

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"

Corso di Laurea Triennale in Astronomia

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Evoluzione dinamica e collisionale dell'anello attorno ad Haumea

Candidato:

Maddalena Faletti

Matricola 1125381

Relatore:

Prof. Francesco Marzari

Introduzione

Un sistema di anelli rappresenta una struttura rotante su larga scala, come una galassia o dischi proto-planetari densi di gas e polveri che circondano le stelle appena formate, e generalmente sono costituiti da particelle solide o gas e polveri.

Fino all'ultimo decennio si pensava che un sistema di anelli, all'interno del nostro Sistema Solare, potesse essere esclusivamente individuato attorno ai quattro pianeti giganti: Giove, Saturno, Urano e Nettuno. Tuttavia il 26 marzo 2014 per la prima volta un team coordinato da Felipe Braga-Ribas annuncia la scoperta di un sistema di anelli, molto simile a quello di Saturno e degli altri pianeti, attorno al centauro 10199 Chariklo ed avanza l'ipotesi di un sistema simile anche attorno alla cometa periodica 2060 Chiron. Successivamente nell'ottobre del 2017 il ricercatore Jose Luis Ortiz pubblica un articolo nel quale annuncia la scoperta della presenza di un anello anche attorno al lontano pianeta nano 136108 Haumea.

Tutti e tre gli oggetti precedentemente menzionati appartengono alla categoria dei corpi minori i quali, all'interno del nostro Sistema Solare, vengono presentati come oggetti dimensionalmente più piccoli rispetto ai pianeti ed alla nostra stella e classificati in comete, asteroidi, oggetti della Kuiper Belt e della Oort Cloud. Più precisamente si definisce Centauro un piccolo corpo la cui orbita attorno al Sole risiede tra le orbite di Giove e Nettuno e che attraversa i percorsi orbitali di uno o più pianeti giganti. Si definisce cometa periodica, invece, un corpo celeste relativamente piccolo composto da gas ghiacciati (acqua, metano, ammoniaca, anidride carbonica) e frammenti di

rocce e materiali, il cui periodo orbitale è inferiore ai 200 anni. Infine, un pianeta nano generalmente possiede una massa sufficiente a raggiungere l'equilibrio idrodinamico che gli conferisce una forma rotonda od ellissoidale, e la cui orbita è simile a quella dei pianeti giganti ma, a differenza di questi ultimi, non è in grado di ripulire il proprio percorso orbitale. Un pianeta nano è molto più piccolo di un pianeta, e anche della luna terrestre, ma non può essere considerato una luna. Un corpo celeste di questo tipo risiede generalmente nella Kuiper Belt, regione del Sistema Solare che si estende dall'orbita di Nettuno, e per questo chiamati trans-nettuniani, alla distanza di 30 AU¹, fino a 50 AU dal Sole.

Scopo di questo elaborato è analizzare la stabilità e l'evoluzione dinamica e collisionale dell'anello attorno al pianeta nano 136108 Haumea.

Il *Capitolo 1* approfondisce l'origine e l'evoluzione dinamica di un sistema di anelli attorno ad un corpo minore. Inoltre, presenta le simulazioni numeriche del Modello Standard relativo alle collisioni tra corpi, e il potenziale di MacCullagh.

Nel *Capitolo 2*, invece, si analizzano nello specifico le simulazioni relative al trans-nettuniano 136108 Hauema riguardanti la stabilità del suo anello.

¹Un'unità astronomica AU corrisponde alla distanza Terra-Sole pari a 149 597 870 700 metri

Indice

Introduzione	i
1 Anelli attorno a corpi minori	1
1.1 Origine	3
1.1.1 Parziale distruzione di una luna in seguito alle forze di marea durante incontri planetari	4
1.1.2 Espulsione collisionale dalla superficie del corpo	10
1.1.3 Degassamento polveroso	10
1.2 Meccanismi di collisione ed interazione	11
1.2.1 Modello standard	11
1.2.2 Potenziale di MacCullagh	15
1.3 Evoluzione dinamica	19
1.3.1 Evoluzione dinamica dell'anello attorno a corpi non simmetrici rispetto agli assi	20
2 Haumea	25
2.1 Simulazioni	26
2.1.1 Modello	26
2.1.2 Procedura e risultati	27
2.2 Condizioni per la stabilità dell'anello	28
2.2.1 Dinamica dell'anello di polvere di Haumea	38
Conclusioni	46

A	Limite di Roche	48
B	Perturbazioni J_2	51
C	Meccanismo di Kozai-Lidov	53
	Bibliografia	55

Capitolo 1

Anelli attorno a corpi minori

Un sistema di anelli rappresenta una struttura rotante su larga scala, come galassie o dischi proto-planetari densi di gas e polveri che circondano le stelle appena formate. Gli anelli sono costituiti da particelle solide e, ad eccezione di quelli formati da polveri che si estendono lontano dai loro pianeti, si collocano a circa 2.5 raggi planetari in una posizione incline alla forza di marea. In quelli densi le particelle hanno orbite all'incirca Kepleriane, e attraversano il piano intermedio degli anelli due volte durante la loro orbita, con una componente verticale della velocità uguale alla velocità orbitale per il seno del loro angolo d'inclinazione.

Il collegamento σ_v tra lo spessore H di un anello e la velocità relativa delle particelle è fornito da $\sigma_v = H\Omega$, dove Ω è la velocità angolare Kepleriana. Tramite l'analogia tra l'agitazione delle particelle e quella delle molecole, si definisce sistema dinamicamente *freddo* quello dove σ_v risulta piccolo in confronto alla velocità orbitale $V_{orb} = r\Omega$ (dove r indica la distanza dal centro del pianeta), e *caldo* altrimenti.

A differenza di quanto succede in un gas, le collisioni in dischi di detriti dissipano energia, infatti se queste sono frequenti la velocità relativa decresce rapidamente e l'anello diviene sottile e dinamicamente freddo. Nei sistemi dinamicamente caldi, le velocità relative sono molto più grandi rispetto alla

velocità di fuga¹ dalla superficie di un corpo celeste del sistema considerato. Quindi la forza gravitazionale produce piccoli effetti, le collisioni non consentono un processo di accrescimento e l'auto-gravità ha effetti trascurabili.

Al contrario, in un sistema dinamicamente freddo, le traiettorie delle particelle sono significativamente modificate dalle particelle circostanti in seguito a molte collisioni che possono portare al processo di accrescimento.

Le forze di marea sono effetti diversi della gravitazione e tendono ad allungare un oggetto all'interno di un campo gravitazionale di un altro corpo, lungo l'asse tra i due centri di massa. Se l'oggetto che produce tali effetti di marea è molto massiccio o la distanza tra i due oggetti è molto corta, le maree risultano forti e modificano la forma dell'oggetto. Queste forze possono essere anche tanto forti quanto la gravità sulla superficie del corpo celeste e, in assenza di una robustezza interna, possono portare alla distruzione dell'oggetto.

Roche, studiando una chiazza di liquido intorno ad un pianeta, ha notato che se questa si trova, dal centro del pianeta, ad una distanza minore di

$$r_R = 2.45R_p\left(\frac{\rho_p}{\rho_l}\right)^{1/3} \quad (1.1)$$

(dove R_p è il raggio del pianeta, ρ_p è la sua densità e ρ_l è la quella del liquido), non si ha una situazione di equilibrio, ma al contrario, il liquido si disperde. Questo è il così detto *raggio di Roche*. Nonostante la nozione di *Limite di Roche* sia accurata (si faccia riferimento all'appendice A a pagina 48), la posizione esatta del raggio potrebbe dipendere dal processo fisico che si sta considerando, così come dalla densità della particelle che costituiscono l'anello. Un anello che si spinge al di là di tale limite tende, per natura, a accumularsi e le forze di marea divengono troppo deboli per opporsi a questi effetti naturali di auto-gravità che avvengono all'interno di un sistema dinamicamente freddo.

Ogni volta che due particella all'interno di un anello interagiscono, si conserva il momento angolare, il quale potrebbe essere modificato se le inte-

¹La velocità di fuga corrisponde alla velocità minima che un oggetto deve possedere, in una certa posizione, per allontanarsi indefinitamente da un campo a cui è soggetto

razioni cambiano il loro vettore velocità. Ad esempio, se le particelle interne presentano una velocità maggiore rispetto a quelle esterne, le interazioni generalmente producono un trasferimento di momento angolare dall'interno verso l'esterno, così che si ha un aumento del raggio orbitale dei materiali esterni ed una diminuzione di quello interno. Inoltre l'anello si disperde, il momento angolare scorre verso l'esterno e lo stato finale corrisponde a quello di più bassa energia: tutta la massa è caduta nel centro, mentre il momento angolare è portato all'infinito da un'enorme quantità di piccole particelle.

Una modifica del momento angolare può essere dovuta anche ad un satellite che orbita attorno all'anello stesso, denominato *satellite pastore*. Questo, infatti, ha un'influenza gravitazionale sulle particelle, inclina le loro traiettorie e solitamente acquisisce momento angolare da queste.

Dalla seguente formula, fornita da Lin e Papalvizou,

$$\Gamma_L = \frac{8}{27}(\mu_S)^2 \Sigma r^4 \Omega^2 \Delta^{-3} \quad (1.2)$$

dove $\Delta = \frac{(r-r_{\text{ings}})}{r}$ è la distanza normalizzata tra il satellite e il bordo esterno dell'anello, si può notare che il momento torcente subito dal satellite è molto piccolo. Inoltre si osserva che i satelliti vicino al centro degli anelli ricevono un momento torcente positivo, il quale permette loro di muoversi verso l'esterno con una velocità che decresce all'aumentare di Δ . Non appena questo accade il momento angolare viene rimosso dall'anello, rallentando così la sua dispersione verso l'estero.

1.1 Origine

Uno dei metodi più accurati per studiare oggetti molto remoti è l'occultazione stellare, durante la quale la luce proveniente da una stella distante è bloccata da un oggetto in primo piano.

Grazie alle recenti osservazioni tramite occultazione e alla reinterpretazione delle precedenti, è stato individuato un sistema stretto di anelli attorno al centauro 10199 Chariklo e al pianeta nano 136108 Haumea, scoperte annunciate rispettivamente nel marzo 2014 e nell'ottobre 2017. Sembra comunque

difficile pensare che il meccanismo di formazione di questi anelli inaspettati sia il medesimo di quello dei pianeti giganti, dovuto principalmente al fatto che ci si trovi in condizioni completamente differenti.

Proprio per questo motivo sono stati proposti diversi meccanismi riguardanti la formazione del sistema di anelli, tra i quali i più accreditati risultano essere: la distruzione di un satellite primordiale all'interno del limite di Roche, l'espulsione collisionale dalla superficie del corpo principale ed il degassamento polveroso.

Per i Centauri sono stati proposti altri possibili scenari che coinvolgono l'attività cometaria come sorgente dell'anello, ma questi sono stati esclusi nel caso di Haumea poiché tale tipo di attività è inspiegabile per un oggetto transnettuniano così lontano e grande. Per quest'ultimo alcune ipotesi affermano che il processo di formazione dell'anello possa essere strettamente legato ai meccanismi che hanno portato alla formazione delle due lune Hi'iaka e Namaka.

Infine altri modelli includono la possibilità che gli anelli si possano formare esclusivamente tra le 8 e le 20 AU dal Sole, ma questi sono stati esclusi in seguito alla presenza dell'anello attorno ad Haumea, il quale è attualmente situato a più di 50 AU. Tuttavia non si può escludere la probabilità che il pianeta nano si possa essere formato molto più vicino al sole, dove ha sviluppato l'anello, e che sia successivamente migrato nella posizione attuale.

1.1.1 Parziale distruzione di una luna in seguito alle forze di marea durante incontri planetari

Il meccanismo maggiormente supportato e sviluppato riguardo alla formazione del sistema di anelli consiste nella parziale distruzione di una luna in seguito a forze di marea.

Durante un incontro molto ravvicinato con un pianeta gigante, gli effetti delle forze di marea sul corpo dipendono dalla velocità relativa all'infinito e dalla distanza dell'approccio più vicino. Tale velocità, considerando che il Centauro si muova sullo stesso piano orbitale con il pianeta gigante, il quale

è assunto muoversi su un'orbita circolare, è fornita da

$$v_{\infty}^2 = v_r^2 + (v_{\Theta} - v_K)^2 \quad (1.3)$$

dove v_r e v_{Θ} sono le componenti rispettivamente radiale ed altazimutale della velocità del Centauro alla distanza eliocentrica a_0 , mentre v_K corrisponde alla velocità Kepleriana. Dalla conservazione del momento angolare e dell'energia, si ha

$$\frac{1}{2}(v_{\infty}^2 + v_r^2) - \frac{GM_{\odot}}{a_0} = -\frac{GM_{\odot}}{2a} \quad (1.4)$$

e

$$\sqrt{GM_{\odot}a(1 - e^2)} = a_0 \times v_{\Theta} \quad (1.5)$$

dove G è la costante di gravitazione e $M_{\odot} = 1.9891 \times 10^{30}$ kg la massa del Sole. Da queste si individuano

$$v_r = v_k \sqrt{\frac{a_0}{a} \frac{a(1 - e^2)}{a_0}} \quad (1.6)$$

e

$$v_{\Theta} = v_K \sqrt{\frac{a(1 - e^2)}{a_0}} \quad (1.7)$$

in funzione degli elementi orbitali. La Figura 1.1 mostra le varie velocità d'incontro dei Centauri conosciuti con i pianeti giganti.

In seguito alla formulazione di un recente modello di evoluzione termica degli oggetti tridimensionali, i trans-nettuniani e i Centauri, in base al loro periodo di formazione, che ha portato ad una diversa stratificazione interna, vengono classificati in due gruppi costituiti da 50 wt% o 20 wt%² di nucleo di silicato coperto da un mantello di ghiaccio-acqua con una massa totale di 10^{20} kg.

Durante l'incontro tra pianeta gigante e corpo minore le forze di marea inducono il corpo a girare in senso prograde³ e deformano il corpo celeste che

²wt corrisponde all'abbreviazione della parola inglese *weight* che significa peso e dunque wt% indica la percentuale riferita al peso dell'oggetto che si sta considerando

³Un corpo ruota in senso *prograde* quando si muove da ovest a est in riferimento alle stelle, *retrograde* quando si muove da est a ovest sempre in riferimento alle stelle

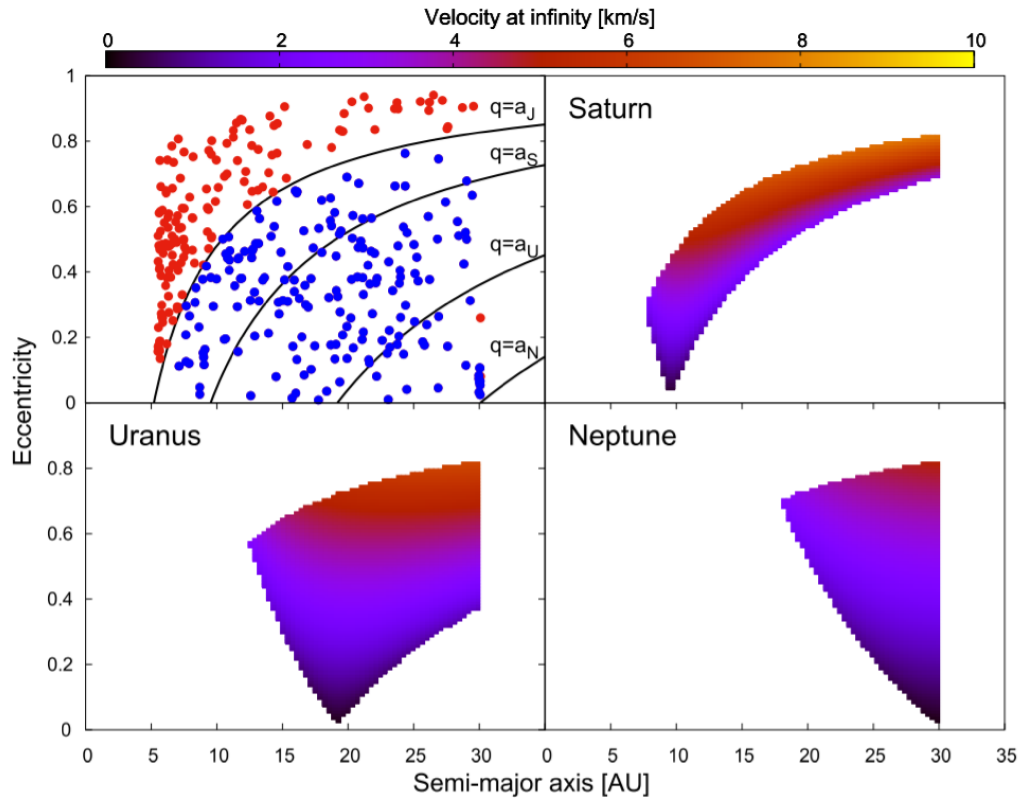


Figura 1.1: Velocità d’incontro dei Centauri conosciuti (raffigurati dai punti riportati nel pannello in alto a sinistra) in seguito all’incontro rispettivamente con Saturno, Urano e Nettuno. Il pannello superiore sinistro riporta i Centauri classificati usando la definizione del *Minor Planet Center* e le linee nere rappresentano le orbite con la distanza dal pericentro uguale al semiasse maggiore di Giove, Saturno, Urano e Nettuno. Le zone colorate nei restanti tre pannelli corrispondono alle velocità relative della popolazione di Centauri al tempo dell’attraversamento dell’orbita del pianeta gigante. *Hyodo et al. (2016)*.

gli passa vicino. Quanto quest’ultimo passa troppo internamente al campo potenziale del pianeta gigante, le forze di marea agiscono in maniera omogenea e, oltre a distruggere il mantello, dividono il nucleo in diversi piccoli frammenti di dimensioni simili che vanno a formare l’anello attorno al corpo rimanente. Tuttavia quando l’oggetto subisce deboli forze di marea a distanze leggermente più grandi dal pericentro, il nucleo non viene completamente

distrutto, ma solamente il mantello di ghiaccio viene strappato dalla superficie e redistribuito attorno al corpo restante, formando in questo modo un anello costituito da ghiaccio e silicato e la cui massa solitamente è lo 0.1% - 10% di quella del corpo di partenza.

