

**Università degli studi di Padova**  
Facoltà di ingegneria

Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione

*Studio in ambiente Matlab/Simulink di un sistema di  
controllo del beccheggio di un aereo*

**Relatore:** Dott. Alessandro Beghi

**Laureando:** Luca Zuccato

Matricola: 615313 INF

Anno accademico 2012 - 2013

*Alla mia famiglia*

# Indice

<b>1</b>	<b>Analisi e descrizione matematica del problema</b>	<b>7</b>
1.1	Analisi del problema . . . . .	7
1.2	Derivazione del modello matematico . . . . .	8
1.3	Specifiche di progetto . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Analisi in catena aperta</b>	<b>11</b>
2.1	Risposta al gradino . . . . .	11
2.2	Risposta alla rampa . . . . .	14
2.3	Risposta alla sinusoide . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Controllore PID</b>	<b>17</b>
3.1	Controllore P . . . . .	18
3.2	Controllore PD . . . . .	20
3.3	Controllore PI . . . . .	22
3.4	Controllore PID . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Luogo delle radici</b>	<b>25</b>
4.1	Introduzione e calcolo dei parametri . . . . .	25
4.2	Progetto del compensatore . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Controllore attraverso Bode e Nyquist</b>	<b>29</b>
5.1	Introduzione . . . . .	29
5.2	Struttura del compensatore . . . . .	30
5.3	Prima parte del compensatore: $C_1(s)$ . . . . .	30
5.4	Seconda parte: $C_2(s)$ . . . . .	30
5.5	Studio in Nyquist . . . . .	33



# Introduzione

Un aereo, durante la fase di volo, risulta essere sottoposto ad un elevato numero di forze che ne modificano la traiettoria e la stabilità di volo. Fra le variazioni, una fra le più importanti è data dalla variazione dell'angolo di beccheggio. Essa è definita dall'oscillazione intorno all'asse trasversale baricentrico del veicolo, cioè normale all'asse longitudinale. In altri termini, è la variazione d'angolo individuato dall'orizzonte e dall'asse del corpo dell'aereo giacente sul piano alare; in un aereo esso è pilotato dagli equilibratori.

L'obiettivo di questa tesi sarà dunque quello di progettare, attraverso i metodi appresi nei corsi accademici, un sistema di controllo che modifichi l'angolo di beccheggio al variare dell'angolo degli equilibratori, rispettando determinate specifiche. Ciò verrà costruito con tre metodiche: PID, studio di Bode Nyquist e Luogo delle Radici. Infine confronterò quale tra quelli realizzati è il più performante.



# Capitolo 1

## Analisi e descrizione matematica del problema

### 1.1 Analisi del problema

Quello che si necessita di fare è di trovare un modello matematico che descriva il volo di un aereo. Il moto di un aereo è purtroppo descritto da un sistema molto complesso di sei equazioni differenziali non lineari accoppiate.

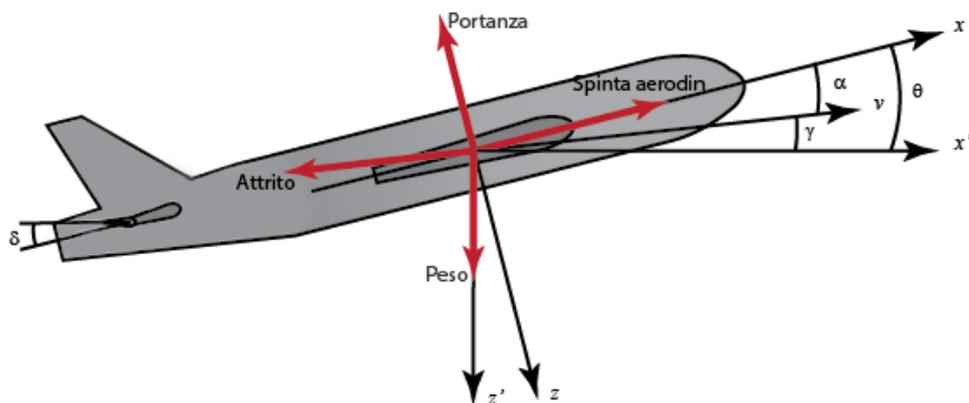


Figura 1.1: Parametri di volo

Per la nostra analisi, tuttavia, facendo determinate assunzioni, riusciamo a semplificare notevolmente la situazione. Facciamo perciò le seguenti semplificazioni: supponiamo che il veicolo si trovi, e resti, a velocità ed altitudine costanti. Quindi le forze indicate nel grafico quali l'attrito dell'aria, la spinta aerodinamica, la portanza ed il peso si equivalgono e si bilanciano lungo

## 8CAPITOLO 1. ANALISI E DESCRIZIONE MATEMATICA DEL PROBLEMA

gli assi  $x$  ed  $y$ . Supponiamo, inoltre, che il cambiamento dell'angolo di beccheggio non modifichi la velocità del veivolo.

Sotto queste ipotesi, che sono sùrrealistiche ma che permettono una profonda semplificazione, le equazioni che descrivono il moto longitudinale dell'aereo risultano essere:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \eta\Omega\sigma[-(C_L + C_D)\alpha + (1/\mu - C_L)q - C_W\sin(\gamma)\theta + C_L] \\ \dot{q} = \frac{\mu\Omega}{2i_{yy}} [[C_M - \eta(C_L + C_D)]\alpha + [C_M + \sigma C_M(1 - \mu C_L)]q + (\eta C_W \sin \gamma)\delta] \\ \dot{\theta} = \Omega q \end{cases}$$

Legenda:

$\alpha$  = Angolo d'attacco

$\theta$  = Angolo di beccheggio

$q$  = indice di beccheggio

$C_L$  = coefficiente di portanza

$C_D$  = coefficiente di attrito

$C_W$  = coefficiente di peso

$C_M$  = coefficiente del momento di beccheggio

$\delta$  = Angolo equilibratori

$U$  = velocità di volo all'equilibrio

$i_{yy}$  = Momento di inerzia normalizzato

$\rho$  = densità dell'aria

$S$  = superficie alare

$m$  = massa del veivolo

$\bar{c}$  = lunghezza corda alare media

$\gamma = \theta - \alpha$

$\Omega = 2\frac{U}{\bar{c}}$

$\sigma = \frac{1}{1 + \mu C_L}$

$\mu = \frac{\rho S \bar{c}}{4m}$

$\eta = \mu \sigma C_M$

Per questo sistema l'ingresso sarà dato dall'angolo degli equilibratori  $\delta$  e come uscita l'angolo di beccheggio  $\theta$ .

### 1.2 Derivazione del modello matematico

Per trovare la funzione di trasferimento del nostro sistema è utile, al fine di semplificare ulteriormente le nostre equazioni, introdurre dei valori numerici; in questo caso essi sono tratti dalle caratteristiche di un aereo commerciale Boeing.

Le equazioni risultanti sono:

$$\dot{\alpha} = -0.313\alpha + 56.7q + 0.232\delta$$

$$\begin{aligned}\dot{q} &= -0.0139\alpha - 0.426q + 0.0203\delta \\ \dot{\theta} &= 56.7q\end{aligned}$$

Per ricavarne la funzione di trasferimento devo ricorrere alla trasformata di Laplace e diversi conti algebrici.

$$\begin{aligned}s\alpha(s) &= -0.313\alpha(s) + 56.7q(s) + 0.232\delta(s) \\ sq(s) &= -0.0139\alpha(s) - 0.426q(s) + 0.0203\delta(s) \\ s\theta(s) &= 56.7q(s)\end{aligned}$$

Da cui trovo:  $\alpha(s) = \frac{56.7q(s) + 0.232\delta(s)}{s + 0.313}$ ;

Sostituisco nella seconda ottenendo, dopo qualche passaggio:

$$q(s) = \delta(s) \frac{-0.0139 \frac{0.232}{s+0.313} + 0.0203}{s + 0.426 + 0.0139 \frac{56.7}{s+0.313}}$$

Sostituendo nell'ultima riesco infine ad ottenere

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{\delta(s)} = \frac{1.151s + 0.1774}{s^3 + 0.739s^2 + 0.921s}$$

Possiamo inoltre ricavare il modello di stato che é dato da

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.313 & 56.7 & 0 \\ -0.0139 & -0.426 & 0 \\ 0 & 56.7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + [0][\delta]$$

con uscita

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + [0][\delta]$$

ricordando che interessa solo l'angolo di beccheggio

### 1.3 Specifiche di progetto

Nel progetto di controllo dovranno essere considerati diversi vincoli imposti:

- \* Sovraelongazione minore del 10%
- \* Tempo di salita minore di 2 secondi;
- \* Tempo di assestamento minore di 10 secondi;
- \* Errore a regime minore del 2%.

In termini pratici: se delta varia di 0.2 radianti, allora l'angolo di beccheggio non dovrà superare gli 0.22rad raggiungendone il valore in meno di 2 secondi e si stabilizzerà in un intervallo del 2% rispetto al valore desiderato in meno di 10s.

