

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE STATISTICHE
CORSO DI LAUREA IN STATISTICA E GESTIONE
DELLE IMPRESE

RELAZIONE FINALE:
MODELLAZIONE E PREVISIONE DEL MERCATO DI
TELEFONIA MOBILE CON METODI PER SERIE STORICHE

Relatore:
Prof. Bisaglia Luisa
Alessandro

510548/GEI

Laureando:
Fassina

n° mat.

Anno accademico 2006/2007

INDICE

Introduzione	pag. 1
---------------------	---------------

Capitolo 1:

I DATI E L'AZIENDA	pag. 3
---------------------------	---------------

1.1 L'azienda	pag. 3
---------------	--------

1.2 I dati	pag. 5
------------	--------

Capitolo 2:

ANALISI DELLE SERIE CON MODELLI SARIMA	pag. 9
---	---------------

2.1 Processi stocastici	pag. 9
-------------------------	--------

2.2 Modelli SARIMA	pag. 10
--------------------	---------

2.3 Procedura di Box-Jenkins	pag. 10
------------------------------	---------

2.3.1 Identificazione	pag. 11
-----------------------	---------

2.3.2 Stima dei modelli	pag. 12
-------------------------	---------

2.3.3 Controllo diagnostico	pag. 12
-----------------------------	---------

2.4 Modelli individuati	pag. 13
-------------------------	---------

2.4.1 SARIMA(1,0,0)(1,0,2) ₇	pag. 14
---	---------

2.4.2 SARIMA(1,0,0)(0,1,2) ₇	pag. 22
---	---------

2.5 Previsioni con modelli SARIMA	pag. 28
-----------------------------------	---------

Capitolo 3:

ANALISI DELLE SERIE CON IL METODO DI HOLT-WINTERS	pag. 31
--	----------------

3.1 Lisciamento esponenziale	pag. 31
------------------------------	---------

3.1.1 Metodo H-W stagionale additivo	pag. 32
--------------------------------------	---------

3.1.2 Metodo H-W stagionale moltiplicativo	pag. 34
--	---------

Capitolo 4:

CONCLUSIONI	pag. 36
--------------------	----------------

INTRODUZIONE

In questo lavoro vengono analizzate serie storiche riguardanti il traffico voce di una compagnia di video-telefonia mobile leader nel settore delle telecomunicazioni mobili UMTS.

Nello specifico si è cercato di modellare la serie storica dei minuti medi di chiamate al giorno relativa ad un orizzonte temporale di sei mesi dal 01/10/2004 al 31/03/2005, utilizzando l'approccio Box-Jenkins all'analisi delle serie storiche (i modelli SARIMA) e il metodo Holt Winters stagionale.

Il mercato della telefonia mobile, è un mercato oligopolistico che presenta notevoli difficoltà, in quanto le strade per sopravvivere non sono molte, nel senso che o si riesce a competere a livello di prezzo, quindi offrire un servizio funzionale a costo più basso rispetto ai concorrenti oppure lanciarsi sulla strada della differenziazione del prodotto offerto (che è proprio la strada scelta dall'azienda i cui dati andiamo ad analizzare). Per l'azienda presa in considerazione è importante avere una visione di insieme che le permetta di capire se la propria strategia di investimento viene recepita dagli utenti, ecco perché si rende necessario poter prevedere l'andamento di un fenomeno che indirettamente va proprio a rappresentare quelli che sono i ricavi dell'azienda stessa. Il fatto che l'azienda possa prevedere, in questo caso specifico, l'andamento medio delle chiamate per il mese di marzo le dà un'indicazione non da poco su quella che potrebbe essere in positivo o in negativo la variazione delle entrate per quel mese. Avendo quindi a disposizione una visione prospettica dell'andamento dei fenomeni di interesse il management si trova nella posizione di poter analizzare la situazione ed escogitare in modo preventivo delle contromisure atte a ridurre gli effetti negativi che l'azienda economicamente va a subire a causa dell'andamento di un mercato così complesso.

La modellazione dei dati quindi non è tanto utile per adattare un modello teorico al fine di rappresentare i dati già posseduti quanto ad individuare un processo che permetta di prevedere nel modo più preciso possibile quelli futuri.

Capitolo 1

I DATI E L'AZIENDA

1.1 L'AZIENDA

L'azienda di cui si andranno ad analizzare i dati è "3 Italia". "3" è leader in Italia nel settore delle telecomunicazioni mobili UMTS con 5,5 milioni di clienti al dicembre 2005. Fa parte di una multinazionale quotata alla borsa di Hong Kong, titolare di 11 licenze UMTS nel mondo e attiva oltre che nelle telecomunicazioni in settori come l'energia, immobili, turismo e porti.

L'azienda si posiziona come "Mobile Triple Player" offrendo ai suoi clienti servizi di videocomunicazione, un accesso veloce ad internet ed una ricca gamma di contenuti (TV, musica, giochi, news, ecc.), oltre ai tradizionali servizi di telefonia mobile. Ha raggiunto la leadership nel mercato italiano dell'UMTS facendo leva su punti di forza come: il posizionamento distintivo del marchio, essendo l'unica ad essere basata interamente sull'UMTS non si trova ad affrontare i costi e i vincoli di un'infrastruttura mista, gli accordi strategici con i fornitori di terminali mobili che permettono lo sfruttamento di significative economie di scala per l'acquisto, l'architettura innovativa dei sistemi informativi, flessibili ed efficienti, che permette di erogare numerosi servizi ad elevato valore aggiunto.

Inoltre "3" ritiene che l'elemento chiave del futuro mercato delle comunicazioni mobili sia costituito dalla convergenza tra le telecomunicazioni, internet, media in un unico terminale multimediale, mobile e personale (Personale Life Station).

Tale visione trova supporto su tendenze sociali, economiche e tecnologiche riscontrabili già oggi: il desiderio di rimanere "connessi" in qualsiasi momento, sia nel lavoro che nel tempo libero; il ruolo giocato dalle telecomunicazioni mobili nel migliorare la produttività del lavoro mediante un'informazione più ricca; la convergenza tra telefoni mobili, videotelefonati, agende elettroniche, macchine fotografiche, video games e televisione; la digitalizzazione di tutte le forme di comunicazione, l'adozione diffusa del protocollo IP, ecc..

"3" ha puntato fin da subito a creare una grande infrastruttura per l'Italia, realizzando una rete radiomobile a banda larga poggiata sulle stesse fondamenta

tecnologiche che sono alla base di internet. Una rete creata per lo sfruttamento del protocollo di terza generazione UMTS (Universal Mobile Telecommunication System – prima tecnologia di trasmissione di audio, video e dati completamente digitalizzata, che apre le porte alla multimedialità nella comunicazione mobile concepita inizialmente solo per effettuare telefonate) con l’obiettivo di raggiungere aree territoriali a segmenti di mercato dove manca il supporto di infrastrutture a banda larga, mantenendo comunque la flessibilità necessaria per garantire un servizio sempre all’altezza anche quando il volume di traffico subisce significative variazioni e raggiungendo comunque anche la massima efficienza sul profilo dei costi. Un’altra grossa importante innovazione sarà applicata al sistema di fatturazione che sarà il primo in Italia in grado di mettere assieme tariffazione a pacchetto e tariffazione a servizio ovvero per bit e per tempo di connessione.

Tramite questo tipo di tecnologia si è in grado anche di minimizzare l’impatto ambientale sia grazie alla riduzione del livello di onde elettromagnetiche, sia grazie alle ridotte dimensioni degli apparecchi trasmissivi che visivamente riescono ad integrarsi meglio con l’ambiente rispetto agli obsoleti ripetitori di seconda generazione.

Grazie a tali obiettivi di realizzazione, di nuovi standard d’innovazione e di qualità del servizio e proponendo offerte sempre economicamente vantaggiose per ogni tipo di cliente, “3 Italia” si trova ad occupare il nucleo della catena del valore delle comunicazioni mobili di terza generazione sul nostro territorio.

1.2 I DATI

Per l’analisi che verrà effettuata ci è stato fornito un dataset contenente informazioni giornaliere di vario tipo, riferite a fenomeni come il traffico voce, il numero di chiamate, il numero di attivazioni/disattivazioni, ecc.. per il periodo 01/10/2004 – 31/03/2005.

