

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA  
“GALILEO GALILEI”  
CORSO DI LAUREA IN FISICA

---

# L'approssimazione di Zel'dovich e la Teoria dell'Adesione

---

*Candidato:* Forte Giada  
*Matricola:* 1027131

*Relatore:* Matarrese Sabino

A.A. 2014/2015



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Approssimazione lineare</b>	<b>5</b>
2.1	Particelle collisionali . . . . .	5
2.2	Particelle non collisionali . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Fase non lineare</b>	<b>11</b>
3.1	L'approssimazione di Zel'dovich . . . . .	12
3.2	La Teoria dell'Adesione . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>21</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>23</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

Ciò che il genere umano può osservare (e che probabilmente osserverà fino alla sua scomparsa) è un Universo con una struttura molto particolare: la forza di gravità, infatti, ha raggruppato la materia generata con il Big Bang in strutture quali le stelle, le galassie e i superammassi di galassie.

Recentemente si è poi capito che la materia dominante non è quella facilmente rilevabile dai telescopi, ossia la materia barionica, ma una nuova componente, di cui ancora non si conosce la natura e per questo denominata materia oscura (DM). Studiando i moti delle galassie è inoltre evidente che la DM si concentra proprio nelle strutture in cui c'è abbondanza di materia ordinaria, anzi possiamo dire che è la DM che crea le buche di potenziale gravitazionale, che in seguito attraggono i barioni dando vita agli oggetti celesti che vediamo dalla Terra.

Lo scopo di questa tesi consiste nell'espone due teorie, sviluppate nella seconda metà del XX secolo principalmente dai fisici Zel'dovich e Shandarin, le quali cercano di spiegare come si sia formata la struttura a grande scala dell'Universo.<sup>1</sup> Nella trattazione si partirà dall'ipotesi che, in seguito al Big Bang, si siano formate delle zone in cui erano presenti piccole perturbazioni della densità di materia, le quali, in seguito alla forza gravitazionale, sono andate incontro a fenomeni di instabilità, diventando sempre più importanti.

Le basi sulle quali fonderemo i ragionamenti sono le seguenti:

1. il movimento delle particelle di materia viene paragonato al flusso delle particelle in un fluido: si useranno quindi le equazioni che descrivono il comportamento di un fluido, ovvero l'equazione di continuità, l'equazione di Eulero e l'equazione di Poisson;

---

<sup>1</sup>In cosmologia il termine *struttura a grande scala* indica la distribuzione delle galassie e della materia oscura su scale che vanno da 1 Mpc a migliaia di Mpc.

2. dopo una breve trattazione in cui considereremo un fluido composto da particelle collisionali (ovvero con pressione non nulla), andremo a trattare principalmente il caso in cui la pressione risulta essere nulla. Questo è giustificato dal fatto che la maggior parte della materia costituente l'Universo è DM, la quale è non collisionale. Pertanto, poichè la materia barionica cadrà nelle buche di potenziale della DM, se riusciamo a descrivere il comportamento di quest'ultima, si può capire con buona approssimazione la struttura a grande scala dell'Universo;
3. più in particolare, studieremo il caso di materia oscura fredda: la DM infatti si può distinguere in materia oscura fredda (CDM), composta da particelle con una velocità termica ridotta, e materia oscura calda (HDM) che invece è caratterizzata da una temperatura elevata. Nel caso in cui l'Universo sia dominato da CDM si incontra uno scenario *bottom-top*, ovvero inizialmente si formano le strutture più piccole come le nubi interstellari di massa paragonabile a quella di una stella, per arrivare infine alle nubi di dimensioni pari ai super-ammassi di galassie; nel caso in cui ci sia una prevalenza di HDM si ha lo scenario *top-down*, cioè da strutture molto grandi si arriva alla formazione dei corpi celesti più piccoli;<sup>2</sup>
4. si assume che, successivamente al Big Bang, il campo gravitazionale fosse un campo random gaussiano, omogeneo e isotropo. Le piccole fluttuazioni della densità di materia sarebbero state causate da oscillazioni quantistiche del vuoto durante la fase dell'inflazione.

È importante specificare che il background in cui le particelle vivono sarà descritto dal modello omogeneo ed isotropo di Friedmann-Robertson-Walker e gli argomenti verranno affrontati con un approccio Newtoniano (si assume che le velocità delle particelle non siano elevate). Infine notiamo che il modello di Universo a cui faremo riferimento è quello di Einstein - de Sitter, ovvero un Universo spazialmente piatto (parametro di curvatura  $k = 0$ ) e dominato dalla materia (parametro di densità  $\Omega_m = 1$ ).

---

<sup>2</sup>Quali sono le particelle costituenti la DM? Per quanto riguarda la HDM, i neutrini potrebbero essere dei buoni candidati; per quanto riguarda invece la CDM, si potrebbe pensare a delle particelle supersimmetriche, come i *neutralini*, o ad altre particelle non ancora osservate come gli *assioni*.

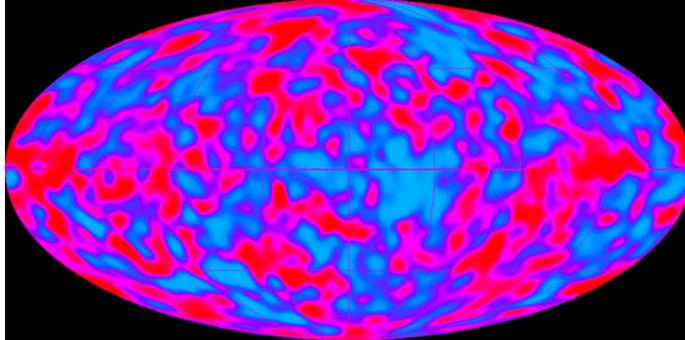


Figura 1.1: Le anisotropie nella temperatura registrate nella CMBR dal satellite COBE forniscono una mappa delle piccole anisotropie di densità di materia barionica presente nell'Universo primordiale.