Talvolta oltre alla formazione dell'anello, il mantello del progenitore viene diviso in piccole lune di ghiaccio che solitamente presentano un'orbita con elevata eccentricità attorno al corpo centrale. Lo studio di tali satelliti, in particolare della loro evoluzione a lungo termine, è necessario al fine di capire la successiva evoluzione dinamica del sistema anello-satellite. (Si faccia riferimento alla Figura 1.2 per vedere alcune simulazioni).

Generalmente all'aumentare della distanza del pericentro la fuoriuscita di materiale diventa meno distruttiva e di conseguenza si forma un anello meno massivo (situazione rappresentata dai cerchi e quadrati neri nel pannello destro superiore della Figura 1.3). Tuttavia, quando la rottura del mantello forma direttamente le lune, una grande quantità di massa, costituita da quella dei satelliti e del disco, orbita attorno al corpo centrale (triangoli neri $\frac{q}{a_R} = 0.44$ o cerchi blu $\frac{q}{a_R} = 0.63$, pannello superiore destro della Figura 1.3). Come è possibile vedere nel pannello sinistro in basso della Figura 1.3, durante un incontro ravvicinato, il corpo minore viene fatto ruotare in senso prograde e all'aumentare della distanza dal pericentro la sua rotazione indotta diminuisce. Più in generale la Figura 1.3 rappresenta le proprietà del corpo restante e del disco di particelle formati tramite la distruzione di un corpo minore dovuta alle forze di marea innescate da un incontro ravvicinato con un pianeta gigante.

I risultati di questa distruzione possono essere diversi a seconda dello stato iniziale, ovvero struttura interna, spin e velocità all'infinito, dell'oggetto celeste che la subisce e dalla geometria dell'incontro. Per una piccola frazione del nucleo di silicato, più veloce è la rotazione di spin nella direzione prograde, o più piccolo è il valore della velocità all'infinito, più gli incontri divengono distruttivi e in tal modo la formazione dell'anello può avvenire alle più larghe distanze dal pericentro.

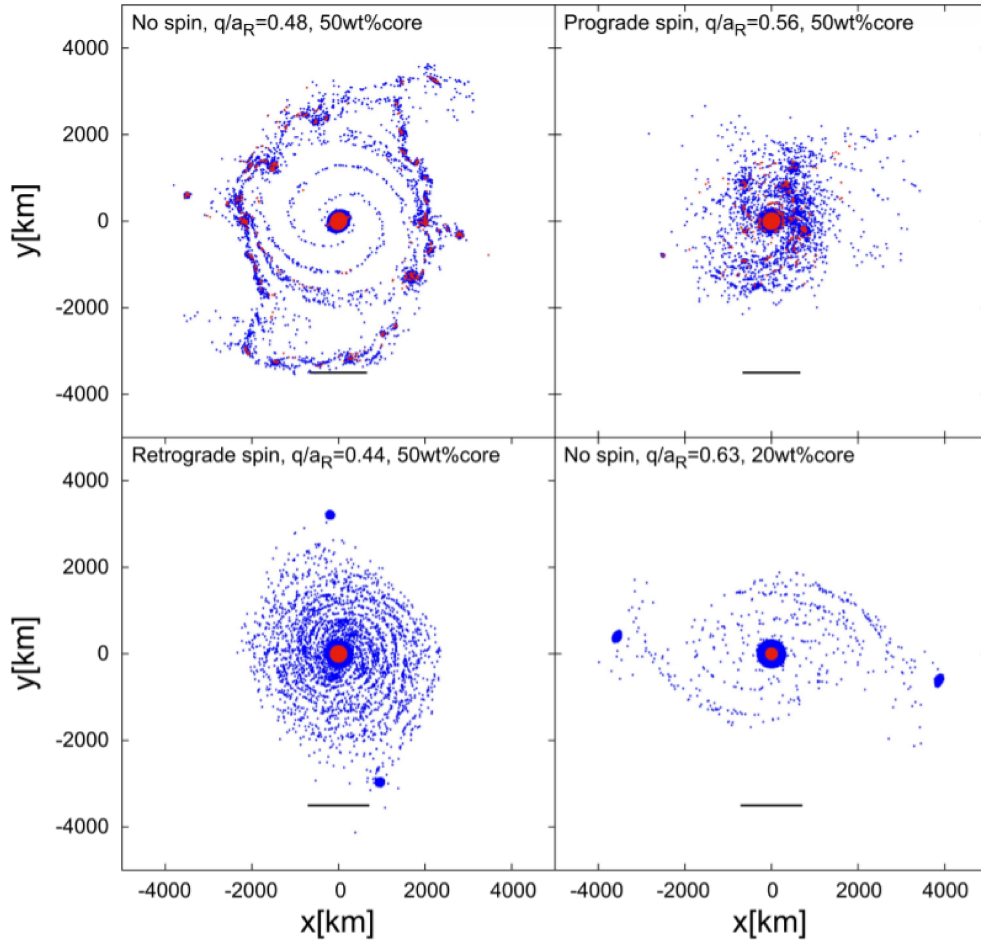


Figura 1.2: Istantanee di simulazioni per i diversi stati iniziali e diversi modelli con una velocità all'infinito pari a $v_\infty = 3 \frac{km}{s}$. Le parti in blu ed in rosso indicano rispettivamente le componenti di ghiaccio e silicio, mentre le linee orizzontali nere indicano i diametri di Roche del corpo centrale per il mantello di ghiaccio. *Hyodo et al. (2016)*.

Conclusa la loro formazione gli anelli, teoricamente, si diffondono e si uniscono andando a formare delle nuove lune appena al di fuori del limite di Roche del corpo ospitante, dove le forze di coesione sono maggiori delle forze di marea. Successivamente le collisioni tra le nuove lune formati si traducono nella formazione di un anello sottile e di satelliti pastore. Effetto di tali corpi è quello di mantenere la stabilità dell'anello e di modellarne i suoi bordi

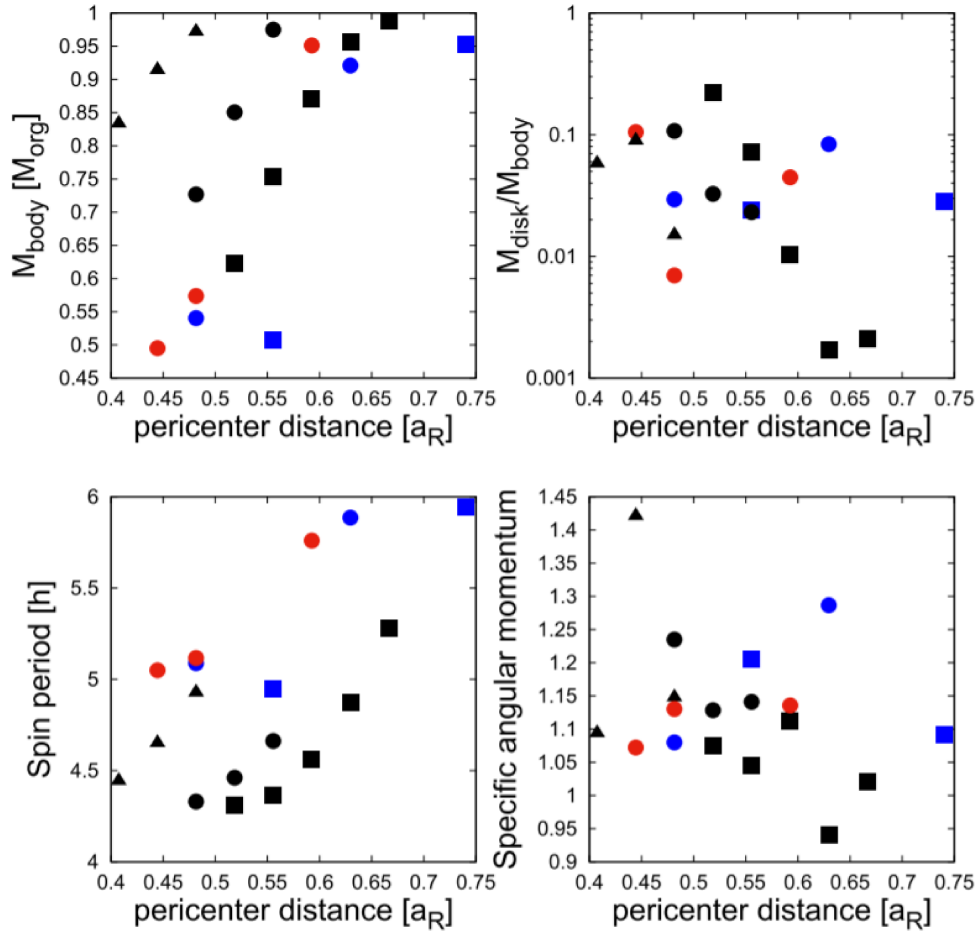


Figura 1.3: Proprietà del corpo restante e del disco di particelle formatisi attorno a quello tramite la distruzione di un corpo minore dovuta alle forze di marea innescate da un incontro ravvicinato con un pianeta gigante. L'asse orizzontale indica la distanza dal pericentro dell'orbita iniziale del corpo transitante, ridimensionata dal limite di Roche del pianeta per il materiale di ghiaccio. I pannelli superiori mostrano rispettivamente la massa del corpo centrale M_{body} rimanente, ridimensionata dalla massa iniziale del pianeta transitante M_{org} , e la massa del disco M_{disk} , ridimensionata da quella del corpo centrale rimanente. Il pannello sottostante a sinistra mostra il periodo di spin del corpo centrale restante dopo l'incontro, mentre quello a destra mostra il momento angolare specifico delle particelle scalate del fattore $M_{disk} \sqrt{GM_{body} a_{R,lr}}$, dove $a_{R,lr}$ è il limite di Roche del corpo centrale. I diversi simboli corrispondono ai diversi stati iniziali di spin; cerchi, triangoli, e quadrati rappresentano rispettivamente la situazione in assenza di spin, spin prograde e spin retrograde. I punti neri sono quelli con velocità all'infinito pari a $v_{+\infty} = 3 \frac{km}{s}$ con 50wt% di nucleo di silicato, quelli rossi con $v_{+\infty} = 6 \frac{km}{s}$ e quelli blu con $v_{+\infty} = 3 \frac{km}{s}$ entrambi con 20wt% di nucleo di silicato. *Hyodo et al. (2016)*.

tramite interazioni gravitazionali. Inoltre modificano le orbite delle particelle deviandole dalla traiettoria originaria, rendendo il bordo dell'anello frastagliato. Le forze che agiscono portano alla creazione di moti localmente sinusoidali periodici con un periodo proporzionale alla distanza tra il satellite e le particelle che costituiscono l'anello. Alternativamente le lune, formate dalla diretta rottura del mantello del progenitore, durante gli incontri potrebbero modellare l'anello di detriti con un'evoluzione a lungo termine.

Il vantaggio di tale scenario è che viene considerato valido per un generico corpo minore. Tuttavia affinché avvenga sono necessari incontri molto ravvicinati, ma il tasso di tali incontri non è ancora chiaro e dunque la probabilità di questo meccanismo di formazione deve essere ancora approfondita.

1.1.2 Espulsione collisionale dalla superficie del corpo

Il seguente meccanismo di formazione di un sistema di anelli prevede un impatto sul corpo minore che potrebbe espellere materiale della superficie, il quale rimarrebbe in orbita attorno ad esso. Una parte di questo materiale è destinato a formare anelli all'interno del limite di Roche, possibilmente concentrati in particolari regioni stabili all'interno di una situazione di risonanza spin-orbita⁴ o vicino ad un satellite pastore.

1.1.3 Degassamento polveroso

In questo scenario, prendendo come esempio il centauro Chariklo, le particelle di CO e N₂ fuoriescono, sempre sotto forma di gas, dall'interno del corpo celeste mentre il corpo si scalda durante il viaggio dalla Kuiper Belt alla sua orbita attuale. Questo degassamento potrebbe sollevare polvere dalla superficie del corpo minore, finendo in piccola parte in un'orbita stabile attorno al corpo principale. Successivamente, grazie all'evoluzione collisiona-

⁴Essere in risonanza spin-orbita indica che i periodi di rotazione e di rivoluzione del corpo sono legati da numeri interi

le delle polveri ed a meccanismi di condensazione, si formano particelle di dimensioni di qualche metro che si stima rimangano all'interno dell'anello.

Un interessante aspetto di questo meccanismo è che ipotizza che la presenza di un sistema di anelli sia comune attorno ai Centauri che non presentano attività cometaria.

1.2 Meccanismi di collisione ed interazione

Prima di approfondire l'evoluzione dinamica dell'anello, conviene proporre un quadro generale, al fine di comprendere maggiormente i meccanismi di collisione e d'interazione tra i corpi minori ed un pianeta.

Nella seguente sezione vengono presentati il così detto *Modello Standard* di Brahic, il quale studia il movimento delle particelle che collidono all'interno di un campo gravitazione, ed il *Potenziale di MacCullagh*, fondamentale per studiare le interazioni dovute al momento quadruplo che si instaura tra satellite e pianeta .

1.2.1 Modello standard

André Brahic, studiando un sistema di corpi che collidono in un campo gravitazionale, propone un modello base, semplificato rispetto al caso reale, chiamato *Modello standard*. Secondo i risultati di un'analisi sistematica di come evolve questo modello, dopo un appiattimento molto veloce il sistema raggiunge uno stato in una situazione di quasi equilibrio, nel quale ancora avvengono collisioni e lo spessore del disco risulta finito. In seguito ad una diversa rotazione il disco si disperde molto lentamente. Le particelle si muovono sia verso l'interno che l'esterno dell'anello ed il momento angolare viene trasferito dall'interno verso l'esterno. Generalmente il tempo scala di questo fenomeno è molto lungo e l'energia che viene persa nelle collisioni è ottenuta a discapito di quella dissipata del disco che si sta diffondendo.

In tale meccanismo si considera un sistema a tre dimensioni di particelle che

si muovono in un campo gravitazionale di un corpo centrale. Si conosce molto poco riguardo alle particelle che si stanno considerando, ma per semplicità e generalità si assumono corrispondere a sfere indistruttibili, senza attrito e che presentano la stessa massa e lo stesso raggio.

La massa totale delle particelle è trascurabile rispetto al centro di massa, questo può essere giustificato, in prima analisi, non considerando la reciproca attrazione delle particelle (una tale situazione è comunque poco realistica). Se la velocità relativa di due particelle è dell'ordine, o più piccola, della velocità di fuga alla superficie si ha che:

- le orbite possono essere deflesse in seguito all'attrazione relativa. Questo effetto ingrandisce le effettive cross-sections delle particelle e dunque tende ad aumentare il numero di collisioni.
- possono prendere forma altri effetti anche se ci si trova in una situazione senza collisioni. Ad esempio, incontri ravvicinati di due particelle senza collisioni sono confrontabili con gli scontri elastici, nel senso che la direzione del moto cambia a breve distanza, mentre l'energia totale delle particelle che "collidono" è conservata. Le collisioni elastiche, a differenza di quelle anelastiche, non appiattiscono il sistema, e portano ad un considerevole aumento del numero di particelle che fuggono.

Dunque, poiché il sistema che si considera è poco appiattito, si può trascurare l'attrazione relativa delle particelle.

Un'altra limitazione che si può fare in prima approssimazione, è quella di considerare le orbite come Kepleriane attorno al centro di massa. Tale situazione è veritiera per i corpi, in particolar modo per gli anelli, all'interno del Sistema Solare, ma risulta poco realistica per quanto riguarda le galassie.

Il modello proposto da Brahic, nonostante si conosca poco riguardo alle collisioni all'interno dell'universo, presenta delle basi solide.

Innanzitutto, come conseguenza della loro dimensione finita, le particelle collidono, e dopo ogni singola collisione la componente radiale della velocità è conservata, mentre quella perpendicolare è ridotta di un fattore costante k .

Facendo riferimento alla Figura 1.4 si indica con \mathbf{V}_r la velocità relativa radiale e \mathbf{V}_t quella tangenziale, entrambe riferite alle due particelle appena prima dell'incontro. Se la collisione è elastica, le velocità relative radiale e tangenziale appena dopo la collisione risultano:

$$\mathbf{V}_r' = -\mathbf{V}_r \quad (1.8)$$

$$\mathbf{V}_t' = \mathbf{V}_t. \quad (1.9)$$

Se invece la collisione è anelastica, la velocità relativa radiale è più piccola dopo la collisione ed un modo semplice per generalizzare le equazioni precedenti è inserire un termine costante k :

$$\mathbf{V}_r' = k\mathbf{V}_r \quad |k| \leq 1 \quad (1.10)$$

$$\mathbf{V}_t' = k'\mathbf{V}_t \quad k' = +1. \quad (1.11)$$

che nel Modello Standard è più semplice considerare indipendente dalla velocità relativa dei due corpi collidenti.