Adesso che siamo in possesso del modello matematico e delle specifiche di progetto é possibile andare ad analizzare il sistema in risposta a diversi segnali.



## Capitolo 2

# Analisi in catena aperta

Prima di progettare il sistema di controllo è necessario osservare come il sistema si comporta in catena aperta. Osserverò perciò come esso risponde al segnale gradino e vedrò se rimane stabile o no. Per completezza vedrò anche il comportamento con in ingresso la rampa lineare ed un segnale sinusoidale.

### 2.1 Risposta al gradino

Osserviamo perciò come il sistema si comporta avendo in ingresso il gradino unitario.

Il codice Matlab utilizzato è:

```
s = tf('s');
P_pitch = (1.151*s+0.1774)/(s^3+0.739*s^2+0.921*s);
t = [0:0.01:15];
step(0.2*P_pitch,t);
axis([0 15 0 1]);
ylabel('angolo di beccheggio (rad)');
title('Risposta al gradino');
```

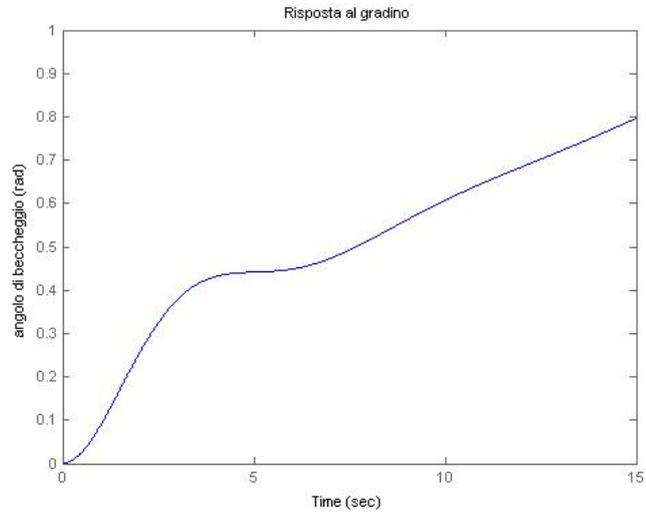


Figura 2.1: Risposta al gradino in catena aperta

Osservando il grafico è immediato concludere che il sistema non risulta stabile. Si vede infatti come l'angolo, con l'aumentare del tempo, tenda a divergere.

Questa conclusione era tuttavia ottenibile immediatamente semplicemente osservando il polinomio del denominatore della funzione di trasferimento. Esso, infatti, non presenta il termine noto quindi è immediato affermare la mancanza di stabilità BIBO poiché risulta non essere un polinomio di Hurwitz.

Posso osservare lo stesso utilizzando lo schema a blocchi di Simulink. Esso risulta essere:

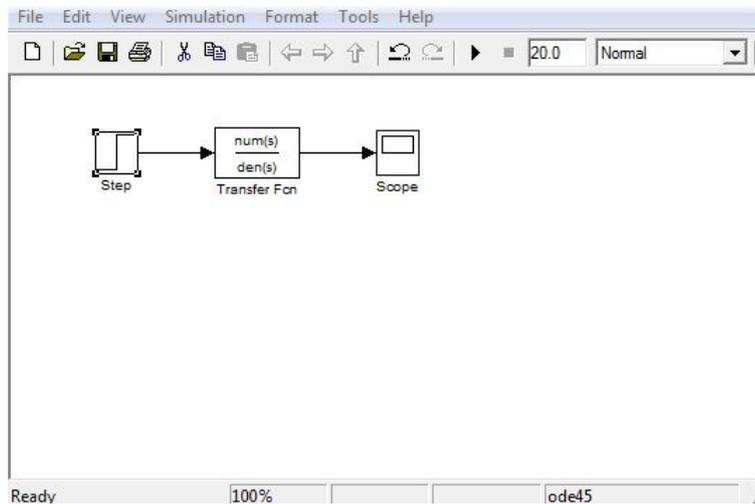


Figura 2.2: Schema a blocchi

e quindi risposta:

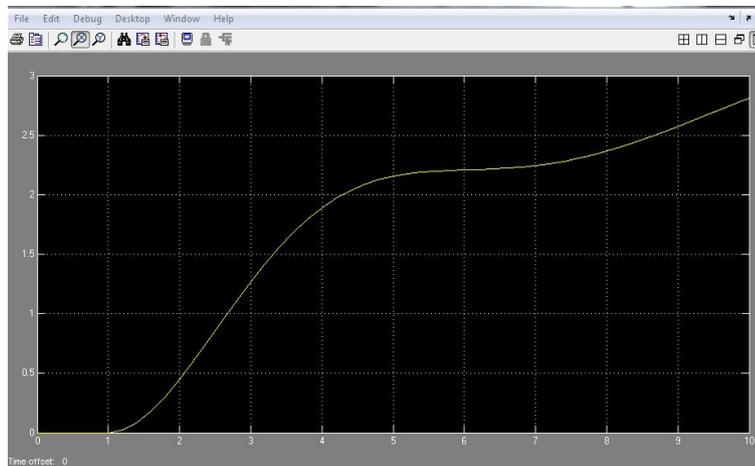


Figura 2.3: Risposta al gradino in catena aperta con Simulink

esattamente come ci si aspettava.

## 2.2 Risposta alla rampa

Osservo ora la risposta alla rampa lineare. Per questo punto e quello successivo utilizzo solo gli schemi a blocchi di Simulink, che risulteranno uguali a quello precedente tranne nel segnale di ingresso. Quindi, per la rampa lineare, risulta:

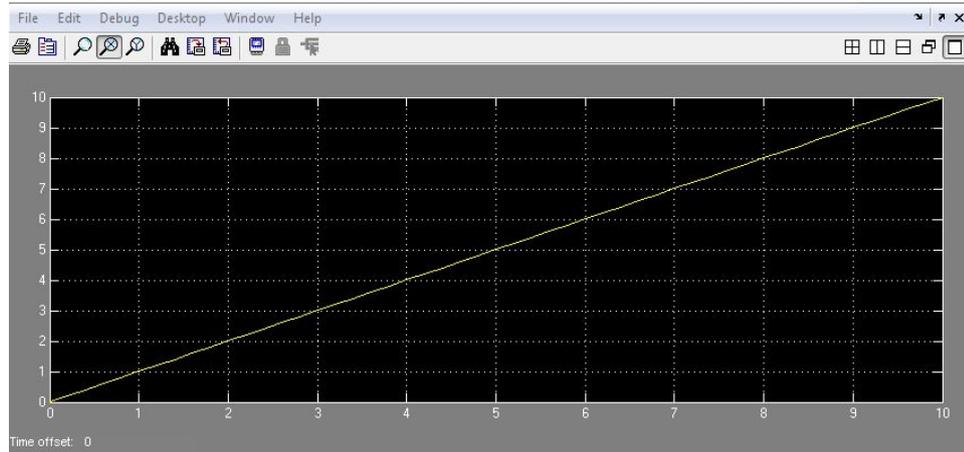


Figura 2.4: Segnale in ingresso

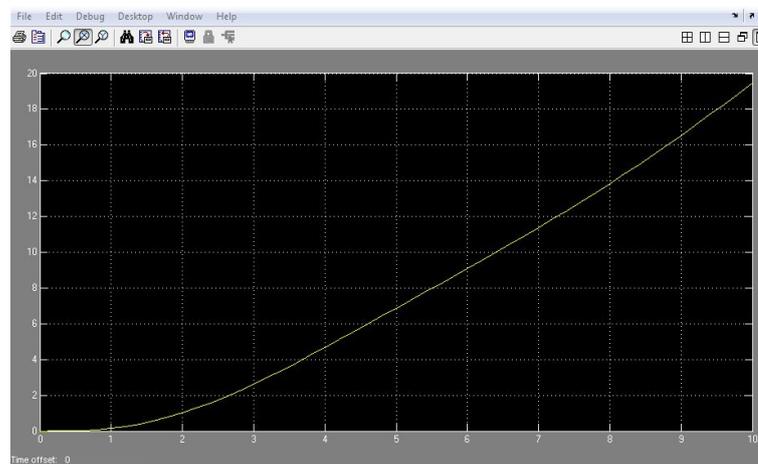


Figura 2.5: Risposta alla rampa

## 2.3 Risposta alla sinusoide

Infine, ecco la risposta alla sinusoide:

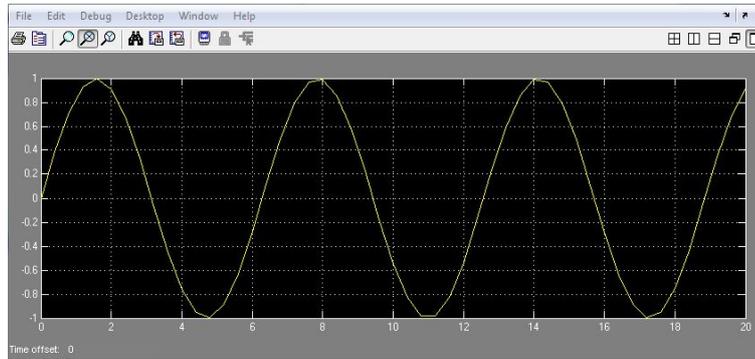


Figura 2.6: Sinusoide in ingresso

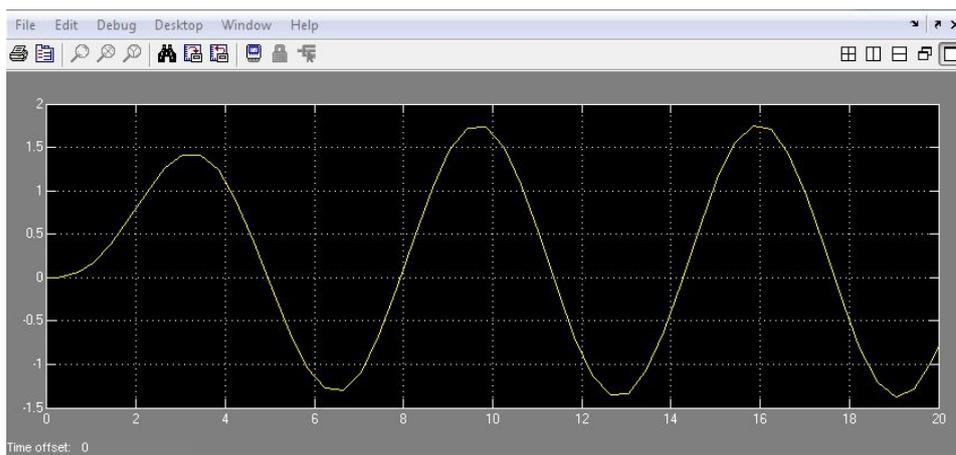


Figura 2.7: Risposta alla sinusoide



## Capitolo 3

# Controllore PID

Mi accingo, in questo capitolo, a progettare un sistema di controllo PID. Esso è un controllore che applica al segnale nel suo ingresso (come evidenzia lo schema) la combinazione lineare di tre azioni: una proporzionale (P), una derivativa (D), ed un integrativa (I).

La loro funzione di trasferimento é data da:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

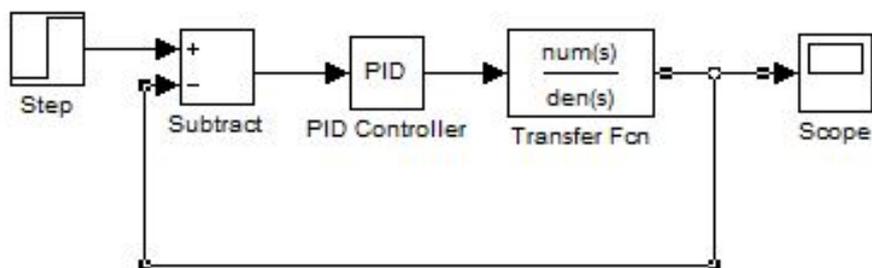


Figura 3.1: Schema a blocchi per il controllore PID

Nelle varie sezioni progetterò, in ordine, un sistema di controllo puramente proporzionale, uno proporzionale derivativo, uno proporzionale-integrativo ed un PID completo.

### 3.1 Controllore P

La struttura del controllore P è la più semplice; la funzione di trasferimento risulta essere infatti:  $C(s) = K_p$ . Ricordando la struttura della FdT ad anello chiuso vista nel punto precedente otteniamo:

Ora, facendo variare il parametro  $K_p$ , osservo il comportamento del sistema in catena chiusa usando Matlab. Risulta:

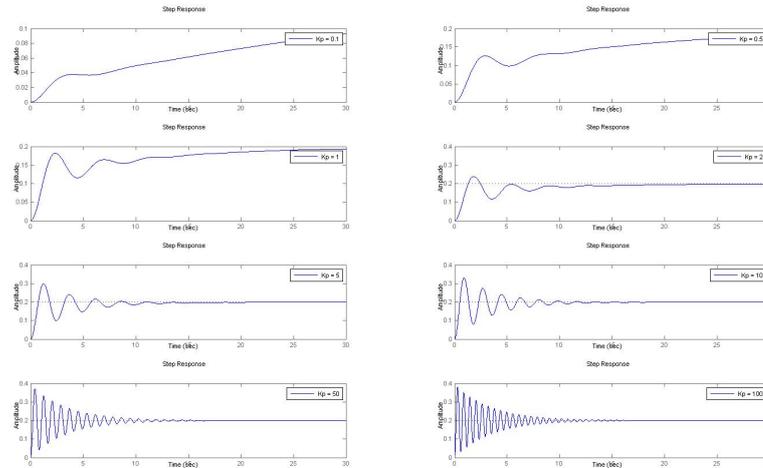


Figura 3.2: Risposta del sistema per diversi  $K_P$

Il codice Matlab utilizzato è il seguente:

```

num =[1.151 0.1774]; %numeratore della FDT
den =[1 0.739 0.921 0]; %denominatore della FDT
G= tf ( num , den ); %FDT catena aperta
A =0.2; %altezza del gradino
t =0:0.01:30; %ca mp io na men to
Kp =[ 0.1 , 0.5 , 1 , 2 , 5 , 10 , 50 , 100 ]; %vettore dei fattori
for i =1:length( Kp ) %ciclo sul vettore Kp
    subplot(length( Kp ) /2 ,2 , i)
    Kp_i = Kp (i);
    W= feedback ( Kp_i *G ,1 ) ; %FDT in catena chiusa
    step (A*W ,t) %applicazione del gradino al sistema
    legend([ ' Kp = ',num2str( Kp (i)) ] ) ;
end

```

Osservando i grafici, appare evidente che il sistema più performante è incluso nell'intervallo dei  $K_P$  compresi tra 1 e 5; più precisamente essere quello ottenuto per  $K_P = 2$ , gli altri infatti presentano tempi di assestamento troppo lunghi o sovraelongazioni elevate e oscillazioni eccessive. Nel dettaglio risulta:

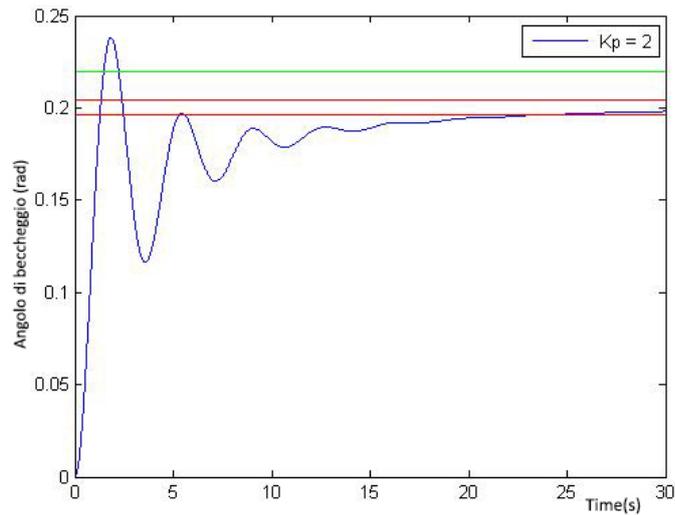


Figura 3.3: Risposta del sistema per  $K_P = 2$

Osserviamo comunque che l'unico parametro di progettazione rispettato è il tempo di salita.

### 3.2 Controllore PD

Vedo ora come si comporta un compensatore che presenta sia la parte proporzionale che quella derivativa, La Funzione di Trasferimento risulta essere del tipo  $C(s) = K_p + K_d s$ . Procedo quindi similmente al punto precedente: osservo al variare dei parametri  $K_p$  e  $K_d$  come si comporta il sistema retroazionato. Risulta:

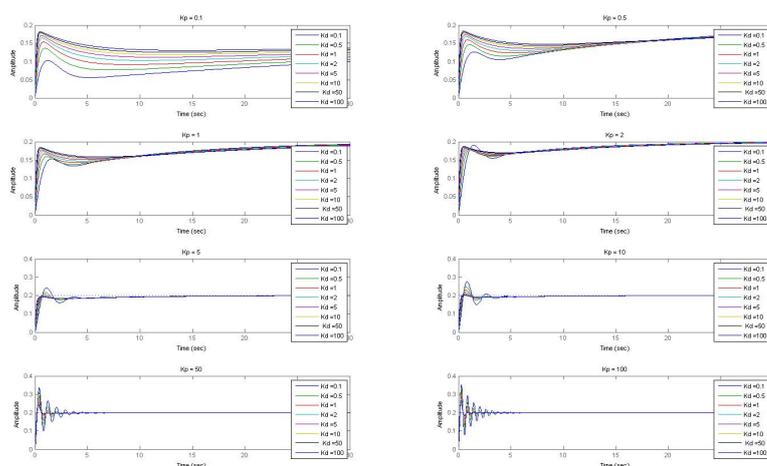


Figura 3.4: Risposta del sistema al variare di  $K_p$  e  $K_D$

Dove é stato utilizzato il seguente codice Matlab:

```

num =[1.151 0.1774]; %numeratore della FDT
den =[1 0.739 0.921 0]; %denominatore della FDT
G= tf ( num , den ); %FDT catena aperta
A =0.2; %altezza del gradino
t =0:0.01:30; %ca mp io na me nto
Kp =[ 0.1 , 0.5 , 1 , 2 , 5 , 10 , 50 , 100 ]; %vettore dei fattori Kp
Kd =[ 0.1 , 0.5 , 1 , 2 , 5 , 10 , 50 , 100 ]; %vettore dei fattori Kd
for i =1:length( Kp ) %ciclo sul vettore Kp
    subplot(length( Kp ) /2 ,2 , i)
    Kp_i = Kp ( i);
    for l =1:length( Kd ) %ciclo sul vettore Kd
        Kd_l = l;
        C= tf ( [ Kd_l Kp_i ] ,1) ; %FDT del controllore PD
        W =feedback(C*G ,1) ; %FDT in catena chiusa
        step (A*W ,t) %applicazione del gradino al sistema
    end
end

```

```

hold on
end
title([ 'Kp = ',num2str( Kp (i) ) ] );
legend( 'Kd =0.1 ', 'Kd =0.5 ', 'Kd =1 ', 'Kd =2 ',
        'Kd =5 ', 'Kd =10 ', 'Kd =50 ', 'Kd =100 ');
end
hold off

```

Osservo che per i  $K_P < 5$  il sistema fatica a raggiungere il valore di regime, perciò mi concentrerò su quelli maggiori. Osservo inoltre che le prestazioni incrementano all'aumentare di  $K_D$  a discapito tuttavia, per valori elevati, della stabilità

Ora restringendomi nell'intervallo, risultano:

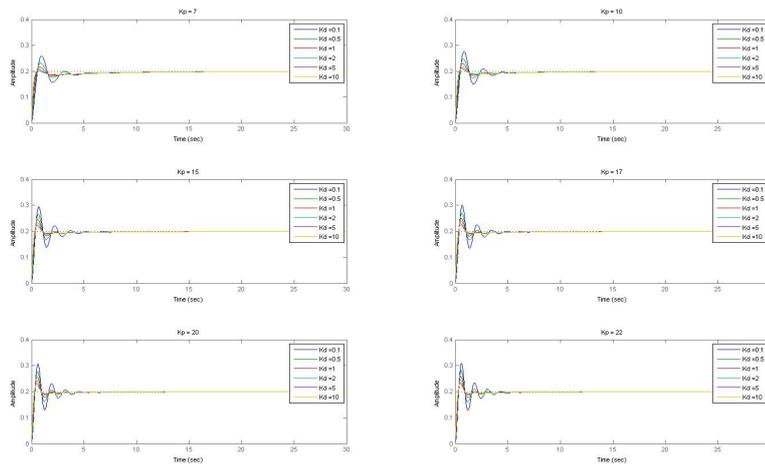


Figura 3.5: Risposta del sistema per  $K_P > 5$

Posso osservare che tra i vari risultati, quello migliore sembra dato dai valori  $K_P = 15$  e  $K_D = 10$ .

Possiamo già osservare, dalla figura seguente, come le specifiche di progetto siano pienamente osservate.

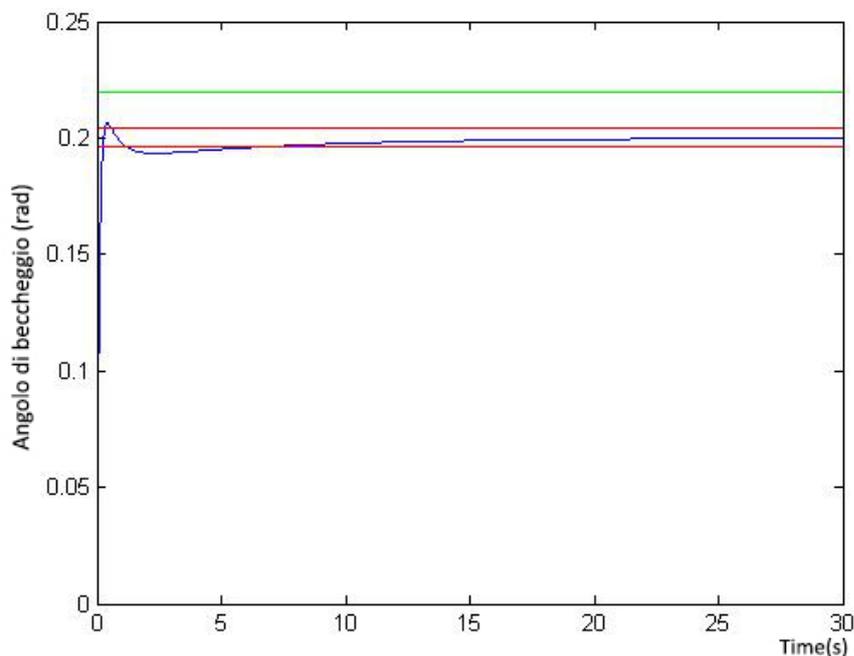


Figura 3.6: Risposta del sistema per  $K_P = 15$  e  $K_D = 10$

### 3.3 Controllore PI

Per questo tipo di controllore farò solo un'analisi veloce, poiché posso già concludere l'inutilità di questo compensatore. All'inizio, infatti, abbiamo constatato il fatto che il sistema in catena aperta presentava già il polo nell'origine e che quindi rispettava il vincolo sull'errore a gradino. Con questo tipo di compensatore, di funzione di trasferimento  $C(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$ , viene ad aggiungersi un ulteriore polo nell'origine aumentando quindi il rischio di instabilità del sistema.

### 3.4 Controllore PID

Sviluppiamo quindi un compensatore del tipo PID avente FdT  $C(s) = K_p + K_d s + \frac{K_I}{s}$ . Procedo esattamente come nei punti precedenti, l'unica differenza è che questa volta a variare sono tutti i tre parametri.

Il codice Matlab utilizzato è:

```

num =[1.151 0.1774]; %numeratore della FDT
den =[1 0.739 0.921 0]; %denominatore della FDT
FDT = tf ( num , den ) ; %calcolo della FDT
A=0.2; %altezza del gradino
t =0:0.01:30;
Kp =[ 0.1, 0.5, 1, 5, 10 , 15 , 20 ]; %vettore dei fattori Kp
Kd =[ 2, 5, 10 , 20 ]; %vettore dei fattori Kd
Ki =[ 1, 3, 5, 8, 10 , 15, 20 ];
for n =1:length( Kp )
figure( n)
title([ 'Kp = ',num2str( Kp (n) ) ] ) ;
Kp_n = Kp (n);
for i =1:length( Kd ) %simulzione per ogni Kp nel vettore
subplot(length( Kd ) /2 ,2 , i)
Kd_i = Kd (i);
for l =1:length( Ki )
Ki_l = Ki (l);
Cs = tf ([ Kd_i Kp_n Ki_l ] ,[1 0]) ;
sys_cl = feedback ( Cs * FDT ,1) ; %creazione del sistema in catena chiusa
step (A* sys_cl ,t) %applicazione del gradino al sistema
hold on
end
legend( 'Ki =1 ' , 'Ki =3 ' , 'Ki =5 ' , 'Ki =8 ' , 'Ki=10' , 'ki=15' , 'Ki=20');
title([ 'Kd = ',num2str( Kd (i) ) ] ) ;
end
hold on
end
hold off

```

E risulta quindi:

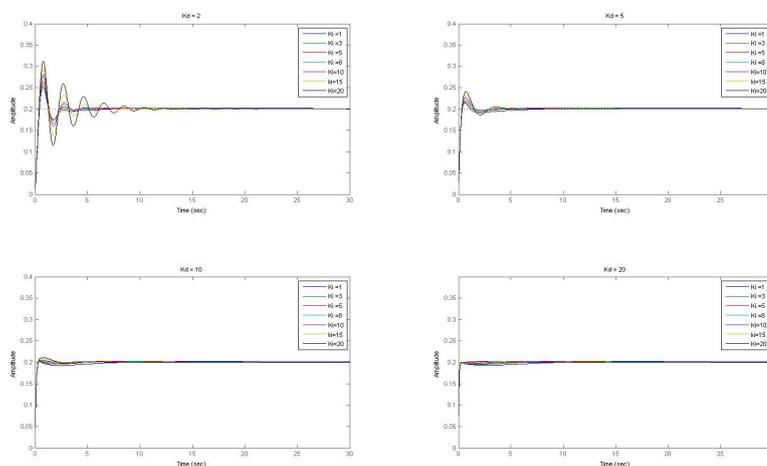


Figura 3.7: Risposta del sistema per  $K_P = 10$

Ho inserito i grafici per cui il sistema risulta più efficiente, in maniera da evitare una pesantezza grafica. Il resto dei grafici lo si può trovare nell'appendice A.

