposti del lembo di destra inferiore per la chiusura del gambetto

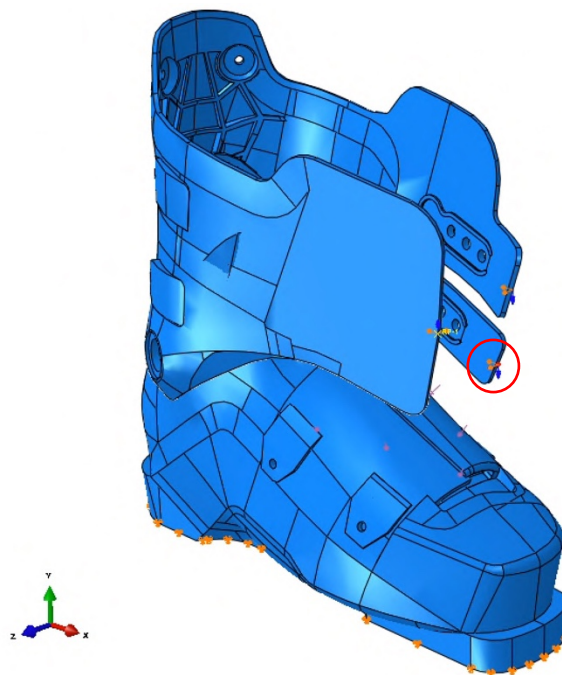


Figura 4-25: Identificazione MPC dove vengono applicati gli spostamenti imposti

Da precisare che gli spostamenti imposti sono stati definiti in millimetri mentre le rotazioni in radianti.

3) Pressioni

Come anticipato, per la chiusura dello scafo, si è scelto di applicare delle pressioni. Queste sono state generate sulle facce nelle quali i ganci esercitano delle forze ed

hanno una intensità indicativa (0,02 MPa e 0,07 MPa) la quale è stata successivamente calibrata grazie alle amplitudine di cui si parlerà a pagina seguente (calibrazione avvenuta tramite tentativi). In particolare per la corretta chiusura dello scafo sono state applicate le seguenti pressioni visibili in *Figura 4-26*.

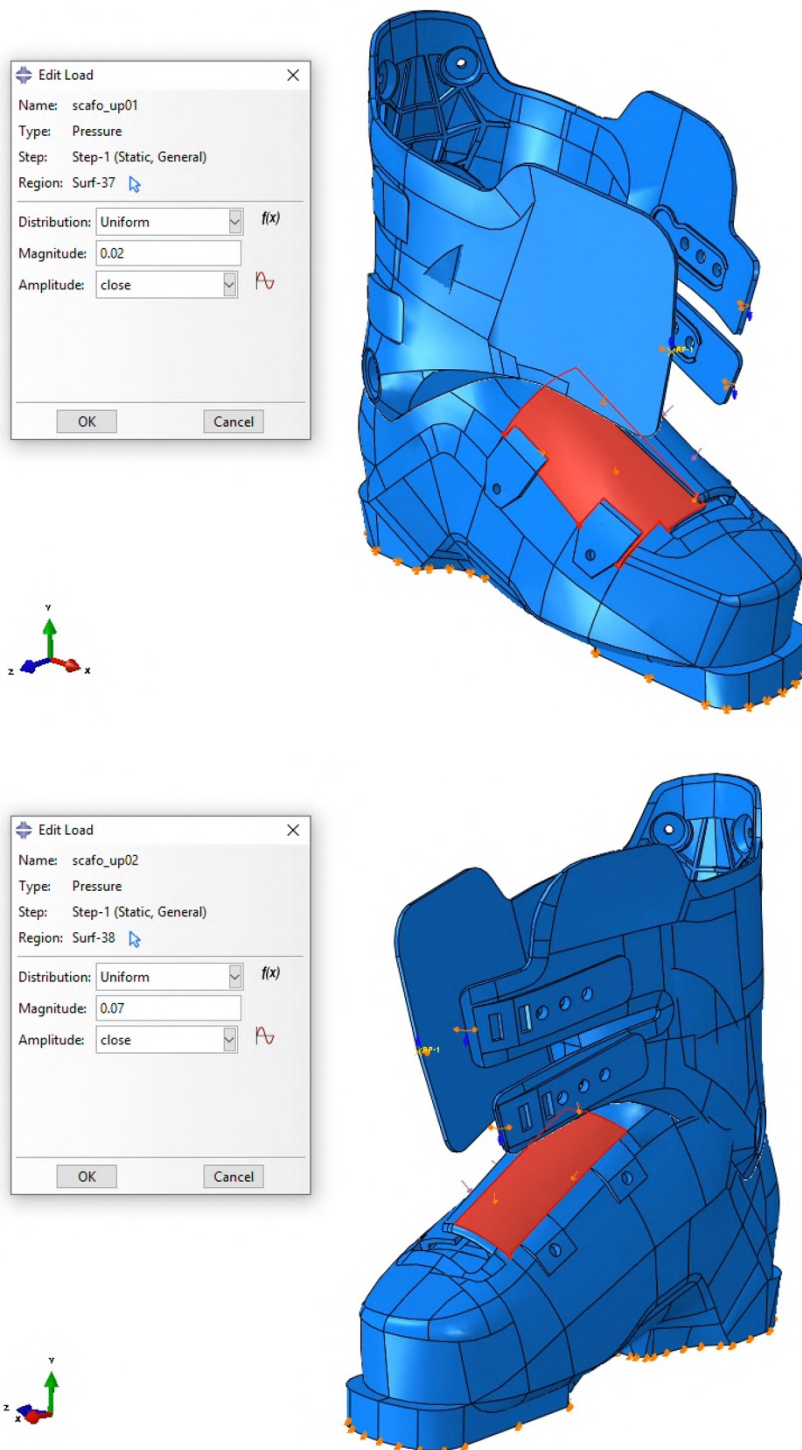


Figura 4-26: Valori e zone di applicazione delle pressioni per la chiusura dello scafo

A questo punto, è necessario definire delle Amplitude: funzioni che permettono di regolare le condizioni di vicolo appena create. Queste funzioni sono necessarie, quando, come in questo caso, gli spostamenti o le pressioni imposte devono cambiare lungo il processo evolutivo dell'analisi. Permettono quindi di regolare a piacimento i vincoli imposti all'interno di uno stesso step di carico. Lo stesso procedimento si sarebbe potuto ottenere realizzando vari step di carico e modificando le stesse condizioni di vincolo. Ciò sarebbe stato però un processo più complesso e avrebbe comportato un onere computazionale maggiore. Sono state create perciò quattro differenti Amplitude per assolvere alle funzioni richieste. Per la precisione hanno i seguenti andamenti:

1) Chiusura dello scafo

Lo scafo risulta essere la parte che, insieme ad il lembo di sinistra, si deve chiudere nella prima metà dello step. Sarà necessario creare quindi una amplitude che permetta tale chiusura. In particolare ha un andamento non lineare visibile in *Figura 4-27*.

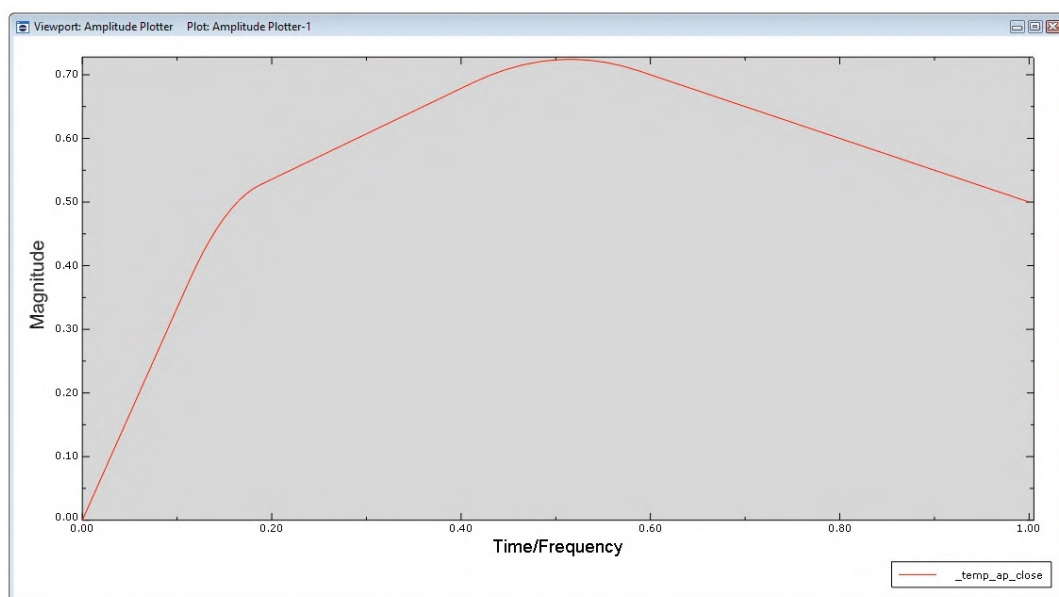


Figura 4-27: Andamento amplitude "chiusura dello scafo"

I valori precisi sono invece i seguenti (*Figura 4-28*):

	Time/Frequency	Amplitude
1	0	0
2	0.15	0.5
3	0.5	0.75
4	1	0.5

Figura 4-28: Valori amplitude "chiusura dello scafo"

L'andamento risulta essere non lineare in quanto: per la prima parte dell'analisi lo scafo deve chiudersi più velocemente (per permettere la chiusura del lembo di sinistra ed una non eccessiva compenetrazione fra le parti); successivamente prosegue con un andamento di chiusura minore (fino a completa chiusura della parte sinistra del gambetto) ed infine deve aprirsi leggermente in modo da riportare in contatto/pressione lo scafo ed il lembo appena chiuso.

Va specificato che, ogni collegamento fra i tratti lineari delle funzioni, viene raccordato in maniera automatica dal programma in modo da non avere discontinuità.

2) Movimento lembo di sinistra

Tale parte ha una funzione con il seguente andamento visibile in *Figura 4-29*.

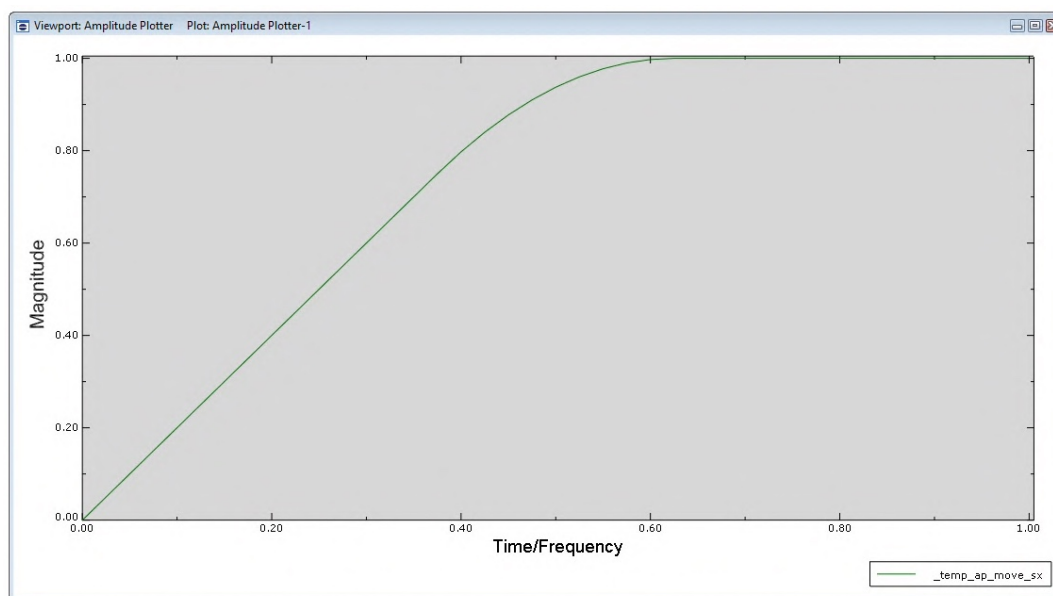


Figura 4-29: Andamento amplitudine “movimento lembo di sinistra”

Ed i seguenti valori (*Figura 4-30*):

	Time/Frequency	Amplitude
1	0	0
2	0.5	1
3	1	1

Figura 4-30: Valori amplitudine “movimento lembo di sinistra”

Questa componente ha una funzione più semplice rispetto alla precedente. Deve, infatti, essere solamente portata a chiusura quando l'analisi risulta essere completa al 50% in modo da permettere il successivo movimento del lembo di destra.

Il lembo di destra, invece, necessita di due differenti amplitude, una per regolare gli spostamenti in direzione X e la rotazione attorno ad Y ed una per gli spostamenti in direzione Z. Questo viene fatto per semplificare l'analisi in modo da poter controllare tali spostamenti/rotazioni in maniera differente avendo necessità, in primo luogo, di spostare il lembo in direzione Z e successivamente di ruotarlo e spostarlo in direzione X.

3) Movimento lembo di destra in direzione Z

Tale amplitude ha il seguente andamento visibile in *Figura 4-31*.

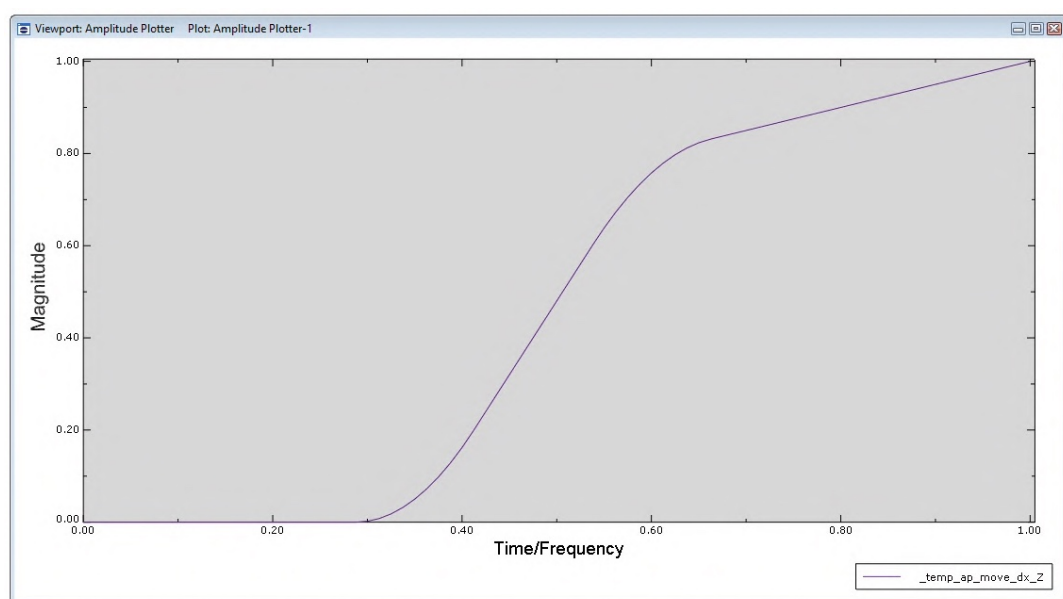


Figura 4-31: Andamento amplitude “movimento lembo di destra in direzione Z”

Con i seguenti valori (*Figura 4-32*):

	Time/Frequency	Amplitude
1	0	0
2	0.35	0
3	0.6	0.8
4	1	1

Figura 4-32: Valori amplitude “movimento lembo di destra in direzione Z”

Questa funzione permette al lembo di sinistra di spostarsi in direzione Z più velocemente nella prima metà della seconda parte dell'analisi e più lentamente nella seconda metà. Facendo in questo modo, si agevola la chiusura prima del lembo di sinistra ma, contemporaneamente, si inizia a chiudere anche la parte di destra, in modo da non avere compenetrazioni fra i due lembi.

4) Movimento lembo di destra in direzione X e rotazione attorno ad Y

Tale amplitude ha il seguente andamento ed i seguenti valori (Figura 4-33 e 4-34).

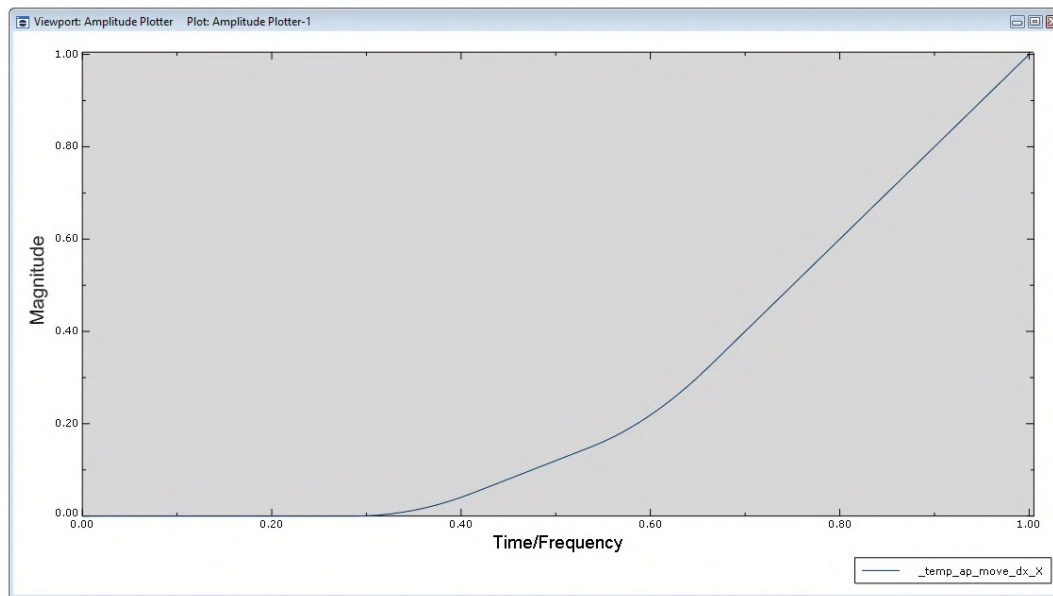


Figura 4-33: Andamento amplitude “movimento lembo di destra in direzione X e rotazione attorno a Y”

	Time/Frequency	Amplitude
1	0	0
2	0.35	0
3	0.6	0.2
4	1	1

Figura 4-34: Valori amplitude “movimento lembo di destra in direzione X e rotazione attorno a Y”

Questa funzione permette al lembo di sinistra di spostarsi in direzione X e ruotare attorno a Y, più lentamente nella prima metà della seconda parte dell’analisi e più velocemente nella seconda metà.

Si applicano ora le amplitude appena create ai relativi spostamenti imposti ed alle pressioni in modo da definire l’ordine di chiusura delle varie componenti dello scarpone. In particolare nella prima metà della analisi si vuole, come accennato precedentemente, chiudere il lembo di sinistra dello scarpone e contemporaneamente chiudere anche lo scafo (si applicheranno agli spostamenti precedentemente imposti, quindi, le prime due funzioni create). Nella seconda parte dell’analisi, invece, quando il primo lembo risulta essere chiuso, si realizza la chiusura del secondo lembo e l’assestamento dello scafo (si arriva quindi alla configurazione finale dello scarpone chiuso, applicando le ultime due funzioni appena identificate agli spostamenti precedentemente creati).

In questa fase si accettano delle eventuali compenetrazioni lungo il processo evolutivo dell'analisi. L'importante è invece che, una volta conclusa l'analisi, tutte le parti siano in posizione corretta e non ci siano compenetrazioni.

A questo punto il modello risulta essere completo, manca solamente la creazione degli step di carico e di alcune modifiche nei parametri generali del solutore.

4.2.2.5 Step di carico e tolleranze – Fase 1

Si definiscono, ora, gli step di carico cioè quelli intervalli temporali che permettono al programma applicare il carico/ gli spostamenti imposti, gradualmente, in modo da rendere agevole la risoluzione dell'analisi.

Per risolvere l'analisi, come prima cosa, bisogna impostare il solutore in maniera tale da permettergli di risolvere problematiche con non linearità per geometria. Per fare questo è necessario spuntare “On” in “Nlgeom”, come si vede in *Figura 4-35*.

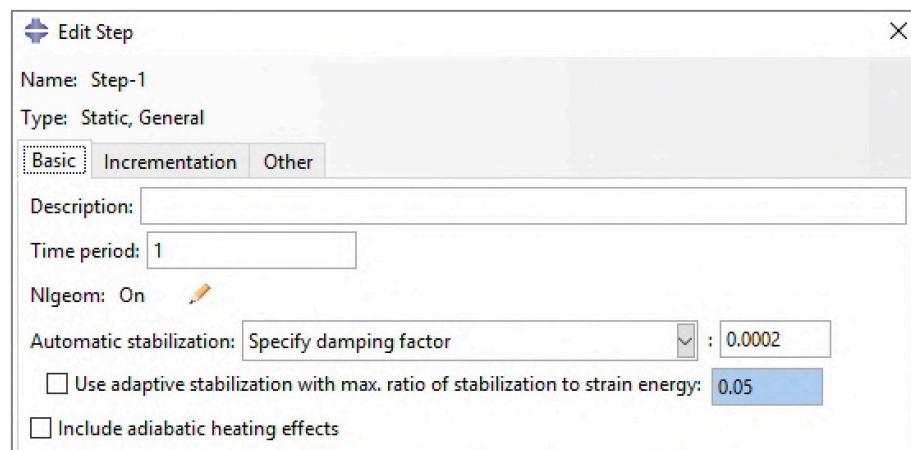


Figura 4-35: Attivazione solutore analisi con non linearità per geometria

Attivare questa spunta permette al solutore di utilizzare come metodo di risoluzione l'Update Lagrangian formulation (illustrata al §2.2.3) grazie alla quale, è possibile risolvere analisi con non linearità per geometria. Oltre a questo è necessario migliorare la convergenza tramite uno stabilizzatore. Per la precisione si utilizza la stabilizzazione automatica tramite “Specify damping factor” (seconda casella di selezione). Grazie a questa, l'analisi, andrà a convergenza in maniera migliore. Si perderà però un po' di correttezza dei risultati finali in termini di tensioni e reazioni vincolari. Questo tipo di stabilizzazioni, infatti, permettono al modello di andare a convergenza più facilmente inserendo all'interno dell'equilibrio delle forze interne ed esterne, delle forze viscosive, le quali permettono di avere l'uguaglianza in maniera più semplice. I problemi statici non lineari, infatti, possono essere instabili. Abaqus fornisce quindi un meccanismo automatico per stabilizzare questo tipo di problemi attraverso l'aggiunta automatica di uno smorzamento proporzionale al volume del modello.

I fattori di smorzamento applicati possono essere costanti per tutta la durata dell'analisi, oppure, possono variare nel tempo per tener conto di eventuali cambiamenti lungo l'evoluzione dell'analisi stessa [8]. Questo secondo approccio è detto adattivo e può essere attivato applicando la spunta nell'immagine precedente. In questo caso è stato scelto di mantenerlo costante. Per realizzare questo tipo di stabilizzazione, come detto, vengono quindi aggiunte delle forze viscosi che hanno la seguente forma:

$$F_v = cM^*v$$

Nell'equilibrio globale del sistema:

$$P - I - F_v = 0$$

Dove M^* è una matrice di massa artificiale calcolata con densità unitaria, c è il fattore di smorzamento (che può essere costante o adattivo), $v = \Delta u / \Delta t$ è il vettore delle velocità nodali e Δt è l'incremento di tempo.

Con il tipo di stabilizzazione applicata, quindi, si applica lo smorzamento scelto già dal primo incremento in modo da migliorare la convergenza dell'analisi.

Si identificano a questo punto gli incrementi di carico massimi e minimi (Figura 4-36).

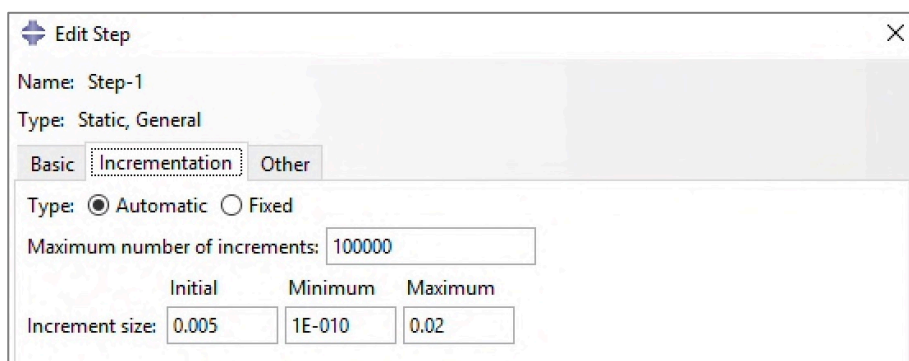


Figura 4-36: Incremento di carico iniziale, massimo e minimo e numero massimo di incrementi

Tali incrementi sono quindi pari a 0,005, cioè sono necessari 200 step per arrivare al 100% dell'analisi, con un incremento massimo di 0,02. Il massimo permette, qual ora gli step precedenti con incremento 0,005 vadano a convergenza, di aumentarli in modo da diminuire il tempo necessario per arrivare al 100% dell'analisi.

Come incremento minimo, invece, viene scelto 1×10^{-10} il quale rappresenta il minimo valore possibile sotto il quale l'analisi si blocca.

Infine si impone un numero massimo di interazioni possibili pari a 100'000.

Oltre a questo sono stati modificati alcuni parametri del solutore visibili in Figura 4-37.

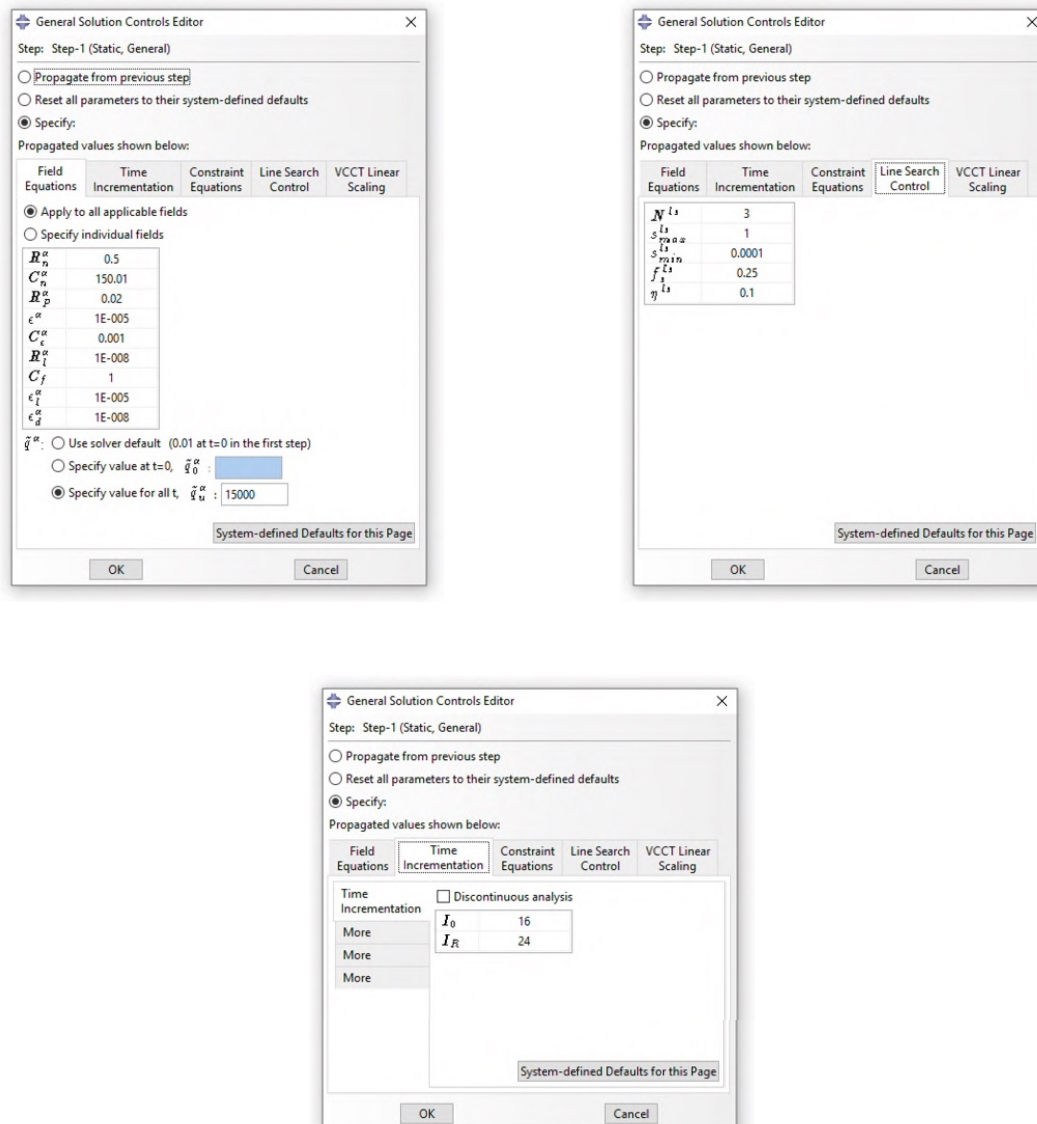


Figura 4-37: Modifiche dei parametri del solutore

I parametri modificati sono i seguenti:

- R_n^α = Criterio di convergenza definito dal rapporto fra il residuo maggiore e la norma del corrispondente flusso medio. Questo valore viene portato da un valore di default pari a 0,005 a 0,5. Ciò sacrifica una certa precisione a favore della velocità di calcolo;
- C_n^α = Criterio di convergenza definito dal rapporto tra la correzione della soluzione più grande e il valore della soluzione incrementale corrispondente più grande. Alcune analisi, come questa, non richiedono tale accuratezza è quindi possibile aumentare tale valore (da 0,01 si assume perciò 150,01);

- \tilde{q}^α = È il valore del flusso medio utilizzato da Abaqus per il controllo dei residui. Il valore di default è calcolato da Abaqus e definisce il flusso medio temporale [8], tuttavia come in questo caso, può essere definito un valore costante il quale verrà mantenuto per tutto lo step (in questo caso, sempre a favore della velocità dell'analisi ma a discapito della precisione si utilizza un valore molto elevato di 15'000);
- N^{ls} = Valore che identifica il "Line search algorithm". In problemi fortemente non lineari, infatti, gli algoritmi di Newton usati in Abaqus possono talvolta divergere durante l'iterazione dell'equilibrio. Tale algoritmo rileva queste situazioni automaticamente e applica un fattore di scala alla correzione della soluzione calcolata, il che aiuta a prevenire divergenze. Per attivare quindi tale procedura di ricerca è necessario impostare tale parametro con un valore compreso fra 1 e 5 (di default è impostato in 0 quindi l'algoritmo non è attivo), in questo caso si imposta un valore pari a 3;
- I_0 = Numero di iterazioni di equilibrio (senza discontinuità gravi) dopo le quali si controlla se i residui aumentano in due iterazioni consecutive (dopo tali iterazioni si passa ad un sotto step successivo). Tale valore viene aumentato da 8 a 16;
- I_R = Numero di iterazioni di equilibrio successive (senza discontinuità gravi) dopo le quali si verifica la convergenza logaritmica. Tale valore viene aumentato da 10 a 24.

4.2.3 Chiusura dello scarpone

A questo punto il modello risulta essere completo e calibrato nella giusta maniera non resta che svolgere l'analisi. Per la precisione per tale analisi sono stati necessari 117 step ed un tempo di circa 2 ore e 30 minuti ed uno smorzatore pari a 0,0002 (Figura 4-38).

STEP	INC	ATT	SEVERE DISCON ITERS	EQUIL ITERS	TOTAL ITERS	TOTAL TIME/FREQ	STEP TIME/LPF	INC OF TIME/LPF
1	113	1	5	1	6	0.982	0.982	0.008553
1	114	1U	5	1	6	0.982	0.982	0.01283
1	114	2	4	0	4	0.985	0.985	0.003207
1	115	1	5	1	6	0.990	0.990	0.004811
1	116	1	4	2	6	0.997	0.997	0.007216
1	117	1	3	1	4	1.00	1.00	0.002812

THE ANALYSIS HAS COMPLETED SUCCESSFULLY

Figura 4-38: Numero di incrementi di carico necessari per completare l'analisi di Fase 1

Il modello durante il processo evolutivo dell'analisi si presenta come segue nelle *Figure 4-39,4-40,4-41*.

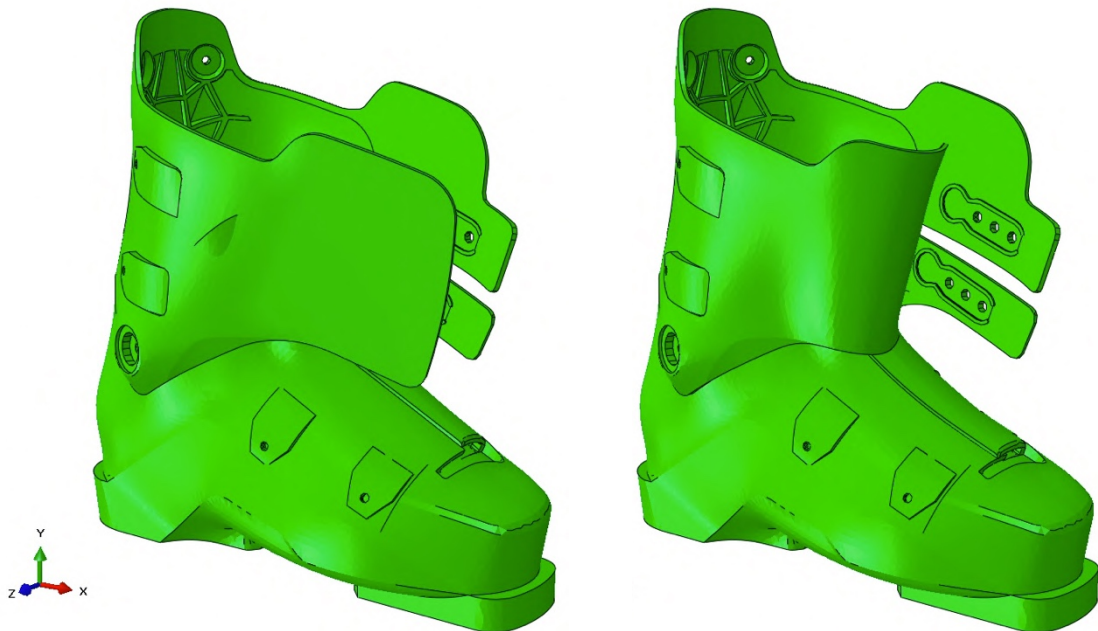


Figura 4-39: *Chiusura progressiva del primo lembo (di sinistra)*

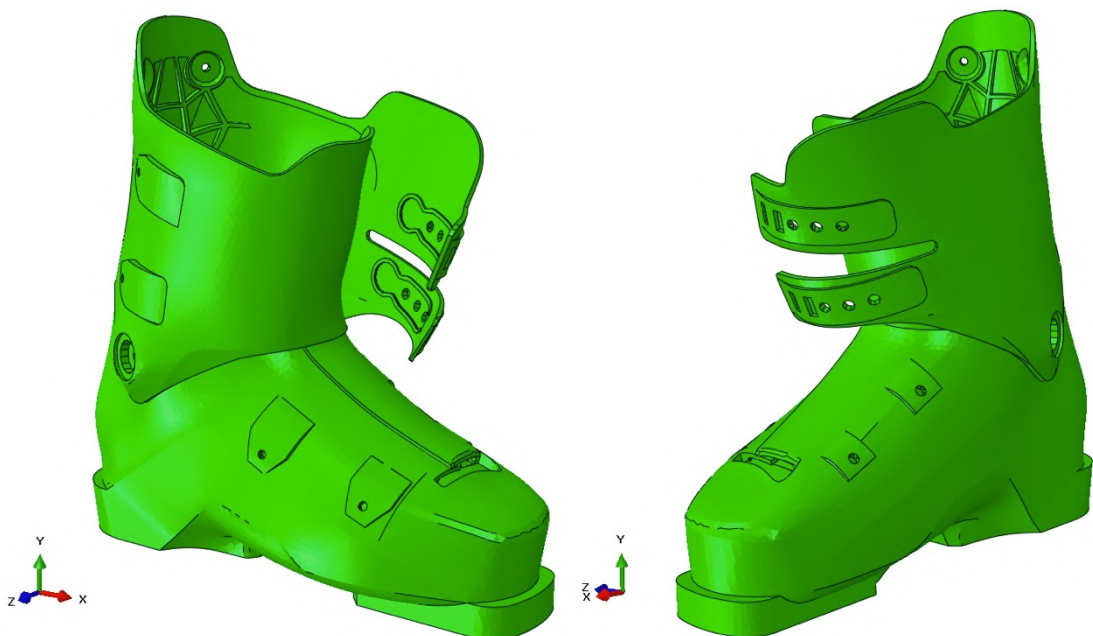


Figura 4-40: *Chiusura completa del lembo di sinistra ed inizio chiusura progressiva del secondo lembo (di destra)*

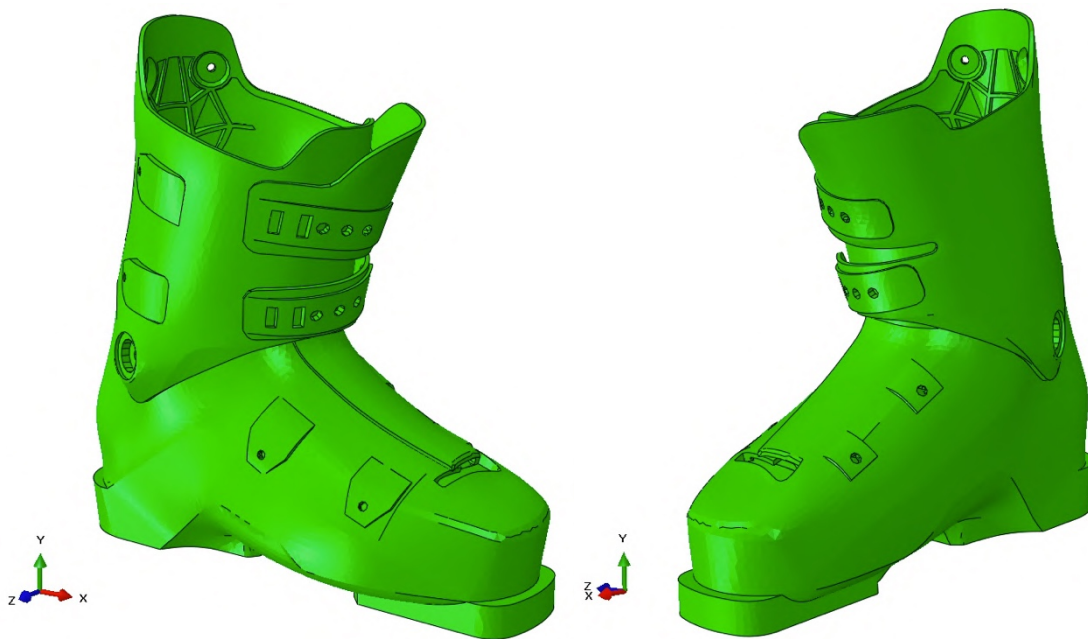


Figura 4-41: Chiusura progressiva del secondo lembo (di destra)

Completata la chiusura (quindi a fine *Fase 1*), invece, si prospetta come visibile in (*Figura 4-42*).

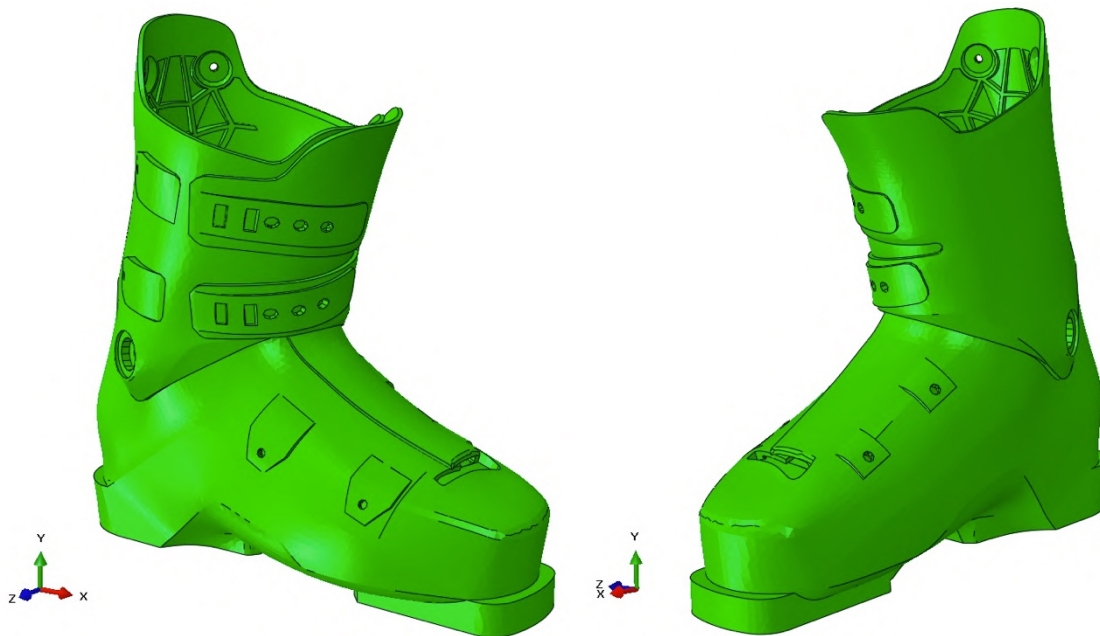


Figura 4-42: Modello chiuso di fine *Fase 1*

Il modello risulta avere una chiusura consona a quella richiesta per il tipo di studio da eseguire, può quindi considerarsi conclusa la *Fase 1*.

In questa prima parte dell'analisi non è necessario valutare gli stati tensionali che nascono all'interno del modello in quanto, questi, oltre ad essere falsati dall'aver aumentato di molto le tolleranze, verranno persi per la successiva parte andando, ora, ad esportare e quindi de-tensionare il modello.

L'unica valutazione necessaria è quella relativa alla configurazione finale.

Il modello di fine *Fase 1*, infatti, deve essere consono ed assimilabile ad un modello reale di scarpone chiuso. Non devono esserci perciò compenetrazioni in nessun luogo dello scarpone.

Pertanto per verificare che lo scarpone sia stato chiuso in maniera corretta si controllano alcuni parametri.

In particolare si verifica lo stato del contatto (CSTATUS) il quale identifica se questo avviene (contatto chiuso) o meno (contatto aperto). Nello specifico il modello si colora di blu se non c'è nessun contatto (aperto), di rosso se il contatto è di tipo chiuso e statico o di verde se è chiuso ma avviene tramite scorrimento (come in questo caso).