Poiché l'energia viene persa e le particelle non sono in grado di penetrare le une nelle altre, k è limitata da:

$$-1 \leq k \leq 0 \quad (1.12)$$

Infine, poiché le particelle sono sfere indistruttibili, non si ha alcuna frammentazione dopo le collisioni. Tale considerazione sembra ragionevole, infatti le velocità relative sono piccole nel caso fisico reale, così come nella maggior parte dell'evoluzione del Modello Standard.

Concentrandosi ora sull'aspetto geometrico, e facendo riferimento alla Figura 1.4, si nota che due particelle (i) e (j) calcolate in I e J , entrambe con raggio r , hanno velocità \mathbf{V}_i e \mathbf{V}_j subito prima della collisione, e \mathbf{V}_i' e \mathbf{V}_j' immediatamente dopo. La conservazione del momento durante le collisione permette di scrivere:

$$\mathbf{V}_i' = \frac{1}{2} \{ \mathbf{V}_i + \mathbf{V}_j + [(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j) \mathbf{u}] k \mathbf{u} + [(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j) \mathbf{v}] k' \mathbf{v} \} \quad (1.13)$$

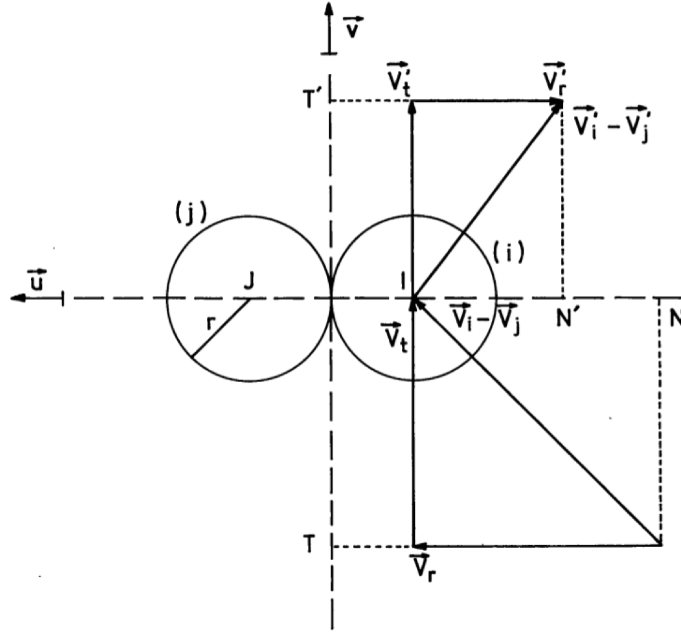


Figura 1.4: Tipica collisione tra due particelle (i) e (j), entrambe con raggio r e con centri rispettivamente in I e J , raffigurata in riferimento alla particella (j). Le due particelle presentano velocità rispettivamente \mathbf{V}_i e \mathbf{V}_j appena prima della collisione; e \mathbf{V}_i' e \mathbf{V}_j' subito dopo. La velocità relativa delle due particelle è definita da $(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j)$ prima dell'impatto e da $(\mathbf{V}_i' - \mathbf{V}_j')$ dopo. \mathbf{V}_r e \mathbf{V}_t corrispondono rispettivamente alla velocità relativa radiale e tangenziale delle due particelle prima della collisione, mentre \mathbf{V}_r' e \mathbf{V}_t' quelle dopo l'impatto. \mathbf{u} è un vettore unitario lungo IJ e \mathbf{v} è un versore lungo la componente radiale della velocità relativa $\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j$. *Brahic (1975)*.

$$\mathbf{V}_j' = \frac{1}{2} \{ \mathbf{V}_i + \mathbf{V}_j - [(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j) \mathbf{u}] k \mathbf{u} - [(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j) \mathbf{v}] k' \mathbf{v} \} \quad (1.14)$$

dove

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{IJ}}{|\mathbf{IJ}|} \quad (1.15)$$

corrisponde ad un vettore unitario che risiede lungo IJ quando avviene la collisione e

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{IJ} \wedge (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j)}{|\mathbf{IJ} \wedge (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j)|} \wedge \mathbf{u} \quad (1.16)$$

corrisponde al versore lungo la componente radiale della velocità relativa $\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j$.

L'energia persa dopo una collisione è

$$(1 - k^2) [\mathbf{u} \cdot (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j)]^2 + (1 - k'^2) [\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j - (\mathbf{u} \cdot (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j)) \mathbf{u}]^2. \quad (1.17)$$

Si ritiene che non appena una particella assume una traiettoria iperbolica il sistema la perda e non riesca più ad individuarla. Al contrario le particelle che si avvicinano molto al centro vengono catturate dal corpo centrale. Inoltre lo spin delle particelle coinvolte cambia dopo ogni collisione, ma con le considerazioni fatte per lo sviluppo del Modello Standard, la rotazione di ogni singola particella è completamente disaccoppiata dalla sua traslazione, e dunque lo spin può essere trascurato.

Generalmente durante una simulazione numerica si utilizza un numero ristretto di particelle. Nel Modello Standard, se è applicato un fattore di ridimensionamento adeguato, il risultato diviene valido per un sistema più realistico contenente molte più particelle. Brahic mostra che una modifica del numero di particelle N , o del loro raggio r , influisce solamente sulla velocità di evoluzione, la quale è proporzionale a $N(r/R)^2$, dove R è una dimensione caratteristica del sistema. Dunque un sistema costituito da una grande quantità di piccole particelle può essere sostituito da un sistema contenente un minor numero di particelle ma di dimensione maggiore.

1.2.2 Potenziale di MacCullagh

Molto spesso i corpi minori non sono propriamente sferici, ma presentano una forma oblata con gli assi principali d'inerzia diversi tra di loro. Come conseguenza si ottiene una forte interazione che risulta essere indipendente da quella dovuta a maree. Questo perché il centro di marea è un'asimmetria aggiuntiva per quanto riguarda la forma del corpo, ma tale centro può cambiare in funzione della posizione tra il pianeta ed il satellite. Inoltre, poiché alcuni corpi minori presentano una loro forma irregolare, come conseguenza, scaturisce un momento della forza che agisce tra il pianeta ed il satellite.

Il problema a cui si va incontro quando si calcola il momento di una forza tra un satellite irregolare e un pianeta, è che in teoria bisogna dividere il corpo in piccoli cubi ed integrare su tutto il volume del satellite la forza tra ciascun cubo ed il pianeta. Se si considera un sistema di assi riferito ad un corpo fisso molto vicino ad un satellite e si sceglie un punto P corrispondente alla posizione del pianeta, da un punto di vista analitico, risulta impossibile calcolare la forza gravitazionale di ogni componente del satellite. Esistono, però, delle particolari forme che forniscono espressioni per il potenziale che sono abbastanza semplici da utilizzare per calcolare il momento tra il satellite ed il pianeta.

In particolare se si considera un satellite fisso deformato, quale potrebbe essere un ellissoide oblato, i momenti principali d'inerzia riferiti agli assi cartesiani sono dati da:

$$A = \sum \delta m(y^2 + z^2), \quad (1.18)$$

$$B = \sum \delta m(z^2 + x^2), \quad (1.19)$$

$$C = \sum \delta m(x^2 + y^2). \quad (1.20)$$

Nel sistema considerato, rappresentato in Figura 1.5, si prende il punto O , corrispondente al centro di massa del satellite, ed un punto P posto a distanza r da O che corrisponde al pianeta, con r molto più grande del raggio medio del satellite. Infine si posizionano gli assi coordinati del sistema x , y , e z , lungo gli assi principali d'inerzia del satellite.

Se δm è la massa del piccolo elemento in Q , R la distanza da O , il potenziale del satellite in P è dato da

$$V = - \sum \frac{G\delta m}{\Delta} = - \sum \frac{G\delta m}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\Theta)^{1/2}} \quad (1.21)$$

dove Θ è l'angolo tra OP e OQ , la sommatoria è considerata su tutti gli elementi di area e G corrisponde al campo gravitazionale assumendo che il satellite presenti una forma sferica. Espandendo tale equazione in modo binomiale e trascurando i termini di ordine superiore ($r \gg R$ per qualsiasi

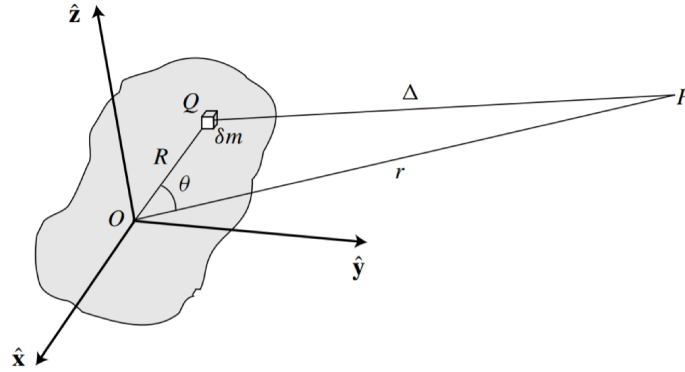


Figura 1.5: Sistema di coordinate con l'origine pari al centro di massa O del satellite e con assi allineati con i momenti principali d'inerzia. Il punto P si trova a distanza r da O . L'elemento di area infinitesimo δm nel punto Q si trova ad una distanza R da O , e la linea OQ forma l'angolo Θ con la retta OP . *Murray et al. (1999)*.

Q), si ottiene

$$V \approx -\frac{Gm_s}{r} - \frac{\sum G\delta m R \cos\Theta}{r^2} - \frac{2\sum G\delta m R^2 - 3\sum G\delta m R^2 \sin^2\theta}{2r^3} \quad (1.22)$$

dove $m_s = \sum \delta m$ è la massa del satellite e poiché O è al centro della massa del satellite, si ha

$$\sum \delta m R \cos\Theta = 0. \quad (1.23)$$

Si conosce inoltre

$$\begin{aligned} 2\sum \delta m R^2 &= 2\sum \delta m(x^2 + y^2 + z^2) = \\ &= \sum \delta m(y^2 + z^2) + \sum \delta m(z^2 + x^2) + \sum \delta m(x^2 + y^2) = \\ &= (A + B + C). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Se si denota il momento di inerzia del corpo lungo la linea OP con I pari a

$$I = \sum \delta m R^2 \sin^2\Theta \quad (1.25)$$

e considerando (1.22) una buona approssimazione, si ottiene

$$V = -\frac{Gm_s}{r} - \frac{G(A + B + C - 3I)}{2r^3} \quad (1.26)$$

che corrisponde alla *formula di MacCullagh*. Infine se si denotano con x , y , e z le coordinate del punto P , allora x/r , y/r e z/r corrispondono ai coseni di direzione di P rispetto agli assi principali d'inerzia, e si ha che il momento d'inerzia risulta

$$I = \frac{(Ax^2 + By^2 + Cz^2)}{r^2}. \quad (1.27)$$

Sostituendo questa espressione nella formula di MacCullagh si ottiene

$$V = -\frac{Gm_s}{r} - \frac{G}{2r^5} f(A, B, C, x, y, z) \quad (1.28)$$

con

$$f(A, B, C, x, y, z) = (B + C - 2A)x^2 + (C + A - 2B)y^2 + (A + B - 2C)z^2. \quad (1.29)$$

Per calcolare il momento della forza tra il satellite ed il pianeta bisogna derivare quest'ultima dal potenziale e successivamente moltiplicarla per il raggio. Le componenti della forza gravitazionale per unità di massa in P sono

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{Gm_s x}{r^3} + \frac{G(B + C - 2A)x}{r^5} - \frac{5Gx}{2r^7} f(A, B, C, x, y, z), \quad (1.30)$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{Gm_s y}{r^3} + \frac{G(C + A - 2B)y}{r^5} - \frac{5Gy}{2r^7} f(A, B, C, x, y, z), \quad (1.31)$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{Gm_s z}{r^3} + \frac{G(A + B - 2C)z}{r^5} - \frac{5Gz}{2r^7} f(A, B, C, x, y, z) \quad (1.32)$$

Queste forze esercitano una coppia per unità di massa in P e una coppia eguale ed opposta agisce sul corpo deformato lungo il suo centro di massa. L'ultima coppia presenta componenti

$$N_x = zF_y - yF_z = +3G(C - B)yz/r^5, \quad (1.33)$$

$$N_y = xF_z - zF_x = +3G(A - C)zx/r^5, \quad (1.34)$$

$$N_z = yF_x - xF_y = +3G(B - A)xy/r^5. \quad (1.35)$$

Le equazioni complete di Eulero riguardo al movimento sono

$$A\dot{\omega}_x - (B - C)\omega_y\omega_z = N_x, \quad (1.36)$$

$$B\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_z\omega_x = N_y, \quad (1.37)$$

$$C\dot{\omega}_z - (A - B)\omega_x\omega_y = N_z, \quad (1.38)$$

dove ω_x , ω_y e ω_z sono le proiezioni della velocità di spin lungo gli assi principali.

Lo scopo è quello di calcolare il movimento di rotazione del satellite dovuto al momento torcente esercitato su questo momento quadruplo da un pianeta distante. Per fare ciò innanzitutto si assume che l'asse di spin del satellite sia normale al piano orbitale del pianeta e che ω_x e ω_y siano zero. Si denota poi il coseno di direzione del pianeta rispetto agli assi x e y rispettivamente con $x/r = \cos\psi$ e $y/r = \sin\psi$ (Figura 1.6). In tal caso le equazioni di Eulero si riducono alla sola equazione (1.38), che può essere riscritta come

$$C\ddot{\Theta} - \frac{3}{2}(B - A)\frac{Gm_p}{r^3}\sin 2\psi = 0, \quad (1.39)$$

dove Θ è l'angolo misurato rispetto alla direzione fissata nello spazio inerziale.

1.3 Evoluzione dinamica

L'orbita delle particelle situate attorno ad un oggetto triassiale subisce varie forze dovute a perturbazioni, come lo schiacciamento del pianeta, la pressione radiale o il campo magnetico. I grani di polvere possono avere un'evoluzione dinamica abbastanza diversa dal movimento Kepleriano, tipico del caso a due corpi, ed il destino di tali particelle, così come anche la forma e la struttura dell'anello, dipendono fortemente dalla forza di tali perturbazioni.

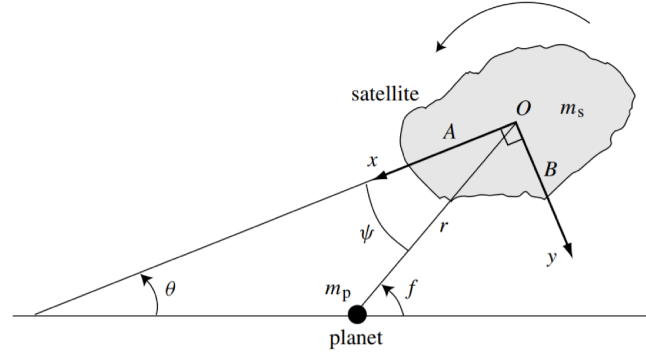


Figura 1.6: Rotazione di un satellite con l'asse di spin normale al piano orbitale del pianeta. ψ è l'angolo tra la retta pianeta-satellite e l'asse principale d'inerzia A associato con il momento massimo d'inerzia del satellite. L'angolo Θ è misurato rispetto alla direzione fissata nello spazio inerziale. *Murray et al. (1999)*.

1.3.1 Evoluzione dinamica dell'anello attorno a corpi non simmetrici rispetto agli assi

Una caratteristica del sistema di anelli individuati attorno ai corpi minori è quella che essi si trovano relativamente lontani dal corpo centrale che li ospita, in confronto alla situazione di quelli che risiedono vicino ai pianeti giganti. Questi nuovi anelli sono collocati al di fuori dell'orbita di co-rotazione, e sono molto vicini al classico limite di Roche dei corpi, oltre il quale le particelle fluide con densità del ghiaccio si uniscono a formare satelliti.

Nella seguente spiegazione dell'evoluzione dinamica ci si concentra sullo scambio del momento angolare tra il corpo ed il disco collisionale, che risiede nel suo piano equatoriale, dovuto sia ad una caratteristica topografica equatoriale, sia alla forma allungata.

Prendendo come riferimento il Centauro Chariklo, in Figura 1.7 si possono vedere due configurazioni possibili di un ambiente dinamico con quattro punti fissati $C_1 \dots C_4$ vicini al raggio di co-rotazione $a_{cor} = \left(\frac{GM}{\Omega^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{R}{q^{1/3}}$, dove il parametro adimensionale di rotazione è definito da

$$q = \frac{\Omega^2 R^3}{GM} \quad (1.40)$$

con G costante gravitazionale, M massa del corpo, Ω velocità di spin e R raggio (sia della sfera che dell'ellissoide).

