

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"
Corso di Laurea Triennale in Fisica

Analisi dei dati del calorimetro STRIKE utilizzando la tecnica della funzione di trasferimento

RELATORE:

Dr. Gianluigi Serianni

CORRELATRICE:

Dr. Rita S. Delogu

LAUREANDO:

Carlo Poggi

MATRICOLA 1029187

Anno Accademico 2014/2015

Sommario

ITER è un progetto internazionale con lo scopo di verificare la fattibilità tecnologica di un reattore a fusione nucleare. Confinando il plasma in configurazione Tokamak, esso deve dimostrare di produrre più energia di quante consumi per l'innesco e il mantenimento della reazione.

Le temperature necessarie per le reazioni di fusione tra nuclei di deuterio e trizio sono raggiunte anche grazie a degli iniettori di neutri ad alta energia, originati dalla neutralizzazione di ioni negativi accelerati.

Per studiare l'accelerazione degli ioni è in costruzione a Padova, presso il consorzio RFX, la test facility SPIDER, che prevede la produzione di un fascio di H^- con energia 100 keV ed intensità di corrente 50 A ; una delle diagnostiche del fascio di SPIDER, composto di 1280 beamlets raggruppati in 4×4 gruppi, sarà il calorimetro STRIKE (Short-Time Retractable Instrumented Kalorimeter), le cui componenti principali sono delle tegole in materiale composito unidirezionale in fibra di carbonio (CFC), su una faccia delle quali collideranno i beamlet.

Alcuni prototipi di tegole sono stati impiegati per testarne le proprietà diagnostiche presso il consorzio RFX, dove sono state sottoposte a impulsi laser di potenza variabile, e nella test facility BATMAN (BAvarian Test Machine for Negative ions) a Monaco, presso il laboratorio IPP-Garching, in cui le tegole sono state esposte a dei fasci di ioni negativi.

Al momento si adopera il profilo di temperatura sul retro delle tegole come indicatore del profilo del flusso di energia incidente sul fronte, sfruttando metodi lenti come i fit, inadatti a trattare grosse moli di dati. Questa tesi intende sviluppare un metodo di ricostruzione delle caratteristiche del fascio di ioni negativi di SPIDER a partire dalle misure di temperatura, sfruttando la tecnica della funzione di trasferimento, che permette una analisi relativamente rapida mediante l'impiego di algoritmi FFT.

La validazione di questa tecnica è data dallo studio di profili simulati e dall'applicazione ai dati dei test con il laser e di BATMAN.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Il problema energetico	1
1.2	Metodi di riscaldamento del plasma	2
1.2.1	La sorgente di ioni negativi SPIDER	3
1.2.2	STRIKE	5
1.3	Caratterizzazioni delle tegole	6
1.3.1	I test con il laser	6
1.3.2	L'esperimento BATMAN	6
2	Modello matematico	11
2.1	La funzione di trasferimento	11
2.2	Passaggio allo spazio di Fourier	12
2.2.1	Inclusione del tempo	13
2.3	Linearità del sistema	15
2.3.1	L'equazione del calore	15
2.3.2	Le condizioni al contorno	16
2.4	La Discrete Fourier Transform	18
2.5	Aliasing	20
2.5.1	Il teorema di Nyquist-Shannon	20
2.6	Leakage	23
2.6.1	<i>Windowing e overturning</i>	25
3	La funzione di antitrasferimento	29
3.1	Risposta all'impulso	30
3.1.1	Limiti nel calcolo delle trasformate	31
4	Le simulazioni	35
4.1	TEST 0	35
4.2	TEST 1	37
4.3	TEST 2	43
4.4	Aggiunta del rumore	47

4.4.1	Altri metodi di valutazione	50
5	Applicazione ai dati reali	55
5.1	I test con il laser	55
5.1.1	Analisi	56
5.2	L'esperimento BATMAN	57
5.2.1	Analisi	60
6	Conclusioni	65
6.1	Risultati e prospettive future	66
	Bibliografia	69

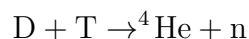
Capitolo 1

Introduzione

1.1 Il problema energetico

Negli ultimi anni il consumo di energia pro capite è aumentato considerevolmente, come conseguenza della globalizzazione e del rapido sviluppo delle tecnologie, che hanno agito da catalizzatori dello sviluppo industriale. Lo sfruttamento delle fonti di energia è aumentato di pari passo, causando un assottigliarsi delle riserve delle energie non rinnovabili. La ricerca di fonti di energia alternative appare dunque un passo obbligato per una società che intenda progredire ulteriormente.

In quest'ottica si colloca ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), progetto internazionale che si propone di realizzare un reattore a fusione termonucleare controllata, in configurazione Tokamak, in grado di produrre più energia di quanta ne consumi per l'innescò e il mantenimento della reazione; l'obiettivo è confinare magneticamente un plasma all'interno del reattore, a temperatura sufficientemente elevata da permettere la reazione di fusione tra nuclei di deuterio e trizio.



Sono stati scelti questi due reagenti poiché presentano la più alta sezione d'urto di fusione alla minore temperatura, grazie al basso numero atomico,

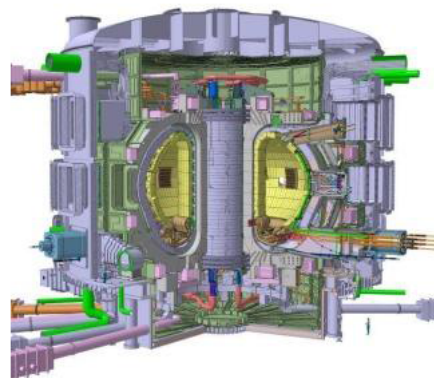


Figura 1.1: Il reattore ITER.

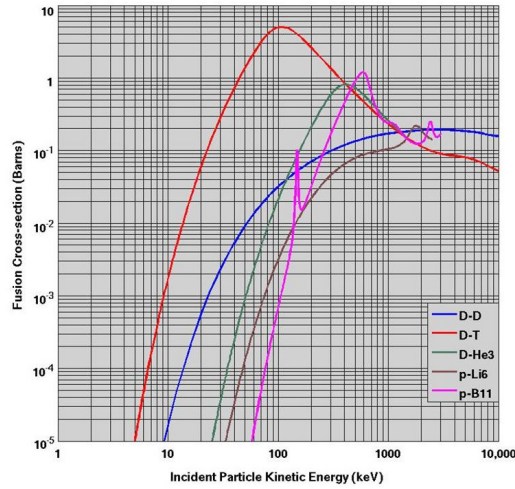


Figura 1.2: La sezione d'urto di diverse reazioni di fusione, in funzione dell'energia di un proiettile di deuterio (D) o idrogeno (p) incidente su un bersaglio fermo.

come si evince dalla figura 1.2 [14] (la temperatura del plasma necessaria all'innesco è di circa 20 keV).

ITER è attualmente in costruzione a Cadarache, in Francia, ma le sue diverse componenti, che presentano condizioni operative mai realizzate contemporaneamente, sono realizzate in diversi laboratori in tutto il mondo.

1.2 Metodi di riscaldamento del plasma

Per portare il plasma alla temperatura necessaria per il processo di fusione (dell'ordine della decina di keV) si utilizzano delle sorgenti di onde elettromagnetiche, in grado di trasferire energia alle particelle sfruttando le frequenze di ciclotrone di ioni (tra 20 e 30 MHz) ed elettroni (circa 150 GHz), e degli iniettori di atomi neutri di deuterio/idrogeno (*Neutral Beam Injectors, NBI*), che trasferiscono la propria energia cinetica al plasma tramite le collisioni con le particelle ionizzate. Queste particelle sono generate dalla neutralizzazione di un fascio di ioni negativi accelerato elettrostaticamente.

Il progetto di ITER prevede la realizzazione di due NBI, in grado di accelerare gli atomi all'energia di 1 MeV . Il prototipo di questi iniettori è in realizzazione a Padova, presso il consorzio RFX, nell'ambito del progetto PRIMA (Padova Research on Injector Megavolt Accelerated) che consiste nella realizzazione della test facility SPIDER (Source for the Production of Ions of Deuterium Extracted from RF plasma), che prevede la produzione

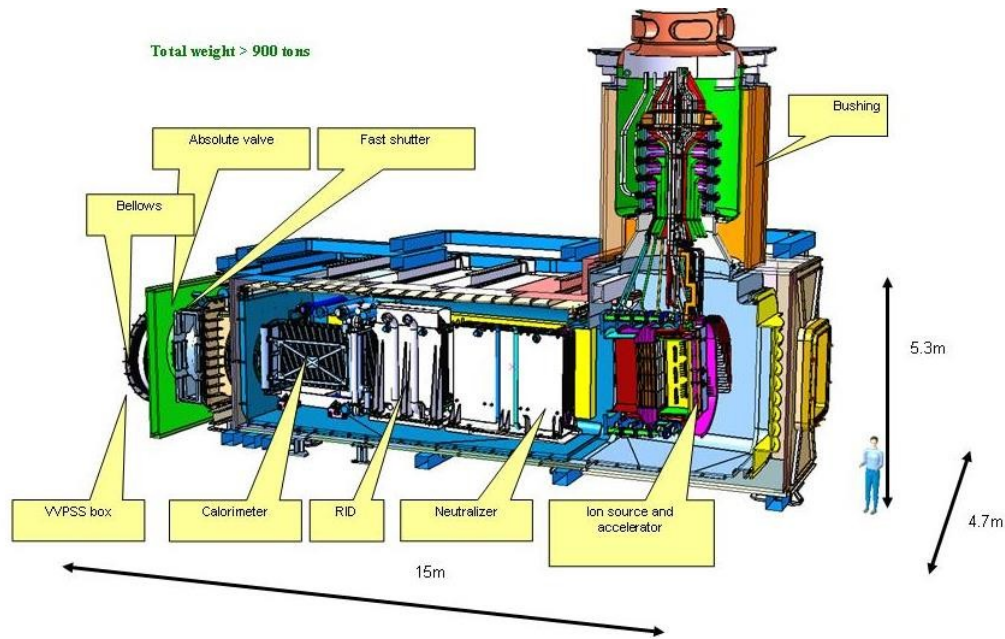


Figura 1.4: Schema di un NBI.

tramite una sorgente a radiofrequenza di un fascio di ioni D^- con energia 100 keV ed intensità di corrente 50 A , e dell'intero prototipo, MITICA (Megavolt ITER Injector and Concept Advancement), in grado di accelerare gli atomi all'energia di 1 MeV [22] (lo schema di un iniettore di neutri è riportato in figura 1.4).

1.2.1 La sorgente di ioni negativi SPIDER

L'esperimento SPIDER si propone di realizzare il trasporto di una corrente di ioni negativi D^- di 50 A (70 A per l'utilizzo con l'idrogeno), per un tempo di accensione di un'ora, con una densità di corrente superiore a $355/258\text{ A m}^{-2}$; le particelle sono accelerate da un potenziale di 100 kV , e la potenza massima è di 5 MW per il deuterio [1].

La produzione degli ioni negativi avviene all'interno della sorgente principalmente grazie a due processi [3] [4]:

- processo di volume: l'elettrone si lega ad un atomo di idrogeno a seguito della dissociazione di una molecola H_2 che si trova in uno stato precedentemente eccitato vibrazionalmente per collisione con un elettrone (equazione 1.1);



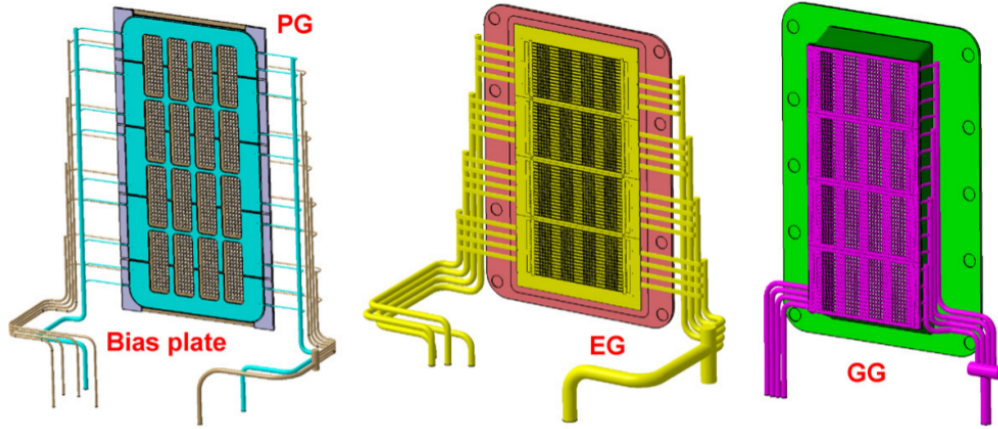


Figura 1.5: *Plasma Grid, Extraction Grid e Grounded Grid* in SPIDER

- processo di superficie: basato sulla conversione degli atomi di idrogeno che collidono con le pareti (equazione 1.2).

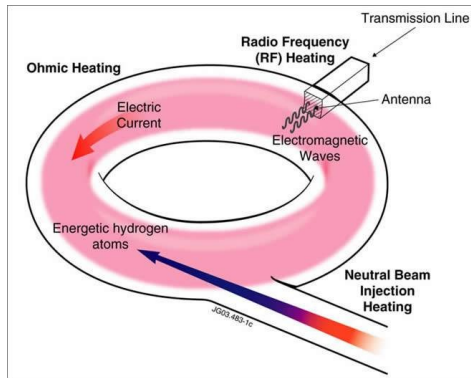
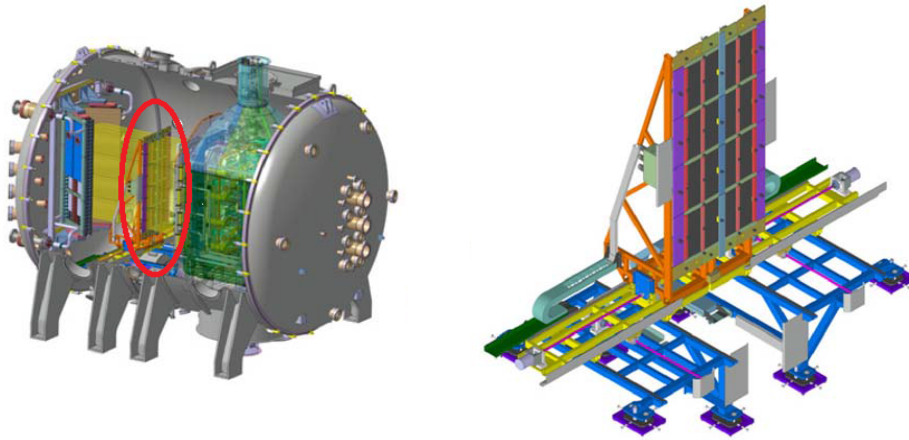


Figura 1.3: Metodi di riscaldamento del plasma.

Il sistema di estrazione ed accelerazione di SPIDER è composto da tre griglie (*Plasma Grid, Extraction Grid, Grounded Grid*), formate da 1280 aperture, poste rispettivamente a -100 kV , -90 kV e 0 V rispetto a terra, in grado di estrarre gli ioni negativi dalla sorgente di ioni e di accelerarli fino a 100 keV . Gli ioni negativi che passano attraverso un'apertura costituiscono un *beamlet*. Il fascio di SPIDER è dunque composto da 1280 beamlets, raggruppati in 4×4 gruppi, ciascuno di 5×80 beamlets. Insieme agli ioni negativi sono estratti anche gli elettroni. Per ridurre il numero,

alla Plasma Grid è applicato un potenziale di polarizzazione positivo (circa $+20 \text{ V}$ rispetto al potenziale della sorgente). Un disegno delle griglie di SPIDER è riportato in figura 1.5

Uno degli obiettivi principali di SPIDER è la produzione di un fascio di ioni negativi uniforme, con una variazione massima del 10% della potenza su una sua sezione. Il calorimetro STRIKE (Short-Time Retractable Instrumented Kalorimeter) è uno strumento progettato per misurare le caratteristiche



(a) La test facility SPIDER. In rosso è evidenziato il calorimetro STRIKE.

(b) Il calorimetro STRIKE.

Figura 1.6: La sorgente di ioni negativi SPIDER, e il calorimetro STRIKE.

del fascio e verificare tali requisiti, ed essere di facile movimentazione; in figura 1.6 è riportata una sezione di SPIDER in cui è evidenziato il calorimetro diagnostico STRIKE.

1.2.2 STRIKE

Il calorimetro STRIKE [17] è composto da 16 tegole in materiale composito in fibra di carbonio (CFC), una per ogni gruppo di beamlet (di superficie $198 \times 398 \text{ mm}^2$, per una dimensione complessiva di $1800 \times 840 \text{ mm}^2$) sulle quali collide il fascio di SPIDER; lo strumento è posto a distanza regolabile dalla sorgente: la possibilità di effettuare misure a diverse distanze consente di stimare, oltre all'uniformità del fascio, anche la sua divergenza, dovuta ad esempio all'interazione Coulombiana tra gli ioni. Le caratteristiche strutturali di STRIKE non permettono di effettuare misure per periodi prolungati, poiché il carico termico di SPIDER ne provocherebbe lo sfaldamento strutturale, ma consente misurazioni dell'ordine di alcuni secondi.

Le misurazioni disponibili in STRIKE sono: l'impronta del fascio sul retro delle tegole, grazie a videocamere a infrarossi (termocamere), il valore locale della temperatura, fornito da termocoppie, e una rilevazione della corrente negativa dei gruppi di beamlets. Scopo di questa tesi è fornire una possibile strategia di analisi delle misure effettuate con le termocamere: a partire dalle misure di temperatura sul retro delle tegole, ricostruire il profilo del flusso di energia del fascio incidente sul fronte della tegola.

Per evitare di registrare segnali spurii dovuti alle interazioni del fascio con il gas di background e con la polvere emessa dalle tegole le termocamere registrano il profilo sul retro delle tegole, anziché sul fronte, con una risoluzione spaziale di circa 2 mm e una frequenza di acquisizione di 25 Hz [16].

Il materiale scelto per le tegole è termicamente anisotropo, così da permettere un valido utilizzo delle misure di temperatura delle termocamere: la trasmissione del calore in direzione ortogonale al fascio è molto minore di quella in direzione parallela (conducibilità termica circa 20 volte inferiore), in modo che la misura di temperatura sia il più possibile simile alla misura vera legata al fascio [8]. Considerato che il flusso di energia atteso raggiunge i $25\text{ MW}/\text{m}^2$ di picco, le tegole devono avere una capacità termica sufficiente a consentire la misura per circa 10s; perciò lo spessore delle tegole è stato fissato a 20 mm .