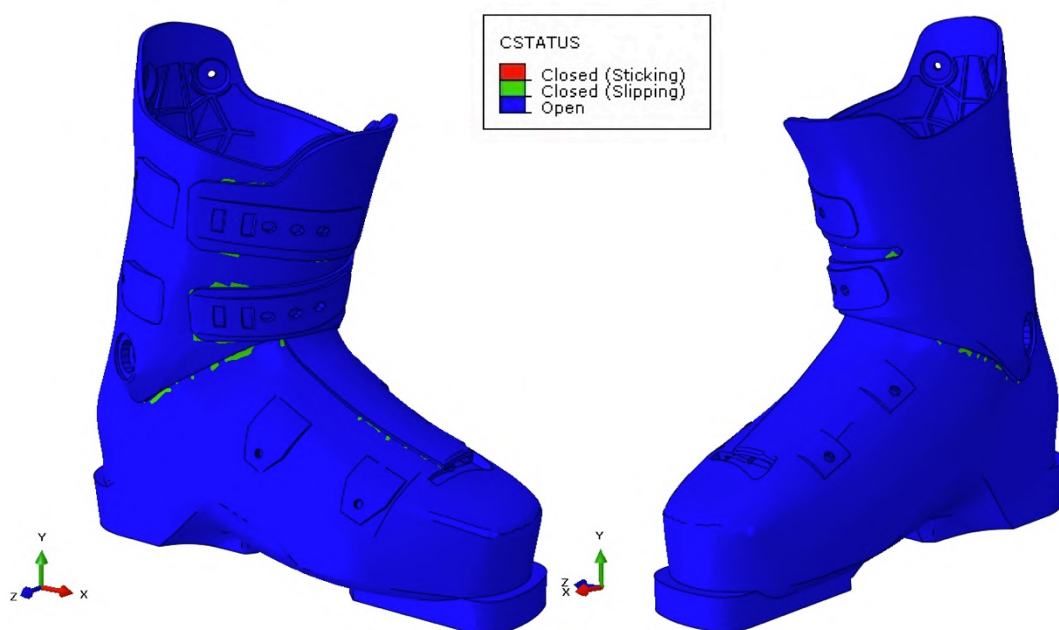


Figura 4-43: Stato del contatto a fine analisi Fase 1

Come si può vedere in *Figura 4-43* il contatto fra scafo e gambetto, fra gambetto e gambetto e fra scafo e scafo avviene in maniera corretta, infatti, lungo tutte le superfici di contatto vengono identificate zone di colore verde.

Oltre a questo si possono verificare la pressione che nascono nelle zone di interfaccia (contatto) grazie all'output CPRESS. In Particolare, come si può vedere in *Figura 4-44* a pagina successiva, vengono identificate in blu le superfici definite precedentemente per il contatto ed i punti un cui ci sono maggiori sovrappressioni di chiusura.

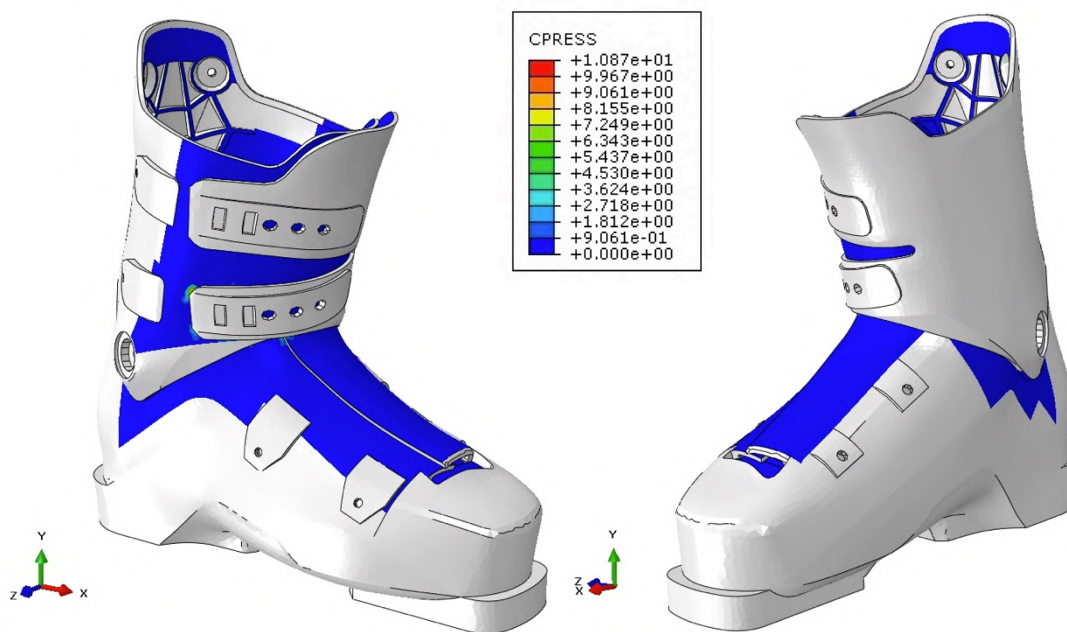


Figura 4-44: Pressione nel contatto a fine analisi Fase I

Altra precisazione va fatta sul de-tensionamento precedentemente nominato. Il motivo di tale de-tensionamento è quello di rispecchiare al meglio la realtà dello scarpone stesso. Nei modelli reali, infatti, nonostante le componenti siano in posizione aperta una volta stampate, quando vengono chiuse e rimangono in tale posizione anche per un limite di tempo molto basso, la plastica tende a deformarsi e, successivamente, a mantenere quasi completamente la forma di chiusura dello scarpone (perdendo quindi lo stato tensionale iniziale).

A conclusione di questa prima fase viene presentata la Figura 4-45 del modello finale appena realizzato, chiuso, in confronto al modello reale analizzato.



Figura 4-45: Confronto modello numerico chiuso e scarpone reale

4.3 Esportazione modello: Scarpone chiuso

Si procede ora ad esportare lo scarpone chiuso in modo da poter passare alla *Fase 2* con un nuovo modello de-tensionato e quindi pronto per la simulazione del test dello scarpometro.

4.3.1 File di input (.inp) – Fase 1

Come prima cosa si devono fare delle variazioni nel file di input (.inp) relativo al modello appena creato (file che contiene tutte le informazioni relative al modello numerico).

Avendo generato due parti (scafo e gambetto) le coordinate dei nodi sono divise anch'esse in due gruppi come si può vedere in *Figura 4-46*:

```

*Heading
** Job name: Job-1 Model name: Model-0
** Generated by: Abaqus/CAE 6.14-2
** Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
** -----
**
** PART INSTANCE: gambo-1 ← Parte relativa al gambetto
**
*Node
+--17418 lines: 1, -251.024353, 148.112457, 46.9025841-----
*Element, type=C3D4
+--60135 lines: 1, 14378, 7874, 14379, 14380-----
*Nset, nset=gambo-1_Set-1, generate
1, 17418, 1
*Elset, elset=gambo-1_Set-1, generate
1, 60135, 1
** Section: Section-1
** Solid Section, elset=gambo-1_Set-1, controls=EC-1, material=Material-1
,
** -----
**
** PART INSTANCE: Scafo nuovo-1 ← Parte relativa allo scafo
**
*Node
+--30754 lines: 17419, -102.769081, -6.55193329, -26.3552284-----
*Element, type=C3D4
+--116498 lines: 60136, 40038, 40039, 40040, 40041-----
*Nset, nset="Scafo nuovo-1_Set-1", generate
17419, 48172, 1
*Elset, elset="Scafo nuovo-1_Set-1", generate
60136, 176633, 1
** Section: Section-1
** Solid Section, elset="Scafo nuovo-1_Set-1", controls=EC-1, material=Material-1

```

Figura 4-46: Input file modello fine Fase 1

Si può infatti notare che, i primi nodi, per la precisione 17'418, sono quelli che compongono la parte del gambetto, mentre i secondi, precisamente 30'754, sono quelli appartenenti allo scafo.

La prima cosa che si deve fare è perciò quella di raggruppare i nodi in un'unica parte, in questo caso, nella prima (gambetto).

Questo viene fatto per semplicità, in quanto, successivamente, dovranno essere sommati tutti gli spostamenti iniziali con gli spostamenti a fine analisi.

Il file degli spostamenti che verrà esportato a fine analisi, però, contiene tutti i nodi non distinguendoli nelle due parti. Andando ad unirli ora l'operazione di sommatoria successiva, risulta essere più semplice.

Si copia quindi l'intera riga contenente tutti i nodi relativi allo scafo, sotto la riga contenente i nodi relativi al gambetto. Questa operazione permette di ottenere tutti nodi in un'unica parte (per la precisione $17'418 + 30'754 = 48'172$).

Il nuovo file di input si presenterà quindi come segue in *Figura 4-47*:

```
Heading
** Job name: Job-1 Model name: Model-0
** Generated by: Abaqus/CAE 6.14-2
** Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
**
**
** PARI INSTANCE: gambo-1
**
** Node
+--48172 lines: 1, -251.024353, 148.112457, 46.9025841-----
*Element, type=C3D4
+--60135 lines: 1, 14378, 7874, 14379, 14380-----
*Nset, nset=gambo-1_Set-1, generate
1, 17418, 1
*Elset, elset=gambo-1_Set-1, generate
1, 60135, 1
** Section: Section-1
** Solid Section, elset=gambo-1_Set-1, controls=EC-1, material=Material-1
/
**
**
** PARI INSTANCE: Scafo nuovo-1
**
** Element, type=C3D4
+--116498 lines: 60136, 40038, 40039, 40040, 40041-----
*Nset, nset="Scafo nuovo-1_Set-1", generate
17419, 48172, 1
*Elset, elset="Scafo nuovo-1_Set-1", generate
60136, 176633, 1
** Section: Section-1
** Solid Section, elset="Scafo nuovo-1_Set-1", controls=EC-1, material=Material-1
```

↓ Nodi sommati in un'unica parte

Figura 4-47: Modifica input file modello fine Fase 1 (accorpamento delle coordinate nodali in una sola parte)

4.3.2 File spostamenti (.rpt) – fine Fase 1

Si esporta ora il file relativo agli spostamenti di tutti i punti del modello ad analisi conclusa (file accennato al paragrafo precedente). Per fare questo grazie al comando “Report → Field Output → Unique Nodal” si esportano gli spostamenti “U1, U2 ed U3” e si genera un file “.rpt” che avrà la seguente forma (Figura 4-48):

```
Field Output Report, written Fri Aug 05 09:24:41 2022

Source 1
-----

   ODB: C:/TemporaryWorkingArea/fasel/Job-1.odb
   Step: Step-1
   Frame: Increment    117: Step Time =    1.000

Loc 1 : Nodal values from source 1

Output sorted by column "Node Label".

Field Output reported at nodes for part: PART-1-1
```

Node Label	U.U1 @Loc 1	U.U2 @Loc 1	U.U3 @Loc 1
1	-325.251E-03	-25.6671E-03	154.235E-03
2	-93.5802E-03	-52.9869E-03	328.735E-03
3	167.202E-03	-536.762E-03	1.37592
4	163.441E-03	-546.327E-03	1.37185
5	262.213E-03	-493.332E-03	1.31585
6	250.910E-03	-465.178E-03	1.32606
7	-325.947E-03	-496.977E-03	2.13136
8	-6.67693	588.344E-03	-13.4863
9	-465.512E-03	-393.631E-03	2.16985
10	-780.582E-03	-344.759E-03	2.23094

Figura 4-48: File “.rpt” contenente gli spostamenti relativi ai nodi del modello a fine Fase 1

4.3.3 File di input (.inp) – Fase 2

A questo punto è necessario sommare gli spostamenti dei nodi appena esportati, file “.rpt”, a quelli iniziali presenti nel file “.inp”. Facendo questa operazione quindi, si ottiene un nuovo file “.inp” il quale sarà relativo allo scarpone chiuso.

Per fare la somma fra le posizioni dei nodi si è utilizzato uno script apposito il quale crea un terzo file “.inp” con la somma dei nodi dei due file precedentemente citati.

Il file esportato dallo script avrà, però, solamente la somma degli spostamenti fra il file di input iniziale e quello “.rpt”.

Per concludere dunque l’operazione di creazione del nuovo file di input, sarà necessario sostituire gli spostamenti appena calcolati nel file di input del modello iniziale. Operazione che permette di includere anche tutte le altre informazioni relative al modello (superfici di contatto, elementi, proprietà dei materiali, condizioni di vincolo, spostamenti imposti).

Una volta inseriti quindi questi valori nodali il nuovo e definitivo file di input si presenterà come segue in *Figura 4-49*:

```

*Heading
** Job name: Job-1 Model name: Model-0
** Generated by: Abaqus/CAE 6.14-2
*Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
**
**
**
** PART INSTANCE: gambo-1
**
**
** Node
+---48172 lines: 1, -251.349604, 148.086790, 47.056819 -----
** Element, type=C3D4
+---60135 lines: 1, 14378, 7874, 14379, 14380-----
** Nset, nset=gambo-1_Set-1, generate
1, 17418, 1
** Elset, elset=gambo-1_Set-1, generate
1, 60135, 1
** Section: Section-1
** Solid Section, elset=gambo-1_Set-1, controls=EC-1, material=Material-1
**
**
**
** PART INSTANCE: Scafo nuovo-1
**
**
** Element, type=C3D4
+---116498 lines: 60136, 40038, 40039, 40040, 40041-----
** Nset, nset="Scafo nuovo-1_Set-1", generate
17419, 48172, 1
** Elset, elset="Scafo nuovo-1_Set-1", generate
60136, 176633, 1
** Section: Section-1
** Solid Section, elset="Scafo nuovo-1_Set-1", controls=EC-1, material=Material-1

```

Figura 4-49: Nuovo file di input comprensivo degli spostamenti finali

Il quale apparentemente può sembrare identico al file rappresentato in *Figura 4-47* ma si nota la differenza se si apre la “finestra” relativa ai nodi (*Figura 4-50*):

<pre> *Heading ** Job name: Job-1 Model name: Model-0 ** Generated by: Abaqus/CAE 6.14-2 *Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO ** ** ** ** PART INSTANCE: gambo-1 ** ** ** Node 1, -251.024353, 148.112457, 46.9025841 2, -248.629044, 147.91246, 43.4192543 3, -197.456314, 210.028854, 58.3466797 4, -197.504761, 210.209488, 57.968483 5, -200.551117, 215.614456, 58.2451515 6, -200.361176, 215.025726, 59.4935913 7, -203.005524, 187.422089, 56.2626762 8, -145.167542, 165.518967, 44.6460304 9, -209.534485, 182.159988, 55.6843605 10, -214.243057, 164.550293, 54.8344841 </pre>	<pre> *Heading ** Job name: Job-1 Model name: Model-0 ** Generated by: Abaqus/CAE 6.14-2 *Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO ** ** ** ** PART INSTANCE: gambo-1 ** ** ** Node 1, -251.349604, 148.086790, 47.056819 2, -248.722624, 147.859473, 43.747989 3, -197.289112, 209.492092, 59.722600 4, -197.341320, 209.663161, 59.340333 5, -200.288904, 215.121124, 59.561001 6, -200.110266, 214.560548, 60.819651 7, -203.331471, 186.925112, 58.394036 8, -151.844472, 166.107311, 31.159730 9, -209.999997, 181.766357, 57.854210 10, -215.023639, 164.205534, 57.065424 </pre>
--	--

Figura 4-50: Confronto file iniziale e finale di input

Si può notare infatti che, facendo la differenza fra la posizione iniziale e la posizione finale, si ottiene lo spostamento dei nodi presentati in *Figura 4-48*.

4.4 Realizzazione modello: Scarpone chiuso – Fase 2

Si passa ora alla *Fase 2*. Come prima cosa si importa il modello dello scarpone chiuso. Per fare questo, una volta generato un nuovo file Abaqus, si deve importare come un “Nuovo modello” il file di input finale, creato al paragrafo precedente.

Il nuovo modello si presenta nel seguente modo (*Figura 4-51*):

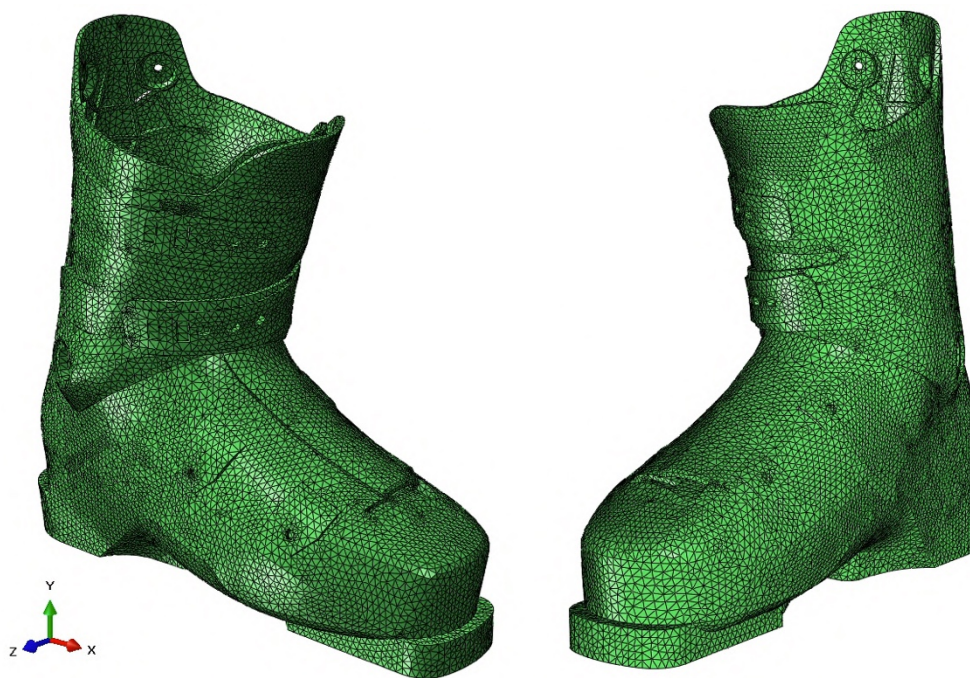


Figura 4-51: Modello de-tensionato importato grazie al nuovo file di input creato

Prima di procedere con la realizzazione di questo nuovo modello si deve ora creare la protesi, cioè, la finta gamba, che permette di muovere avanti ed indietro, in maniera ciclica, lo scarpone e simulare la prova scelta (test dello scarpometro).

4.4.2 Realizzazione ed importazione protesi

Nella realtà la protesi è realizzata in resina ed è composta da due componenti (“gamba” e “piede”) collegate fra loro da uno snodo in ferro il quale permette la rotazione della gamba attorno alla “caviglia” (*Figura 1-3*). Per tale analisi si trascura la componente “piede” in quanto, per il tipo di valutazioni da effettuare, risulta essere superflua (il suo scopo è infatti solamente quello di mantenere la protesi in maniera corretta) e perciò è solo una componente aggiuntiva che va ad aumentare le incognite in gioco.

Si crea quindi, tramite una modellazione CAD 3D, il modello tridimensionale di tale protesi identificando con delle coordinate il punto di rotazione di questo elemento (il quale sarà identificato in Abaqus tramite un Reference Point, successivamente illustrato).

La protesi realizzata è visibile in *Figura 4-52*:



Figura 4-52: *Confronto protesi realizzata con modellazione CAD tridimensionale e protesi reale*

Conclusa si può esportare in formato “.stp” ed importare in Abaqus come “Parte”. In particolare, è necessario crearla nella posizione e con l’inclinazione (+11°) corretta in riferimento alla posizione dello scarpone, in modo tale che, quando viene importata, non si debba spostarla/ruotarla (operazione meno agevole all’interno di Abaqus).

Questa componente, a differenza dello scafo e del gambetto analizzati in precedenza, viene importata non come una superficie deformabile ma come corpo indeformabile. Tale scelta è stata fatta per rappresentare al meglio la realtà in quanto, la protesi reale in resina, ha una rigidità molto maggiore rispetto allo scarpone. Non potendo deformarsi, inoltre, è stato scelto di crearla cava in modo da diminuire l’onere computazionale (è possibile discretizzarla con un numero minore di elementi). Oltre a questo, tale scelta, permette di non dover definirne ulteriori proprietà (cioè non serve identificarne il tipo di materiale).

Importata in Abaqus è necessario definirne il punto di rotazione (tramite coordinate come precedentemente accennato). Questo è stato identificato misurando, nella protesi reale, il punto preciso in cui avviene tale rotazione. È stato poi riportato in Abaqus tramite coordinate come Reference Point (RP) del corpo infinitamente rigido.

Sarà necessario, successivamente, discretizzare la protesi ed assegnargli le condizioni al contorno come di consueto.

Il modello, comprensivo di protesi risulta essere visibile in *Figura 4-53*:

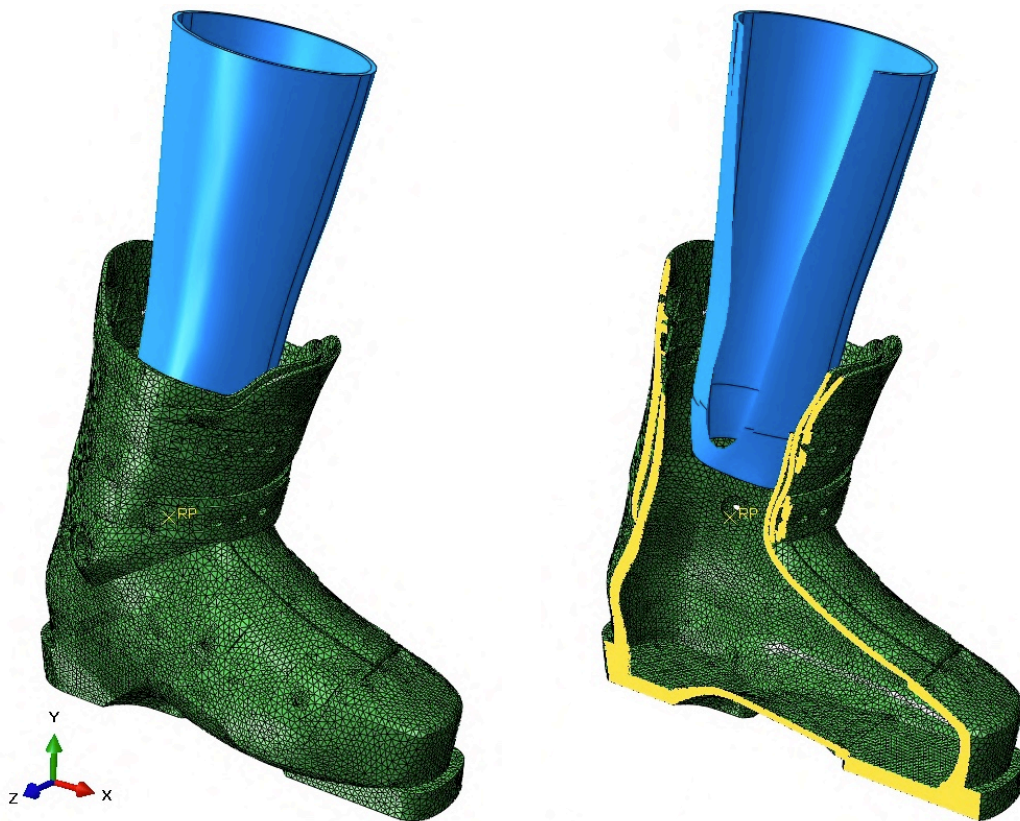


Figura 4-53: Modello in Abaqus comprensivo di protesi ed identificazione del Reference Point (RP)

4.4.3 Caratteristiche modello – Fase 2: test 1 (senza scarpetta)

Si procede ora con l'assegnazione delle caratteristiche del materiale dello scarpone, la successiva meshatura della protesi, la creazione delle superfici di contatto, delle condizioni di vincolo e degli step di carico.

4.4.3.1 Caratteristiche del materiale – Fase 2: test 1

A differenza della *Fase 1*, ora, è necessario definire le caratteristiche adeguate del materiale. Come anticipatamente detto, la simulazione sarà eseguita prima a temperatura ambiente (+23°C) e successivamente a -10°C.

Si assume adeguata, ai fini di tale elaborato, l'approssimazione che il materiale si comporti come elastico lineare isotropo. Sarà quindi necessario impostare solamente il modulo elastico (E) ed il coefficiente di Poisson (ν).

È necessario ora creare due materiali differenti in quanto, lo scafo ed il gambaletto, sono creati con iniezioni di materiali aventi diverse proprietà meccaniche.

I moduli elastici relativi allo scafo ed il gambaletto sono stati precedentemente esposti al §1.1.3. A temperatura ambiente hanno i valori visibili a pagina successiva.

- Modulo elastico Gambetto (+23°C): $E=320$ Mpa;
- Modulo elastico Scafo (+23°C): $E=240$ Mpa.

Mentre alla temperatura a cui normalmente viene realizzata la prova dello scarpometro (-10°C) hanno i seguenti valori:

- Modulo elastico Gambetto (-10°C): $E=587$ MPa;
- Modulo elastico Scafo (-10°C): $E=549$ MPa.

Il coefficiente di Poisson per i materiali plastici tende al valore 0,5. Questo valore, però, richiederebbe un onere computazionale molto elevato. Come approssimazione si può quindi ritenere adeguato utilizzare un coefficiente di Poisson pari a 0,4.

Vengono perciò create due sezioni omogenee, una relativa allo scafo ed una al gambetto, in modo da poter assegnare ad una e l'altra parte le relative caratteristiche.

Una volta assegnate le proprietà il modello dello si presenta come in *Figura 4-54*:

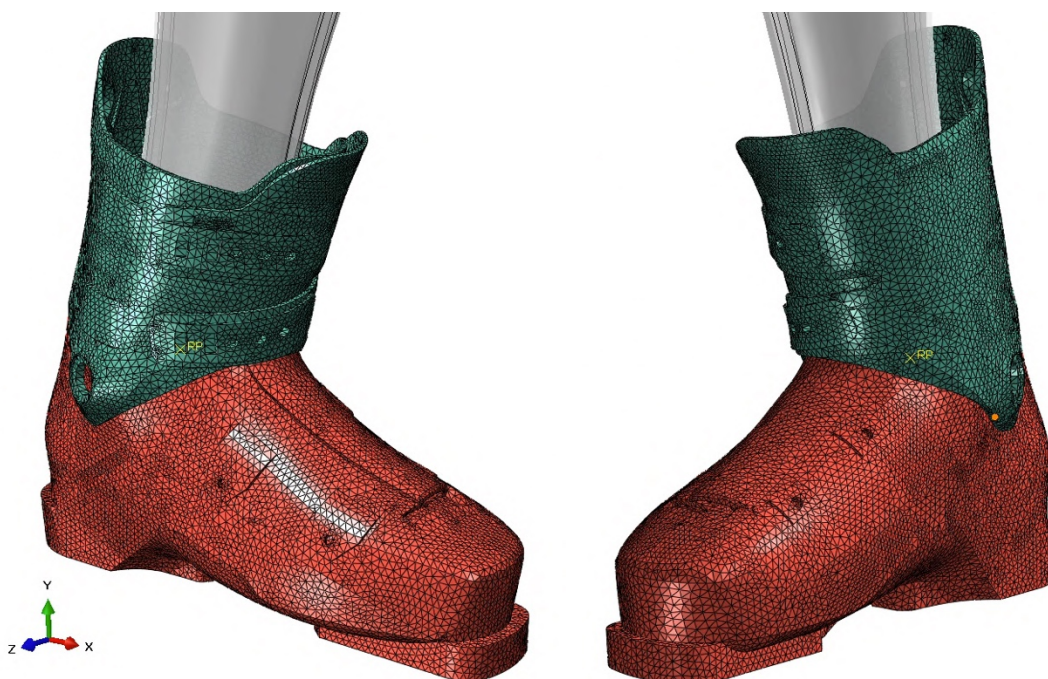


Figura 4-54: Modello FEM dopo l'assegnazione delle relative proprietà di scafo e gambetto

Come si può vedere, scafo e gambetto hanno colori diversi a riprova della differenza della scelta del loro materiale, mentre la protesi risulta avere un colore trasparente il che indica che non ha delle proprietà relative al materiale, essendo considerata infinitamente rigida.

4.4.3.2 Creazione della mesh – Fase 2: test 1

La mesh relativa allo scarpone è già stata creata in precedenza, e, ora, non è più possibile modificarla. Si procede dunque alla creazione della mesh relativa alla protesi.

Per questa parte, essendo indeformabile e di forma piuttosto regolare, è possibile creare una mesh di tipo quadratico la quale risulta essere migliore.

Precisamente si crea una mesh quadratica con funzioni di forma lineari con le dimensioni approssimative di 4 mm (Figura 4-55).

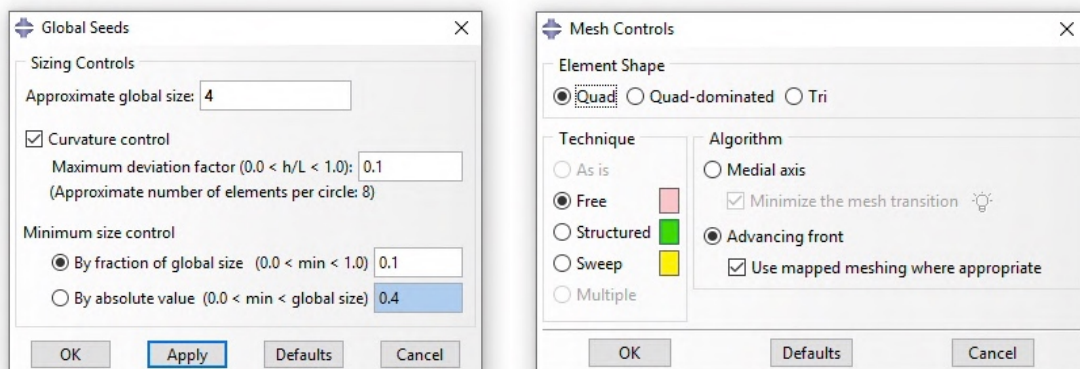


Figura 4-55: Caratteristiche iniziali di creazione della mesh della protesi

Si ottiene quindi il modello seguente visibile in Figura 4-56.

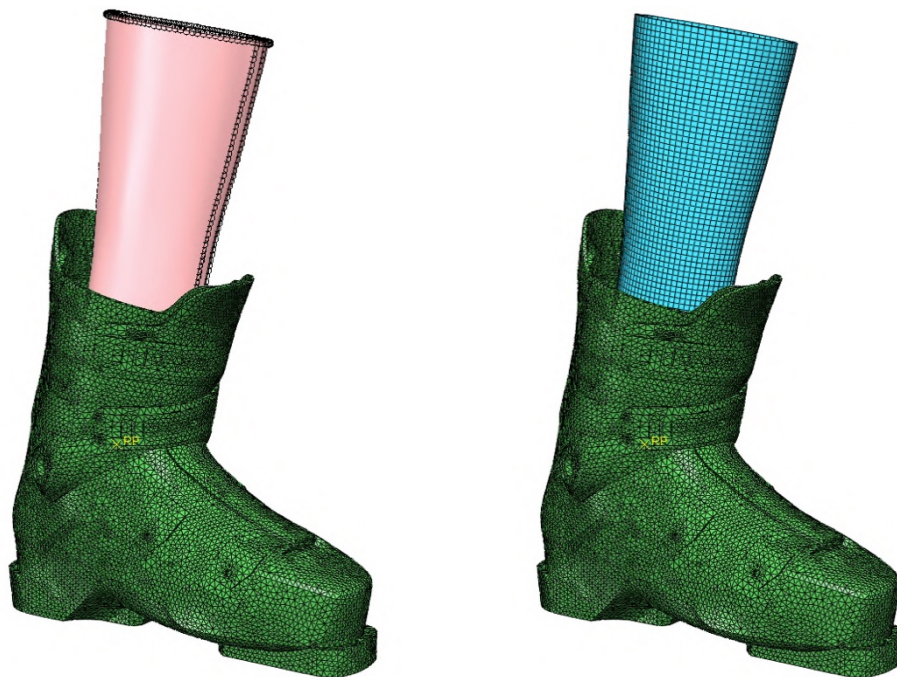


Figura 4-56: Operazione di meshatura della protesi

4.4.3.3 Superfici e tipo di contatto – Fase 2: test 1

Le interazioni di contatto, create nella fase precedente (*Fase 1*), vengono tutte mantenute in quanto, anche in questa fase bisogna garantire la non compenetrazione fra le superfici. Allo stesso modo vengono mantenuti i vincoli di Tie Constrain fra le borchie e la vite posteriore (i quali permettono di vincolare il gambetto allo scafo).

Devono però essere aggiunte le superfici di contatto fra la protesi e lo scarpone, in modo tale che, quando questa ruota in avanti ed indietro, non compenetri nello scarpone stesso. Per fare questo vengono create delle superfici apposite:

- Superficie di contatto della Protesi:

Si crea una superficie unica che comprenda tutta l'area esterna della protesi come si può vedere in *Figura 4-57*:

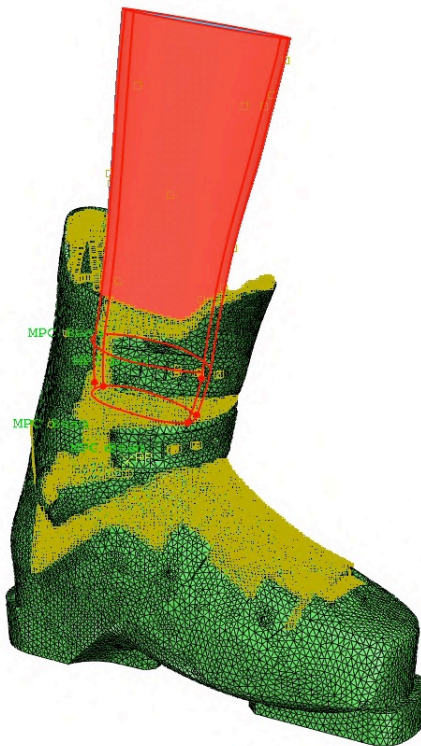


Figura 4-57: *Superficie di contatto della protesi*

- Superficie di contatto Gambetto:

Per quanto riguarda il gambetto viene considerata una superficie unica che comprende tutta la sua area interna in quanto non si conosce, a priori, i punti in cui la protesi andrà in contatto (*Figura 4-58*).

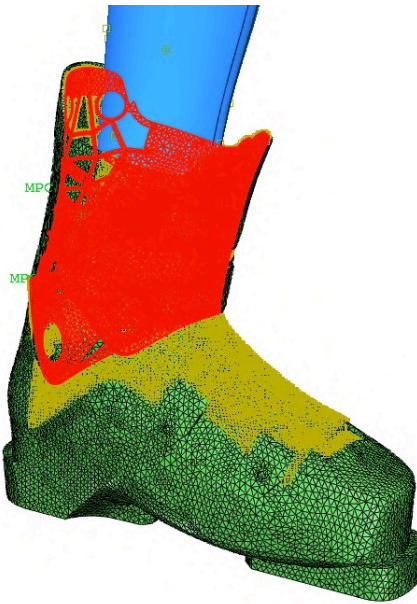


Figura 4-58: *Superficie di contatto del gamba*

- Superfici di contatto Scafo:

Per quanto riguarda lo scafo vengono identificate due superfici, una nella parte anteriore (*Figura 4-20 (a)*), ed una in quella posteriore (*Figura 4-20 (b)*), identificando in maniera approssimativa i punti in cui la protesi potrà andare in contatto. Si è scelto di operare in questo modo, non di selezionare l'intera superficie interna dello scafo, per diminuire l'onere computazionale dell'analisi.

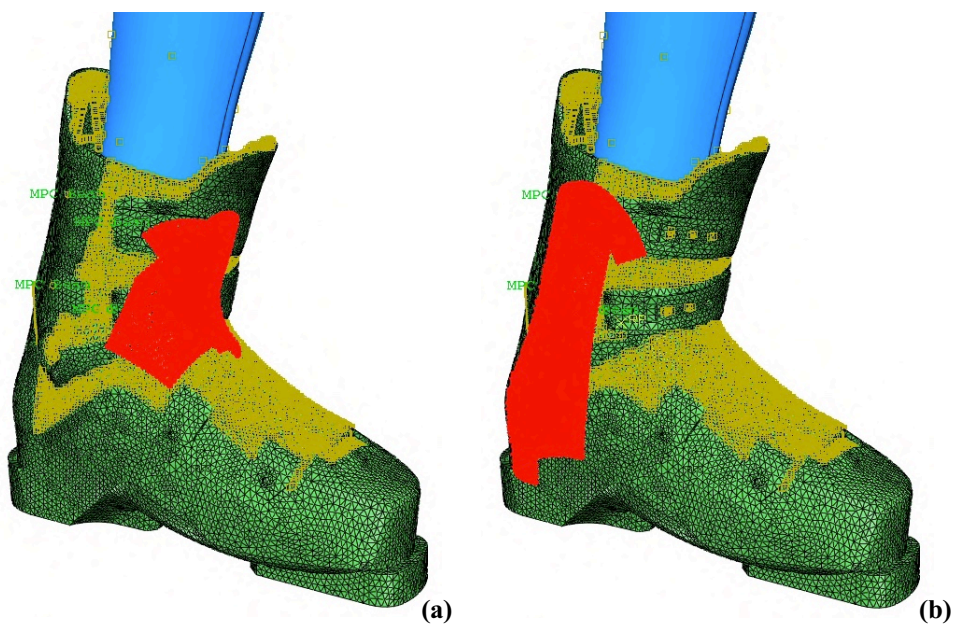


Figura 4-59: *Superfici di contatto dello scafo*

- Ganci di serraggio:

Vengono identificati alcuni nodi, in maniera approssimativa, nei punti in cui, nella realtà, viene attaccato il gancio in metallo che permette la chiusura dello scarpone.

Tali punti sono i seguenti visibili in *Figura 4-60*:

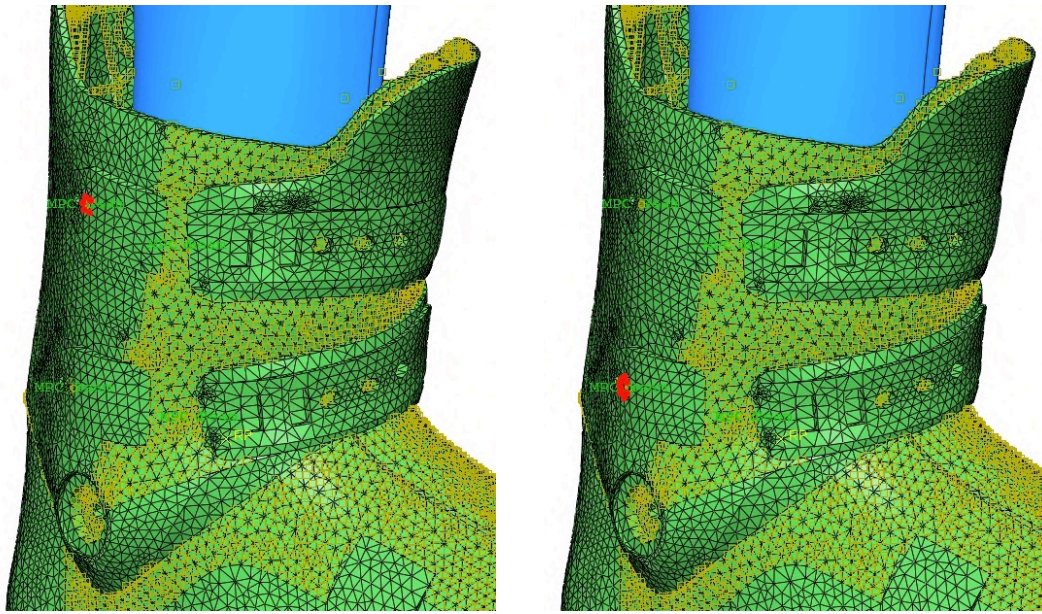


Figura 4-60: Superfici relative ai punti in cui sono presenti i ganci di chiusura del gambetto

(Va specificato che, in realtà, le superfici identificate, anche se enunciate solo ora, sono state create nel modello di *Fase 1*. Questo perché, una volta importato il file di input come spiegato, si perdono le superfici che rappresentano il modello. Vengono infatti importati solamente i nodi ed i rispettivi elementi. Sarà quindi necessario creare tali superfici nel modello iniziale in modo tale da ritrovarle nel modello di *Fase 2*).

Per tutte le superfici create si definisce ora il tipo di interazione da applicare.

Come fatto anche nel modello di *Fase 1* il contatto è di tipo Penalty e senza attrito.

Le superfici andranno quindi ad interagire fra loro con le seguenti proprietà:

1) Contatto di tipo Surface to Surface

Questo tipo di contatto viene definito per le superfici che devono interagire fra loro lungo l'evoluzione dell'analisi.

Quindi per le superfici relative a scafo/ gambetto e protesi.

Nelle *Figure 4-61* e *4-62* è possibile visualizzare le differenti superfici precedentemente identificate.