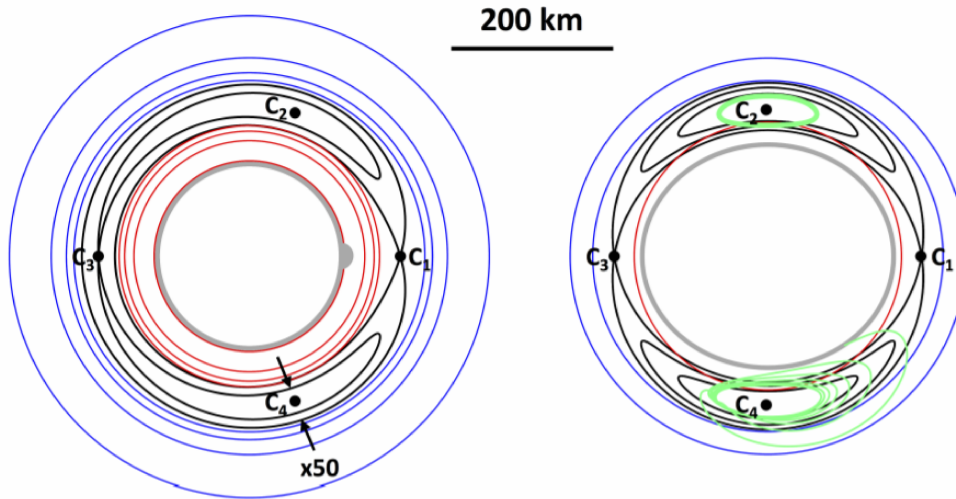


Figura 1.7: Corotazione e risonanze di Lindblad (RLs) attorno a Chariklo. Il pannello di sinistra mostra le caratteristiche topografiche di altezza $z = 5\text{ km}$, mentre quello di destra presenta l'elongazione del corpo $\epsilon = 0.16$. In entrambi, i cerchi rossi e blu corrispondono rispettivamente ai raggi $\frac{m}{m-1}$ delle LRs interne ed esterne con $m > 0$ e $m < 0$. I punti C_2 e C_4 sono collocati al massimo potenziale e sono linearmente stabili fintanto che l'anomalia di massa o l'elongazione del corpo non sono troppo grandi. Le curve verdi attorno a C_2 sono tipiche dell'orbita chiusa più larga possibile, in assenza di attrito. La curva verde attorno a C_4 è un esempio di fuga, usando inizialmente la stessa orbita come per C_2 , ma con un coefficiente di attrito radiale $\eta = 0.01$. L'orbita successivamente diviene rapidamente instabile, cedendo a collisioni con Chariklo. *Leiva et al. (2019)*.

Le regioni attorno ai punti C_2 o C_4 potrebbero ospitare archi ad anello, ma tali punti hanno massimo potenziale, e gli archi risultano instabili nei confronti delle collisioni dissipative su tempi scala di circa 10^4 anni. Nel caso di Chariklo l'elongazione⁵ è più larga del valore critico $\epsilon \sim 0.16$ e dunque

⁵Distanza angolare o lineare di un punto da una posizione di riferimento. In particolare, in Astronomia, la differenza tra la longitudine celeste di un pianeta e quella del Sole

i punti C_2 e C_4 sono linearmente instabili. Di conseguenza, le particelle si allontanano da C_2 o C_4 e rapidamente collidono con il corpo. Tale problema per Haumea è aumentato, poiché la sua elongazione è ancora maggiore, $\epsilon \sim 0.43$.

Le risonanze di Lindblad (Lindblad Resonances = LR) sono tipiche delle particelle con movimento medio n e frequenza epicyclica k

$$k = m(n - \Omega) \quad \text{con } m \text{ intero} \quad (1.41)$$

ed avvengono sia all'interno ($m > 0$) che all'esterno ($m < 0$) del raggio di co-rotazione, assumendo che il disco si muova in senso prograde rispetto allo spin del corpo centrale (Fig. 1.7). Considerando $k \sim n$ le LR divengono

$$\frac{n}{\Omega} \sim \frac{m}{m-1} \quad (1.42)$$

e i dischi risultano sufficientemente densi per sopportare gli effetti collettivi dell'auto-gravitazione, pressione e viscosità. L'equazione (1.42) forza un'onda a spirale di braccio m , che riceve un momento torcente

$$\Gamma_m = \text{sign}(\Omega - n) \left(\frac{4\pi^2 \Sigma_0}{3n} \right) \left(\frac{GM}{\Omega R} \right)^2 A_m^2 \quad (1.43)$$

dove n e la densità di superficie Σ_0 sono i parametri del disco, M , R , Ω quelli del corpo che perturba ed A_m è una forza adimensionale intrinseca.

Dall'equazione appena presentata si nota che LR causano la migrazione del materiale del disco al di fuori della co-rotazione. Per un anello di larghezza W e raggio a gran parte del momento angolare $H \sim 2\pi a W \Sigma_0 \sqrt{GMa}$ è trasportato verso l'esterno del corpo in un tempo

$$t_{mig} \sim \frac{H}{|\Sigma \Gamma_m|} = \frac{3q}{4\pi^2} \frac{W}{R} \left(\frac{T_{rot}}{\sum [(m-1)/m] A_m^2} \right). \quad (1.44)$$

Come si vede la dipendenza di t_{mig} da A_m^{-2} consente di risparmiare tempo nel caso di un'anomalia di massa, usando $\mu = 0.005$, avendo così un'accelerazione sul tempo di migrazione pari a $500^2 = 2.5 \times 10^5$, come si può anche osservare nei pannelli a sinistra nella Figura 1.8 nel caso di Chariklo. Al contrario

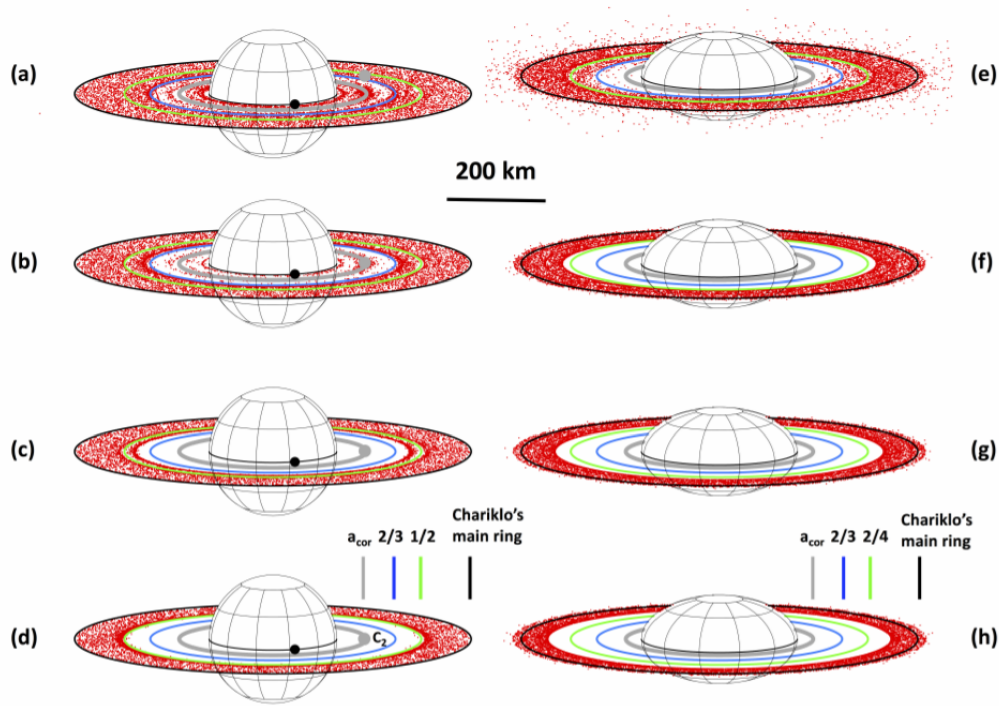


Figura 1.8: Migrazione delle particelle dell'anello attorno a Chariklo. Inizialmente, 701 particelle sono regolarmente posizionate tra $0.7 a_{cor}$ e $2.2 a_{cor}$. In tutte le immagini, ogni particella viene tracciata venti volte regolarmente in intervalli che si estendono per 40,000 anni. Di seguito si distingue quanto avviene nei singoli pannelli della Figura: (a) Dopo 40,000 anni, la zona di co-rotazione inizia ad essere ripulita. (b) Dopo 2.5×10^5 anni, alcune particelle rimangono vicino a C_2 , mentre altre sono spinte verso l'esterno di LR 3:2. (c) Dopo 2.5×10^6 anni, tutte le particelle interne al raggio di co-rotazione e vicine a C_2 hanno subito una collisione con Chariklo. (d) Dopo 6.3×10^6 anni, tutte le particelle rimanenti si trovano ora al di fuori di LR 2:1. I pannelli di destra mostrano l'effetto subito da un ellissoide con l'asse maggiore rivolto verso l'alto. Le particelle ora partono tra $1.1 a_{cor}$ e $2.2 a_{cor}$. (e) Dopo tre mesi, gran parte delle particelle sono state spinte esternamente a LR 3:2. (f), (g), (h) Dopo rispettivamente uno, cinque, dodici mesi, tutte le particelle sono collasate su Chariklo, oppure continuano il loro spostamento, diminuendo la velocità, verso l'esterno di LR 4:2 .

Da notare che le particelle che ruotano attorno ad Haumea, con un'elongazione maggiore pari a $\epsilon=0.43$, presumibilmente presentano gli stessi tempi scala. *Leiva et al. (2019)*.

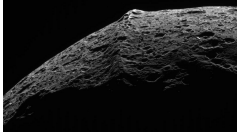
nei pannelli di destra viene raffigurata la situazione realistica del Centauro con un'elongazione pari a $\epsilon \sim 0.16$ e nessun'altra correzione. La Figura 1.8 conferma i calcoli presentati in Leiva et al. (2019), ovvero:

- la rapida caduta delle particelle sull'equatore di Chariklo all'interno del raggio di co-rotazione
- la presenza di forti forze di torsione, fino alla risonanza 2:1, che allontanano il materiale del disco.

Le elongazioni di Chariklo ed Haumea, che vengono normalmente considerate, sono sufficientemente larghe per perturbare fortemente un anello vicino alla risonanza 2:1. Tuttavia a causa delle anomalie di massa, questi anelli non possono esistere all'interno del raggio $a_{2:1} = 2^{2/3}a_{cor}$ della risonanza 2:1. Infatti l'esistenza dell'anello richiede la presenza di spazio tra $a_{2:1}$ e il raggio del limite di Roche a_{Roche} al fine di prevenire che le particelle dell'anello si uniscano a creare satelliti pastore. Sapendo che $a_{Roche} \sim (\frac{3}{\gamma})^{1/3}(\frac{M}{\rho})^{1/3}$ con ρ' corrispondente alla densità delle particelle dell'anello, e γ un fattore che descrive le particelle, si ha che la condizione $a_{2:1} < a_{Roche}$ è data da

$$\gamma\rho' \lesssim \frac{3\Omega^2}{4G}. \quad (1.45)$$

In conclusione, un corpo asimmetrico può ruotare sufficientemente veloce e/o le particelle essere abbastanza sottodimensionate da permettere l'esistenza dell'anello. Si noti che l'equazione (1.45) richiede che il tempo di rotazione sia all'incirca di 7 ore, condizione soddisfatta dai corpi minori analizzati.



*Cresta equatoriale
sulla superficie di
Giapeto*

I modelli riportati in Leiva et al. (2019), riguardanti la successiva evoluzione dell'anello, prevedono che la parte interna del disco si possa depositare sull'equatore del corpo andando a formare una cresta simili a quella individuata sul terzo satellite di Saturno, Giapeto.

Le condizioni affinché si venga a formare una cresta e non un cratere, sono tali per cui il tempo di caduta sia di qualche anno, l'angolo d'impatto sulla superficie sia molto basso e la velocità d'impatto sia di una frazione di $\frac{km}{s}$.

Capitolo 2

Haumea

136108 Haumea è uno dei quattro pianeti nani conosciuti oltre l'orbita di Nettuno, attualmente si trova 50 volte più lontano della Terra rispetto al Sole e presenta una massa pari a $M = 4.006 \times 10^{21} \text{ kg}$. Tale trans-nettuniano ha due piccoli satelliti, Hi'iaka e Namaka, una forma allungata ed un breve periodo di rotazione attorno all'asse principale d'inerzia, $T_{\text{Haumea}} = 3.9155$ ore. I dati dell'occultazione svolta da Ortiz nel 2017 combinati con le curve di luce conferiscono ad Haumea una forma ellissoidale triassiale con valori dei semiassi $a = 1616 \pm 30 \text{ km}$, $b = 852 \pm 4 \text{ km}$ e $c = 513 \pm 16 \text{ km}$. Recentemente, attraverso il fenomeno dell'occultazione stellare a multi catena, si è scoperto che Haumea possiede un anello complanare con l'equatore di spessore 70 km e raggio $r_{\text{ring}} = 2287^{+75}_{-45} \text{ km}$, il quale lo pone vicino ad una risonanza 1:3 $a_{1,3} = 2.285 \pm 8 \text{ km}$ tra il movimento orbitale dell'anello e lo spin del trans-nettuniano. Questa complanarità con l'equatore di Haumea è dovuto al fatto che il corpo sia fortemente oblatto. Inoltre si ha che le traiettorie delle particelle che costituiscono l'anello sono condizionate dal campo gravitazionale di un ellissoide triassiale e da satelliti massicci che lo circondano, includendo anche gli effetti dovuti a collisioni. I valori dei rapporti tra i semiassi di Haumea $\frac{a}{b}$ e $\frac{a}{c}$ sono i più alti individuati in corpi circondati da un anello e sollevano la domanda su come un tale potenziale gravitazionale possa influire sulle particelle che lo costituiscono.

Il satellite più massiccio, Hi'iaka presenta un'orbita circolare con eccentricità $e = 0.05$, semiasse maggiore di 49880 km e ha un piano orbitale complanare con l'equatore di Haumea. Solo la massa totale del sistema è conosciuta, ma assumendo che il satellite abbia la stessa densità e lo stesso albedo del corpo primario tramite le loro differenze di luminosità si riesce a stimare che la massa di Hi'iaka è pari all' 1% di quella del trans-nettuniano. Si ritiene inoltre che le sue perturbazioni sull'anello siano trascurabili.

Il secondo satellite, Namaka, presenta una massa dieci volte più piccola di quella di Hi'iaka, ma si trova più vicino al trans-nettuniano con un semiasse maggiore orbitale pari a 25657 km e la sua orbita presenta un'eccentricità $e \sim 0.25$ e un'inclinazione pari a $i \sim 13^\circ$ rispetto al piano equatoriale di Haumea. Inoltre potrebbe causare delle perturbazioni a lungo termine sull'inclinazione delle particelle dell'anello, potenzialmente disperdendole.

2.1 Simulazioni

In Marzari (2020) viene sottolineato il rapporto tra le perturbazioni J2 (si faccia riferimento all'appendice B a pagina 51) del corpo centrale in presenza di un satellite fortemente inclinato e i cicli di Kozai-Lidov (con riferimento all'appendice C a pagina 53), i quali possono essere un rilevante meccanismo di distruzione per un anello che risiede nel piano equatoriale del corpo centrale. Secondo questo scenario, se il corpo centrale è di forma sferica tali perturbazioni sulle particelle portano ad una veloce disintegrazione della coerenza dell'anello stesso e molte particelle vengono eiettate od impattano con il corpo centrale. Questo fenomeno avviene anche se le collisioni reciproche tra le particelle dell'anello tendono a smorzare l'eccentricità e l'inclinazione.

2.1.1 Modello

Per presentare nel dettaglio il modello analizzato per eseguire le simulazioni numeriche dell'evoluzione dell'anello, ci si pone nelle condizioni di

lavoro seguenti:

- l'evoluzione dell'anello è modellata numericamente integrando le traiettorie delle particelle, considerate come corpi senza massa, che evolvono nel campo gravitazionale di un corpo centrale di massa M ed uno o più perturbatori esterni, quali possono essere i satelliti. Come corpo centrale si considera un ellissoide triassiale con tre semi-assi indipendenti ed il potenziale segue dalla formula di MacCullagh (1.26) e le considerazioni riportate nel paragrafo (1.2.2).

$$A = \frac{4}{15}\pi\rho abc(r_b^2 + r_c^2) \quad (2.1)$$

$$B = \frac{4}{15}\pi\rho abc(r_a^2 + r_c^2) \quad (2.2)$$

$$C = \frac{4}{15}\pi\rho abc(r_a^2 + r_b^2) \quad (2.3)$$

- per le particelle si considera un "raggio gonfiato" perché altrimenti, considerando che il numero delle particelle è limitato dal carico CPU, se si considerasse la vera taglia di queste, si avrebbe un troppo basso numero di impatti. Questo nuovo raggio è considerato abbastanza largo per fornire statistiche d'impatto affidabili. La velocità d'evoluzione è la stessa se il numero dei corpi è scalato per il rapporto tra il vero raggio delle particelle r e quello gonfiato R secondo $N(R/r)^2$.
- ogni collisione è considerata come un urto anelastico modellato seguendo l'algoritmo di Brahic, il quale si basa sull'assunzione che l'auto-gravità delle particelle possa essere trascurata, che tutte presentino lo stesso raggio e la stessa massa e che siano prive d'attrito. Inoltre durante una collisione la velocità radiale relativa è smorzata con un coefficiente d'urto $\eta < 1$.

2.1.2 Procedura e risultati

Innanzitutto viene svolto un test numerico assumendo un corpo centrale sferico con massa pari a quella di Haumea, un satellite simile ad Hi'iaka

con un'orbita d'eccentricità 0.05 ed inclinazione 55° ed un anello costituito da 10000 particelle inizialmente distribuite sul piano equatoriale tra 5000 e 10000 km con un'eccentricità minore di 10^{-3} ed un'inclinazione tra 0° e 1° . Dopo 10000 giorni di evoluzione e nonostante gli effetti di smorzamento dovuti alle collisioni, tutte le particelle dell'anello finiscono su orbite iperboliche o impattano con il corpo centrale a causa delle larghe oscillazioni di Kozai-Lidov sull'eccentricità e sull'inclinazione. In questa condizione l'anello è distrutto e non può sopravvivere più a lungo di qualche centinaia di giorni. Si può osservare che affinché questa situazione avvenga il corpo centrale deve possedere un satellite massiccio con un'elevata inclinazione. In tali condizioni le perturbazioni Kozai-Lidov, le quali agiscono sulle particelle dell'anello posto nel piano equatoriale, producono un rilevante meccanismo di distruzione. L'evoluzione risulta completamente differente se si considerano gli effetti del termine J2 del potenziale del corpo centrale e si assume un rapporto 2:1 tra gli assi principali r_c e $r_a = r_b$. In questo caso l'anello mantiene la sua coerenza, anche in assenza di collisioni, e sia le eccentricità che le inclinazioni delle particelle dell'anello rimangono basse, fatta eccezione per la posizione del movimento medio che è in risonanza con il satellite. Il termine J2 induce una veloce precessione dell'argomento del pericentro che si oppone e smorza il meccanismo di Kozai-Lidov.