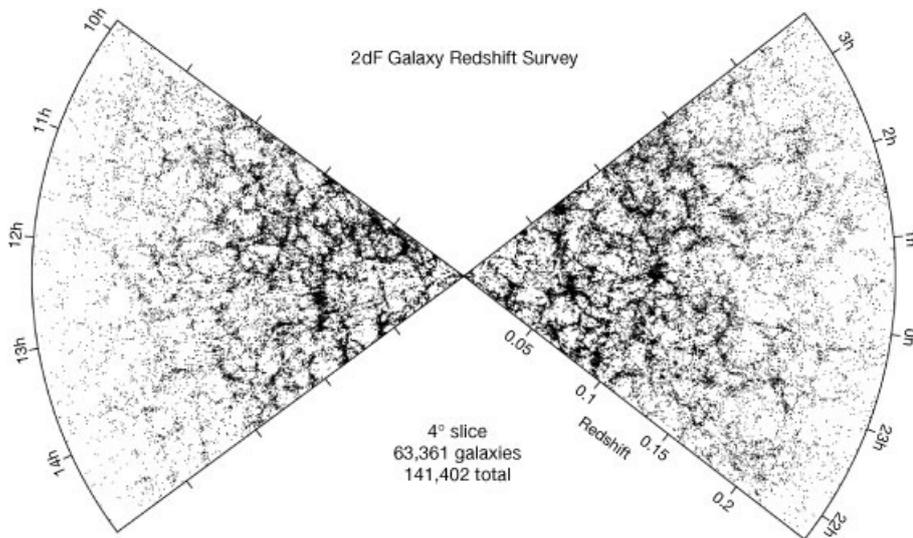


Figura 1.2: Parte della struttura a larga scala dell'Universo registrata durante la campagna osservativa *Two-degree field galaxy redshift survey (2dFGRS)*. Durante queste osservazioni vennero esaminate due aree dell'Universo a nord e a sud dei poli galattici, scovando oggetti celesti fino ad una profondità di circa 2.5 miliardi di anni luce (redshift  $\sim 0.2$ ).



# Capitolo 2

## Approssimazione lineare

### 2.1 Particelle collisionali

Cominciamo ad analizzare il caso in cui le equazioni di un fluido composto da particelle collisionali (che risentono dell'interazione gravitazionale), come i barioni, possono essere risolte attraverso approssimazioni lineari. Questo risulta essere corretto fintanto che le perturbazioni rimangono limitate, ovvero, in termini cosmologici, fino al momento della ricombinazione: prima di questo periodo, infatti, la materia barionica, completamente ionizzata, interagiva fortemente con i fotoni e la radiazione non permetteva alle disomogeneità di densità di crescere per attrazione gravitazionale.

Iniziamo ad introdurre delle grandezze che utilizzeremo durante tutta la trattazione:

1. coordinata di una particella:  $\vec{r} = a\vec{x}$  dove  $a$  è il fattore di scala, mentre  $\vec{x}$  rappresenta la coordinata comovente;
2. costante di Hubble:  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ ;
3. velocità peculiare:  $\vec{v} = a\frac{d\vec{x}}{dt}$ ;
4. velocità di una particella:  $\vec{w} = H\vec{r} + \vec{v}$ ;
5. relazione tra derivate rispetto a  $\vec{r}$  e derivate rispetto a  $\vec{x}$ :  $\nabla_{\vec{r}} = \frac{1}{a}\nabla_{\vec{x}}$

Nel caso di perturbazioni adiabatiche (entropia costante), il comportamento di una particella di fluido, sottoposto ad un campo gravitazionale, è descritto da un sistema di tre equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari:

1. equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} |_{\vec{r}} + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho \vec{w}) = 0;$$

2. equazione di Eulero:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} |_{\vec{r}} + (\vec{w} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{w} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{\vec{r}} p - \nabla_{\vec{r}} \Phi;$$

3. equazione di Poisson:

$$\nabla_{\vec{r}}^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

Poniamo ora  $\rho = \rho_b + \delta\rho$  dove  $\rho_b$  si riferisce alla densità di materia di background e  $\delta\rho$  è una piccola perturbazione; inoltre diciamo che  $\Phi = \Phi_b + \phi$ , in modo che  $\nabla_{\vec{r}}^2 \phi = 4\pi G \delta\rho$  ovvero  $\nabla_{\vec{x}}^2 \phi = 4\pi G a^2 \delta\rho$ . Quest'ultima è chiamata *equazione cosmologica di Poisson*.

Eliminando, dove possibile, i termini relativi al background (e quindi dipendenti dal tempo) ed esprimendo le equazioni in funzione della coordinata  $\vec{x}$ , si ottiene un nuovo set di equazioni:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho + \frac{1}{a} \nabla_{\vec{x}} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + H\vec{v} + \frac{1}{a} (\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}}) \vec{v} = -\frac{1}{a\rho} \nabla_{\vec{x}} p - \frac{1}{a} \nabla_{\vec{x}} \phi \quad (2.2)$$

$$\nabla_{\vec{x}}^2 \phi = 4\pi G a^2 \delta\rho \quad (2.3)$$

Lo scopo di questa sezione è quello di considerare piccole variazioni di densità, in modo da poter utilizzare approssimazioni lineari. Imponendo  $\delta\rho = \rho_b \delta$  (in modo che  $\rho = \rho_b(1 + \delta)$ ), andiamo a linearizzare (2.1), (2.2), (2.3) utilizzando le seguenti espansioni in serie di Fourier:

$$\delta(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \delta_{\vec{k}}(t) d^3 k$$

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \vec{v}_{\vec{k}}(t) d^3 k$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \phi_{\vec{k}}(t) d^3 k$$

Per ogni modo  $\vec{k}$  si ottengono quindi le seguenti equazioni linearizzate:

$$\dot{\delta}_{\vec{k}} + \frac{i\vec{k} \cdot \vec{v}_{\vec{k}}}{a} = 0 \quad (2.4)$$

$$\dot{\vec{v}}_{\vec{k}} + H\vec{v}_{\vec{k}} = -\frac{i\vec{k}}{a} (c_s^2 \delta_{\vec{k}} + \phi_{\vec{k}}) \quad (2.5)$$

$$k^2 \phi_{\vec{k}} = -4\pi G a^2 \rho_b \delta_{\vec{k}} \quad (2.6)$$

dove  $c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$  rappresenta la velocità del suono al quadrato.

Risolviamo le equazioni così trovate per la componente della velocità peculiare parallela a  $\vec{k}$ , che denominiamo  $v_{\vec{k}}$ . Differenziando l'equazione (2.4) ed utilizzando (2.5) e (2.6), si ottiene infine il seguente risultato fondamentale:

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}} + 2H\dot{\delta}_{\vec{k}} + \left(\frac{k^2 c_s^2}{a^2} - 4\pi G\rho_b\right)\delta_{\vec{k}} = 0 \quad (2.7)$$

A questo punto cerchiamo una soluzione approssimata, che si ha quando  $k \ll k_j$  dove  $k_j$  è il numero d'onda di Jeans definito come  $k_j \equiv a \frac{\sqrt{4\pi G\rho_b}}{c_s}$ . Trovandoci in un Universo di Einstein-de Sitter (e quindi  $a \propto t^{\frac{2}{3}}$ ,  $H = \frac{2}{3t}$ ,  $\rho_b = (6\pi Gt^2)^{-1}$ ), l'equazione (2.7) diventa

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}} + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_{\vec{k}} - \frac{2}{3t^2}\delta_{\vec{k}} \approx 0$$

che ha per soluzione due differenti modi:

1. *modo crescente*  $\delta_{\vec{k}} \propto t^{\frac{2}{3}}$ ,  $\phi_{\vec{k}} = \text{cost}$ ,  $v_{\vec{k}} \propto t^{\frac{1}{3}}$
2. *modo decrescente*  $\delta_{\vec{k}} \propto t^{-1}$ ,  $\phi_{\vec{k}} \propto t^{-\frac{5}{3}}$ ,  $v_{\vec{k}} \propto t^{-\frac{4}{3}}$

Notiamo quindi che già a partire da questo studio iniziale, risultano esserci fenomeni di instabilità per particelle collisionali: nel caso del modo crescente, infatti, la perturbazione di densità tenderà ad aumentare con lo scorrere del tempo e questo potrebbe spiegare la formazione della struttura a grande scala dell'Universo.