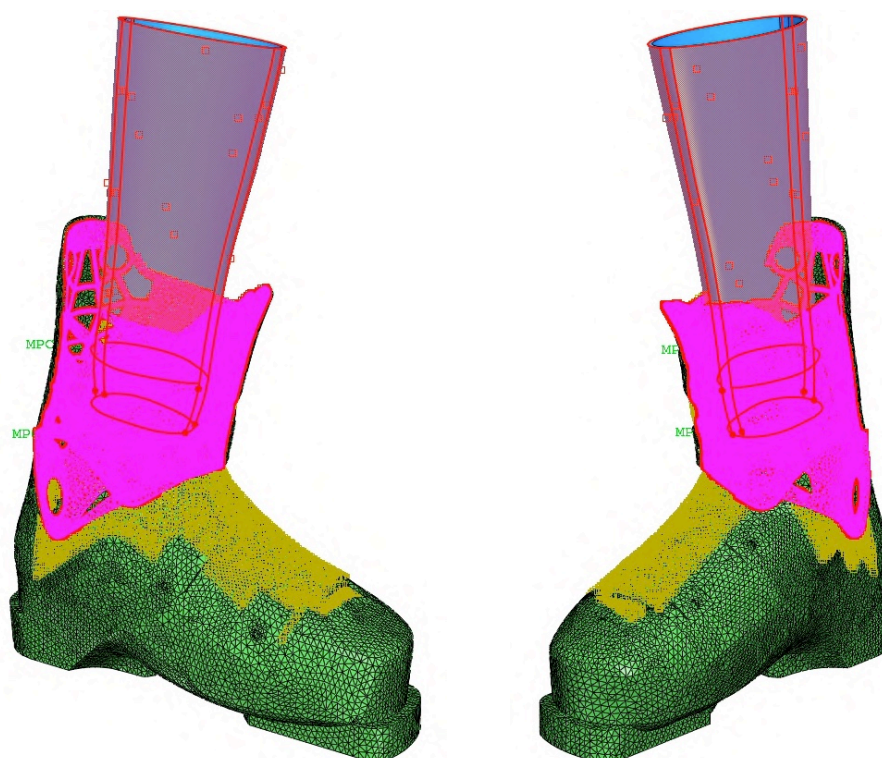


Figura 4-61: *Contatto di tipo Surface to Surface fra protesi e gambetto*

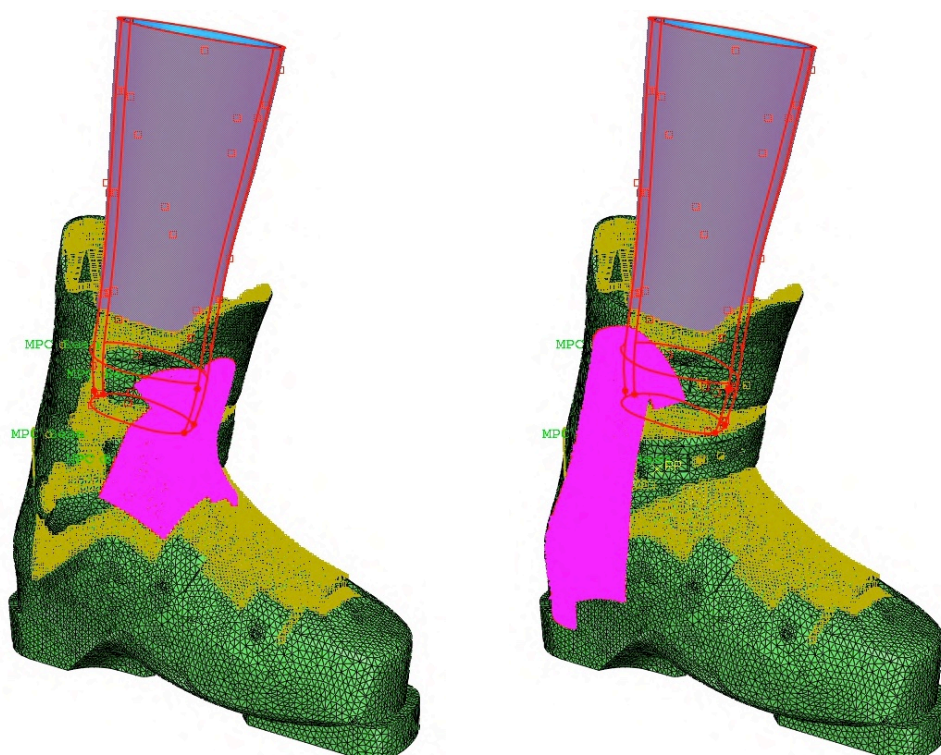


Figura 4-62: *Contatto di tipo Surface to Surface fra protesi e scafo*

2) Contatto di tipo Tie Constrain

Per simulare i ganci di chiusura del gambetto si sceglie di utilizzare un vincolo di tipo Tie Constrain, il quale, crea un vincolo infinitamente rigido fra due punti.

Per la precisione come prima cosa vengono creati due Multi Point Constrain (MPC) comprendenti i punti appena identificati relativi ai ganci. Questi vengono poi fissati con un vincolo Tie ad i MPC creati in *Fase 1* (quelli relativi alle superfici finali del lembo superiore ed inferiore di destra, come si può vedere nelle *Figure 4-63 e 4-64*).

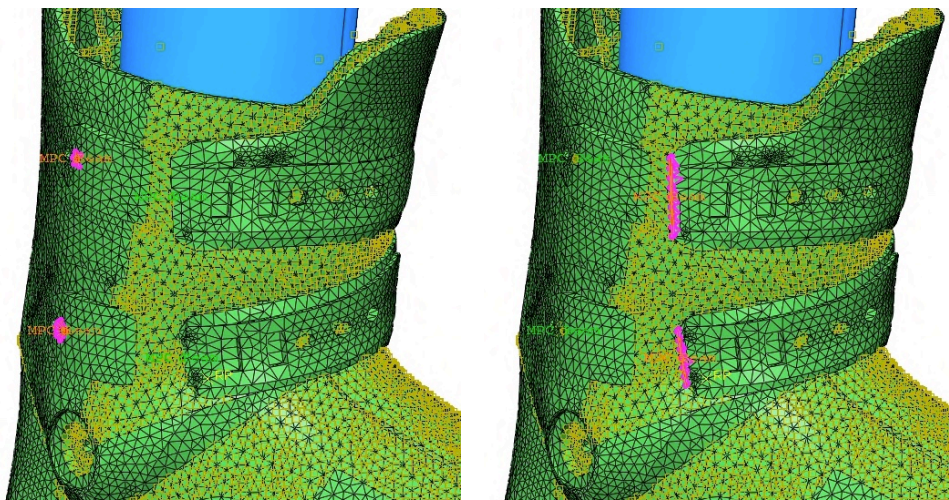


Figura 4-63: Creazione MPC per la simulazione dei ganci dello scarpone

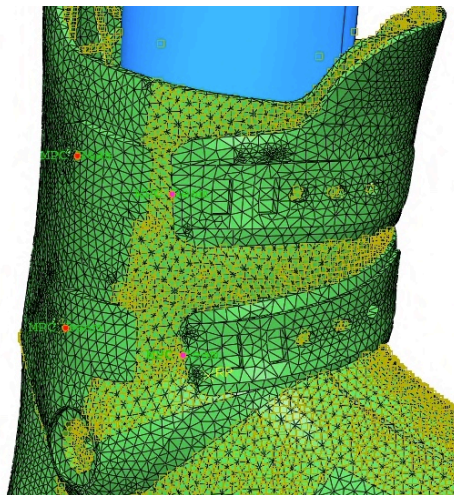


Figura 4-64: Fissaggio del lembo destro dello scarpone con vincolo Tie Constrain

(Di default, il Tie Constrain, vincola solamente due punti che sono attaccati o molto vicini fra loro. Per creare tale collegamento, quindi, è necessario specificare, nelle proprietà del vincolo, la distanza fra i due punti da fissare. In questo caso rispettivamente 48 mm e 55 mm per il gancio superiore ed inferiore.)

Si precisa che questo tipo di fissaggio risulta essere una approssimazione. Nella realtà infatti, sono presenti dei ganci in acciaio, che, seppur molto piccoli, possono avere anch'essi degli allungamenti. Queste deformazioni, però, in sede di tale elaborato, vengono trascurate, essendo piccole comparate a quelle relative agli elementi plastici. Per quanto riguarda invece i ganci relativi allo scafo, per questo tipo di analisi, vengono trascurati. Per valutare gli spostamenti nella zona del collo-piede, infatti, è necessario permettere ai due lembi di scorrere liberamente fra loro quindi fissarli non era una opzione. Inoltre si è valutato che, anche nella fase di carico indietro, i due lembi non risultavano separarsi. In generale, poi, nella realtà, questi ganci hanno lo scopo di adattare lo scarpone al piede dello sciatore e non di aumentarne la rigidità relativa a questo tipo di prova. Non considerare tali ganci, quindi, risulta essere una approssimazione adeguata.

4.4.3.4 Condizioni di vincolo (BCs) e Amplitude – Fase 2: test 1

Si procede, ora, ad impostare le condizioni al contorno e fissare i vincoli del modello. Tali condizioni vengono divise in due categorie: le condizioni di vincolo e gli spostamenti/rotazioni imposte.

1) Condizioni di vincolo

Nella prova dello scarpometro, come visto al primo capitolo, lo scarpone viene fissato come se fosse agganciato ad uno sci. Come si può vedere in *Figura 4-65*:



Figura 4-65: Setup condizioni di vincolo della prova dello scarpometro

Per simulare tale chiusura i vincoli da applicare sono visibili a pagina successiva.

Per quanto riguarda la parte inferiore della suola vengono applicati solamente dei vincoli lungo la direzione verticale (Y, U2) come si può vedere in *Figura 4-66*:

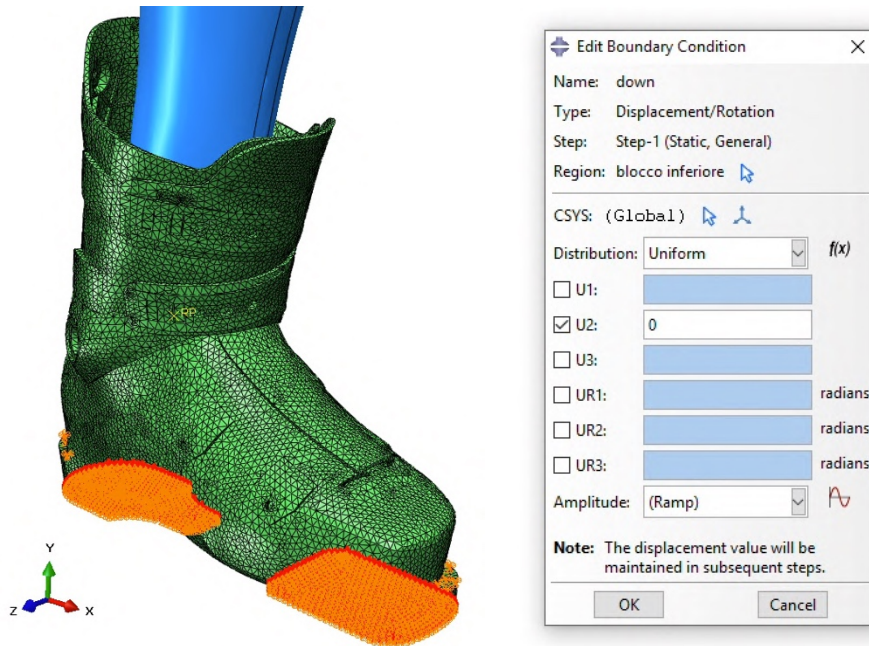


Figura 4-66: Condizione di vincolo del modello FEM (suola inferiore)

Le parti superiori di punta (*Figura 4-67*) e tacco (*Figura 4-68*), invece, vengono bloccate in tutte e tre le direzioni.

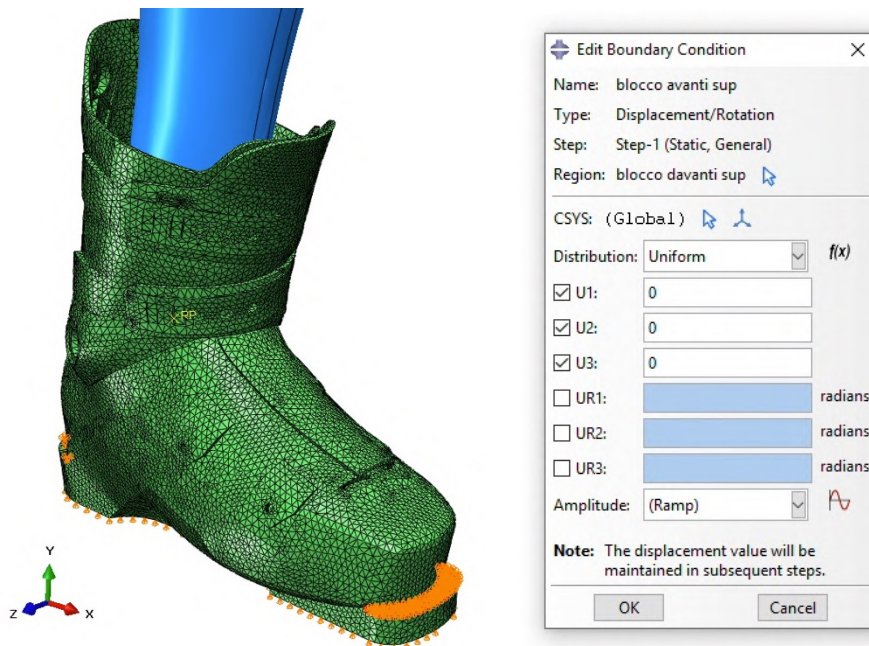


Figura 4-67: Condizione di vincolo del modello FEM (punta)

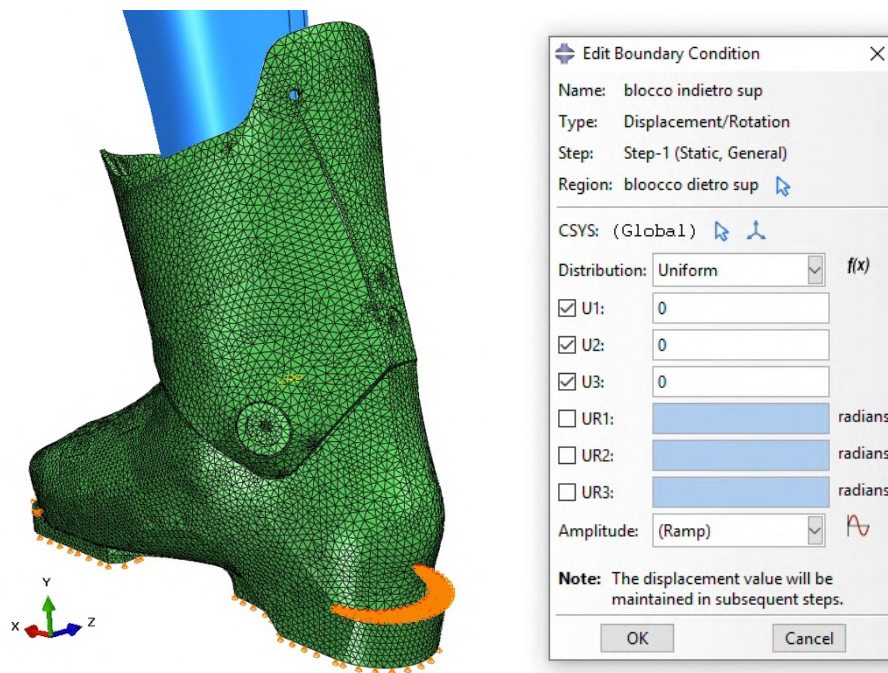


Figura 4-68: Condizione di vincolo del modello FEM (tacco)

In questo modo i vincoli imposti al modello rispecchiano al meglio la realtà dei fissaggi reali.

2) Spostamenti/rotazioni imposte

Come prima cosa si assegna la rotazione relativa alla protesi.

Come illustrato nel primo capitolo, durante la prova sperimentale la finta gamba, viene ruotata per tutta la durata della prova di una quantità fissata, prima in avanti e successivamente indietro.

Gli angoli di inclinazione sono precisamente $+15^\circ$ in avanti e -8° indietro rispetto al riferimento (inclinato) della protesi, la quale è ruotata di $+11^\circ$ rispetto alla verticale. Per realizzare questa rotazione, nel modello, basterà semplicemente imporre una rotazione al Reference Point (RP) della protesi.

Si genera quindi una rotazione imposta in tale punto pari a 15° in avanti (nel modello la rotazione deve essere imposta in radianti ed in questo caso, se si vuole una rotazione in avanti, deve essere identificata una rotazione negativa attorno a Z, UR3, precisamente con un valore pari a $-0,261799$ radianti), la quale verrà poi ruotata indietro grazie ad una amplitude creata successivamente.

Vengono invece bloccati spostamenti e rotazioni nelle altre direzioni (tranne la X, U1, per i motivi che verranno successivamente illustrati).

Il vincolo imposto è visualizzabile in *Figura 4-69*:

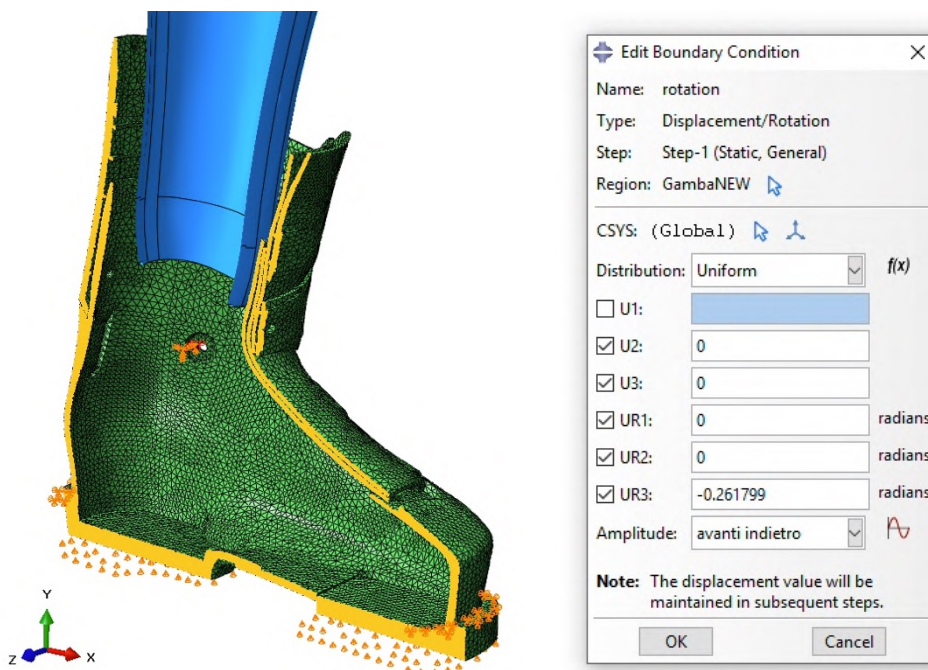


Figura 4-69: Rotazione imposta al Reference Point (RP) della protesi

Oltre a questa viene impostata una seconda condizione di vincolo che permette di rappresentare al meglio la realtà della prova: si assegna cioè una traslazione orizzontale lungo l'asse X (U1) al Reference Point (RP).

Durante l'evoluzione del test, infatti, ci sono degli spostamenti a livello della caviglia dovuti a vari fattori.

In particolare quando la protesi ruota avanti ed indietro, il finto piede per contrapposizione tende a spostarsi indietro ed avanti (movimento naturale che avrebbe il piede nella fase di carico in avanti o indietro durante la sciata), dunque, durante la simulazione agli elementi finiti, il RP non deve rimanere completamente fermo ma deve muoversi avanti ed indietro andando a controbilanciare la rotazione precedentemente assegnata.

Inoltre è necessario considerare la presenza della parte di scarpetta residua, la quale, è molto deformabile. Tende quindi ad essere schiacciata in avanti ed indietro diminuendo il suo spessore.

Oltre a questo, il movimento imposto alla caviglia serve per contrastare anche l'approssimazione fatta nel considerare il vincolo che blocca i lembi del gambetto infinitamente rigido. Nella realtà, infatti, i ganci realizzati in acciaio che assolvono questa funzione possono avere dei minimi allungamenti, i quali devono essere in qualche modo tenuti in considerazione.

Lo spostamento imposto al RP permette quindi di assolvere varie funzioni e di rendere il modello idoneo confrontabile con la prova sperimentale. Il valore assegnatogli è fittizio e corrisponde ad 1 cm perché tale spostamento viene successivamente regolato, in avanti ed indietro, tramite una amplitude dedicata che deve essere calibrata correttamente.

Lo spostamento imposto è visibile in *Figura 4-70*:

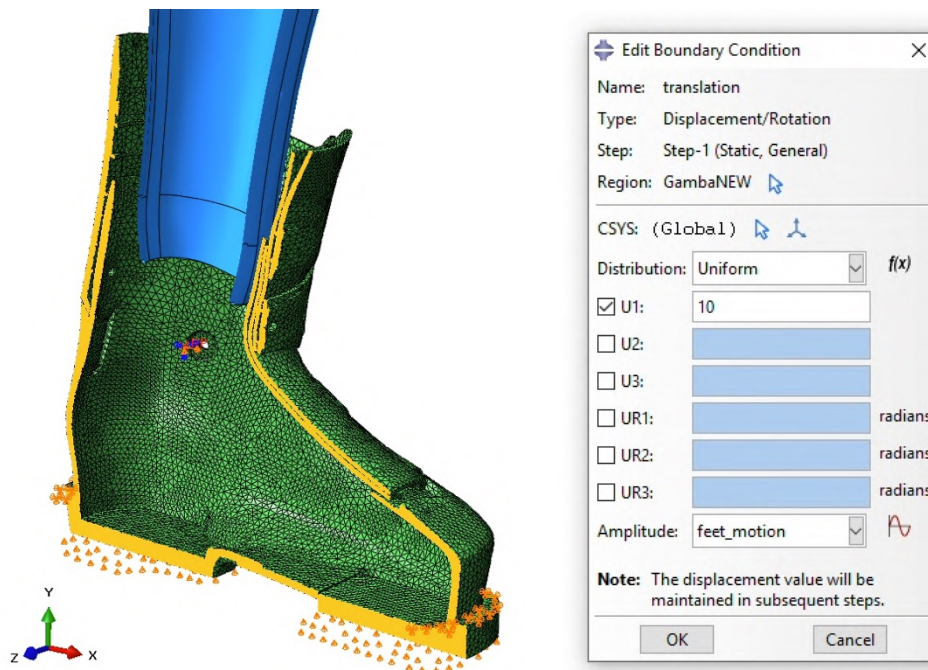


Figura 4-70: *Spostamento imposto al RP della protesi*

A questo punto è necessario definire le amplitude che regolano la rotazione e lo spostamento imposto.

1) Rotazione della protesi

Come annunciato in precedenza, la rotazione, è stata impostata di 15° in avanti (0,262 radianti).

Lungo l'evoluzione dell'analisi, però, la protesi deve spostarsi prima in avanti, successivamente indietro (precisamente di 8° corrispondenti a 0,139 radianti definibile come $0,262 \cdot 0,533$) ed infine tornare in posizione zero.

Per fare questo viene quindi creata una funzione apposita (*Figura 4-71*).

La funzione che permette di assolvere il problema richiesto ha il seguente andamento:

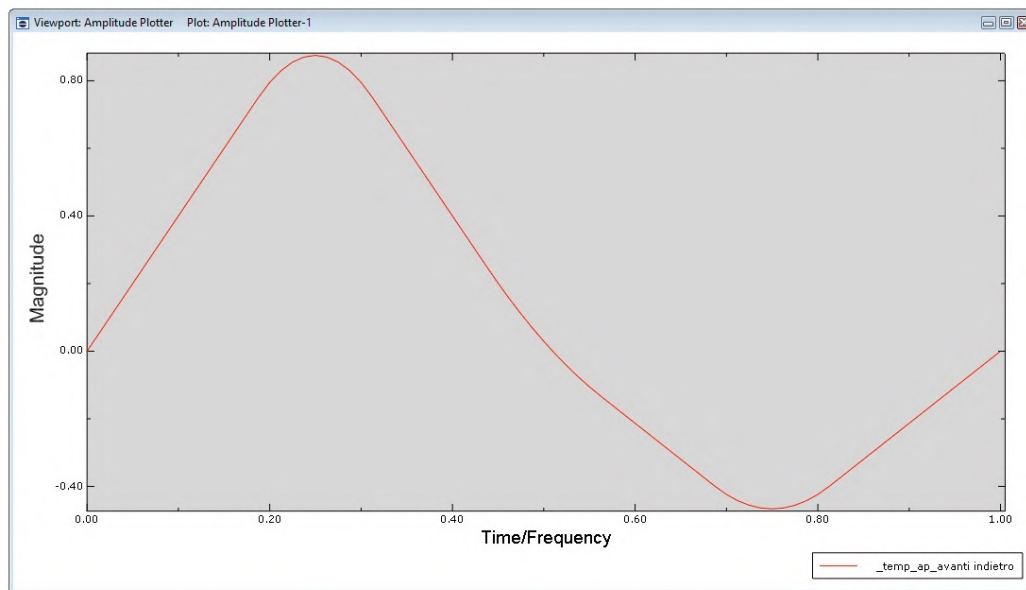


Figura 4-71: Amplitude relativa alla rotazione imposta

Precisamente al 25% dell'analisi viene completata la spinta in avanti della protesi (relativa ad una rotazione di $15^\circ = 0,262 \text{ rad}$), al 50% dell'analisi la protesi torna in posizione zero, al 75% viene completata la spinta indietro (relativa a $8^\circ = 0,262 \text{ rad} * 0,533 = 0,139 \text{ rad}$) ed infine al 100% la protesi risulta essere tornata alla posizione zero.

I valori precisi sono rappresentati in *Figura 4-72*:

	Time/Frequency	Amplitude
1	0	0
2	0.25	1
3	0.5	0
4	0.75	-0.533
5	1	0

Figura 4-72: Valori amplitude relativa alla rotazione imposta

2) Movimento della caviglia /piede

La funzione che regola il movimento del Reference Point (RP) risulta essere un po' più complessa. Come detto, tale spostamento, serve per contrastare molte incertezze presenti nell'evoluzione dell'analisi: il movimento del piede/caviglia, lo schiacciamento della scarpetta e l'approssimazione fatta nei vincoli creati per rappresentare i ganci di chiusura.

Questa funzione ha il seguente andamento visibile in *Figura 4-73*:

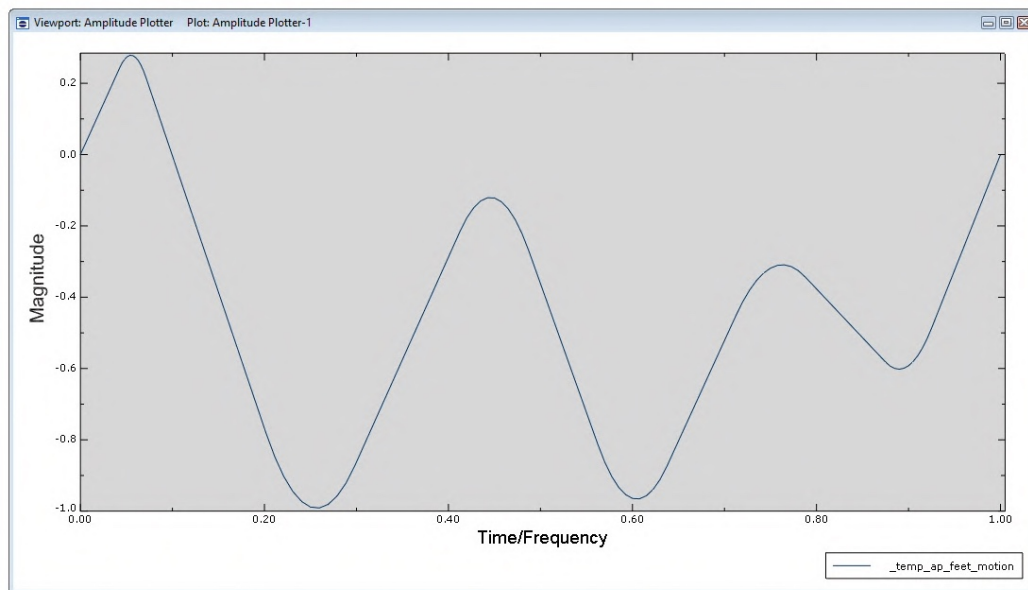


Figura 4-73: *Amplitude relativa allo spostamento imposto*

Come affermato, l'andamento risulta essere molto complesso e si è giunti a determinare i valori esatti solamente dopo varie analisi di tentativo finalizzate a indentificare il comportamento corretto della protesi lungo l'evoluzione della simulazione. Per prima cosa si considera quindi uno spostamento in avanti della protesi, il quale permette alla stessa di entrare in contatto prima con lo scarpone. Ciò va a contrastare l'incertezza dovuta al mantenimento della parte bassa della scarpetta che crea un certo spessore e porta le due superfici ad entrare in contatto più rapidamente. Una volta che la protesi entra in contatto con la parte anteriore dello scarpone, si considera uno scivolamento della caviglia indietro, movimento naturale dovuto al contatto. Successivamente, quando la protesi arriva alla massima spinta, cioè con una inclinazione di $+15^\circ$ (25% dell'analisi), il piede, man mano che questa torna verso la posizione zero, tende a ri-scivolare in avanti (cosa che deve fare quindi anche il RP).

Una volta che la protesi torna in posizione zero inizia la fase di spinta indietro, il ragionamento è lo stesso. In un primo momento la protesi viene traslata verso la parte posteriore dello scarpone per simulare la presenza della scarpetta, e quindi il contatto che avviene più rapidamente; successivamente, quando la protesi entra in contatto con la parte posteriore del gamba, la caviglia tende a spostarsi in avanti fino alla massima inclinazione della protesi (-8° , 75% dell'analisi) e poi indietro lungo lo scarico. L'analisi si conclude infine con la finta gamba che torna alla posizione originale sia in termini di rotazione che in termini di traslazione.

I valori specifici dello spostamento del RP sono i seguenti (Figura 4-74):

	Time/Frequency	Amplitude
1	0	0
2	0.057	0.325
3	0.25	-1.15
4	0.45	0
5	0.6	-1.085
6	0.75	-0.24
7	0.9	-0.65
8	1	0

Figura 4-74: Valori amplitude relativa allo spostamento imposto

4.4.3.5 Step di carico e tolleranze – Fase 2: test 1

Anche per questa seconda fase dell'analisi è necessario attivare il solutore di analisi non lineari per geometria (Figura 4-75).

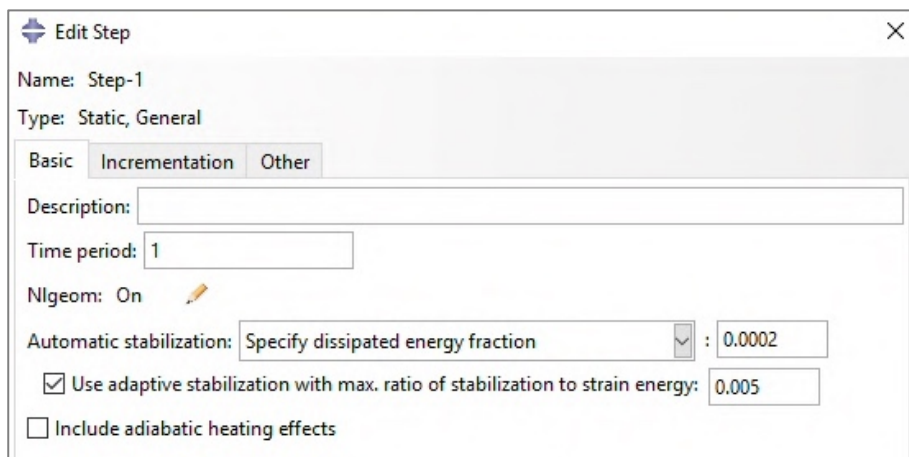


Figura 4-75: Attivazione solutore analisi con non linearità per geometria e stabilizzazione adattiva automatica

A differenza di prima, però, viene utilizzata una stabilizzazione dell'analisi differente. Viene infatti scelta la stabilizzazione automatica tramite “Specify dissipated energy fraction”. Questo tipo di stabilizzazione, infatti, permette di avere una convergenza migliore ma senza influire di molto sulla correttezza dei risultati finali.

Il fattore di smorzamento utilizzato per il calcolo delle forze viscosi, perciò, è molto minore di quello impostato a priori precedentemente per la Fase 1 (per la Fase 1 era stato impostato 0,0002, ora il valore è dell'ordine di 2×10^{-7}) e viene calcolato in automatico dopo il primo incremento di carico dal programma in modo tale che, l'energia dissipata per un dato incremento con caratteristiche simili al primo incremento, sia una piccola frazione dell'energia di deformazione.

Al posto quindi di impostare il valore specifico dello smorzatore, come nella *Fase 1*, viene impostata la cosiddetta “Frazione di energia dissipata” (dissipated energy fraction). Inoltre, come accennato in precedenza, lo schema di stabilizzazione automatica con fattore di smorzamento, può essere sia costante che variabile lungo l’evoluzione dell’analisi. Per la *Fase 1*, non avendo necessità di avere dei risultati molto attendibili in termini tensionali, si era scelto di mantenere lo smorzamento costante. Lo schema adattivo (quindi con smorzamento variabile nel tempo) però, risulta essere migliore quando si vuole mantenere le forze viscoso con un ordine di grandezza basso e quindi ottenere dei risultati il più possibile attendibili come in questo caso.

Viene quindi applicata la spunta su tale caratteristica.

In particolare in questo approccio il fattore di smorzamento è controllato dalla storia di convergenza e dal rapporto tra l’energia dissipata dallo smorzamento viscoso e l’energia di deformazione totale. Se il comportamento di convergenza è problematico, Abaqus in automatico aumenta il fattore di smorzamento. D’altra parte se le instabilità diminuiscono, il programma può ridurre tale fattore autonomamente [8].

Il rapporto fra l’energia dissipata dallo smorzamento viscoso e l’energia di deformazione totale è limitato da una tolleranza di precisione specificata (in questo caso 0,005). Tale tolleranza è imposta a livello globale per l’intero modello e il suo valore è stato scelto dopo averlo calibrato grazie a diverse analisi di tentativo.

Riassumendo quindi, grazie alla stabilizzazione adattiva, il fattore di smorzamento, cambia nel tempo e si adatta all’evoluzione dell’analisi e lo smorzamento viene limitato superiormente dal rapporto fra l’energia dissipata dallo smorzamento viscoso e l’energia di deformazione totale.

Si identificano successivamente gli incrementi di carico massimi e minimi ed il numero di iterazioni massime come segue in *Figura 4-76*:

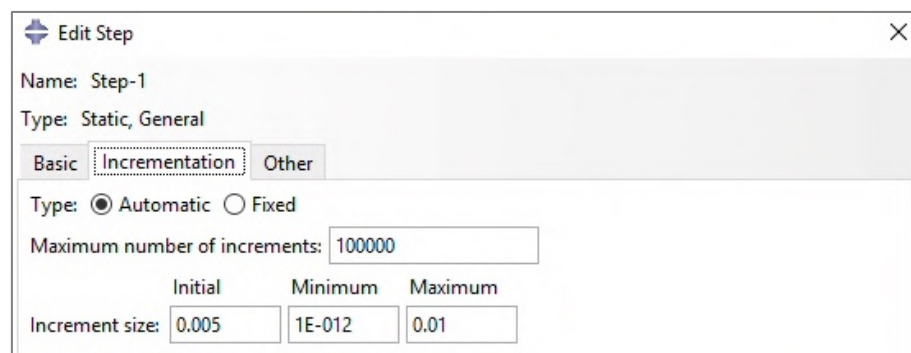


Figura 4-76: Incremento di carico iniziale, massimo e minimo e numero massimo di incrementi

Gli incrementi sono quindi pari a 0,005, cioè sono necessari 200 step per arrivare al 100% dell'analisi, con un incremento massimo di 0,01. Il massimo permette, qual ora gli step precedenti con incremento 0,005 vadano a convergenza, di aumentarli in modo da diminuire il tempo necessario per arrivare al 100% dell'analisi.

Come incremento minimo, invece, viene scelto 1×10^{-12} il quale rappresenta il minimo valore possibile sotto il quale l'analisi si blocca.

Inoltre si impone un numero massimo di interazioni possibili pari a 100'000.

Oltre a questo si ripristinano i valori di default di alcuni parametri del solutore modificati in precedenza (Figura 4-77):

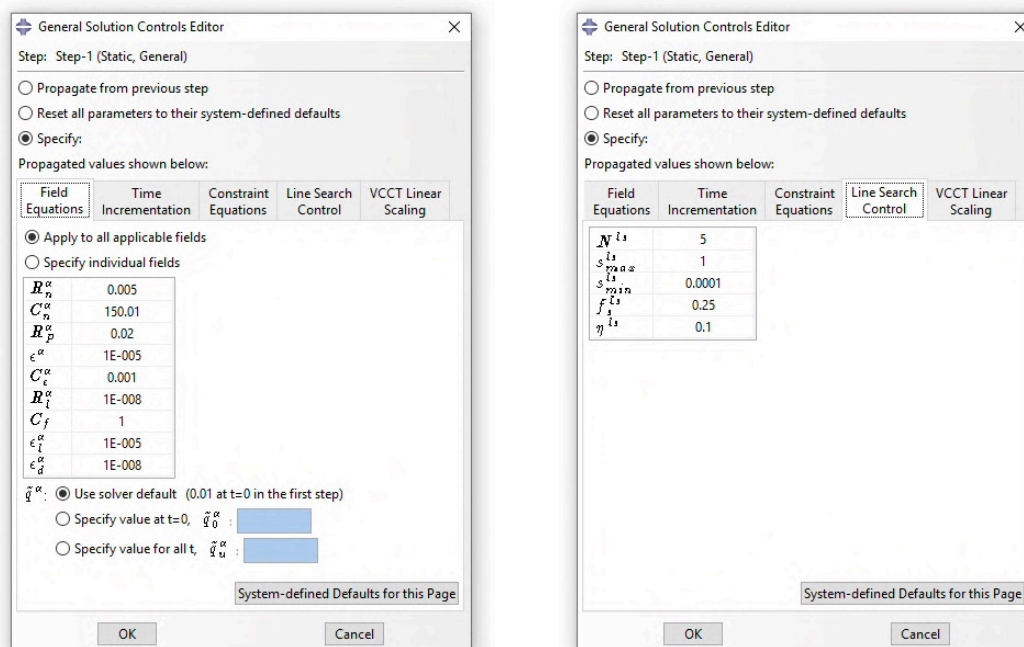


Figura 4-77: Modifiche dei parametri del solutore

Per la precisione sono rimasti invariati, rispetto al modello precedente, i parametri che non interferiscono nella precisione dei risultati ma che aiutano a migliorare la convergenza (I_0 , I_R , C_n^α).

È stato aumentato a 5 il valore di N^{ls} il quale aiuta a migliorare la convergenza senza perdere di precisione nei risultati finali.

Mentre sono stati ripristinati i valori originari di default dei parametri R_n^α e \tilde{q}^α i quali incidono negativamente nel risultato finale in termini di tensioni e reazioni vincolari.

Il modello, lungo l'evoluzione dell'analisi, si presenta come segue nelle *Figure 4-79, 4-80, 4-81*:



Figura 4-79: *Configurazione iniziale di partenza*



Figura 4-80: *Posizione di massima spinta in avanti della protesi*



Figura 4-81: Posizione di massima spinta indietro della protesi

4.4.5 Realizzazione ed importazione scarpetta semplificata

Realizzato il modello semplificato senza scarpetta, si cerca di crearne uno nuovo che riesca ad approssimare il comportamento dello scarpone nella sua interezza.

Per fare ciò, si crea una scarpetta semplificata grazie ad un CAD tridimensionale (Figura 4-82 (a)). Questa viene realizzata solo nella parte alta dello scarpone e con degli spessori approssimativi, i quali consentono però di riprodurre correttamente il comportamento del test dello scarpometro effettuato sullo scarpone completo di tutte le sue componenti.

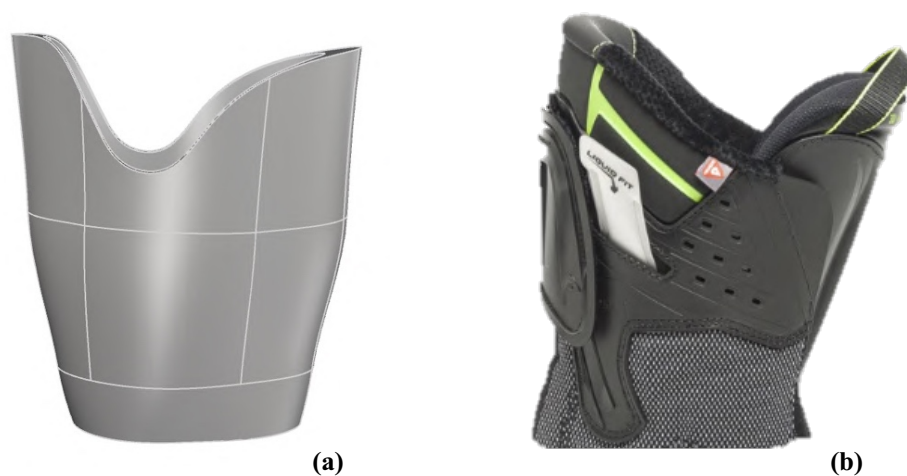


Figura 4-82: Confronto scarpetta reale e modello tridimensionale realizzato

Conclusa si può esportare in formato “.stp” ed importare in Abaqus come “Parte”.

Come fatto per la protesi è necessario crearla nella posizione corretta e con la giusta inclinazione in modo da non doverla successivamente muovere.

A differenza della protesi però, la scarpetta viene importata come elemento deformabile ed è perciò necessario definirne le caratteristiche del materiale.

Per semplicità, e per diminuire l’onere computazionale dell’analisi, tale scarpetta è stata creata in modo da contenere perfettamente la protesi: va quindi vincolata ad essa ed al suo rispettivo movimento. Questa risulta essere un’approssimazione in quanto nella realtà, la scarpetta non è fissata alla protesi ma bensì è libera di muoversi. Ciò avrebbe comportato un numero elevato di altre incognite e di superfici di contatto aggiuntive e quindi si è deciso, dopo diverse analisi di tentativo, di approssimarla come detto. Successivamente nel §4.4.6.3 viene illustrato come realizzare il vincolo fra la scarpetta e la protesi.

Il modello, comprensivo di protesi e scarpetta, si presenta come segue in *Figura 4-83*:

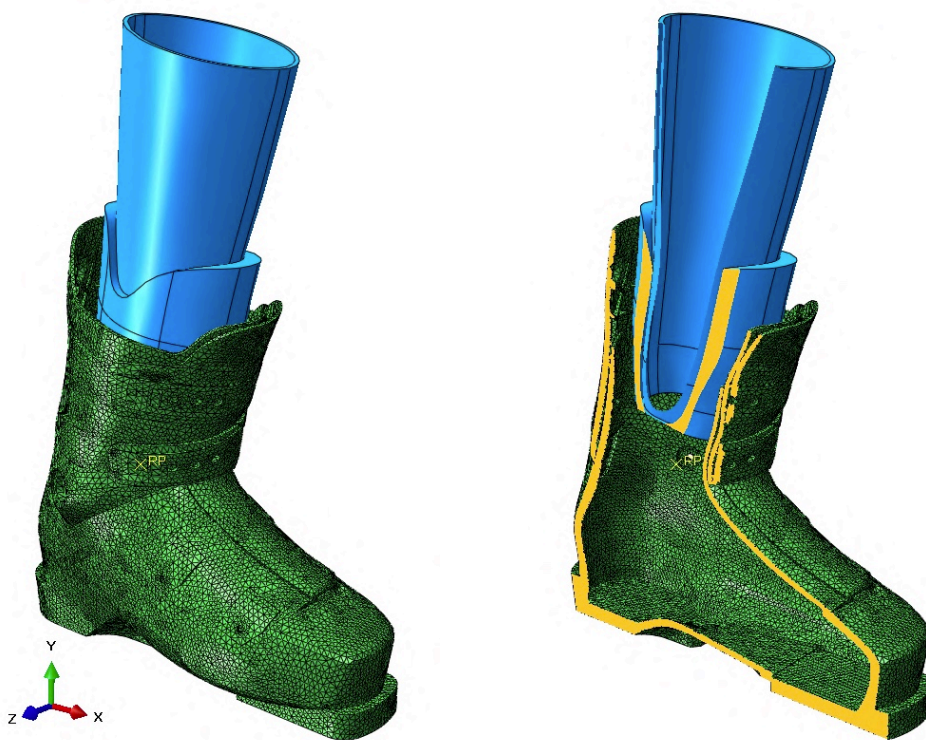


Figura 4-83: Modello in Abaqus comprensivo di protesi e scarpetta ed identificazione del Reference Point (RP)

4.4.6 Caratteristiche modello – Fase 2: test 2 (con scarpetta)

Si procede ora con l’assegnazione delle caratteristiche del materiale della scarpetta, la sua successiva meshatura, la creazione delle superfici di contatto e delle condizioni di vincolo.