Si osserva perciò che il controllore migliore è quello dato da  $K_P = 10K_D = 20K_I = 8$ .

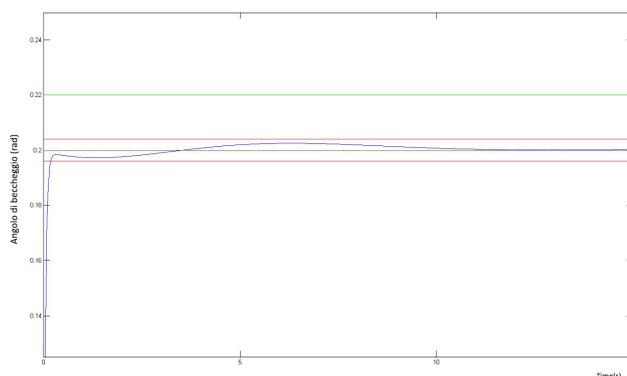


Figura 3.8: Risposta del sistema per  $K_P = 15$  e  $K_D = 20$  e  $K_I = 8$

Noto perfettamente come il controllore PID si comporti, in prestazioni, meglio del controllore PD.

## Capitolo 4

# Luogo delle radici

In questo capitolo cercheremo un compensatore mediante il metodo del luogo delle radici.

### 4.1 Introduzione e calcolo dei parametri

Definendo  $G(s) = K \frac{n(s)}{q(s)}$  e ricordando che la funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso, ottenuto per retroazione unitaria negativa a partire da  $G(s)$ , è data da

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = K \frac{\frac{n(s)}{q(s)}}{1 + K \frac{n(s)}{q(s)}} = \frac{Kp(s)}{q(s) + Kp(s)}$$

si definisce il luogo delle radici come

$$L : \{s \in C : d(s) = 0, \forall K \in R^+\}$$

dove con  $d(s)$  indichiamo il denominatore di  $W(s)$ . In altre parole il luogo delle radici rappresenta nel piano complesso la posizione dei poli di  $W(s)$  al variare del parametro  $K$ , permettendo perciò la comprensione del comportamento del sistema retroazionato partendo dalla FdT del sistema in catena aperta. Prima di poter tracciare il luogo delle radici necessito di trovare il valore di due parametri: la pulsazione naturale  $\omega_n$  ed il coefficiente di smorzamento  $\xi$ . Ricordo che questi parametri sono definiti da:

$$(s - p_1)(s - p_2) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = \omega_n^2 \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)$$

. Fortunatamente tali parametri sono legati da relazioni note, sebbene abbastanza complesse, con i parametri di progettazione indicati precedentemente; più precisamente la pulsazione naturale è legata al tempo di salita e lo smorzamento alla sovralongazione:

$$\omega_n = \frac{1.8}{t_r} \quad S = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad \text{Dalle quali ricaviamo i valori: } \omega \geq 0.9 \text{ e } \xi \geq 0.936$$

## 4.2 Progetto del compensatore

I parametri trovati nel punto precedente ci permetteranno di osservare immediatamente se il sistema retroazionato soddisfa, per qualche valore di  $K$ , i parametri di progettazione. Il luogo risulta essere:

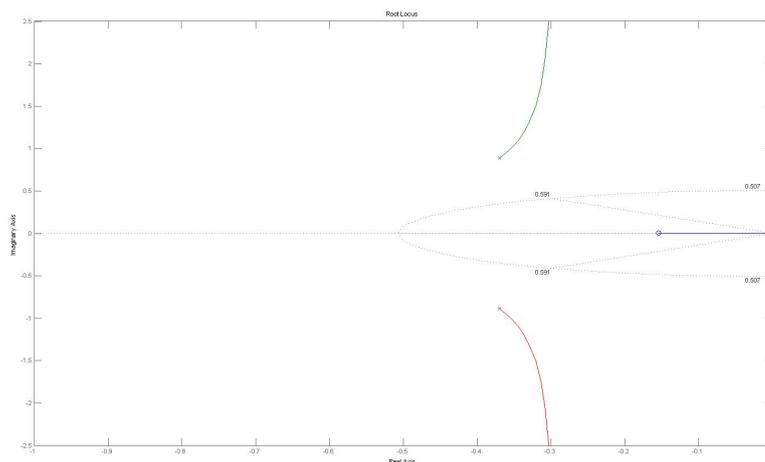


Figura 4.1: Luogo delle radici

Vediamo che la regione compresa fra le 2 semirette uscenti dall'origine comprende i poli per cui il sistema retroazionato ha una sovralongazione minore del 10% e i punti interni alla semicirconferenza hanno tempo di salita maggiore di 2 secondi. Perciò i punti che ci interessano sono quelli compresi tra le 2 semirette ed esterni alla semicirconferenza.

Risulta immediato notare che per alcun  $K$  tali valori sono rispettati.

Bisogna, quindi, progettare una rete anticipatrice, del tipo  $C(s) = K \frac{s-z_0}{s-p_0}$  con  $|p_0| > |z_0|$ , per poter spostare il grafico all'interno della zona indicata.

Per fare questo posso ricorrere all'utilizzo di SISOTool. Questo strumento mi permette di osservare, al variare dei zero e poli introdotti, come varia il luogo delle radici e quindi, a tempo reale, la risposta del sistema al segnale di ingresso desiderato.

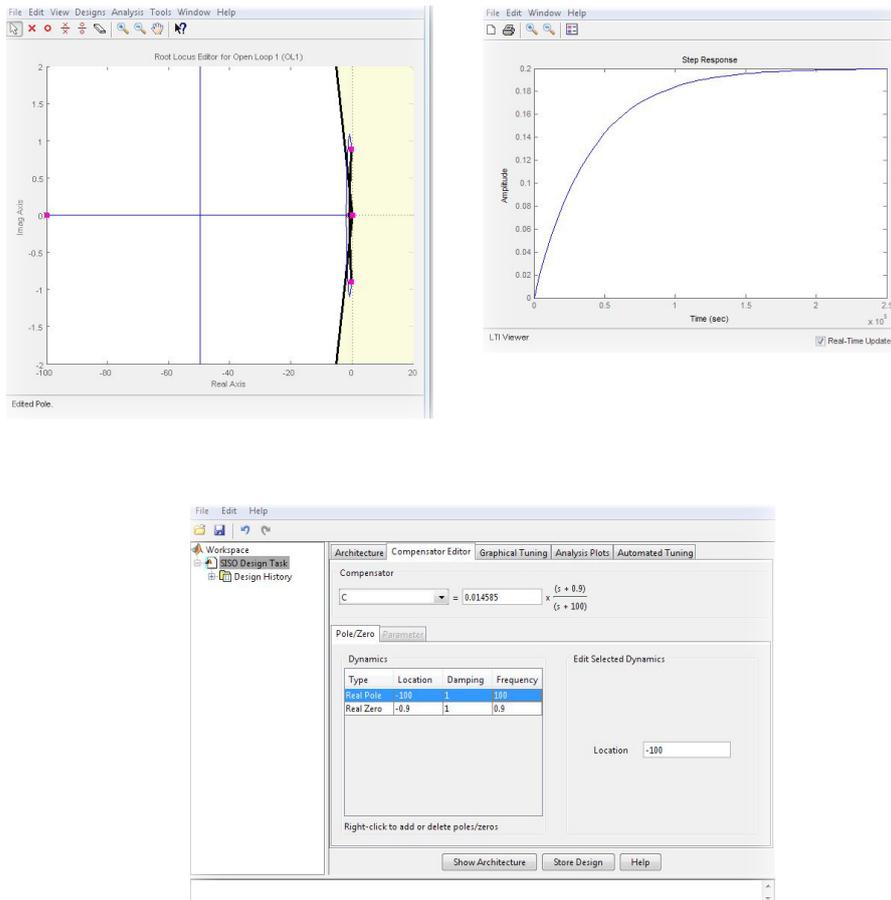


Figura 4.2: Alcune finestre di SISOTool

Dopo vari tentativi otteniamo il seguente luogo

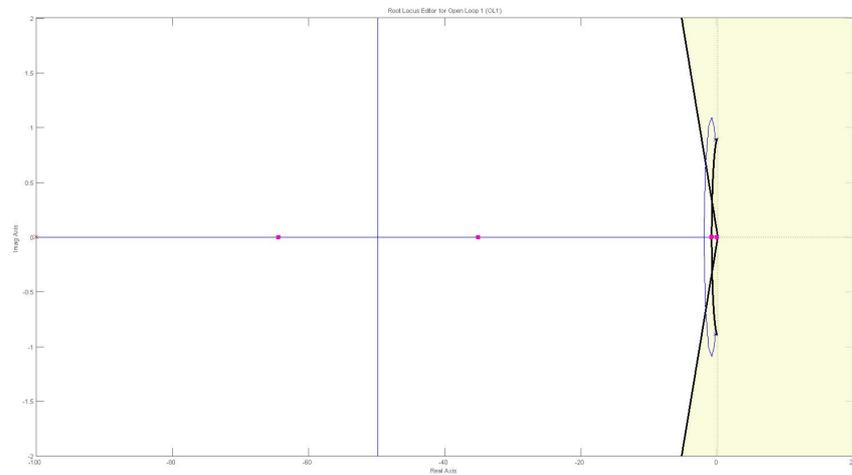


Figura 4.3: Luogo delle radici per il sistema compensato

Ottenuto con i valori  $K = 2000$ ,  $p_0 = -100$  e  $z_0 = -0.9$  con risposta del sistema