1.3 Caratterizzazioni delle tegole

Le proprietà delle tegole e la loro adeguatezza per l'utilizzo in STRIKE sono state studiate in diversi laboratori. Nel presente lavoro sono stati affrontati due di questi esperimenti.

1.3.1 I test con il laser

A Padova, presso il consorzio RFX, tegole in CFC di diverse dimensioni sono state sottoposte a test con una sorgente costituita da un laser a CO_2 incidente su una delle facce maggiori. Sono stati effettuati impulsi di durata fino a 20 s [8]. Le misurazioni effettuate con la termocamera forniscono la risposta (profilo di temperatura) ad un impulso noto (laser) delle tegole, permettendo quindi di determinare la funzione di trasferimento specifica di ogni tegola. In figura 1.7 è riportato il setup sperimentale utilizzato per i test.

1.3.2 L'esperimento BATMAN

A Monaco, presso il Max-Planck-Institut für Plasmaphysik (IPP), è stata costruita la test facility BATMAN (BAvarian Test MACHine for Negative ions), esperimento dedicato principalmente ad ottimizzare il prototipo di sorgente a radio frequenza sviluppato presso l'IPP, in condizioni analoghe a quelle previste per ITER. In tabella 1.1 sono presentati i parametri raggiunti da BATMAN rispetto ai requisiti dell'iniettore di ITER [9].

In BATMAN, è possibile adoperare le tegole di CFC in condizioni qualitativamente analoghe a quelle di SPIDER, pur con specifiche meno estreme:

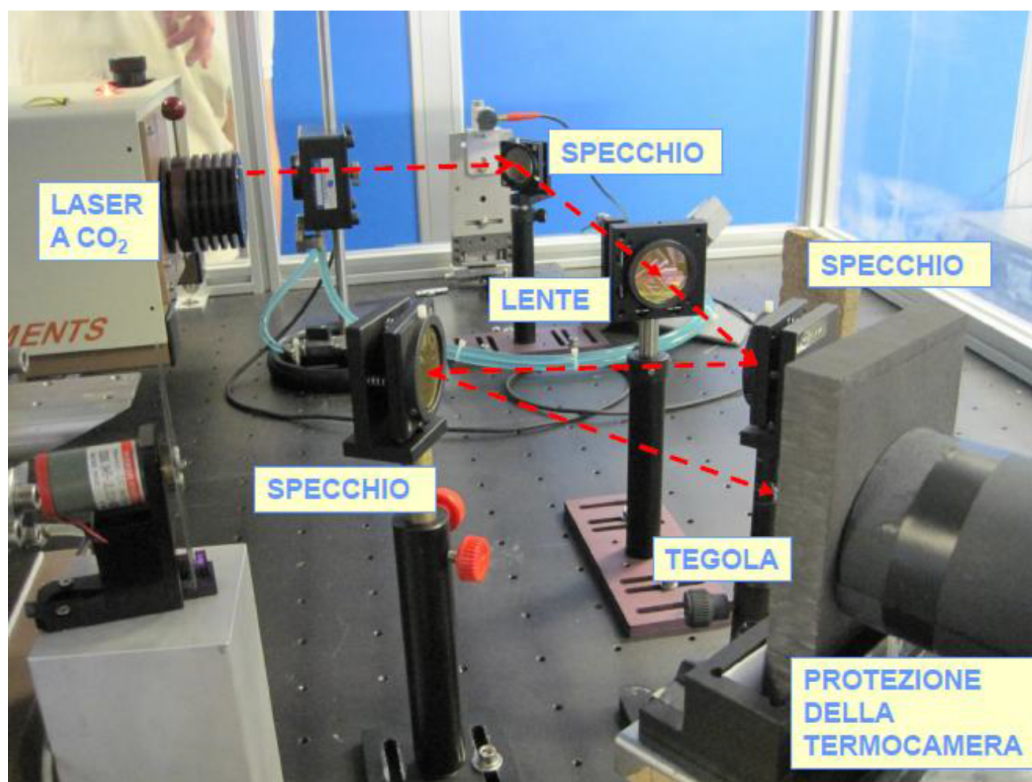
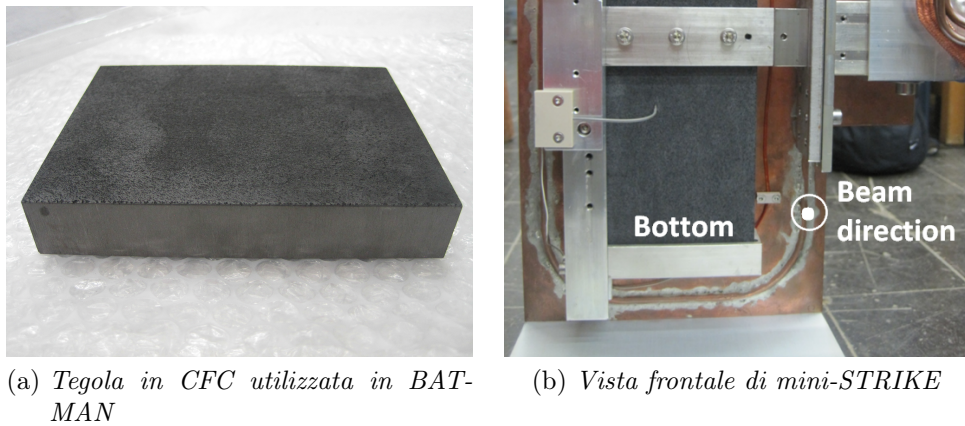


Figura 1.7: Apparato sperimentale per i test con il laser.

Tabella 1.1: Confronto tra i parametri richiesti per ITER e le condizioni ottenute in BATMAN.

Parametro	Valore in ITER	Valore in BATMAN
Area di estrazione	0.2 m^2	$6.3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$
Densità di corrente	$200 \text{ A/m}^2\text{D}^-$ $280 \text{ A/m}^2\text{H}^-$	$230 \text{ A/m}^2\text{D}^-$ $330 \text{ A/m}^2\text{H}^-$
Pressione della sorgente	0.3 Pa	0.3 Pa
Numero di elettroni (j_e/j_{H^-})	≤ 1	< 1
Durata di un impulso	3600 s	4 s
Dimensioni della sorgente	$(1.9 \times 0.9) \text{ m}^2$	$(0.32 \times 0.59) \text{ m}^2$
Uniformità del fascio	$\pm 10\%$	Da stabilire



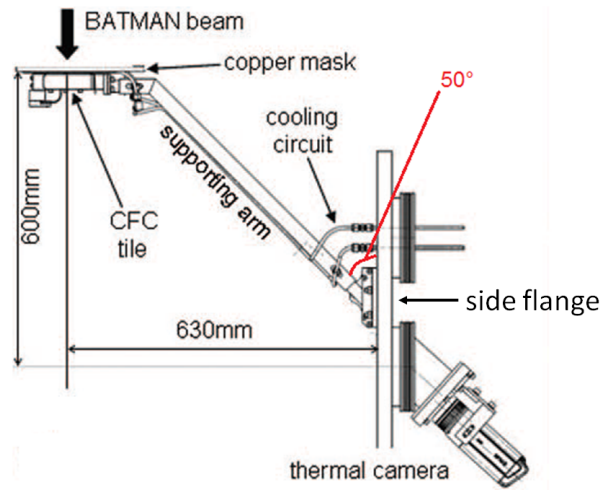
(a) Tegola in CFC utilizzata in BATMAN

(b) Vista frontale di mini-STRIKE

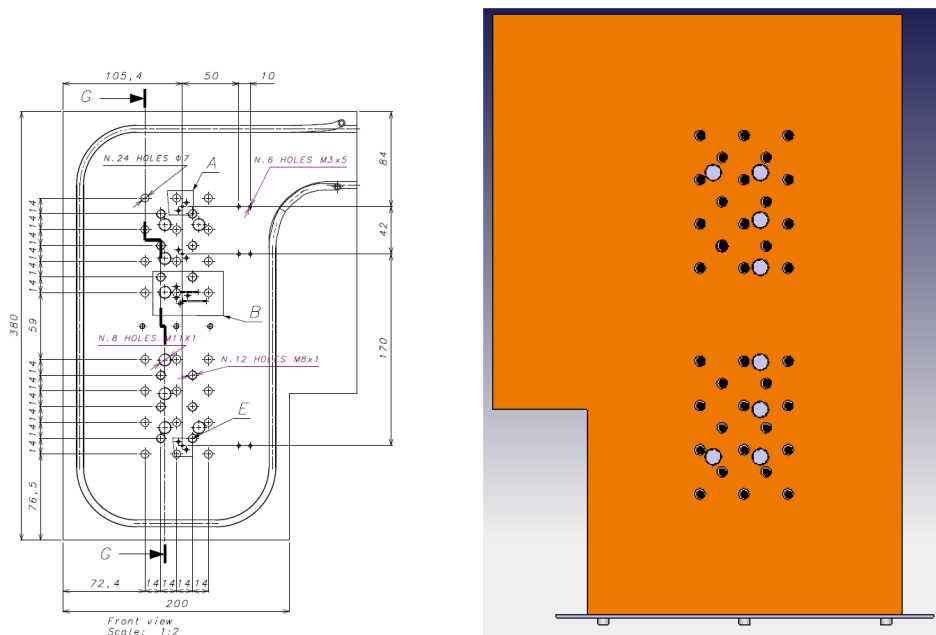
Figura 1.8: Il calorimetro mini-STRIKE in BATMAN.

è stata costruita una versione ridotta di STRIKE, detta mini-STRIKE, composta da due sole tegole di CFC, di dimensione $120 \times 90 \times 20 \text{ mm}^3$, sulle quali collide il fascio di ioni negativi (vedi figura 1.8).

Come in SPIDER, l'estrazione e l'accelerazione degli ioni negativi avviene attraverso tre griglie poste a diverso potenziale e provviste di vari fori, e dunque sono presenti diversi beamlets. Il fascio generato dalla sorgente di BATMAN presenta però una divergenza superiore a 1° : alla distanza cui è posto mini-STRIKE i beamlets presentano un forte grado di sovrapposizione. Per questo motivo, a circa 1 cm davanti alle tegole è posta una maschera in rame, provvista di 24 fori di 7 mm di diametro, posti su uno schema quadrato a distanza di 28 mm l'uno dall'altro, e 12 ulteriori fori, identici, posti in mezzo ai quadrati [19]. La termocamera utilizzata per le misure di temperatura è posta a 870 mm da mini-STRIKE, e la sua linea di vista è inclinata di 50° rispetto alla normale alle tegole. In figura 1.9 sono riportati il progetto della maschera in rame e del posizionamento della termocamera. Una prima campagna di acquisizione dati è già stata svolta con successo [18].



(a) Posizionamento della termocamera



(b) Progetto della maschera in rame

Figura 1.9: Progetti del calorimetro mini-STRIKE in BATMAN.

Capitolo 2

Modello matematico

Il fine dell'analisi dei profili di temperatura misurati sul retro delle tegole di CFC, è la ricostruzione di ciò che li ha generati sul fronte, il profilo del flusso di energia incidente.

Dal punto di vista dello sperimentatore, la tegola è un *sistema*: un oggetto che a partire da un ingresso (il flusso di energia incidente su una sua faccia) produce un'uscita (il profilo di temperatura sulla faccia opposta); matematicamente è un operatore che agisce da uno spazio di input (l'insieme dei profili dei flussi di energia) ad uno spazio di output (l'insieme dei profili di temperatura dell'intera tegola e di una sua faccia in particolare). Indicato con $O[\]$ tale operatore e con $u(l)$ una sua funzione di input nella generica variabile l , il suo output sarà dato da $v(l) = O[u(l)]$.

Si consideri come ingresso la distribuzione $\delta(l)$ di Dirac. L'azione dell'operatore O su di essa produce una funzione $h(l)$, chiamata *risposta all'impulso dell'operatore* O .

2.1 La funzione di trasferimento

Un'importante classe è composta dai sistemi in cui l'operatore a loro associato è lineare (*sistemi lineari*), e per i quali vale quindi il principio di sovrapposizione: l'uscita di una combinazione lineare di ingressi è la combinazione lineare delle uscite.

Sfruttando le proprietà della δ di Dirac, qualunque ingresso può essere scritto in questo modo: $u(l) = \int_{\lambda \in D} u(\lambda)\delta(l - \lambda)d\lambda$, dove D è il dominio di definizione di u ; applicando l'operatore lineare $O[\]$ a questo ingresso, si ottiene:

$$v(l) = O[u(l)] = \int_{\lambda \in D} u(\lambda)O[\delta(l - \lambda)]d\lambda$$

Se l'operatore è anche *invariante per traslazioni*, cioè se $O[\delta(l + l_0)] = h(l + l_0)$, con h risposta all'impulso, allora

$$v(l) = \int_{\lambda \in D} u(\lambda)h(l - \lambda)d\lambda \quad (2.1)$$

cioè l'uscita v è data dalla convoluzione dell'ingresso con la risposta all'impulso, che per tale motivo prende il nome di *funzione di trasferimento*.

Nel caso in esame, input e output sono funzioni di $\{t, x, y\} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$. Dunque l'equazione della convoluzione (2.1) diventa

$$v(t, x, y) = \iiint_{\mathbb{R}^2 \mathbb{R}^+} u(\tau, \xi, \psi)h(t - \tau, x - \xi, y - \psi)d\tau d\xi d\psi \quad (2.2)$$

con la funzione di trasferimento definita dalla risposta all'impulso

$$v^\delta(t, x, y) = \iiint_{\mathbb{R}^2 \mathbb{R}^+} \delta(\tau, \xi, \psi)h(t - \tau, x - \xi, y - \psi)d\tau d\xi d\psi \equiv h(t, x, y) \quad (2.3)$$

e $\delta(\tau, \xi, \psi) = \delta(\tau)\delta(\xi)\delta(\psi)$.

2.2 Passaggio allo spazio di Fourier

L'utilizzo della tecnica della funzione di trasferimento di un sistema lineare permette di trasformare operazioni complesse nello spazio dei segnali, come la convoluzione, in operazioni algebriche semplici, come prodotti tra funzioni.

Viene ora determinata analiticamente la trasformata di Fourier dell'output $v(t, x, y)$ ricavato tramite l'equazione (2.2), considerando solo le variabili spaziali e mantenendo il tempo come parametro. Nel seguito, le funzioni nello spazio diretto saranno indicate con le lettere minuscole, mentre in maiuscolo

si indicheranno le funzioni nello spazio di Fourier. Si ha:

$$\begin{aligned}
V(t, k, j) &= V_t(k, j) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int_{\mathbb{R}^2} v_t(x, y) e^{-ikx} e^{-jy} dx dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} h_t(x - \xi, y - \psi) u_t(\xi, \psi) d\xi d\psi \right) e^{-ikx} e^{-jy} dx dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} h_t(x - \xi, y - \psi) e^{-ikx} e^{-jy} dx dy \right) u_t(\xi, \psi) d\xi d\psi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} h_t(p, q) e^{-ikp} e^{-jq} dp dq \right) u_t(\xi, \psi) e^{-ik\xi} e^{-j\psi} d\xi d\psi \\
&= H_t(k, j) \int_{\mathbb{R}^2} u_t(\xi, \psi) e^{-ik\xi} e^{-j\psi} d\xi d\psi \\
&= 2\pi H_t(k, j) U_t(k, j)
\end{aligned}$$

È stata effettuata la sostituzione $p = x - \xi$ e $q = y - \psi$.

La relazione tra input e output nello spazio di Fourier è una moltiplicazione tra funzioni, e la funzione di trasferimento nello spazio di Fourier è determinata, a meno di una costante moltiplicativa, dal rapporto tra la trasformata dell'uscita e la trasformata dell'ingresso:

$$H_t(k, j) = V_t^\delta(k, j) = \frac{V_t(k, j)}{2\pi U_t(k, j)} \propto \frac{V_t(k, j)}{U_t(k, j)} \quad (2.4)$$

Conoscendo la funzione di trasferimento di un sistema, data una sua qualunque uscita è possibile ricostruire l'ingresso che l'ha generata invertendo la relazione (2.4) e antitrasformando:

$$u_t(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{V_t(k, j)}{2\pi H_t(k, j)} e^{ikx} e^{jy} dk dj \quad (2.5)$$

2.2.1 Inclusione del tempo

Per includere il tempo nella trattazione della funzione di trasferimento si calcola lo stesso integrale utilizzato per trasformare la convoluzione nello spazio dei segnali in moltiplicazione nello spazio di Fourier. Sono però necessarie delle ulteriori precisazioni, relative alla natura della grandezza in gioco: mentre analizzando le coordinate spaziali non si era interessati al principio di causalità, tale aspetto non può essere trascurato parlando del tempo. Questo

è presente appunto nell'integrale in (2.2), dove l'intervallo di integrazione di τ non è \mathbb{R} ma $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.

Per utilizzare la notazione di Fourier è quindi necessario, dopo aver assunto l'assoluta convergenza dell'integrale, moltiplicare l'integrando per la funzione di Heaviside, ottenendo:

$$v(t, x, y) = \iiint_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} h(t - \tau, x - \xi, y - \psi) u(\tau, \xi, \gamma) \Theta(\tau) d\tau d\xi d\psi \quad (2.6)$$

Passando quindi allo spazio di Fourier si ha, con le stesse notazioni usate in precedenza:

$$\begin{aligned} V(\omega, k, j) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} V(t, k, j) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 2\pi H(t - \tau, k, j) U(\tau, k, j) \Theta(\tau) d\tau \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} H(t - \tau, k, j) e^{-i\omega t} dt \right) U(\tau, k, j) \Theta(\tau) d\tau \\ &= \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} H(s, k, j) e^{-i\omega s} ds \right) U(\tau, k, j) \Theta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \sqrt{2\pi} H(\omega, k, j) \int_{\mathbb{R}} U(\tau, k, j) \Theta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= 2\pi H(\omega, k, j) \hat{U}(\omega, k, j) \end{aligned}$$

La relazione trovata è simile al caso con il tempo come parametro; l'unica differenza sta nel fatto che per la dimensione temporale non si è calcolata la trasformata di Fourier della funzione, ma si è calcolato la trasformata del prodotto tra la funzione e la distribuzione di Heaviside.