4.4.6.1 Caratteristiche del materiale della scarpetta

Per quanto riguarda il materiale della scarpetta viene assunto con un valore arbitrario. Tale componente, infatti, è composta da varie parti e strati in diversi materiali e spessori aventi caratteristiche di cui non è stato possibile identificare valori di riferimento. Definire la legge costitutiva dei materiali che la compongono, quindi, è quasi impossibile. Si assume perciò, dopo diverse analisi di tentativo, un materiale elastico lineare avente le seguenti caratteristiche:

- Modulo elastico scarpetta: $E=50$ Mpa;
- Coefficiente di Poisson: $\nu=0,1$.

Una volta assegnate le proprietà il modello si presenta come segue in *Figura 4-84*:

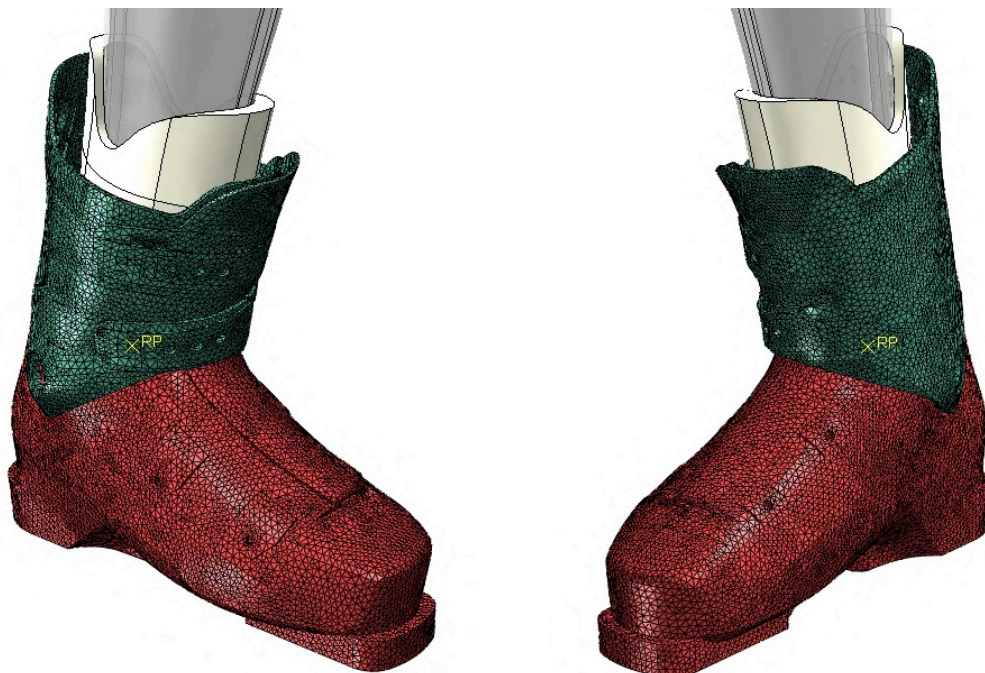


Figura 4-84: Modello FEM dopo l'assegnazione delle relative proprietà della scarpetta

4.4.6.2 Creazione della mesh della scarpetta

La scarpetta viene importata nel modello utilizzato in precedenza, quindi, non resta che creare solamente la mesh di tale elemento (in quanto le altre parti sono già discretizzate). Si sceglie di utilizzare una mesh delle stesse dimensioni e tipo di quella utilizzata per lo scarpone, quindi: tetraedrica, con funzioni di forma lineari (*Figura 4-85*). Questa volta, volendo analisi più precise, si attiva il controllo della distorsione della mesh.

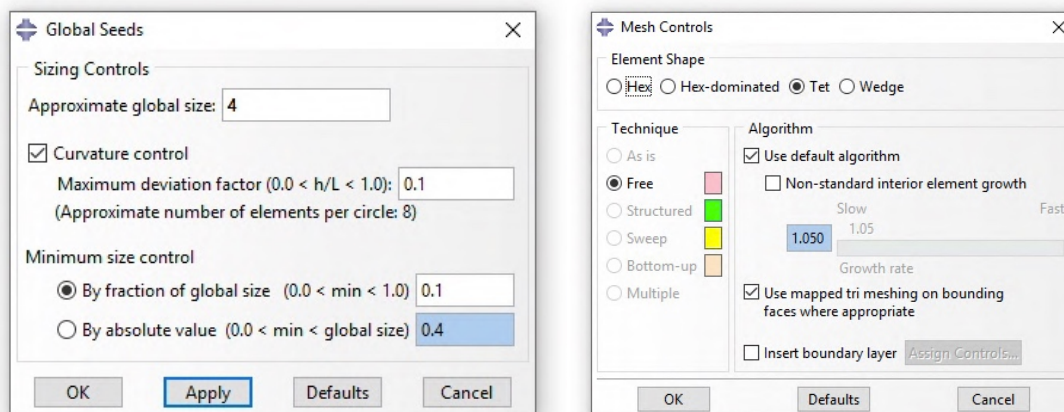


Figura 4-85: Caratteristiche iniziali di creazione della mesh della scarpetta

Si ottiene quindi il modello visibile in Figura 4-86:

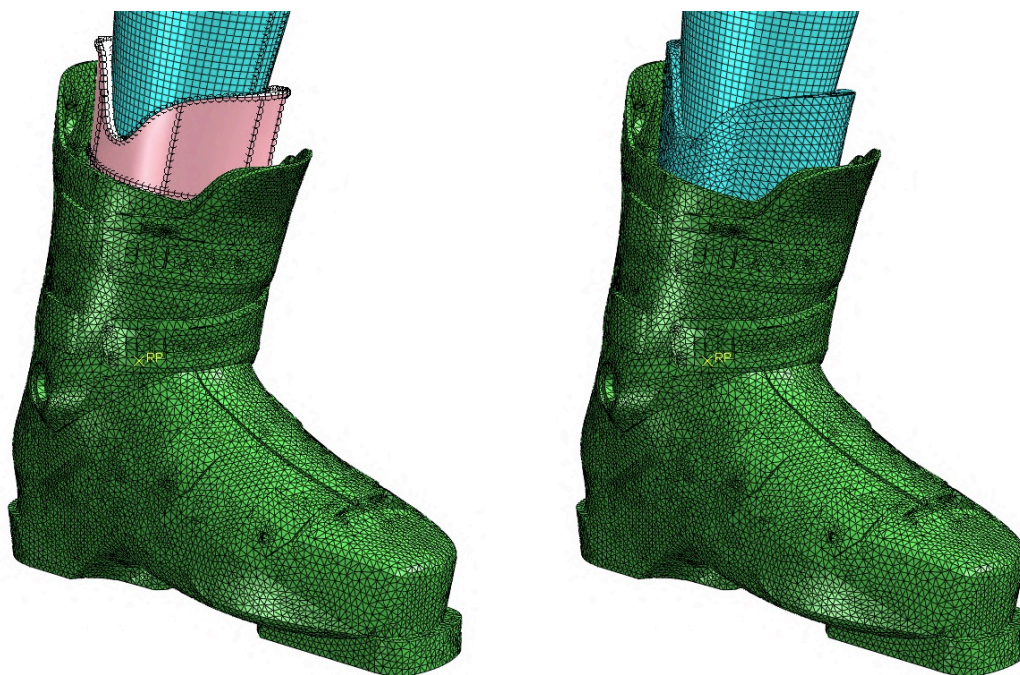


Figura 4-86: Operazione di meshatura della scarpetta

4.4.6.3 Superfici di contatto – Fase 2: test 2

Anche per quanto riguarda le superfici di contatto vengono utilizzate quelle create in precedenza, si deve aggiungere, però, quelle relative alla scarpetta:

- Superficie di contatto Scarpetta:

Si deve identificare la superficie interna, la quale sarà in contatto con la protesi.

(Figura 4-87 a pagina successiva)

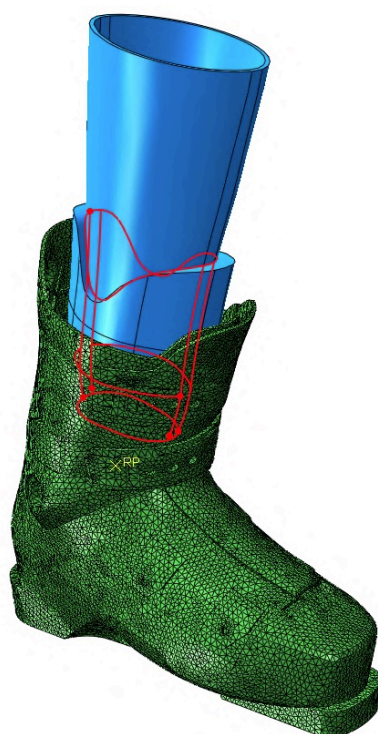


Figura 4-87: *Superficie di contatto interna della scarpetta*

Successivamente si identifica anche la superficie esterna, la quale invece andrà in contatto con le superfici precedentemente identificate nello scarpone (*Figura 4-88*):

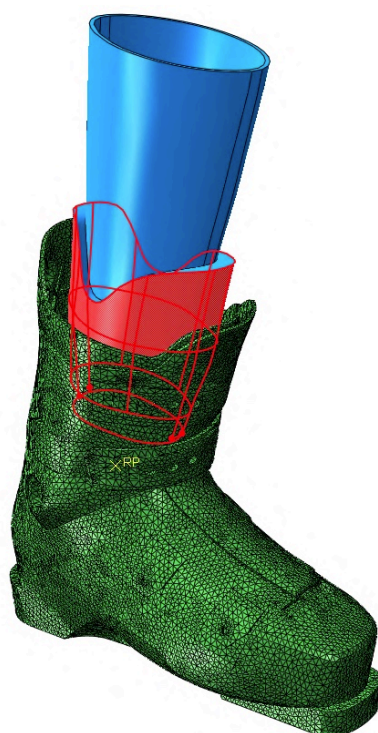


Figura 4-88: *Superficie di contatto esterna della scarpetta*

Si definiscono ora i tipi di interazione fra le differenti superfici:

1) Contatto di tipo Surface to Surface

Tale contatto viene definito per le superfici appartenenti allo scarpone. Per la precisione per la superficie interna del gambetto (*Figura 4-89*) e la superficie anteriore e posteriore dello scafo (*Figura 4-90*).

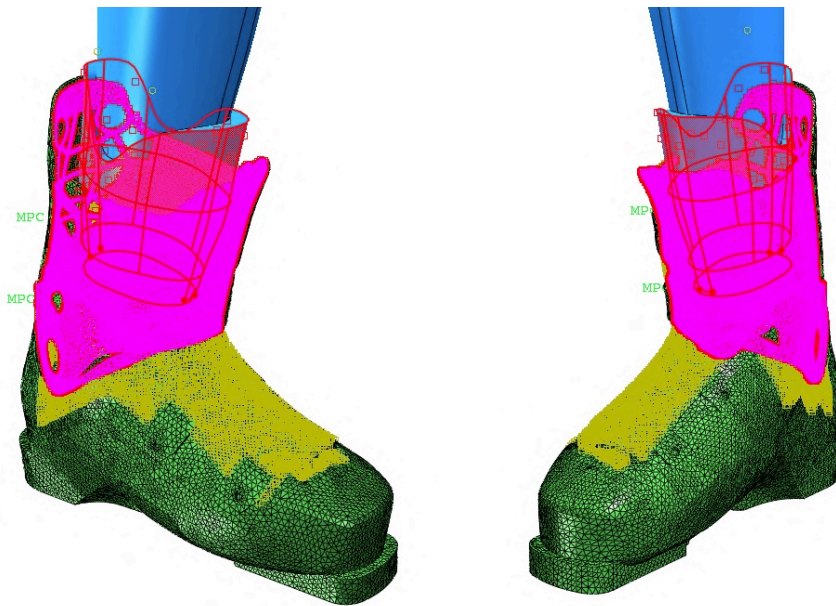


Figura 4-89: *Contatto di tipo Surface to Surface fra scarpetta e gambetto*

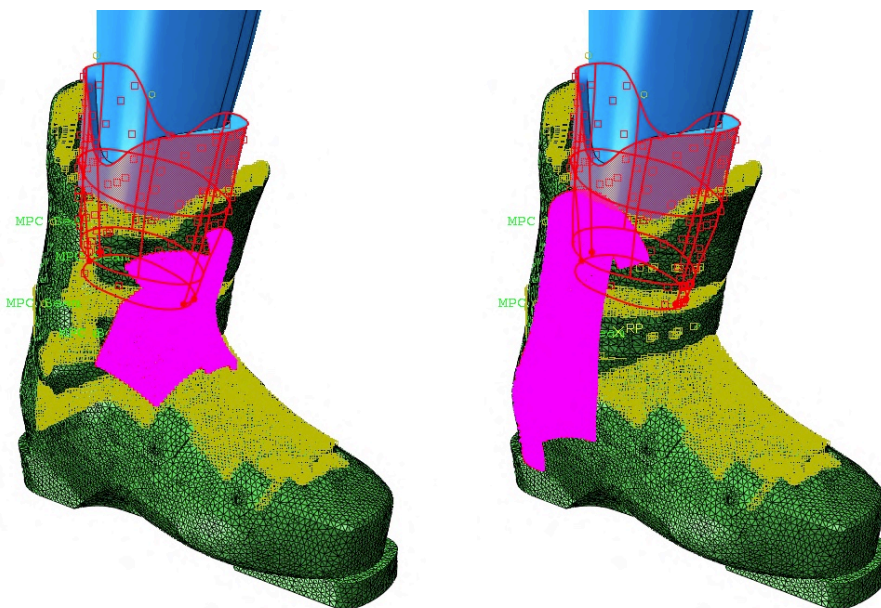


Figura 4-90: *Contatto di tipo Surface to Surface fra scarpetta e scafo*

2) Contatto di tipo Tie Constrain

Come accennato precedentemente, per non rendere il modello troppo complesso, e diminuire l'onere computazionale, si è scelto di vincolare la scarpetta alla protesi. Per fare questo è stato utilizzato un contatto di tipo vincolato come si può vedere in *Figura 4-91*. Ciò ha permesso di vincolare la scarpetta direttamente alla protesi (essendo la superficie interna dell'una a diretto contatto con l'esterno dell'altra) in modo da ruotarla e muoverla, senza dover utilizzare dei vincoli aggiuntivi e rimuovendo eventuali labilità del sistema.

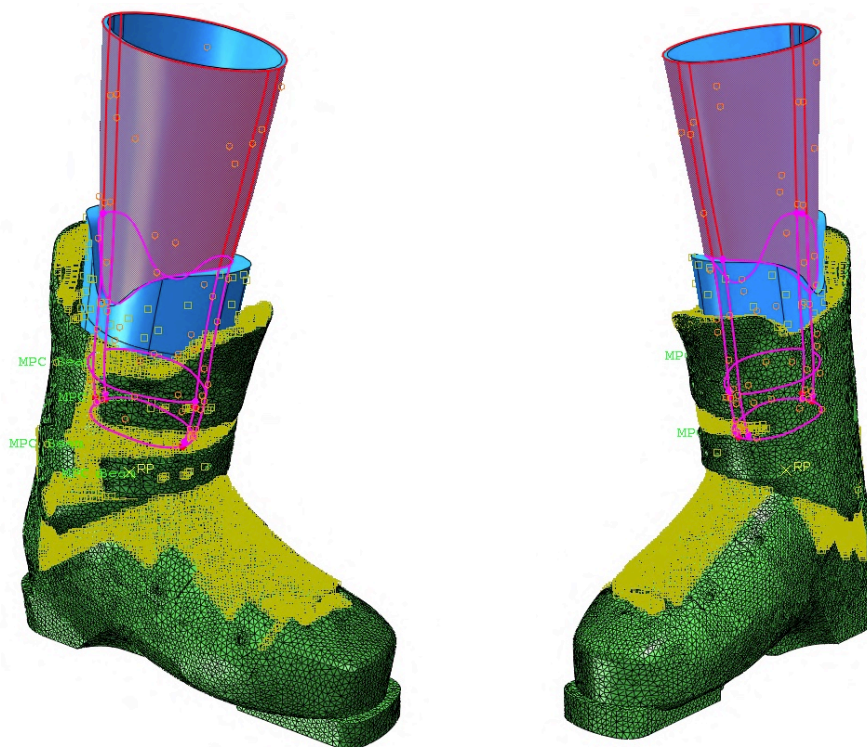


Figura 4-91: *Contatto di tipo Tie Constrain fra protesi e scarpetta*

Per quanto concerne i vincoli relativi ai ganci per la chiusura dello scarpone, sono stati mantenuti quelli creati in precedenza nel §4.4.3.3. per il *Test 1*.

4.4.6.4 Condizioni di vincolo (BCs) e Amplitude – Fase 2: test 2

Le condizioni di vincolo sono rimaste identiche a quelle assegnate in precedenza per quanto riguarda il fissaggio dello scarpone e la rotazione della protesi (gli angoli di rotazione rimangono invariati ed anche i punti di applicazione).

Quello che viene modificata, invece, è la funzione relativa allo spostamento del Reference Point (RP). Questo modello, infatti, dovrà avere una funzione differente, in quanto, si deve tenere in considerazione la presenza della scarpetta.

Tale amplitude avrà quindi il seguente andamento visibile in *Figura 4-92*.

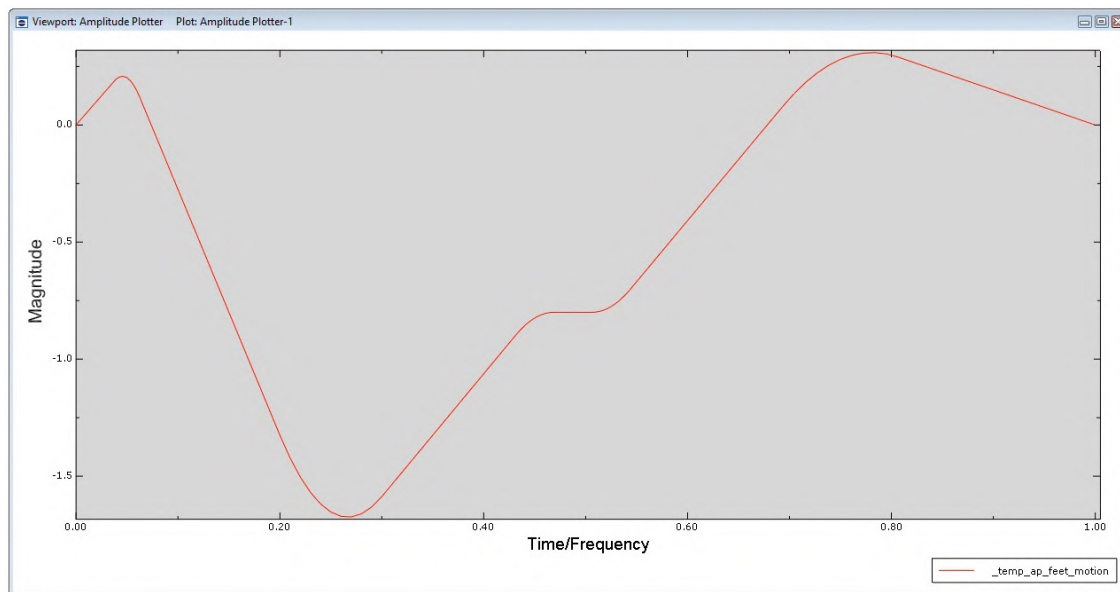


Figura 4-92: Amplitude relativa allo spostamento imposto

Lo scopo di tale funzione è identico a quello spiegato in precedenza, questa volta, però, essendoci la scarpetta, il movimento è un po' differente in quanto bisogna tenere conto di questa nuova componente (l'amplitude è stata calibrata dopo differenti analisi di tentativo). I valori specifici saranno i seguenti (*Figura 4-93*):

	Time/Frequency	Amplitude
1	0	0
2	0.05	0.25
3	0.25	-1.85
4	0.45	-0.8
5	0.525	-0.8
6	0.75	0.375
7	1	0

Figura 4-93: Valori amplitude relativi allo spostamento imposto

4.4.6.5 Step di carico e tolleranza – Fase 2: test 2

Gli incrementi di carico, i parametri del solutore ed il tipo di stabilizzazione rimangono identici al modello precedente.

L'unica cosa che si modifica è il valore massimo del rapporto fra l'energia dissipata dallo smorzamento viscoso e l'energia di deformazione totale. Questo valore viene aumentato per consentire all'analisi di raggiungere la convergenza in quanto, in precedenza, essendoci meno incognite da calcolare, si poteva inserire un valore minore.

Il modello, lungo l'evoluzione dell'analisi, si presenta come segue nelle *Figure 4-95,4-96,4-97*:



Figura 4-95: *Configurazione iniziale di partenza*



Figura 4-96: *Posizione di massima spinta in avanti della protes*



Figura 4-97: Posizione di massima spinta indietro della protesi

Capitolo 5

Analisi dei risultati

5.1 Confronto risultati ottenuti con i test sperimentali

Si procede ora, come prima cosa, confrontando i grafici finali realizzati tramite i modelli agli elementi finiti con i grafici ottenuti dai test sperimentali.

5.1.1 Test 1 (senza scarpetta)

Si espongono, in primo luogo, i risultati riferiti al modello *Test 1*, cioè quello relativo allo scarpone senza la scarpetta interna. Come anticipato, la prova viene eseguita due volte, una a temperatura ambiente (+23°C) ed una a -10°C.

Questo viene fatto solo ai fini didattici per poter calibrare e valutare la correttezza del modello. Generalmente infatti il test sperimentale viene svolto solamente a -10°C.

Per lo scopo di questo elaborato, però, è stata svolta la prova sperimentale ad entrambe le temperature. Grazie ai due test è stato quindi possibile verificare la validità del modello computazionale. La variabilità del materiale, con il cambio di temperatura, infatti, è elevata, si passa da un modulo elastico di 320 Mpa a temperatura ambiente ad uno di 587 Mpa a -10°C (gambetto, §1.1.3). Nel modello FEM, perciò, in termini di dati di input, la differenza fra la prima e la seconda simulazione sta solamente nel cambio del modulo elastico del materiale. Ci si aspetta dunque che, calibrato il modello a temperatura ambiente (+23°C), grazie al confronto con i relativi dati sperimentali, modificando il modulo elastico per simulare la temperatura di -10°C, i risultati rispecchino ancora una volta il test stesso (questa volta confrontati con i relativi dati sperimentali estrapolati dalla prova a -10°C). Se questo avviene, significa che il modello è corretto e che le approssimazioni fatte permettono di avere un'accuratezza adeguata.

Nelle *Figure 5-1* e *5-2* vengono esposte tre differenti curve: in blu viene identificata la curva relativa al ciclo di carico estrapolabile dalla prova sperimentale (in particolare si assume come riferimento il primo ciclo di carico), in giallo tratteggiato vengono plottate le reazioni vincolari relative al Reference Point (RP) in cui è stata applicata la rotazione, ed in arancione la sommatoria delle reazioni vincolari nei punti in cui sono state applicate le condizioni al contorno (BCs, quindi la suola, la punta ed il tacco). Tali prove (la gialla e l'arancione) dovrebbero sovrapporsi. Un'eventuale differenza fra le due curve può però

essere dovuta all'aggiunta delle forze viscosi nell'equilibrio, nei casi in cui il modello faccia fatica ad andare a convergenza (e quindi lo smorzamento abbia valori elevati).

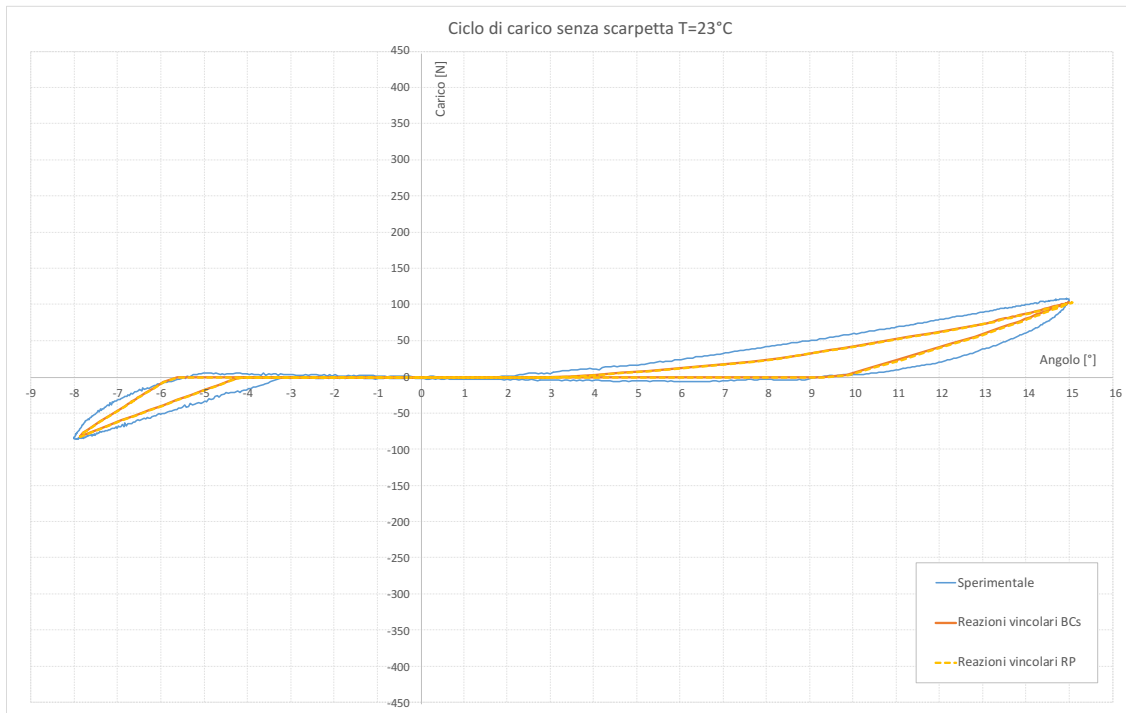


Figura 5-1: Grafico ciclo di carico della prova sperimentale e del modello FEM senza scarpetta a +23°C

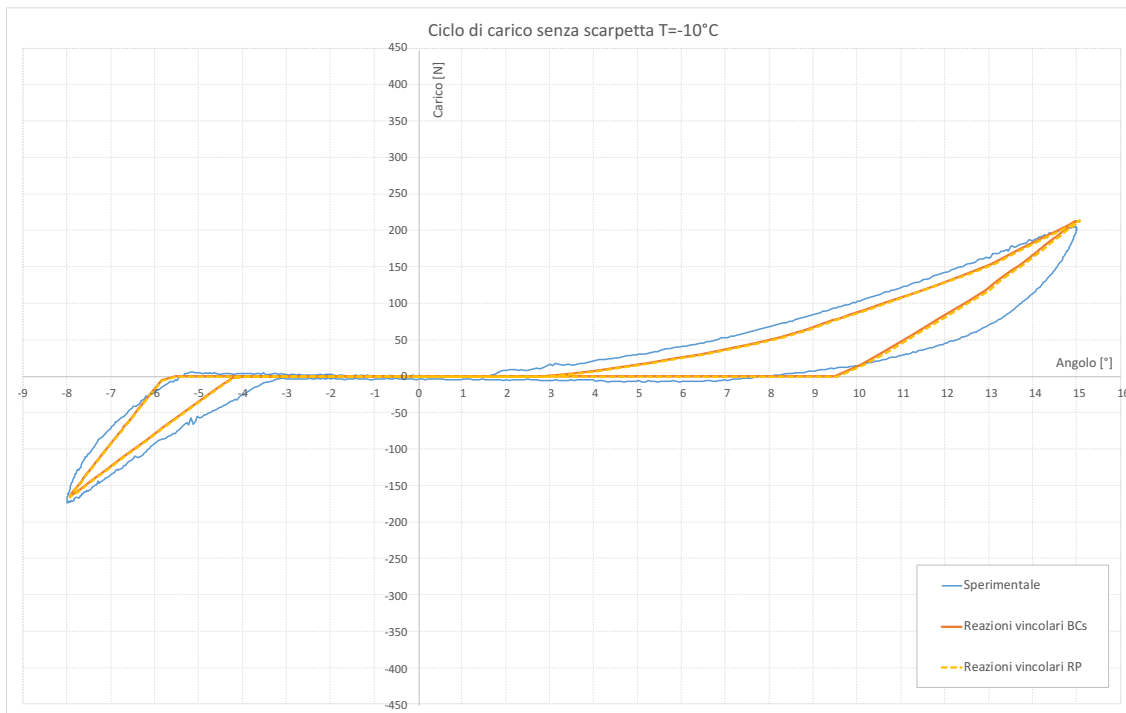


Figura 5-2: Grafico ciclo di carico della prova sperimentale e del modello FEM senza scarpetta a -10°C

Come si può vedere sia per quanto riguarda le curve a temperatura ambiente che a -10°C , i grafici realizzati con il modello numerico rispecchiano molto bene quelli della prova sperimentale, ciò conferma che il modello è stato realizzato in maniera corretta.

Alcune diversità si possono notare nel ramo discendente, soprattutto lungo la parte di scarico dei $+15^{\circ}$. Questa differenza è influenzata da diversi fattori. Uno dei principali è sicuramente la parte di scarpetta tagliata, necessaria per poter inserire la protesi nello scarpone. Essa infatti crea un certo contatto che, nel momento in cui c'è lo scarico, diminuisce meno rapidamente. Altra differenza sta nel comportamento del materiale che viene considerato, come approssimazione, con una legge di tipo elastico lineare. Nella realtà tale componente ha però un comportamento differente e, per rispecchiare completamente i risultati della prova sperimentale, sarebbe necessario realizzare uno studio approfondito sulla legge elastica di tale materiale. Inoltre va considerata anche l'approssimazione eseguita per quanto riguarda i ganci di chiusura (i quali sono stati realizzati tramite un vincolo infinitamente rigido).

In generale però, come detto, si può affermare che il modello approssimi in maniera più che adeguata il comportamento della prova sperimentale ritrovando, in entrambi i casi, a diverse temperature, lo stesso ordine di grandezza delle reazioni vincolari.

Altre considerazioni verranno fatte successivamente con l'analisi tensionale e degli spostamenti.

Nella *Figura 5-3* vengono inseriti entrambi i grafici rappresentati in *Figura 5-1* e *5-2*.

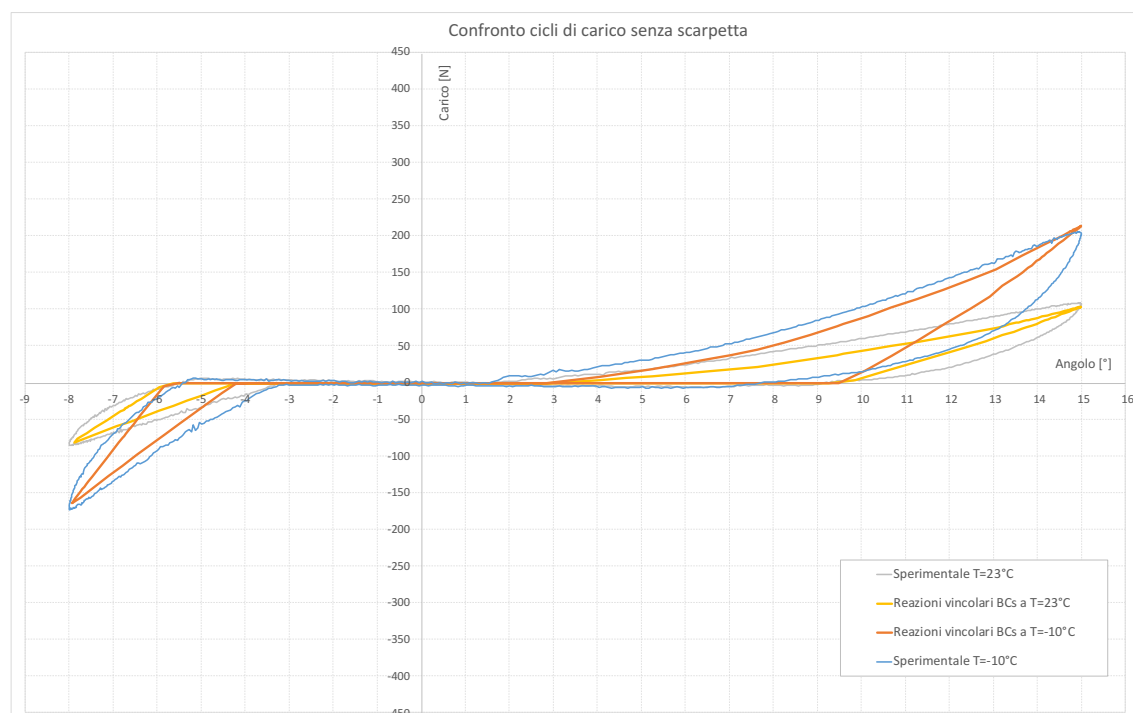


Figura 5-3: Confronto cicli di carico Test 1 (senza scarpetta) a $+23^{\circ}\text{C}$ e a -10°C

5.1.2 Test 2 (con scarpetta)

Questo secondo test è svolto con la scarpetta semplificata. Anche in questo caso sono state realizzate le due differenti configurazioni, a temperatura ambiente (+23°C) e a -10°C. Qui, oltre alle incertezze enunciate per il test precedente, si aggiunge l'incognita della scarpetta. Questa infatti viene realizzata, come spiegato, con materiali differenti di cui non è stato possibile reperire nessuna documentazione. Le sue caratteristiche sono state quindi assunte in maniera approssimata.

In generale quello che ci si aspetta è che le forze crescano notevolmente, come visto nel *Capitolo 1*. Questo è dovuto al fatto che la scarpetta, anche se di un materiale molto meno resistente rispetto allo scarpone, crea uno spessore aggiuntivo non indifferente.

Tale spessore, avendo mantenuto costante l'angolo di inclinazione (15° in avanti e 8° indietro) fa sì che lo scarpone, per arrivare alla configurazione di massimo carico, debba inclinarsi maggiormente. Ciò porta quindi ad avere delle reazioni vincolari quasi doppie rispetto al caso senza scarpetta (*Test 1*) enunciato al §5.1.1.

Oltretutto, la presenza della scarpetta con il suo spessore, porta a contatto la protesi con lo scarpone per angoli minori quindi il ciclo risulta più aperto rispetto al precedente.

Queste valutazioni sono già state fatte con i dati relativi alla prova sperimentale, ci si aspetta ora che il modello agli elementi finiti rispecchi tali considerazioni in maniera adeguata, ad entrambe le temperature (*Figure 5-4 e 5-5 e confronto in Figura 5-6*).

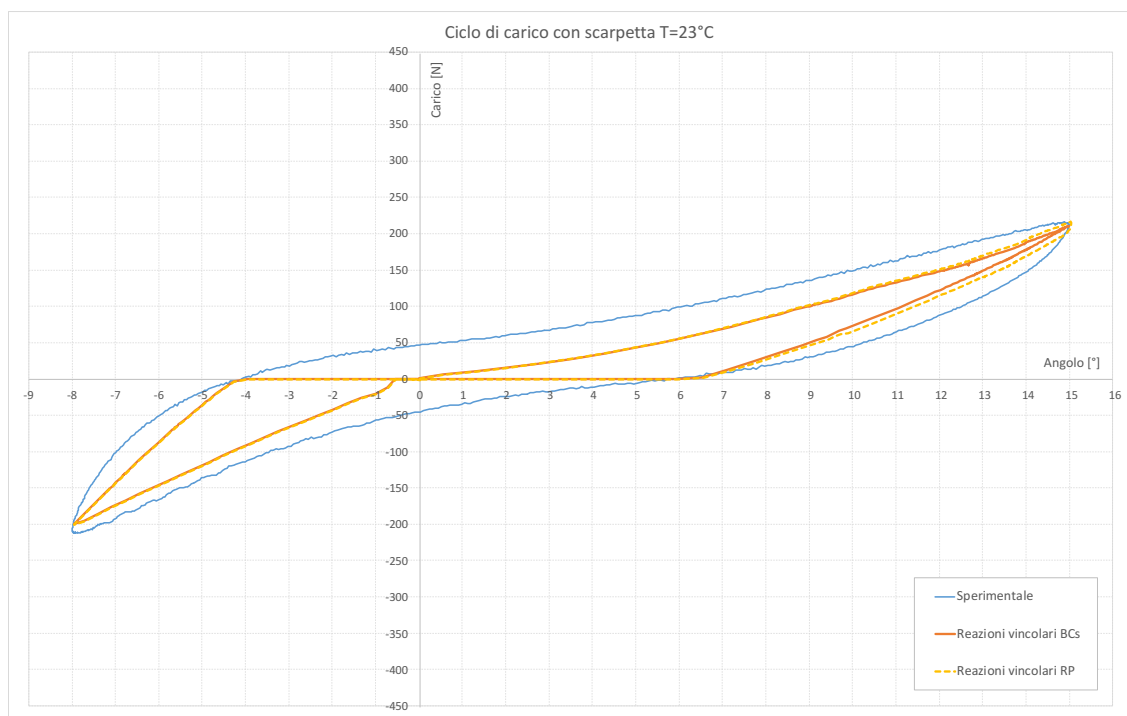


Figura 5-4: Grafico ciclo di carico della prova sperimentale e del modello FEM con scarpetta a +23°C

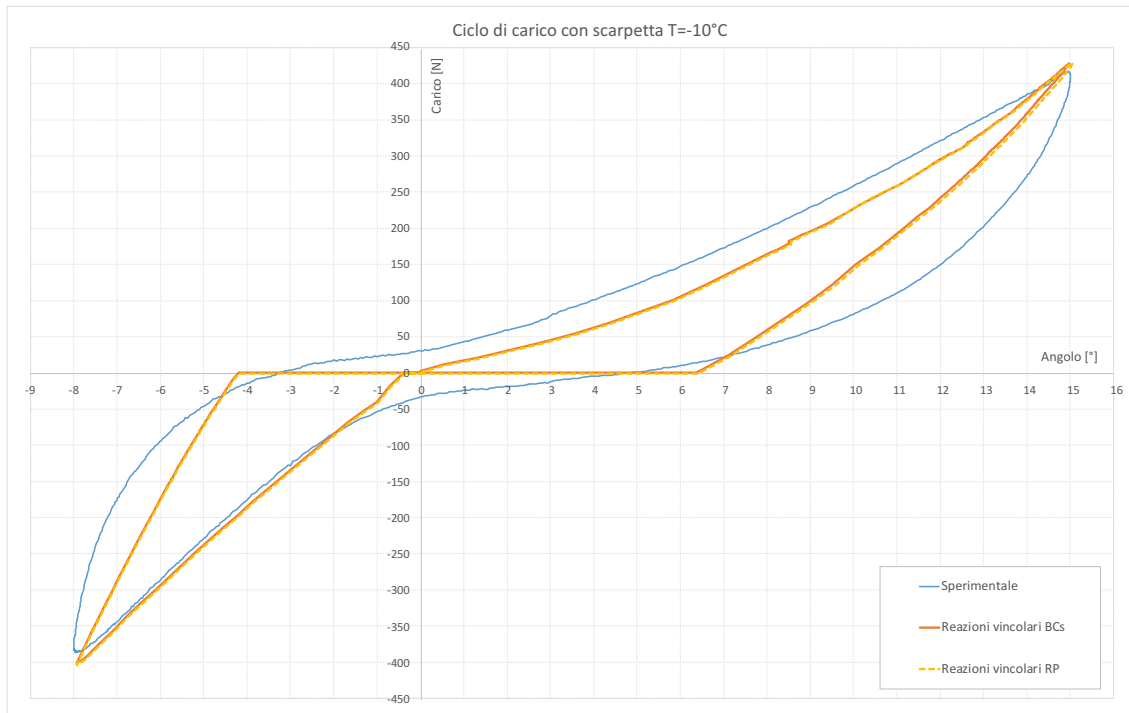


Figura 5-5: Grafico ciclo di carico della prova sperimentale e del modello FEM con scarpetta a -10°C

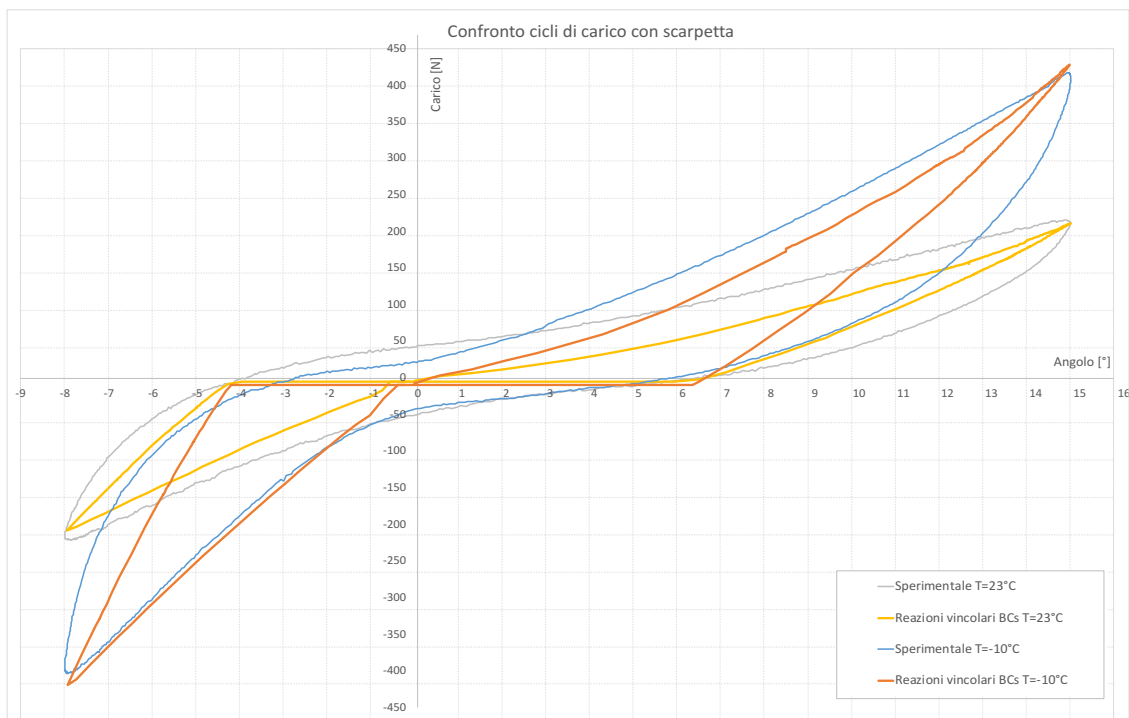


Figura 5-6: Confronto cicli di carico Test 2 (senza scarpetta) a $+23^{\circ}\text{C}$ e a -10°C

Come si può vedere il modello numerico rispecchia molto bene i dati estrapolati dalla prova sperimentale. Come anche nel caso precedente, però, la parte che subisce una maggior differenza è il ramo di scarico, accentuata ancor più dalla presenza della scarpetta. Questa nuova componente, infatti, contribuisce a mantenere il contatto fra la

protesi e lo scarpone per tutto il ciclo, sia nella parte di carico in avanti che indietro. È molto evidente quindi la differenza fra le due curve nelle zone in cui prevale la rigidità della scarpetta (fase di scarico). Questa è stata difatti importata in maniera semplificata e con delle caratteristiche del materiale approssimate, le quali, non permettono di riprodurre al 100% l'andamento reale della curva. In generale, però, si può dire che il modello FEM, anche per questo secondo test, approssimi in maniera adeguata la prova sperimentale ritrovando un andamento simile (sia nella parte di carico che nell'ordine di grandezza). Una precisazione, poi, è necessaria per quanto riguarda il grafico relativo alla prova realizzata a +23°C (Figura 5-4). Nella spinta in avanti si può vedere una differenza fra il grafico relativo alle reazioni vincolari del RP e quelle relative alle BCs. Questa differenza è dovuta, come introdotto al §5.1.1, dall'attivazione della stabilizzazione automatica. Come spiegato al §4.2.2.5, infatti, l'aver applicato questa stabilizzazione aggiunge all'equilibrio globale del sistema le forze viscosse. Quando i due grafici si separano, dunque, vuol dire che è aumentato lo smorzamento (in quanto l'analisi è adattiva) e sono aumentate di conseguenza tali forze che hanno permesso di far convergere l'analisi. In particolare, senza l'ausilio di queste forze non si sarebbe arrivati al 100% dell'analisi.