Tuttavia, per poterci concentrare sullo studio della DM dobbiamo andare a vedere cosa succede per particelle non collisionali.

## 2.2 Particelle non collisionali

Vediamo ora la vera e propria trattazione della CDM. Partiamo sempre dall'idea che il comportamento delle particelle possa inizialmente essere descritto da equazioni lineari poichè le perturbazioni in gioco erano ridotte ( $\frac{\delta\rho}{\rho} \ll 1$ ). Per la CDM, in termini di tempi cosmologici, questo risulta essere vero fino al momento dell'*equivalenza*, cioè fino a che radiazione e materia si trovavano in equilibrio; in seguito, invece, la materia è diventata dominante e, poichè la DM non interagisce con i fotoni, le perturbazioni hanno potuto espandersi. Nel frattempo la materia barionica era ancora ionizzata e formava una sorta di plasma assieme ai fotoni: pertanto le perturbazioni relative ai barioni si

espansero successivamente e risentirono fortemente delle buche di potenziale gravitazionale già create dalla DM (cfr. [7]).

Iniziamo quindi a studiare cosa succede a delle particelle senza collisioni. Sorge però subito un problema: infatti non è più lecito partire dalle equazioni di un fluido (2.1), (2.2) dal momento che, essendo la pressione nulla, cade la definizione stessa di fluido. Dobbiamo ricominciare dalle basi, scrivendo la Lagrangiana di una particella con una data velocità  $\dot{\vec{r}} = \dot{a}\vec{x} + a\dot{\vec{x}}$  e sottoposta ad un potenziale gravitazionale  $\Phi$  tale che  $\nabla_{\vec{r}}^2\Phi = 4\pi G\rho$ . La Lagrangiana è:

$$\mathcal{L}' = \frac{m}{2}(a\dot{\vec{x}} + \dot{a}\vec{x})^2 - m\Phi(\vec{x}, t)$$

Con la trasformazione canonica  $\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \frac{\partial\Psi}{\partial t}$  dove  $\Psi = \frac{1}{2}ma\dot{a}\vec{x}^2$  si ottiene:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}a^2\dot{\vec{x}}^2 - m\phi(\vec{x}, t)$$

In questo caso il potenziale di perturbazione  $\phi$  è descritto come:  $\phi = \Phi - \Phi_b = \Phi + \frac{1}{2}a\dot{a}\vec{x}^2$  dove, al solito,  $\Phi_b$ , legato al fattore di scala, è il potenziale gravitazionale di background.

L'Hamiltoniana si ricava facilmente attraverso una trasformazione di Legendre:

$$\mathcal{H}(\vec{x}, \vec{p}, t) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - \mathcal{L} = \frac{\vec{p}^2}{2ma^2} + m\phi(\vec{x}, t)$$

Dal teorema di Liouville è noto che in assenza di collisioni la densità di stati nello spazio delle fasi  $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$  si conserva, ovvero  $\frac{df}{dt} = 0$ . Utilizzando le equazioni di Hamilton relative a  $\mathcal{H}$  finalmente si ricava l'equazione fondamentale, chiamata *equazione di Vlasov*:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{ma^2} \cdot \nabla_{\vec{x}} f - m\nabla_{\vec{x}}\phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (2.8)$$

L'equazione (2.8) è difficilmente risolvibile: a noi però interessa andare a vedere cosa diventa l'equazione di Vlasov se al posto della densità di stati nello spazio delle fasi utilizziamo i suoi momenti. I momenti che useremo sono:

1. *momento di ordine zero* (densità di materia):

$$\rho(\vec{x}, t) \equiv \frac{m}{a^3} \int f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p$$

2. *momento di ordine I* (velocità di flusso):

$$\vec{v}(\vec{x}, t) \equiv \frac{1}{ma} \frac{\int \vec{p} f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p}{\int f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p}$$

3. *momento di ordine II* (tensore dispersione di velocità):

$$\pi^{ij} \equiv \frac{\langle p^i p^j \rangle}{m^2 a^2} - v^i v^j$$

Cerchiamo delle equazioni per questi momenti. Se integriamo in  $\vec{p}$  la (2.8), otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f d^3 p + \frac{1}{ma^2} \int \vec{p} \cdot \nabla_{\vec{x}} f d^3 p - m \int \nabla_{\vec{x}} \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} d^3 p = 0$$

Considerando che l'ultimo addendo si annulla e utilizzando la definizione di momento di ordine zero e di ordine I si ottiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho + \frac{1}{a} \nabla_{\vec{x}} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.9)$$

Ma questa non è altro che l'equazione di continuità che avevamo dato inizialmente per un fluido.

Se vogliamo cercare un'equazione che coinvolga i momenti di ordine I e II le cose si fanno un po' più complicate e conviene lavorare con un formalismo covariante. Moltiplicando per  $p^i$  l'equazione di Vlasov e integrando in  $\vec{p}$  si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int p^i f d^3 p + \frac{1}{ma^2} \partial_j \int p^j p^i f d^3 p + \rho a^3 \delta_j^i \partial_j \phi = 0$$

Svolgendo esplicitamente le derivate e sfruttando la (2.9), dopo una serie di passaggi, si ricava:

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + H v^i + \frac{1}{a} (v_j \partial^j) v^i = -\frac{1}{a} \partial^i \phi - \frac{1}{a \rho} \partial_j (\rho \pi^{ij}) \quad (2.10)$$

Possiamo a questo punto trarre importanti conclusioni: l'equazione (2.10) infatti coincide con l'equazione di Eulero se  $\pi^{ij} = 0$ , cioè se la dispersione di velocità è nulla. Per la CDM questo risulta essere corretto finchè le particelle mantengono un regime laminare e quindi fino a prima della formazione di singolarità. Abbiamo quindi ritrovato le equazioni valide per un fluido. Esiste però una differenza sostanziale: infatti nel caso qui trattato (particelle non collisionali), la velocità del suono è nulla perchè non c'è pressione, pertanto anche la lunghezza d'onda di Jeans (inversamente proporzionale a  $k_j$ ) è nulla. Perciò, mentre nel caso collisionale si poteva avere propagazione dell'onda ( $k > k_j$ ) o modi crescenti e decrescenti ( $k < k_j$ ), nel caso della DM si possono avere solamente questi ultimi due modi e non esiste la propagazione. In conclusione, nella fase iniziale in cui si possono ricercare approssimazioni lineari, la CDM va incontro agli stessi fenomeni di instabilità gravitazionale tipici dei fluidi.