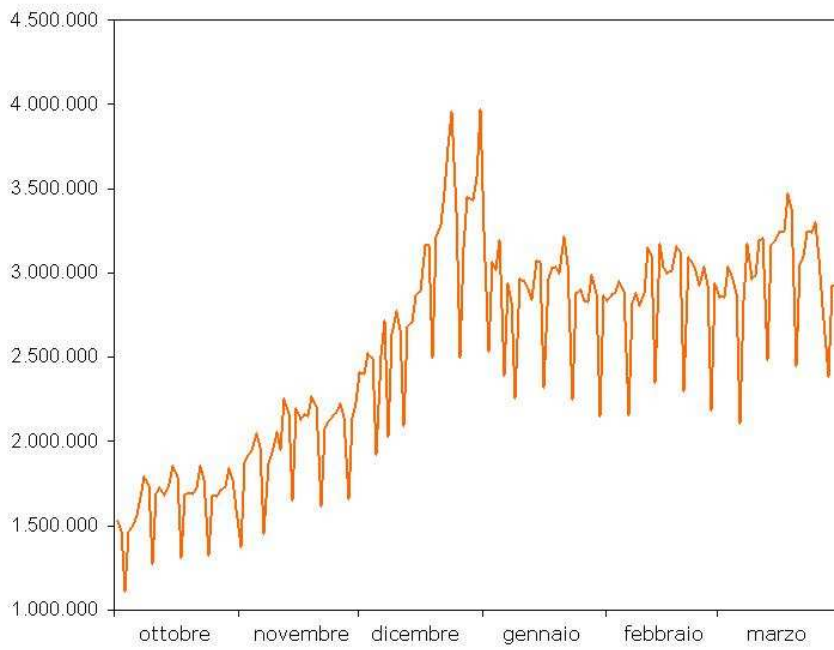
Le serie sono il numero di chiamate ed i minuti di conversazione che ci si aspetta abbiano un andamento simile.

Per stimare i diversi modelli si utilizzano i dati fino al 28/02/2005, mentre l’ultimo mese viene considerato per poter effettuare dei confronti a fini previsivi.

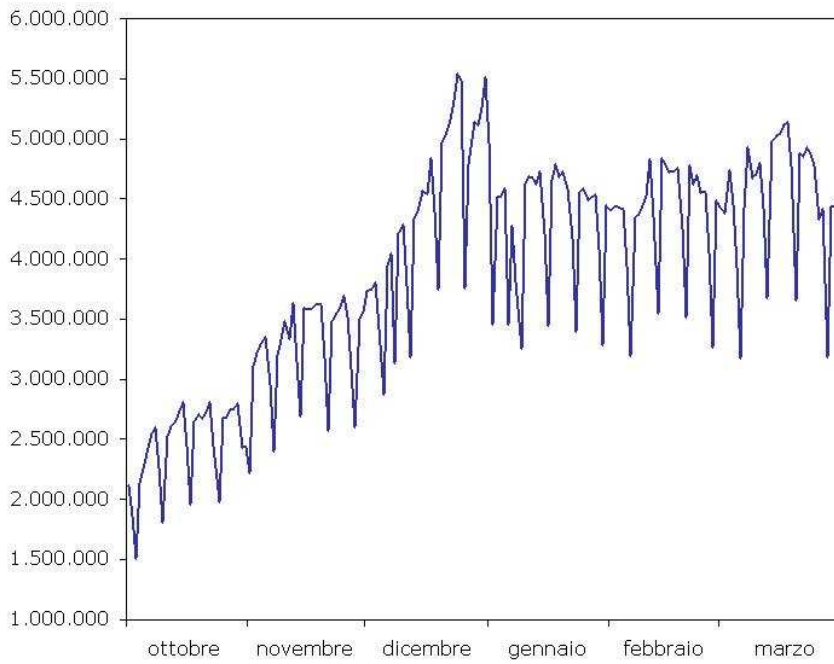
Da una prima analisi dei grafici delle due serie si nota che per entrambe le variabili si manifesta una stagionalità settimanale ed un andamento di fondo caratterizzato

da un trend crescente nella prima metà delle osservazioni, ovvero dall' 01/10/2004 al 31/12/2004, che si stabilizza nella seconda metà del periodo considerato.

Numero chiamate totali



Minuti totali

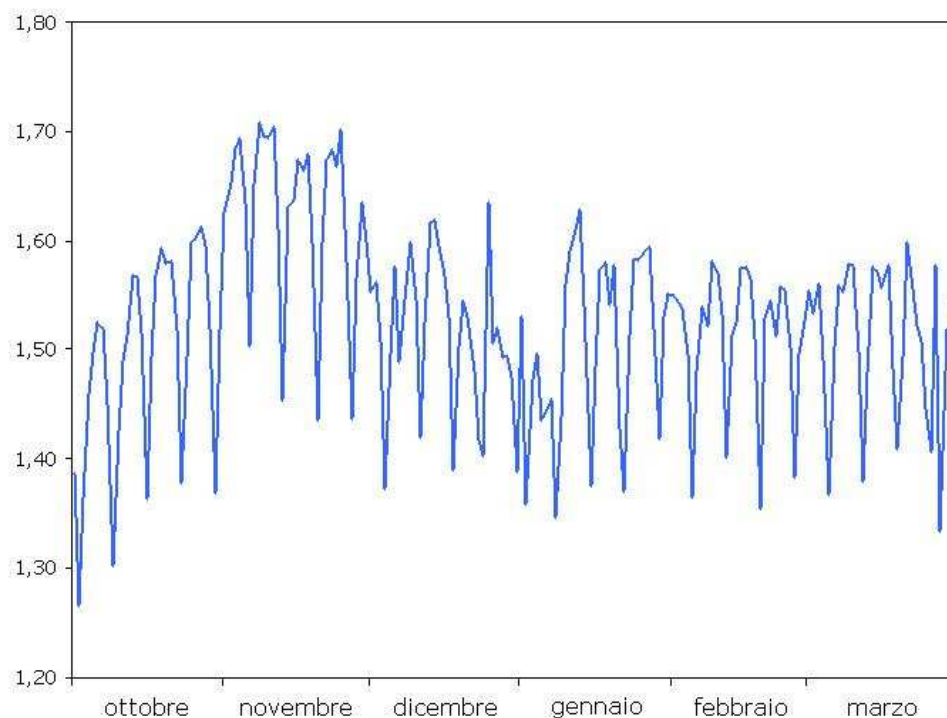


Andiamo ad analizzare da un punto di vista qualitativo la stagionalità delle due serie storiche, si è già detto che entrambe le variabili presentano un andamento molto simile di settimana in settimana, ma la cosa interessante è che sia i minuti di chiamata, che il numero di chiamate cadano a picco proprio alla fine della settimana tra il sabato e la domenica, mettendo in evidenza il fatto che nei giorni lavorativi si telefona di più.

Come già detto in precedenza le due serie presentano un particolare trend che prima cresce in modo lineare e poi diventa costante assumendo mediamente nel secondo trimestre considerato un livello corrispondente a quello raggiunto nella prima parte della serie.

Inoltre, si può osservare che in corrispondenza del 25 e 31 dicembre sia i minuti di conversazione che le chiamate risultano, come ovvio, significativamente superiori rispetto alla media del periodo considerato.

Queste caratteristiche (trend che cambia e valori anomali) potrebbero essere meglio colte da modelli non lineari che, tuttavia, non verranno utilizzati. Piuttosto verrà analizzata la serie derivante dal rapporto tra minuti di chiamate e numero di chiamate, che fornisce la media dei minuti per chiamata in ogni giorno del periodo, in modo da ridurre l'effetto del trend e dei valori anomali. La serie risultante è riportata nel grafico seguente.



Da un primo sguardo al grafico si nota, come ovvio il permanere della stagionalità settimanale, ma per quanto riguarda la componente tendenziale le cose sono migliorate. La presenza di una componente tendenziale è ancora ben visibile ma risulta attenuata rispetto alle due serie originarie (cresce lentamente nelle quattro settimane di ottobre, raggiunge il suo massimo nelle quattro settimane di novembre e si abbassa nuovamente a dicembre stabilizzandosi nella seconda metà del periodo considerato).

Evidenti sono anche i due break strutturali, uno a metà della serie che potrebbe rendere difficile la costruzione di un buon modello (in quanto in questo lavoro non vengono utilizzati metodi di stima in grado di gestire tali cambiamenti di livello) e l'altro in marzo (proprio nell'ultimo periodo considerato per le previsioni) che sicuramente creerà degli inconvenienti nella fase previsiva.

Capitolo 2

ANALISI DELLA SERIE CON I MODELLI SARIMA

2.1 PROCESSI STOCASTICI

Secondo l'approccio classico all'analisi delle serie storiche, il processo generatore dei dati viene scritto come $Y_t = f(t) + \varepsilon_t$ e l'attenzione è posta principalmente sulla parte deterministica $f(t)$, cioè sulle componenti di trend, ciclo e stagionalità, relegando la componente stocastica ε_t ad un ruolo residuale.