5.1.3 Confronto Test 1 e Test 2

Si confrontano ora i grafici alla stessa temperatura fra i due test (Figura 5-7 e 5-8).

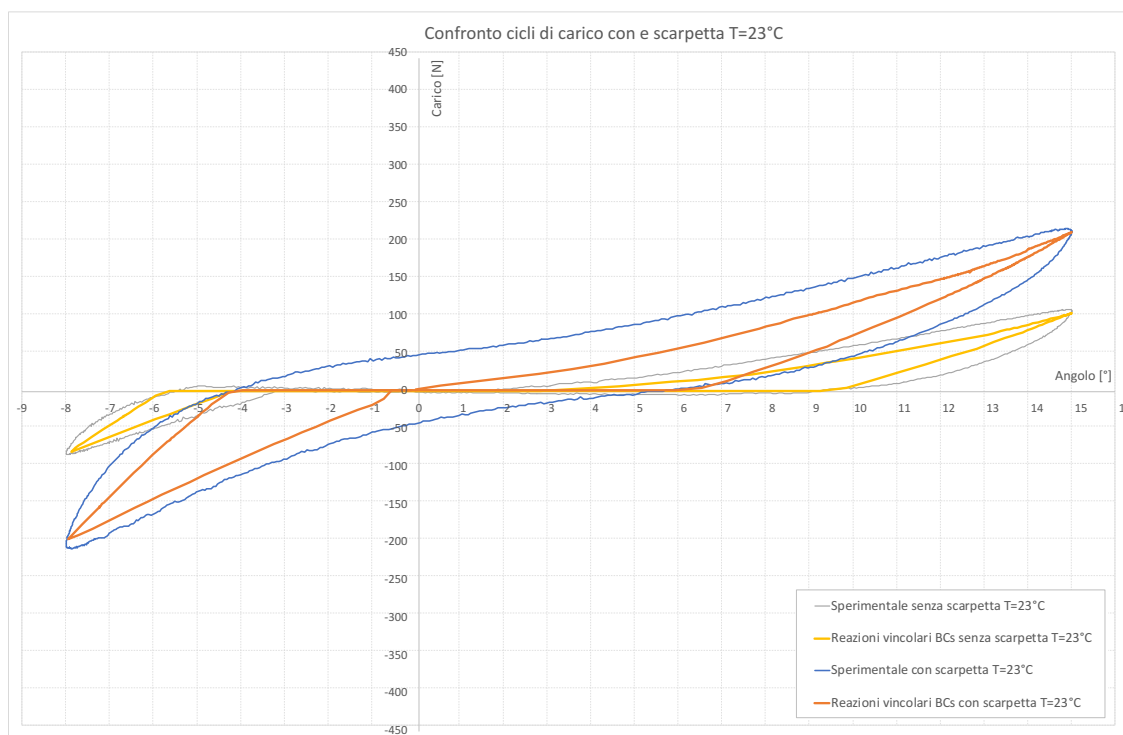


Figura 5-7: Confronto cicli di carico Test 1 (senza scarpetta) e Test 2 (con scarpetta) a +23°C

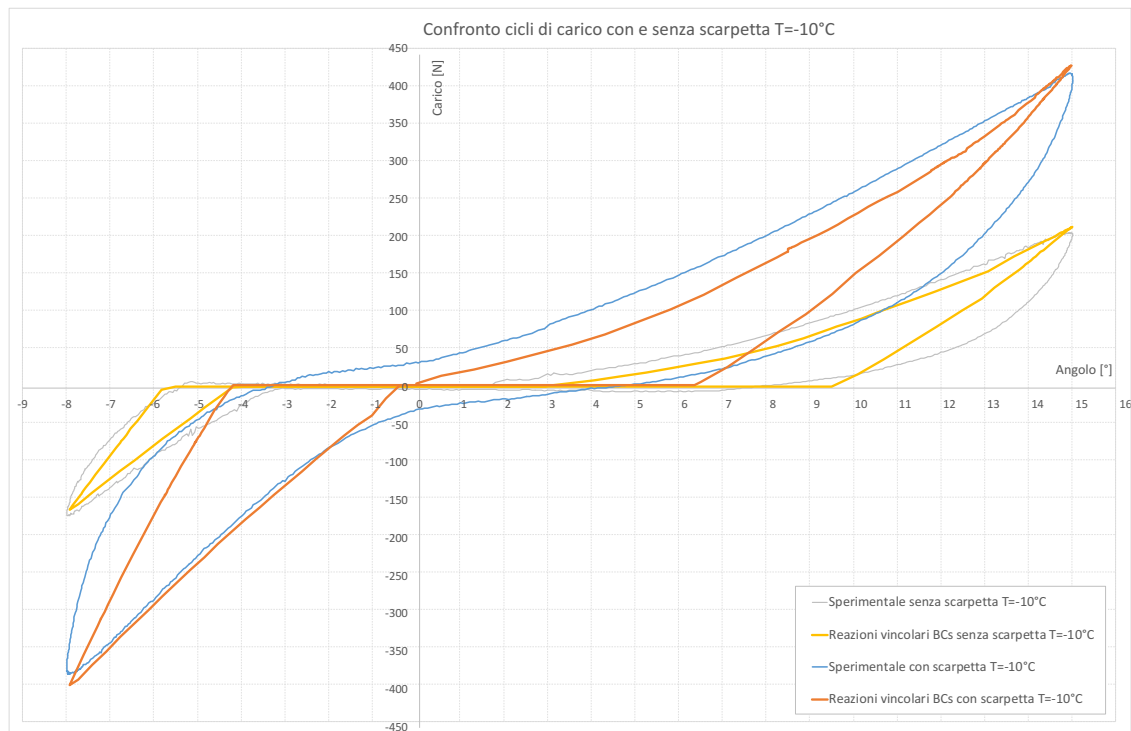


Figura 5-8: Confronto cicli di carico Test 1 (senza scarpetta) e Test 2 (con scarpetta) a -10°C

Come già spiegato la differenza fra i due grafici (con e senza scarpetta) è evidente a riprova di quanto la presenza della scarpetta vada ad influenzare tale test.

Nello specifico si può notare che la forza necessaria per piegare lo scarpone è praticamente raddoppiata sia nella spinta in avanti che in quella indietro.

Ciò è dovuto, come detto, dallo spessore della scarpetta, che, anche se molto deformabile, arriva ad un punto in cui non può più essere schiacciata e di conseguenza, essendo l'angolo di inclinazione invariato, tende a far muovere maggiormente lo scarpone.

In generale si può affermare che l'andamento fra i due casi è simile perché la prova è governata dalla rigidità dello scarpone.

È possibile inoltre fare un'altra considerazione riguardo l'ampiezza dei cicli.

La presenza della scarpetta, infatti, mantiene il contatto attivo (tra la protesi e lo scarpone) per tutto il ciclo (carico in avanti, scarico, carico indietro, scarico) conferendogli cioè un andamento differente, in particolare i cicli risultano essere più aperti.

Tali considerazioni sono valide sia per la prova sperimentale che per il modello FEM.

Avendo quindi i cicli un andamento corretto è possibile affermare che i due modelli siano stati calibrati correttamente.

Si può allora passare ad una analisi dei risultati aggiuntivi estrapolabili dal modello numerico (a differenza di quanto sia possibile fare con la prova sperimentale dove, i dati definibili, si fermano a questo punto).

5.2 Analisi risultati aggiuntivi ottenuti

5.2.1 Test 1 (senza scarpetta)

Si espongono di seguito i risultati dei due casi relativi alle due temperature 23°C e -10°C . Prima vengono illustrati i risultati quando la protesi è in avanti ($+15^{\circ}$, da *Figura 5-9* a *Figura 5-16*), successivamente quando è indietro (-8° , da *Figura 5-17* a *Figura 5-24*). In seguito si commentano quelli più significativi.

5.2.1.1 Carico in avanti ($+15^{\circ}$) – Test 1

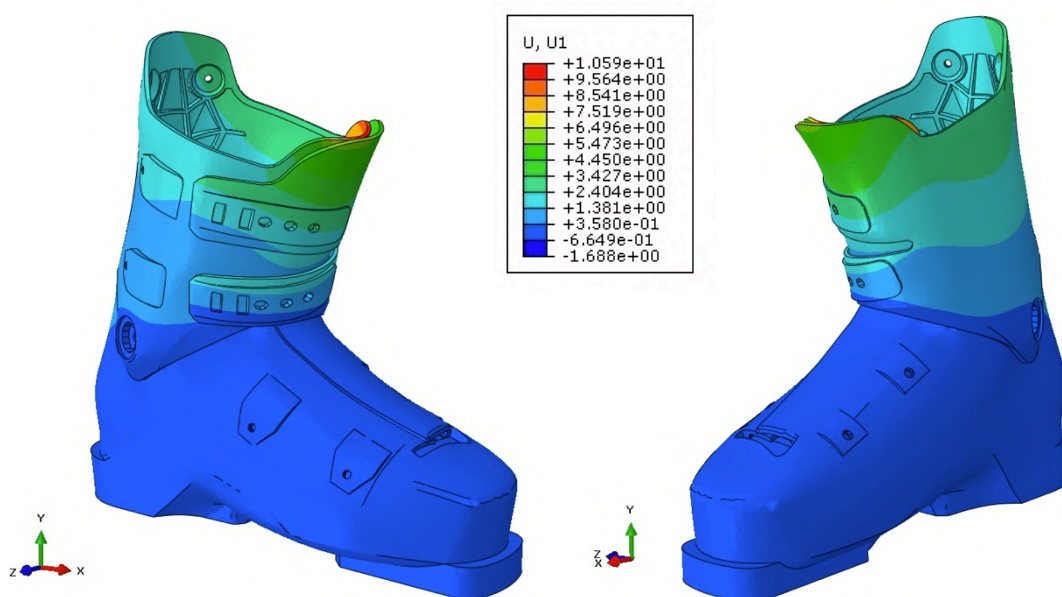


Figura 5-9: *Spostamenti lungo X Test 1, carico in avanti, temperatura $+23^{\circ}\text{C}$*

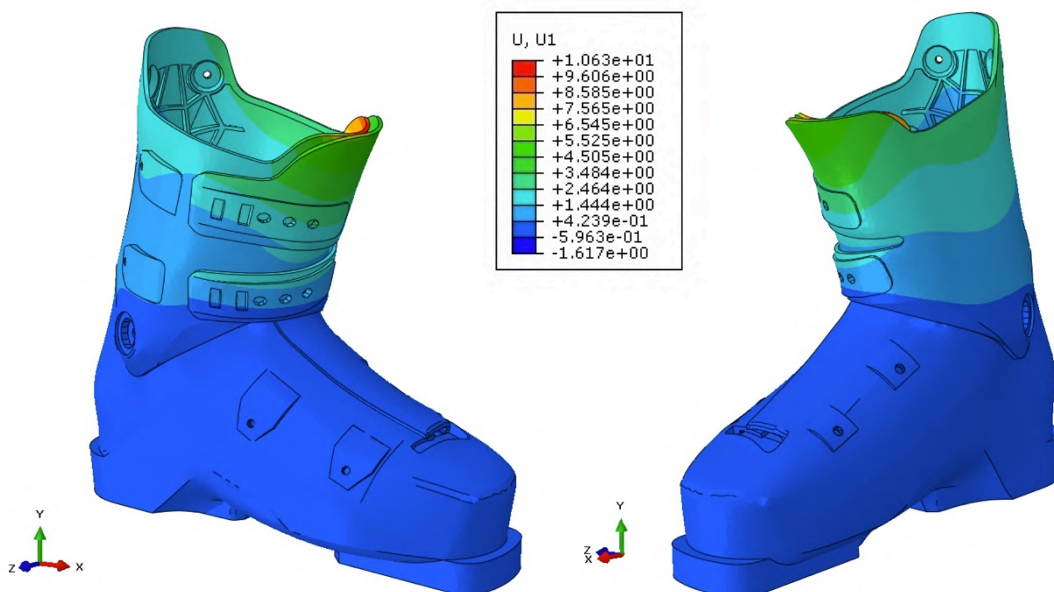


Figura 5-10: *Spostamenti lungo X Test 1, carico in avanti, temperatura -10°C*

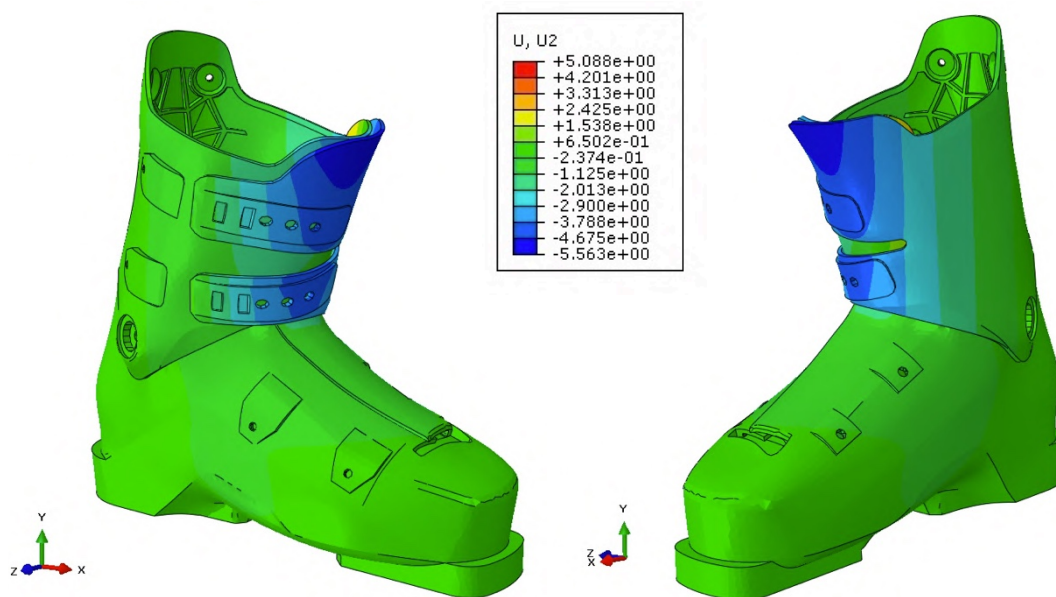


Figura 5-11: Spostamenti lungo Y Test 1, carico in avanti, temperatura +23°C

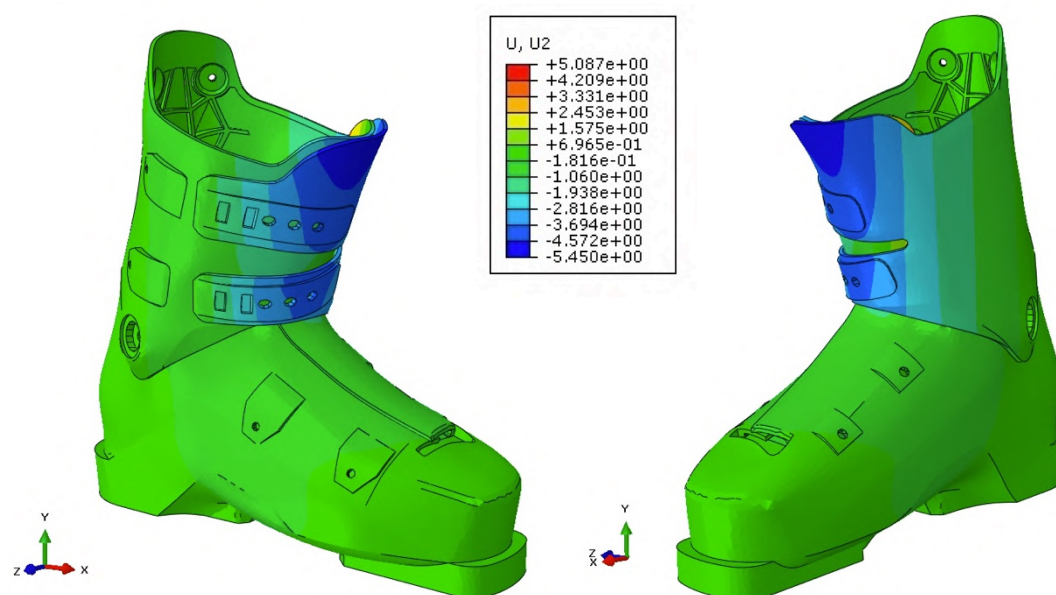


Figura 5-12: Spostamenti lungo Y Test 1, carico in avanti, temperatura -10°C

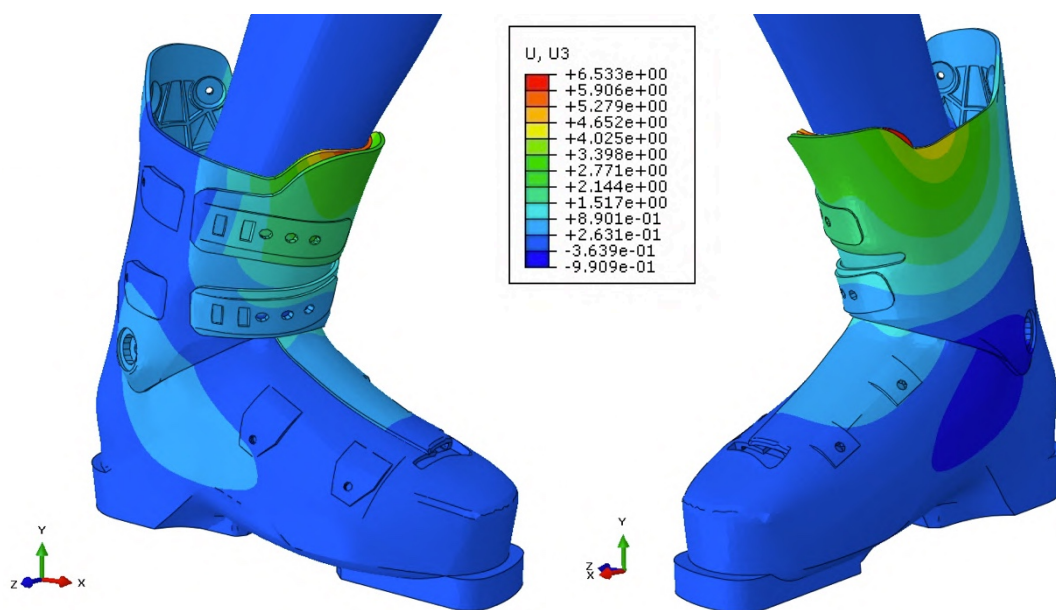


Figura 5-13: Spostamenti lungo Z Test 1, carico in avanti, temperatura +23°C

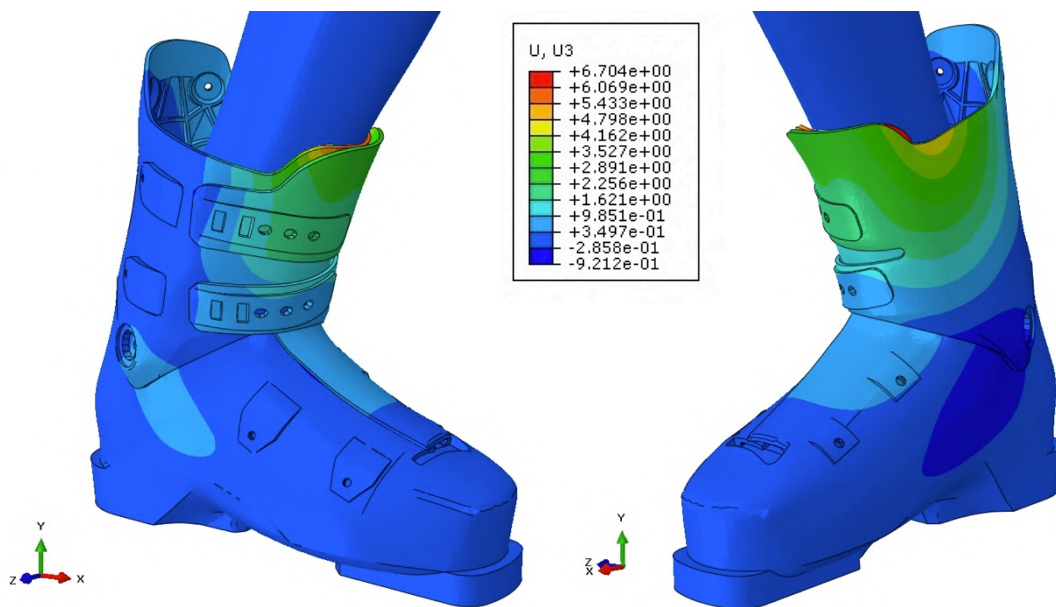


Figura 5-14: Spostamenti lungo Z Test 1, carico in avanti, temperatura -10°C

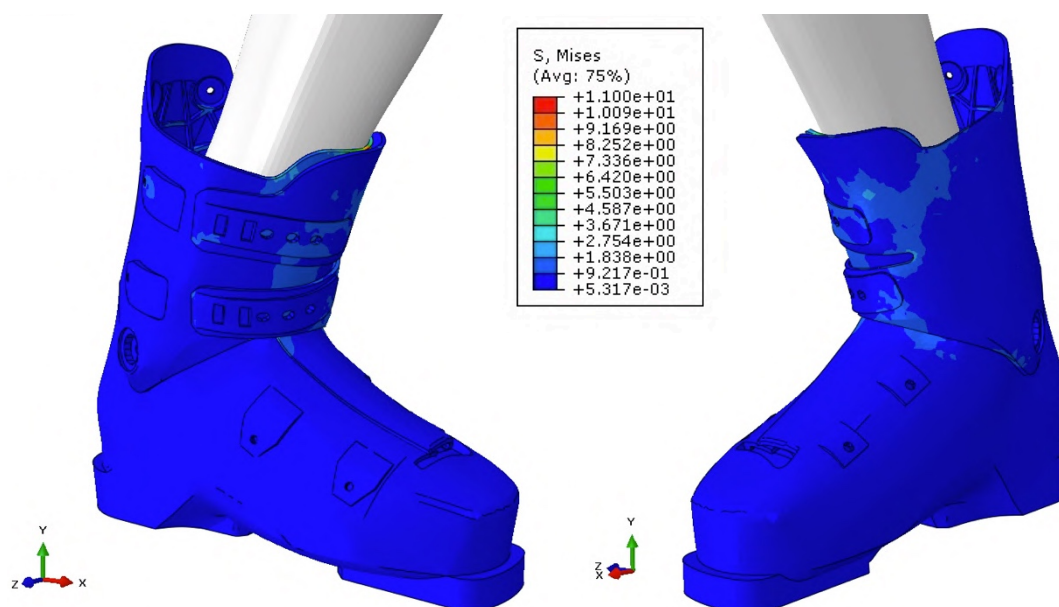


Figura 5-15: Tensioni alla Von Mises Test 1, carico in avanti, temperatura +23°C

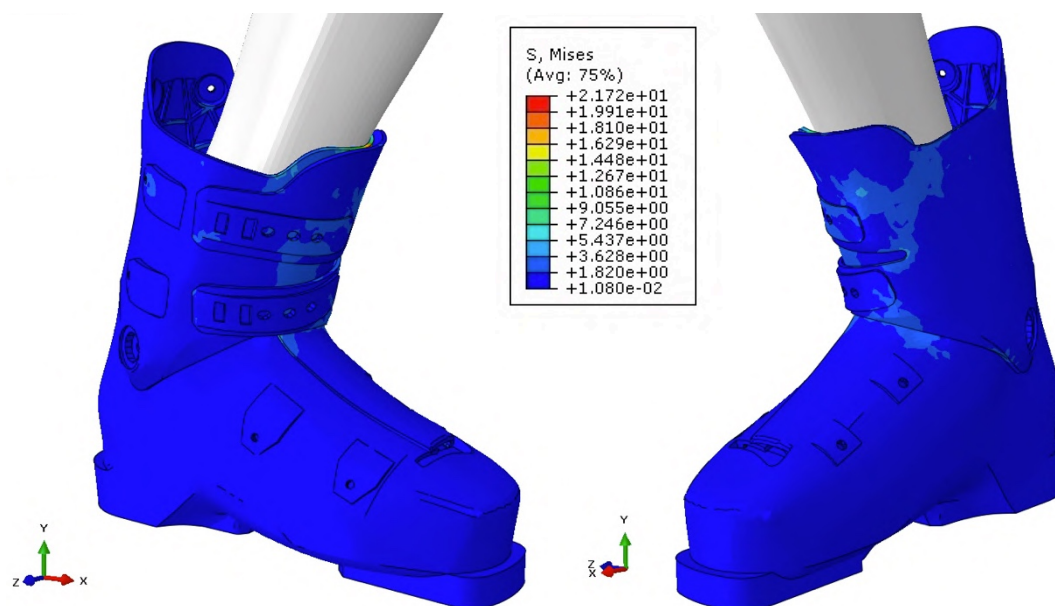


Figura 5-16: Tensioni alla Von Mises Test 1, carico in avanti, temperatura -10°C

5.2.1.2 Carico indietro (-8°) – Test 1

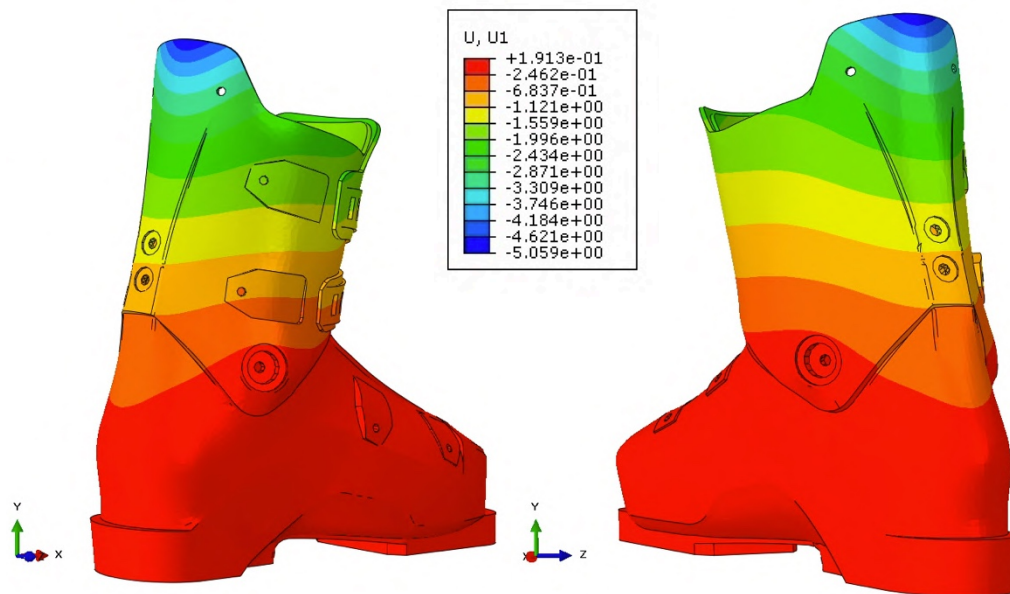


Figura 5-17: Spostamenti lungo X Test 1, carico indietro, temperatura $+23^\circ\text{C}$

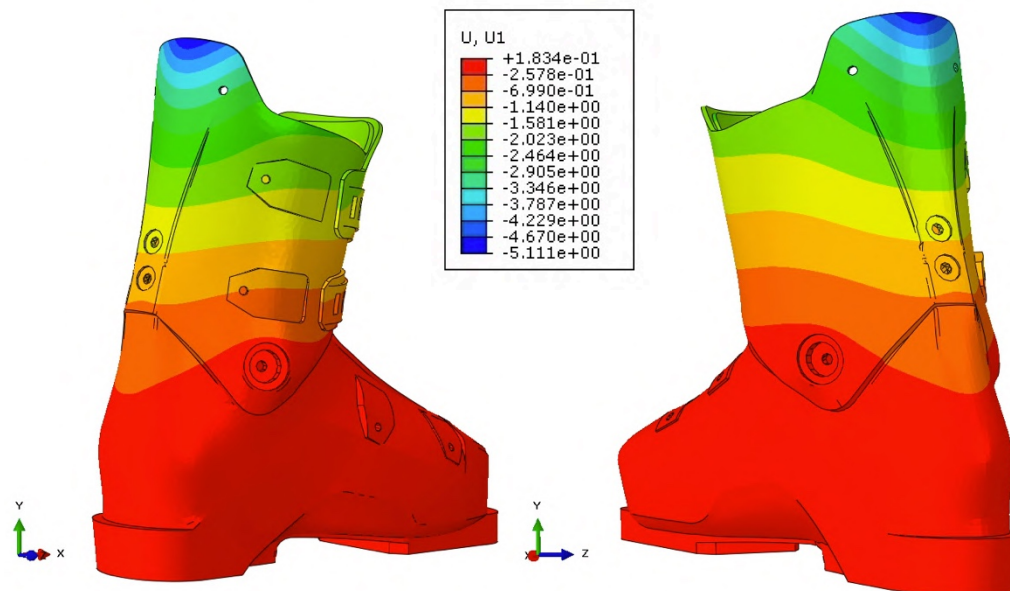


Figura 5-18: Spostamenti lungo X Test 1, carico indietro, temperatura -10°C

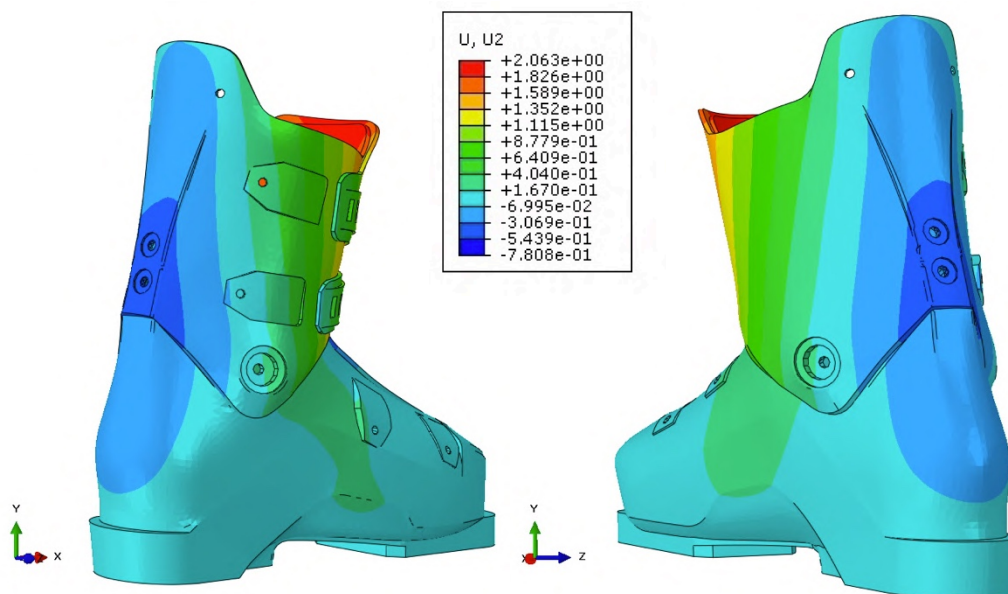


Figura 5-19: Spostamenti lungo Y Test 1, carico indietro, temperatura +23°C

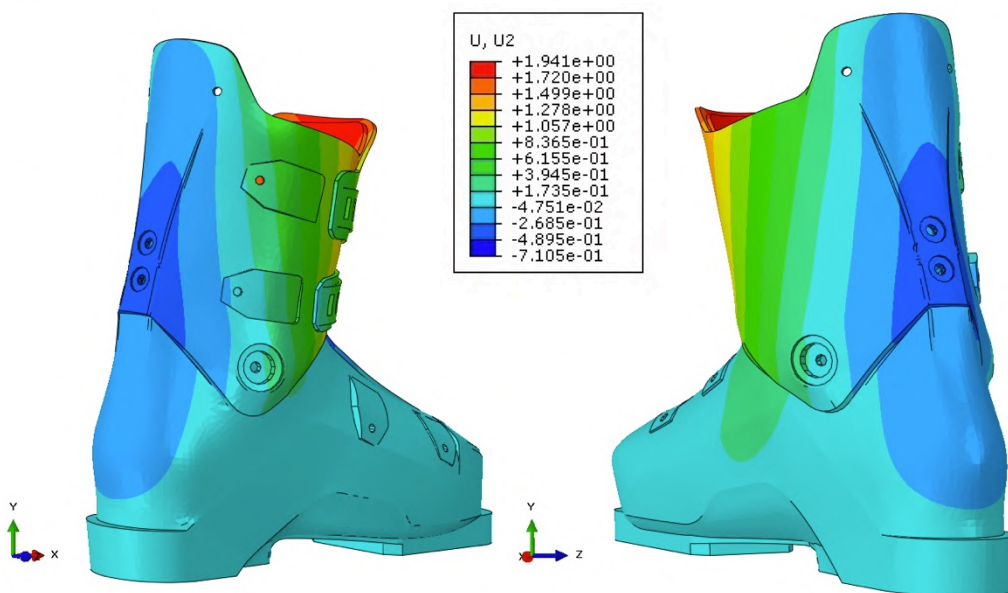


Figura 5-20: Spostamenti lungo Y Test 1, carico indietro, temperatura -10°C

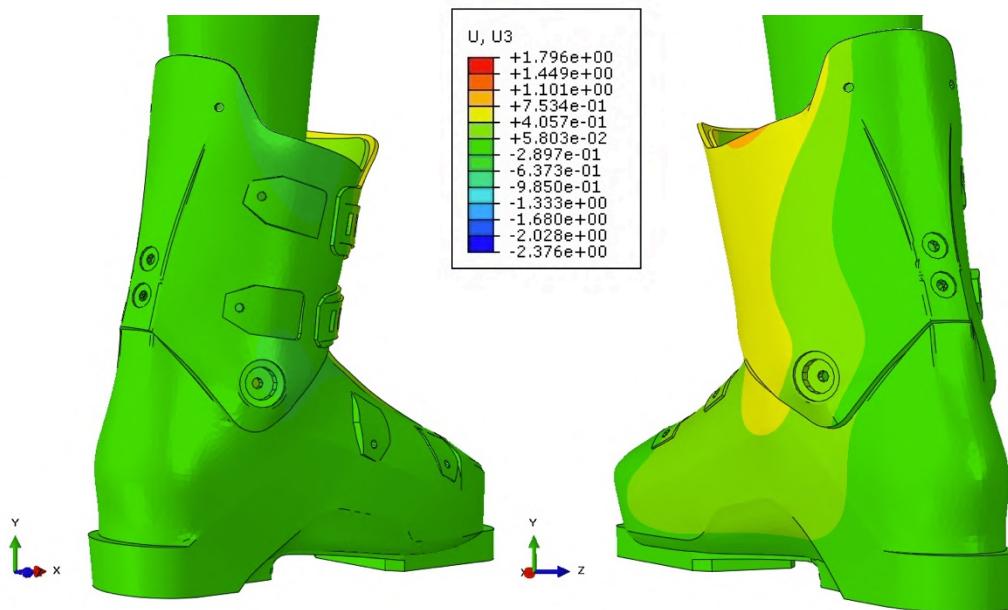


Figura 5-21: Spostamenti lungo Z Test 1, carico indietro, temperatura +23°C

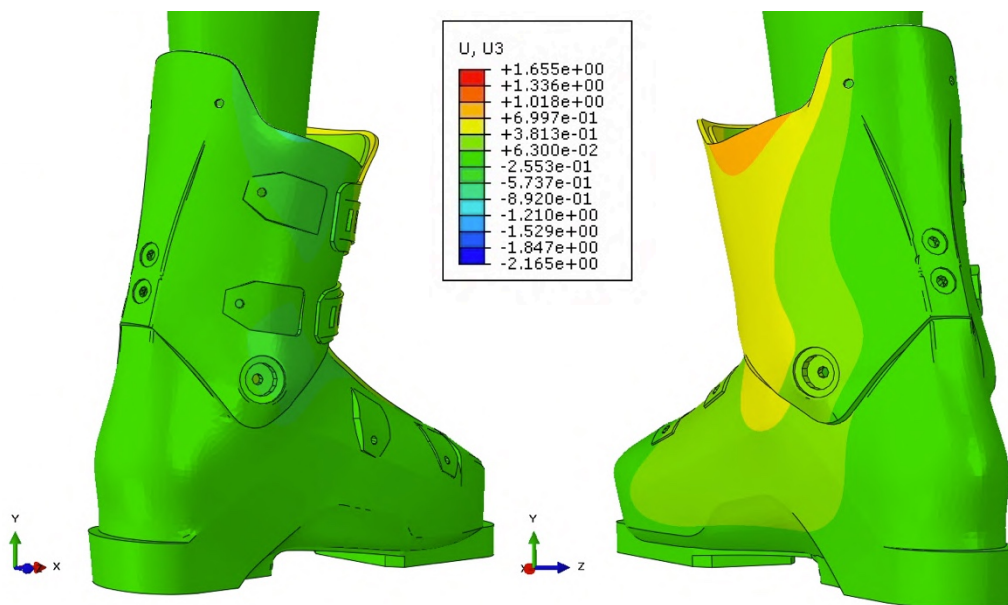


Figura 5-22: Spostamenti lungo Z Test 1, carico indietro, temperatura -10°C

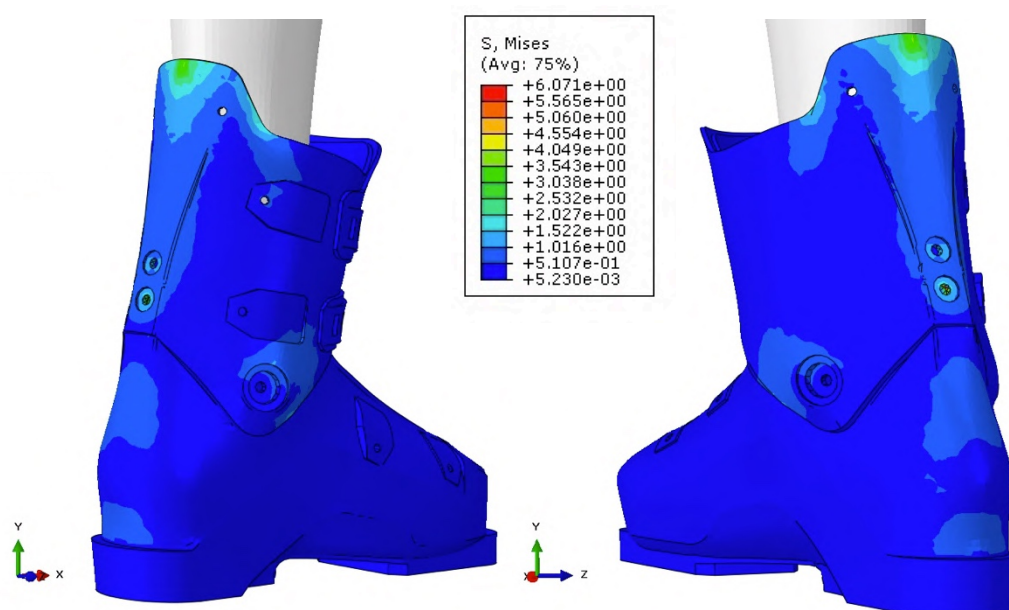


Figura 5-23: Tensioni alla Von Mises Test 1, carico indietro, temperatura +23°C

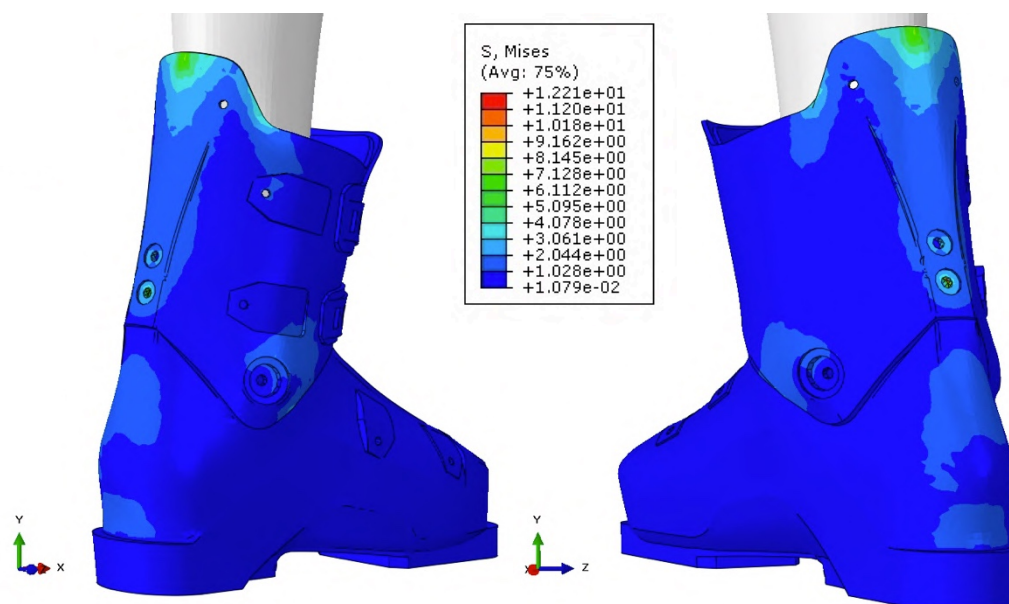


Figura 5-24: Tensioni alla Von Mises Test 1, carico indietro, temperatura -10°C

5.2.1.3 Valutazioni generali – Test 1

Come evidenziato dalle precedenti immagini è possibile notare che, per quanto riguarda gli spostamenti, questi sono praticamente identici per entrambe le temperature. Questo perché l'angolo di inclinazione rimane invariato, di conseguenza anche gli spostamenti. Una leggera differenza si può notare in quanto a temperatura più bassa (-10°C) il materiale è molto più rigido. Perciò, anche se l'inclinazione della protesi è la stessa, lo scarpone tende ad "allargarsi" (spanciare) o "restringersi" (contrarsi) meno, lateralmente. Per quanto riguarda le tensioni, invece, si può vedere che l'andamento è lo stesso, ma nel caso a temperatura -10°C queste hanno un valore circa doppio rispetto a quelle a temperatura ambiente. Questo avviene perché il materiale è molto più rigido, il modulo elastico con il cambio di temperatura, difatti, quasi raddoppia.