# Capitolo 3

## Fase non lineare

L'approssimazione lineare delle equazioni (2.1), (2.2), (2.3) è valida inizialmente, quando le perturbazioni sono ridotte.

La strada più semplice per aggirare le difficoltà legate agli effetti non lineari dell'instabilità gravitazionale è quella di ricorrere a simulazioni che si basano su problemi tridimensionali a N-corpi [4]. In queste simulazioni, la traiettoria di ogni particella è calcolata attraverso metodi di integrazione numerica delle equazioni che regolano il moto di un corpo immerso in un campo gravitazionale generato da altri corpi.

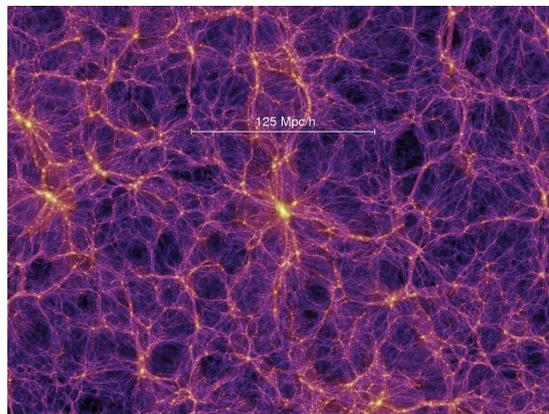


Figura 3.1: Distribuzione della materia oscura nell'Universo ottenuta attraverso simulazioni numeriche della struttura a grande scala. Le aree scure indicano regioni con bassa densità, mentre le zone luminose mostrano strutture a grande scala con densità elevata.

Nelle prossime sezioni, tuttavia, affronteremo due differenti risoluzioni delle equazioni non lineari che descrivono la crescita delle perturbazioni di densità: l'approssimazione di Zel'dovich e la Teoria dell'Adesione.

### 3.1 L'approssimazione di Zel'dovich

Un primo approccio per la determinazione della dinamica non lineare è stato fornito da Zel'dovich intorno al 1970 [9].

Partiamo ancora una volta dalle equazioni note di un fluido, considerando però la pressione nulla (lavoriamo ancora con la CDM):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho + \frac{1}{a}\nabla_{\vec{x}} \cdot (\rho\vec{v}) &= 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + H\vec{v} + \frac{1}{a}(\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}})\vec{v} &= -\frac{1}{a}\nabla_{\vec{x}}\phi \\ \nabla_{\vec{x}}^2\phi &= 4\pi G a^2 \delta\rho\end{aligned}$$

dove come al solito  $\vec{v} = a\frac{d\vec{x}}{dt}$ ,  $\delta\rho = \rho - \rho_b$ ,  $a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$ .  
Eseguiamo ora un cambio di variabili:

- $\rho \rightarrow \eta \equiv \frac{\rho}{\rho_b}$ , ovvero, poichè  $\delta\rho = \rho_b\delta$  vale  $\eta = 1 + \delta$ ;
- $\vec{v} \rightarrow \vec{u} \equiv \frac{d\vec{x}}{da} = \frac{\vec{v}}{a\dot{a}}$ ;
- $\phi \rightarrow \varphi \equiv \frac{3t^2}{2a^3}\phi$

Con queste sostituzioni, le equazioni precedenti assumono una nuova forma esatta:

$$\frac{D\eta}{Da} + \eta\nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Da} + \frac{3}{2a}\vec{u} = -\frac{3}{2a}\nabla_{\vec{x}}\varphi \quad (3.2)$$

$$\nabla_{\vec{x}}^2\varphi = \frac{\delta}{a} \quad (3.3)$$

dove abbiamo definito la *derivata convettiva*  $\frac{D}{Da} \equiv \frac{\partial}{\partial a} + \vec{u} \cdot \nabla_{\vec{x}}$ .

La teoria di Zel'dovich a questo punto riprende una conclusione dell'approssimazione lineare: in tale approssimazione, infatti, avevamo trovato un modo

crescente in cui il modulo della velocità era tale che  $v \propto t^{\frac{1}{3}}$ . Si ha quindi che:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{a\dot{a}} \propto \frac{t^{\frac{1}{3}}t^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{2}{3}}} = cost \implies \frac{D\vec{u}}{Da} \approx \frac{\partial\vec{u}}{\partial a} = 0. \quad ^1 \text{ Pertanto la (3.2) diventa:}$$

$$\vec{u} = -\nabla_{\vec{x}}\varphi \quad (3.4)$$

Zel'dovich assunse che  $\frac{D\vec{u}}{Da} = 0$  non solo nella fase lineare, ma anche, almeno inizialmente, nella fase non lineare. Questo ragionamento è giustificato dal fatto che, se consideriamo la linearizzazione, nello spazio di Fourier si ha:

- dall'equazione (3.3) :  $k^2\varphi_{\vec{k}} \propto \delta_{\vec{k}} \implies \varphi_{\vec{k}} \propto \frac{\delta_{\vec{k}}}{k^2}$ ;
- dall'equazione (3.4) :  $u_{\vec{k}} \propto k\varphi_{\vec{k}} \propto \frac{\delta_{\vec{k}}}{k}$ ;

ovvero la velocità si mantiene in un'approssimazione lineare per tempi più lunghi rispetto alle fluttuazioni della densità di materia  $\delta_{\vec{k}}$ , grazie al peso di  $k^{-1}$ .

Abbiamo così trovato il set di equazioni utilizzate da Zel'dovich:

$$\frac{D\eta}{Da} + \eta\nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Da} = 0 \quad (3.6)$$

L'equazione di Poisson non è riportata perchè sarà utilizzata solo per ricavare le condizioni iniziali.