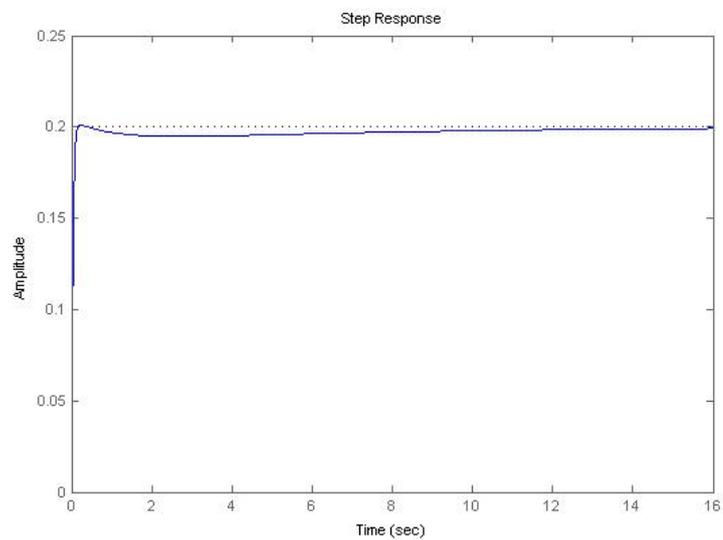


Figura 4.4: Risposta del sistema

## Capitolo 5

# Controllore attraverso Bode e Nyquist

### 5.1 Introduzione

Un altro compensatore lo si può ricavare studiando il sistema nel campo delle frequenze; il sistema risultante sarà ottenuto con il semplice prodotto delle risposte in frequenza, mentre se si opera nel campo del tempo, il sistema risultante si ottiene mediante una convoluzione delle risposte impulsive. Risulta evidente quindi una semplificazione dello studio. Ora ricordo che la risposta in frequenza è ricavata dalla trasformata di Fourier della risposta impulsiva, ovvero, in altri termini, è la funzione di trasferimento ricavata per  $s = j\omega$ . Ora potrebbe sorgere un ulteriore problema: il grafico; essendo, infatti, la risposta in frequenza definita nel campo complesso, il grafico completo di  $\omega \mapsto F(\omega)$  risulterebbe essere in tre dimensioni, cosa che risulta essere scomoda per l'analisi oltre che abbastanza complicata. A questo proposito fortunatamente subentrano due modi di graficare che semplificano la questione: grafico di Bode e di Nyquist. Il primo consiste in due grafici collegati: uno rappresenta il valore dell'ampiezza del modulo della risposta in frequenza (misurato in dB) al variare della pulsazione, mentre l'altro rappresenta l'argomento della risposta in funzione della pulsazione; Nyquist rappresenta invece sul piano complesso i valori della risposta in frequenza al variare della pulsazione.

## 5.2 Struttura del compensatore

Per trovare la funzione di trasferimento del compensatore, possiamo dividere la ricerca in due parti, le quali comporranno assieme il compensatore. Ovvero, il compensatore finale sarà dato da  $C(s) = C_1(s)C_2(s)$ , dove  $C_1(s)$  e  $C_2(s)$  dovranno essere determinati nella seguente maniera:

- \*  $C_1(s)$  dovrà rispettare i vincoli sull'errore e quindi il tipo di sistema retroazionato;
- \*  $C_2(s)$  dovrà rispettare i vincoli sulla pulsazione di attraversamento e sul margine di fase (calcolati secondo i requisiti di progettazione).

## 5.3 Prima parte del compensatore: $C_1(s)$

Il tipo di compensatore che andiamo a progettare è descritto dalla formula

$$C_1(s) = \frac{K_C}{s^{k-h}}$$

Ricordo inoltre che la FdT del nostro sistema in catena aperta risulta essere

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{\delta(s)} = \frac{1.151s + 0.1774}{s^3 + 0.739s^2 + 0.921s}$$

Ora riscrivendola secondo la struttura  $G(s) = \frac{K_b}{s^n} \tilde{G}(s)$  risulta che, siccome il progetto richiedeva un errore a regime permanente del 2% con ingresso un  $\delta_1(t)$ , ovvero un sistema di tipo 0, il nostro sistema presenta un polo nell'origine, quindi risponde sempre con errore nullo al gradino, non risulta quindi necessario lavorare per forza sul parametro  $K_C$ , lo si può fare se si vuole tuttavia velocizzare il sistema alla discesa del valore di regime; quindi, evitando di inserire un valore troppo elevato, possiamo scegliere  $K_C = 10$  e diventa quindi

$$C_1(s) = 10$$

## 5.4 Seconda parte: $C_2(s)$

Nella progettazione della seconda parte del compensatore, dobbiamo tenere in mente i vincoli di progettazione. Tuttavia, lavorando nel campo delle frequenze, risulta molto più utile usare i valori di Banda Passante  $B_P$  al posto di  $t_r$  e di Margine di Fase  $m_\psi$  al posto della Sovraelongazione  $S$ . Fortunatamente queste caratteristiche sono legati da relazioni note, quindi risulta semplice calcolare i rispettivi valori. Risulta perciò che  $B_P t_r = 2.3$  da cui  $B_P = 7.67$  nel calcolo del quale ho usato  $t_r = 0.3$  poiché nel controllore

PID si sono notati valori minori per tale parametro. Ricordo inoltre che la banda passante corrisponde con la pulsazione di attraversamento. Il margine di fase è legato alla sovralongazione da:  $m_{\psi} = 1 - 0.8S$  che offre come risultato  $m_{\psi} = 0.92rad$  ovvero circa 53 gradi.

Il grafico di Bode risulta essere:

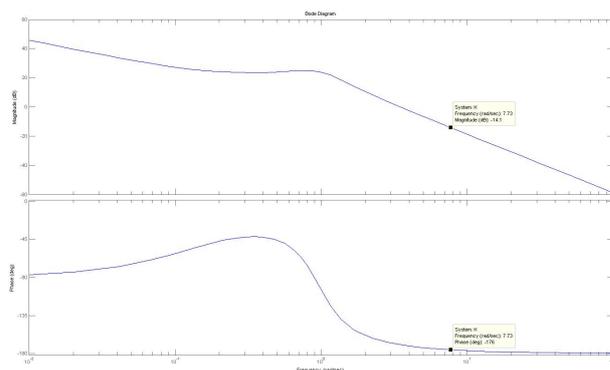


Figura 5.1: Grafico di Bode per  $10G(s)$

Osserviamo che l'amplitudine deve essere alzata di 14.1dB mentre la fase di circa 39 gradi.

Per poter rispettare i vincoli devo costruire una rete anticipatrice con uno zero prima della pulsazione di attraversamento ed il polo dopo. Devo ricordare tuttavia che lo zero alza il modulo di 20dB/dec, quindi devo posizionarlo per  $z = 1.55rad$  mentre il polo posso posizionarlo a  $p = 10^3$ .

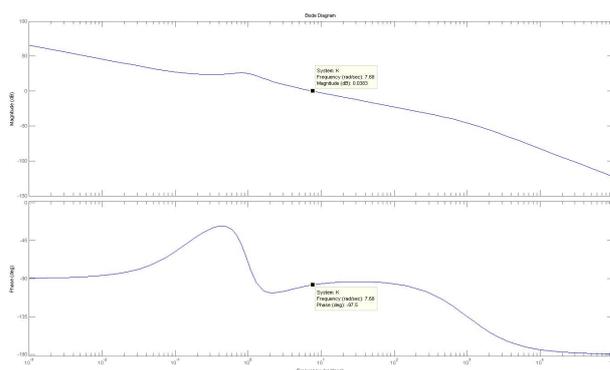


Figura 5.2: Grafico di Bode per  $C(s)G(s)$

### 32 CAPITOLO 5. CONTROLLORE ATTRAVERSO BODE E NYQUIST

Osserviamo quindi che le specifiche di progetto sono in questo modo pienamente rispettate, con margine di fase ampiamente superiore a quello richiesto. Il controllore finale risulta essere:

$$C(s) = 10 \frac{0.6452s + 1}{0.001s + 1}$$

La risposta risulta essere

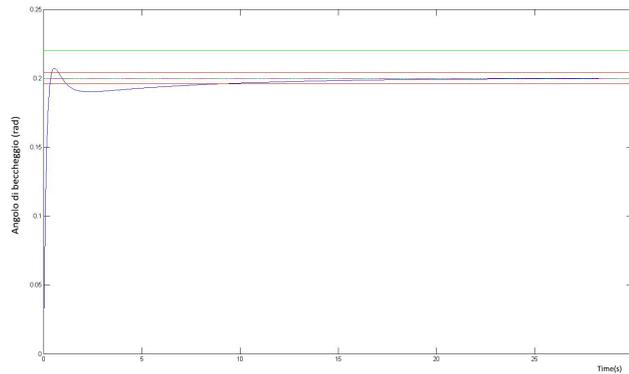


Figura 5.3: Risposta del sistema retroazionato

Osserviamo che il sistema si comporta in maniera ottima, sebbene, a differenza del PID, presenti una sovraelongazione maggiore ed un tempo di assestamento maggiore.