La Figura 2.1 mostra l'evoluzione delle particelle costituenti l'anello in presenza ed assenza di collisioni e come dopo 250000 giorni questi si trovino ancora su orbite che presentano una bassa inclinazione ed eccentricità. Nella posizione di risonanza con il satellite, le particelle sono eccitate dalle perturbazioni e si osservano dei picchi in entrambi gli elementi orbitali.

2.2 Condizioni per la stabilità dell'anello

Se si considera un corpo centrale oblatto ci sono due condizioni in cui l'anello può sopravvivere in presenza di un satellite massiccio o di un'orbita inclinata:

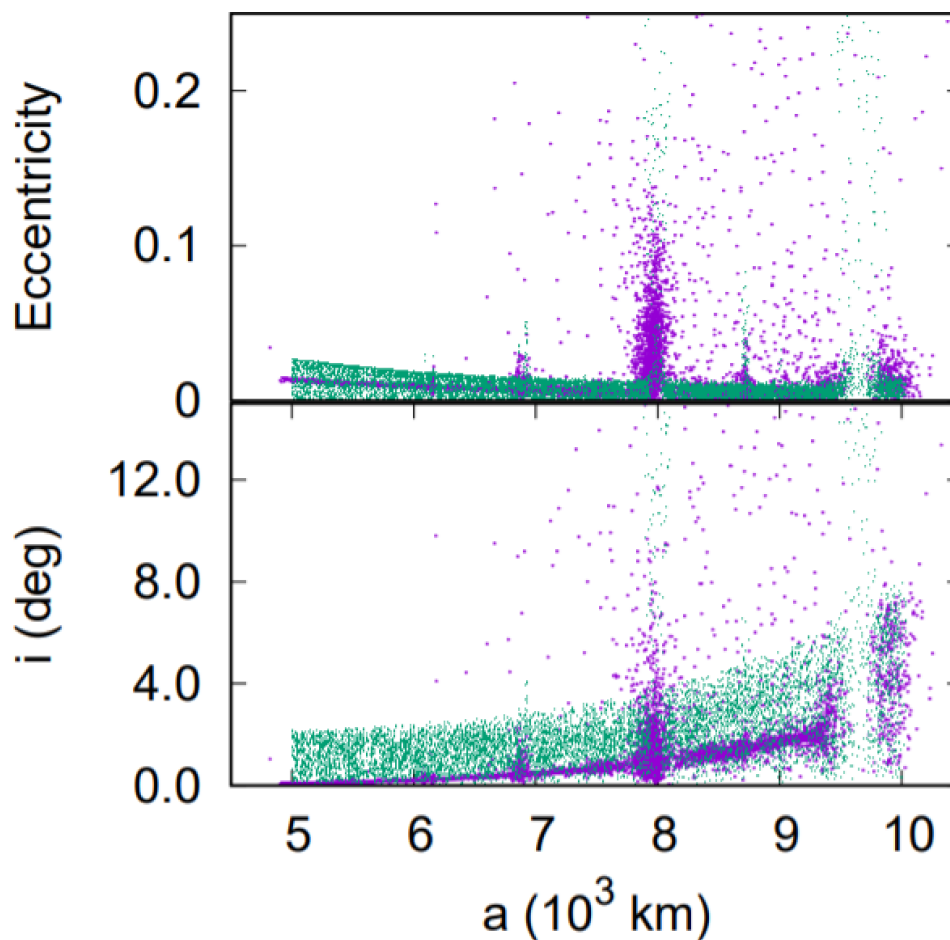


Figura 2.1: Distribuzione orbitale delle particelle dell'anello dopo 250000 giorni dall'inizio della simulazione. I cerchi verdi indicano una situazione in assenza di collisioni, mentre quelli magenta in presenza di collisioni. *Marzari (2020)*.

- in presenza di elevati angoli d'inclinazione del satellite, se l'anello risiede nel piano equatoriale del corpo centrale, il termine J_2 può troncare le perturbazioni satellitari mantenendo l'anello piatto nella posizione di partenza.
- in assenza di forti perturbazioni di Kozai-Lidov lo smorzamento dovuto

a collisioni può essere sufficientemente intenso per allineare l'anello con il piano orbitale, dove sopravvive senza perdere la sua coerenza.

Posizionandoci ora nelle condizioni precisate in apertura del paragrafo (2.1.2), la distanza critica entro la quale il termine di potenziale J_2 vince sul meccanismo di Kozai-Lidov può essere stimato analiticamente confrontando i tassi di precessione indotti dalle due perturbazioni. L'equazione per la variazione dell'argomento del pericentro è data da

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{4}nJ_2 \left(\frac{R_c}{a}\right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^2} (1-5\cos^2 i) \quad (2.4)$$

dove n corrisponde al movimento medio del satellite, R_c è il raggio medio del corpo centrale, e a , e ed i corrispondono rispettivamente al semiasse maggiore, all'eccentricità e all'inclinazione dell'anello di particelle.

Il tempo scala associato alla precessione dell'argomento del pericentro può essere stimato come $t_{J_2} \sim \frac{2\pi}{d\omega/dt}$ e risulta

$$t_{J_2} = \frac{8}{3}\pi \frac{1}{nJ_2} \left(\frac{a}{R_c}\right)^2 (1-e^2)^2 \frac{1}{5\cos^2 i - 1}. \quad (2.5)$$

Se il piano orbitale è piccolo, ovvero $\cos i \sim 1$, la precedente equazione può essere approssimata a

$$t_{J_2}|_{i=0} = \frac{2}{3}\pi \frac{1}{J_2} \left(\frac{a}{R_c}\right)^2 (1-e^2)^2. \quad (2.6)$$

Per le perturbazioni di Kozai-Lidov, nella approssimazione quadrupla il tempo scala associato alla precessione dell'argomento del pericentro è fornita da:

$$t_{KL} = \frac{16}{15} \frac{M+m_s}{m_s} \frac{n}{n_s^2} (1-e_s^2)^{\frac{3}{2}} \quad (2.7)$$

dove m_s corrisponde alla massa del satellite, n_s è il movimento medio e e_s è la sua eccentricità. Confrontando t_{KL} e $t_j|_{i=0}$ si può derivare un semiasse maggiore critico per il quale i due tempi scala risultano uguali:

$$a_c = \left(\frac{8}{5\pi} R_c^2 J_2 \frac{(M+m_s)}{m_s} a_s^3 \frac{(1-e_s^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-e^2)^2} \right)^{1/5}, \quad (2.8)$$

con a_s pari al semiasse maggiore dell'orbita del satellite. Entro a_c il meccanismo di Kozai-Lidov viene smorzato poiché il termine J_2 prevale nel determinare la precessione dell'argomento del pericentro dell'anello di particelle. Al di là di a_c , le perturbazioni di Kozai-Lidov prevalgono sugli effetti di J_2 e i grandi cambiamenti in eccentricità ed inclinazione vengono ripristinati causando una progressiva distruzione dell'anello putativo. La Figura 2.2 superiore rappresenta il confronto tra i due tempi scala precedentemente citati per diversi valori del rapporto r_c/r_a mostrando che un appiattimento maggiore del corpo centrale sposta verso l'esterno il semiasse maggiore critico, entro cui l'anello risulta stabile contro il meccanismo di Kozai-Lidov. Nel pannello sottostante il valore di a_c è calcolato per una decrescita del valore di r_c/r_a mostrando il range nel quale le perturbazioni J_2 riescono a proteggere l'anello equatoriale. Questi calcoli mostrano che un significativo schiacciamento del corpo centrale è cruciale per garantire la sopravvivenza dell'anello attorno al corpo in presenza di un satellite altamente inclinato.

Se l'inclinazione del satellite perturbante è blanda, all'incirca inferiore a 39° , l'evoluzione dell'inclinazione e dell'eccentricità è meno drammatica.

Nel caso di un corpo centrale sferico, l'effetto combinato delle collisioni e delle perturbazioni secolari dovute al satellite costringe l'anello a rilassarsi sullo stesso piano orbitale del satellite. Nonostante le longitudini nodali siano allineate l'inclinazione delle particelle dell'anello presenta piccole oscillazioni del satellite attorno all'inclinazione permettendo di mantenere la coerenza dell'anello, come si può osservare in Figura 2.3. Le collisioni agiscono come una forza viscosa che tende ad allineare al piano del perturbatore l'anello, il quale appare leggermente deformato in prossimità del corpo centrale (Figura 2.4), mentre è ben allineato nella parte centrale. Tale deformazione è probabilmente una caratteristica momentanea e dovrebbe scomparire in tempi successivi. Nel caso del termine J_2 , l'eccentricità e le inclinazioni sono in media sempre piccole e dunque l'anello è coerente e non si allontana dal piano equatoriale del corpo centrale. Le regioni esterne del disco, all'incirca dopo 8000 km, mostrano alcune diffusioni di particelle attorno al piano medio dove

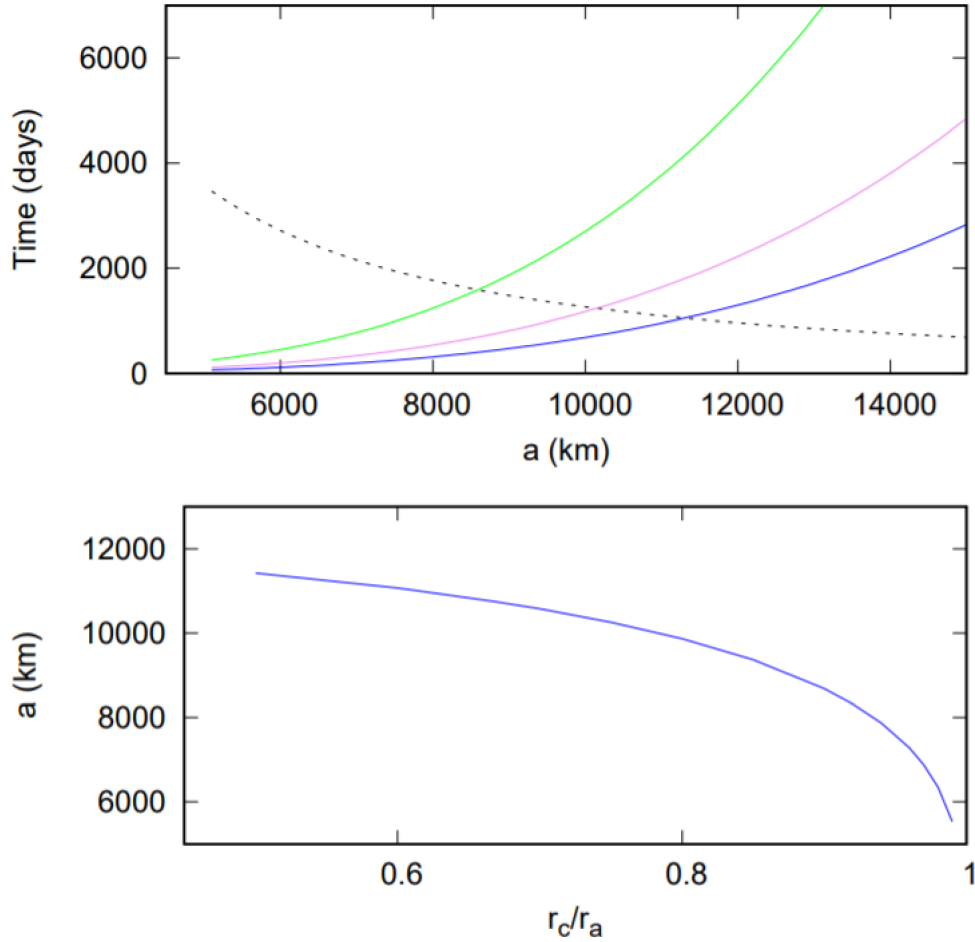


Figura 2.2: Il confronto tra i due tempi scala considerati è riportato nel pannello superiore: t_{KL} è rappresentato in funzione del semiasse maggiore (linea nera tratteggiata) e $t_{J2}|_{i=0}$ è plottato per diversi valori del rapporto tra gli assi principali dell'ellissoide r_c/r_a . La linea blu corrisponde al rapporto $r_c/r_a = 1/2$, quella magenta a $r_c/r_a = 3/4$ e quella verde a $r_c/r_a = 9/10$. Il pannello sottostante raffigura il semiasse maggiore critico in funzione del rapporto r_c/r_a . *Marzari (2020)*.

l'effetto protettivo del termine J_2 si indebolisce. In questo caso è molto più complesso determinare una stima analitica della semiasse maggiore critico entro il quale le perturbazioni J_2 mantengono l'anello nel piano equatoriale. Nonostante il modello descritto in *Marzari (2020)* assuma un'inclinazione di

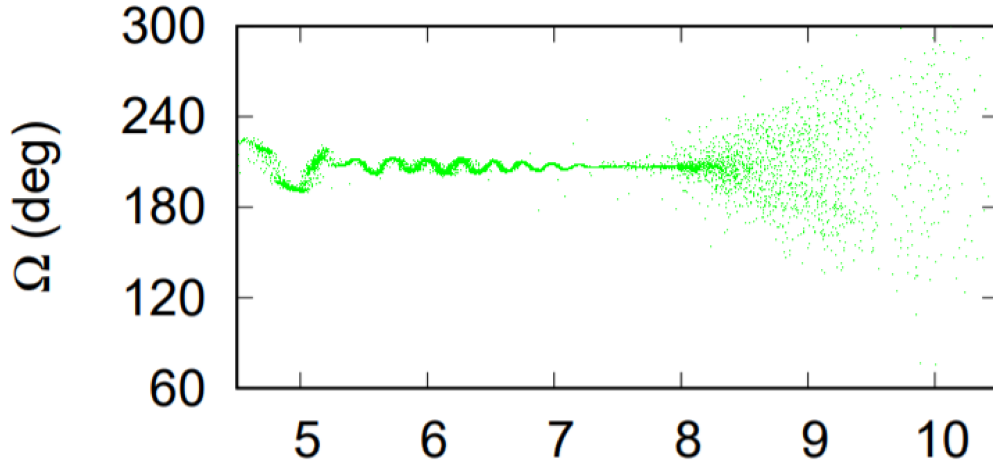


Figura 2.3: Distribuzione delle longitudini nodali delle particelle dell'anello dopo 150000 giorni nel termine J2 (cerchi magenta) e nel caso sferico (cerchi verdi). I picchi osservati sia per l'eccentricità che per l'inclinazione sono dovuti alle risonanze del movimento medio con il satellite. *Marzari (2020)*.

15° dalla quale potrebbe seguire una teoria non perfettamente accurata, il principio secolare può comunque fornire un'idea del tempo scala coinvolto nell'evoluzione dinamica dell'anello. In accordo con Murray et al. (1999), il corretto tempo di oscillazione per la longitudine pericentrica è data da $T_{sec} = 2\pi/A$, dove A è

$$A = n \frac{1}{a} \frac{m_1}{M_c} \left(\frac{a}{a_s} \right)^2 b_{3/2}. \quad (2.9)$$

Questa frequenza dipende in maniera complessa dal semiasse maggiore dell'anello di particelle dovuto al coefficiente di Laplace $b_{3/2}$. Per questo motivo, i calcoli numerici forniscono una più semplice valutazione del valore del semiasse maggiore a_c , per il quale le due derivate temporali della longitudine del pericentro, una dovuta alle perturbazioni J2 e l'altra a quelle secolari, combaciano.