La soluzione della (3.6) è semplice da ricavare:

$$\vec{u}(\vec{x}, a) = \vec{u}_0(\vec{q}) = \frac{\vec{x} - \vec{q}}{a}$$

dove  $\vec{u}_0(\vec{q})$  è la velocità iniziale ( $a(t) = a_0$ ) nella posizione lagrangiana  $\vec{q}$  della particella che al tempo  $a(t)$  si trova nella posizione euleriana  $\vec{x}$  (stiamo qui usando il fattore di scala come una variabile temporale, dato che, misurando l'espansione dell'Universo, ci dice anche il tempo trascorso dal Big Bang).

Possiamo integrare l'espressione della velocità appena trovata per ricavare la traiettoria della particella, che risulterà essere rettilinea:

$$\vec{x}(\vec{q}, a) = \vec{q} + (a - a_0)\vec{u}_0(\vec{q})$$

Ma dalla (3.4) si ricava  $\vec{u}_0(\vec{q}) = -\nabla_{\vec{q}}\varphi_0(\vec{q})$  e pertanto ponendo per semplicità  $a_0 = 0$  si ha infine:

$$\vec{x}(\vec{q}, a) = \vec{q} - a\nabla_{\vec{q}}\varphi_0(\vec{q}) \quad (3.7)$$

---

<sup>1</sup>Nell'ultimo passaggio abbiamo posto  $\frac{D\vec{u}}{Da} \approx \frac{\partial\vec{u}}{\partial a}$  perchè il secondo addendo presente nella derivata convettiva ( $\vec{u} \cdot \nabla_{\vec{x}}\vec{u}$ ) non viene considerato in un'approssimazione lineare.

Abbiamo quindi ricavato la soluzione dell'equazione di Eulero (3.6); cerchiamo ora una soluzione per l'equazione di continuità (3.5). Per farlo sfruttiamo il fatto che la massa dei singoli elementi del fluido si deve conservare, ovvero:

$$\eta(\vec{x}, a)d^3x = \eta_0(\vec{q})d^3q$$

Pertanto, integrando e considerando il cambio di coordinate (da lagrangiane a euleriane) otteniamo:

$$\eta(\vec{x}(\vec{q}, a), a) = (1 + \delta_0(\vec{q})) \left| \det \frac{\partial q}{\partial x} \right|$$

dove  $\left| \det \frac{\partial q}{\partial x} \right|$  è il modulo del determinante della matrice Jacobiana del cambio di coordinate.

Notiamo ora che per  $a_0 \rightarrow 0$  è lecito supporre che le condizioni iniziali si riferiscano ai primi istanti di vita dell'Universo e si possono quindi considerare le conclusioni tratte per il caso lineare, in particolare  $\phi_0 = cost$ . Utilizzando la definizione di  $\varphi$ , si ha che se  $\phi_0 = cost$ , anche  $\varphi = cost$  e quindi dalla (3.3) si ottiene che  $\delta_0 \rightarrow 0$ . L'espressione della densità di materia diventa così:

$$\eta(\vec{x}(\vec{q}, a), a) = \left( \left| \det \frac{\partial x}{\partial q} \right| \right)^{-1} \quad (3.8)$$

Dalla (3.7) si ricavano le componenti della matrice  $\frac{\partial x}{\partial q}$ :

$$\frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \delta^i_j - a \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial q^i \partial q^j} \quad (3.9)$$

dove  $\mathcal{D}_{0,ij}(\vec{q}) = \frac{\partial^2 \varphi_0(\vec{q})}{\partial q^i \partial q^j}$  è chiamato *tensore di deformazione* (i,j=1,2,3).

Il tensore di deformazione può localmente essere diagonalizzato utilizzando gli autovettori  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3$  con autovalori  $\lambda_1(\vec{q}), \lambda_2(\vec{q}), \lambda_3(\vec{q})$ .

A questo punto, grazie alla (3.8) e alla (3.9), si ottiene facilmente la soluzione dell'equazione di continuità:

$$\eta(\vec{x}(\vec{q}, a), a) = \frac{1}{(1 - a\lambda_1(\vec{q}))(1 - a\lambda_2(\vec{q}))(1 - a\lambda_3(\vec{q}))} \quad (3.10)$$

Per capire come evolve la densità del fluido in questione, dobbiamo ora riprendere un'ipotesi fatta inizialmente, relativa ai campi gaussiani. Se infatti il potenziale gravitazionale  $\varphi_0(\vec{q})$  deriva da un campo random gaussiano, è stato dimostrato che [2]:

- la probabilità che tutti e tre gli autovalori siano positivi è pari all'8%;

- la probabilità che siano tutti negativi è pari all' 8%;
- la probabilità che due siano positivi e uno negativo è del 42%;
- la probabilità che due siano negativi e uno positivo è del 42%.

Complessivamente quindi la probabilità che almeno un autovalore sia positivo è del 92%.

Se quindi chiamiamo  $\lambda_1(\vec{q})$  l'autovalore positivo più grande (se esiste), al tempo  $a_{sc} = \frac{1}{\lambda_1(\vec{q})}$  la densità di materia diventa localmente infinita. Le regioni in cui si formano questi punti di singolarità sono chiamate regioni di *shell-crossing* o *caustiche*. Da un punto di vista matematico, la formazione di queste zone è conseguenza del fatto che quando due (o più) particelle, partite da diverse posizioni lagrangiane  $\vec{q}$ , arrivano alla stessa posizione euleriana  $\vec{x}$  all'istante  $a(t)$ , la mappa  $\vec{q} \rightarrow \vec{x}$  non è più biiettiva e la Jacobiana  $\frac{\partial q}{\partial x}$  non può essere invertita.

La singolarità che si forma è un ellissoide oblato chiamato *pancake*, il quale si crea attraverso un collasso unidimensionale lungo la direzione dell'autovettore  $\mathcal{Q}_1$ .<sup>2</sup>

L'approssimazione di Zel'dovich ha comunque un grosso difetto: la velocità delle particelle è infatti costante e quindi, dopo la formazione del *pancake*, il loro moto continuerebbe indisturbato lungo una traiettoria rettilinea. Ovviamente questo non corrisponde alla realtà, dato che l'interazione gravitazionale tra particelle vicine di certo modificherebbe le traiettorie e tenderebbe a stabilizzare il *pancake* (cioè le particelle che si trovano nelle zone di *shell-crossing* non si potranno allontanare facilmente).

Dobbiamo quindi risolvere questo problema e ciò è stato fatto attraverso la *Teoria dell'Adesione*.

---

<sup>2</sup>Nella teoria di Zel'dovich le singolarità si possono creare solo tramite collasso unidimensionale perchè le probabilità di avere due autovalori positivi uguali o di avere tre autovalori positivi uguali sono nulle. Nel caso in cui invece tutti e tre gli autovalori siano negativi, non si crea alcuna caustica e si forma il vuoto.