Questa differenza è però fondamentale: impedisce infatti il calcolo della trasformata di Fourier discreta tridimensionale mediante la tecnica della Fast Fourier Transform. La dipendenza dal tempo non verrà approfondita ulteriormente nella presente tesi e nella trattazione che segue verrà utilizzata solo la trasformata di Fourier bidimensionale a $t - t_0$ fissato. Mantenere il tempo come parametro presuppone che il profilo del flusso di energia impiegato per determinare la funzione di trasferimento presenti lo stesso andamento temporale del flusso di energia da ricostruire. Questa condizione è supposta verificata in tutti i casi sperimentali e simulati in seguito analizzati (in particolare, l'andamento temporale è supposto a θ di Heaviside).

2.3 Linearità del sistema

2.3.1 L'equazione del calore

L'equazione che descrive la trasmissione del calore in un mezzo anisotropo, con assi di propagazione coincidenti con gli assi cartesiani, è [7]

$$\rho c \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = 0 \quad (2.7)$$

con $v(t, x, y, z)$, ρ , c rispettivamente temperatura, densità di massa e calore specifico del mezzo, e f_x , f_y , f_z definite come segue:

$$f_x = -K_x(v) \frac{\partial v}{\partial x}; \quad f_y = -K_y(v) \frac{\partial v}{\partial y}; \quad f_z = -K_z(v) \frac{\partial v}{\partial z}.$$

$(K_x, K_y, K_z) =: \vec{K}$ sono i coefficienti di conducibilità termica, che si suppone non dipendano esplicitamente da posizione e tempo. Assumendo che \vec{K} , c e ρ non dipendano dalla temperatura, l'equazione del calore diventa

$$\rho c \frac{\partial v}{\partial t} - K_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - K_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - K_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (2.8)$$

che è lineare: una combinazione lineare di sue soluzioni è ancora soluzione.

Parametri termici delle tegole Il CFC è un materiale fortemente anisotropo, per quanto riguarda la trasmissione del calore: presenta due diverse conducibilità termiche, in direzioni tra loro ortogonali, K_{\perp} e K_{\parallel} , con la seconda circa 20 volte la prima.

Le tegole dell'esperimento STRIKE presentano le seguenti relazioni sperimentali tra i due coefficienti (v è espressa in Kelvin):

$$K_{\parallel} = K_z = (98.6 + 525.6e^{-(v-273.15)/782.9} + 279.4e^{-(v-273.15)/105.9}) W m^{-1} K^{-1}$$

$$K_{\perp} = K_x = K_y = \left(\frac{K_{\parallel}}{20.33 - (v - 273.15)/384} \right) W m^{-1} K^{-1}$$

Per il calore specifico, la dipendenza dalla temperatura è data dalla seguente relazione (v è espressa in Kelvin):

$$c = (1800 - 1280e^{-(v-273.15)/340} + 150e^{-(v-273.15)/40}) J kg^{-1} K^{-1}$$

Come si vede, la dipendenza dalla temperatura è esponenziale ed è quindi necessario verificare sia trascurabile.

La gamma di temperature sulla superficie delle tegole negli esperimenti varia tra $v_0 = 300K$ a $v_{max} = 350K$. I valori estremi sono:

- $K_{\parallel}(v_0) = 823.3 W m^{-1} K^{-1}$ $K_{\parallel}(v_{max}) = 710.3 W m^{-1} K^{-1}$
 $\Delta K_{\parallel}/K_{\parallel}(v_0) = 15.9\%$
- $K_{\perp}(v_0) = 40.6 W m^{-1} K^{-1}$ $K_{\perp}(v_{max}) = 35.3 W m^{-1} K^{-1}$
 $\Delta K_{\perp}/K_{\perp}(v_0) = 15.2\%$
- $c(v_0) = 693.9 J kg^{-1} K^{-1}$ $c(v_{max}) = 800.9 J kg^{-1} K^{-1}$
 $\Delta c/c(v_0) = 13.4\%$

e i valori intermedi sono

- $K_z = K_{\parallel} = \bar{K}_{\parallel} = \frac{K_{\parallel}(v_{max}) + K_{\parallel}(v_0)}{2} = 766.8 W m^{-1} K^{-1}$ con errore percentuale massimo $\frac{\Delta K_{\parallel}/2}{\bar{K}_{\parallel}} = 7.4\%$;
- $K_x = K_y = K_{\perp} = \bar{K}_{\perp} = \frac{K_{\perp}(v_{max}) + K_{\perp}(v_0)}{2} = 38.0 W m^{-1} K^{-1}$ con errore percentuale massimo $\frac{\Delta K_{\perp}/2}{\bar{K}_{\perp}} = 7.0\%$;
- $c = \bar{c} = \frac{c(v_{max}) + c(v_0)}{2} = 747.4 J kg^{-1} K^{-1}$ con errore percentuale massimo $\frac{\Delta c/2}{\bar{c}} = 7.2\%$.

La variazione è piccola, ma comunque significativa. Dal punto di vista sperimentale è però trascurabile: la conducibilità termica parallela e il calore specifico sono legati ai fenomeni di diffusione del calore dal coefficiente di diffusività termica $D_{\parallel} = \frac{K_{\parallel}}{\rho c}$. Propagando gli errori si ottiene che la variazione percentuale dovuta alle stime di K_{\parallel} e ρ e di circa il 15%. Sperimentalmente il ritardo di trasmissione dal fronte al retro della tegola è di circa 150 ms, cui quindi va associata una variazione del 15%, cioè di circa 20 ms. La termocamera ha una frequenza di campionamento di 25 Hz, corrispondenti ad un intervallo di campionamento di 40 ms. Dunque una variazione del ritardo di 20 ms non produce variazioni rivelabili sperimentalmente con la termocamera (il frame è lo stesso) e quindi la variazione del coefficiente di diffusività è trascurabile. Pertanto l'approssimazione di linearità del sistema è valida.

2.3.2 Le condizioni al contorno

Si considerino ora le condizioni al contorno. Esse sono:

- flusso di energia fissato sulla superficie della tegola (laser o beamlets su una faccia e nullo sulle altre);
- la potenza emessa per radiazione (legge di emissione di corpo nero);

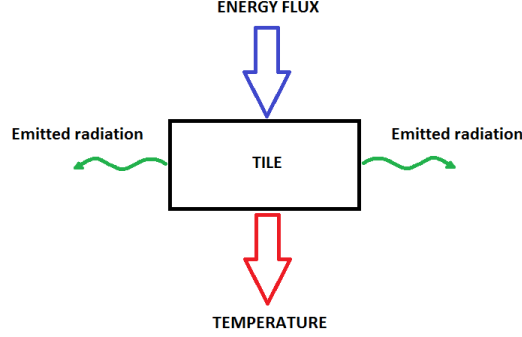


Figura 2.1: Il sistema costituito dalla tegola in CFC e le condizioni al contorno.

- nessuna dissipazione dell'energia dovuta a convezione (la tegola è in vuoto) o a conduzione per contatto tra la tegola e il suo supporto.

Assumendo la tegola sia descritta dal parallelogramma $[-a, a] \times [-b, b] \times [0, L]$ (con $a, b \gg L > 0$), abbia le facce maggiori parallele al piano xy e spessore L nella direzione z , le equazioni al contorno possono essere espresse come segue:

$$\pm K_x \frac{\partial v(t, \pm a, y, z)}{\partial x} + H(v(t, \pm a, y, z)^4 - v_0^4) = 0 \text{ per } x = \pm a \quad (2.9)$$

$$\pm K_y \frac{\partial v(t, x, \pm b, z)}{\partial x} + H(v(t, x, \pm b, z)^4 - v_0^4) = 0 \text{ per } x = \pm b \quad (2.10)$$

$$-K_z \frac{\partial v(t, x, y, 0)}{\partial z} + H(v(t, x, y, 0)^4 - v_0^4) - F(t, x, y, 0) = 0 \text{ per } z = 0 \quad (2.11)$$

$$K_z \frac{\partial v(t, x, y, L)}{\partial z} + H(v(t, x, y, L)^4 - v_0^4) = 0 \text{ per } z = L \quad (2.12)$$

dove si è supposto che il flusso di energia $F(t, x, y, z)$ incida sulla tegola in $z = 0$ e abbia direzione entrante.

$R = H(v^4 - v_0^4)$ rappresenta l'energia emessa per radiazione: H è la costante di emissione di radiazione del CFC, pari a $\epsilon \sigma_{SB}$, con $\sigma_{SB} = 5.670373 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ la costante di Stefan-Boltzmann, ed $\epsilon = 1$ coefficiente di emissività della tegola, determinato sperimentalmente (la tegola si comporta cioè come un corpo nero). La presenza della componente v^4 evidenzia la non linearità del problema generale. Per ricondurci al caso lineare bisogna quindi mostrare che, nelle condizioni sperimentali, il termine di corpo nero è trascurabile, o che almeno sia ben approssimato dalla sua linearizzazione, $R^{lin} = 4\sigma_{SB}v_0^3(v - v_0)$.

Sperimentalmente, la massima differenza di temperatura nei test con il laser è intorno a $30K$, mentre con il fascio di ioni negativi non supera i $10K$. Le successive considerazioni riguarderanno il caso di una $\Delta v = 50 K$, includendo così entrambi i casi.

Si considerino i test con i fasci di ioni, considerati incidenti su una tegola di dimensioni $196.0 \times 91.5 \times 22 \text{ mm}$, la più grande a disposizione per i test con il laser (in BATMAN sono impiegate tegole più piccole, di dimensioni $120 \times 90 \times 20 \text{ mm}$), di superficie complessiva pari a $S = 4.45 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$. Ponendo $v = 350 K$ e $v_0 = 300 K$, la temperatura ambiente, si ha $R = 3.92 \cdot 10^2 \frac{W}{m^2}$; assumendo l'intera superficie della tegola sia a $350K$, si ottiene $P = RS = 17.4 W$. Il fascio di ioni negativi è accelerato da una differenza di potenziale $\Delta V = (35 \div 65) \text{ kV}$ con una corrente $I = 0.3 \div 0.7 \text{ A}$. La potenza trasportata dal fascio è $P_{beam} = \Delta VI = (10.5 \div 45.5) \text{ kW}$. Dunque $\frac{P}{P_{beam}} = 0.0004 \div 0.0017 \ll 1$. Il termine radiativo può pertanto essere trascurato durante i test con il fascio di ioni.

Si considerino ora i test con il laser: è stato impiegato un laser a CO_2 , con una potenza $P_{laser} = (20 \div 100) W$. In questo caso, la variazione di temperatura è concentrata in una regione ristretta della tegola, approssimabile con un cerchio di raggio $r \approx 30 \text{ mm}$ su entrambe le facce maggiori della tegola, corrispondente ad una superficie $S' = 5.66 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. La potenza emessa dal doppio di tale superficie, portato a $350 K$ è $P' = 2.21 W$, valore piccolo, ma ancora confrontabile con P_{laser} ¹.

Si consideri quindi la linearizzazione: si ottiene $R^{lin} = 306.2 \frac{W}{m^2}$. La differenza di potenza irraggiata secondo l'andamento reale e la linearizzazione è $\Delta P = \Delta R \cdot S' = 0.48 W$, da cui $\frac{\Delta P'}{P_{laser}} = 0.004 \div 0.0024 \ll 1$. È pertanto possibile concludere che la linearità del sistema è verificata in entrambe le configurazioni utilizzate.

2.4 La Discrete Fourier Transform

I profili di temperatura delle tegole si possono considerare come funzioni di due variabili, $v(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, a supporto compatto (x e y descrivono una faccia, fisicamente limitata, della tegola), lisce nei punti interni del dominio. Le misure di questi profili sono le campionature di tali funzioni lisce effettuate dalla termocamera, con dimensione del campione pari alla dimensione di un

¹In realtà sul fronte della tegola la temperatura è molto maggiore (le misure sperimentali arrivano anche a $700 K$). Tuttavia queste grosse variazioni sono concentrate in uno spot di 2 mm di diametro circa, cioè una superficie 900 volte più piccola del cerchio di 60 mm di diametro considerato. Quindi il calcolo effettuato è una sovrastima e pertanto assicura l'adeguatezza dell'approssimazione lineare.

pixel delle immagini. Sono quindi delle matrici $M \times N$, dove M è il numero di campionature lungo l'asse x e N lungo l'asse y , in cui ogni elemento corrisponde al valore della temperatura in quel punto.

Data una funzione $f(x, y)$ continua, il calcolo della sua trasformata di Fourier (*Continuous Fourier Transform*, CFT) bidimensionale prevede che il dominio di integrazione sia \mathbb{R}^2 . Nel caso di $v(x, y)$, però, il suo supporto è compatto; è quindi chiara l'impossibilità di calcolare la CFT esattamente. Aggiungendo la discretizzazione della funzione effettuata dal campionamento, appare evidente la necessità di approssimare la CFT con la trasformata di Fourier discreta (DFT) bidimensionale la cui equazione è di seguito riportata:

$$F(k, j) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i(\frac{kx}{M} + \frac{jy}{N})} \quad (2.13)$$

Il risultato del calcolo è una matrice complessa $M \times N$, in cui l'unità di suddivisione lungo l'asse delle k è $\frac{2\pi}{M}$ e lungo l'asse delle j è $\frac{2\pi}{N}$; entrambi gli assi coprono quindi un range di 2π . Questa notazione permette di confrontare le trasformate di uno stesso profilo campionato su matrici diverse con la stessa risoluzione. Per confrontare invece la trasformata al variare della risoluzione adottata bisogna moltiplicare gli assi per il reciproco della risoluzione, ottenendo come unità di suddivisione nello spazio di Fourier $\frac{2\pi}{M\lambda_x}$ e $\frac{2\pi}{N\lambda_y}$ (esprese in *rad/mm*).

Lo stesso ragionamento vale per l'antitrasformata continua, sostituita dall'antitrasformata discreta, mostrata nell'equazione sottostante:

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} F(k, j) e^{i(\frac{kx}{M} + \frac{jy}{N})} \quad (2.14)$$

anche in questo caso il risultato è una matrice complessa $M \times N$, la cui parte complessa viene però ignorata.

Per il calcolo delle DFT si è ricorso alla tecnica della *Fast Fourier Transform* (in seguito FFT), algoritmo che permette di ottimizzare i tempi di calcolo delle trasformate di Fourier discrete².

Condizioni ideali per il calcolo La situazione ideale si ottiene se la DFT di una certa funzione $g(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ristretta ad un dominio $D \in \mathbb{R}^2$, è

²Il numero di operazioni aritmetiche necessarie per il calcolo di una DFT bidimensionale senza l'utilizzo di algoritmi FFT è $\mathcal{O}(M^2N^2)$. Con l'utilizzo della FFT, le operazioni sono ridotte a $\mathcal{O}(MN \log_2(NM))$, riducendo notevolmente i tempi di calcolo. In particolare, il tempo di calcolo è minimo quando M e N sono entrambi potenze intere di 2.

equivalente alla sua CFT su D , cioè quando il reticolo di campionamento di quest'ultima ristretta a D è esattamente riprodotto dalla prima. Le condizioni in cui ciò avviene sono:

- $g(x, y)$ è continua e derivabile su \mathbb{R}^2 , per evitare fenomeni di leakage³;
- $g(x, y)$ è periodica, cosicché, prendendo la dimensione del campione pari ad un multiplo intero di un periodo, l'unico errore nell'approssimazione è l'aliasing dovuto alla scelta della frequenza di campionamento. Nel calcolo della DFT con la formula 2.13 è implicita l'assunzione di periodicità della funzione sul dominio D ;
- $g(x, y)$ è banda-limitata, per lo stesso motivo della periodicità: permettere un campionamento dell'intera funzione d'onda e ridurre l'errore ai soli fenomeni di aliasing.

2.5 Problemi legati al campionamento: *aliasing*

Come sopra accennato, un errato campionamento della funzione da analizzare porta a fenomeni di aliasing. Sono ora riportate alcune considerazioni utili per minimizzarne gli effetti.

2.5.1 Il teorema di Nyquist-Shannon

Si consideri il caso unidimensionale: data una funzione continua $g(x)$ banda-limitata, di frequenza massima k_{max} , campionata in x ad una frequenza k_c , il teorema di Nyquist-Shannon afferma che i fenomeni di aliasing sono eliminati se

$$k_c \geq 2k_{max} \quad (2.15)$$

Si prenda ad esempio la gaussiana

$$g(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (2.16)$$

con x e σ lunghezze espresse in unità di campionamento u , e campionata ad un numero d'onda $k_c = \frac{2\pi}{u}$. La trasformata di Fourier di g è la gaussiana

$$G(k) = \frac{A\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}} = \frac{A\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{2\Sigma^2}} \quad (2.17)$$

³La condizione di continuità è necessaria poiché la DFT considera periodica sul dominio di campionamento la funzione da elaborare.

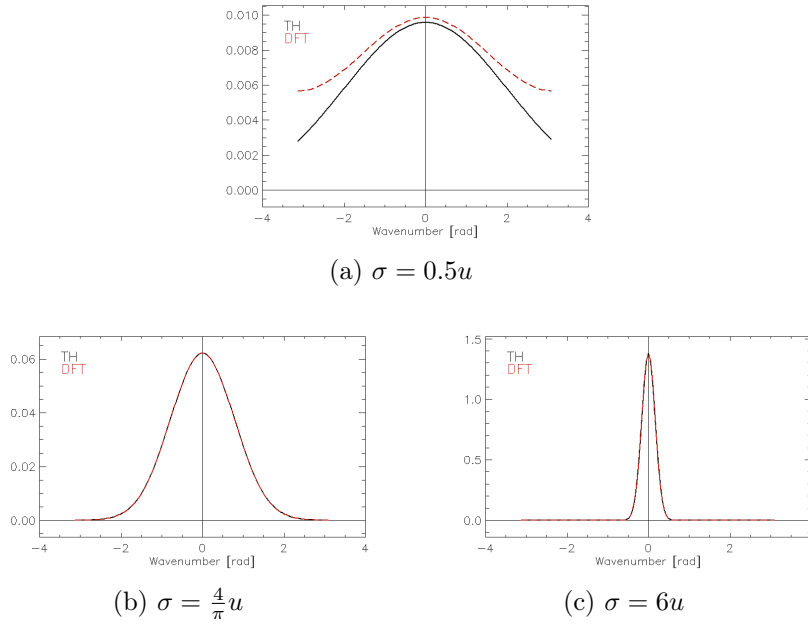


Figura 2.2: Esempi di trasformate di Fourier di gaussiane di diversa ampiezza.

di varianza $\Sigma = \frac{1}{\sigma}$. Per $k > 4\Sigma$, $\frac{G(k)}{G(0)} < 10^{-3}$. La gaussiana può pertanto essere trattata come una funzione a supporto compatto, di numero d'onda massimo $k_{max} = 4\Sigma$. Le ipotesi del teorema di Nyquist sono verificate se $k_c = \frac{2\pi}{u} \geq 2k_{max} = \frac{8}{\sigma}$, cioè se

$$\sigma \geq \frac{8}{k_c} = \frac{4}{\pi}u \approx 1.3u. \quad (2.18)$$

che è la condizione per ridurre l'aliasing della DFT.