## 5.5 Studio in Nyquist

Per completezza di informazione voglio osservare il sistema in catena aperta attraverso il diagramma di Nyquist.

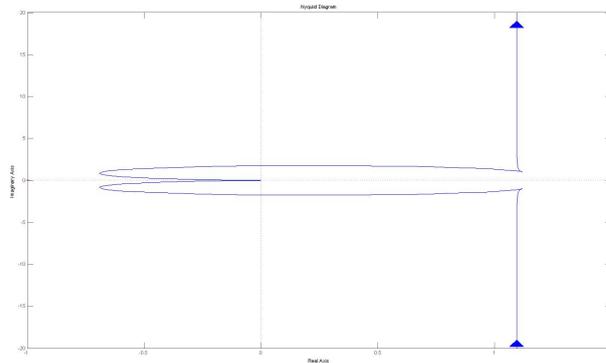


Figura 5.4: Diagramma di Nyquist

Ricordando il criterio di Nyquist che afferma:

*Data una funzione razionale propria  $G(s) \in R(s)$ , si supponga che sia noto il diagramma di Nyquist di  $G(j\omega)$  per  $\omega \in R$  e che tale diagramma soddisfa la seguente condizione:  $-1 + G(s)$  non abbia né zeri né poli sull'asse immaginario. Allora si può contare il numero di giri che il diagramma di Nyquist fa intorno al punto  $-1 + j0$  quando  $\omega$  varia da  $-\infty$  a  $+\infty$ : questo eguaglierà la differenza  $n_{G+} - n_{W+}$ , dove  $n_{G+}$  e  $n_{W+}$  rappresentano, rispettivamente, il numero di poli a parte reale positiva di  $G(s)$  ed il numero di poli a parte reale positiva di  $W(s)$ , sistema retroazionato.*

*Inoltre, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema retroazionato sia BIBO-stabile è che il numero di giri intorno al punto  $-1 + j0$ ,  $N$ , sia uguale a  $n_{G+}$ , cioè  $W(s)$  sia priva di poli instabili.*

Osservo, immediatamente, come ci si aspettava anche dalle analisi precedenti, che il sistema non compie alcun giro attorno al punto  $-1 + j0$ , quindi il sistema retroazionato, non presentando  $G$  alcun polo a parte reale positiva, risulta BIBO-stabile. Osservo ora il diagramma di Nyquist del sistema con applicato il compensatore.

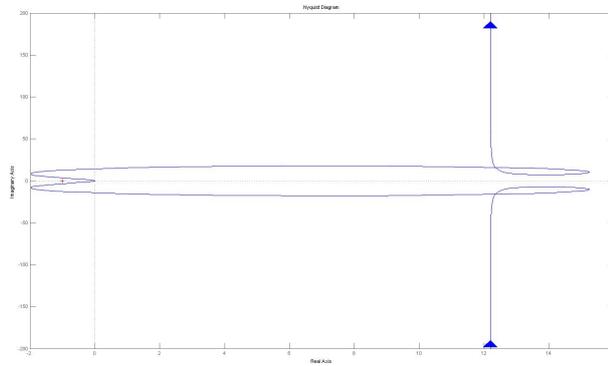


Figura 5.5: Diagramma di Nyquist del sistema compensato

Come ci si aspettava, anche il sistema con il compensatore è BIBO-stabile. Quello che si può osservare, e che risulta interessante, è però come cambiano il punto di intersezione tra la curva e la circonferenza di raggio 1 e centro nell'origine ed il rispettivo angolo che il punto  $-1 + j0$  individua con tale punto (ovvero l'angolo formato dall'asse delle ascisse e dal segmento  $-1 + j0$  ed il punto di intersezione). Questi due elementi indicano immediatamente la bontà del sistema retroazionato: l'intersezione indica la pulsazione di attraversamento, l'angolo il margine di fase. Si nota infatti che il sistema compensato, allontanando il grafico dal punto  $-1 + j0$ , risolve i problemi di oscillazione dovuti alla vicinanza a questo; c'è infatti un incremento del margine di fase e della pulsazione di attraversamento, come già analizzato precedentemente.

# Conclusioni

Vediamo ora di confrontare i vari compensatori trovati per poter definire quello più performante.

Ricordiamo le funzioni di trasferimento.

\* Controllore PID:

$$C(s) = 15 + 20s + \frac{8}{s}$$

\* Luogo delle Radici:

$$C(s) = 2000 \frac{s + 0.9}{s + 100}$$

\* Metodo Bode/Nyquist:

$$C(s) = 10 \frac{0.6452s + 1}{0.001s + 1}$$

Confronto quindi le risposte al gradino:

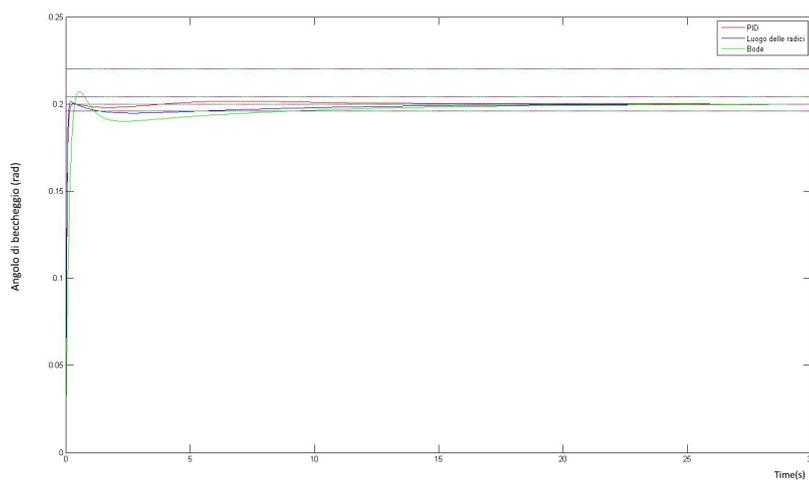


Figura 5.6: Risposte a confronto

Osservando il grafico soprastante, possiamo notare alquanto facilmente, come fra i tre compensatori il migliore sia il controllore PID. Il controllore PID viene utilizzato spesso nella pratica e vediamo come nel nostro caso funzioni perfettamente.

Esso presenta tempo di salita quasi pari a quello del compensatore ottenuto dallo studio del Luogo delle Radici ma ha tempo di assestamento minore.

Possiamo notare, tuttavia, che tutti e tre i tipi di compensatori trovati rispettano pienamente i criteri di progettazione; ciò risulta molto interessante poiché, mentre per i controllori PID e quello ottenuto tramite il Luogo delle Radici ho sperimentato molti valori per raggiungere il risultato ottimale (si vedano le iterazioni fatte per trovare i parametri del PID o l'utilizzo di SISO-Tool per il Luogo), nel caso del compensatore trovato tramite lo studio dei diagrammi di Bode e di Nyquist, mi sono basato semplicemente sull'osservazione del grafico e, quindi, applicando una correzione abbastanza semplice attuando una rete anticipatrice approssimata. Ciò è stato effettuato per vedere come l'applicazione accademica imparata nel corso si comparasse agli strumenti professionali utilizzati. Molto probabilmente, utilizzando SISO-Tool o qualche altro programma avrei ottenuto una rete più efficiente.

Alla fine, il compensatore PID risulta essere la scelta migliore.

# Considerazioni finali sull'elaborato

Per concludere l'elaborato vorrei soffermarmi sull'esperienza effettuata. Ho trovato molto interessante passare dalla teoria appresa nel corso di Controlli Automatici, alla pratica, seppure semplificata, dell'utilizzo di software apposito e del confronto con il metodo appreso.