Si analizzano ora nello specifico i singoli spostamenti e le concentrazioni tensionali.

In particolare a titolo esemplificativo, nei paragrafi successivi, si indagano gli spostamenti massimi nel caso a temperatura $+23^{\circ}\text{C}$ (che come detto risulta essere il peggiore per quanto riguarda gli spostamenti) mentre le concentrazioni tensionali nel caso a temperatura -10°C .

5.2.1.4 Valutazione spostamenti in X (U1) – Test 1

Per quanto concerne gli spostamenti in X, questi sono quelli meno influenti per le valutazioni da svolgere.

È possibile vedere che, in generale, sia durante la spinta in avanti che durante quella indietro lo scafo rimane quasi completamente immobile, la parte che si sposta (per effetto della rotazione) è solamente la zona relativa al gambetto.

5.2.1.5 Valutazione spostamenti in Y (U2) – Test 1

1) Carico in avanti

Per quanto riguarda gli spostamenti in Y nella fase di carico in avanti è possibile affermare che si ha il massimo positivo (quindi spostamento verso l'alto) nel lembo interno di sinistra il quale, per la rotazione della protesi, e per spinta della parte inferiore dello scafo, tende ad alzarsi (spostamento di circa $+5$ mm, *Figura 5-25 (a)*). Il massimo negativo invece (spostamento verso il basso) è relativo al lembo di destra il quale, per effetto della rotazione in avanti, ed essendo contemporaneamente vincolato nelle borchie, tende ad abbassarsi (spostamento di circa $-5,5$ mm, *Figura 5-25 (b)*).

Nella *Figura 5-25* è possibile visualizzare graficamente i punti esatti in cui si localizza il massimo spostamento sia negativo che positivo.

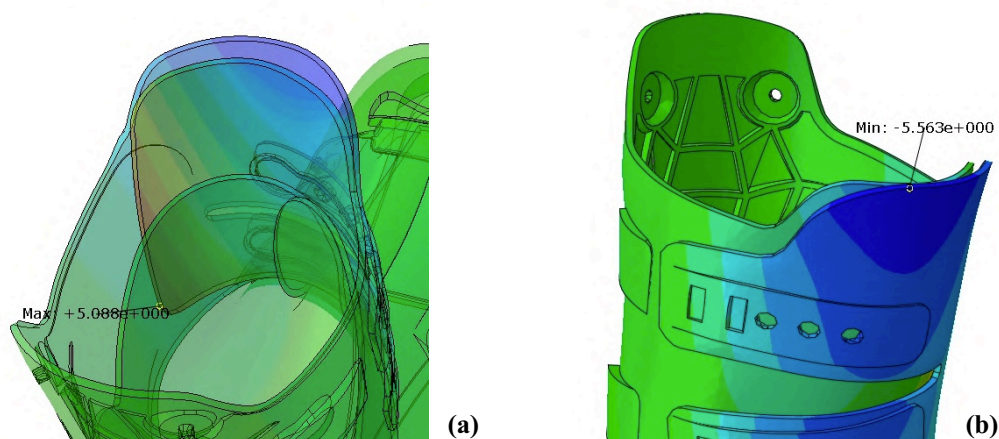


Figura 5-25: *Spostamenti massimi positivi e negativi lungo Y, Test 1, temperatura +23°C, carico in avanti*

I punti critici però, come accennato già ad inizio elaborato, sono quelli relativi al collo-piede. Questo è infatti un punto in cui, se lo scarpone “affonda” molto, diventa fastidioso per il soggetto che lo utilizza. Si valutano quindi nello specifico gli spostamenti in tale punto. Si diminuiscono perciò gli spostamenti massimi in modo da identificare tramite le linee di contour gli spostamenti nel punto richiesto (*Figura 5-26*).

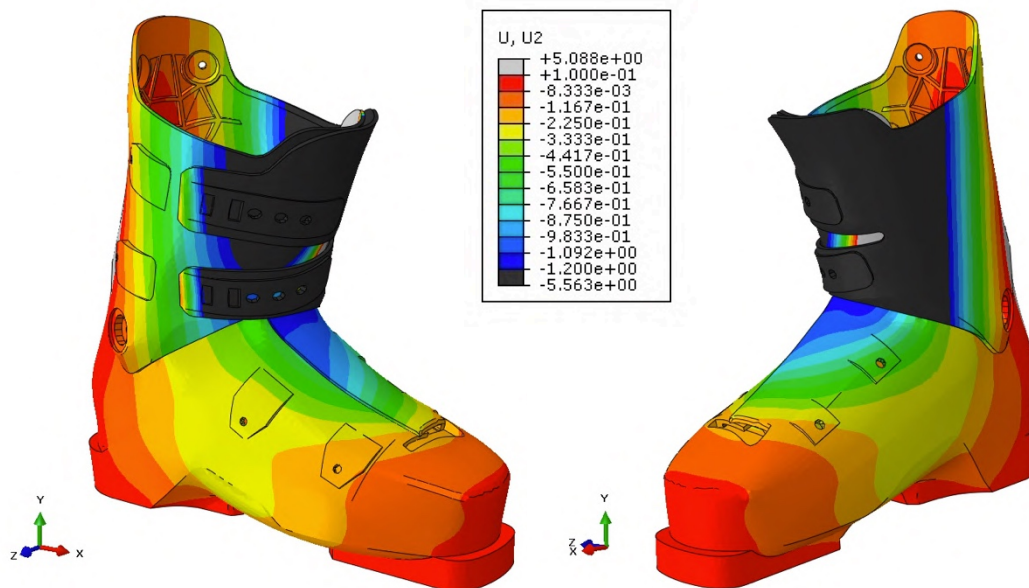


Figura 5-26: *Spostamento zona “collo-piede” lungo Y, Test 1, temperatura +23°C, carico in avanti*

Come si può in vedere *Figura 5-26*, gli spostamenti massimi nella zona del collo-piede sono dell’ordine di $-1,2$ mm. Tali spostamenti sono piccoli considerato che lo spessore della scarpetta in questo punto è di 20 mm e può subire uno schiacciamento del 50% (10 mm). Si può affermare perciò che non ci sono particolari problematiche.

2) Carico indietro

Per quanto riguarda il massimo spostamento positivo, questo avviene nei lembi anteriori, in quanto, quando la protesi carica dietro, la parte anteriore tende ad alzarsi rispetto alla sua configurazione iniziale (spostamento di circa +2 mm, *Figura 5-27 (a)*). Per quanto concerne invece il massimo spostamento negativo, questo avviene nel lembo interno di destra dello scafo, il quale viene schiacciato verso il basso dal movimento di rotazione indietro del gambaletto (spostamento di circa -0,8 mm, *Figura 5-27 (b)*).

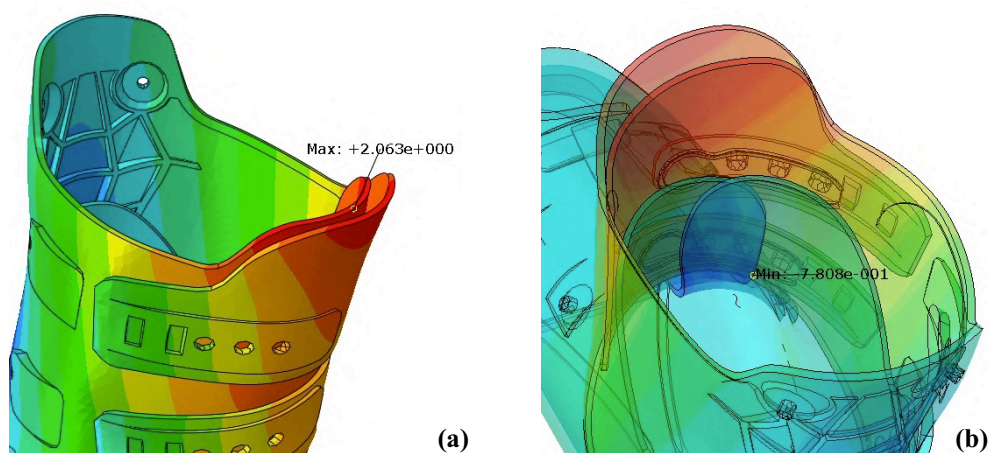


Figura 5-27: *Spostamenti massimi positivi e negativi lungo Y, Test 1, temperatura 23°C, carico indietro*

In particolare lo spostamento che può dare problemi è sempre quello relativo al collo-piede, che, anche in questo caso, porta ad uno schiacciamento. Questo risulta però essere minore rispetto al precedente (*Figura 5-26*), non darà quindi alcuna problematica.

5.2.1.6 Valutazione spostamenti in Z (U3) – Test 1

1) Carico in avanti

Il massimo spostamento in Z positivo è localizzato nel lembo di sinistra del gambaletto, questo perché, con la rotazione della protesi, tale lembo tende a spostarsi in avanti (lungo X) ma contemporaneamente, schiacciato dal lato del gambaletto, viene spostato verso l'interno e quindi verso una Z positiva (spostamento di circa +6,5 mm, *Figura 5-28 (a)*). Per quanto riguarda lo spostamento massimo negativo, invece, questo è localizzato in corrispondenza della borchia. Questo avviene per effetto dello “spanciamento” laterale dello scarpone quando si carica in avanti (spostamento di circa -1 mm, *Figura 5-28 (b)*).

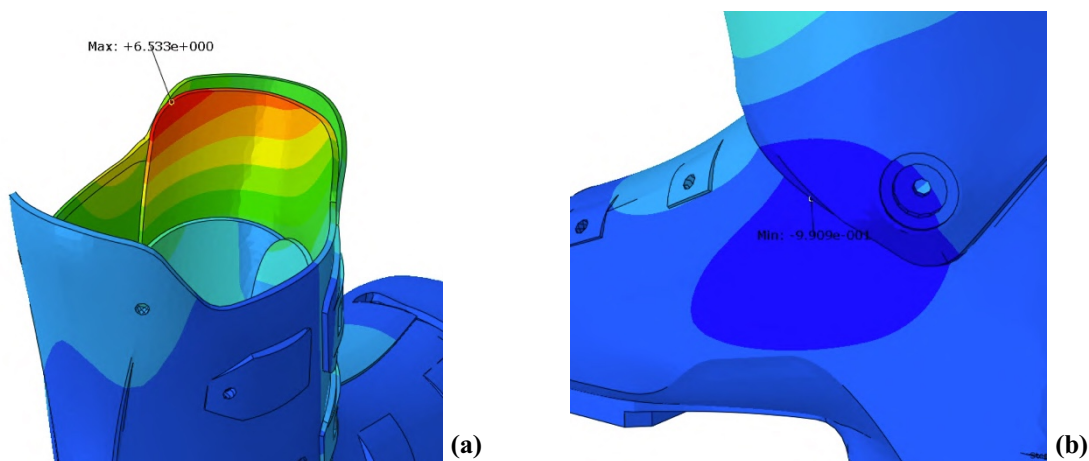


Figura 5-28: *Spostamenti massimi positivi e negativi lungo Z, Test 1, temperatura 23°C, carico in avanti*

Valutazioni aggiuntive possono essere fatte sulle borchie (oltre quelle viste in *Figura 5-28 (b)*) per valutare eventuali problematiche di vuoti d’aria. Queste comporterebbero infatti un eventuale spostamento indesiderato del piede (in senso trasversale) oltre che fastidiose sensazioni nello sciatore di non aderenza dello scarpone.

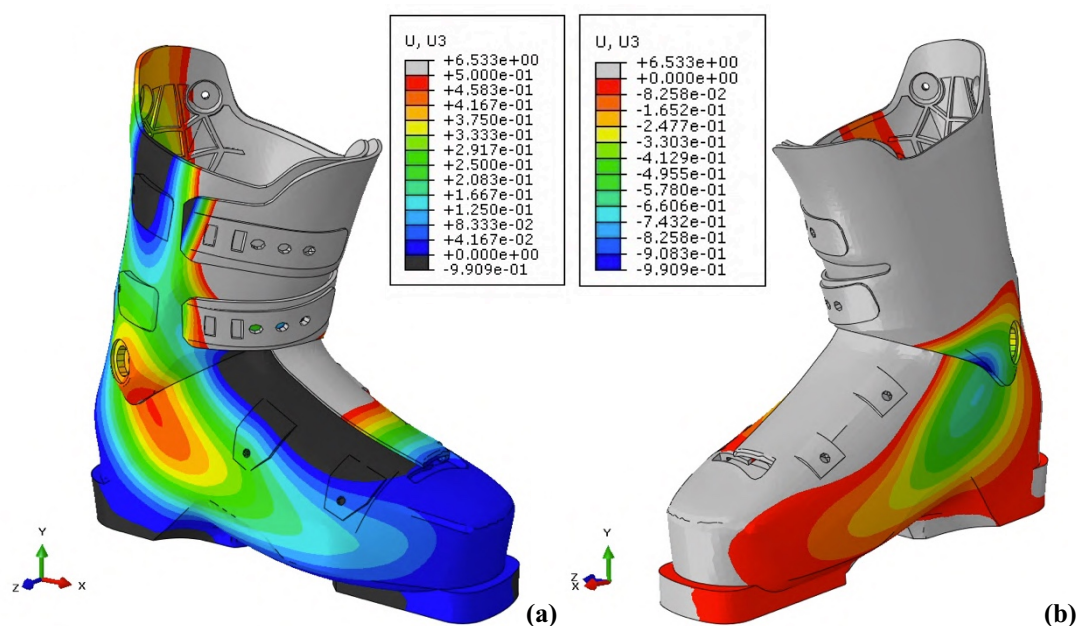


Figura 5-29: *Spostamento zona “borchie” lungo Z, Test 1, temperatura +23°C, carico in avanti*

Come si può notare lo spostamento massimo in corrispondenza della borchia si ha nel lato di destra (interno) con uno “spanciamento” che arriva a circa -1 mm (*Figura 5-29 (b)*); nel lato di sinistra (esterno), invece, si ferma a $+0,5$ mm (*Figura 5-29 (a)*). Questo può considerarsi tollerabile e non porta a nessun tipo di problematiche, considerato che nello scarpone reale si valutano accettabili allargamenti fino a 5 mm per lato.

Altra zona da valutare è lo strozzamento del gambetto il quale tende a schiacciare il polpaccio (*Figura 5-30*).

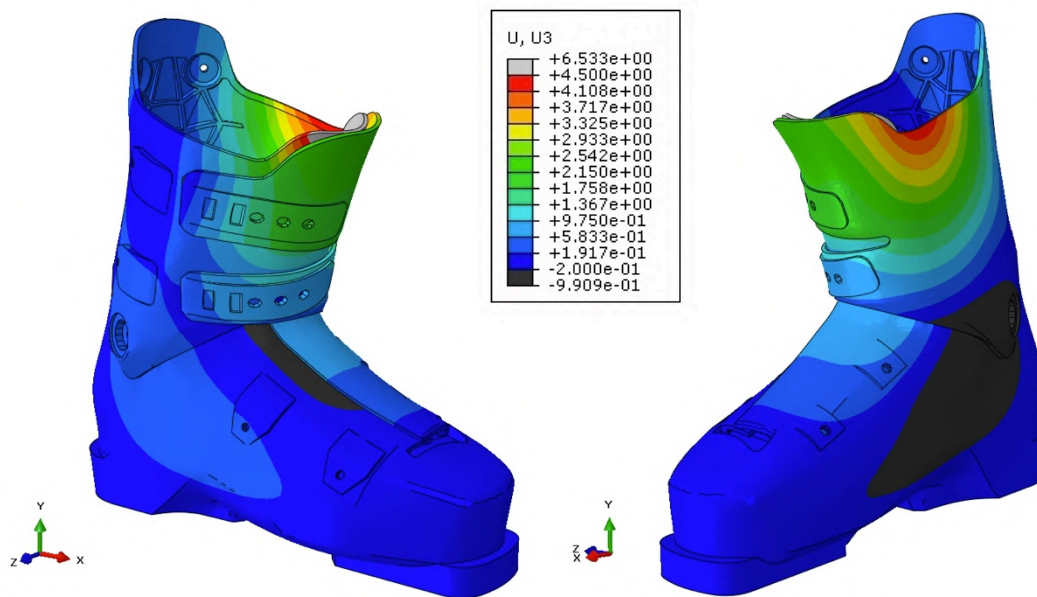


Figura 5-30: Spostamento zona “polpaccio” lungo Z, Test 1, temperatura +23°C, carico in avanti

Anche questo risulta non avere problemi con un restringimento di circa 4,5 mm, il quale, nella realtà, viene ammortizzato dalla presenza della scarpetta che ha uno spessore di 18 mm e può schiacciarsi 5 mm in entrambi i lati (ammortizza perciò 10 mm totali).

2) Carico indietro

Gli spostamenti massimi sono concentrati nei lembi dello scafo in quanto, con la rotazione indietro, tendono ad essere schiacciati dal gambetto entrambi verso l'interno (massimo positivo +1,8 mm, *Figura 5-31 (a)*; massimo negativo -2,40 mm, *Figura 5-31 (b)*).

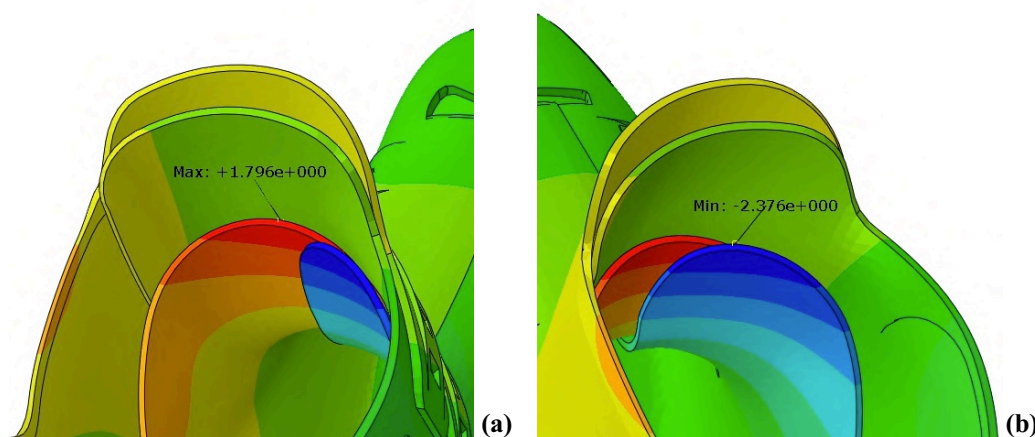


Figura 5-31: Spostamenti massimi positivi e negativi lungo Z, Test 1, temperatura 23°C, carico indietro

In particolare è necessario verificare anche la contrazione laterale del gambetto, la quale, porta allo schiacciamento del polpaccio. Questa risulta avere spostamenti minori del caso di carico in avanti (*Figura 5-30*), non crea quindi problemi (*Figura 5-32*).

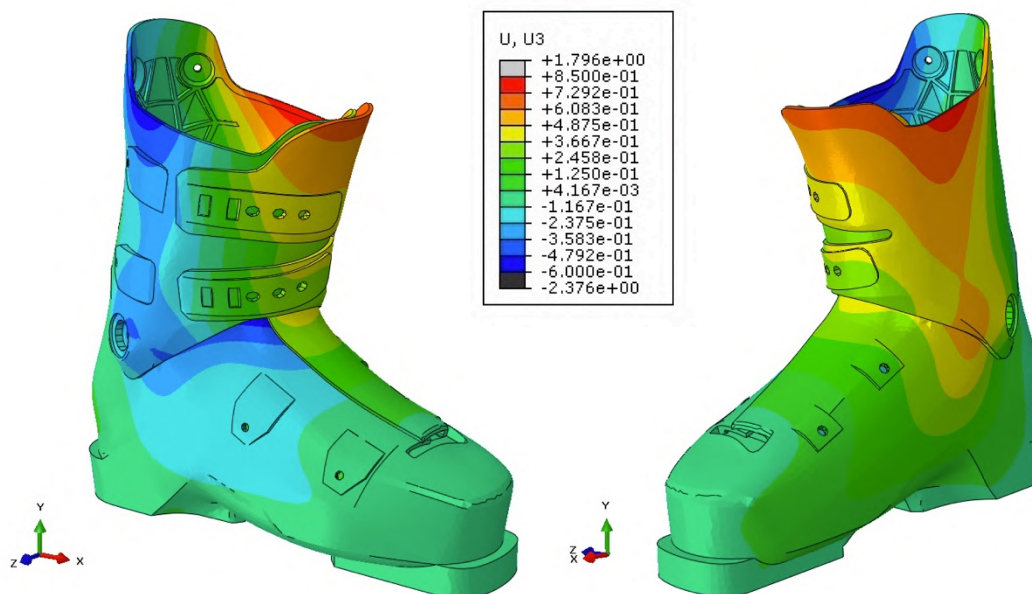


Figura 5-32: Spostamento zona “polpaccio” lungo Z, Test 1, temperatura +23°C, carico indietro

5.2.1.7 Valutazione tensioni alla Von Mises – Test 1

1) *Carico in avanti*

Per quanto riguarda le concentrazioni tensionali, si valutano quelle nel caso relativo alla temperatura -10°C le quali, come spiegato in precedenza, sono di un ordine di grandezza quasi doppio rispetto a quelle a temperatura ambiente.

Il picco massimo è relativo al punto in cui avviene il contatto fra la protesi e lo scarponne, dove quindi le tensioni sono ragionevolmente più alte (*Figura 5-33*).

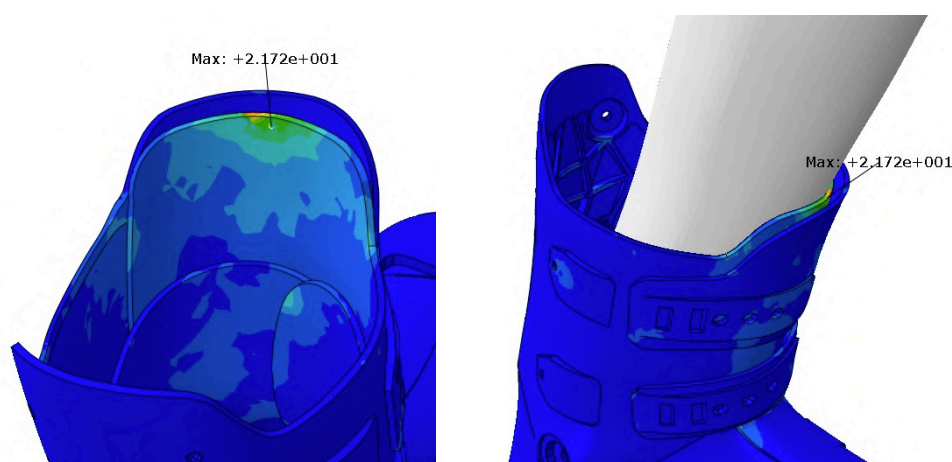


Figura 5-33: Concentrazione tensionale alla Von Mises massima, carico in avanti, Test 1

Questo è dovuto anche alla dimensione della mesh. Per analisi più accurate, infatti, sarebbe necessario diminuire drasticamente la dimensione degli elementi (il che però comporterebbe un aumento esponenziale dei tempi di analisi). Tale picco, con un valore di 21,72 MPa, risulta essere comunque inferiore al massimo ammissibile dal materiale, assunto pari al limite massimo a trazione (55 MPa, §1.1.3).

Valutato il valore massimo è possibile, come fatto in precedenza per gli spostamenti, diminuire la scala per valutare l'andamento complessivo delle tensioni (Figura 5-34).

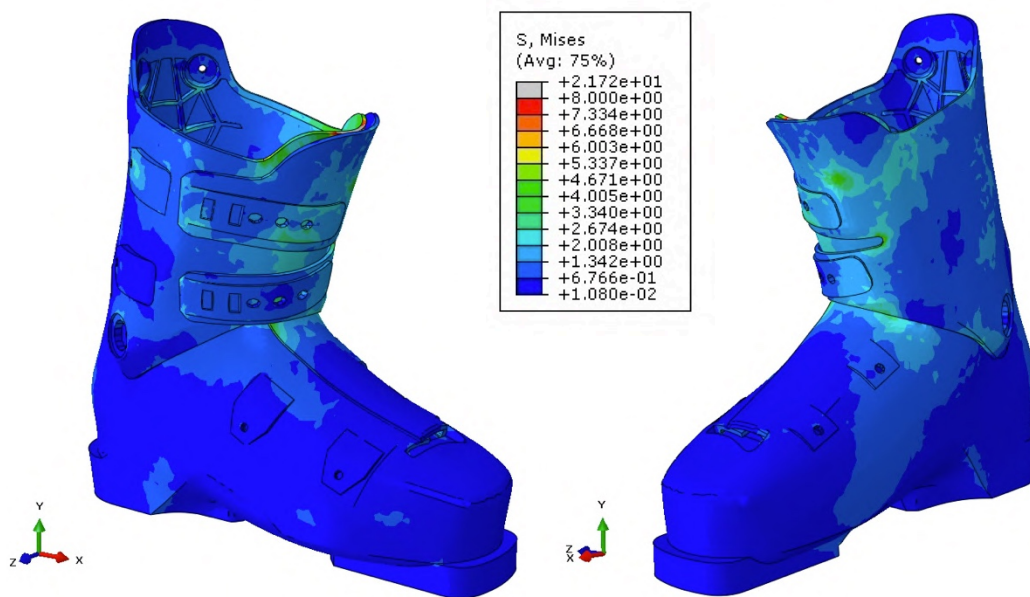


Figura 5-34: Distribuzione generale delle tensioni alla Von Mises diminuendo i massimi, carico in avanti

Gli altri punti critici sono i seguenti (Figura 5-35):

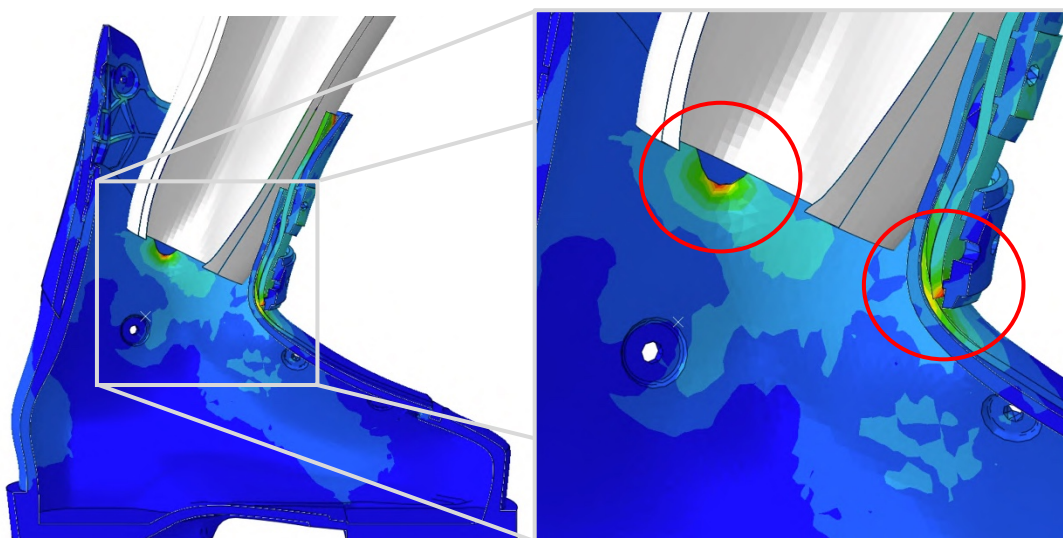


Figura 5-35: Criticità nella zona del collo-piede e nella parte laterale dello scafo

Come si può vedere si ha una concentrazione di tensioni nel punto in cui il gambetto tocca lo scafo (per effetto dello schiacciamento verso il basso) e nella parte di smusso fra il fronte ed il retro dello scafo (per effetto della piegatura in avanti della parte anteriore). Le tensioni sono comunque di un ordine di grandezza tale da non creare problematiche particolari allo scarpone (ordine di grandezza di circa 8 MPa).

Infine altri punti particolarmente sollecitati sono i seguenti (*Figura 5-36*):

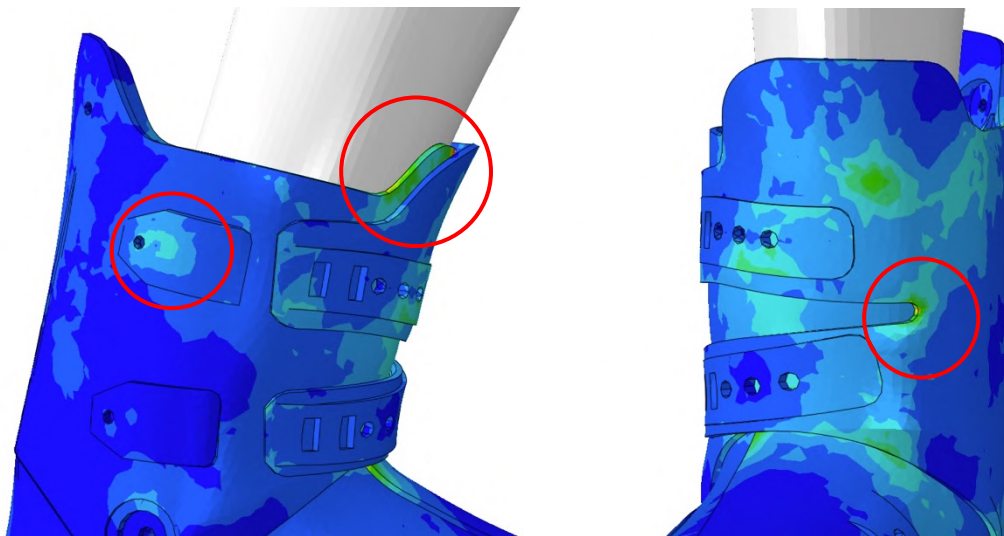


Figura 5-36: Criticità nella zona di fissaggio dei ganci, nella parte superiore del lembo di sinistra del gambetto e nel raccordo fra il lembo superiore ed inferiore di destra del gambetto

In corrispondenza del cambio di altezza del gambetto, punto sollecitato per effetto dello schiacciamento della protesi; in corrispondenza del raccordo fra le due cinghie del lembo di destra, in quanto i ganci tirano in direzioni differenti e quindi con lo schiacciamento della protesi questi vengono aperti; infine in corrispondenza del punto in cui si è ipotizzato il gancio nel gambetto, il quale dovendo vincolare il lembo a non muoversi risulta essere teso verso l'esterno.

2) Carico indietro

Per quanto concerne il carico indietro (-8°) il picco risulta essere sempre nel punto in cui la protesi tocca lo scarpone (*Figura 5-37*).

Come detto precedentemente, queste concentrazioni tensionali sono in parte, dovute ad una discretizzazione particolarmente grossolana. Alcuni picchi infatti, potrebbero essere maggiormente contenuti diminuendo le dimensioni degli elementi.

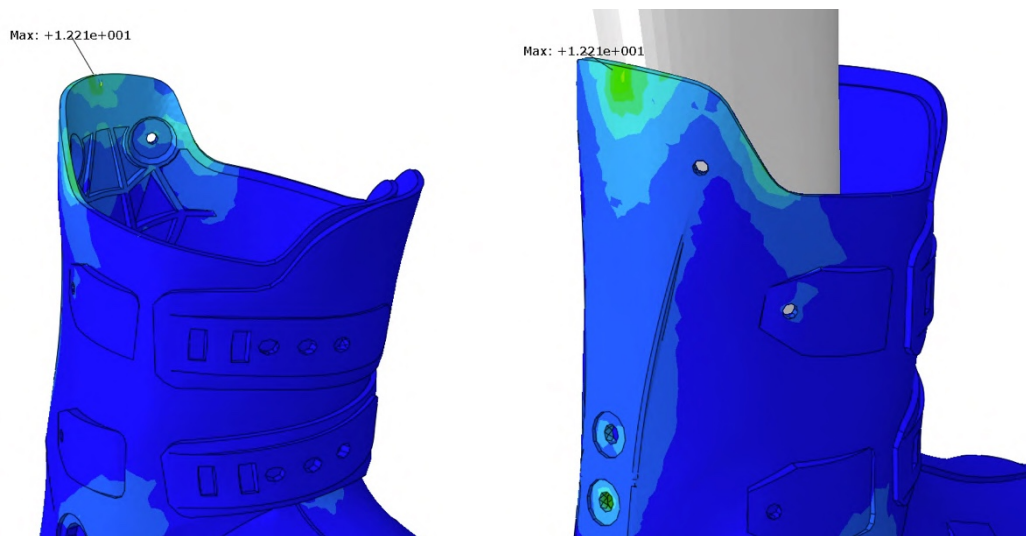


Figura 5-37: Concentrazione tensionale alla Von Mises massima, carico indietro, Test 1

Questa particolare concentrazione di tensione è infatti dovuta ad un elemento interno particolarmente distorto.

Il punto critico nella spinta indietro risulta essere quello in cui viene applicato il vincolo di Tie Constrain (atto a simulare la vite che blocca il movimento del gambetto rispetto allo scafo) come si può vedere in *Figura 5-38*.

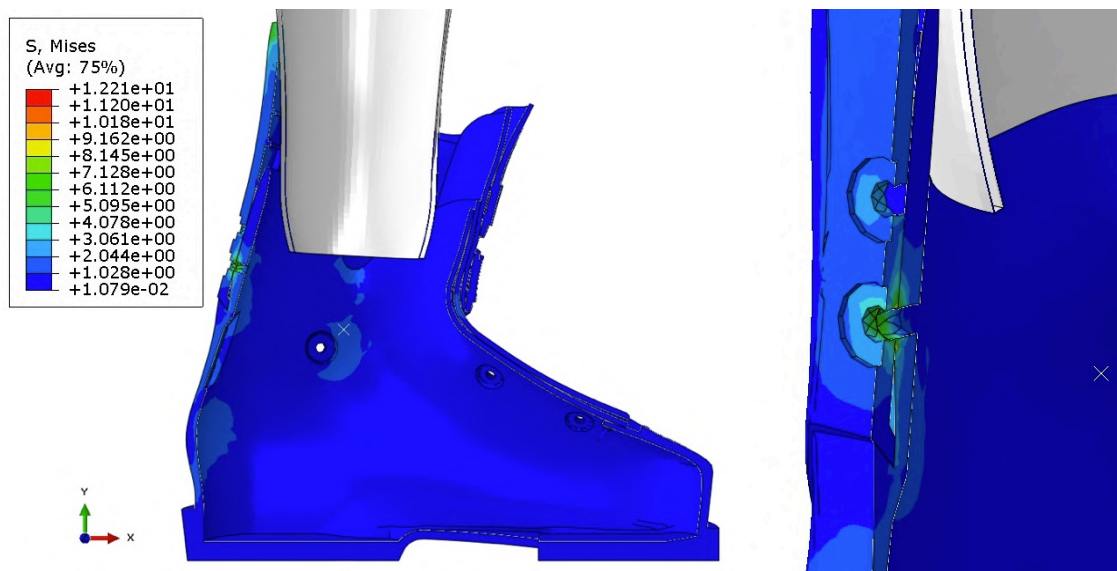


Figura 5-38: Criticità nella zona di vincolo fra gambetto e scafo

Le tensioni qui sono comunque di un ordine di grandezza (circa 10 MPa) che non porta problematica né alla plastica né alla vite (la quale ha resistenza molto maggiore).

Si abbassano, infine, come fatto precedentemente, i massimi delle tensioni in modo da cogliere l'andamento generale negli altri punti dello scarpone (*Figura 5-39*).

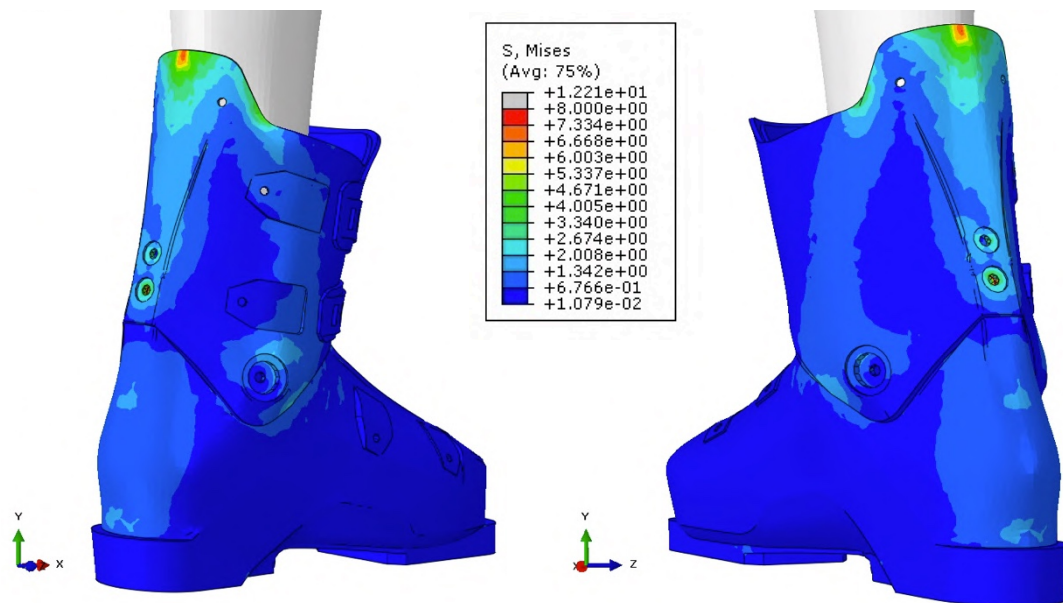


Figura 5-39: Distribuzione generale delle tensioni alla Von Mises diminuendo i massimi, carico indietro

In generale ci si accorge quindi che non ci sono particolari problemi oltre a quelli già evidenziati (la parte superiore del gambetto dove avviene il contatto fra la protesi e lo scarpone e la zona relativa alla vite di fissaggio fra scafo e gambetto). Si può notare solo qualche piccola concentrazione nelle borchie laterali, le quali in ogni caso lavorano molto meno rispetto al caso di carico in avanti, e nello smusso superiore del gambetto, anche qui di un ordine di grandezza trascurabile.

5.2.2 Test 2 (con scarpetta)

A questo punto vengono esposti i risultati relativi al *Test 2*, quindi il caso con la scarpetta. Rispetto a questi risultati ci si aspetta che, come già visto nei grafici “forza-angolo di rotazione”, aumentino sia gli spostamenti che le concentrazioni tensionali per effetto dello spessore della scarpetta.

Si espongono in primo luogo tutti i risultati relativi al momento in cui la protesi spinge in avanti, sia nel caso a temperatura $+23^{\circ}\text{C}$ che a -10°C (da *Figura 5-40* a *Figura 5-47*), successivamente quelli nel caso in cui spinge indietro (sempre ad entrambe le temperature, da *Figura 5-48* a *Figura 5-55*).

In seguito si realizzano delle valutazioni specifiche per i casi dove sono localizzati gli spostamenti e le concentrazioni tensionali maggiori.