In figura 2.2 sono mostrati i grafici delle trasformate delle funzioni gaussiane calcolate con la DFT su un array di 128 elementi, confrontate con l'andamento teorico e normalizzate al picco della curva teorica. Si nota che la condizione 2.18 è confermata: se $\sigma < \frac{4}{\pi}u$ la funzione non è a supporto compatto e quindi si verifica l'aliasing⁴.

Il teorema vale però anche all'inverso: per eliminare l'aliasing anche nel processo di antitrasformata di una funzione unidimensionale nello spazio di Fourier $G'(k)$, con k numero d'onda espresso in una certa unità di campionamento k , e campionata ad una lunghezza d'onda $x_c = \frac{1}{k}$, il teorema di

⁴Se la funzione non è banda-limitata in $I = [0, 2\pi]$, la parte non nulla al di fuori di questo intervallo viene *ripiegata* all'interno di I , cioè supponendo $G(k) \neq 0$ su $[-k_0, k_0]$, con $k_0 > 2\pi$, la DFT risultante sarà data da: $G^{DFT}(k) = \begin{cases} G(k) + G(k - 2\pi) & k \geq 0 \\ G(k) + G(2\pi - k) & k \leq 0 \end{cases}$.

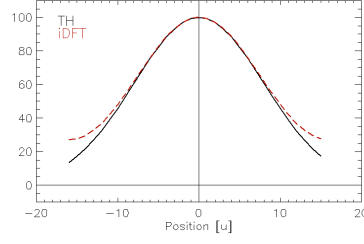
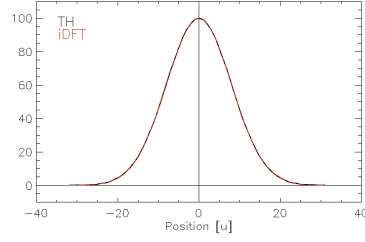
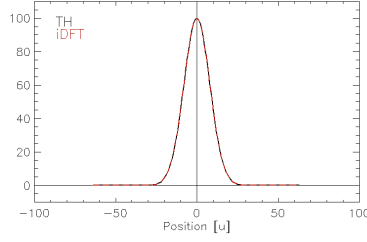
(a) $N = 4\sigma$ (b) $N = 8\sigma$ (c) $N = 16\sigma$

Figura 2.3: Esempi di antitrasformate di Fourier di gaussiane di diversa ampiezza.

Nyquist-Shannon afferma che la migliore approssimazione dell'antitrasformata di $G'(k)$ è ottenuta se $g(x)$ è limitata spazialmente, con range massimo x_{max} , e se

$$x_c \geq 2x_{max} \quad (2.19)$$

Considerando come funzione la gaussiana in 2.17 e applicando il ragionamento precedente con le debite sostituzioni, si ottiene la condizione:

$$\Sigma \geq \frac{4}{\pi x_c} = \frac{4}{\pi} k \approx 1.3k \quad (2.20)$$

dalla quale, ricordando che $\sigma = \frac{1}{\Sigma}$ e che per un campione di N elementi nello spazio dei segnali corrisponde un'unità di campionamento nello spazio di Fourier $k = \frac{2\pi}{Nu}$, si ottiene una nuova condizione su σ :

$$\sigma \leq \frac{N}{8}u. \quad (2.21)$$

In figura 2.3 sono mostrati i grafici normalizzati delle trasformate di Fourier inverse, ottenute antitrasformando la gaussiana nello spazio di Fourier con $\Sigma = 0.125 u^{-1}$ (cui corrisponde $\sigma = 8u$), e variando il numero di elementi dell'array.

Combinando le equazioni 2.18 e 2.21, si determina la relazione tra varianza della funzione σ e dimensione del campione N tale che i fenomeni di aliasing

siano eliminati:

$$\frac{4}{\pi}u \leq \sigma \leq \frac{N}{8}u. \quad (2.22)$$

I coefficienti della relazione 2.22 non sono ovviamente assoluti: essi derivano da considerazioni euristiche legate al caso particolare della gaussiana. È possibile però scrivere la seguente disuguaglianza

$$\alpha u \leq \theta \leq \beta Nu \quad (2.23)$$

che vale per qualche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ per qualunque funzione a campana di ampiezza θ , di cui si ha un campione di N misure effettuate con frequenza di campionamento $\frac{1}{u}$.

Questa condizione può essere adattata al caso bidimensionale⁵. Nel caso in esame si ottiene la relazione 2.23 per entrambe le dimensioni (perché il reticolo di campionamento è rettangolare e quindi lo è anche il reticolo reciproco).

Rilassamento delle condizioni per evitare l'aliasing La tecnica della funzione di trasferimento ha come obiettivo la ricostruzione del flusso di energia nello spazio reale, non nello spazio di Fourier. Questa considerazione porta a trascurare la condizione per evitare l'aliasing nello spazio di Fourier: supponendo di misurare un profilo gaussiano bidimensionale senza rispettare la condizione 2.18, la trasformata discreta che si ottiene non è una buona approssimazione della trasformata continua, ma permette, invertendola, di ricostruire esattamente il profilo osservato e campionato. Invece, sostituendo la trasformata discreta con la continua e provando ad invertirla non si riesce a ricostruire il segnale di partenza.

2.6 Problemi legati al troncamento: *leakage*

Il *leakage* è un fenomeno di distorsione dello spettro della DFT dovuto alla presenza di discontinuità, alla dimensione finita della regione analizzata D del dominio della funzione g di input, o al numero d'onda di campionamento finito. Questo perché il troncamento del dominio è equivalente a moltiplicare la funzione per la funzione caratteristica di D ($rect_D(x, y) = 1$ se $(x, y) \in D$ e 0 altrove), cioè corrisponde a effettuare la convoluzione nello spazio di Fourier della trasformata della funzione con la trasformata della funzione

⁵L'estensione al caso multidimensionale è formalizzata nel teorema di Petersen-Middleton [2].

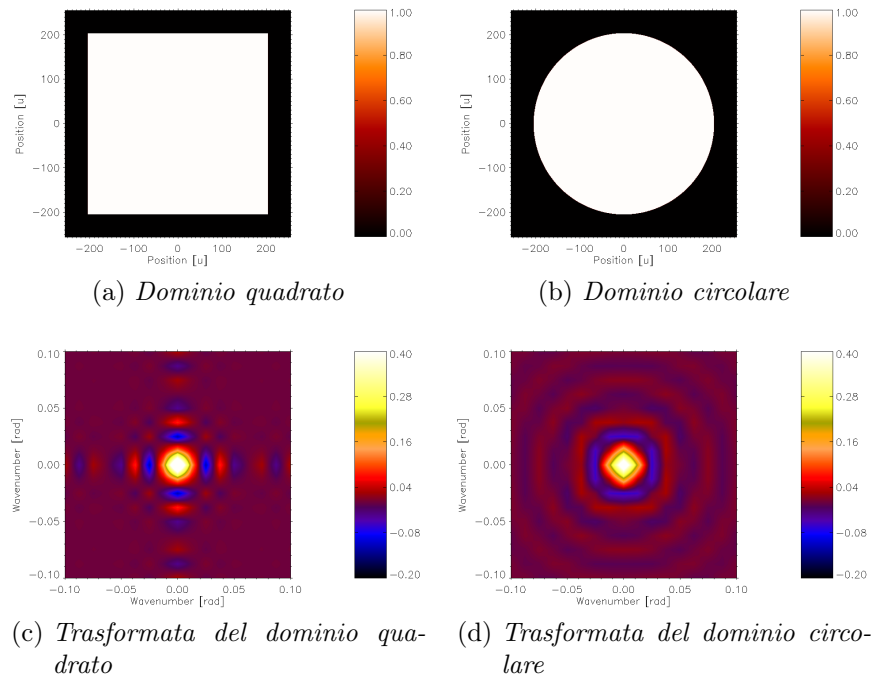


Figura 2.4: Forma del windowing.

caratteristica. Il leakage dipende quindi fortemente dalla forma del dominio considerato [2]. Ad esempio un troncamento quadrato produce oscillazioni significative lungo gli assi k e j dello spazio di Fourier, mentre uno circolare le produce su tutto il dominio (oscillazioni a *sombbrero* [2]), come mostrato in figura 2.4.

Per evitare questo fenomeno, poiché la DFT considera g periodica su D , è necessario che ogni punto del bordo di D abbia lo stesso valore, così da eliminare eventuali discontinuità che si tradurrebbero in oscillazioni impreviste nello spazio di Fourier. Questa situazione ideale non è sempre ottenuta nelle misure: in alcuni casi, la variazione di temperatura non è localizzata nella regione centrale della tegola, ma raggiunge anche i bordi. Così come per l'aliasing, anche per il leakage è presente la controparte dovuta alle discontinuità nello spazio delle frequenze, che produce in questo caso delle oscillazioni aggiuntive nello spazio dei segnali.

Per ridurre le oscillazioni fittizie dovute a queste discontinuità al bordo, è stato sviluppato un metodo, esposto nella sezione seguente.

2.6.1 Windowing e overturning

Si consideri una generica funzione $g(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua su \mathbb{R}^2 ; la si moltiplichi per la funzione caratteristica di un certo dominio rettangolare $D \in \mathbb{R}^2$, e la si campioni così da ottenere una matrice $M \times N$, con $x = 0, \dots, M - 1$ e $y = 0, \dots, N - 1$. Si vuole ottenere la migliore approssimazione della CFT mediante la DFT applicata al campione in D .

La DFT considera $g(D)$ come una funzione su \mathbb{R}^2 periodica di periodo D . Non sempre però tale funzione è realmente periodica su D , e dunque possono introdursi delle discontinuità. Per eliminare questi effetti di bordo è necessario che $g(D)$ abbia lo stesso valore per tutti i punti sul bordo di D . Questo risultato si ottiene applicando una funzione $w(D)$, chiamata *window*, che smussa pesantemente la funzione $g(D)$ vicino ai bordi, portandola a zero. La *window* utilizzata nel presente lavoro è il prodotto di due distribuzioni di Fermi-Dirac unidimensionali

$$w(x, y) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{|x - M/2| - x_0}{r_x}\right)} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{|y - N/2| - y_0}{r_y}\right)} \quad (2.24)$$

x_0, y_0, r_x, r_y dipendono dalle dimensioni della matrice su cui si applica il windowing. Essi valgono

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{2}{5}M & y_0 &= \frac{2}{5}N \\ r_x &= M/100 & r_y &= N/100 \end{aligned}$$

e sono tali che i punti al bordo della matrice siano ridotti di un fattore $4.5 \cdot 10^{-5}$. Si è scelta questa funzione, e non, ad esempio, una finestra di Hanning, perché è molto piatta al centro, consentendo quindi di perturbare il segnale solo ai bordi. La forma quadrata della finestra di Fermi produce comunque delle oscillazioni lungo gli assi dello spazio di Fourier, come mostrato in figura, ma queste sono smorzate rispetto al troncamento. 2.5.

Utilizzando una funzione finestra le discontinuità diventano trascurabili, ma vengono modificate le caratteristiche della funzione vicino ai bordi.

Per ovviare a questo problema si effettua un *ribaltamento* (*overturning*) di $g(D)$: se $D = [a, b] \times [c, d]$, si considera il dominio

$$D' = [a - b, a + b] \times [c - d, c + d]$$

e vi si definisce la funzione $g'(D')$ in questo modo: detta r_s la riflessione di $g(D)$ rispetto al segmento, o al punto, s , si ha:

$$\begin{aligned} g'([a, b] \times [c, d]) &= g'(D) = g(D) \\ g'([a - b, a] \times [c, d]) &= r_{(a, [c, d])} \end{aligned}$$

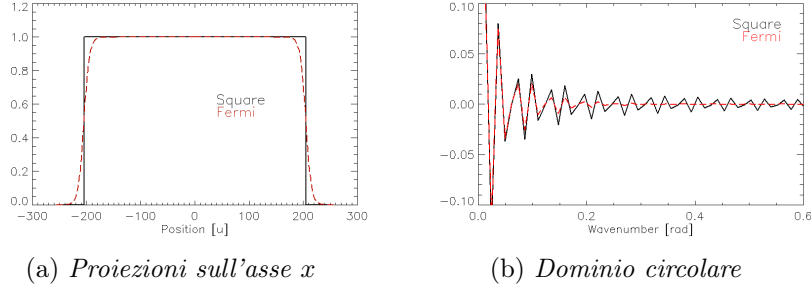


Figura 2.5: Confronto tra la finestra di Fermi e il troncamento su un dominio quadrato.

$$\begin{aligned}
 g'([a, b] \times [c - d, c]) &= r_{([a,b],c)} \\
 g'([b, a + b] \times [c, d]) &= r_{(b,[c,d])} \\
 g'([a, b] \times [d, c + d]) &= r_{([a,b],d)} \\
 g'([a - b, a] \times [d, c + d]) &= r_{(a,d)} \\
 g'([a - b, a] \times [c - d, c]) &= r_{(a,c)} \\
 g'([b, a + b] \times [c - d, c]) &= r_{(b,c)} \\
 g'([b, a + b] \times [d, c + d]) &= r_{(b,d)}
 \end{aligned}$$

La funzione $g(D)$ è stata quindi estesa per riflessione a $g'(D')$, funzione continua su tutti i punti interni di D' , e in particolare continua su D . Applicando la window su $g'(D')$, si ottiene una DFT in cui le alterazioni dovute all'azione della window non sono più ai bordi di D , ma sono ai bordi di D' , lasciando intoccata $g(D) = g(D)$.

Poiché non è necessario preservare le dimensioni della matrice ribaltata, il dominio D' può venir modificato per ottenere le condizioni migliori di calcolo delle DFT:

- applicando il windowing e aggiungendo zeri intorno alla matrice $g'(D')$ così ottenuta;
- troncando la matrice $g'(D')$ e applicando successivamente il windowing.

Dove possibile, sia l'aggiunta degli zeri che il troncamento sono tali da ottenere delle dimensioni pari ad una potenza di 2 (così da ottimizzare il calcolo della FFT). Un esempio di applicazione del windowing è mostrato in figura 2.6.

Il metodo appena descritto non elimina completamente le oscillazioni, ma le riduce solamente. Per riuscire a renderle trascurabili è necessario utilizzare un filtro passa-basso.

I due fenomeni di distorsione del segnale fin qui descritti sono in realtà fortemente correlati: è stato dimostrato che la riduzione dell'aliasing in un

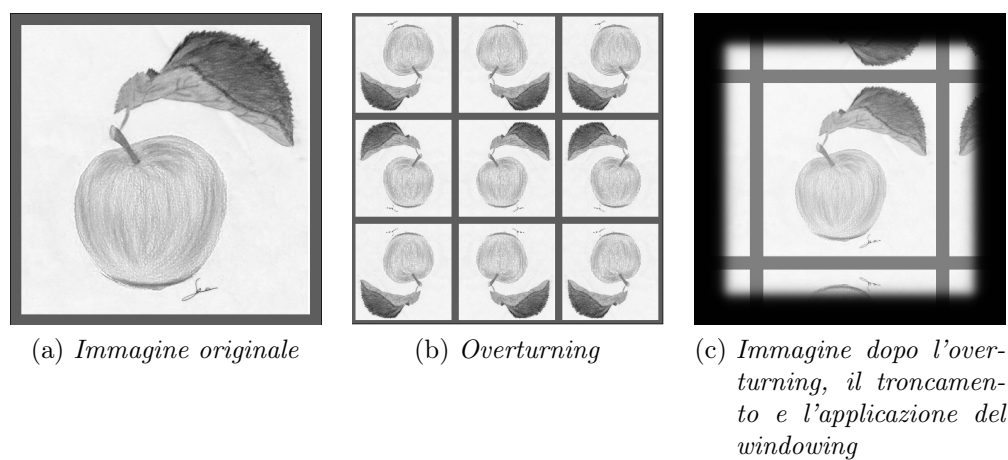


Figura 2.6: Overturning, troncamento e windowing.

dominio produce un aumento del leakage nell'altro e viceversa [21]. Non è quindi possibile eliminare completamente le distorsioni, ma solo trovare un valido compromesso. Sia in un caso che nell'altro, però, appare di fondamentale importanza che il segnale sia limitato sia spazialmente che nello spazio dei numeri d'onda.

Capitolo 3

La funzione di antitrasferimento

Nel precedente capitolo si è mostrata la linearità del sistema nelle condizioni sperimentali considerate, consentendo l'applicazione della teoria della funzione di trasferimento al sistema della tegola di CFC. Nella notazione del capitolo precedente, la relazione fondamentale di tutta l'analisi è

$$U_t(k, j) = \frac{V_t(k, j)}{2\pi F_t(k, j)} =: G(k, j)V_t(k, j) \quad (3.1)$$

$G_t(k, j) := (2\pi F_t(k, j))^{-1}$ è nel seguito chiamata *funzione di antitrasferimento* della tegola ad un determinato istante dall'inizio dell'impulso (nello spazio di Fourier).

È stato sviluppato un software per determinare $G_t(k, j)$, per poi applicarla a diversi casi di profili bidimensionali di temperatura ($v_t(x, y)$ con trasformata $V_t(k, j)$) per ottenere il profilo del flusso di energia generatore ($u_t(x, y)$ con trasformata $U_t(k, j)$):

- simulazioni, di cui si conosce a priori l'andamento sul retro della tegola e che quindi permettono un'effettiva verifica della validità del metodo, svolte a diverse risoluzioni;
- le immagini dei test con il laser, per riprodurre il profilo della densità di potenza (flusso di energia) associato al laser, con una risoluzione di circa $0.167 \text{ mm}/\text{pixel}$;
- i dati dell'esperimento BATMAN, con risoluzione tra 0.5 e $1.0 \text{ mm}/\text{pixel}$.

Si è utilizzato il linguaggio di programmazione IDL (Interactive Data Language) [11], sfruttando in particolare il suo algoritmo FFT.

3.1 Risposta all'impulso

Per prima cosa si è studiata la risposta all'impulso delle tegole. Sono state costruite due matrici $M \times N$: una per modellizzare il flusso di energia in ingresso (il fronte della tegola), il più possibile puntiforme, e una per il corrispondente profilo di temperatura (il retro della tegola).