Un'ulteriore situazione analizzata è quella in cui l'anello è situato su un piano inclinato rispetto a quello equatoriale di un corpo centrale oblatto ed in questo caso il termine J2 velocemente distrugge l'anello. La circolazione

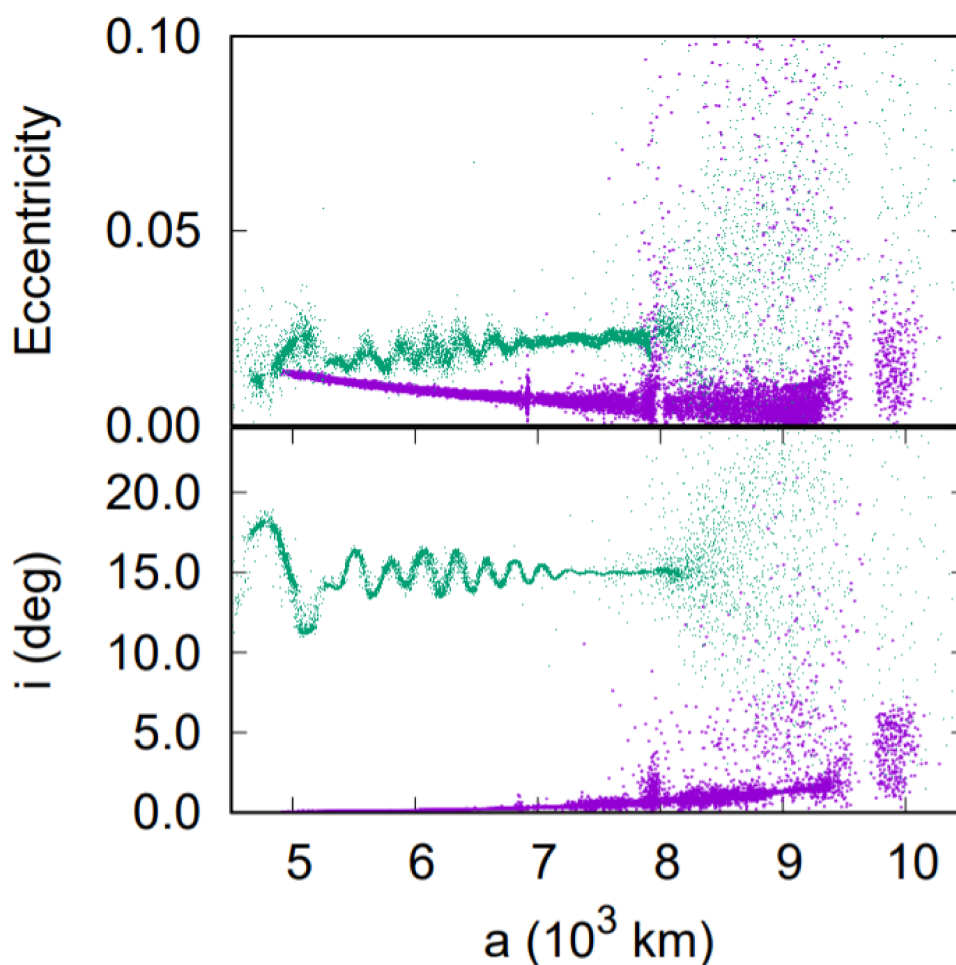


Figura 2.4: Distribuzione orbitale delle particelle dell'anello dopo 150000 giorni nel termine J2 (cerchi magenta) e nel caso sferico (cerchi verdi). I picchi osservati sia per l'eccentricità e che per l'inclinazione i sono dovuti alle risonanze del movimento medio con il satellite. *Marzari (2020)*.

forzata della longitudine nodale sfasa le orbite inclinate delle particelle dell'anello iniziale che viene trasformato in un toroide ed inoltre l'appiattimento dell'anello dipende dall'inclinazione iniziale rispetto al piano equatoriale.

Nella Figura 2.5 è mostrata la distribuzione tridimensionale delle particelle dell'anello le quali si disperdono velocemente su un tempo scala dell'ordine di

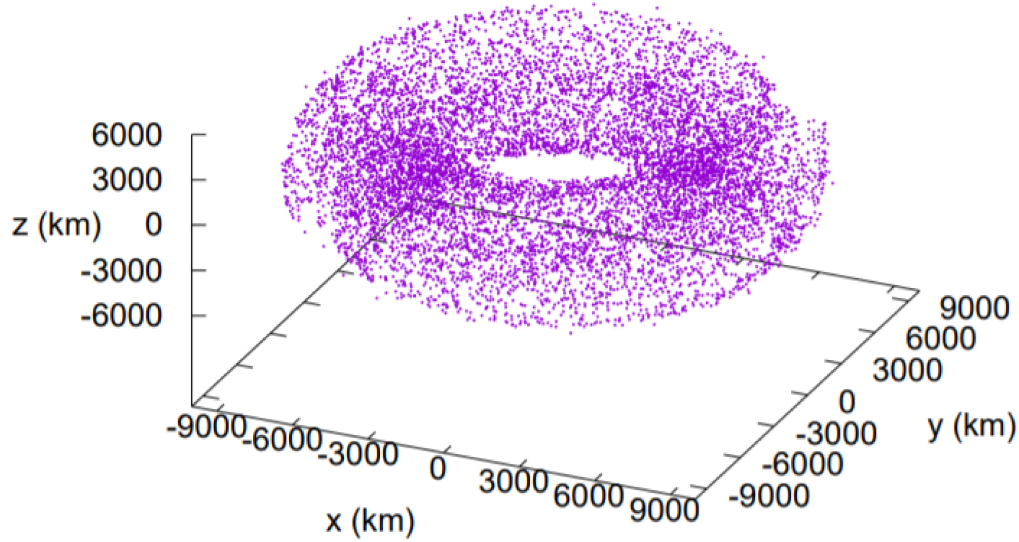


Figura 2.5: Distribuzione tridimensionale delle particelle dopo 2000 anni. La precessione nodale forzata dal termine J2 trasforma l'anello in un toroide. *Marzari (2020)*.

alcune 10^3 anni e non formano più una struttura piatta coerente. In questo caso le perturbazioni J2 non hanno una funzione protettiva, ma piuttosto un'influenza di disturbo. Come conseguenza, i potenziali anelli attorno ad un corpo oblatto devono essere cercati nel piano equatoriale.

Sottolineando gli aspetti più significativi riportati in Marzari (2020) ed osservando la Figura 2.6 si nota che nel caso di un corpo sferico l'inclinazione delle particelle oscilla uniformemente tra 1° e 4° in seguito alle perturbazioni regolari di Namaka. Inoltre, quando si considera il termine J2 e l'intero modello per Haumea, l'inclinazione è quasi costante con le molto piccole oscillazioni attorno al valore iniziale. Anche nel caso dell'anello di Haumea, il termine J2 aiuta nel mantenere la coerenza dell'anello nel piano equatoriale del corpo.

Infine, per esplorare l'evoluzione dell'anello, anche includendo gli effetti delle collisioni mutuali, nell'elaborato è stata generata una popolazione di 10000 particelle con un semiasse maggiore iniziale tra 2235 e 2340 km, eccentricità minore di 10^{-4} , inclinazione minore di 0.5° (entrambi scelti ran-

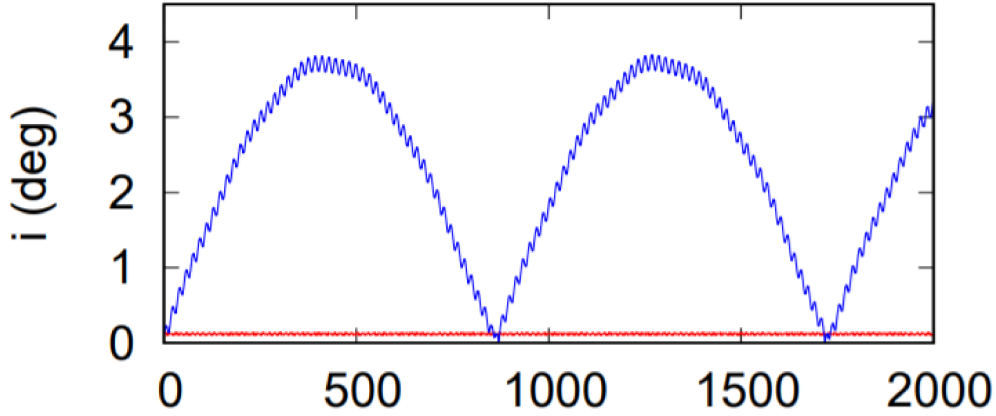


Figura 2.6: Evoluzione temporale dell'inclinazione delle particelle dell'anello per un corpo centrale sferico (linea tratteggiata blu) e per un ellissoide triassiale rotante (linea rossa) come Haumea. *Marzari (2020)*.

domicamento) ed un diametro gonfiato di 3 km è stato adottato al fine di raggiungere significative attività di collisione. Nella Figura 2.7, la distribuzione dell'eccentricità e dell'inclinazione vengono confrontate dopo 10^4 giorni di evoluzione nel caso in cui solo il termine J_2 è incluso ($r_b - r_a = 0$) ed in quello reale dove $r_b - r_a \neq 0$.

Quando $r_a = r_b$ l'eccentricità di tutte le particelle nell'anello è molto bassa e i punti magenta, che li rappresentano, sono appena visibili sopra lo zero. L'inclinazione non cambia significativamente dal valore iniziale, e non ci si aspetta che cresca poiché le perturbazioni secolari di Namaka sono smorzate da quelle J_2 .

Quando invece si considera il modello completo, ovvero nella situazione in cui le perturbazioni dovute a $r_a \neq r_b$ sono incluse, il potenziale del corpo centrale eccita le eccentricità delle particelle dell'anello a valori più alti, nonostante siano presenti effetti di smorzamento dovuti a collisioni. Ciò è probabilmente collegato alla risonanza 3:1 tra il periodo di rotazione di Haumea ed il periodo orbitale delle particelle dell'anello. D'altro canto, l'inclinazione è in media più piccola di quella nel caso con solo il termine J_2 , come si può notare

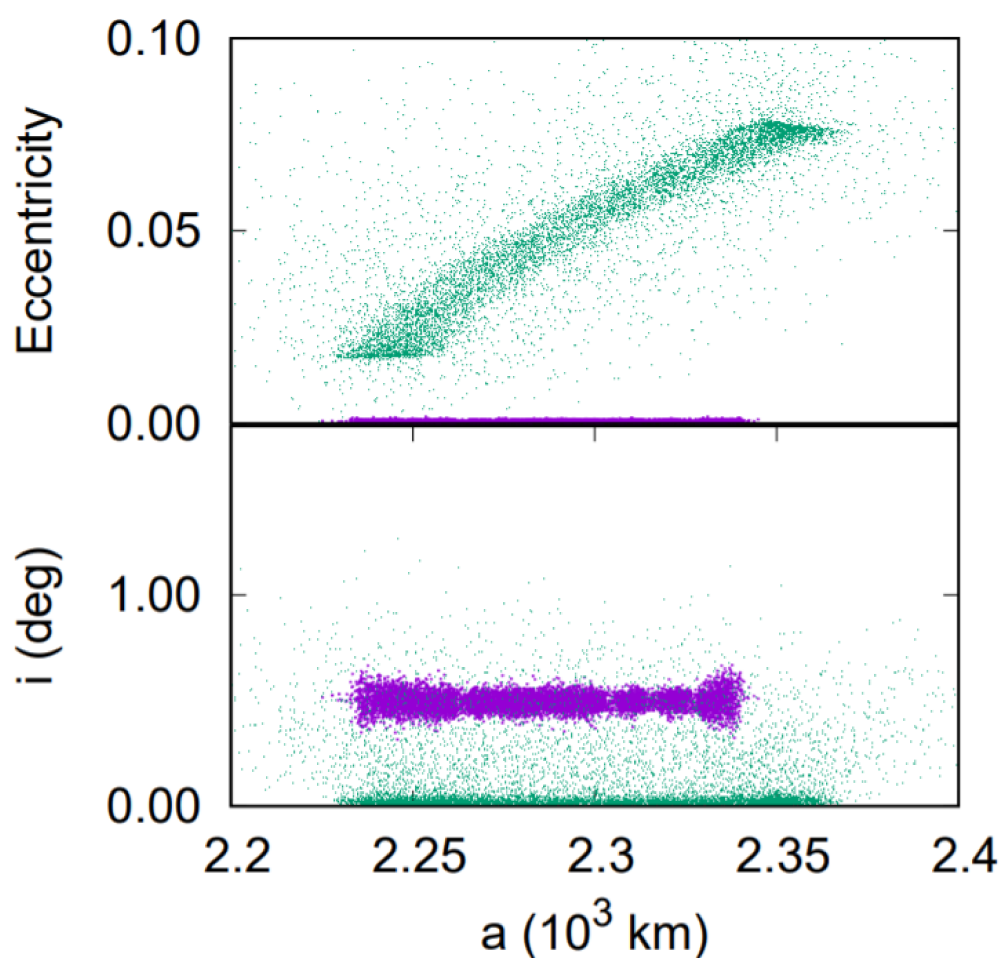


Figura 2.7: Distribuzione orbitale delle particelle dell'anello dopo 10^4 giorni. Nel pannello superiore è presentata l'eccentricità in funzione del semiasse maggiore per i due diversi modelli. I punti magenta illustrano il caso in cui $r_b = r_a \neq r_c$ con solo il termine J_2 , mentre i punti verdi mostrano il risultato del modello completo. Nel pannello sottostante è riportata l'inclinazione in funzione del semiasse maggiore. *Marzari (2020)*.

nel pannello sottostante della Figura 2.7. Gli elevati valori dell'eccentricità indotti dal termine $r_a \neq r_b$ del potenziale portano ad un aumento della velocità mutuale tra le particelle. Questo potrebbe velocizzare l'erosione dell'anello e nella maggior parte dei casi causare la frammentazioni degli oggetti

che impattano con il corpo centrale. La grande maggioranza delle collisioni avviene a velocità minori di 1 m/s, la quale corrisponde ad un valore al di sotto del limite di erosione per le particelle delle dimensioni del centimetro. Tuttavia, l'aumento della velocità d'impatto dovuta alle elevate eccentricità, possibilmente collegate con la risonanza 3:1, non è sufficiente a causare la veloce erosione dell'anello di Haumea.

2.2.1 Dinamica dell'anello di polvere di Haumea

Uno studio molto approfondito è stato svolto, in particolar modo da T.Kovacs e Zs.Regaly, sulla probabile dinamica dell'anello del trans-nettuniano Haumea. Prima di descriverne l'evoluzione dinamica introduciamo le perturbazioni delle particelle seguendo Hamilton & Krivov. Si prende in considerazione il potenziale gravitazionale di un corpo uniformemente rotante, che è determinata dalla forma del trans-nettuniano, e la forza di radiazione stellare che invece è data dal rapporto della radiazione stellare e le forze di gravità. Il parametro di schiacciamento è dato da:

$$W = -\frac{3}{2}C_{20} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{n}{n_{\odot}} \quad (2.10)$$

dove C_{20} indica il coefficiente della seconda armonica, R il raggio effettivo del pianeta, mentre n è il movimento medio di date particelle che orbitano attorno al pianeta e n_{\odot} è il cammino medio del pianeta attorno al Sole.

La forma quantitativa del parametro C si legge come segue

$$C = \frac{9}{8} \frac{n}{n_{\odot}} Q_{PR} \frac{F_{\odot} r^2}{GMcs} \quad (2.11)$$

dove Q_{PR} , con PR che fa riferimento al trascinamento individuato da Poynting-Robertson, è il parametro d'efficienza e può variare a seconda delle proprietà del materiale che si sta considerando. F_{\odot} è la densità di flusso della radiazione solare alla distanza eliocentrica di Haumea, r indica il valore assoluto del vettore posizione delle particelle, G la costante gravitazionale, M la massa di Haumea e c le velocità della luce. I parametri ρ e s corrispondono rispettivamente alla densità apparente ed al raggio apparente della particella.

Si nota che il contributo PR è direttamente proporzionale alla distanza della particella ed alla grandezza dei grani; infatti più piccola è la particella, maggiore sarà l'effetto di trascinamento RP.

Per rappresentare la dinamica dell'anello si utilizzano le equazioni adimensionali del movimento in una situazione che co-ruota con il corpo centrale i cui momenti principali d'inerzia sono $I_{xx} \leq I_{yy} \leq I_{zz}$ con assi x , y , z . Introducendo la caratteristica lunghezza $r_s \approx 1103km$, che corrisponde al raggio dell'orbita dove l'attrazione gravitazionale del pianeta nano eguaglia l'accelerazione centripeta, il tempo scala corrisponde a quello di Haumea $T_H = \pi 2$, in cui $\mu = GM = 1$.

Come riportato in Kovacs et al. (2018), il potenziale di Haumea è approssimato al campo gravitazionale del secondo ordine rotante e di secondo grado con coefficienti $C_{20} \leq 0$, termine di potenziale zonale, e $C_{22} \geq 0$, termine di potenziale equatoriale ellittico, i quali sono direttamente collegati ai momenti principali d'inerzia attraverso i semiassi come segue:

$$C_{20} = -0.5 \frac{2I_{zz} - I_{xx} - I_{yy}}{r_s^2} = -0.1274 \quad (2.12)$$

e

$$C_{22} = 0.25 \frac{I_{yy} - I_{xx}}{r_s^2} = 0.0256 \quad (2.13)$$

dove si è usato il fattore di normalizzazione e la massa di Haumea. Secondo Hu & Scheeres le equazioni di normalizzate del movimento sono:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - \frac{x}{r^3} + \frac{\partial U}{\partial x} + F_{x,rp} \quad (2.14)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - \frac{y}{r^3} + \frac{\partial U}{\partial y} + F_{y,rp} \quad (2.15)$$

$$\ddot{z} = \frac{z}{r^3} + \frac{\partial U}{\partial z} + F_{z,rp} \quad (2.16)$$

con il potenziale di forza normalizzato

$$U = -\frac{C_{20}(x^2+y^2-2z^2)}{2r^5} + \frac{3C_{22}(x^2-y^2)}{r^5} \quad (2.17)$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ è il vettore posizione della particella. La forza RP del sole, F_{rp} , è tenuta in considerazione perché anch'essa dipende dal tempo

$$\mathbf{F}_{rp} = m_p \dot{\mathbf{v}} = \frac{F \odot A Q_{pr}}{c} \hat{\mathbf{r}}(t) \quad (2.18)$$

dove $m_p = (4\pi/3)\rho s^3$ è la massa delle particelle orbitanti con velocità v , A è la sezione trasversale della particella, e $\hat{\mathbf{r}}(t)$ è il versore puntante nella direzione della radiazione e vale

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = (\cos - \omega_H t, \sin - \omega_H t, \cos n_H t \sin i) \quad (2.19)$$

con ω_H frequenza di rotazione di Haumea, n_H cammino medio del sole e i inclinazione del pianeta nano rispetto al suo piano orbitale. La posizione iniziale del Sole, nei calcoli considerati, presenta una componente x negativa, e l'inclinazione di Haumea risiede in questa direzione durante l'intera integrazione.