Per alcuni tipi di serie reali, come il prodotto interno lordo di un paese, o le quotazioni dei titoli di borsa, tale approccio risulta poco appropriato in quanto potrebbe non essere presente alcuna delle tre componenti sopra citate oppure nel caso lo siano potrebbe non essere possibile modellarli correttamente con metodi basati su funzioni matematiche.

In questi casi è più utile cercare di modellare la componente stocastica ε_t , ipotizzando che il processo che genera i dati sia governato da regole probabilistiche. Secondo tale approccio, detto approccio moderno all'analisi delle serie storiche, ε_t viene considerato come un processo a componenti correlate, per il quale cioè la covarianza tra osservazioni non contemporanee può essere diversa da zero. In tale contesto, l'obiettivo non è più quello di arrivare ad una stima delle componenti di una serie, ma piuttosto quello di individuare un modello probabilistico che descriva l'evoluzione del fenomeno in esame, modello che può essere usato anche a fini previsivi.

2.2 MODELLI SARIMA

I modelli più comunemente usati per l'analisi delle serie storiche sono i modelli SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s, che sono dei modelli misti di componenti a media mobile e di componenti autoregressive, che tengono conto dell'eventuale non stazionarietà e stagionalità di una serie.

Tali modelli cercano di spiegare l'andamento di una serie storica basandosi sulla storia passata, descrivendo il fenomeno attraverso l'adattamento sia della parte stagionale sia della parte non stagionale, perché ciò risulti possibile è necessario che la serie studiata sia caratterizzata da una forte correlazione seriale ai ritardi stagionali (a distanza di una settimana nel caso specifico di questa analisi), oltre che all'usuale autocorrelazione di breve periodo.

La procedura che permette di costruire un modello SARIMA che ben si adatti ai dati a disposizione, è stata proposta da Box e Jenkins (1976).

2.3 PROCEDURA DI BOX E JENKINS

La cosa più importante di questa analisi è quella di modellare la serie storica in esame in modo da poterla sfruttare al fine di prevedere i comportamenti futuri del fenomeno trattato.

A tal scopo utilizziamo la procedura di Box e Jenkins che permette la costruzione di un modello SARIMA che rappresenti adeguatamente il processo generatore dei dati e che si poggia su tre fasi fondamentali che possono essere ripetute più volte in maniera iterativa:

- Identificazione
- Stima del modello
- Controllo diagnostico

2.3.1 IDENTIFICAZIONE

La prima fase quella di identificazione consiste nella specificazione dell'ordine modello con l'individuazione dei parametri p,d,q (ed eventualmente P, D, Q) cercando di riconoscere nelle funzioni di autocorrelazione globale e parziale empiriche delle funzioni di autocorrelazione teoriche.

Nel caso in cui gli autocorrelogrammi empirici mettano in evidenza un andamento per cui, le autocorrelazioni globali sono diverse da zero solo per i primi “q” ritardi (con $q=1,2,\dots$) e le autocorrelazioni parziali tendono ad annullarsi in maniera esponenziale o pseudo periodica, allora ci si trova in presenza di un processo a media mobile di ordine “q”.

Nel caso invece che siano le autocorrelazioni globali a tendere a zero in maniera esponenziale e le autocorrelazioni parziali siano diverse da zero solo per primi “p” ritardi, allora ci si trova in presenza di un processo auto regressivo di ordine “p”.

In linea di massima, non ci si trova mai in situazioni ideali di questo tipo, infatti potrebbe essere che sia le autocorrelazioni globali, che quelle parziali tendano a zero esponenzialmente, oppure che gli andamenti descritti in precedenza vengano disturbati da autocorrelazioni non nulle ai ritardi stagionali. Questi sono gli andamenti che portano ad identificare dei modelli misti, determinati contemporaneamente sia da componenti a media mobile, sia da componenti autoregressive (sia stagionali che non stagionali).

A rendere difficoltosa l’identificazione del modello possono contribuire elementi come la non stazionarietà e la stagionalità. Questi elementi di disturbo possono essere comunque attenuati con applicando delle opportune trasformazioni matematiche.

Una volta che ci si è resi conto del tipo di modello bisogna per l’appunto individuare il numero necessario di parametri, ovvero l’ordine delle componenti del modello senza però incorrere nel problema della sovrapparametrizzazione.

Per ovviare a questo inconveniente sono stati introdotti dei criteri che assegnano un “costo” all’introduzione di ogni nuovo parametro addizionale come quelli di AKAIKE (Asymptotic Information Criterion) e di SCHWARZ (che conduce all’individuazione di un modello più parsimonioso in termini di numero di parametri da stimare, questo perché il termine di penalità che il criterio impone all’introduzione di un nuovo parametro si annulla meno velocemente all’aumentare di “n” rispetto a quello imposto dal criterio AIC). Viene scelto come numero di parametri quello che minimizza i due indici.

2.3.2 STIMA DEI MODELLI

Una volta individuato l'ordine dei parametri (e di conseguenza il possibile processo generatore dei dati) si passa alla fase di stima degli stessi, generalmente con metodi basati sulla massimizzazione della verosimiglianza.

2.3.3 CONTROLLO DIAGNOSTICO

Questo è il passo finale, in questa fase del lavoro si valuta l'adeguatezza del modello stimato mediante opportune analisi, dei residui ($e_t = y_t - \hat{y}_t$).

I residui di una serie storica possono essere trattati al pari di una qualsiasi altra serie storica, sulla quale quindi è possibile calcolare le funzioni di autocorrelazione empiriche. L'analisi consiste nel verificare se la funzione di autocorrelazione stimata è significativamente diversa da quella di un processo *white noise*.

Se tutti i valori dell'autocorrelazione globale empirica stanno all'interno dell'intervallo $[-1,96/\sqrt{n}; 1,96/\sqrt{n}]$, allora significa che, al livello di fiducia del 5%, non esiste correlazione tra i residui e si può assumere il modello stimato come un buon modello.

Altro metodo è il test di Ljung-Box, che si basa sulle seguenti due ipotesi:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_h = 0 \\ H_1 : \rho_i \neq 0 \text{ per almeno un } i \in (1, \dots, h) \end{array} \right\} \begin{cases} \text{residui incorrelati} \\ \text{residui correlati} \end{cases}$$

la statistica test di Ljung-Box, $Q(h)$, è definita come:

$$Q(h) = n(n+2) \sum_{k=1}^h \frac{1}{n-k} \hat{\rho}_k^2,$$

e nell'ipotesi che le autocorrelazioni dei residui siano *white noise* si ha che $Q(h)$ si approssima come un χ_{h-p-q}^2 .

Altre analisi sui residui possono essere quelle sulla verifica della normalità dei residui ed il test di casualità (si osserva il diagramma di dispersione per verificare se gli stessi sono disposti a caso nel piano oppure se seguono un andamento sistematico).

2.4 MODELLI INDIVIDUATI

L'applicazione della procedura di Box-Jenkins ha portato all'identificazione di due possibili modelli per la serie considerata:

- **SARIMA(1,0,0)(1,0,2)₇** che modella direttamente la serie di partenza “rapporto” senza effettuare nessun tipo di trasformazione;
- **SARIMA(1,0,0)(0,1,2)₇** che invece modella la differenza stagionale di ordine 7 della serie “rapporto”.

2.4.1 SARIMA(1,0,0)(1,0,2)₇

I correlogrammi della serie “rapporto” che deve essere modellata sono rappresentati nel grafico seguente.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.549	0.549	46.470	0.000
		2	0.177	-0.179	51.322	0.000
		3	0.081	0.096	52.345	0.000
		4	0.054	-0.014	52.809	0.000
		5	0.113	0.128	54.826	0.000
		6	0.416	0.442	82.463	0.000
		7	0.697	0.468	160.43	0.000
		8	0.335	-0.426	178.58	0.000
		9	0.019	-0.101	178.64	0.000
		10	-0.044	-0.019	178.96	0.000
		11	-0.050	0.009	179.38	0.000
		12	0.020	0.003	179.44	0.000
		13	0.316	0.096	196.16	0.000
		14	0.530	0.071	243.46	0.000
		15	0.286	0.137	257.36	0.000
		16	0.003	-0.079	257.36	0.000
		17	-0.078	-0.075	258.41	0.000
		18	-0.107	-0.084	260.39	0.000
		19	-0.029	0.022	260.54	0.000
		20	0.195	-0.135	267.27	0.000
		21	0.384	0.096	293.40	0.000
		22	0.159	-0.175	297.95	0.000
		23	-0.136	-0.096	301.29	0.000
		24	-0.223	-0.035	310.31	0.000
		25	-0.247	-0.041	321.47	0.000
		26	-0.155	-0.042	325.88	0.000
		27	0.071	0.074	326.81	0.000
		28	0.269	0.018	340.38	0.000
		29	0.080	-0.001	341.59	0.000
		30	-0.187	-0.029	348.29	0.000
		31	-0.264	-0.022	361.67	0.000
		32	-0.261	-0.011	374.91	0.000
		33	-0.207	-0.109	383.29	0.000

L'analisi delle funzioni di autocorrelazione ai primi ritardi fa intuire la presenza di una componente autoregressiva, di ordine uno.