I due profili sono indicati rispettivamente con $u^\delta(x, y)$ e $v^\delta(x, y)$ dove (x, y) rappresenta la posizione corrispondente all'elemento di matrice di colonna x e riga y , e l'apice δ indica che sono profili relativi ad un ingresso puntiforme¹. Il fattore di conversione da pixel a millimetri per le ascisse è indicato con χ_x , mentre per le ordinate con χ_y .

Il flusso di energia è rappresentato da un profilo gaussiano

$$u^\delta(x, y) = A_u \exp\left(-\log(2)\left(\left(\frac{x-p}{\Gamma_x^u/\chi_x}\right)^2 + \left(\frac{y-q}{\Gamma_y^u/\chi_y}\right)^2\right)\right) \quad (3.2)$$

corrispondente ad un laser centrato in $C = (p, q) = (M/2, N/2)$, di potenza $P = 100 W$ e di semiampiezza a mezza altezza $\Gamma_x^u = \Gamma_y^u = 1 mm$, da cui segue

$$A_u = \frac{\log(2)}{\pi} \frac{P}{\Gamma_x^u \Gamma_y^u}$$

Per il valore di potenza considerato si ha $A_u = 22.1 W mm^{-2}$.

Il profilo di temperatura sul retro è invece determinato mediante una simulazione agli elementi finiti della soluzione dell'equazione del calore per la tegola sottoposta all'impulso del laser appena descritto. Il miglior fit dell'andamento risultante è dato dall'equazione di Hubbert modificata [20]:

$$v^\delta(x, y) = A_v \left(\cosh \sqrt{(x-p)^2 b^2 + (y-q)^2 d^2} \right)^{-r} \quad (3.3)$$

b e d sono legate alla semiampiezza a mezza altezza Γ^v dalle relazioni

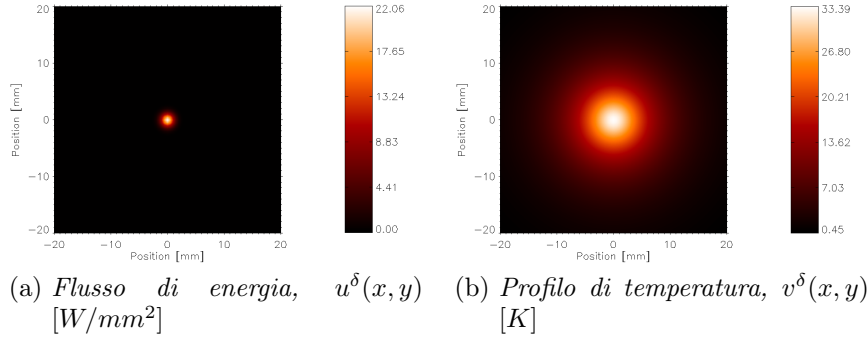
$$b = \frac{\operatorname{arccosh}(2^{1/r})}{\Gamma_x^v/\chi_x} \quad d = \frac{\operatorname{arccosh}(2^{1/r})}{\Gamma_y^v/\chi_y}$$

In tabella 3.1 sono riportati i parametri dei profili di temperatura al variare di Δt , e in figura 3.1 sono mostrati $u^\delta(x, y)$ e $v^\delta(x, y)$.

¹Con puntiforme si intendono le dimensioni del laser, che ha dimensione piccola ma finita. Dunque con l'apice δ non si intende la risposta ad una sollecitazione tipo δ -Dirac, come indicato nel capitolo precedente, con trasformata di Fourier pari ad una costante (o ad un'onda piana in caso di una traslazione), ma la risposta alla sollecitazione più piccola fisicamente possibile (con trasformata di Fourier non uniforme).

Tabella 3.1: Parametri del profilo di temperatura al variare di Δt

Δt [s]	A_v [K]	Γ_x^v [mm]	Γ_y^v [mm]	r
1.0	21.3	4.68	4.68	0.94
3.0	33.4	5.89	5.89	0.38
5.0	39.5	6.53	6.52	0.21
10.0	45.9	8.24	8.19	0.13

Figura 3.1: Risposta all'impulso: fronte (sinistra) e retro (destra) della tegola a $\Delta t = 3$ s.

La funzione di antitrasferimento $G(k, j)$ è stata quindi stimata dal rapporto tra la trasformata del flusso di energia, indicata con $U^\delta(k, j)$, e quella del profilo di temperatura, indicata con $V^\delta(k, j)$ (queste due trasformate sono state calcolate dopo l'applicazione del windowing, utilizzando la finestra di Fermi la cui equazione è riportata in 2.24). La parte reale della funzione di antitrasferimento è mostrata in figura 3.2 a fianco alle parti reali delle trasformate del flusso e della temperatura normalizzate (le trasformate sono state calcolate dopo aver eseguito una traslazione degli assi, in modo che sia $u^\delta(x, y)$ che $v^\delta(x, y)$ fossero simmetriche rispetto all'origine degli assi; in questo modo inoltre le parti immaginarie delle trasformate sono nulle).

3.1.1 Limiti nel calcolo delle trasformate

Come detto in precedenza, l'approssimazione delle trasformate di Fourier continue con le trasformate discrete presenta dei problemi legati alle condizioni di calcolo: la funzione di antitrasferimento agisce come un filtro passa-alto, poiché nello spazio reale il flusso di energia presenta un profilo più stretto dell'andamento della temperatura e quindi nello spazio di Fourier la relazione si inverte, cioè la funzione al denominatore, $V^\delta(k, j)$, tende a 0 più rapida-

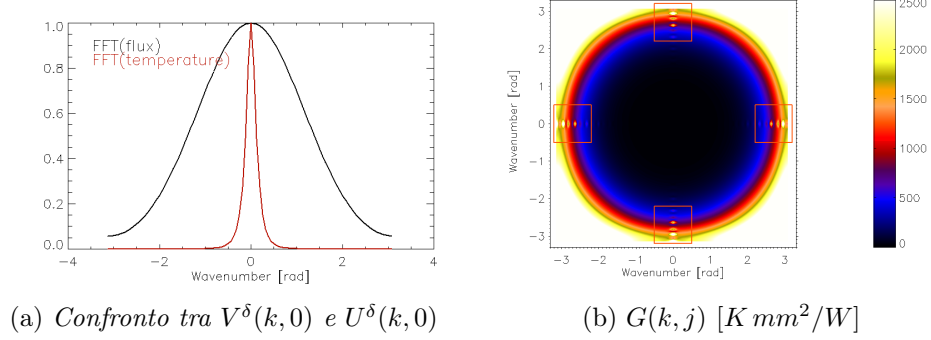


Figura 3.2: Trasformate normalizzate del flusso e della temperatura e funzione di antitransferimento a $\Delta t = 3$ s dall'inizio dell'impulso.

mente della funzione al numeratore², $U^\delta(k, j)$; eventuali oscillazioni dovute ai fenomeni di leakage descritti in 2.4, evidenti soprattutto ad alti numeri d'onda, vengono esaltate notevolmente, falsando qualunque tentativo di ricostruzione.

La causa di queste oscillazioni è legata alla trasformata discreta di Fourier del profilo Hubbertiano, al denominatore nel calcolo di $G(k, j)$; si è infatti notato che la funzione di antitransferimento può presentare delle oscillazioni non previste per numeri d'onda alti (evidenziate dai riquadri arancioni in figura 3.2), che si avvicinano al punto $(k, j) = (0, 0)$ all'aumentare della semiampiezza a mezza altezza di $v^\delta(x, y)$, mantenendo costante il numero di pixel.

Per approfondire questo aspetto e trovare le condizioni di calcolo ideali si sono analizzate le curve hubbertiane della temperatura al variare dell'istante dall'inizio dell'impulso e della risoluzione adottata.

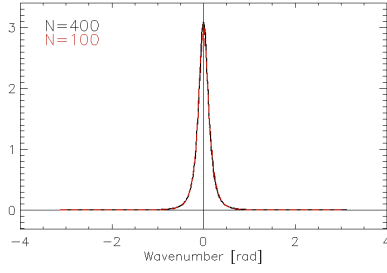
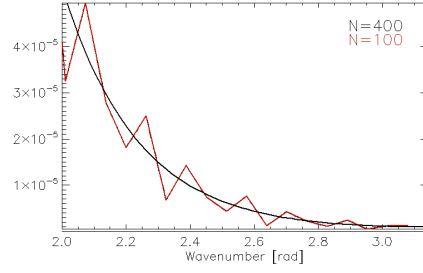
Analisi delle curve di Hubbert Non essendo possibile calcolare analiticamente la trasformata della funzione di Hubbert modificata, non è possibile un confronto con l'andamento teorico, come nel caso della gaussiana, per trovare l'ambito di migliore approssimazione della trasformata.

Come detto in precedenza, la trasformata della curva della temperatura è più stretta della trasformata della gaussiana del laser; per eliminare l'aliasing

²Questo è quello che accade a bassi numeri d'onda: si è osservato che la trasformata del profilo del laser (gaussiana) diventa più piccola della trasformata della curva di Hubbert ad alti numeri d'onda, e dunque la funzione di antitransferimento agisce più propriamente come un filtro passa-banda. In realtà la funzione di Hubbert può, al variare dell'esponente, diventare più ripida di un profilo gaussiano. Questo però non è fisicamente possibile, poiché il profilo di temperatura deve essere più smussato del profilo del flusso di energia

Tabella 3.2: Dimensioni ideali delle matrici per il calcolo di $G(k, j)$

Δt [s]	0.167 mm/pixel	0.5 mm/pixel	1.0 mm/pixel	2.0 mm/pixel
1.0	1012×1012	330×330	98×98	36×36
3.0	1650×1650	450×450	116×116	50×50
5.0	2048×2048	402×402	116×116	60×60
10.0	2800×2800	486×486	152×152	76×76

(a) *Figura intera*(b) *Ingrandimento in $2.0 \div \pi$ rad*Figura 3.3: Confronto tra $V^{400}(k, 0)$ e $V^{100}(k, 0)$

è dunque sufficiente rispettare la condizione 2.18 determinata per il caso gaussiano³.

Rimane quindi il problema del leakage, che produce le oscillazioni ad alti numeri d'onda, dovuto alle discontinuità al bordo. In figura 3.3 sono mostrate, sovrapposte, le proiezioni sull'asse k delle trasformate della funzione di Hubbert a $\Delta t = 3$ s, ottenute da una matrice 100×100 , $V^{100}(k, 0)$, e da una 400×400 , $V^{400}(k, 0)$, con risoluzione 1.0 mm/pixel. Pur non essendo visibili nella figura intera, l'ingrandimento mostra delle oscillazioni dovute al leakage, che scompaiono all'aumentare delle dimensioni della matrice; per questo motivo sono state determinate caso per caso le dimensioni delle matrici per le quali le oscillazioni non sono più significative, al variare dell'istante e della risoluzione adottata, presentate in tabella 3.2.

Particolarmente problematico è il caso con $\chi \approx 1/6$ mm/pixel (risoluzione adottata nei test con il laser). A questa risoluzione le dimensioni necessarie per evitare le oscillazioni sono superiori a 1024×1024 , richiedendo tempi di calcolo molto lunghi per le trasformate. Nei casi in cui non è possibile utilizzare le matrici di dimensioni maggiori o uguali a quelle in tabella 3.2 si è scelto di applicare un filtro passa-basso alla funzione di antitrasferimento,

³Come detto in precedenza, non è necessario rispettare la condizione 2.22: l'importante è evitare l'aliasing nello spazio diretto.

con numero d'onda di taglio in corrispondenza dell'inizio delle oscillazioni non desiderate, così da preservare la curva nell'intervallo non oscillante⁴.

Il filtro passa-basso adottato è un filtro di Fermi di equazione

$$D(k, j) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\sqrt{k^2 + j^2 - \eta}}{s}\right)} \quad (3.4)$$

s è la "velocità" del filtraggio, posta pari a 1, e η la frequenza di taglio, da determinare caso per caso. Si è scelto un filtro di Fermi perché l'andamento della funzione di trasferimento è esponenziale e per portarlo a zero si è preferito usare un filtro a sua volta esponenziale piuttosto che, ad esempio, un filtro di Butterworth, anche se di ordine molto alto.

Riassumendo, i problemi computazionali per il calcolo delle trasformate sono riconducibili alle dimensioni delle matrici, all'ampiezza del profilo di temperatura e alla risoluzione adottata.

⁴Come anticipato e come verrà mostrato in seguito, l'applicazione di un filtro passa-basso è in realtà obbligata, poiché lavorare solo con un filtro passa alto, quale è la funzione di antitrasferimento, porterebbe ad accentuare eccessivamente oscillazioni causate da problemi computazionali nel calcolo della trasformata discreta del profilo di temperatura.

Capitolo 4

Le simulazioni

La funzione di antitrasferimento determinata e filtrata come illustrato nel capitolo 3 è stata utilizzata per ricostruire dei profili simulati, di cui è noto a priori il flusso di energia generatore, così da poter valutare il risultato ottenuto. La valutazione del risultato è data da un confronto grafico e dal calcolo del residuo medio, definito come segue:

$$\bar{R} = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} |u^{th}(x, y) - u^{reb}(x, y)| \quad (4.1)$$

dove M e N sono le dimensioni delle matrici di partenza, u^{th} è il profilo di flusso di energia simulato e u^{reb} il profilo ricostruito. È utilizzato in particolare il rapporto tra \bar{R} e il massimo di u^{th} , indicato con $\bar{R}_{\%}$ (residuo relativo).

4.1 TEST 0

Il primo test è la ricostruzione del profilo del laser $u^{T0}(x, y) = u^{\delta}(x, y)$, riportato precedentemente in figura 3.1 e utilizzato per determinare la funzione di antitrasferimento, applicando $G(k, j)$ alla trasformata della simulazione dell'andamento della temperatura, $V^{T0}(k, j) = V^{\delta}(k, j)$.

I parametri delle curve di Hubbert sono quelli a $\Delta t = 3 s$ dall'inizio dell'impulso. I profili di partenza sono calcolati su matrici 512×512 , mentre dopo l'overturning si utilizzano matrici 1024×1024 . È stato necessario applicare il filtro alla funzione di antitrasferimento solo per $\chi = 0.167 \text{ mm/pixel}$.

In tabella 4.1 sono presentati i parametri dei filtri per le matrici utilizzate per il test al variare della risoluzione. Le deviazioni medie per ogni ricostruzione sono riportate in tabella 4.2.

La figura 4.1 mostra le proiezioni sull'asse x delle ricostruzioni dei picchi (le proiezioni sull'asse y sono identiche per simmetria). L'andamento è molto

Tabella 4.1: Parametri dei filtri della funzione di antitrasferimento per i test con $\chi = 0.167 \text{ mm/pixel}$.

Istante [s]	Matrice	Cutoff [rad]	Cutoff [mm]*
1.0 s	512 × 512	0.39	1.33
	1024 × 1024	0.75	0.70
3.0 s	512 × 512	0.27	1.94
	1024 × 1024	0.94	0.55
5.0 s	512 × 512	0.20	2.67
	1024 × 1024	1.07	0.49
10.0 s	512 × 512	0.10	5.33
	1024 × 1024	0.99	0.53

* Si intende la lunghezza d'onda corrispondente al numero d'onda di taglio.

Tabella 4.2: Residui medi dei TEST 0 a $\Delta t = 3 \text{ s}$

χ [mm/pixel]	Metodo	\bar{R} [W/mm ²]	$\bar{R}_{\%}$
0.167	Diretto	$6.32 \cdot 10^{-2}$	$2.86 \cdot 10^{-3}$
	Overturning	$1.56 \cdot 10^{-1}$	$7.08 \cdot 10^{-3}$
0.5	Diretto	$2.71 \cdot 10^{-17}$	$1.23 \cdot 10^{-18}$
	Overturning	$3.74 \cdot 10^{-8}$	$1.69 \cdot 10^{-9}$
1.0	Diretto	$1.08 \cdot 10^{-17}$	$4.91 \cdot 10^{-19}$
	Overturning	$2.42 \cdot 10^{-13}$	$1.10 \cdot 10^{-14}$
2.0	Diretto	$4.46 \cdot 10^{-18}$	$2.04 \cdot 10^{-19}$
	Overturning	$2.78 \cdot 10^{-15}$	$1.26 \cdot 10^{-16}$

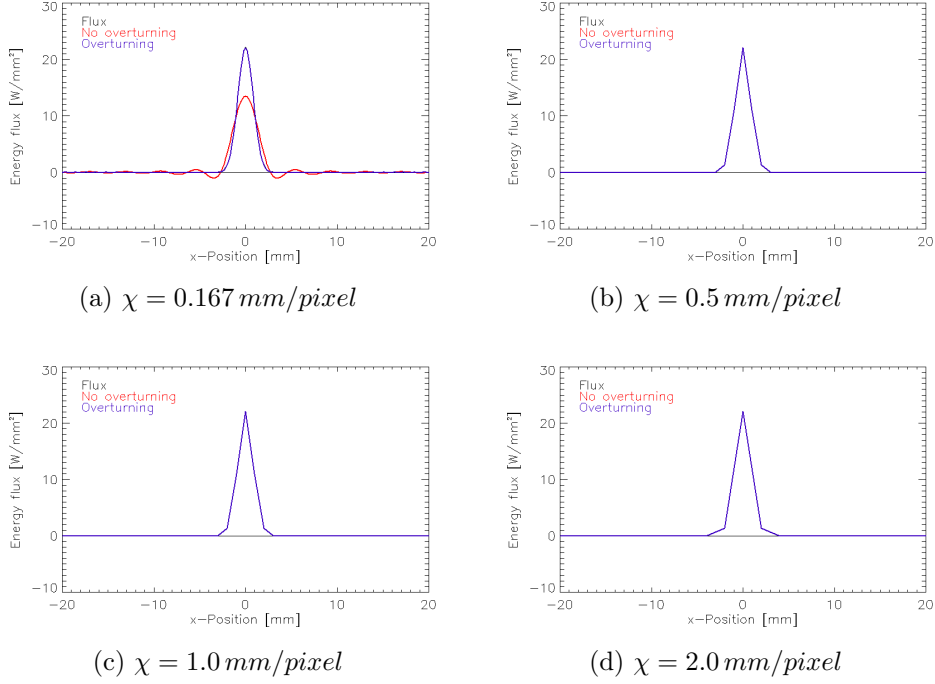


Figura 4.1: TEST 0, proiezioni sull'asse x

ben riprodotto per $\chi = 0.5 \text{ mm/pixel}$, e anche per $\chi = 1.0 \text{ mm/pixel}$, $\chi = 2.0 \text{ mm/pixel}$ nonostante sia contraddetta la condizione 2.18 e dunque si abbia aliasing nello spazio di Fourier.