### 3.2 La Teoria dell'Adesione

La Teoria dell'Adesione, sviluppata attorno al 1985 da Gurbatov, Saichev e Shandarin, prova a superare i limiti dell'approssimazione di Zel'dovich, aggiungendo un termine di adesione nell'equazione di Eulero [3,4]. Tale termine imita l'attrazione gravitazionale delle particelle vicine ed è tale che la sua presenza si rende evidente solo nelle zone di shell-crossing.

Ponendo come variabile temporale  $\tau \equiv a(t)$ , le equazioni di Zel'dovich (3.5) e (3.6) diventano:

$$\frac{D\eta}{D\tau} = -\eta \nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{u} \quad (3.11)$$

$$\frac{D\vec{u}}{D\tau} = \nu \nabla_{\vec{x}}^2 \vec{u} \quad (3.12)$$

dove  $\nu \nabla_{\vec{x}}^2 \vec{u}$  è il termine di viscosità e  $\nu$  è il coefficiente di viscosità di dimensione  $[\nu] = \frac{L^2}{T}$ .

Se assumiamo che  $\nu$  sia piccolo ( $\nu \rightarrow 0$ ), è subito evidente che il termine di viscosità non influenza mai il moto delle particelle, tranne nelle regioni in cui si formano i pancakes, in cui  $\nabla_{\vec{x}}^2 \vec{u}$  diventa importante (poichè in questi siti le particelle vicine hanno velocità molto diverse).

L'equazione (3.12) è chiamata *equazione di Burgers* e si risolve innanzitutto ponendo  $\vec{u}(\vec{x}, \tau) \equiv \nabla_{\vec{x}} \Phi(\vec{x}, \tau)$ , in cui  $\Phi$  è il potenziale di velocità. Così otteniamo:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} (\nabla_{\vec{x}} \Phi)^2 = \nu \nabla_{\vec{x}}^2 \Phi \quad (3.13)$$

Per semplificare i calcoli si utilizza la *trasformazione di Hopf-Cole*:

$$\Phi(\vec{x}, \tau) = -2\nu \ln \mathcal{U}(\vec{x}, \tau) \quad (3.14)$$

grazie alla quale la (3.13) diventa l'*equazione di Fokker-Planck*:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \tau} = \nu \nabla_{\vec{x}}^2 \mathcal{U} \quad (3.15)$$

Questa è un'equazione lineare parabolica; per risolverla cominciamo a considerare una soluzione di prova  $\mathcal{U}(\vec{x}, \tau) = f(\tau)g(\vec{x})$  dove  $f$  e  $g$  sono funzioni tali che  $f(\tau) = e^{E\tau}$  e inoltre  $Eg(\vec{x}) = \nu \nabla_{\vec{x}}^2 g(\vec{x})$ .

Se passiamo nello spazio di Fourier, otteniamo  $E_{\vec{k}}g_{\vec{k}} = -\nu k^2 g_{\vec{k}}$  ovvero  $E_{\vec{k}} = -\nu k^2$ . Per il principio di sovrapposizione, la generica soluzione ha allora la forma:

$$\mathcal{U}(\vec{x}, \tau) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-\nu k^2 \tau} g_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3 k \quad (3.16)$$

in cui i coefficienti  $g_{\vec{k}}$  sono fissati da condizioni iniziali (determinati dall'equazione di Poisson) e al bordo.

Si può trovare anche un altro modo di esprimere la soluzione  $\mathcal{U}(\vec{x}, \tau)$ , andando innanzitutto a cercare la soluzione più importante che chiamiamo *Kernel* ( $\mathcal{K}(\vec{x}, \tau | \vec{q}, 0)$ ): se infatti vogliamo che la particella che all'istante  $\tau$  si trova nella posizione euleriana  $\vec{x}$  si trovasse, all'istante iniziale, nella posizione lagrangiana  $\vec{q}$ , dobbiamo imporre che per  $\tau \rightarrow 0$  il potenziale  $\mathcal{U}(\vec{x}, \tau)$  tenda a una *delta di Dirac*, ovvero:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{K}(\vec{x}, \tau | \vec{q}, 0) = \delta(\vec{x} - \vec{q})$$

Questa soluzione dà quindi la probabilità che la particella che si trova in  $\vec{x}$  al tempo  $\tau$  si trovasse in  $\vec{q}$  al tempo iniziale (probabilità condizionata).

Affinchè il secondo termine della (3.16) risulti essere una *delta di Dirac* per  $\tau \rightarrow 0$ , si deve avere  $g_{\vec{k}} = e^{-i\vec{k} \cdot \vec{q}}$ . Ci appare quindi un integrale gaussiano, la cui risoluzione fornisce come risultato:

$$\mathcal{K}(\vec{x}, \tau | \vec{q}, 0) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-\nu k^2 \tau} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{q})} d^3 k = (4\pi\nu\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\vec{x} - \vec{q})^2}{4\nu\tau}} \quad (3.17)$$

La forma della soluzione generale  $\mathcal{U}(\vec{x}, \tau)$  si ricava dall'*equazione di Chapman-Kolmogorov*:

$$\mathcal{U}(\vec{x}, \tau) = \int \mathcal{U}_0(\vec{q}) \mathcal{K}(\vec{x}, \tau | \vec{q}, 0) d^3 q \quad (3.18)$$

che è una conseguenza del teorema della probabilità composta.<sup>3</sup>

Utilizzando la (3.14) si ha:

$$\mathcal{U}_0(\vec{q}) = e^{-\frac{\Phi_0(\vec{q})}{2\nu}} = e^{-\frac{\varphi_0(\vec{q})}{2\nu}}$$

cioè

$$\mathcal{U}(\vec{x}, \tau) = \int \frac{1}{(4\pi\nu\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\mathcal{S}(\vec{x}, \vec{q}, \tau)}{2\nu}} d^3 q \quad (3.19)$$

in cui

$$\mathcal{S}(\vec{x}, \vec{q}, \tau) = \frac{(\vec{x} - \vec{q})^2}{2\tau} - \varphi_0(\vec{q})$$

Dalla (3.19) è semplice ricavare la soluzione dell'equazione di Eulero; ricordando infatti la (3.14) e che  $\vec{u}(\vec{x}, \tau) = \nabla_{\vec{x}} \Phi$ , risulta:

$$\vec{u}(\vec{x}, \tau) = -2\nu \frac{\nabla_{\vec{x}} \mathcal{U}}{\mathcal{U}}$$

---

<sup>3</sup>Teorema della probabilità composta:  $P(A, B) = P(B)P(A | B)$  dove  $P(A, B)$  è la probabilità congiunta di A e B,  $P(B)$  è la probabilità di B e  $P(A | B)$  è la probabilità condizionata di A dato B.