Dai correlogrammi risulta evidente, la presenza della componente stagionale, che probabilmente dipende sia da componente auto regressiva che da componente a media mobile.

A questo punto proviamo a stimare il modello SARIMA(1,0,0)(1,0,0)₇:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \Phi_1 y_{t-7} + \varepsilon_t \quad \text{dove } y_t \text{ è la variabile "rapporto".}$$

I risultati della stima sono i seguenti:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.542597	0.033453	46.11199	0.0000
AR(1)	0.524311	0.072063	7.275755	0.0000
SAR(7)	0.731753	0.056163	13.02910	0.0000
Akaike info criterion				-3.095075
Schwarz criterion				-3.032918

Tutte e tre le componenti risultano statisticamente significative, quindi importanti per descrivere il processo generatore.

Le funzioni di autocorrelazione empiriche sono rappresentate graficamente nella pagina che segue.

	Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.042	-0.042	0.2625			
2	0.031	0.029	0.4042			
3	0.101	0.104	1.9245	0.165		
4	0.000	0.008	1.9245	0.382		
5	0.008	0.002	1.9335	0.586		
6	0.074	0.065	2.7727	0.597		
7	-0.058	-0.054	3.2913	0.655		
8	-0.152	-0.166	6.8370	0.336		
9	-0.148	-0.181	10.221	0.176		
10	-0.043	-0.046	10.511	0.231		
11	0.040	0.083	10.762	0.292		
12	-0.117	-0.078	12.937	0.227		
13	0.181	0.207	18.184	0.077		
14	-0.089	-0.046	19.454	0.078		
15	0.156	0.192	23.394	0.037		
16	0.157	0.115	27.396	0.017		
17	0.107	0.079	29.283	0.015		
18	-0.007	-0.073	29.291	0.022		
19	0.112	0.037	31.401	0.018		
20	-0.043	-0.073	31.710	0.024		
21	0.020	-0.002	31.779	0.033		
22	0.013	0.000	31.809	0.045		
23	-0.100	-0.045	33.554	0.040		
24	-0.058	-0.002	34.132	0.048		
25	-0.177	-0.078	39.658	0.017		
26	0.006	-0.008	39.664	0.023		
27	-0.136	-0.085	42.983	0.014		
28	0.089	0.090	44.401	0.014		
29	0.078	0.125	45.513	0.014		
30	0.011	0.016	45.534	0.019		
31	0.010	0.010	45.552	0.026		
32	0.078	-0.075	46.694	0.027		
33	0.006	-0.031	46.701	0.035		
34	0.093	-0.024	48.338	0.032		
35	0.080	0.018	49.575	0.032		
36	-0.031	-0.013	49.762	0.040		

È possibile osservare, che in corrispondenza di diversi ritardi, sia le autocorrelazioni globali che quelle parziali escono dalle bande di confidenza, questo è un indicatore di presenza di correlazione tra i residui, evidenza che viene confermata dal test di Ljung-Box i cui *p-value* sono riportati nell'ultima colonna a destra. Osserviamo, infatti, che a partire dal ritardo 14 non possiamo più accettare l'ipotesi nulla di assenza di correlazione tra i residui.

Proviamo ad aggiungere al modello una o due componenti stagionali a media mobile.

Stimiamo quindi il modello SARIMA(1,0,0)(1,0,1)₇:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \Phi_1 y_{t-7} + \Theta_y y_{t-7} + \varepsilon_t.$$

I risultati sono i seguenti:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.546355	0.039204	39.44352	0.0000
AR(1)	0.523597	0.073137	7.159108	0.0000
SAR(7)	0.816191	0.062220	13.11782	0.0000
MA(7)	-0.208915	0.110544	-1.889876	0.0609
		Akaike info criterion		-3.093232
		Schwarz criterion		-3.010355

La componente a media mobile stagionale appena aggiunta non risulta statisticamente significativa al livello del 5%, ma significativa al 10%. Anche i criteri di Akaike e Schwarz risultano, seppur di pochissimo, maggiori a quelli del modello precedente, indicando che il modello precedente è migliore di questo.

Osserviamo le funzioni di autocorrelazione empiriche dei residui:

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1		-0.058	-0.058	0.4970	
2		0.033	0.029	0.6536	
3		0.118	0.122	2.7085	
4		0.038	0.052	2.9211	0.087
5		0.015	0.013	2.9544	0.228
6		0.098	0.084	4.4154	0.220
7		0.038	0.039	4.6323	0.327
8		-0.149	-0.160	8.0579	0.153
9		-0.102	-0.157	9.6825	0.139
10		0.000	-0.028	9.6825	0.207
11		0.052	0.097	10.101	0.258
12		-0.083	-0.038	11.185	0.263
13		0.192	0.209	17.080	0.073
14		-0.143	-0.095	20.345	0.041
15		0.138	0.175	23.429	0.024
16		0.150	0.128	27.092	0.012
17		0.109	0.096	29.056	0.010
18		-0.021	-0.088	29.131	0.015
19		0.126	0.069	31.804	0.011
20		-0.043	-0.097	32.114	0.015
21		-0.036	-0.040	32.331	0.020
22		0.050	-0.033	32.762	0.026
23		-0.061	-0.057	33.411	0.030
24		-0.039	0.002	33.678	0.039
25		-0.169	-0.075	36.702	0.015
26		0.044	0.008	39.052	0.020
27		-0.146	-0.060	42.857	0.010
28		0.064	0.055	43.597	0.012
29		0.077	0.112	44.677	0.013
30		0.013	0.032	44.708	0.017
31		-0.009	0.020	44.722	0.024
32		0.066	-0.068	45.535	0.026
33		0.003	-0.028	45.537	0.034
34		0.064	-0.010	46.323	0.038
35		0.055	-0.024	46.903	0.043
36		-0.037	-0.037	47.174	0.052

Le funzioni di autocorrelazione non sono migliorate rispetto al modello precedente, infatti, per alcuni ritardi le autocorrelazioni escono dalle bande di confidenza. Per quanto riguarda il test di Ljung-Box si hanno i p-value che rifiutano l'ipotesi di in correlazione dei residui già dal tredicesimo ritardo, il che ci porta a provare ad introdurre una nuova componente stagionale di ordine $2S=14$ per vedere se troviamo un modello migliore.

Stimiamo dunque il modello SARIMA(1,0,0)(1,0,2)₇ cioè:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \Phi_1 y_{t-7} + \Theta_1 \varepsilon_{t-7} + \Theta_2 \varepsilon_{t-14} + \varepsilon_t$$

che fornisce l'output che segue:

Dependent Variable: RAPPORTO				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.439840	0.058511	24.60787	0.0000
AR(1)	0.592220	0.068581	8.635334	0.0000
SAR(7)	0.950605	0.017611	53.97934	0.0000
MA(7)	-0.513932	0.077362	-6.643197	0.0000
MA(14)	-0.435299	0.076571	-5.684906	0.0000
R-squared	0.739100	Mean dependent var		1.535059
Adjusted R-squared	0.731537	S.D. dependent var		0.088406

S.E. of regression	0.045806	Akaike info criterion	-3.294452
Sum squared resid	0.289554	Schwarz criterion	-3.190856
Log likelihood	240.5533	F-statistic	97.73445
Durbin-Watson stat	2.192254	Prob(F-statistic)	0.000000

Tutte le componenti risultano statisticamente significative anche quella stagionale a media mobile di ordine 7 che nella stima precedente non risultava tale. Osserviamo però che la stima del coefficiente della parte autoregressiva è prossimo ad 1. Un valore così elevato ci fa pensare alla presenza di una radice unitaria stagionale, ossia alla presenza di una non stazionarietà dovuta alla componente stagionale. Per questo motivo anche se l'analisi risulta come vedremo, soddisfacente, prenderemo in considerazione anche un modello non stazionario.

Le funzioni di autocorrelazione empiriche dei residui dell'ultimo modello stimato sono migliori di quelle relative ai modelli precedenti.