5.2.2.1 Carico in avanti (+15°) – Test 2

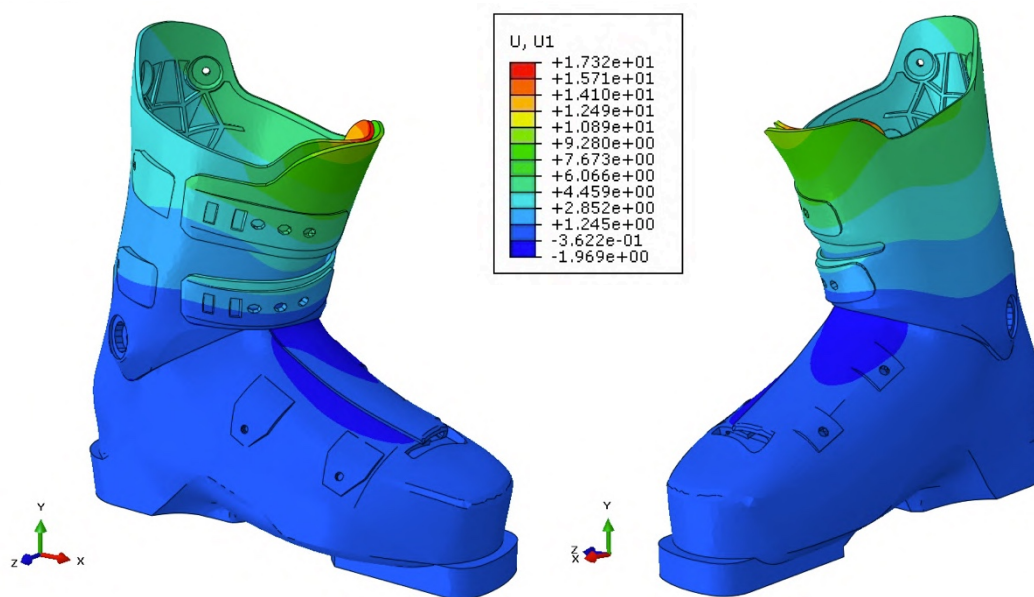


Figura 5-40: Spostamenti lungo X Test 2, carico in avanti, temperatura +23°C

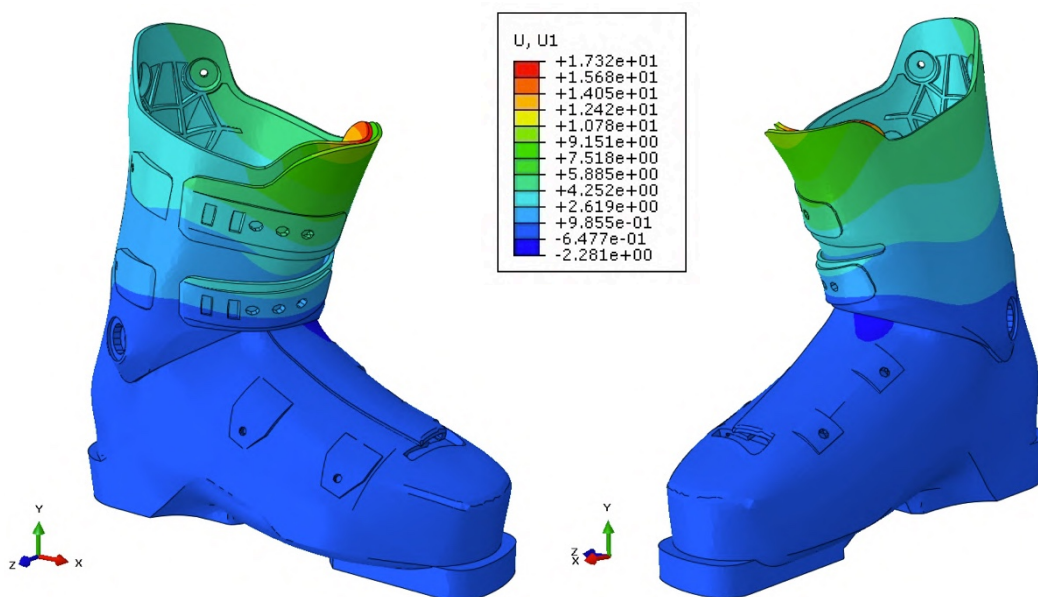


Figura 5-41: Spostamenti lungo X Test 2, carico in avanti, temperatura -10°C

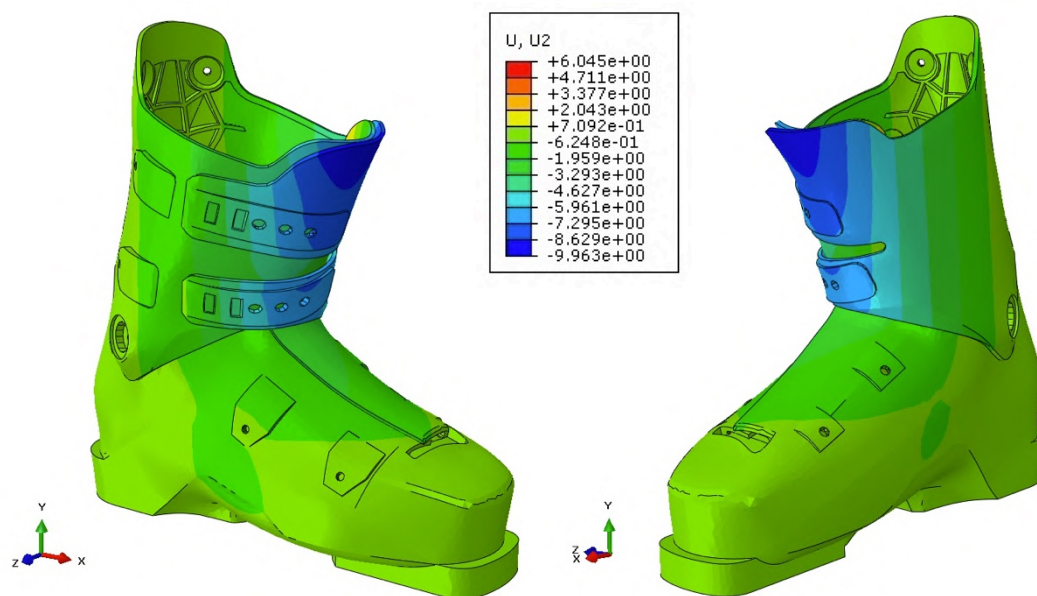


Figura 5-42: Spostamenti lungo Y Test 2, carico in avanti, temperatura +23°C

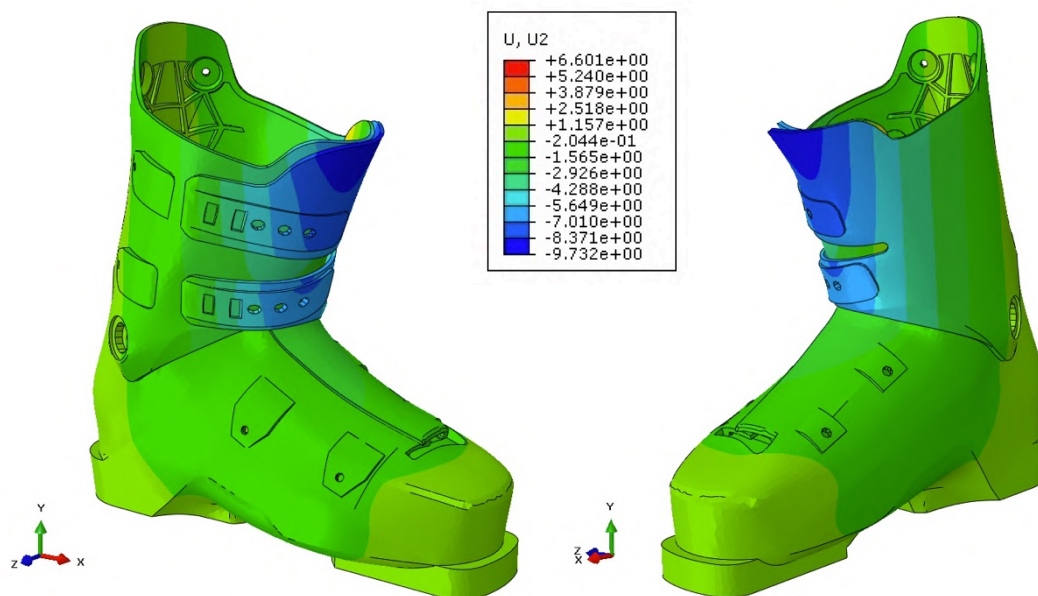


Figura 5-43: Spostamenti lungo Y Test 2, carico in avanti, temperatura -10°C

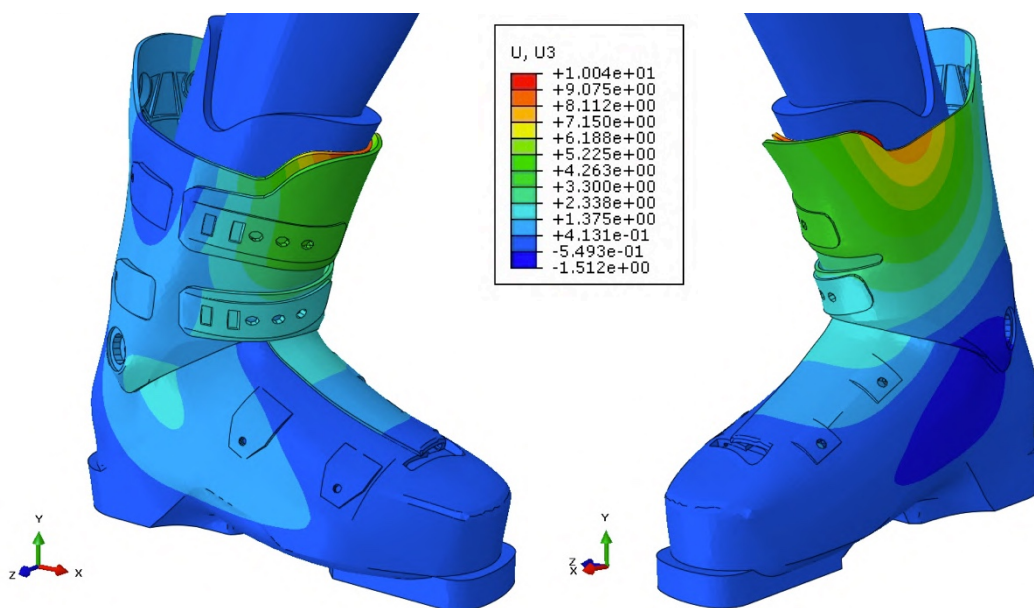


Figura 5-44: Spostamenti lungo Z Test 2, carico in avanti, temperatura +23°C

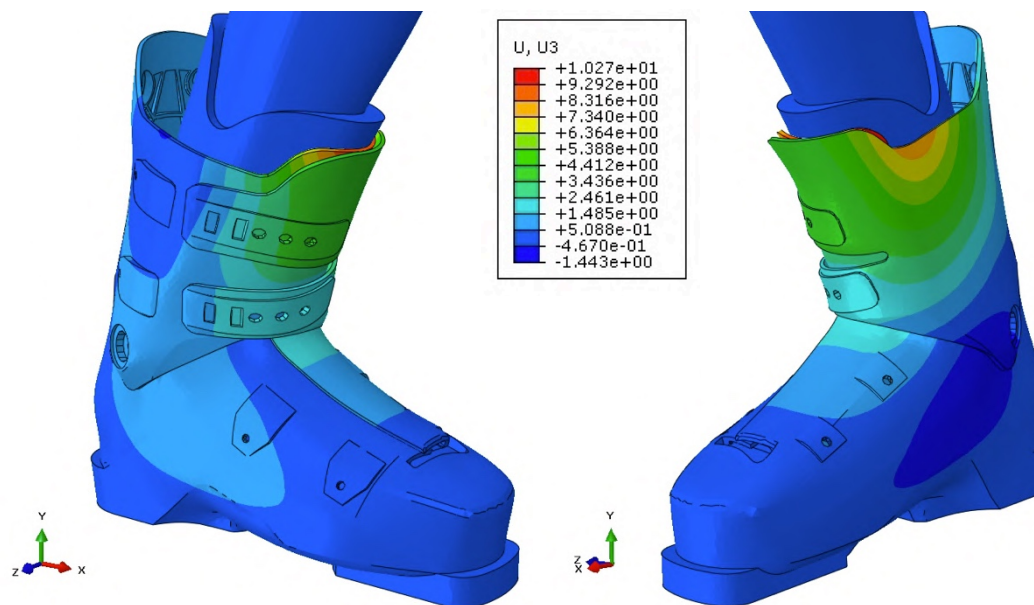


Figura 5-45: Spostamenti lungo Z Test 2, carico in avanti, temperatura -10°C

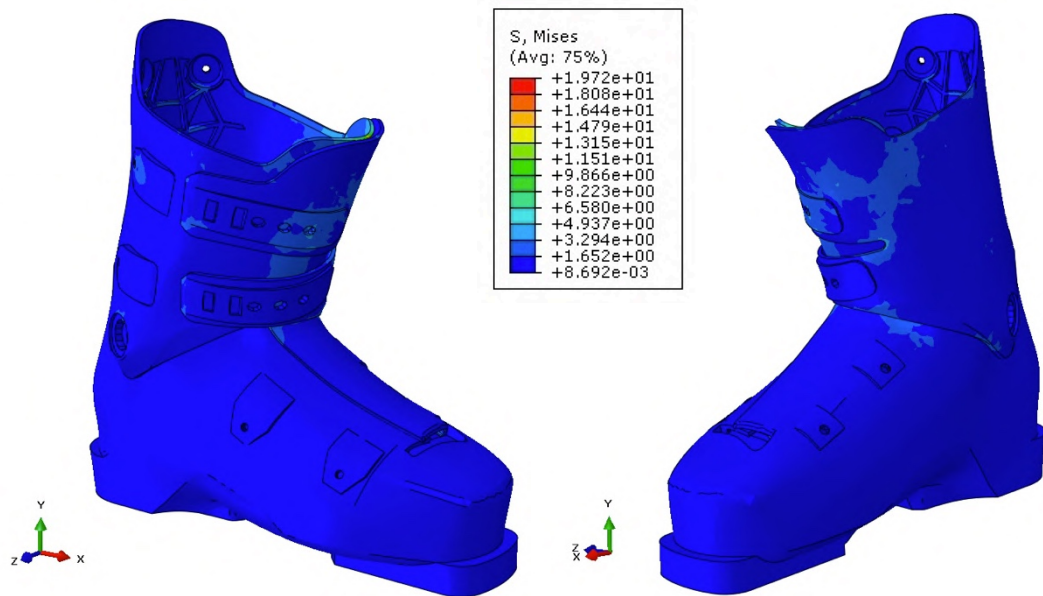


Figura 5-46: Tensioni alla Von Mises Test 2, carico in avanti, temperatura +23°C

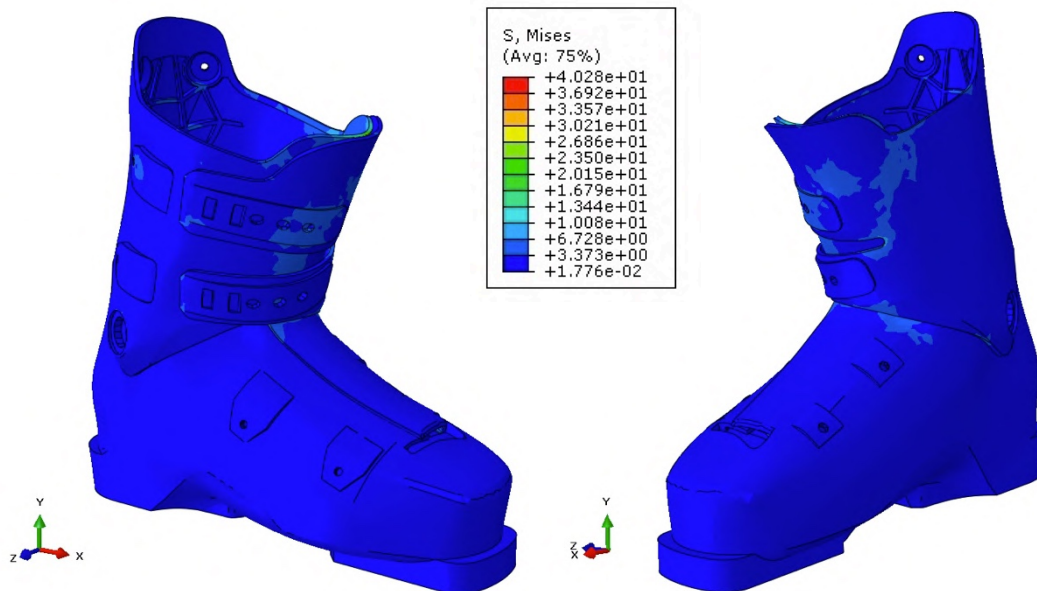


Figura 5-47: Tensioni alla Von Mises Test 2, carico in avanti, temperatura -10°C

5.2.2.2 Carico indietro (-8°) – Test 2

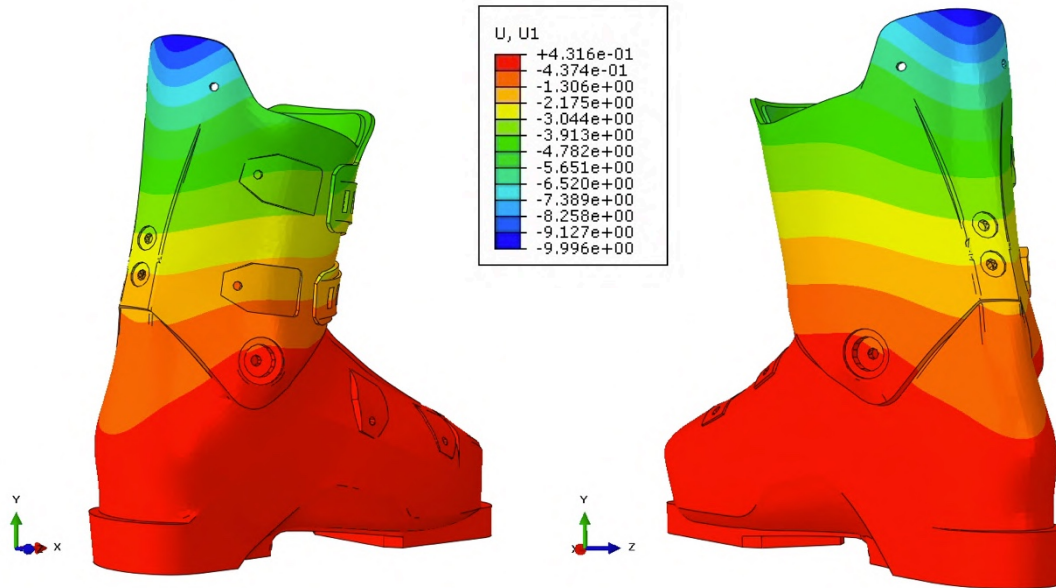


Figura 5-48: Spostamenti lungo X Test 2, carico indietro, temperatura $+23^\circ\text{C}$

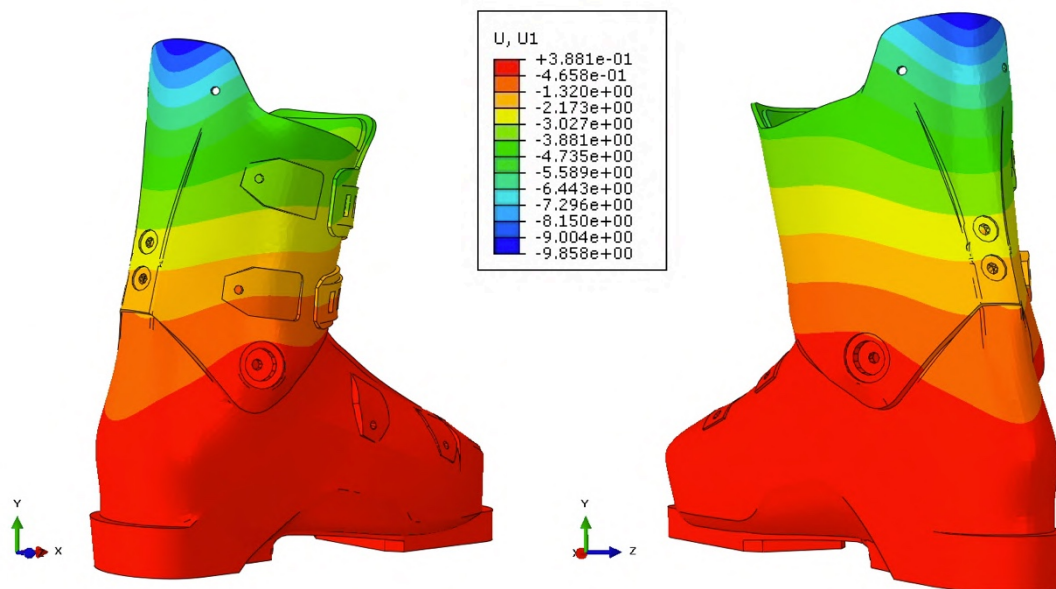


Figura 5-49: Spostamenti lungo X Test 2, carico indietro, temperatura -10°C

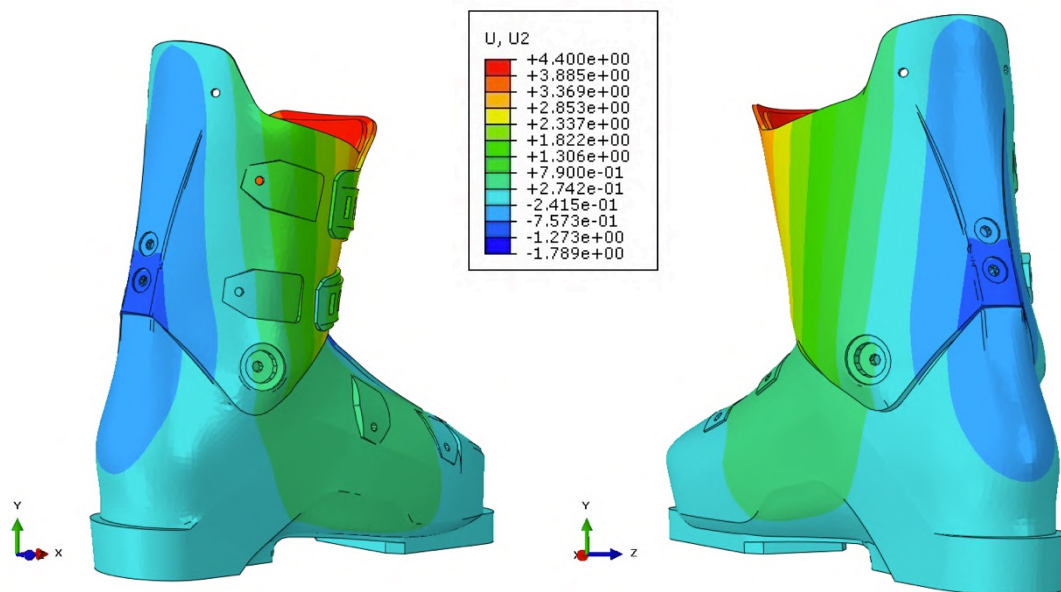


Figura 5-50: Spostamenti lungo Y Test 2, carico indietro, temperatura +23°C

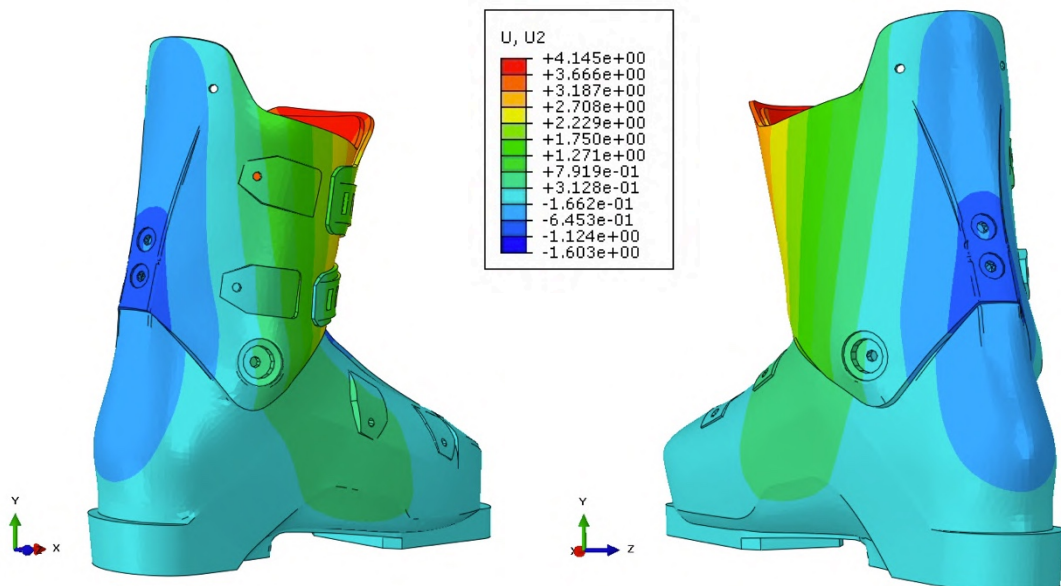


Figura 5-51: Spostamenti lungo Y Test 2, carico indietro, temperatura -10°C

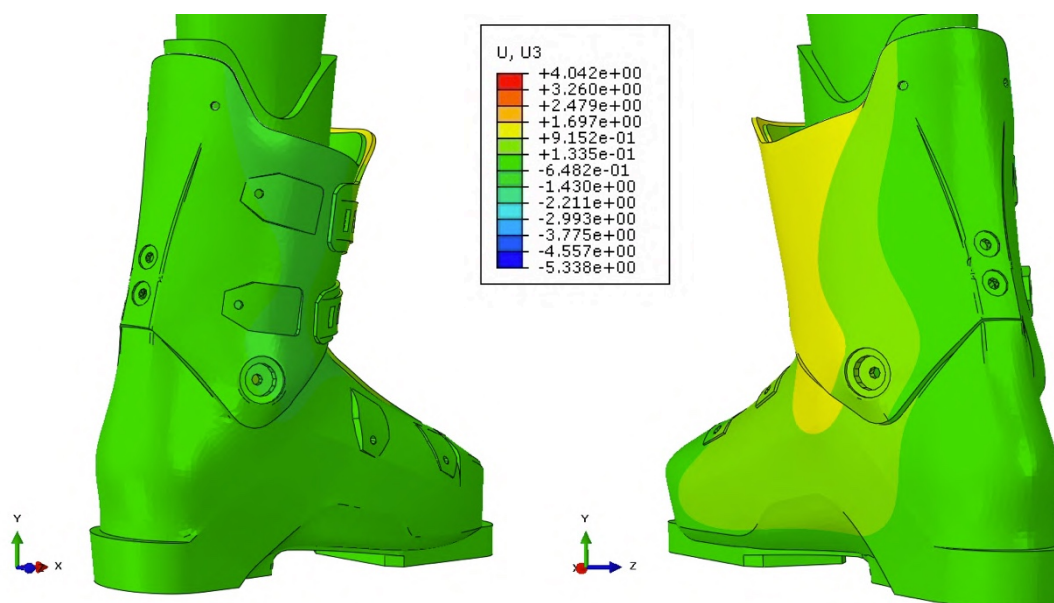


Figura 5-52: Spostamenti lungo Z Test 2, carico indietro, temperatura +23°C

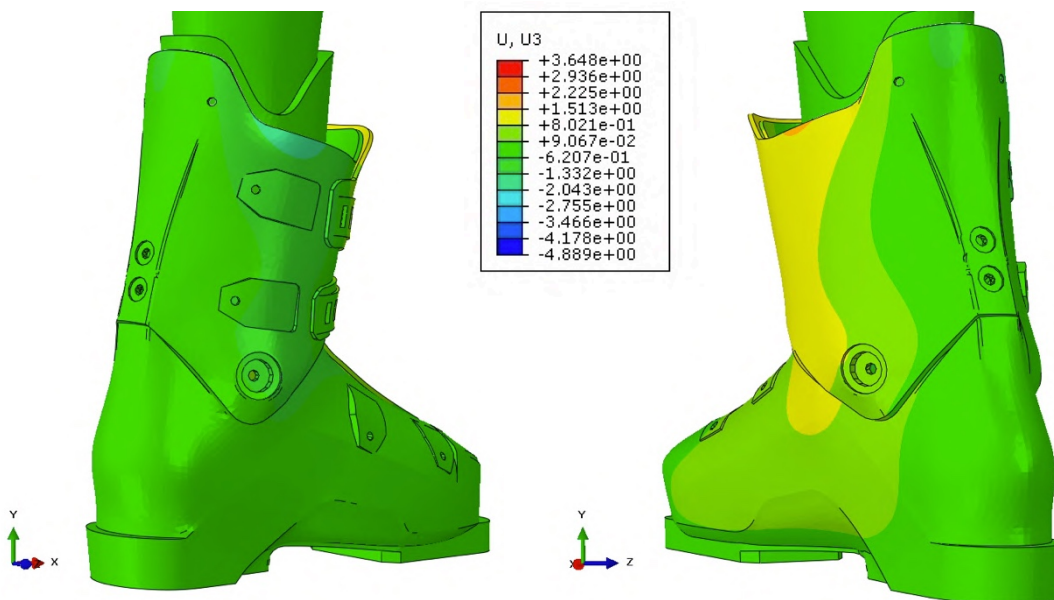


Figura 5-53: Spostamenti lungo Z Test 2, carico indietro, temperatura -10°C

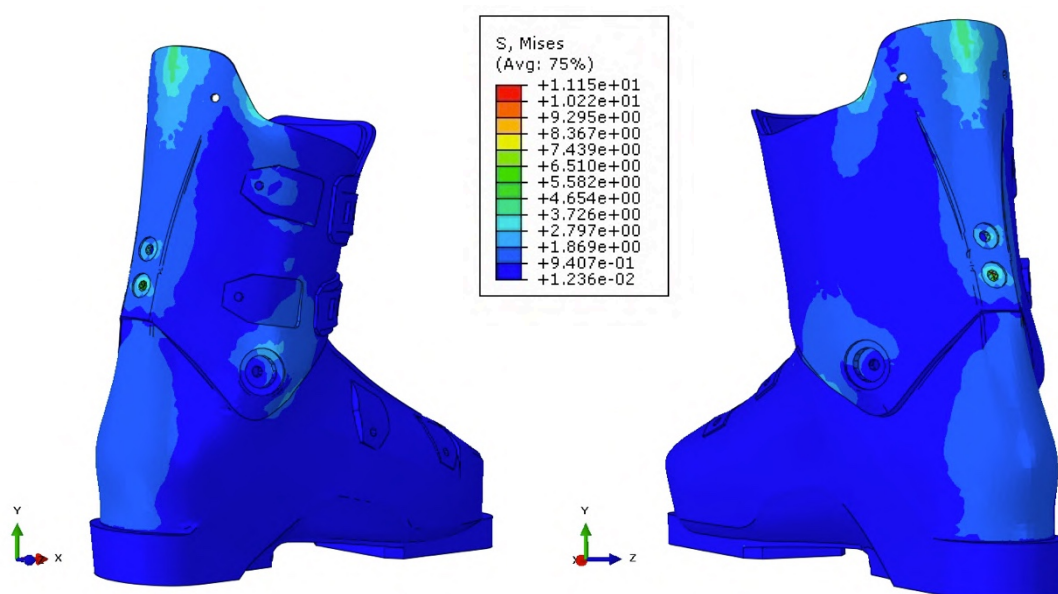


Figura 5-54: Tensioni alla Von Mises Test 2, carico indietro, temperatura +23°C

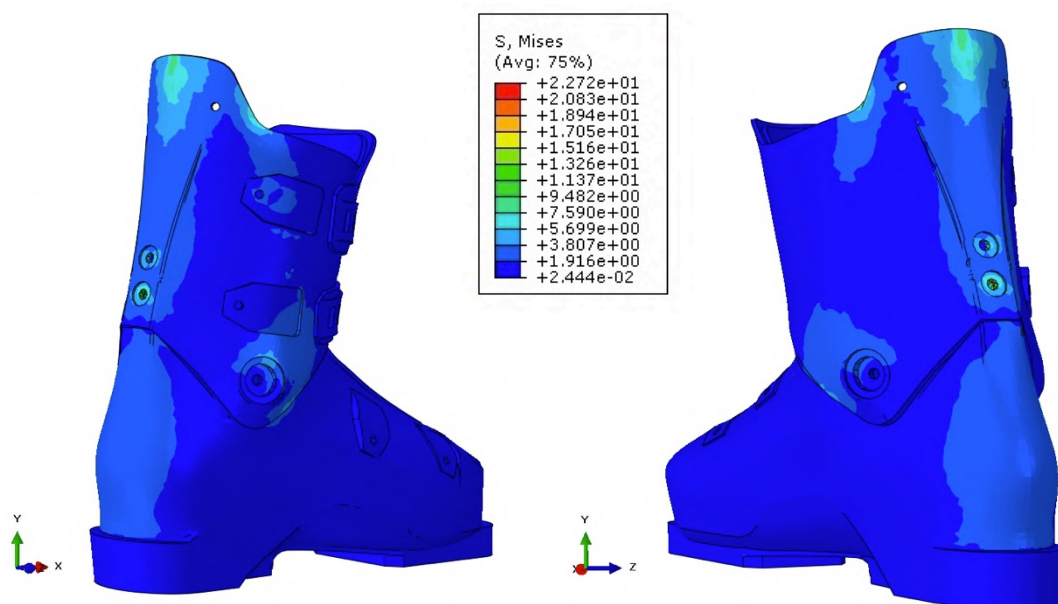


Figura 5-55: Tensioni alla Von Mises Test 2, carico indietro, temperatura -10°C

5.2.2.3 Valutazioni generali – Test 2

Come emerge dalle precedenti immagini, come nel caso del *Test 1* (§5.2.1), è possibile notare che, per quanto riguarda gli spostamenti, questi sono praticamente identici a entrambe le temperature. Questo perché l'angolo di inclinazione rimane invariato e di conseguenza anche gli spostamenti. Le minime differenze riscontrate, come già detto, sono dovute alla maggior rigidità del materiale con l'abbassamento della temperatura. Per quanto riguarda le tensioni, invece, si può vedere che l'andamento è lo stesso, ma nel caso a temperatura -10°C , come nel caso del *Test 1* (§5.2.1), queste hanno un valore circa doppio rispetto a quello a temperatura ambiente. Questo è dovuto alla maggior rigidità del materiale, con il cambio di temperatura infatti il modulo elastico quasi raddoppia. Si analizzano ora nello specifico i singoli spostamenti e le concentrazioni tensionali. In particolare a titolo esemplificativo, nei paragrafi successivi, si indagano gli spostamenti massimi nel caso a temperatura $+23^{\circ}\text{C}$ (che come detto risulta essere il peggiore per quanto riguarda gli spostamenti massimi) mentre le concentrazioni tensionali nel caso a temperatura -10°C .

5.2.2.4 Valutazione spostamenti in X (U1) – Test 2

Anche in questo caso gli spostamenti in X sono quelli meno influenti per le valutazioni da svolgere. È possibile vedere che in generale, sia durante la spinta in avanti che durante quella indietro, lo scafo rimane quasi completamente immobile, la parte che si sposta (per effetto della rotazione) è solamente la zona relativa al gambetto.

5.2.2.5 Valutazione spostamenti in Y (U2) – Test 2

1) Carico in avanti

Per quanto riguarda gli spostamenti in Y nella fase di carico in avanti è possibile affermare che, come avvenuto per il caso precedente (*Test 1*), si ha il massimo positivo (quindi spostamento verso l'alto) nel lembo interno di sinistra, il quale per la rotazione della protesi, e per spinta della parte inferiore dello scafo, tende ad alzarsi (spostamento di circa $+6$ mm, *Figura 5-56 (a)*). Il massimo negativo invece (spostamento verso il basso) è relativo al lembo di destra, il quale per effetto della rotazione in avanti, ed essendo contemporaneamente vincolato nelle borchie, tende ad abbassarsi (spostamento di circa $-9,9$ mm, *Figura 5-56 (b)*).

Nella *Figura 5-56* è possibile visualizzare graficamente i punti esatti in cui si localizza il massimo spostamento sia negativo che positivo (i valori degli spostamenti per effetto della scarpetta, come intuibile dal §5.1.3, rispetto al *Test 1*, §5.2.1, sono maggiori).

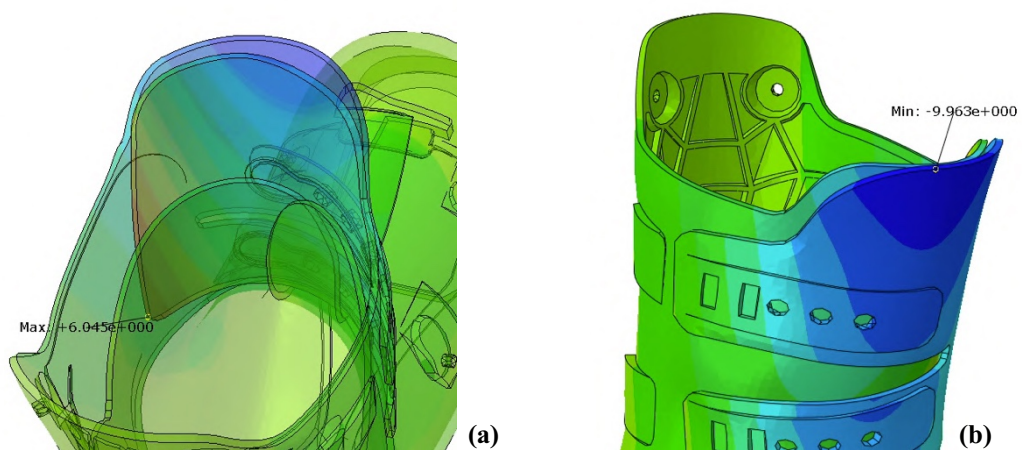


Figura 5-56: *Spostamenti massimi positivi e negativi lungo Y, Test 2, temperatura +23°C, carico in avanti*

Anche in questo caso si valutano ora gli spostamenti relativi al collo-piede andando a verificare che questi non siano di un ordine di grandezza eccessivamente elevato. Per fare ciò, come in precedenza, vengono diminuiti gli spostamenti massimi in modo da visualizzare le nuove linee di contour (*Figura 5-57*).

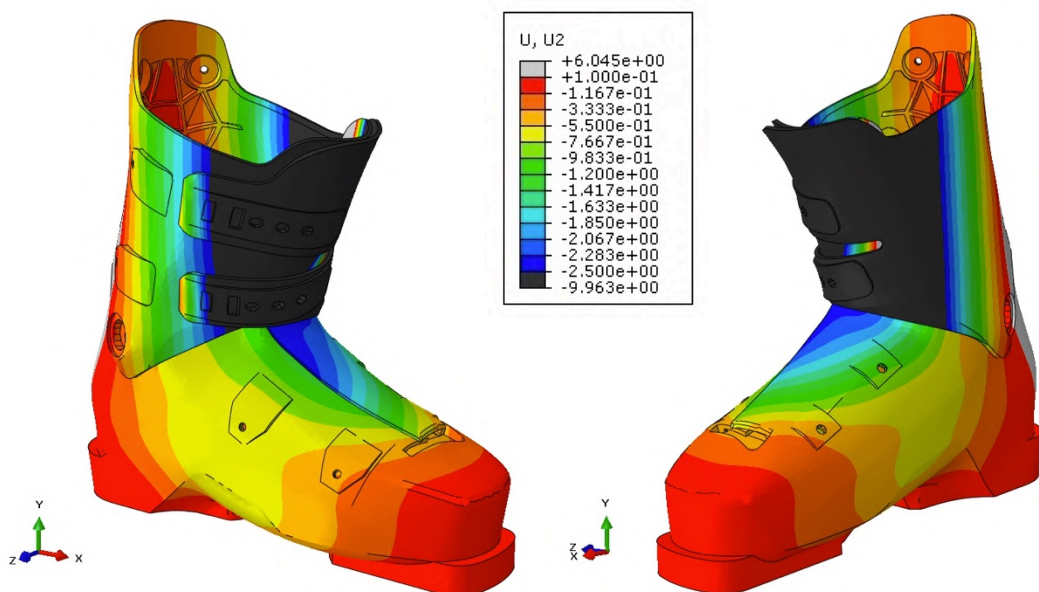


Figura 5-57: *Spostamento zona "collo-piede" lungo Y, Test 2, temperatura +23°C, carico in avanti*

Come si può vedere gli spostamenti massimi nella zona del collo-piede sono dell'ordine di $-2,5$ mm (doppi rispetto al *Test 1*, *Figura 5-26*).

Tali spostamenti rimangono di un ordine di grandezza tale da essere compensati dalla presenza della scarpetta (abbassamento massimo consentito pari a 10 mm).

Non creano quindi nessuna problematica.

2) Carico indietro

Per quanto riguarda il massimo spostamento positivo, questo avviene nei lembi anteriori, come anche nel caso precedente, per effetto della rotazione indietro (quindi la parte anteriore tende ad alzarsi rispetto alla sua configurazione iniziale, spostamento di circa +4,4 mm, *Figura 5-58 (a)*); mentre per quanto concerne il massimo spostamento negativo questo avviene nel lembo interno di destra dello scafo, il quale viene schiacciato verso il basso dal movimento del gambetto (spostamento di circa -1,8 mm, *Figura 5-58 (b)*).

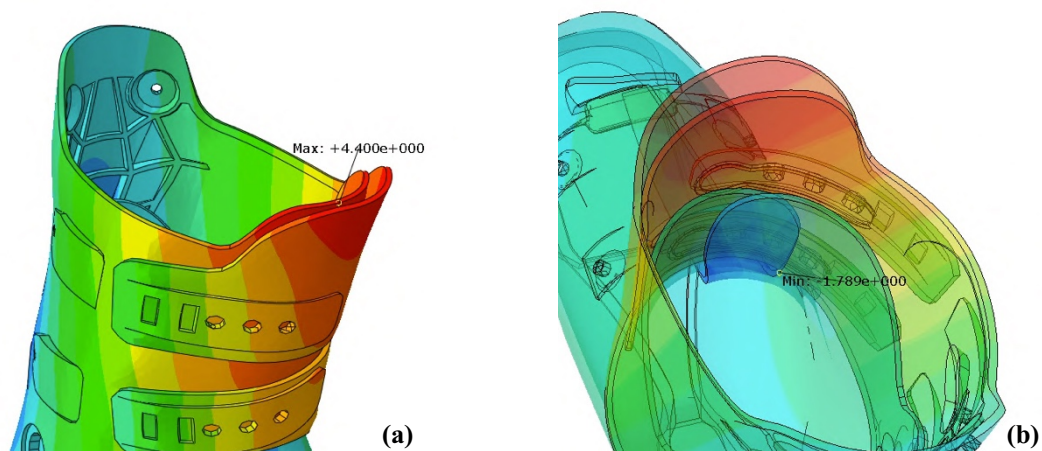


Figura 5-58: *Spostamenti massimi positivi e negativi lungo Y, Test 2, temperatura +23°C, carico indietro*

Anche in questo caso lo spostamento verso il basso del lembo dello scafo, che potrebbe portare allo schiacciamento del collo-piede, è minore di quello ricavato con il carico in avanti (*Figura 5-57*).

5.2.2.6 Valutazione spostamenti in Z (U3) – Test 2

1) Carico in avanti

Il massimo spostamento in Z positivo è localizzato nel lembo di sinistra del gambetto, questo perché, con la rotazione della protesi, tale lembo tende a spostarsi in avanti (lungo X) ma contemporaneamente, schiacciato dal lato del gambetto viene spostato verso l'interno e quindi verso Z positive (spostamento +10 mm, *Figura 5-59 (a)*). Per quanto riguarda lo spostamento massimo negativo, invece, è localizzato in corrispondenza della borchia di destra. Questo avviene per effetto dello spanciamento laterale dello scarpone quando si carica in avanti (spostamento -1,5 mm, *Figura 5-59 (b)*).