Devo dire tuttavia che lo sviluppo dell'elaborato si é rivelato per un certo senso complicato poiché ho dovuto ambientarmi tra i vari software (L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, Matlab, Simulink, SISOTool) che, per quanto alcuni abbastanza semplici, hanno richiesto un certo grado di impegno. Mi sento di affermare, tuttavia, di aver trovato la stesura molto divertente e stimolante, cercando i valori migliori per i vari compensatori e non da meno una struttura gradevole dell'elaborato.

*Desidero ringraziare il mio relatore, la mia famiglia e tutti  
coloro che hanno sempre creduto in me.*

# Appendice A

Posiziono qui di seguito, senza commento, i vari grafici ottenuti per il progetto del controllore PID.

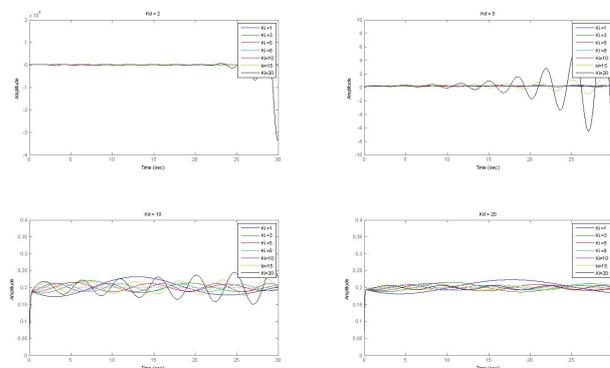


Figura 5.7: Grafici per  $K_P = 0.1$

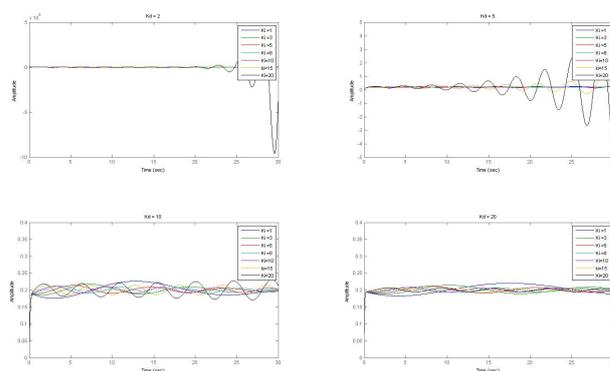


Figura 5.8: Grafici per  $K_P = 0.5$

40 CAPITOLO 5. CONTROLLORE ATTRAVERSO BODE E NYQUIST

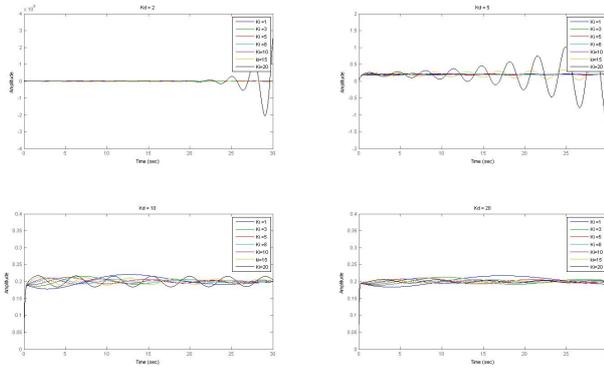


Figura 5.9: Grafici per  $K_P = 1$

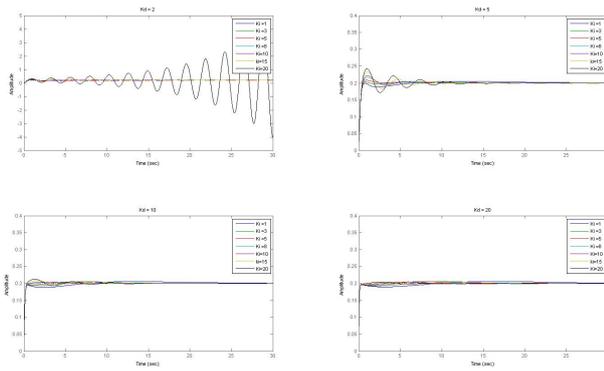


Figura 5.10: Grafici per  $K_P = 5$

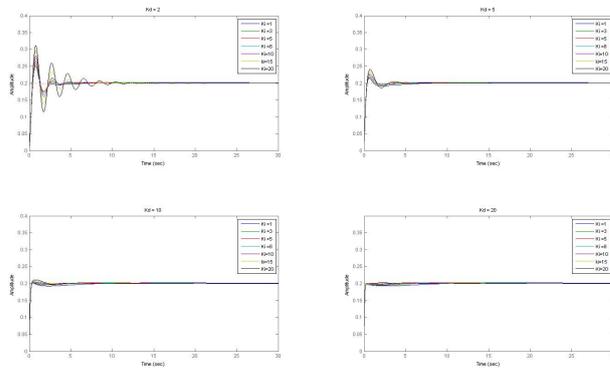


Figura 5.11: Grafici per  $K_P = 10$

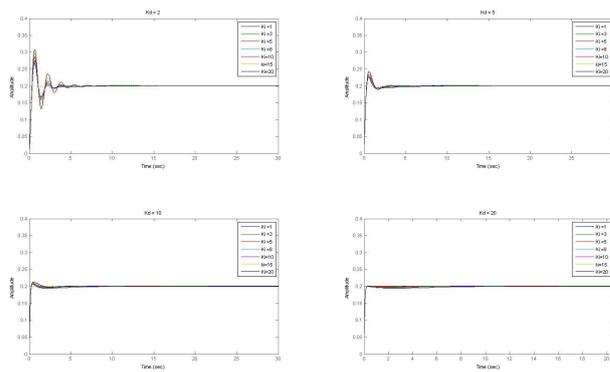


Figura 5.12: Grafici per  $K_P = 15$

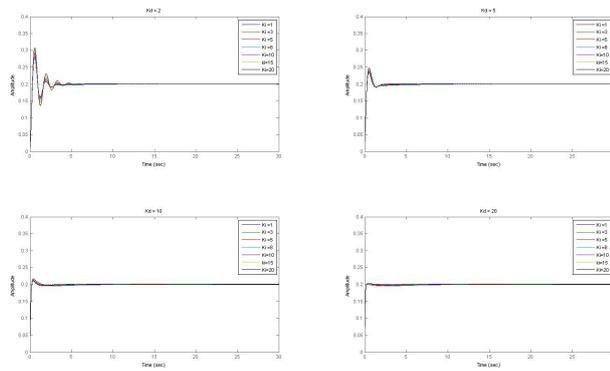


Figura 5.13: Grafici per  $K_P = 20$

# Elenco delle figure

1.1	Parametri di volo . . . . .	7
2.1	Risposta al gradino in catena aperta . . . . .	12
2.2	Schema a blocchi . . . . .	13
2.3	Risposta al gradino in catena aperta con Simulink . . . . .	13
2.4	Segnale in ingresso . . . . .	14
2.5	Risposta alla rampa . . . . .	14
2.6	Sinusoide in ingresso . . . . .	15
2.7	Risposta alla sinusoide . . . . .	15
3.1	Schema a blocchi per il controllore PID . . . . .	17
3.2	Risposta del sistema per diversi $K_P$ . . . . .	18
3.3	Risposta del sistema per $K_P = 2$ . . . . .	19
3.4	Risposta del sistema al variare di $K_P$ e $K_D$ . . . . .	20
3.5	Risposta del sistema per $K_P > 5$ . . . . .	21
3.6	Risposta del sistema per $K_P = 15$ e $K_D = 10$ . . . . .	22
3.7	Risposta del sistema per $K_P = 10$ . . . . .	24
3.8	Risposta del sistema per $K_P = 15$ e $K_D = 20$ e $K_I = 8$ . . . . .	24
4.1	Luogo delle radici . . . . .	26
4.2	Alcune finestre di SISOTool . . . . .	27
4.3	Luogo delle radici per il sistema compensato . . . . .	28
4.4	Risposta del sistema . . . . .	28
5.1	Grafico di Bode per $10G(s)$ . . . . .	31
5.2	Grafico di Bode per $C(s)G(s)$ . . . . .	31
5.3	Risposta del sistema retroazionato . . . . .	32
5.4	Diagramma di Nyquist . . . . .	33
5.5	Diagramma di Nyquist del sistema compensato . . . . .	34
5.6	Risposte a confronto . . . . .	35
5.7	Grafici per $K_P = 0.1$ . . . . .	39
5.8	Grafici per $K_P = 0.5$ . . . . .	39
5.9	Grafici per $K_P = 1$ . . . . .	40
5.10	Grafici per $K_P = 5$ . . . . .	40

5.11	Grafici per $K_P = 10$	41
5.12	Grafici per $K_P = 15$	41
5.13	Grafici per $K_P = 20$	42

# Bibliografia

[1]Mauro Bisiacco, Maria Elena Valcher, *Controlli Automatici*,Libreria Progetto, Padova, 2008

[2]sito:<http://ctms.engin.umich.edu/>

[3]Marc Baudoin,*Impara L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X*,Parigi,1998