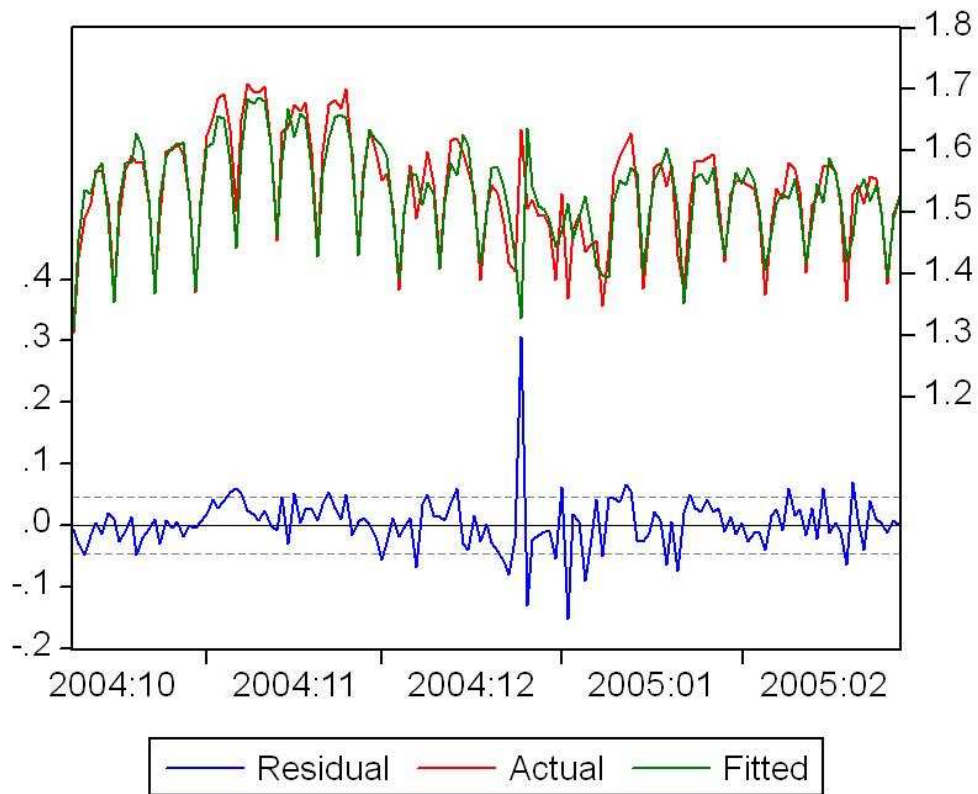
Anche i *p-value* del test di Ljung-Box sono migliorati anche se, non sono comunque eccezionali, ma probabilmente data la notevole complessità dell'andamento della serie e la probabile presenza di componenti non lineari, un modello lineare migliore non si riesce proprio ad ottenere.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.101	-0.101	1.4958	
		2	0.036	0.026	1.6826	
		3	0.130	0.138	4.1821	
		4	-0.006	0.021	4.1872	
		5	0.027	0.019	4.2945	0.038
		6	0.001	-0.013	4.2947	0.117
		7	0.013	0.008	4.3210	0.229
		8	-0.175	-0.184	9.0395	0.060
		9	-0.097	-0.143	10.507	0.062
		10	-0.001	-0.019	10.507	0.105
		11	0.029	0.092	10.639	0.155
		12	-0.065	-0.013	11.298	0.185
		13	0.098	0.111	12.840	0.170
		14	0.039	0.069	13.086	0.219
		15	0.092	0.124	14.444	0.209
		16	0.155	0.127	18.381	0.105
		17	0.099	0.080	19.983	0.096
		18	-0.051	-0.108	20.419	0.117
		19	0.126	0.074	23.083	0.082
		20	-0.076	-0.113	24.049	0.088
		21	-0.082	-0.110	25.189	0.091
		22	-0.036	-0.085	25.416	0.114
		23	-0.092	-0.032	26.876	0.108
		24	-0.070	-0.009	27.741	0.116
		25	-0.192	-0.116	34.201	0.034
		26	0.015	-0.012	34.239	0.046
		27	-0.144	-0.109	37.933	0.026
		28	-0.027	-0.034	38.069	0.034
		29	0.091	0.045	39.587	0.032
		30	0.047	0.037	39.990	0.039
		31	0.006	0.001	39.996	0.051
		32	0.037	-0.032	40.248	0.063
		33	0.019	-0.064	40.315	0.079
		34	0.071	0.050	41.262	0.083
		35	-0.058	-0.093	41.909	0.091
		36	-0.038	-0.064	42.195	0.107

Correlogramma dei residui del modello SARIMA(1,0,0)(1,0,2)₇

I valori dei criteri di Akaike e Schwarz sono diminuiti rispetto ai modelli precedenti, il che ci porta a preferire tale modello a quelli stimati prima. Altri modelli (stazionari) provati non hanno fornito migliori risultati.

Il grafico seguente presenta la serie considerata assieme a quella stimata, nonché il grafico della serie dei residui che evidenzia un valore anomalo in corrispondenza del 25 dicembre.



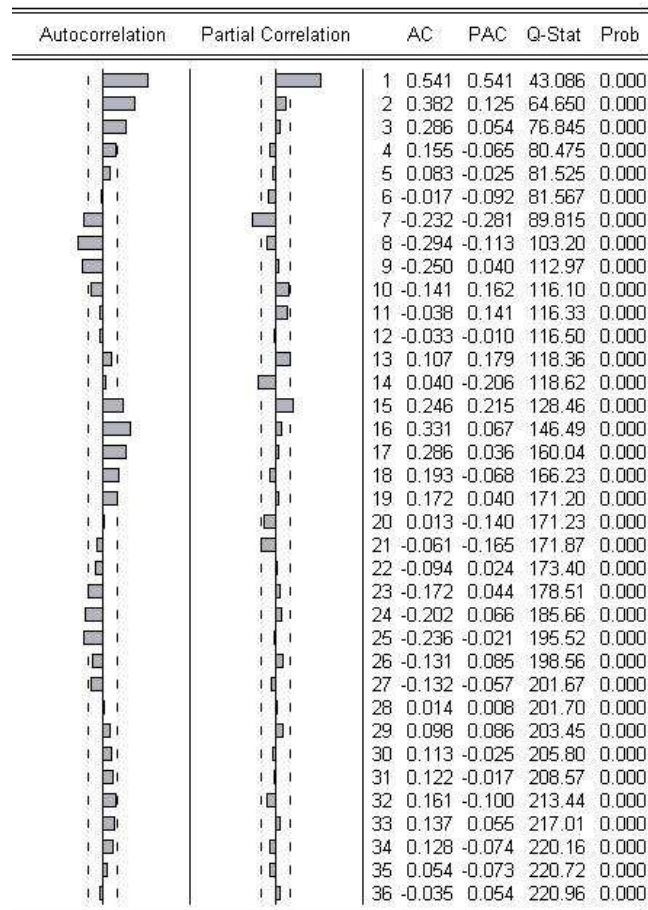
Valori stimati dal modello SARIMA(1,0,0)(1,0,2)₇

Probabilmente applicando una qualche trasformazione alla serie iniziale si potrebbero ottenere dei risultati migliori ma non è detto. Inoltre dato che l'obiettivo dell'analisi è quello di ottenere delle previsioni si deve tener presente che non è detto che un modello migliore in fase descrittiva lo sia anche in fase previsiva.

2.4.2 SARIMA(1,0,0)(0,1,2)₇

Dal momento che abbiamo evidenziato un'auto-regressiva stagionale molto prossima all'unità, consideriamo un modello che tenga conto di ciò. Abbiamo quindi differenziato stagionalmente la serie.

Gli auto-correlogrammi della serie differenziata stagionalmente si presentano in questo modo



Risulta evidente la componente auto regressiva di ordine uno, inoltre tutte le autocorrelazioni parziali sono pari a zero tranne ai ritardi stagionali (7, 14, 21, ecc.)

e questo fa ipotizzare che il processo generatore di questa nuova serie comprenda anche una componente stagionale.

Stimiamo quindi il modello SARIMA(1,0,0)(0,1,1)₇, cioè posto $z_t = (1 - B^7)y_t$ si

ottiene $z_t = c + \phi_1 z_{t-1} + \Theta_1 \varepsilon_{t-7} + \varepsilon_t$.

I risultati sono i seguenti:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.573772	0.069514	8.254026	0.0000
MA(7)	-0.484276	0.074115	-6.534152	0.0000
Akaike info criterion				-3.044757
Schwarz criterion				-3.003319

Entrambe le componenti risultano significative, analizziamo i residui del modello.