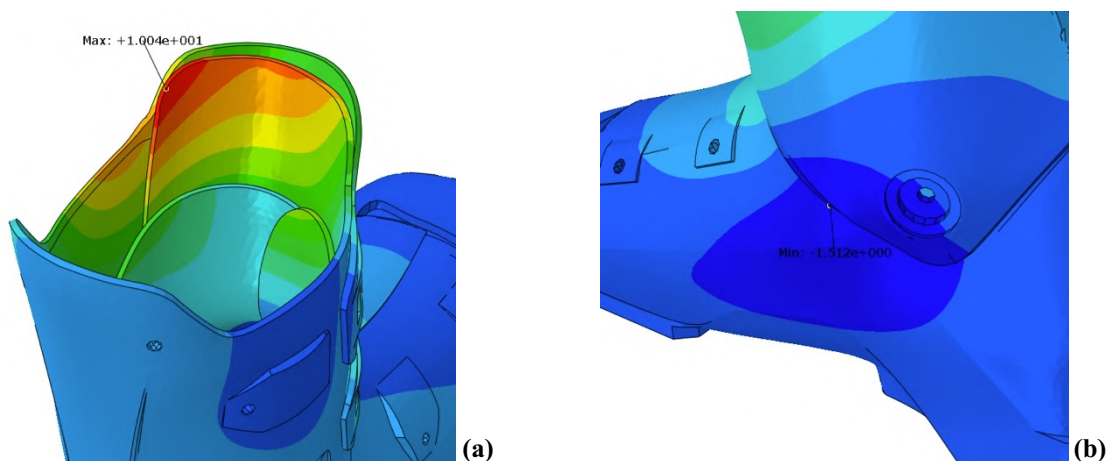


Figura 5-59: *Spostamenti massimi positivi e negativi lungo Z, Test 2, temperatura +23°C, carico in avanti*

Si procede ora con le valutazioni relative allo spostamento laterale delle borchie:

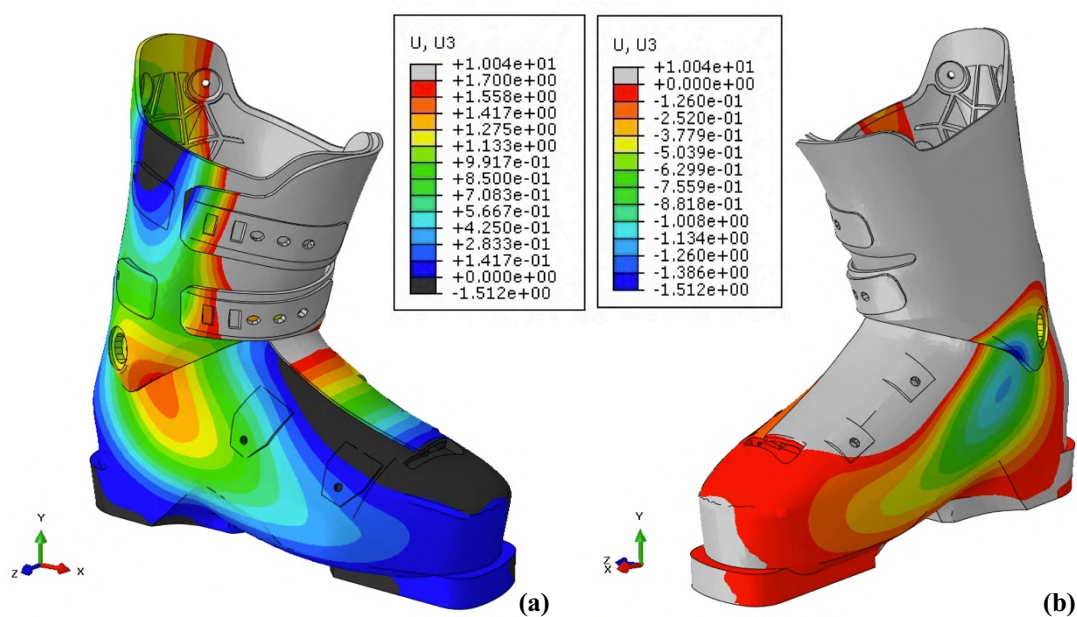


Figura 5-60: *Spostamento zona “borchie” lungo Z, Test 2, temperatura +23°C, carico in avanti*

Come si può notare in questo caso lo spostamento massimo in corrispondenza della borchia si ha nel lato di sinistra (esterno) con uno “spanciamento” che arriva a circa +1,7 mm (*Figura 5-60 (a)*), mentre nel lato di destra (interno) è di circa -1,5 mm (*Figura 5-60 (b)*). Anche in questo caso possono considerarsi accettabili e di un ordine di grandezza tale da non portare nessuna problematica (allargamento massimo consentito pari a 5 mm per lato).

Altra zona da valutare è lo strozzamento del gambetto il quale tende a schiacciare il polpaccio (*Figura 5-61*).

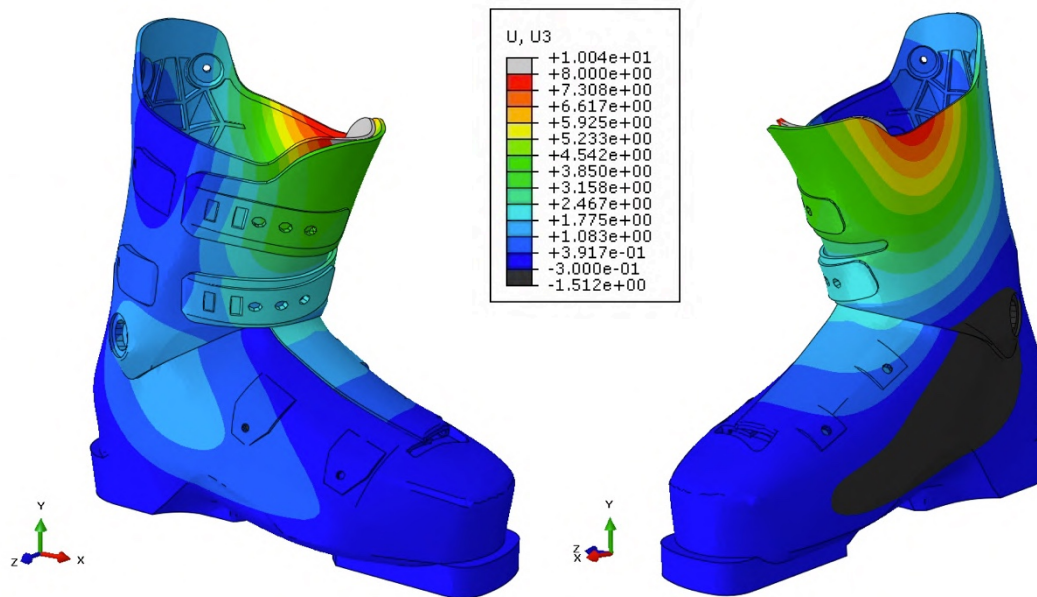


Figura 5-61: Spostamento zona “polpaccio” lungo Z, Test 2, temperatura +23°C, carico in avanti

Anche questo risulta non avere problemi con un restringimento di circa 8 mm che nella realtà viene ammortizzato dalla presenza della scarpetta (massimo restringimento consentito pari a 10 mm).

2) Carico indietro

Gli spostamenti massimi sono concentrati nei lembi dello scafo in quanto, con la rotazione indietro, tendono ad essere schiacciati dal gambetto, entrambi verso l'interno (massimo positivo +4 mm, Figura 5-62 (a); massimo negativo -5,4 mm, Figura 5-62 (b)).

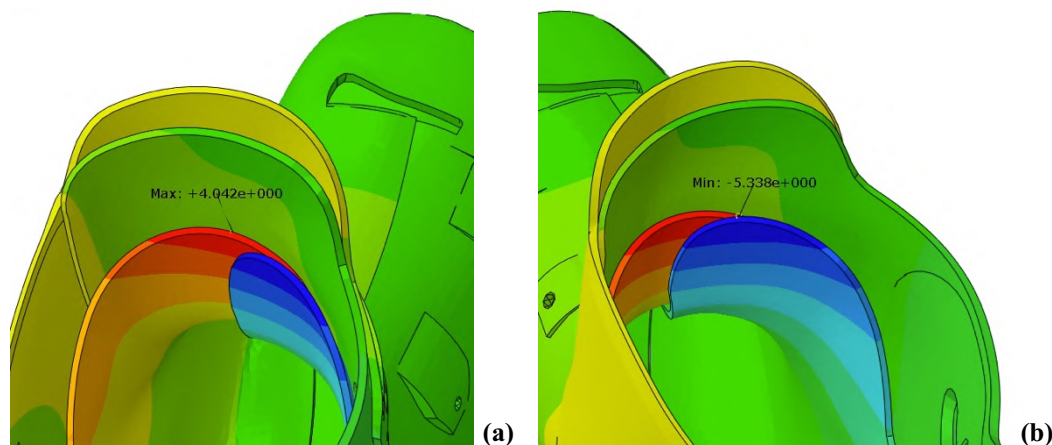


Figura 5-62: Spostamenti massimi positivi e negativi lungo Z, Test 2, temperatura 23°C, carico indietro

In particolare è possibile notare anche il restringimento laterale del gambetto, Figura 5-63 a pagina seguente, la quale porta allo schiacciamento laterale del polpaccio. Risulta però avere spostamenti minori del caso di carico in avanti (Figura 5-61).

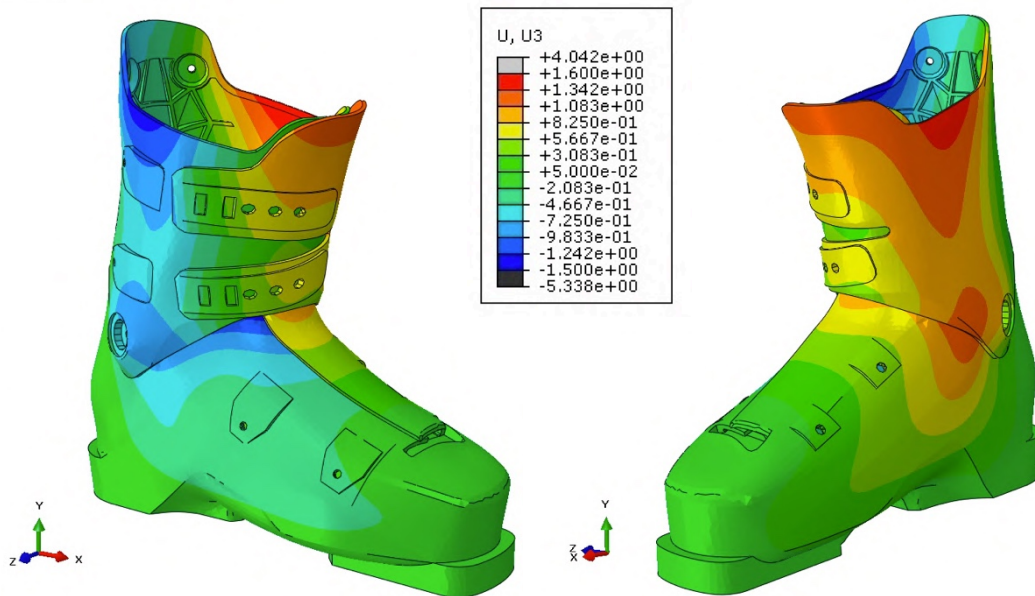


Figura 5-63: *Spostamento zona “polpaccio” lungo Z, Test 2, temperatura +23°C, carico indietro*

5.2.2.7 Valutazione tensioni alla Von Mises – Test 2

1) *Carico in avanti*

Per quanto riguarda le concentrazioni tensionali, si valutano quelle del caso relativo alla temperatura -10°C le quali, come visto in precedenza, sono di un ordine di grandezza quasi doppio rispetto a quelle a temperatura ambiente. Il picco massimo è localizzato in un punto del gambetto ed è dovuto ad una particolare concentrazione della mesh, la quale risulta essere poco accurata e con elementi molto distorti (*Figure 5-64 e 5-65*).

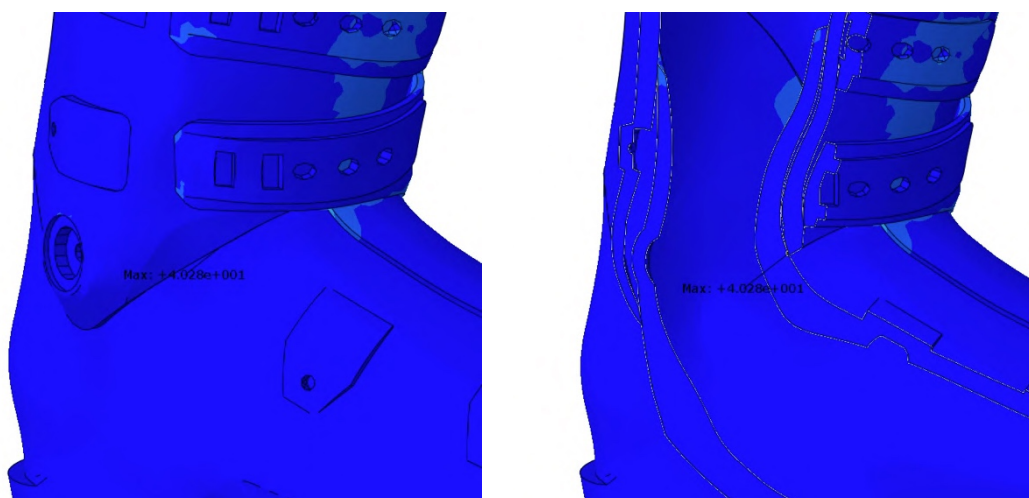


Figura 5-64: *Concentrazione tensionale alla Von Mises massima, carico in avanti, Test 2*

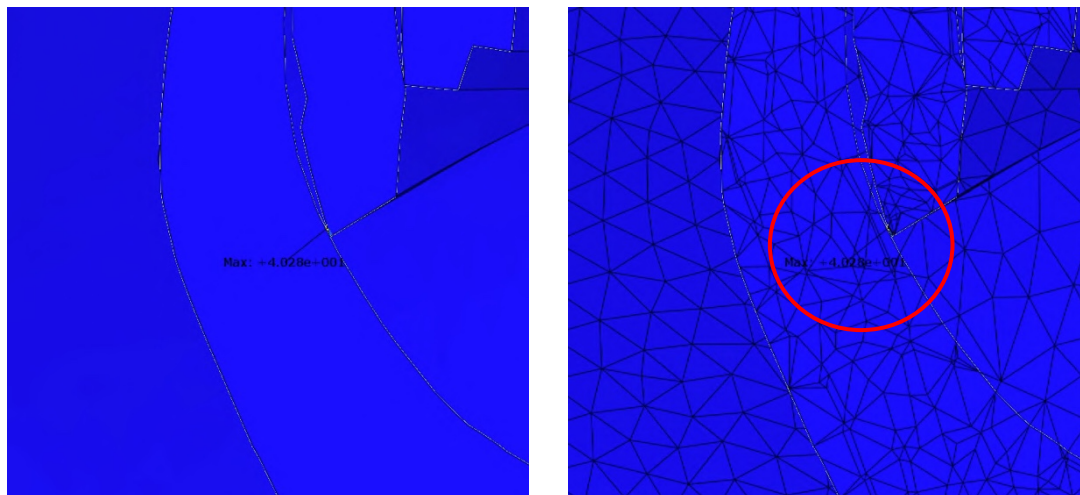


Figura 5-65: Particolare meshatura nel punto con tensioni alla Von Mises massime

Tale concentrazione tensionale è quindi evidentemente scartabile in quanto non rappresentativa della realtà ma solo fonte di una mesh, in questo caso, poco accurata.

Diminuendo i massimi è possibile cogliere altri punti critici (Figura 5-66):

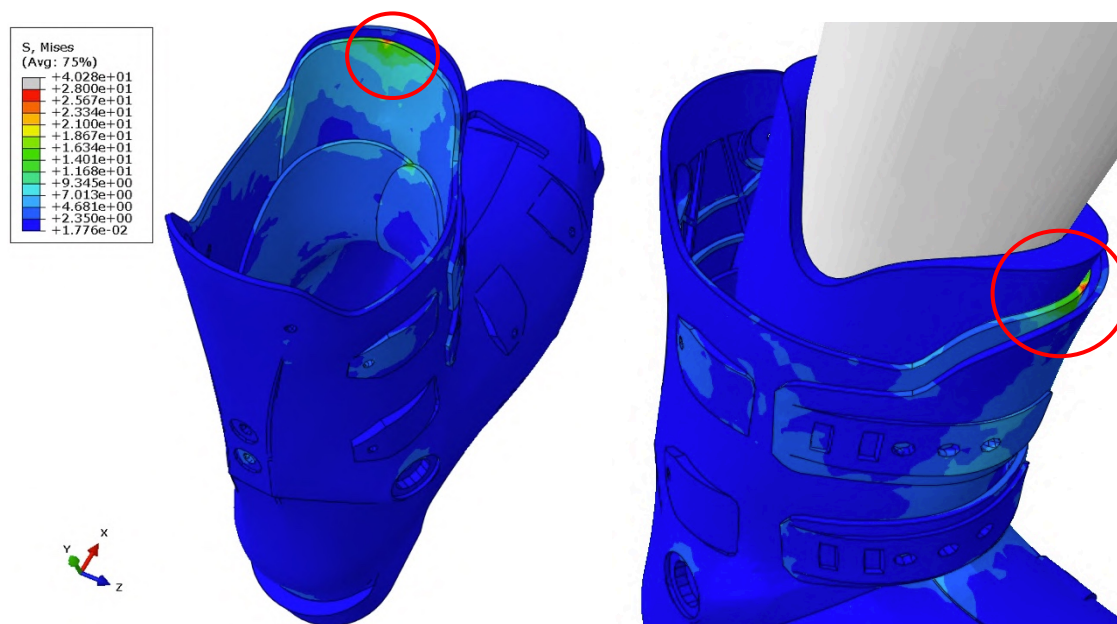


Figura 5-66: Criticità nel punto di contatto fra la scarpetta ed il gambetto

Come anche nel caso precedente ci si accorge che il punto in cui c'è la massima spinta della protesi si ha una concentrazione tensionale. Si nota però che, a differenza del caso precedente, essendoci la scarpetta, tale concentrazione avviene in maniera più uniforme e in un'area maggiore del lembo dello scarpone.

Nello specifico tale tensione è dell'ordine di 28 MPa non crea perciò problematiche alla plastica (la tensione massima ammissibile è pari a 55 MPa).

Si procede man mano diminuendo i massimi andando a vedere dove si concentrano le tensioni (*Figura 5-67*).

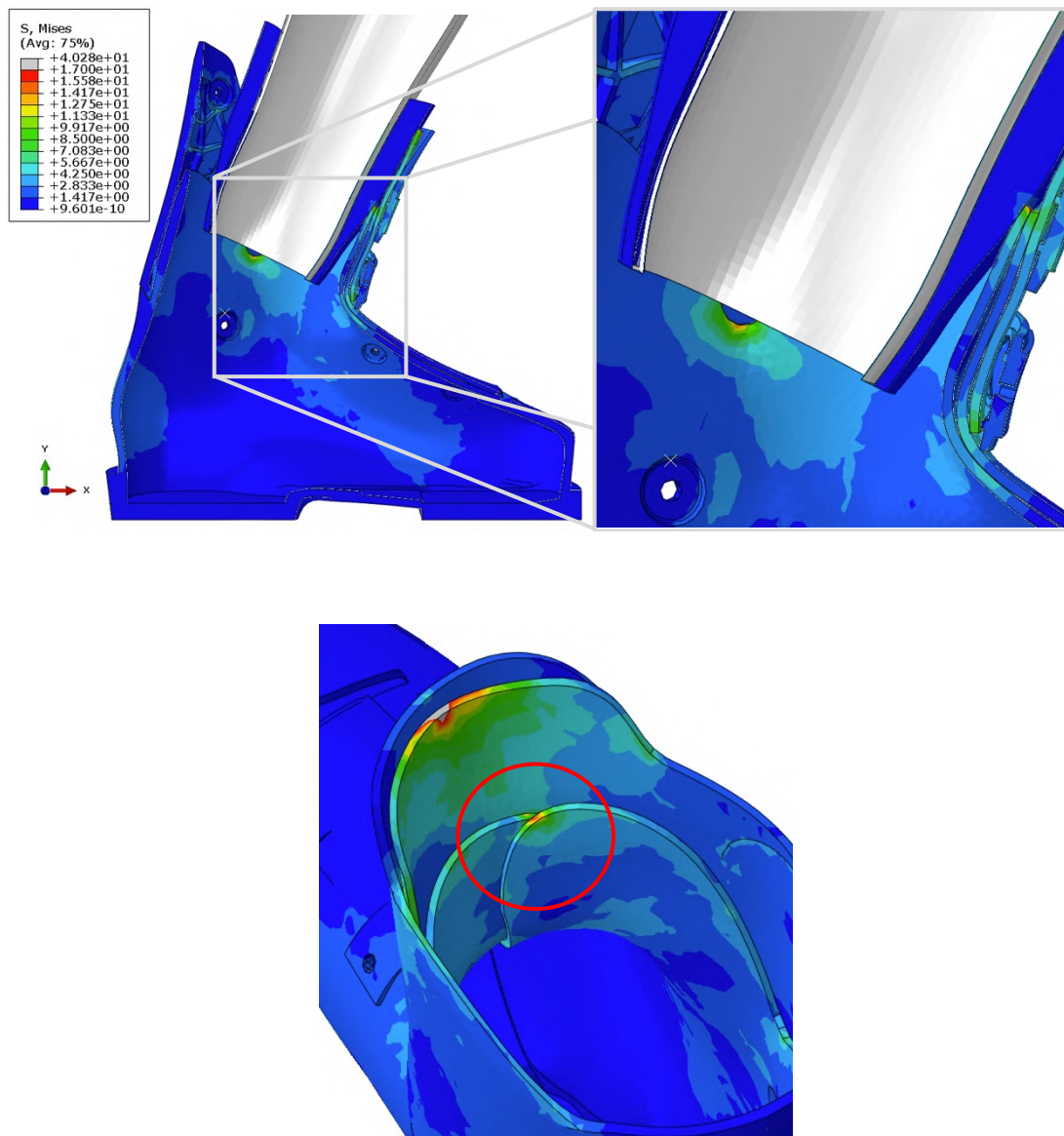


Figura 5-67: Criticità nel punto di contatto fra la scarpetta e lo scafo

A differenza del caso precedente si verificano delle concentrazioni tensionali nel punto alto del lembo di sinistra dello scafo.

Questo avviene, come si può notare nella *Figura 5-67*, in quanto ora, con la presenza della scarpetta, la protesi spinge in avanti in più punti e quindi aumentano di conseguenza anche le zone di contatto.

Anche in questo caso le concentrazioni tensionali risultano essere non problematiche avendo nello specifico valori di circa 17 MPa.

Si procede diminuendo ancora le tensioni massime (Figura 5-68).

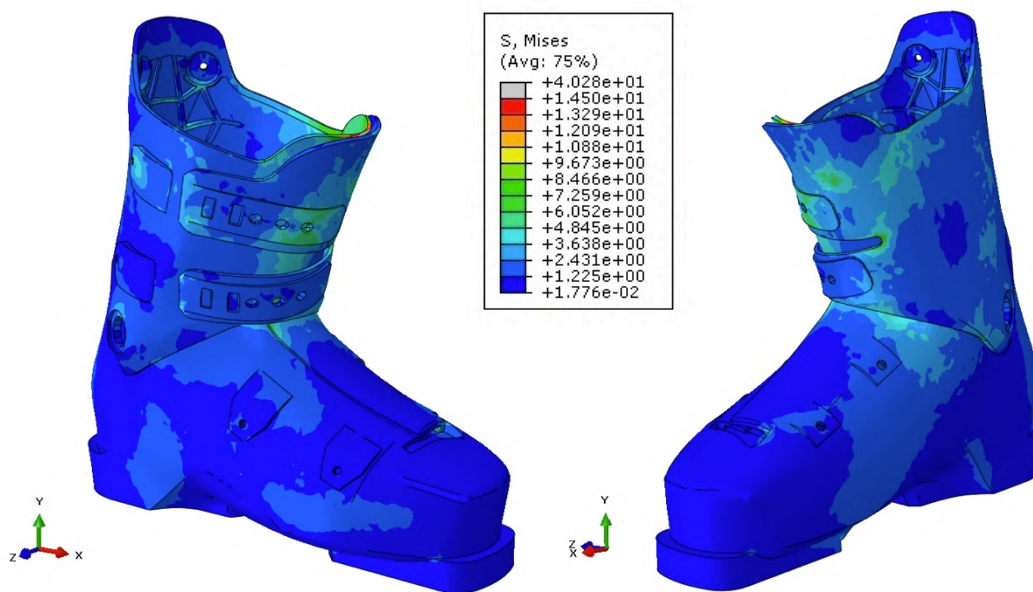


Figura 5-68: Distribuzione generale delle tensioni alla Von Mises diminuendo i massimi, carico in avanti

A questo punto si può notare che l'andamento delle tensioni è molto simile a quello ottenuto precedentemente nel *Test 1* (Figura 5-34), solo che l'ordine di grandezza è maggiore. Lo stesso vale per le concentrazioni le quali si localizzano, come si può vedere nella Figura 5-69 e 5-70, negli stessi punti (Figure 5-35 e 5-36).

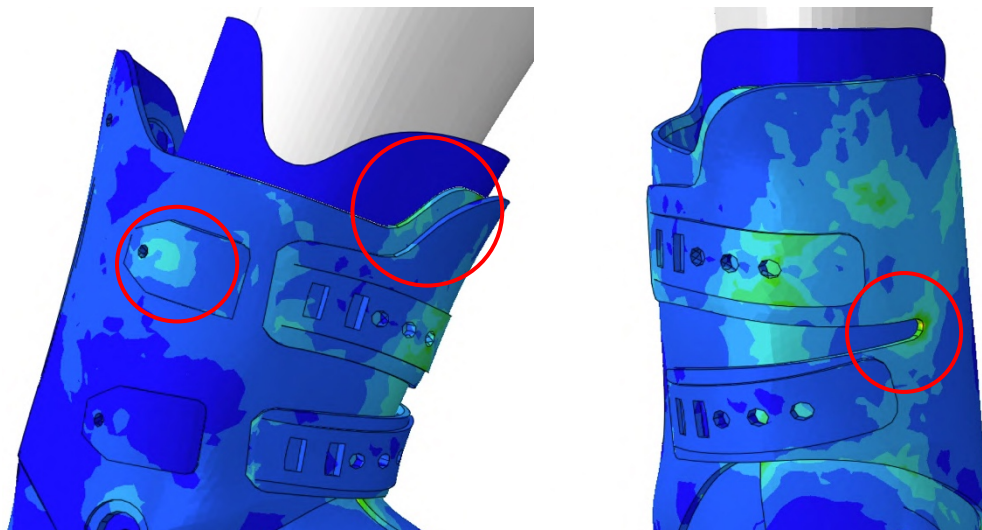


Figura 5-69: Criticità nella zona di fissaggio dei ganci, nella parte superiore del lembo di sinistra del gambetto e nel raccordo fra il lembo superiore ed inferiore di destra del gambetto

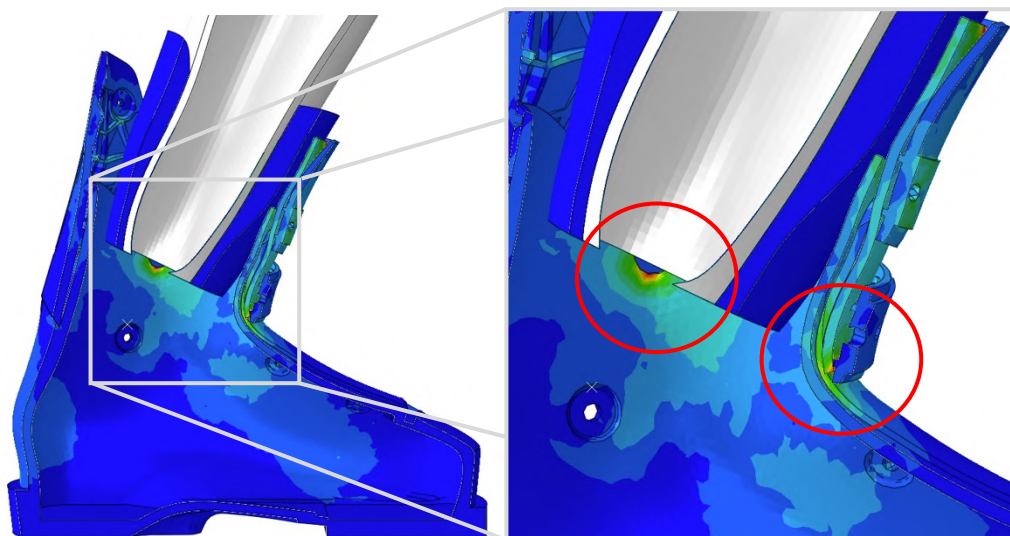


Figura 5-70: Criticità nella zona del collo-piede e nella parte laterale dello scafo

2) Carico indietro

Per quanto concerne il carico indietro (-8°) il picco risulta essere, in questo caso, non nel punto in cui la protesi tocca lo scarpone ma nel punto in cui è applicato il Tie Constrain (Figura 5-71). Essendoci la scarpetta, infatti, come detto, le tensioni sono meno localizzate in un singolo punto e più distribuite lungo la superficie in cui avviene il contatto. Ciò porta il modello ad avere un comportamento più simile a quello reale:

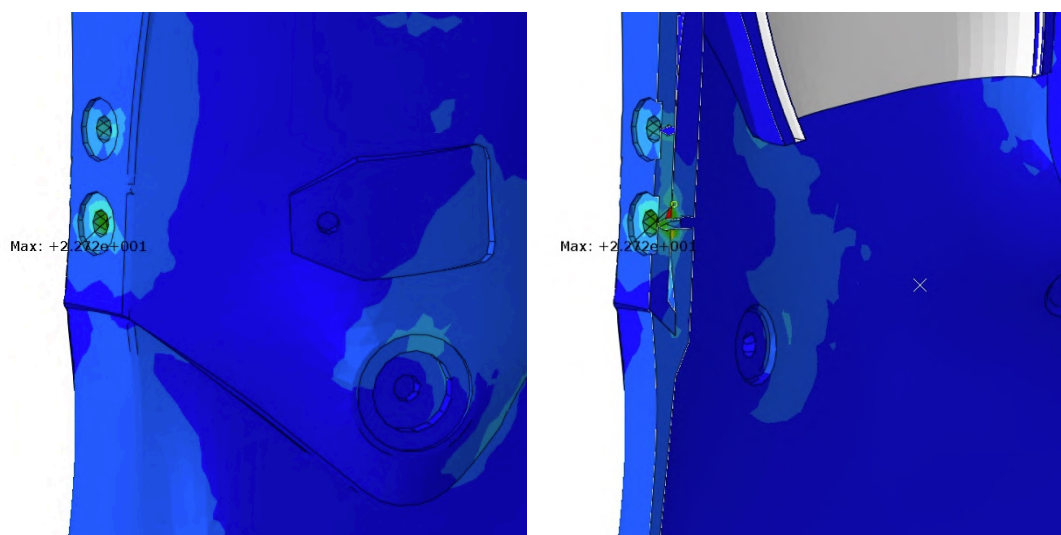


Figura 5-71: Concentrazione tensionale alla Von Mises massima, carico indietro, Test 2

Questa particolare concentrazione di tensione è di circa 22 MPa, non crea quindi particolari problematiche, dimostra però l'aumento delle sollecitazioni in corrispondenza del punto in cui, nella realtà, è presente la vite di fissaggio.

Si abbassano, infine, come fatto precedentemente, i massimi delle tensioni in modo da cogliere l'andamento negli altri punti dello scarpone (Figura 5-72).

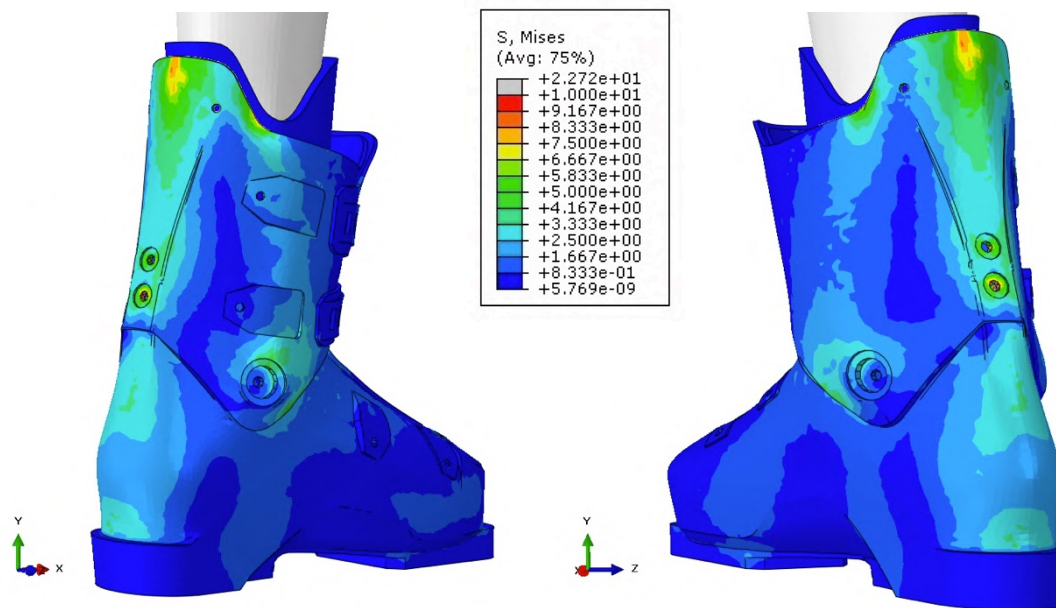


Figura 5-72: Distribuzione generale delle tensioni alla Von Mises diminuendo i massimi, carico indietro

Ci si accorge che, a differenza di prima (Figura 5-39), abbassando i massimi, le tensioni sono distribuite in maniera più uniforme lungo tutta la parte posteriore dello scafo e del gambetto, a riprova del fatto che anche se la scarpetta è stata realizzata in maniera semplificata, permette di rappresentare meglio la realtà andando a diminuire le concentrazioni tensionali dovute ai pochi punti di contatto.

5.2.3 Confronto Test 1 e Test 2

Come già illustrato in precedenza per quanto riguarda i cicli di carico, la differenza fra i due test è evidente. Questo si può notare sia nel §5.1.3 in termini di reazioni vincolari, che ora, in termini di spostamenti e concentrazioni tensionali (i quali fra il Test 1, §5.2.1, ed il Test 2, §5.2.2, sono praticamente raddoppiati).

Fare un confronto fra i due test, in termini di spostamenti e tensioni, dunque, non è particolarmente utile in quanto hanno un setup di prova differente.

Da specificare che, il Test 1 è stato fatto per calibrare il modello ed avere dei primi risultati in modo da capire che strada percorrere per realizzare il Test 2. La seconda prova, perciò, è quella maggiormente interessante, in quanto, approssima le condizioni reali nelle quali viene realizzata la prova dello scarpometro (e restituisce spostamenti e tensioni maggiori). Si può affermare che, con uno studio maggiormente approfondito sulla scarpetta, sarebbe possibile ottenere dei risultati ancora più accurati (come si è visto infatti, aumentando l'area di contatto, aumenta anche la precisione dei risultati).

Conclusioni

Nei capitoli precedenti è stata studiata una procedura numerica che permetta la riproduzione delle prove sperimentali dello scarpometro in due differenti configurazioni. Per la precisione è stato realizzato un primo modello che permetta la simulazione del comportamento dello scarpone sottoposto ad un carico ciclico senza la scarpetta (§4.4.3); successivamente un secondo modello (comprensivo di scarpetta) che permetta di simulare correttamente la vera prova effettuata dallo scarpometro (§4.4.6).

Entrambi i Test sono stati effettuati per due differenti temperature (+23°C e -10°C) in maniera tale da verificare la corretta calibrazione del modello FEM, tramite il confronto con i cicli di carico della prova sperimentale.

Grazie ai dati ricavati si può affermare che i modelli realizzati risultano essere attendibili e permettono di soddisfare il compito richiesto.

In particolare è possibile affermare che le applicazioni sviluppate mettono in evidenza le potenzialità di tale approccio. I metodi FEM infatti, come visto, consentono di ottenere dati ed informazioni che con le prove sperimentali, ad oggi, non possono essere estrapolati.

Nello specifico, rispetto alle indagini effettuate, si può affermare che la tenuta dello scarpone (identificata dai valori massimi e minimi delle reazioni vincolari) è stata rispecchiata correttamente, a riprova del fatto che la resistenza di tale modello sia quella riscontrata con le prove sperimentali (grafici esplicativi da *Figura 5-1* a *Figura 5-8*).

Ciò conferma il cosiddetto “Flex” dello scarpone, cioè la sua resistenza massima nella spinta in avanti ed indietro (elemento caratterizzante di ogni modello di scarpone).

In merito alle valutazioni aggiuntive sono stati riscontrati spostamenti massimi dell'ordine dei millimetri, il caso peggiore, che risulta essere quello a temperatura ambiente comprensivo di scarpetta (§5.2.2.4-5-6), ha subito: un abbassamento lungo Y nella zona del collo-piede pari a 2,5 mm (*Figura 5-57*), uno “allargamento” (spanciamento) laterale delle borchie di circa 2 mm (*Figura 5-60*) ed un “restringimento” (contrazione) laterale nella zona del polpaccio pari a 8 mm (*Figura 5-61*).

Tali spostamenti risultano essere di un ordine di grandezza tale da non causare particolari problematiche e, in generale, sono compensati dalla presenza della scarpetta.

Per quanto riguarda inoltre le tensioni massime riscontrate queste sono inferiori a quelle ammissibili dal materiale. In particolare nel caso a temperatura -10°C comprensivo di scarpetta (caso peggiore, §5.2.2.7), sono state raggiunte tensioni di: 30 MPa nel punto di contatto fra la scarpetta e lo scarpone (durante la spinta in avanti, *Figura 5-66*) e di 22 MPa nella zona relativa al punto di fissaggio posteriore del gambetto con lo scafo (nel carico indietro, *Figura 5-71*).

La resistenza massima del materiale è stata definita a 55 MPa. Non risultano esserci quindi, superamenti di tale limite, cioè possibili rotture del materiale.

Riferimenti Bibliografici

1. <https://www.ridestore.com/it/mag/sport-invernali-piu-popolari-per-questa-stagione/>
2. <https://www.businesscoot.com/it/studio-di-mercato/il-mercato-dellattrezzatura-da-sci-italia>
3. <https://step-lab.com/shoe-testing-systems/>
4. Wriggers P., (2006), *Computational Contact Mechanics* (Second Edition), Springer Verlag Berlin Heidelberg.
5. https://www.head.com/it_CH/formula-rs-120-gw-602112.html
6. https://www.basf.com/kr/documents/ko/product/Thermoplastic%20Polyurethane_Elastollan_Product%20Range.pdf.
7. Krenk S., (2009), *Non-linear Modeling and Analysis of Solids and Structures*, Cambridge University Press.
8. <http://130.149.89.49:2080/v6.14/>

Ringraziamenti

A conclusione di questo percorso di tesi, ma anche di questa esperienza universitaria, voglio ringraziare molte persone che, in differenti modi, mi hanno permesso di arrivare al raggiungimento di questo importante traguardo.

Ringrazio il prof. Gianluca Mazzucco per l'opportunità fornitami con la proposta di tale lavoro di tesi, per il suo aiuto, la sua collaborazione e per avermi trasmesso la passione per la modellazione agli elementi finiti.

Il tecnico Francesco Mariani per la sua disponibilità nel risolvere i problemi informatici sopraggiunti lungo il periodo di tesi, nell'utilizzo della piattaforma virtuale fornita dall'università.

Ringrazio in particolar modo Christian Pozzobon, mentore e tutor aziendale, che mi ha seguito instancabilmente in questi mesi mettendomi a disposizione il suo tempo e le sue conoscenze in ogni momento, anche al di fuori degli orari lavorativi, mobilitando, ogni qual volta che ne avessi bisogno, l'intera azienda per risolvere i problemi che sopraggiungevano.

Ringrazio l'azienda Head (sede di Altivole) ed il suo R&D Manager – Skiboos Division Stefano Noal per l'opportunità fornitami, che mi ha permesso di entrare in punta di piedi all'interno del mondo del lavoro e di conoscere dinamiche e realtà a me ancora in parte sconosciute. Allo stesso modo ringrazio tutti i collaboratori che in questi mesi di stage si sono resi disponibili in maniera fulminea ad ogni richiesta.

Ringrazio infine le persone che in questi anni mi sono state vicine e che mi hanno supportato in questi mesi particolarmente critici.

La mia ragazza e compagna di vita, Francesca, che mi ha sostenuto in ogni momento, alleggerendo le giornate più grigie con allegria, aiutandomi concretamente nelle scelte da intraprendere, motivandomi costantemente anche con il suo esempio concreto e dedicando infinite ore alla revisione dei miei incomprensibili elaborati.

La mia famiglia.

Mamma Paola che mi ha sempre sostenuto con costanza nelle scelte intraprese, pur a volte non condividendole.

Papà Pierluigi che, anche se a volte in modo un po' distaccato, non ha mai smesso di appoggiarmi e sostenermi, anche economicamente, e che oggi per essere qui, a distanza di esattamente 40 anni dalla sua laurea, ha combattuto la battaglia più difficile di tutte.

Giò, il mio fratellino “maggiore” che non smette di sorprendermi e che negli anni mi ha insegnato quanto sia importante nella vita la spensieratezza e l'allegria.

Le mie sorelle Nicole e Sara ed i rispettivi compagni Albero e Filippo per essere degli ottimi modelli di vita ed i miei nipotini Francesco e Samuele con il loro costante buonumore.

Inoltre i suoceri, Chiara e Severino, che mi hanno accolto come un figlio, appoggiato ed incoraggiato nella vita e per tutto il percorso di studi.

Infine i miei amici, tutti, vicini e lontani, che lungo questo cammino mi hanno sempre spronato a dare il massimo essendoci sempre, anche nei momenti più difficili, per stare in compagnia, bere un drink e ricordarsi di vivere, in modo da poter dire sempre:

*“Ricordi tanti
e nemmeno un rimpianto”.*

(De Andrè)