L'analisi dinamica coinvolge due diversi tipo di setup di condizioni iniziali. Nel primo, quando si studia la fine struttura della risonanza, le particelle sono equidistanti lungo l'asse x ad una distanza radiale $1 < r < 11$. Nel secondo caso invece l'anello inizialmente è definito da un angolo $\Theta \in [0; 2\pi]$ e $r \in [0; 5]$, con lo scopo di seguire la dinamica particellare nella situazione più generale.

La Figura 2.8 mostra la dipendenza dal tempo delle componenti dell'accelerazione e le loro forze relative per un segmento di una particolare orbita. La parte destra mostra l'orbita di una particella che inizialmente si muove circolarmente sul piano equatoriale del pianeta. Due segmenti sono segnati a due diverse posizioni al fine di mostrare il contributo dello schiacciamento rispetto all'effetto gravitazionale del punto di massa. Il pannello (b) mostra $|\nabla U|$ determinata dall'equazione (2.17) confrontata con l'attrazione gravitazionale di Haumea, a_{GR} , che domina la dinamica. Infine il pannello (c) mostra le restanti due componenti dell'accelerazione: RP e l'influenza gravitazionale delle due lune del trans-nettuniano, Hi'iaka e Namaka. Il trascinarsi di Poynting-Robertson non gioca un ruolo significativo per la dinamica delle

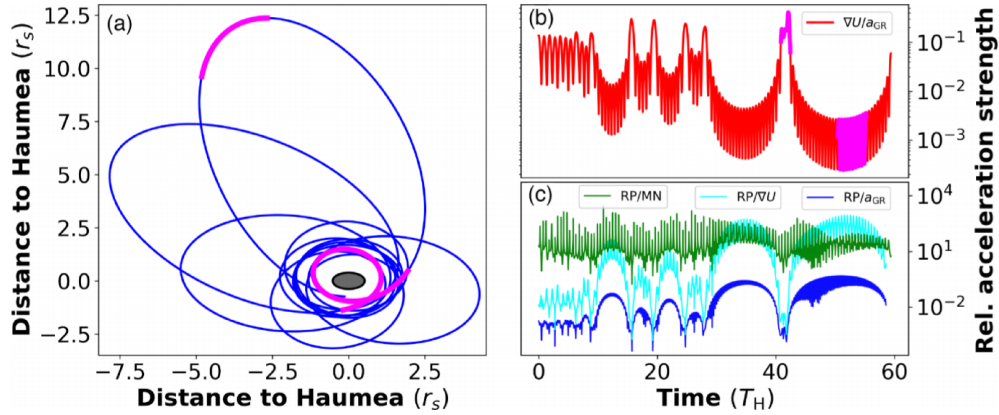


Figura 2.8: Forza relativa dovuta alle diverse perturbazioni. (a) Mostra l'evoluzione orbitale proiettata nel piano x-y; mentre (b) presenta il confronto tra a_{GR} e l'accelerazione ∇U . Infine in (c) sono rappresentate le perturbazioni aggiuntive, le RP relative a a_{GR} , ∇U , e l'attrazione gravitazionale della luna. *Kovacs et al. (2018)*.

particelle quando queste si trovano molto vicine al corpo principale; mentre è rilevante lontano da Haumea.

La dinamica dei grani di polvere fornisce tre diversi scenari finali per le particelle:

1. *Fuga*: quando il semiasse maggiore della particella diviene più largo di $25r_s$. La fuoriuscita di materiale è causato da incontri ravvicinati con Haumea quando le particelle sono perturbate da orbite iperboliche.
2. *Collisione*: si verifica quando le particelle si avvicinano al pianeta nano più del loro raggio nella situazione di volume equivalente ($0.74r_s$).
3. *Movimento limitato*: quando le particelle, prima della fine dell'integrazione, non collidono ne' fuggono dal sistema; allora il loro movimento è detto limitato.

In Figura 2.9 è riportato il tempo di fuga in funzione di r di quattro diverse particelle con grandezze 5, 2.5, 1.75 e 1 μm rispettivamente nei pannelli (a),(b),(c) e (d). Le trame sono state definite partendo da 5000 particelle

posizionate in modo equidistante lungo la direzione radiale dell'asse x nell'intervallo $1 < r < 11$; ed il loro movimento è dovuto ad una collisione oppure ad una fuga.

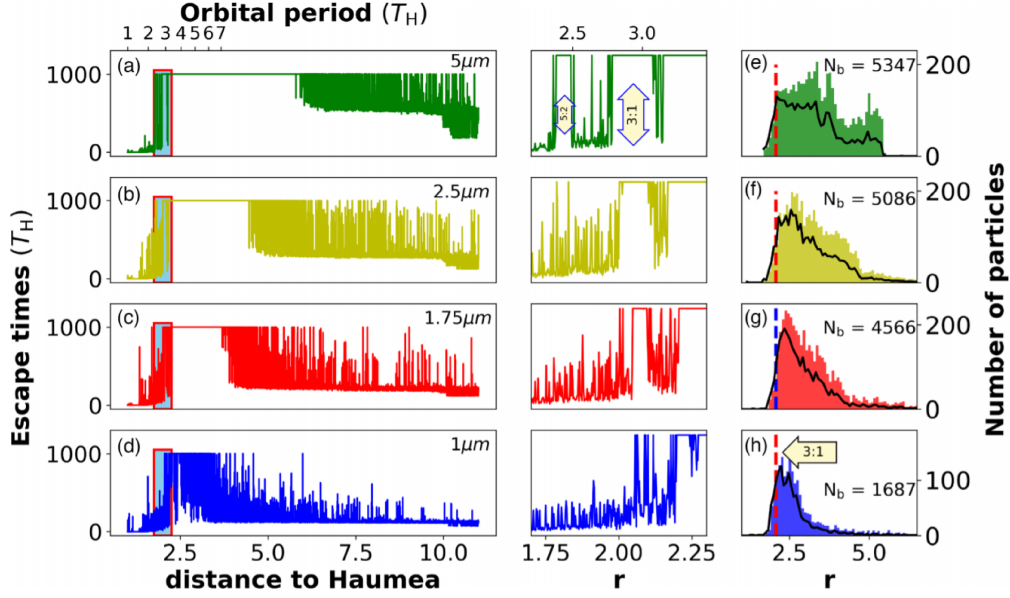


Figura 2.9: Nel pannello di sinistra è raffigurato il tempo di fuga in funzione della distanza lungo l'asse delle x . Al centro si ha un ingrandimento delle regioni limitate dal rettangolo nei pannelli di sinistra. Infine a destra è raffigurata la distribuzione radiale delle diverse particelle con diverse grandezze: (e) $5\mu m$, (f) $2.5\mu m$, (g) $1.75\mu m$ e (h) $1\mu m$.

La curva nera indica la densità superficiale, N_b corrisponde al numero di particelle che sopravvivono, mentre le linee tratteggiate blu e rosse sottolineano la risonanza 3:1 di spin-orbita. *Kovacs et al. (2018)*.

Nei pannelli (a),(b),(c) e (d) si possono notare degli appiattimenti, i quali corrispondono alle orbite limitate, ovvero alle particelle che sopravvivono alla fine dell'integrazione. Si noti una diversa estensione di questi plateaus che si estendono tra $2 < r < 5.5$ a seconda delle diverse dimensioni dei grani. Subito dopo si può notare una struttura molto spinosa, la quale indica che le particelle scappano da queste regioni molto velocemente, tanto che una quantificazione di ciò è rappresentata da un'esponenziale.

Ingrandendo il bordo interno dell'appiattimento si osserva che per ogni particella il movimento diviene molto più ampio man mano che ci si avvicina ad Haumea. Inoltre per le più grandi particelle emergono molte risonanze spin-orbita dovute alla perturbazione causata dal corpo oblatato centrale. Il plateau più piccolo corrisponde ad una risonanza 5:2, mentre quello più ampio a 3:1. Le particelle che partono vicino ad una risonanza spin-orbita rimangono all'interno dell'anello, mentre le altre tendono a fuggire da tale risonanza o a collidere con Haumea. Per le particelle più piccole, invece, tali risonanze generalmente tendono a sparire.

Come si può vedere, più piccole sono le dimensioni delle particelle, più stretta è la struttura finale e la situazione che si adatta meglio all'anello di Haumea è quella riferita alla particella di $1\mu m$, leggermente oltre la risonanza 3:1. Riportando in un grafico il numero di particelle che sopravvivono verso il loro periodo orbitale si ottiene la Figura 2.10, dove i picchi di distribuzione sono ad una determinata risonanza spin-orbita. Si nota che le risonanze 7:2, 4:1, 9:2 sono molto popolate, mentre 3:1 è quasi vuota, come ci si aspettava dal pannello (d) della Figura 2.9. Nel pannello (c) si osserva come la rappresentazione della distribuzione d'eccentricità dell'anello riesca a spiegare la presenza di un picco della risonanza spin-orbita 3:1. Si nota inoltre che per i granelli di grande taglia ci si aspetta che l'eccentricità sia più piccola. La densità superficiale della configurazione finale delle particelle dopo $T=25\,000$ presenta una larghezza in estensione radiale e l'eccentricità dell'anello è molto visibile nel caso di particelle di più piccola taglia, come si può osservare nel pannello (a) della Figura 2.11. I pannelli (c) e (d) presentano la situazione del pericentro associata ai pannelli (a) e (b). I punti blu indicano che le longitudini del pericentro sono raccolte in una stretta banda attorno all'asse più lungo di Haumea. Terminato il trascinarsi RP questo fenomeno cessa e gli absidi coprono uniformemente l'intero cerchio azzurro di lunghezza 2π . Le stelle nere indicano un'integrazione di 1000 anni al fine di mostrare che anche le particelle con un maggior tempo di vita seguono la congiunzione del pericentro.

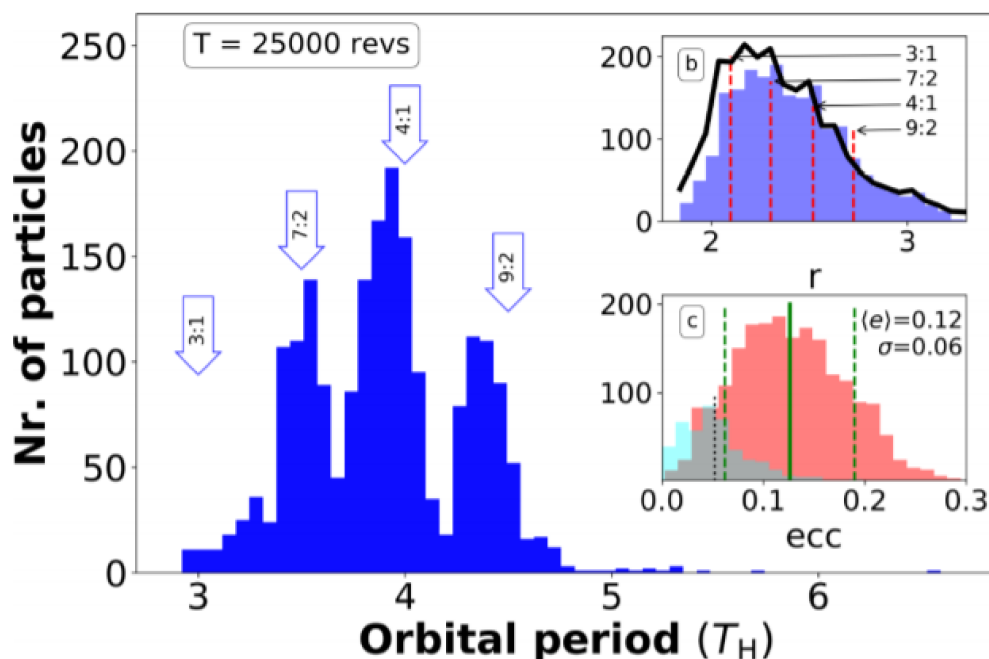


Figura 2.10: Numero di particelle che sopravvivono in funzione del loro periodo orbitale misurato nel tempo di rotazione di Haumea. Il pannello (b) mostra la distribuzione della distanza radiale e la densità superficiale (nero). Il pannello (c) presenta la distribuzione dell'eccentricità dei grani limitati alla fine dell'integrazione (rosso). Mentre l'istogramma blu mostra la distribuzione senza la presenza del trascinamento PR. *Kovacs et al. (2018)*.

In conclusione si osserva che sia lo schiacciamento di Haumea che il trascinamento RP hanno contribuito significativi sulla dinamica dei granelli. La pressione del pericentro, causata dal corpo centrale fortemente schiacciato, protegge le particelle molto piccole dal forte trascinamento RP solare e rende il loro movimento limitato, garantendo la loro permanenza all'interno dell'anello. Viceversa il trascinamento RP eccita l'eccentricità delle singole componenti dell'anello aiutandole ad allineare le loro absidi. Inoltre più piccola è la dimensione della particella, più sottile risulta l'anello e le particelle $1\mu m$ sono apparentemente accumulate circolarmente vicino ad una risonanza spin-orbita 3:1 dopo il tempo d'integrazione.

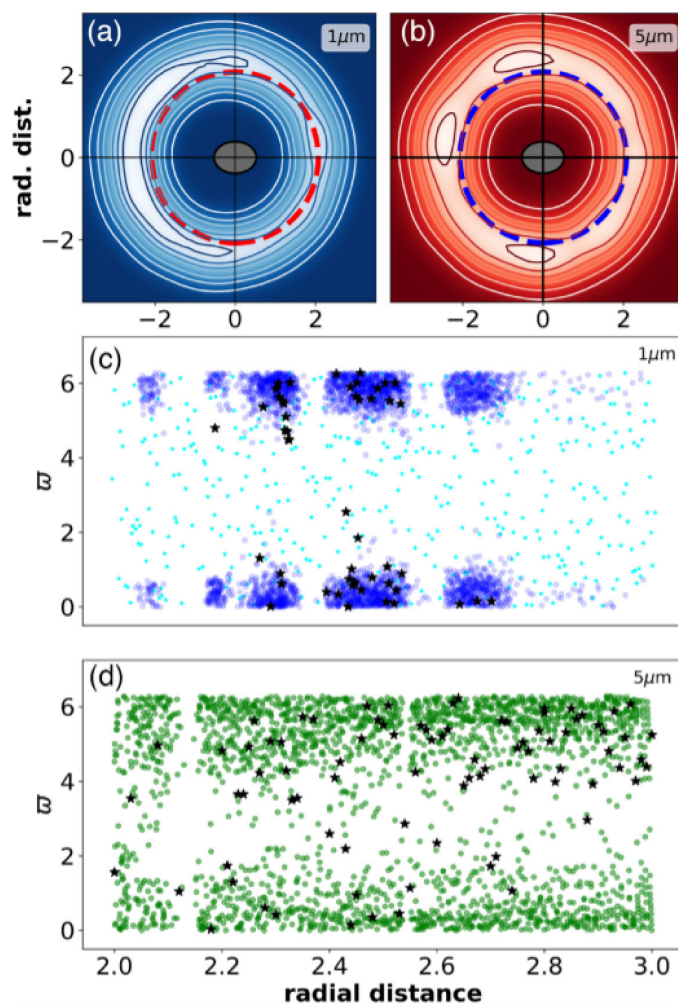


Figura 2.11: I pannelli superiori mostrano gli scenari finali dell'integrazione. Le linee tratteggiate indicano una risonanza spin-orbita 3:1 che guida il centro della natura eccentrica dell'anello. L'ellisse grigia rappresenta Huamea in scala.

I pannelli sottostanti presentano l'argomento del pericentro dopo l'integrazione. Nel caso delle particelle $1\mu\text{m}$ le risonanze spin-orbita sono ben visibili e l'accumulazione attorno ai punti in corrispondenza di 0° suggerisce un anello allineato con l'apside.

Kovacs et al. (2018).

Conclusioni

La dinamica evolutiva dell'anello attorno ad un corpo minore o ad un pianeta nano che possiede uno o più satelliti è complicata e diversi meccanismi dinamici devono essere considerati.

Un anello inizialmente formatosi nel piano equatoriale di un corpo centrale viene distrutto se un suo satellite presenta un'inclinazione nel regime di Kozai-Lidov ($39.2^\circ < i < 144.8^\circ$). Per inclinazioni minori, l'anello si può rilassare sul piano orbitale del satellite grazie all'intenso smorzamento dovuto alle collisioni. D'altro canto, un importante termine J_2 sopprime facilmente le perturbazioni dovute ad un satellite inclinato all'interno di un semiasse maggiore critico, anche nel caso di cicli Kozai-Lidov. Tuttavia, se l'anello è inizialmente inclinato rispetto al piano equatoriale, le stesse perturbazioni J_2 non costituiscono un termine protettivo, ma al contrario distruggono l'anello in tempi scala molto brevi.

Per determinare sotto quali condizioni l'anello può sopravvivere, in Marzari (2020) è stato utilizzato un modello numerico che include lo schiacciamento del corpo centrale, le collisioni mutuali tra le particelle dell'anello e le perturbazioni gravitazionali di uno o più satelliti.

I calcoli mostrano che in presenza di un satellite fortemente inclinato un significativo schiacciamento del corpo centrale è fondamentale per garantire la sopravvivenza di un anello equatoriale attorno al corpo.