I correlogrammi dei residui, come si può vedere nella pagina che segue non sono un gran che, sono evidenti diverse autocorrelazioni che escono dalle bande di confidenza in corrispondenza dei ritardi stagionali ed inoltre il test di Ljung-Box rifiuta quasi sempre l'ipotesi di residui incorrelati.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 -0.108	-0.108	1.6981	
		2 0.031	0.020	1.8408	
		3 0.144	0.151	4.9149	0.027
		4 0.073	0.107	5.7027	0.058
		5 0.035	0.048	5.8874	0.117
		6 0.113	0.099	7.8130	0.099
		7 0.149	0.155	11.220	0.047
		8 -0.145	-0.140	14.445	0.025
		9 -0.038	-0.134	14.673	0.040
		10 0.066	-0.014	15.344	0.053
		11 0.069	0.097	16.097	0.065
		12 -0.025	0.017	16.196	0.094
		13 0.201	0.204	22.611	0.020
		14 -0.176	-0.147	27.582	0.006
		15 0.114	0.122	29.679	0.005
		16 0.149	0.134	33.313	0.003
		17 0.112	0.125	35.392	0.002
		18 -0.049	-0.108	35.786	0.003
		19 0.168	0.124	40.521	0.001
		20 -0.040	-0.110	40.792	0.002
		21 -0.127	-0.114	43.513	0.001
		22 0.080	-0.107	44.607	0.001
		23 -0.017	-0.077	44.655	0.002
		24 -0.026	-0.003	44.769	0.003
		25 -0.166	-0.069	49.592	0.001
		26 0.106	0.036	51.581	0.001
		27 -0.151	-0.022	55.635	0.000
		28 -0.024	-0.036	55.739	0.001
		29 0.071	0.051	56.656	0.001
		30 0.018	0.051	56.717	0.001
		31 -0.046	0.033	57.102	0.001
		32 0.039	-0.046	57.385	0.002
		33 0.009	0.001	57.400	0.003
		34 0.030	0.031	57.573	0.004
		35 -0.033	-0.122	57.783	0.005
		36 -0.056	-0.117	58.384	0.006

A questo punto si può provare a vedere se aggiungendo un'altra componente di qualche tipo le cose migliorano. Qualsiasi componente si tenti di introdurre nel modello appena stimato risulta statisticamente non significativa, o comunque non determina miglioramenti a livello di correlazione, tranne una componente stagionale a media mobile di ordine 2S (14), che ha portato a stimare il modello SARIMA(1,0,0)(0,1,2), ossia:

$$\text{posto } z_t = (1 - B^7)y_t \text{ si ottiene } z_t = c + \phi_1 z_{t-1} + \Theta_1 \varepsilon_{t-7} + \Theta_2 \varepsilon_{t-14} + \varepsilon_t$$

Di seguito i risultati della stima:

Dependent Variable: **D(RAPPORTO,0,7)**

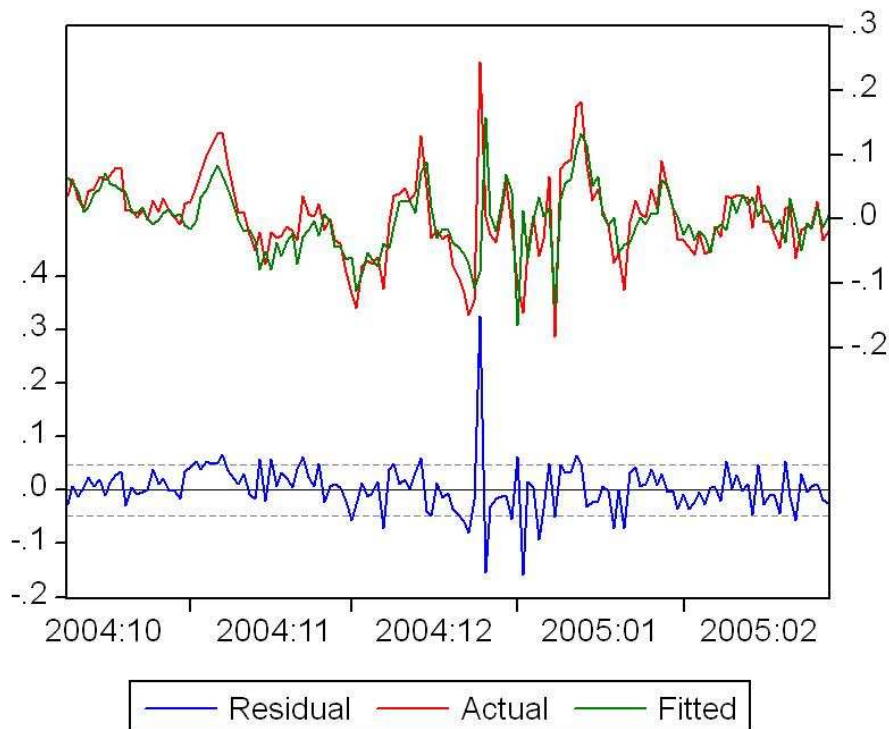
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.635912	0.066417	9.574554	0.0000
MA(7)	-0.500373	0.077583	-6.449553	0.0000
MA(14)	-0.444039	0.077122	-5.757583	0.0000
R-squared	0.474217	Mean dependent var		0.003173
Adjusted R-squared	0.466706	S.D. dependent var		0.064980
S.E. of regression	0.047453	Akaike info criterion		-3.237391
Sum squared resid	0.315253	Schwarz criterion		-3.175233

I coefficienti stimati risultano tutti significativi e i criteri di Akaike e Schwarz sono inferiori a quelli del modello precedente, indicando pertanto una preferenza di quest'ultimo modello.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
█	█	1 -0.115	-0.115	1.9311	
█	█	2 0.039	0.026	2.1579	
█	█	3 0.134	0.143	4.8050	
█	█	4 0.009	0.040	4.8166	0.028
█	█	5 0.060	0.057	5.3637	0.068
█	█	6 0.033	0.027	5.5311	0.137
█	█	7 0.035	0.031	5.7137	0.222
█	█	8 -0.146	-0.164	9.0060	0.109
█	█	9 -0.073	-0.134	9.8369	0.132
█	█	10 0.014	-0.016	9.8670	0.196
█	█	11 0.069	0.125	10.617	0.224
█	█	12 -0.039	0.024	10.857	0.286
█	█	13 0.121	0.150	13.186	0.213
█	█	14 0.075	0.125	14.085	0.228
█	█	15 0.105	0.155	15.866	0.197
█	█	16 0.164	0.141	20.237	0.089
█	█	17 0.108	0.085	22.172	0.075
█	█	18 -0.019	-0.091	22.229	0.102
█	█	19 0.169	0.105	26.986	0.042
█	█	20 -0.040	-0.075	27.262	0.054
█	█	21 -0.032	-0.074	27.437	0.071
█	█	22 -0.008	-0.068	27.449	0.095
█	█	23 -0.064	-0.020	28.160	0.106
█	█	24 -0.042	-0.013	28.472	0.127
█	█	25 -0.130	-0.086	31.420	0.088
█	█	26 0.065	0.032	32.164	0.097
█	█	27 -0.113	-0.078	34.447	0.077
█	█	28 0.011	-0.011	34.471	0.098
█	█	29 0.092	0.038	36.019	0.091
█	█	30 0.042	0.003	36.338	0.108
█	█	31 -0.004	-0.047	36.341	0.134
█	█	32 0.068	-0.027	37.212	0.141
█	█	33 0.043	-0.036	37.556	0.161
█	█	34 0.083	0.078	38.862	0.157
█	█	35 -0.032	-0.060	39.052	0.182
█	█	36 -0.040	-0.063	39.367	0.206

Anche il test di Ljung-Box porta ad accettare l'ipotesi di incorrelazione tra i residui.

Tutto ciò implica che il modello stimato può essere considerato un buon modello per rappresentare il processo generatore dei dati



Valori stimati dal modello SARIMA(1,0,0)(1,0,2)₇

A questo punto è necessario verificare quale tra i due modelli è migliore in fase di previsione. Per effettuare tale confronto, stimiamo i due modelli solo fino al 28/02/2005, quindi calcoliamo le previsioni (dinamiche) dell'ultimo mese. A questo punto possiamo calcolare, per ogni modello considerato, gli errori di previsione, e quindi degli indici basati su tali errori.