L'unico caso in cui la ricostruzione non è perfetta è quello con $\chi = 0.167 \text{ mm/pixel}$ senza l'utilizzo dell'overturning, a causa dell'utilizzo obbligato del filtro di Fermi 3.4 con un basso numero d'onda di taglio per correggere le oscillazioni. La ricostruzione con l'overturning riproduce meglio il picco perché la matrice utilizzata ha dimensioni maggiori; le oscillazioni della funzione di antitrasferimento sono perciò spostate a numeri d'onda alti e non influenzano la ricostruzione del picco, anche se sono ancora presenti ai bordi, come mostrato in figura 4.2 (per questo motivo il valore corrispondente dei residui è tanto più grande degli altri casi).

4.2 TEST 1

Per cercare di simulare un fascio più largo di un laser, mantenendo comunque la possibilità di confrontare il risultato della ricostruzione con l'andamento teorico, sono stati sovrapposti alcuni profili di risposte impulsive con i picchi posti in diverse posizioni all'interno di una certa regione circolare, di diametro

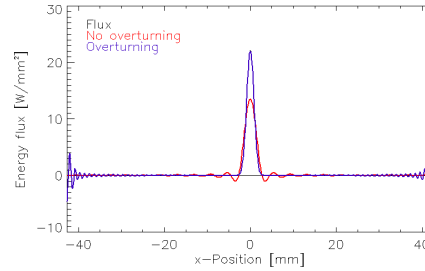


Figura 4.2: Proiezioni sull'asse x delle ricostruzioni del TEST 0 per $\chi = 0.167 \text{ mm/pixel}$.

$d = 7 \text{ mm}$ (dimensione dei fori sulla maschera di rame posta davanti a mini-STRIKE in BATMAN). Si sono utilizzate le stesse matrici del precedente test, con gli stessi filtri.

- $\chi = 0.167 \text{ mm/pixel}$
Il test è dato dalla sovrapposizione di 349 impulsi (altezza massima del picco: 899.8 W/mm^2);
- $\chi = 0.5 \text{ mm/pixel}$
Il test è dato dalla sovrapposizione di 149 impulsi (altezza massima del picco: 399.9 W/mm^2);
- $\chi = 1.0 \text{ mm/pixel}$
Il test è dato dalla sovrapposizione di 37 impulsi (altezza massima del picco: 100.0 W/mm^2);
- $\chi = 2.0 \text{ mm/pixel}$
Il test è dato dalla sovrapposizione di 9 impulsi (altezza massima del picco: 27.9 W/mm^2).

In tabella 4.3 sono riportati i residui medi e percentuali rispetto ai picchi per le diverse risoluzioni.

Le ricostruzioni riproducono perfettamente l'originale per $\chi = 2.0, 1.0, 0.5 \text{ mm/pixel}$, mentre vi sono dei problemi per $\chi = 0.167 \text{ mm/pixel}$: come si nota dal valore dei residui, molto più alti rispetto alle altre risoluzioni, il picco non è ben riprodotto: le oscillazioni, eliminato il contributo della funzione di antitrasferimento, sono presenti a causa della trasformata del profilo v^{T1} .

Per ridurre questo leakage si è scelto di applicare un ulteriore filtro passa-basso, e si è cercata la lunghezza d'onda che minimizzasse le oscillazioni l , confrontando i valori dei residui al variare di l . Si sono confrontati due tipi di filtri: un filtro di Fermi bidimensionale, lo stesso utilizzato per correggere

Tabella 4.3: Residui medi dei TEST 1 a $\Delta t = 3$ s

χ [mm/pixel]	Metodo	\bar{R} [W/mm ²]	$\bar{R}_{\%}$
0.167	Diretto	60.4	$6.71 \cdot 10^{-2}$
	Overturning	56.4	$6.27 \cdot 10^{-2}$
0.5	Diretto	$8.95 \cdot 10^{-8}$	$2.23 \cdot 10^{-10}$
	Overturning	$5.44 \cdot 10^{-6}$	$1.36 \cdot 10^{-8}$
1.0	Diretto	$1.43 \cdot 10^{-11}$	$1.43 \cdot 10^{-13}$
	Overturning	$9.62 \cdot 10^{-12}$	$9.62 \cdot 10^{-14}$
2.0	Diretto	$3.86 \cdot 10^{-14}$	$1.38 \cdot 10^{-15}$
	Overturning	$2.29 \cdot 10^{-14}$	$8.20 \cdot 10^{-16}$

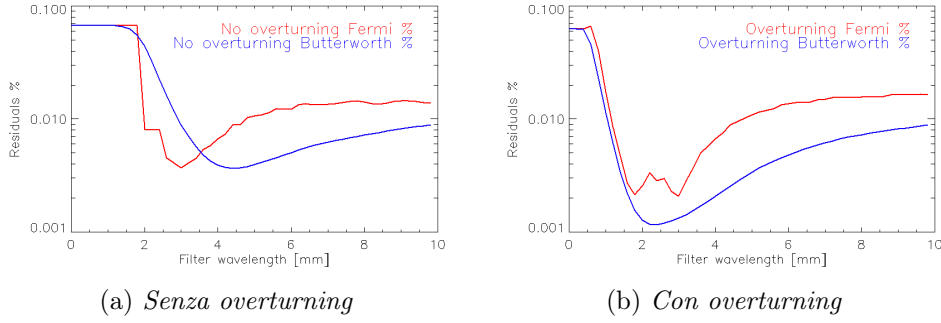


Figura 4.3: Residui medi percentuali al variare delle dimensioni del filtro.

la funzione di antitrasferimento, descritto dall'equazione 3.4 a pagina 34, e un filtro di Butterworth bidimensionale, di equazione

$$B(k, j) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{k^2 + j^2}}{\eta}\right)^{2n}}} \quad (4.2)$$

dove η è il numero d'onda di taglio e n l'ordine del filtro, posto pari a 5 (sono stati confrontati i filtraggi al variare di n e si è verificato che i residui minori si hanno per $n = 5$).

In figura 4.3 sono mostrati i grafici del residuo medio percentuale $R_{\%}$. La prima cosa che si nota è che il residuo cala grazie al filtro, giustificandone l'applicazione. Inoltre, per entrambe le tipologie di analisi la curva dei residui presenta un minimo, la cui ascissa è la lunghezza d'onda ottimale per il filtro.

Di seguito sono riportate le lunghezze d'onda ottimali¹.

- RICOSTRUZIONE SENZA OVERTURNING

Fermi:

$$l = (2.90 \pm 0.05) \text{ mm} \quad \bar{R} = 3.26 \text{ W/mm}^2 \quad \bar{R}_{\%} = 3.62 \cdot 10^{-3}$$

Butterworth:

$$l = (4.45 \pm 0.05) \text{ mm} \quad \bar{R} = 3.29 \text{ W/mm}^2 \quad \bar{R}_{\%} = 3.65 \cdot 10^{-3}$$

- RICOSTRUZIONE CON OVERTURNING

Fermi:

$$l = (2.95 \pm 0.05) \text{ mm} \quad \bar{R} = 1.75 \text{ W/mm}^2 \quad \bar{R}_{\%} = 1.95 \cdot 10^{-3}$$

Butterworth:

$$l = (2.35 \pm 0.05) \text{ mm} \quad \bar{R} = 1.04 \text{ W/mm}^2 \quad \bar{R}_{\%} = 1.16 \cdot 10^{-3}$$

Per il caso senza overturning appare più conveniente il filtro di Fermi, mentre nel caso con overturning il filtro di Butterworth. Tuttavia, poiché il grafico delle ricostruzioni utilizzando Butterworth ha un andamento più regolare, si è preferito questo filtro in entrambi i casi (il motivo della regolarità è legato alla forma della trasformata dei due tipi di filtro: il filtro di Butterworth è tale da essere massimamente piatto nella banda passante).

In figura 4.4 sono mostrate le ricostruzioni per $\chi = 0.167 \text{ mm/pixel}$ prima e dopo l'applicazione del filtro alla lunghezza di taglio ottimale. In figura 4.5 sono invece mostrate le ricostruzioni per $\chi = 0.5 \text{ mm/pixel}$, per le quali non è stato necessario l'utilizzo del filtro (per le altre due risoluzioni non sono riportati i grafici poiché le ricostruzioni non presentano problemi e dunque sono analoghe al caso con $\chi = 0.5 \text{ mm/pixel}$, cambia solo l'altezza del picco). In tutti i casi le dimensioni del fascio sono ben riprodotte.

¹come intervallo di confidenza è adoperata la risoluzione utilizzata per determinare il grafico.

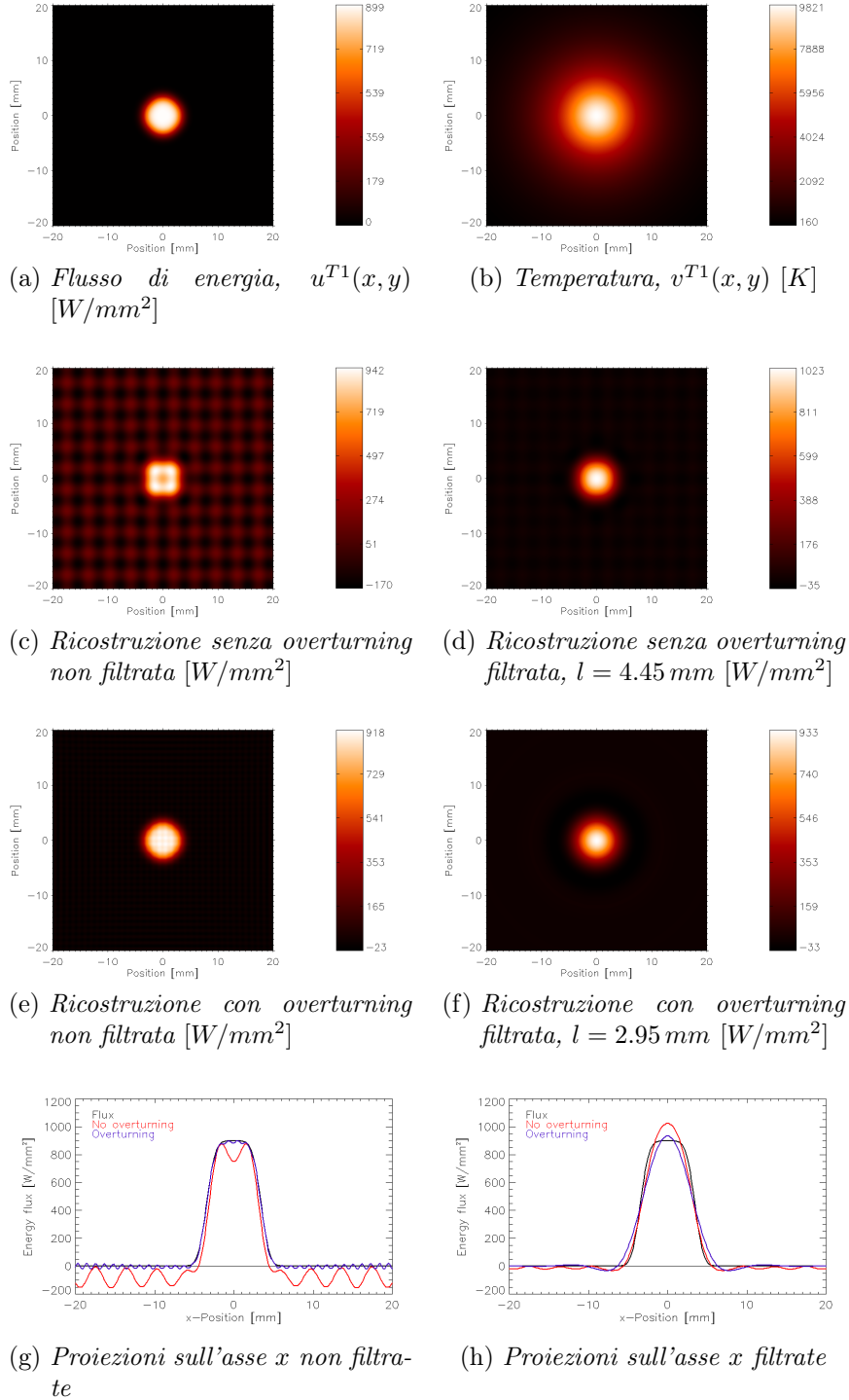


Figura 4.4: Ricostruzioni del TEST 1 con e senza filtro, $\chi = 0.167$ mm/pixel.

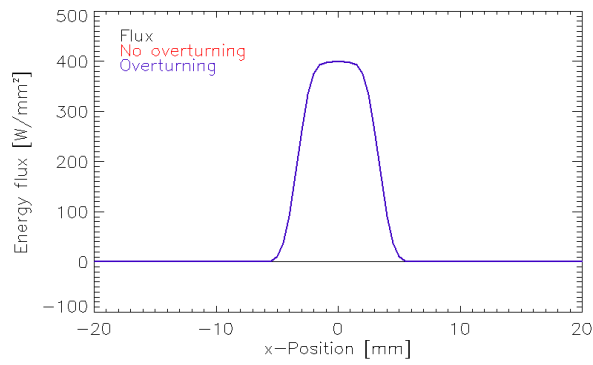
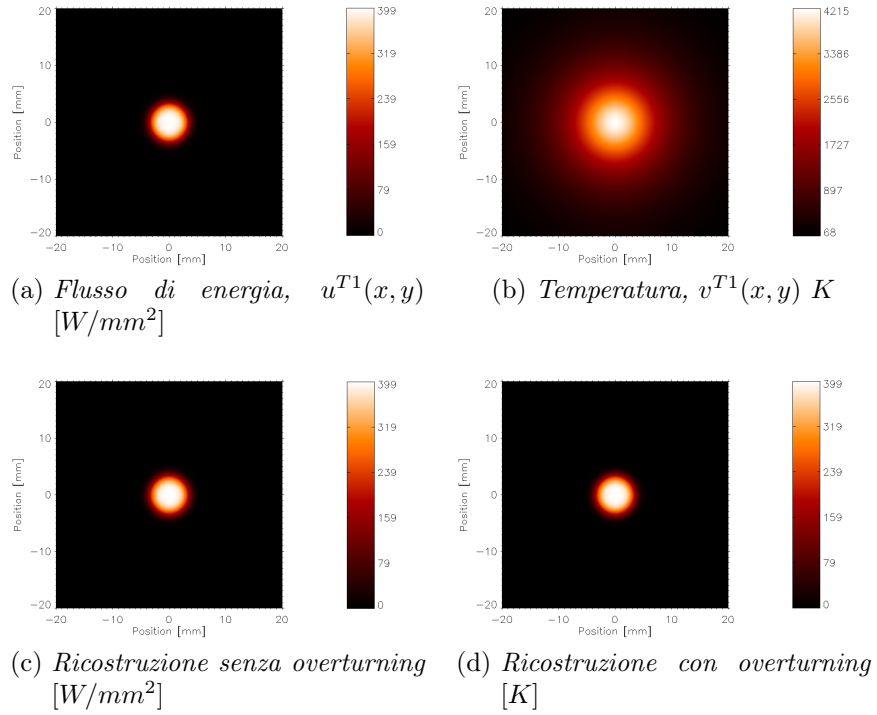
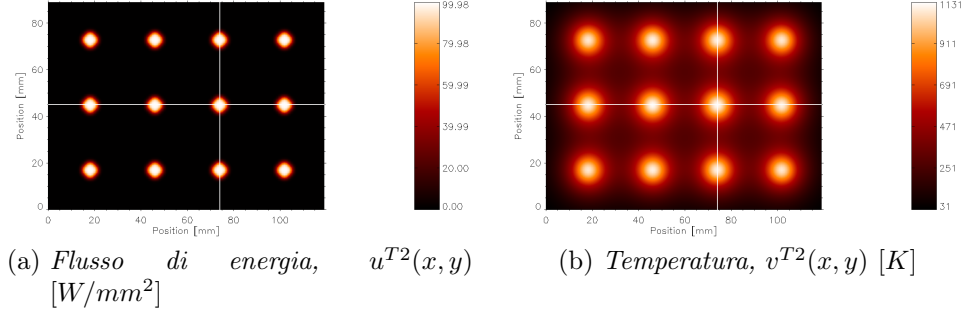


Figura 4.5: Ricostruzioni del TEST 1, $\chi = 0.5 \text{ mm/pixel}$.

Figura 4.6: TEST 2, $\chi = 1.0 \text{ mm/pixel}$

4.3 TEST 2

Con questo test si vuole simulare il funzionamento del metodo quando i picchi non sono più localizzati in una regione ristretta, ma occupano invece l'intera matrice. Per tale motivo si è costruita una griglia 4×3 di profili TEST 1 (parametri del profilo della risposta all'impulso a $\Delta t = 3 \text{ s}$, diametro del singolo picco di 7 mm , distanza tra i picchi 28 mm , come nella griglia dell'esperimento BATMAN), posta su una matrice $M \times N$. Le simulazioni sono state eseguite per $\chi = 0.5, 1.0, 2.0 \text{ mm/pixel}$ e non per $\chi = 0.167 \text{ mm/pixel}$, poiché quest'ultima risoluzione è presente solo nei test con il laser. Le dimensioni della matrice sono state determinate in modo da rappresentare una delle due tegole utilizzate in BATMAN, di dimensioni $120.0 \text{ mm} \times 90.0 \text{ mm}$ (e avendo cura M ed N fossero multipli di 2, per ragioni legate al software utilizzato), e sono:

- 240×180 per $\chi = 0.5 \text{ mm/pixel}$;
- 120×90 per $\chi = 1.0 \text{ mm/pixel}$;
- 60×44 per $\chi = 2.0 \text{ mm/pixel}$.

In figura 4.6 sono mostrati i profili simulati per $\chi = 1.0 \text{ mm/pixel}$. Si è quindi proceduto ad applicare il metodo di analisi per ricostruire il profilo del flusso di energia. Le dimensioni delle matrici, inoltre, sono inferiori a quelle di tabella 3.2. Per non aver bisogno di applicare un filtro alla funzione di antitrasferimento, si sono quindi aggiunti zeri alle matrici per raggiungere le dimensioni della tabella (dopo aver applicato il windowing).