Inoltre vale:  $P(A) = \int P(A, B) dB$  quindi  $P(A) = \int P(B)P(A | B) dB$  che è il teorema di Chapman-Kolmogorov.

In conclusione, quindi, le soluzioni previste dalla Teoria dell'Adesione sono:

$$\vec{u}(\vec{x}, \tau) = \frac{\int \frac{\vec{x}-\vec{q}}{\tau} e^{-\frac{\mathcal{S}(\vec{x}, \vec{q}, \tau)}{2\nu}} d^3q}{\int e^{-\frac{\mathcal{S}(\vec{x}, \vec{q}, \tau)}{2\nu}} d^3q} \quad (3.20)$$

$$\vec{x}(\vec{q}, \tau) = \vec{q} + \int_0^\tau \vec{u}(\vec{x}(\vec{q}, \tau'), \tau') d\tau' \quad (3.21)$$

$$\eta(\vec{x}, \tau) = \left( \left| \det \frac{\partial x}{\partial q} \right| \right)^{-1} \quad (3.22)$$

In relatà si può fare un ulteriore passo avanti. Come detto inizialmente, siamo interessati al limite  $\nu \rightarrow 0$ : per tale limite, è lecito utilizzare il metodo chiamato *steepest descent*, per il quale il maggior contributo all'integrale presente nell'equazione (3.19) è dato dalle coordinate  $\vec{q}_s$  dei punti di minimo assoluto della funzione  $\mathcal{S}(\vec{x}, \vec{q}, \tau)$  per dati valori di  $\vec{x}$  e  $\tau$ .<sup>4</sup>

Se espandiamo attorno ai minimi assoluti la funzione  $\mathcal{S}(\vec{x}, \vec{q}, \tau)$  fino al secondo ordine, il risultato è:

$$\mathcal{U}(\vec{x}, \tau) = e^{-\frac{\mathcal{S}(\vec{x}, \vec{q}_s, \tau)}{2\nu}} \sum_s j_s(\vec{x}, \vec{q}_s, \tau) \quad (3.23)$$

con

$$j_s(\vec{x}, \vec{q}_s, \tau) = \left( \det \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{S}(\vec{x}, \vec{q}_s, \tau)}{\partial q^i \partial q^j} \right]_{\vec{q}_s} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Al posto della (3.20) si ha allora:

$$\vec{u}(\vec{x}, \tau) = \sum_s \frac{\vec{x} - \vec{q}_s}{\tau} w_s(\vec{x}, \vec{q}_s, \tau) \quad (3.24)$$

dove  $w_s \equiv \frac{j_s}{\sum_s j_s}$  sono dei pesi che si riferiscono alle diverse posizioni iniziali  $\vec{q}_s$  delle particelle.

Con la Teoria dell'Adesione, quindi, a differenza dell'approssimazione di Zel'dovich, si ottiene un risultato particolare a proposito delle velocità delle particelle: la velocità nel punto euleriano  $\vec{x}$  (quella che abbiamo chiamato  $\vec{u}(\vec{x}, \tau)$ ) deriva dal contributo delle velocità di particelle che arrivano da diverse posizioni iniziali  $\vec{q}_s$  e ognuna di queste velocità apporta modifiche con un determinato peso  $w_s$ .

Il risultato più profondo della Teoria dell'Adesione si può comprendere attraverso dei ragionamenti geometrici [3,4,8]. Infatti è possibile far vedere che le coordinate dei punti di minimo assoluto di  $\mathcal{S}(\vec{x}, \vec{q}, \tau)$  sono le coordinate dei

<sup>4</sup>Si può usare questa approssimazione perchè la funzione  $e^{-\frac{\mathcal{S}}{2\nu}}$  è fortemente piccata per  $\nu \rightarrow 0$ .

punti in cui l'ipersuperficie  $\varphi_0(\vec{q})$  è tangente al paraboloide tridimensionale  $p(\vec{x}, \vec{q}, \tau) = \frac{(\vec{x}-\vec{q})^2}{2\tau} + H$  dove  $H$  è una costante il cui valore può decrescere da  $+\infty$  a  $-\infty$ .

Andiamo quindi a studiare cosa succede allo scorrere del tempo, assumendo che  $\varphi_0(\vec{q})$  segua l'andamento di un campo gaussiano random, omogeneo ed isotropo.

La curvatura del paraboloide cambia con il tempo ed è proporzionale a  $\frac{1}{\tau}$ : per piccoli  $\tau$  il paraboloide è molto stretto, mentre per tempi maggiori risulta allargarsi. Quando  $\tau$  è piccolo, il paraboloide è tangente all'ipersuperficie  $\varphi_0(\vec{q})$  in un solo punto: c'è perciò una corrispondenza biunivoca tra i punti lagrangiani  $\vec{q}$  e i punti euleriani  $\vec{x}$ , ovvero ci troviamo nella fase lineare.

Nel caso in cui però il paraboloide, per un dato  $H$ , è tangente a due punti di  $\varphi_0(\vec{q})$ , accade qualcosa di particolarmente interessante. Si nota infatti che viene meno la biunivocità tra le  $\vec{q}$  e le  $\vec{x}$  dal momento che le coordinate lagrangiane dei due punti di contatto indicano due particelle che al tempo  $\tau$  giungeranno in  $\vec{x}$ : il vertice del paraboloide indica pertanto un punto in cui formalmente la densità diventa infinita, come nel caso di Zel'dovich. Perciò se ci sono due punti di tangenza, si creano le singolarità bidimensionali già note con il nome di pancakes. Con il passare del tempo accadono due cose contemporaneamente:

- la curvatura del paraboloide diminuisce;
- i pancakes si ingrandiscono accumulando sempre più materia.

Si arriva ad un punto in cui due pancakes vicini diventano così grandi da incontrarsi e dar luogo a singolarità che hanno una struttura unidimensionale: questo è il momento in cui la curvatura del paraboloide è diminuita a tal punto da permettere l'esistenza di tre punti di tangenza tra il paraboloide stesso e  $\varphi_0(\vec{q})$ . Gli oggetti formati con tale procedimento sono simili a dei *filamenti*.

Successivamente si assiste ad un fenomeno simile, solo che questa volta sono i filamenti ad incontrarsi e a formare singolarità puntiformi, chiamate *nodi*: ora si hanno quattro punti di tangenza.

La struttura finale prevista da tale modello è quindi una *struttura cellulare*, ovvero una struttura composta da diverse celle.