Gli indici che prendiamo in considerazione, sono l'errore quadratico medio di

precisione $EQM = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2}$ e l'errore medio assoluto di precisione

$$EMA = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t| .$$

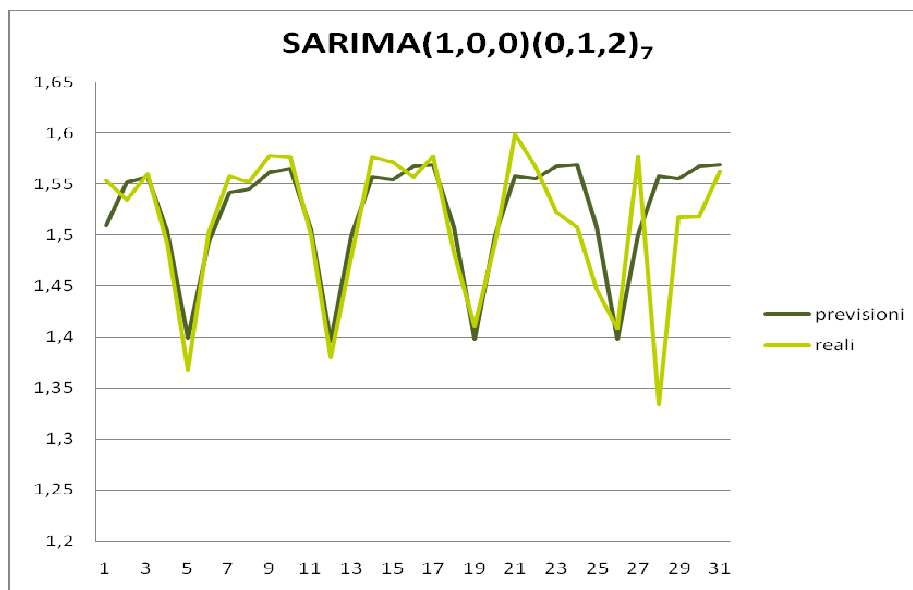
Si sceglierà il modello per cui tali indici sono inferiori.

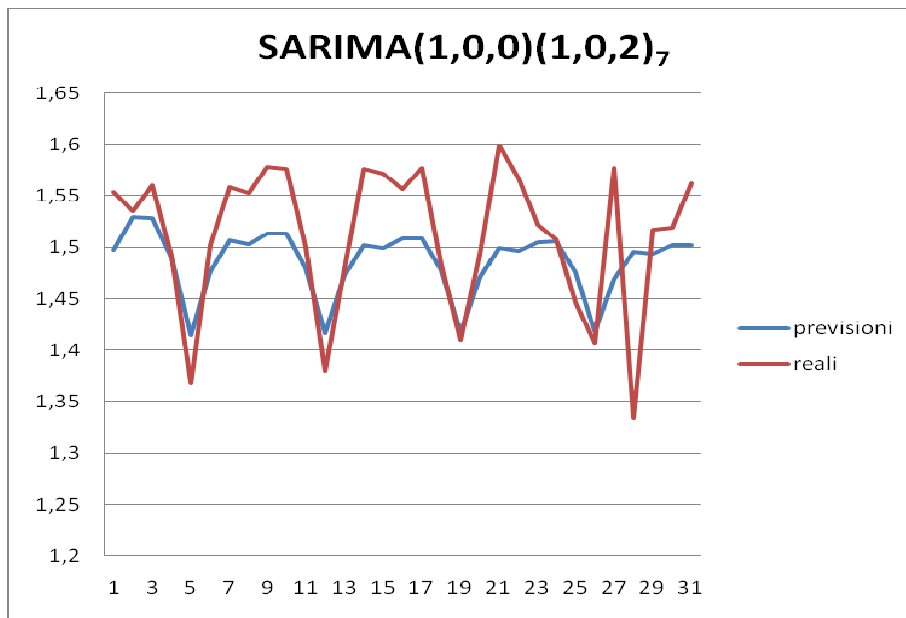
2.5 PREVISIONI CON MODELLI SARIMA

In questo paragrafo verificheremo quale tra i due modelli individuati e stimati sia in grado di prevedere meglio l'andamento futuro del fenomeno oggetto di studio.

Osservando i grafici che confrontano le previsioni dei due modelli con i valori reali della serie storica risulta evidente in particolare come per entrambi i modelli, nell'ultima settimana del mese di marzo le previsioni siano molto lontane dai valori realmente verificati. Questo inconveniente indica il fatto che probabilmente effettuare il rapporto tra la serie dei minuti e la serie del numero di chiamate non è stato sufficiente ad attenuare quei fattori (trend che cambia e valori anomali) che vengono colti con difficoltà dai modelli lineari, e di ciò se ne risente sia in fase di stima, sia in fase di previsione.

Nella pagina che segue sono riportati i grafici delle previsioni ed i valori degli indici di precisione.





Già dal primo sguardo ai grafici si intuisce che il modello SARIMA stimato sulla serie differenziata stagionalmente è in grado di prevedere dove possibile, in maniera più accurata il comportamento del fenomeno nel mese di marzo/05.

La conferma ci viene comunque data dai valori dell'errore quadratico medio e dell'errore medio assoluto, infatti i due indici di bontà vengono minimizzati dal modello **SARIMA(1,0,0)(0,1,2)₇** che quindi fornisce previsioni più attendibili rispetto al SARIMA(1,0,0)(1,0,2)₇.

	SARIMA(1,0,0)(0,1,2)₇	SARIMA(1,0,0)(1,0,2) ₇
$EQM = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2}$	0,0502	0,056243
$EMA = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t $	0,030183	0,043472

ANALISI DELLE SERIE COL METODO DI HOLT-WINTERS

3.1 LISCIAMENTO ESPONENZIALE

Il metodo del lisciamiento esponenziale è una tecnica utilizzata per smussare una serie storica al fine di evidenziare i movimenti di lungo periodo della serie stessa. Questo metodo nella sua forma più semplice consente di effettuare previsioni di breve periodo (un passo in avanti) anche su dati che non presentano un trend evidente.

Utilizzando tale metodo ogni valore lisciato dipende da tutti i valori osservati precedentemente (e non soltanto da quelli più recenti). Grazie a questa particolarità il metodo del lisciamiento esponenziale è ampiamente usato all'interno delle aziende a scopo previsivo.

Esistono diversi tipi di lisciamiento esponenziale, verranno trattati solamente quelli che considerano la componente stagionale date le caratteristiche dei dati su cui si sta lavorando.

3.1.1 METODO HOLT-WINTERS STAGIONALE ADDITIVO

Questo metodo è basato sull'ipotesi che in prossimità di n la previsione con orizzonte temporale k può essere fornita dalla retta:

$F_{n,k} = \bar{y}_n + T_n(n+k-n) + S_n \equiv \bar{y}_n + T_n k + S_n$ dove S_n è il fattore stagionale di periodo s .

Le stime necessarie per il calcolo della previsione si calcolano di volta in volta tramite le seguenti formule:

$$\bar{y}_n = \alpha(\hat{y}_{n-1} + \hat{T}_{n-1}) + (1-\alpha)(y_n - \hat{S}_{n-s}) \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\hat{T}_n = \hat{T}_{n-1} + (1-\beta)(\hat{y}_n - \hat{y}_{n-1}) \quad 0 < \beta < 1$$

$$\hat{S}_n = \gamma \hat{S}_{n-s} + (1-\gamma)(y_n - \hat{y}_n) \quad 0 < \gamma < 1$$

Le tre costanti di lisciamento generalmente si scelgono sulla base dell'errore quadratico medio calcolato sulla distanza tra la serie lisciata e la serie di partenza.

Per questa analisi si è partiti dalle costanti di lisciamento ottimali determinati dal programma R che tra le sue varie funzioni è anche in grado di effettuare il lisciamento esponenziale di una serie storica in modo automatico, e dopo vari tentativi si è riusciti a determinare la terna di costanti che rende minimo l'errore quadratico medio.

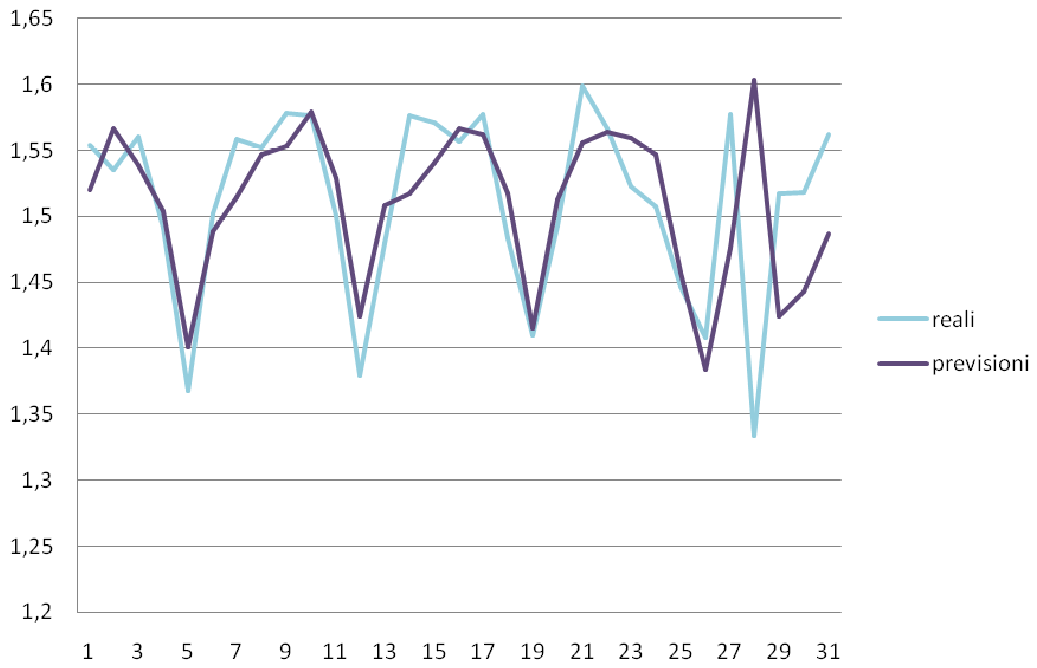
Alla terna $\alpha=0.5$, $\beta=0.7$, $\gamma=0.17$ corrispondono i seguenti valori degli indici

$$EQM = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2} = 0,052337 \quad EMA = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t| = 0,035265$$

le previsioni corrispondenti sono graficamente rappresentate di seguito.