Inoltre si è trovato che il termine J_2 è double-faced: risulta distruttivo per gli anelli che presentano un'inclinazione, ma protegge quelli equatoriali dalle perturbazioni dovute ad un satellite inclinato. Ciò avviene a causa delle forti

oscillazioni Kozai-Lidov e anche per il limite delle perturbazioni secolari che avvengono quando l'inclinazione è minore di 39° . Il termine J2 sopprime le perturbazioni dell'inclinazione del satellite all'interno di un determinato semiasse maggiore critico, il quale dipende dallo schiacciamento del corpo centrale, forzando una veloce precessione del pericentro che domina sopra quello indotto dal termine secolare del satellite. Questo ci permette di affermare che gli anelli formati attorno a corpi schiacciati devono essere preferibilmente cercati nel piano equatoriale. Gli anelli che nascono inclinati rispetto a questo piano possono sopravvivere solo se il corpo centrale possiede un piccolo termine J2 e la struttura dinamica del corpo centrale e del satellite determina quale tipo di anello può sopravvivere dopo la sua formazione.

Nel caso di Haumea, a sua volta studiato tramite simulazioni numeriche, si è trovato che l'anello è forzato a risiedere nel piano equatoriale tramite forti perturbazioni J2 dell'ellissoide oblato triassiale. Inoltre, in questo specifico caso, viene introdotto un ulteriore fattore da considerare: il trascinamento di Poynting-Robertson. Tale fenomeno non gioca un ruolo significativo per la dinamica delle particelle quando queste si trovano vicino al corpo principale, ma è rilevante lontano da Haumea. Se tale meccanismo agisce sulla dinamica delle particelle producendo uno scenario finale di movimento limitato, ovvero le particelle non collidono né fuggono dal sistema prima della fine dell'integrazione, allora l'anello risulta stabile. In aggiunta, le perturbazioni gravitazionali con semiasse $r_a \neq r_b$ eccitano larghe eccentricità tra le particelle dell'anello che non vengono smorzate dalle collisioni. Tuttavia, le relative velocità d'impatto sono più basse delle velocità di frammentazione aspettate e dunque la sopravvivenza dell'anello è garantita.

Appendice A

Limite di Roche

Il *limite di Roche* indica la distanza minima rispetto al centro di un pianeta alla quale un grande satellite può orbitare attorno al corpo primario senza essere diviso in frammenti dalle forze di marea.

Tale limite fu calcolato per la prima volta dall'astronomo francese Edouard Roche (1820-1883), il quale mostrò che il satellite acquisisce una forma ellittica purché non entri in una certa distanza critica dal pianeta. All'interno di tale distanza non è possibile mantenere una situazione di equilibrio ed il corpo si rompe frantumandosi. La ragione di questa distruzione è che, in questo range, la diversa forza gravitazionale dovuta al pianeta supera quella di auto-gravitazione del corpo. Se il satellite ed il pianeta presentano la medesima densità, il limite teorico è circa 2.5 volte il raggio del corpo di dimensioni maggiori. Alcuni satelliti solidi sufficientemente piccoli possono esistere all'interno di questo limite perché le tensioni interne delle rocce impediscono loro di frammentarsi (cosa che accade ad esempio ai satelliti artificiali, i quali sono troppo piccoli per sviluppare forti sollecitazioni di marea.) Tutti gli anelli dei pianeti del Sistema Solare si trovano all'interno del rispettivo limite di Roche. In un disco di frammenti che avvolge un pianeta appena formato, la materia situata oltre tale limite può assemblarsi in uno o più satelliti, cosa che non può accadere nella zona più vicino al pianeta a causa delle forze di marea. Tale meccanismo è valido anche in prossimità di una stella, infatti

non possono esistere pianeti più vicini di circa 2.5 volte il raggio della stella stessa.

Di seguito viene presentato un modello teorico semplificato per il calcolo di tale limite. Si considera un corpo di massa M_S , che può essere conside-

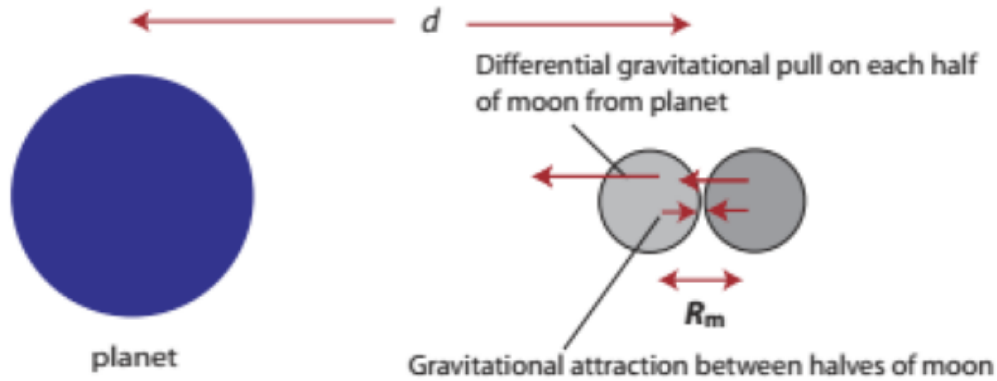


Figura A.1: Modello teorico semplificato per il calcolo della distanza limite di Roche.

rato il primario ed altri due corpi di massa m , notevolmente inferiore alla precedente, separati tra loro da una distanza pari a $2r = R_m$. Il baricentro del sistema di questi due corpi, che si trova esattamente a metà tra i due a causa dell'uguaglianza delle masse, si trova a distanza d dal primario M_S . Per prima cosa si calcola la forza di attrazione tra le due masse m

$$F_{att} = \frac{Gm^2}{(2r)^2} = \frac{Gm^2}{4r^2}. \quad (\text{A.1})$$

Se le due masse sono in caduta libera verso il corpo primario S significa che nel baricentro la forza di gravità del primario eguaglia la forza d'inerzia del sistema, mentre la differenza tra la forza gravitazionale esercitata da S sulle due masse m rappresenta la forza di marea

$$F_{tid} = \frac{GmM_S}{(d-r)^2} - \frac{GmM_S}{(d+r)^2} = GM_Sm \frac{d^2 + r^2 + 2dr - d^2 - r^2 + 2dr}{(d+r)^2(d-r)^2} \quad (\text{A.2})$$

dunque:

$$F_{tid} = GM_Sm \frac{4dr}{(d+r)^2(d-r)^2}. \quad (\text{A.3})$$

Il limite di Roche è quindi la distanza minima per cui F_{tid} è inferiore a F_{att}

$$\frac{Gm^2}{4r^2} = GM_S m \frac{4dr}{(d+r)^2(d-r)^2}; \quad (\text{A.4})$$

suppongo $d-r \cong d+r \cong d$ ed ottengo:

$$\frac{m}{M_S} = 16 \left(\frac{r}{d}\right)^3 \quad (\text{A.5})$$

da cui

$$d = r \sqrt[3]{16} \sqrt[3]{\frac{M_S}{m}}. \quad (\text{A.6})$$

Ora posso sostituire le masse con le relative densità ed eliminare r nell'espressione del limite di Roche

$$M_S = \frac{4\pi\rho_S R_s^3}{3} \quad (\text{A.7})$$

$$m = \frac{4\pi\rho_m r^3}{3} \quad (\text{A.8})$$

da cui

$$d = R_S \sqrt[3]{16} \left(\frac{\rho_S}{\rho_m}\right)^{1/3}. \quad (\text{A.9})$$

Appendice B

Perturbazioni J_2

Il potenziale gravitazionale di uno sferoide è opportunamente modellato usando le armoniche sferiche. Le forze di attrazione su un satellite sono ottenute dal gradiente del potenziale e di tutte le armoniche gravitazionali che sorgono in seguito agli effetti dovuti alla forma oblatata e la perturbazione J_2 risulta essere quella di massima magnitudine. Gli effetti del potenziale J_2 sugli elementi dell'orbita possono essere studiati usando la *Variazione dei Parametri di Lagrange* oppure le *Equazioni di Gauss* che sono valide per perturbazioni arbitrarie. Al primo ordine in J_2 il potenziale gravitazionale è separato in tre termini: secolare di primo ordine, corto periodo e lungo periodo. Se lo studio della variazione degli elementi orbitali è limitata alla componente secolare del primo ordine, si può mostrare che tre dei sei elementi che caratterizzano l'orbita di un pianeta possono essere considerati costanti e vengono chiamati *elementi medi*, mentre i rimanenti elementi, detti *osculanti*, mostrano una crescita secolare. Se nel potenziale si considerano le perturbazioni a corto e lungo periodo allora anche gli elementi istantanei contribuiscono alla descrizione della vera orbita.

La perturbazione J_2 , se non adeguatamente contabilizzata, può portare ad un moto relativo illimitato. Per piccole differenze di elementi orbitali questa tendenza può essere virtualmente eliminata usando il concetto delle orbite relative invarianti per J_2 . Tuttavia tali orbite possono non essere attrattive

per varie missioni a causa della dimensione molto grande dell'orbita ottenuta. Dunque la costrizione del tasso di corrispondenza può essere sviluppata per mantenere limitato il movimento lungo il binario; mentre il movimento al di fuori del piano è controllato dall'applicazione della pressione, come richiesto. Le accelerazioni agenti sul satellite dovute alla perturbazione J_2 possono essere derivate dalle seguenti funzioni del potenziale

$$\Phi_{J_2} = \frac{\mu J_2 R_e^2}{2r^3} (1 - 3\sin^2 i \sin^2 \theta) = \frac{\mu J_2 R_e^2}{2r^3} \left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right). \quad (\text{B.1})$$

e nel quadro interno di riferimento, usando le coordinate cartesiane, risultano essere:

$$a_{J_2} = - \left[\frac{\partial \Phi_{J_2}}{\partial x} \mathbf{i}_X + \frac{\partial \Phi_{J_2}}{\partial y} \mathbf{i}_Y + \frac{\partial \Phi_{J_2}}{\partial z} \mathbf{i}_Z \right] = - \frac{3 \mu J_2 R_e^2}{2 r^4} \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - 3\frac{z^2}{r^2}\right) \frac{x}{r} \\ \left(1 - 3\frac{z^2}{r^2}\right) \frac{y}{r} \\ \left(1 - 3\frac{z^2}{r^2}\right) \frac{z}{r} \end{array} \right\}. \quad (\text{B.2})$$

Tale accelerazione può anche essere riscritta come

$$\mathbf{a}_{J_2} = \frac{1}{2} \mu J_2 R_e^2 \left[\frac{3}{r^4} - \frac{15(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})^2}{r^6} \right] \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (\text{B.3})$$

L'utilizzo degli elementi medi per la propagazione delle orbite è stato ampiamente studiato. Kozai ottenne le espressioni delle parti a corto e lungo periodo della funzione del potenziale e delle componenti secolari del primo ordine, le quali sono ottenute facendo la media dei termini a corto periodo al di fuori di Φ_{J_2} . I termini a corto periodo sono quelli che includono le armoniche della vera anomalia f ed i loro effetti sono evidenti al di fuori di un'orbita. I termini a lungo periodo, invece, includono le armoniche del solo argomento del perigeo ω ed il loro effetto tipicamente è percepito solamente su un grande numero di orbite, mentre su un'orbita le variazioni del lungo periodo appaiono simili ai termini di crescita secolare.

Appendice C

Meccanismo di Kozai-Lidov

Il meccanismo di Kozai-Lidov causa una librazione dell'argomento del pericentro, ovvero uno scambio periodico tra l'inclinazione e l'eccentricità di un'orbita dovuto alla perturbazione di un terzo corpo. Tale meccanismo si è scoperto essere un fattore importante che determina la forma dell'orbita di un satellite irregolare, un trans-nettuniano, di alcuni pianeti extrasolari e anche di certi sistemi stellari. Questo tipo di meccanismo pone delle limitazioni alle orbite possibili all'interno di un sistema. Ad esempio se l'orbita di un satellite regolare di un pianeta è molto inclinata, la sua eccentricità aumenta fino a che il satellite viene distrutto dalle forze di marea al massimo avvicinamento. Invece per un satellite irregolare l'aumentare dell'eccentricità porta ad una collisione con un altro corpo celeste, quale potrebbe essere un satellite regolare od il corpo principale; in alternativa all'aumentare dell'apocentro può spingere il satellite al di fuori della sfera influenzata dalle forze di gravità, *sfera di Hill*.

Zhao e altri studiosi hanno analizzato l'effetto Kozai-Lidov sulla dinamica dei planetesimi con perturbazioni che provengono sia dalla stella compagna che dal disco circumplanetario nel sistema binario inclinato. Hanno mostrato che tale meccanismo può essere smorzato se si include l'effetto gravitazionale del disco, ma anche che può lavorare ad inclinazioni arbitrariamente basse nella regione Kozai-on nella quale l'eccentricità dei planetesi può essere eccitata a

valori estremamente elevati (~ 1). Dunque secondo la loro analisi, un planetesimo con un'elevata eccentricità orbitale può diventare un *planetesimo caldo* in seguito al restringimento della sua orbita dovuto allo smorzamento della resistenza del gas del disco gassoso.

Terquem & Ajmia hanno trovato che la perturbazione secolare di un disco anulare può portare all'effetto di Kozai-Lidov per un pianeta se la sua orbita si trova ben all'interno della cavità del disco interno. Inoltre, se l'orbita del pianeta attraversa il disco ma la maggior parte della massa del disco si trova oltre l'orbita, hanno individuato che le oscillazioni sia dell'eccentricità che dell'inclinazione del pianeta non vengono osservate quando l'inclinazione iniziale dell'orbita è sotto il valore critico, il quale è significativamente minore di 39.2° .

Il comportamento secolare dell'orbita sotto l'effetto della perturbazione gravitazionale dovuta ad un disco uniforme a due dimensioni è stato particolarmente analizzato attraverso un approccio numerico ed analitico in Liu et al. (2020). Per il problema dell'orbita interna si considera per prima cosa il livello dipolo dell'approssimazione secolare, ovvero l'approssimazione di dipolo. Si dimostra che quando l'integrale di Kozai

$$J_z = \sqrt{1 - e^2} \cos i^1 \quad (\text{C.1})$$

è minore od uguale a $\sqrt{3}/2$ il meccanismo di Kozai-Lidov si verifica per le orbite interne ed il sistema presenta due punti di equilibrio a $\omega = \pi/2, 3\pi/2$. Il valore critico $J_c = \sqrt{3}/2$ corrisponde all'inclinazione critica 30° sopra la quale le variazioni d'eccentricità ed inclinazione delle orbite sono solitamente grandi. La massima eccentricità e_{max} raggiunta dipende solamente dall'inclinazione iniziale i_0 ed aumenta all'incrementare di quest'ultima. Per valori molto grandi di i_0 , l'eccentricità può essere eccitata fino ad avvicinarsi ad 1 in seguito all'effetto Kozai-Lidov. Quando $a/r \ll 1$, con r distanza tra le particelle ed il centro del disco od il corpo centrale ed a corrispondente al semiasse maggiore dell'orbita delle particelle, l'approssimazione di dipolo è in

¹Tao Liu et al., The Astrophysical Journal, Volume 901, Issue 2, id.170, 14 pp., 2020

accordo molto bene con il modello completo (test basato su particelle prive di massa che si muovono sotto effetto del campo gravitazionale di un corpo centrale e di un disco uniforme). Quando invece a/r raggiunge valori più alti, tale approssimazione è inadeguata per descrivere i comportamenti del sistema e quindi si deve prendere in considerazione l'approssimazione di quadripolo. In quest'ultima il valore critico di J_c per il verificarsi del meccanismo di Kozai-Lidov cresce leggermente da $\sqrt{3}/2 \sim 0.866$ a 0.896 all'aumentare di a/r da 0 a 0.4 dovuto all'effetto di quadripolo, ed il corrispondente valore critico dell'inclinazione i_0 diminuisce da 30° a circa 26.4° (il valore nel modello completo è vicino a 27°). Quando $a/r > 0.42$, oltre a $\omega = \pi/2$ e $3\pi/2$ i punti di equilibrio del sistema possono anche apparire a $\omega = 0, \pi$, che causa un comportamento delle orbite differente da quello che si ottiene con il classico meccanismo di Kozai-Lidov per $a/r < 0.42$.

Per il problema dell'orbita esterna, si trova che questa non subisce il meccanismo di Kozai-Lidov sotto la perturbazione secolare del disco uniforme. Le variazioni dell'eccentricità e dell'inclinazione per le orbite esterne sono piccole e dunque queste ultime presentano una forte stabilità.

Bibliografia

- [1] Aggarwal et al., *The Astrophysical Journal*, Volume 191, pp. 577-588, 1974
- [2] Brahic A., *Astronomy and Astrophysics*, Volume 54, pp. 895-907, 1977
- [3] Murray et al., Cambridge University Press, *Solar System Dynamics*, pp. 194-200, 1999
- [4] Sengupta P., A tehsis submitted to the Office of Graduate Studies of Texas A & M University, pp. 2-5 and 14-21, 2003
- [5] Terquem et al., *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 404, Issue 1, pp. 409-414, 2010
- [6] Hyodo et al., *The Astrophysical Journal Letters*, Volume 828, Issue 1, id.L8, 6 pp., 2016
- [7] Sickafoose A. *Nature*, Volume 550, Issue 7675, pp. 197-198, 2017
- [8] Ortiz et al., *Nature*, Volume 550, Issue 7675, pp. 219-223, 2017
- [9] Charnoz et al., Cambridge University Press, *Planetary Ring System*, pp. 517-538, 2018
- [10] Kovacs et al., *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 479, Issue 4, pp. 4560-4565, 2018
- [11] Leiva et al., *Nature Astronomy*, Volume 3, pp. 146-153, 2019

- [12] Marzari, F., *Astronomy & Astrophysics*, Volume 643, id.A67, 6 pp., 2020
- [13] Tao Liu et al., *The Astrophysical Journal*, Volume 901, Issue 2, id.170, 14 pp., 2020