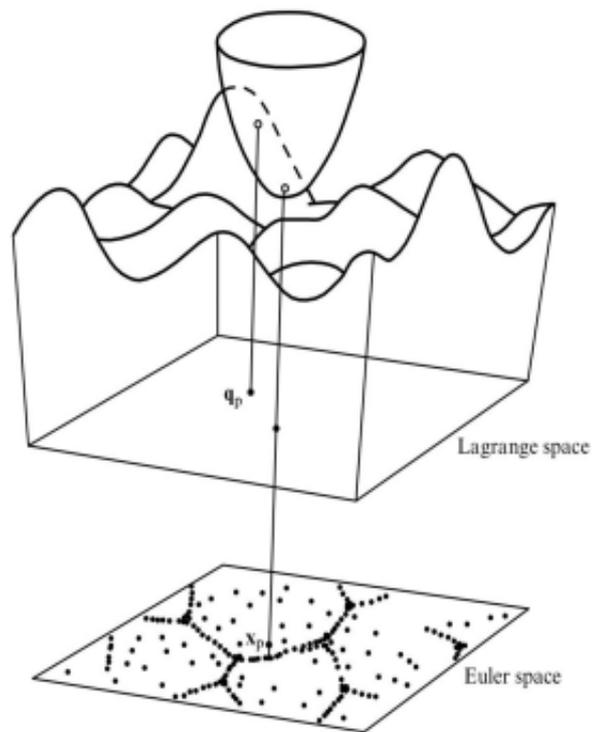


Figura 3.2: Relazione tra coordinate euleriane e coordinate lagrangiane nella Teoria dell'Adesione.

# Capitolo 4

## Conclusioni

Per poter trarre delle conclusioni è utile andare a vedere cosa si ottiene attraverso delle simulazioni computazionali, ovvero come si distribuisce la CDM secondo l'approssimazione di Zel'dovich e la Teoria dell'Adesione.

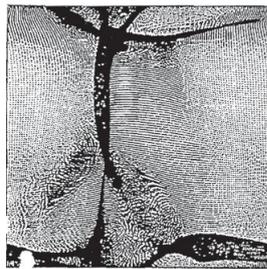


Figura 4.1: Tagli 2D della distribuzione 3D di materia secondo l'approssimazione di Zel'dovich.

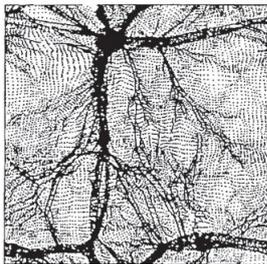


Figura 4.2: Tagli 2D della distribuzione 3D di materia secondo la Teoria dell'Adesione.

Confrontando con la figura (3.1) è evidente che la Teoria dell'Adesione si trova in buon accordo con le simulazioni N-corpi dell'attuale struttura a grande scala dell'Universo. Il limite  $\nu \rightarrow 0$  conduce a una costruzione naturale dello *scheletro* dell'Universo, descrivendo con buona approssimazione la fase non lineare dell'instabilità gravitazionale. Partendo quindi da una approssimazione non del tutto corretta (Zel'dovich) siamo riusciti a giungere ad una teoria in accordo con la realtà, la quale suddivide la formazione della struttura a grande scala in due fasi [4]:

1. prima fase: le prime singolarità che si possono osservare sono i pancakes, all'interno dei quali la materia (CDM) si muove fino a formare filamenti e nodi. Secondo il modello  $\Lambda$ CDM questa fase dipende in parte dal tipo di particelle che costituiscono la CDM. Per esempio, se la materia oscura fosse costituita da neutralini (con massa dell'ordine dei 100 GeV), allora la massa delle prime strutture è paragonabile alla massa della Terra.<sup>1</sup> Alla fine di questa fase, si è formata la struttura cellulare, nella quale la maggior parte della materia è concentrata nei filamenti e nei nodi e solo una piccola porzione rimane nei pancakes e negli spazi vuoti presenti all'interno di ogni singola cella.
2. seconda fase: la struttura a *mosaico* inizia a deformarsi a causa dell'interazione gravitazionale. Alcune celle si ingrandiscono e diventano molto massive, mentre altre si restringono o addirittura scompaiono. Alla fine, la maggior parte della materia si trova in ammassi compatti di materia oscura, che sono anche conosciuti con il nome di *aloni* di materia oscura. Ovviamente tali aloni attraggono la materia barionica e diventano il luogo ideale per la formazione delle stelle e delle galassie; gli aloni con masse maggiori possono anche ospitare ammassi di galassie.

La Teoria dell'Adesione, proposta ormai circa trent'anni fa, continua quindi a dimostrarsi una buona strada per la spiegazione dell'attuale struttura a grande dell'Universo e risulta essere un valido aiuto teorico per poter capire processi complicati come la formazione delle galassie e delle turbolenze del mezzo interstellare.

---

<sup>1</sup>Il modello  $\Lambda$ CDM è uno dei modelli oggi più seguiti per spiegare l'evoluzione dell'Universo, prevedendo che questo sia costituito sostanzialmente da tre elementi: l'energia oscura rappresentata dalla costante cosmologica  $\Lambda$  (il cui contributo alla densità di energia è di circa il 70%), la CDM (26%), gli atomi e i fotoni (4%).

# Bibliografia

- [1] P. Coles, F. Lucchin. *Cosmology. The Origin and Evolution of Cosmic Structure*. Second edition. John Wiley & Sons, LTD, 2002.
- [2] A.G. Doroshkevich. *Spatial structure of perturbation and origin of galactic rotation in fluctuation theory*. *Astrofizika*, Vol. 6, No. 4, pp. 581-600, 1970.
- [3] S.N Gurbatov, A.I. Saichev, S.F. Shandarin. *The large-scale of the Universe in the frame of the model equation of non-linear diffusion*. *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* 236, pp. 385-402, 1988 June 6.
- [4] S. N. Gurbatov, A. Saichev, S. F. Shandarin. *Large-scale structure of the Universe. The Zeldovich approximation and the adhesion model*. *Physics-Uspokhi*, March 2012.
- [5] J. Hidding. *Adhesion: a sticky way of understanding Large Scale Structure*. July 26, 2010 (consultato: agosto 2015). Disponibile all'indirizzo: <https://www.astro.rug.nl>
- [6] S. Matarrese. *Notes on gravitational instability*. Lectures given at Scuola Normale Superiore, Pisa, 2002-2005.
- [7] P. Monaco. *Introduzione all'astrofisica*. Trieste, 2014-2015 (consultato: luglio 2015). Disponibile all'indirizzo: <http://adlibitum.oats.inaf.it/monaco/Homepage/Dispense/index.html>
- [8] S.F. Shandarin, Ya. B. Zeldovich. *The large-scale structure of the universe: Turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium*. *Reviews of Modern Physics*, Vol 61, No. 2, April 1989.
- [9] Ya. B. Zeldovich. *Gravitational Instability: An Approximate Theory for Large Scale Density Perturbation*. *Astronomy & Astrophysics* 5, pp. 84-89, 1970.