Dal grafico si intuisce che nemmeno con questo metodo si è riusciti a sopperire all'inconveniente dovuto al *break* strutturale della serie nell'ultimo periodo di previsione, però per il resto i valori previsti rispecchiano graficamente abbastanza bene i valori reali. Dalla distanza tra valori previsti ed osservazioni si sono ottenuti i seguenti valori dell' $EQM=0,063276$ e dell' $EMA= 0,041363$.

Holt-Winters stagionale additivo



3.1.2 METODO HOLT-WINTERS STAGIONALE MOLTIPLICATIVO

Questo metodo è basato sull'ipotesi che in prossimità di n la previsione con orizzonte temporale k può essere fornita dalla retta:

$F_{n,k} = [\bar{y}_n + T_n(n+k-n)]S_n \equiv [\bar{y}_n + T_n k]S_n$ dove S_n è il fattore stagionale di periodo s .

Le stime necessarie per il calcolo della previsione si calcolano di volta in volta tramite le seguenti formule:

$$\text{Livello:} \quad \bar{y}_n = \alpha(\hat{y}_{n-1} + \hat{T}_{n-1}) + (1-\alpha)\frac{y_n}{\hat{S}_{n-s}} \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\text{Trend:} \quad \hat{T}_n = \beta\hat{T}_{n-1} + (1-\beta)(\hat{y}_n - \hat{y}_{n-1}) \quad 0 < \beta < 1$$

$$\text{Stagionalità:} \quad \hat{S}_n = \gamma\hat{S}_{n-s} + (1-\gamma)\frac{y_n}{\hat{y}_n} \quad 0 < \gamma < 1$$

I valori delle tre costanti di lisciamiento vengono determinati con lo stesso procedimento spiegato per il metodo additivo.

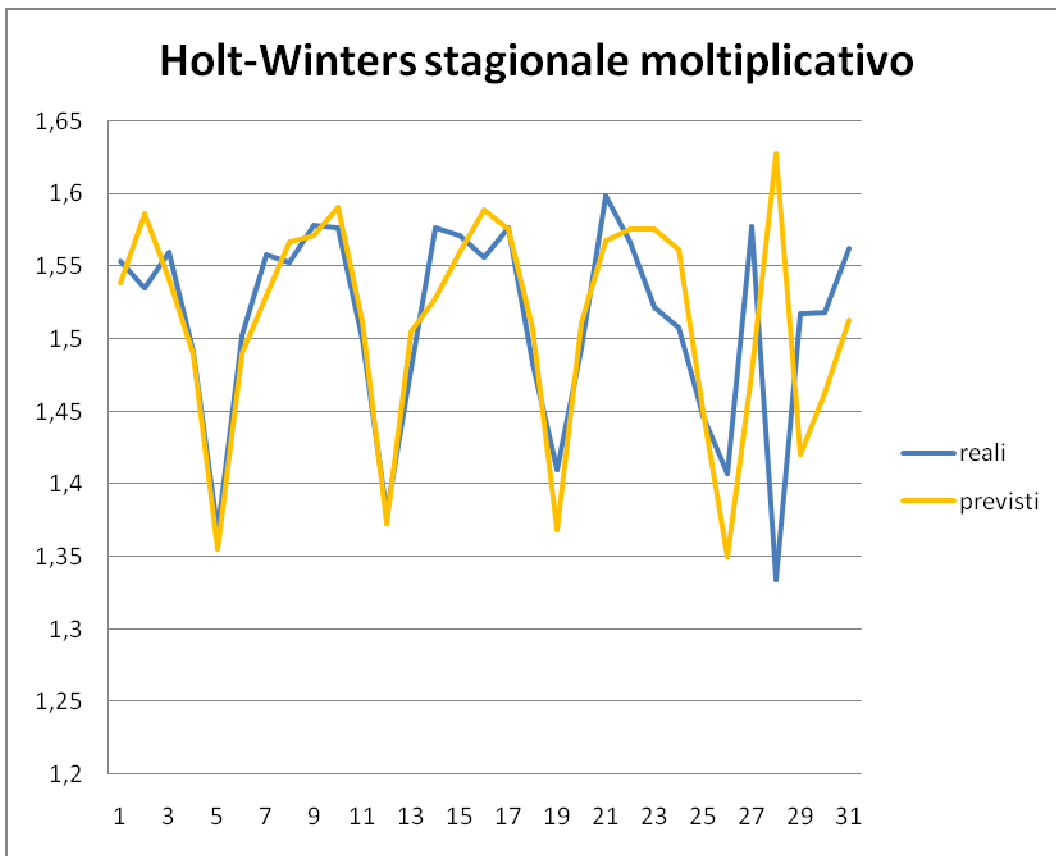
I valori degli indici:

$$EQM = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2} = 0,05094 \quad EMA = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t| = 0,033821$$

corrispondono alla terna di costanti $\alpha=0.67$, $\beta=0.96$, $\gamma=0.43$.

Le previsioni vengono presentate graficamente di seguito, si nota che il grafico dei valori previsti segue piuttosto bene quello dei valori della serie nel mese di marzo, l'unica discrepanza la si ha come per tutti gli altri metodi nell'ultima settimana, dove la serie cambia il suo andamento.

Per quanto riguarda gli indici di bontà riferiti alle previsioni si è ottenuto $EQM=0,057488$ ed $EMA=0,03377$.



Tra i due metodi Holt-Winters quello che tra i due fornisce previsioni migliori è quello **stagionale moltiplicativo** da che sia l'errore quadratico medio, sia l'errore medio assoluto sono minori rispetto a quelli forniti dal metodo additivo.

CONCLUSIONI

Dopo aver modellato i dati con due diversi metodi (Box-Jenkins e liscio esponenziale), lavorando sia sulla serie “rapporto = minuti/chiamate”, che sulla serie ottenuta effettuando una differenziazione stagionale di ordine sette (in quanto la cadenza della serie è settimanale) sulla stessa, abbiamo effettuato le previsioni.

A questo punto abbiamo calcolato gli indici di bontà di previsione (Errore Quadratico Medio ed Errore Medio Assoluto) per le previsioni ottenute dai due modelli SARIMA stimati e per quelle ottenute tramite i due metodi di liscio esponenziale (additivo e moltiplicativo). Tali indici sono utili a livello comparativo, nel senso che permettono di stabilire quale procedura di stima porti a previsioni più attendibili rispetto ad altre. I risultati ottenuti sono riassunti nella seguente tabella:

TABELLA INDICI PREVISIVI

	EQM	EMA
SARIMA(1,0,0)(0,1,2)₇	0,0502	0,030183
SARIMA(1,0,0)(1,0,2)₇	0,056243	0,043472
H-W stagionale additivo	0,063276	0,041363
H-W stagionale moltiplicativo	0,057488	0,03377

Dalla tabella precedente possiamo osservare che, per quanto riguarda i modelli SARIMA(1,0,0)(1,0,2)₇ e SARIMA(1,0,0)(0,1,2)₇ quello che fornisce previsioni più vicine ai valori reali è il modello non stazionario SARIMA(1,0,0)(0,1,2)₇ (che modella la serie differenziata stagionalmente).

Per quanto riguarda invece i metodi di Holt-Winters gli indici di previsione ci portano a preferire il metodo stagionale moltiplicativo piuttosto che quello additivo.

In generale, il modello che ha portato ai migliori risultati in termini di previsioni è il **SARIMA(1,0,0)(0,1,2)₇**.

BIBLIOGRAFIA

Box, G. E. P., and Jenkins, G. (1976), *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day

Di Fonzo T., Lisi F. (2005), *Serie storiche economiche. Analisi statistiche e applicazioni*, Roma, Carocci

Di Fonzo T. (a.a. 2005-2006), *Statistica Aziendale I - Lucidi del corso*

Le informazioni riguardanti l'azienda provengono dal sito:

www.tre.it/H3G/index_ITA_HTML.htm