In figura 4.7 sono mostrate le ricostruzioni per $\chi = 1.0 \text{ mm/pixel}$ e le proiezioni sugli assi dei punti lungo le linee bianche di figura 4.6. I picchi sono ben riprodotti al centro, ma ai bordi sono presenti delle oscillazioni indesiderate, specialmente con la ricostruzione senza overturning. Anche

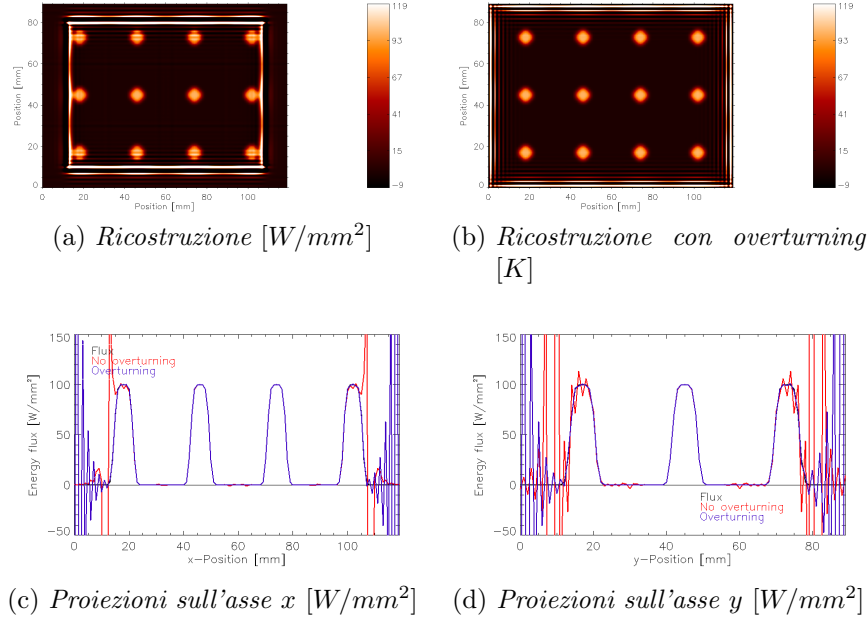


Figura 4.7: Ricostruzioni del TEST 2, $\chi = 1.0 \text{ mm}/\text{pixel}$.

utilizzando l'overturning però rimangono delle oscillazioni, perché la funzione non presenta più discontinuità al bordo, ma rimangono dei punti angolosi, in corrispondenza degli assi di riflessione.

Il modo migliore di procedere è quindi l'applicazione di un filtro passa-basso, come nel caso del TEST 1 con $\chi = 0.167 \text{ mm}/\text{pixel}$. Si è nuovamente utilizzato un filtro di Butterworth di ordine $n = 5$.

Le immagini 4.8a, 4.9a e 4.10a riportano i grafici dei residui relativi in funzione della lunghezza d'onda di taglio. Questi grafici provano la validità del metodo dell'overturning: le curve dei residui per il caso senza overturning non presentano minimo, e appena le dimensioni del filtro superano i 2 mm il metodo con overturning presenta residui minori. Per questo motivo nel seguito si considereranno solo le ricostruzioni effettuate con overturning.

Questi grafici permettono inoltre di stimare le dimensioni delle oscillazioni dovute al leakage: essi sono infatti indicatori del grado di distorsione dell'intera matrice, e la distorsione può essere dovuta a discontinuità erratamente riprodotte, o all'azione del filtro. La distorsione dovuta al leakage predomina per lunghezze d'onda di taglio basse, mentre la distorsione legata al filtro è preponderante per lunghezze d'onda più alte. Nel punto di minimo l'azione del filtro bilancia gli effetti del leakage, e quindi quella è la lunghezza d'onda massima delle oscillazioni dovute al leakage.

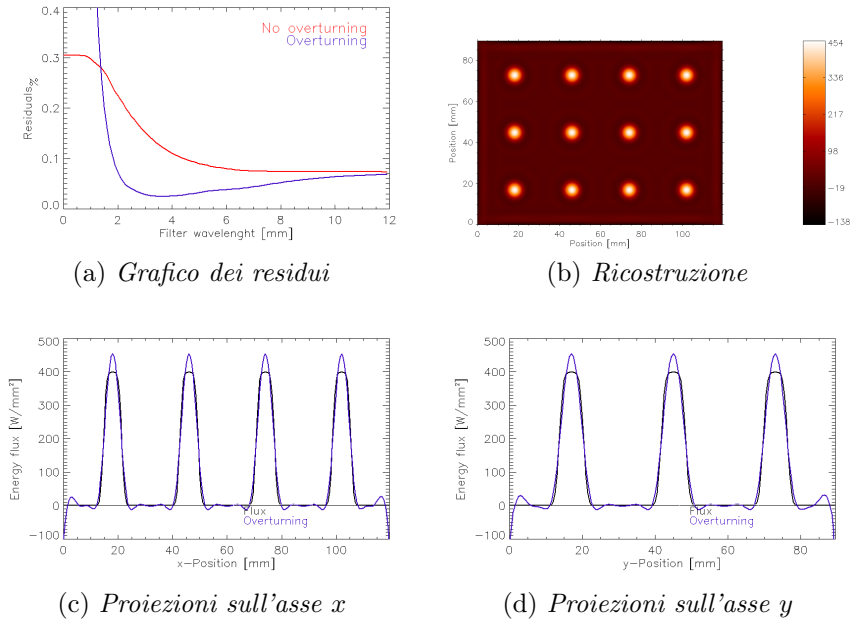
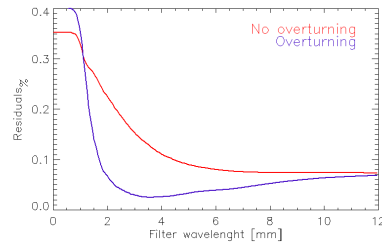


Figura 4.8: Ricostruzione con overturning filtrata del profilo u^{T2} per $\chi = 0.5 \text{ mm/pixel}$, $l_{\text{filtro}} = 3.60 \text{ mm}$.

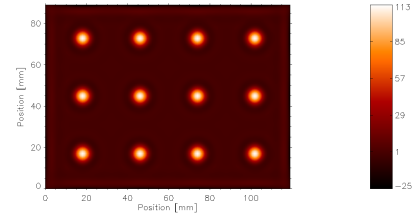
Di seguito sono riportati i punti di minimo delle curve dei residui e i corrispondenti valori di \bar{R} e $\bar{R}_{\%}$:

- $\chi = 0.5 \text{ mm/pixel}$:
 $l = (3.60 \pm 0.1) \text{ mm}$ $\bar{R} = 9.87 \text{ W/mm}^2$ $\bar{R}_{\%} = 2.47 \cdot 10^{-2}$
- $\chi = 1.0 \text{ mm/pixel}$:
 $l = (3.65 \pm 0.05) \text{ mm}$ $\bar{R} = 2.52 \text{ W/mm}^2$ $\bar{R}_{\%} = 2.52 \cdot 10^{-2}$
- $\chi = 2.0 \text{ mm/pixel}$:
 $l = (3.75 \pm 0.05) \text{ mm}$ $\bar{R} = 1.02 \text{ W/mm}^2$ $\bar{R}_{\%} = 3.64 \cdot 10^{-2}$

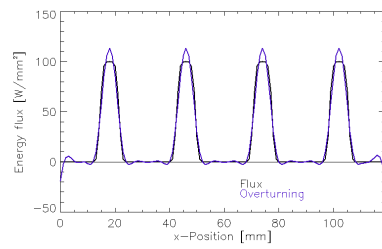
Le figure 4.9, 4.9 e 4.10 mostrano le ricostruzioni dopo l'applicazione dei filtri. I picchi sono ben distinti, rispetto al profilo di temperatura di partenza, e l'ampiezza è ben riprodotta.



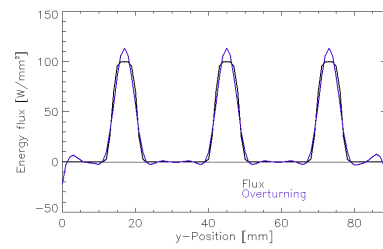
(a) Grafico dei residui



(b) Ricostruzione

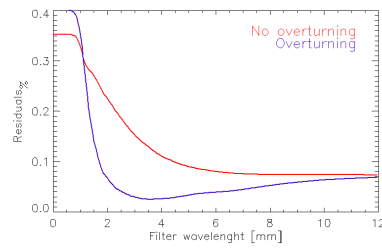


(c) Proiezioni sull'asse x

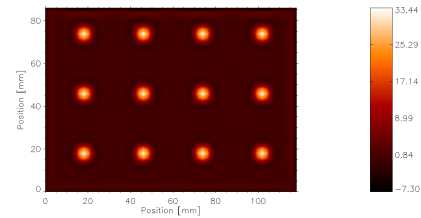


(d) Proiezioni sull'asse y

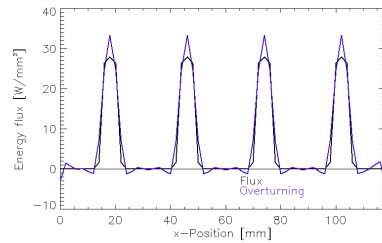
Figura 4.9: Ricostruzione con overturning filtrata del profilo u^{T2} per $\chi = 1.0 \text{ mm/pixel}$, $l_{\text{filtro}} = 3.65 \text{ mm}$.



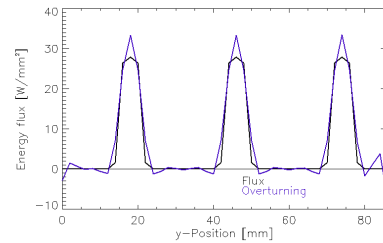
(a) Grafico dei residui



(b) Ricostruzione



(c) Proiezioni sull'asse x



(d) Proiezioni sull'asse y

Figura 4.10: Ricostruzione con overturning filtrata del profilo u^{T2} per $\chi = 2.0 \text{ mm/pixel}$, $l_{\text{filtro}} = 3.75 \text{ mm}$.

4.4 Aggiunta del rumore

Per cercare di simulare ancora più fedelmente le condizioni operative si è aggiunto il rumore ai profili del TEST 2, sommando alle temperature un rumore bianco uniforme $n[p]$, di ampiezza massima $p/100$ -volte il massimo del profilo di temperatura. Si sono analizzate le ricostruzioni con $p = 0.0, 2.5, 5.0, 10.0$.

Poiché la trasformata di Fourier è un'operazione lineare, la trasformata di $s_{n[p]}(x, y) = s(x, y) + n[p](x, y)$ è la somma delle trasformate del segnale ($S(k, j)$) e del rumore ($N[p](k, j)$). La trasformata del rumore $N[p](k, j)$ è a sua volta una distribuzione uniforme su tutto lo spazio dei numeri d'onda, di ampiezza costante. Poiché le trasformate di curve a campana, quali sono delle curve di Hubbert, sono ancora delle curve a campana nello spazio di Fourier, la presenza del rumore si traduce in disturbi significativi ad alte frequenze, mentre a bassa frequenza il segnale è meno perturbato. In particolare, mentre il leakage è localizzato in prossimità dei bordi e delle discontinuità, gli effetti del rumore si ripercuotono sull'intera immagine, come mostrato in figura 4.11, in cui si è tentato di ricostruire un profilo del TEST 2 cui è stato aggiunto un rumore del 2.5%.

Per ricostruire adeguatamente il profilo del flusso di energia bisogna quindi filtrare il segnale per eliminare queste componenti ad alta frequenza. Nel seguito si è utilizzato un filtro passa-basso (anche in questo caso si è scelto un filtro di Butterworth, riportato nell'equazione 4.2 a pagina 39, con $n = 5$). Come per i test senza rumore, si è quindi proceduto a cercare la lunghezza d'onda per il filtro che minimizza la curva dei residui (analizzando solo il caso con overturning). Le figure 4.12a, 4.13a e 4.14a riportano i grafici dei residui per il test 2 a $\Delta t = 3 s$ al variare dell'ampiezza del rumore; in tabella 4.4 sono presentati i risultati delle ricostruzioni in corrispondenza dei minimi della curva dei residui. La tabella mostra che la posizione del minimo della curva dei residui cresce all'aumentare dell'ampiezza del rumore. Questo perché il filtro non deve più solamente compensare l'effetto del leakage, ma anche rimuovere le oscillazioni introdotte dal rumore ed esaltate dalla funzione di antitrasferimento (che agisce come un passa-alto). Nelle figure 4.12, 4.13 e 4.14 sono riportate le ricostruzioni del profilo $u_{n[2.5]}^{T2}$ e le proiezioni lungo le stesse linee utilizzate per i grafici nella sezione precedente.

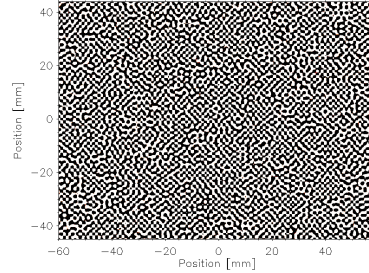
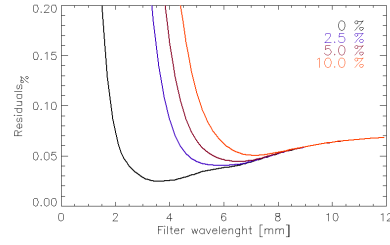


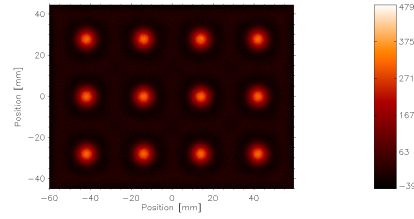
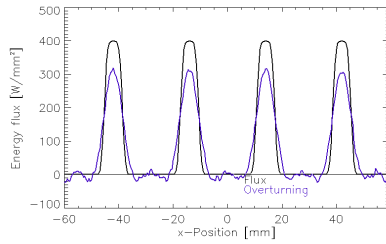
Figura 4.11: Tentativo di ricostruzione di un profilo $u_{n[2.5]}^{T2}$ senza filtro.

Tabella 4.4: Lunghezze d'onda dei filtri del TEST 2 con l'aggiunta del rumore a $\Delta t = 3 s$.

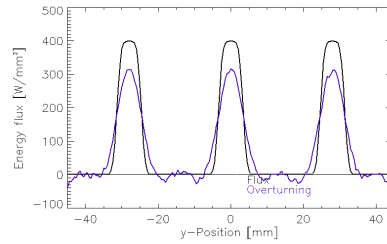
χ [mm/pixel]	p	l_{filtro} [mm]	\bar{R} [W/mm ²]	$\bar{R}_{\%}$
0.5	0.0	3.6 ± 0.1	9.87	$2.47 \cdot 10^{-2}$
	2.5	5.9 ± 0.1	16.3	$4.08 \cdot 10^{-2}$
	5.0	6.6 ± 0.1	17.8	$4.45 \cdot 10^{-2}$
	10.0	7.1 ± 0.1	20.3	$5.09 \cdot 10^{-2}$
1.0	0.0	3.65 ± 0.05	2.52	$2.25 \cdot 10^{-2}$
	2.5	6.25 ± 0.05	4.31	$4.31 \cdot 10^{-2}$
	5.0	6.85 ± 0.05	4.79	$4.79 \cdot 10^{-2}$
	10.0	7.55 ± 0.05	5.53	$5.53 \cdot 10^{-2}$
2.0	0.0	3.75 ± 0.05	1.02	$3.64 \cdot 10^{-2}$
	2.5	6.05 ± 0.05	1.48	$5.30 \cdot 10^{-2}$
	5.0	6.85 ± 0.05	1.63	$5.83 \cdot 10^{-2}$
	10.0	7.60 ± 0.05	1.83	$6.55 \cdot 10^{-2}$



(a) Grafico dei residui

(b) Ricostruzione [W/mm²]

(c) Proiezioni sull'asse x



(d) Proiezioni sull'asse y

Figura 4.12: Ricostruzione senza overturning filtrata del profilo $u_{n[2.5]}^{T2}$ per $\chi = 0.5 \text{ mm/pixel}$, $l_{\text{filtro}} = 5.9 \text{ mm}$.

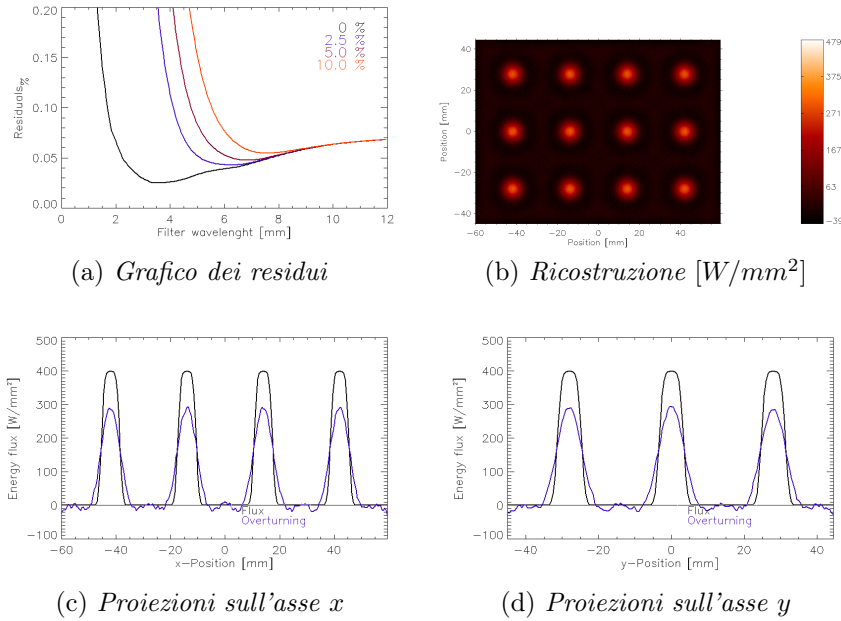


Figura 4.13: Ricostruzione senza overturning filtrata del profilo u_n^{T2} per $\chi = 1.0 \text{ mm/pixel}$, $l_{\text{filtro}} = 6.25 \text{ mm}$.

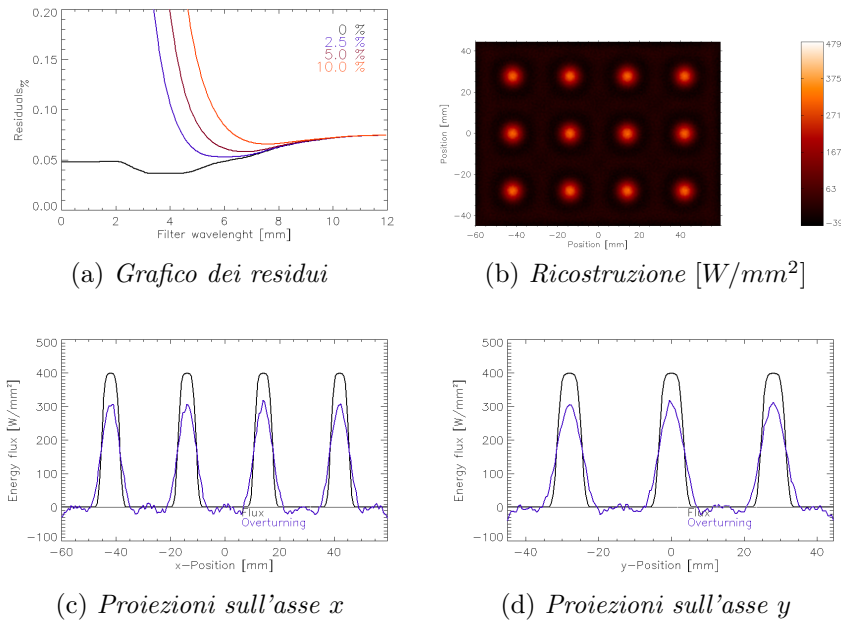


Figura 4.14: Ricostruzione senza overturning filtrata del profilo u_n^{T2} per $\chi = 2.0 \text{ mm/pixel}$, $l_{\text{filtro}} = 5.95 \text{ mm}$.

4.4.1 Altri metodi di valutazione

Osservando le ricostruzioni si nota che i picchi sono ben visibili e le ampiezze sono riprodotte correttamente; tuttavia l'altezza dei picchi della ricostruzione è inferiore rispetto alla simulazione. Questo perché il minimo della curva dei residui rappresenta la condizione per la quale la differenza tra la simulazione e la ricostruzione è minima *qualunque sia* il punto considerato, attribuendo la stessa importanza ad un punto appartenente ad un picco e ad uno a livello del fondo. La scelta del minimo della curva dei residui come lunghezza d'onda ideale per il filtraggio è quindi sensata finché si è interessati a minimizzare le distorsioni dell'intera matrice della ricostruzione, siano queste legate al leakage (argomento dello studio svolto nelle sezioni precedenti), o al rumore, ma non è detto i picchi siano ricostruiti al meglio.

Per determinare le condizioni ideali per la ricostruzione dei picchi sono quindi necessarie altre figure di merito. Ne sono state scelte altre 3, relative al picco del flusso di energia identificato dall'intersezione delle due linee bianche in figura 4.6

- il reciproco del rapporto tra il massimo del picco e il corrispondente pixel della ricostruzione, indicato con Q (valore atteso 1);
- il rapporto tra l'integrale del picco ricostruito e l'integrale del picco simulato, calcolato considerando la somma su tutti i pixel all'interno di un quadrato di lato 7 mm centrato nel pixel corrispondente al massimo della simulazione, indicato con Υ (valore atteso 1);
- la media tra le ampiezze a mezza altezza del picco ricostruito nelle direzioni x ed y , rapportate all'ampiezza a mezza altezza del picco simulato (valore atteso 3.5 mm), indicata con HW . Le ampiezze a mezza altezza sono determinate ponendosi nel pixel corrispondente alla posizione del massimo del picco e, spostandosi lungo gli assi x ed y , trovando il primo pixel in cui il valore della ricostruzione sia minore della metà dell'altezza del picco. Per tale motivo l'incertezza associata ad HW è la risoluzione χ utilizzata.

Per ognuna di queste variabili si è determinato l'andamento in funzione della lunghezza d'onda di taglio (i grafici sono riportati nelle figure 4.15, 4.16 e 4.17), e si sono trovate le dimensioni del filtro per le quali queste rientrano in un certo intervallo rispetto al valore atteso: il 5% dal valore atteso per Q e Υ , $(3.5 \pm \chi \cdot (1\text{ pixel}))\text{ mm}$ per HW . Questi risultati sono riportati nelle tabelle 4.5, 4.6 e 4.7.

Grazie a queste tabelle è possibile determinare la migliore lunghezza d'onda su cui filtrare per ricostruire i picchi. Queste lunghezze sono riportate di

Tabella 4.5: Lunghezze d'onda ottimali dei filtri per le diverse figure di merito, $\chi = 0.5 \text{ mm/pixel}$, errore su ogni misura 0.1 mm .

p	$l_{\text{filtro}}^{\bar{R}}$ [mm]	l_{filtro}^Q [mm]	$l_{\text{filtro}}^{\gamma}$ [mm]	$l_{\text{filtro}}^{\text{HW}}$ [mm]
0.0	3.6	[0, 4.8]	[0, 4.8]	[0, 5.2]
2.5	5.9	[4.7, 5.0]	[2.0, 4.8]	[5.0, 6.7]
5.0	6.5	[5.0, 5.3]	[2.0, 4.8]	[5.4, 6.5]
10.0	7.2	[5.4, 5.6]	[2.5, 5.0]	[6.1, 6.8]

Tabella 4.6: Lunghezze d'onda ottimali dei filtri per le diverse figure di merito, $\chi = 1.0 \text{ mm/pixel}$, errore su ogni misura 0.05 mm .

p	$l_{\text{filtro}}^{\bar{R}}$ [mm]	l_{filtro}^Q [mm]	$l_{\text{filtro}}^{\gamma}$ [mm]	$l_{\text{filtro}}^{\text{HW}}$ [mm]
0.0	3.65	[4.30, 4.85]	[0, 5.00]	[0, 6.55]
2.5	6.25	[4.55, 4.95]	[3.45, 5.05]	[3.90, 6.65]
5.0	6.85	[4.85, 5.15]	[3.25, 5.00]	[5.00, 6.50]
10.0	7.55	[5.30, 5.55]	[4.50, 5.45]	[5.15, 7.35]

Tabella 4.7: Lunghezze d'onda ottimali dei filtri per le diverse figure di merito, $\chi = 2.0 \text{ mm/pixel}$, errore su ogni misura 0.05 mm .

p	$l_{\text{filtro}}^{\bar{R}}$ [mm]	l_{filtro}^Q [mm]	$l_{\text{filtro}}^{\gamma}$ [mm]	$l_{\text{filtro}}^{\text{HW}}$ [mm]
0.0	3.75	[4.60, 5.05]	[0, 4.65]	[0, 6.75]
2.5	6.05	[4.05, 4.70]	[10.80, 11.00]	[0, 6.90]
5.0	6.75	[4.20, 4.45]	[10.30, 11.50]	[0, 6.90]
10.0	7.60	[4.65, 4.95]	[4.70, 5.25]	[0, 7.40]

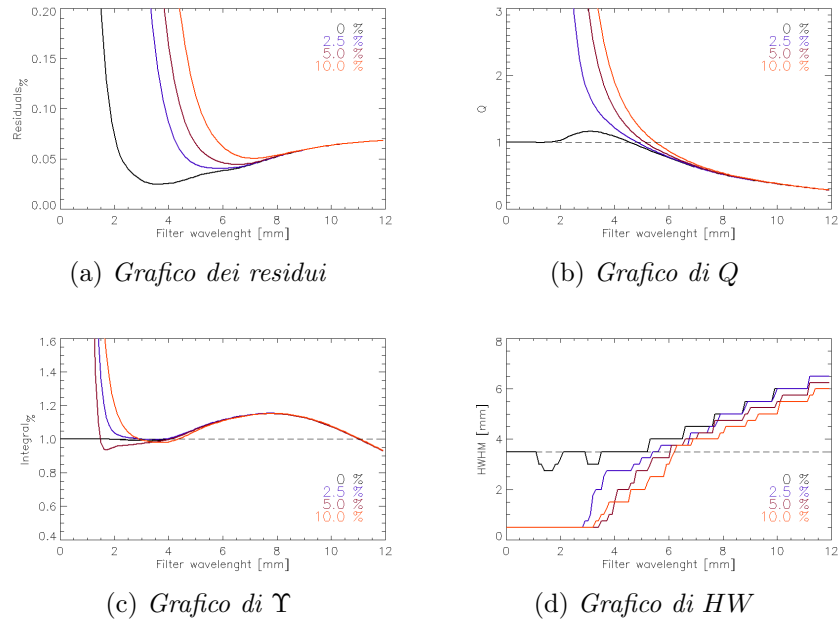


Figura 4.15: Figure di merito, $\chi = 0.5 \text{ mm/pixel}$.

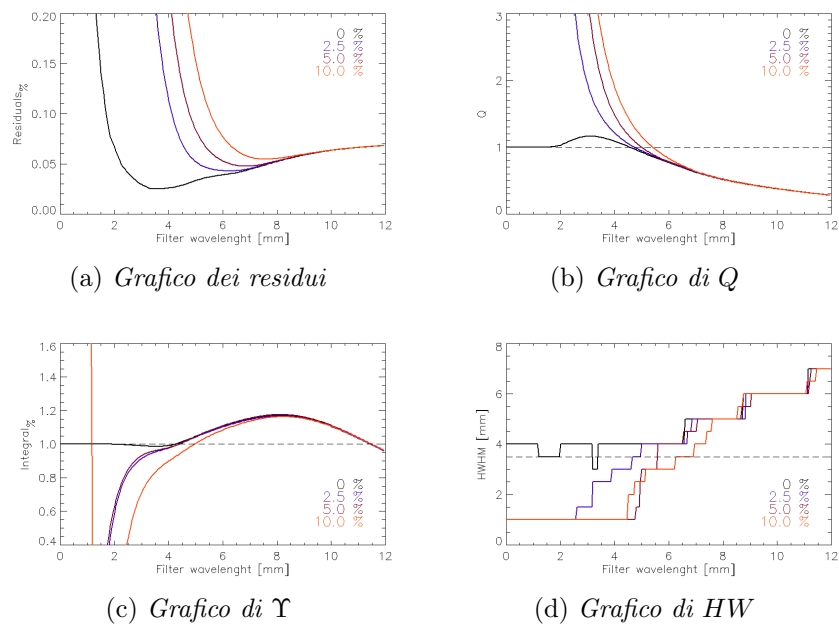


Figura 4.16: Figure di merito, $\chi = 1.0 \text{ mm/pixel}$.

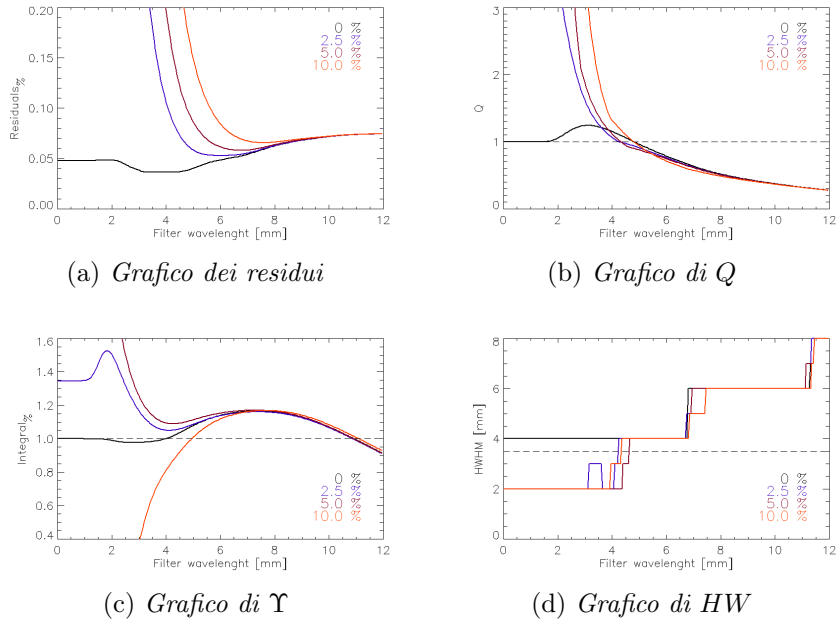


Figura 4.17: Figure di merito, $\chi = 2.0 \text{ mm/pixel}$.

seguito (si è cercata l'intersezione degli intervalli e si è scelto il valore minore, quando l'intersezione è l'insieme vuoto è necessario cercare un ulteriore criterio per trovare la lunghezza d'onda ideale):

- $\chi = 0.5 \text{ mm/pixel}$
 - $p = 0.0 \rightarrow l = 3.6$ (il punto di minimo dei residui)
 - $p = 2.5 \rightarrow l = 4.7$
 - $p = 5.0$ l'intersezione è vuota
 - $p = 10.0$ l'intersezione è vuota

- $\chi = 1.0 \text{ mm/pixel}$
 - $p = 0.0 \rightarrow l = 4.30$
 - $p = 2.5 \rightarrow l = 4.55$
 - $p = 5.0 \rightarrow l = 5.00$
 - $p = 10.0 \rightarrow l = 5.15$

- $\chi = 2.0 \text{ mm/pixel}$
 - $p = 0.0 \rightarrow l = 4.60$
 - $p = 2.5$ l'intersezione è vuota
 - $p = 5.0$ l'intersezione è vuota
 - $p = 10.0 \rightarrow l = 4.70$

Questo test ha permesso di definire interamente la procedura di applicazione della tecnica della funzione di trasferimento. Dopo la preparazione dell'immagine (overturning), l'operazione di ricostruzione consiste nell'applicazione alla trasformata dell'uscita di due filtri nello spazio di Fourier con azione contrastante: un passa alto, cioè il reciproco della funzione di trasferimento, e un passa-basso adatto ad eliminare gli artefatti legati al leakage e le oscillazioni del rumore. Assegnato il primo dalla risposta all'impulso bisogna adattare il secondo al caso in esame per riuscire ad ottenere risultati consistenti.

Capitolo 5

Applicazione ai dati reali

Nel capitolo precedente si sono cercate le condizioni ottimali per l'applicazione della tecnica della funzione di trasferimento, cercando di correggere al meglio gli errori computazionali, e simulando la presenza del rumore. In questo capitolo è mostrata l'applicazione della tecnica ad alcune immagini ottenute nei test con il laser e nell'esperimento BATMAN.

5.1 I test con il laser

Si è considerato un frame a $\Delta t = 3 s$ dell'applicazione di un laser da $26 W$ su una tegola di dimensioni $190 \times 90 \times 20 mm$; il profilo di temperatura è registrato con una risoluzione di $5.9 pixel/mm$, ed è mostrato in figura 5.1a. La termocamera registra temperature v assolute, quindi per considerare le differenze Δv sono state sottratte al frame considerato in presenza del fascio le misure di un frame in assenza del fascio. L'intensità del rumore è stata determinata considerando la regione evidenziata dal riquadro bianco, in cui non sono visibili gli effetti del fascio, e si è determinata la dispersione massi-

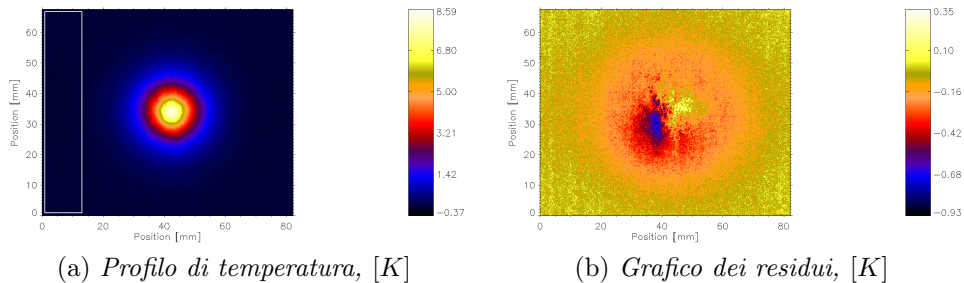


Figura 5.1: Profilo di temperatura dei test con il laser e residui rispetto all'andamento simulato.

ma: $0.64 K$, che normalizzato al picco della temperatura ($8.59 K$), porge un rapporto *rumore/picco* pari al 7.5%.

Per prima cosa si è confrontato il profilo di temperatura con la curva di Hubbert prevista dalle simulazioni per $\Delta t = 3 s$ corrispondente ad una potenza in entrata di $26 W$. I residui, mostrati in figura 5.1b, presentano un massimo, in modulo, pari a $0.93 K$, compatibile con l'ampiezza del rumore stimata in precedenza.

5.1.1 Analisi

Per trovare la lunghezza d'onda di taglio ideale si è confrontata la trasformata del profilo di temperatura con la trasformata della simulazione, così da notare a quale numero d'onda gli effetti del rumore diventano significativi. In figura 5.2 sono mostrati i grafici delle proiezioni sull'asse k della trasformata del profilo di temperatura $V(k, j)$ e della simulazione $V^{sim}(k, j)$.

Già a bassi numeri d'onda si nota una discrepanza tra i due andamenti: la trasformata della simulazione presenta un picco più alto; il motivo è il rumore che perturba il segnale: il picco della trasformata è proporzionale all'integrale della funzione nello spazio reale su tutta la matrice; le regioni in cui il segnale è minore dell'ampiezza del rumore hanno però media nulla (predomina il rumore), e quindi non contribuiscono all'integrale, a differenza della simulazione, in cui l'intera matrice è positiva e quindi contribuisce ad incrementare il picco della trasformata.

Andando a numeri d'onda più alti la trasformata dei dati sperimentali mostra delle oscillazioni impreviste attorno al valore atteso. Queste oscillazioni, che con l'applicazione della funzione di antitrasferimento verrebbero esaltate, devono pertanto essere tagliate. Il cutoff del filtro è stato determinato cercando il numero d'onda a partire dal quale la differenza in modulo tra l'andamento simulato e l'andamento sperimentale era superiore al 100% del corrispondente valore simulato; il suo valore è $0.15 mm^{-1}$, che corrisponde ad una lunghezza d'onda $l = 6.55 mm$. È interessante notare che questo valore è dello stesso ordine di grandezza delle lunghezze d'onda di taglio riportate in tabella 4.4 per una ricostruzione con il rumore al 5%.

Il profilo del laser è supposto gaussiano di semiampiezza a mezza altezza $1.0 mm$; la sua trasformata è ancora una gaussiana con deviazione $\Sigma = 0.19 mm^{-1}$. Tagliando a $0.15 mm^{-1}$ non è pertanto possibile riprodurre interamente la trasformata del profilo del laser, e quindi sicuramente non è possibile ricostruire correttamente il profilo del laser (la frequenza di taglio dovrebbe essere almeno $3\Sigma = 57 mm^{-1}$, corrispondente a $l = 1.75 mm$, ma rimarrebbero troppe oscillazioni indesiderate che verrebbero esaltate dalla funzione di antitrasferimento).

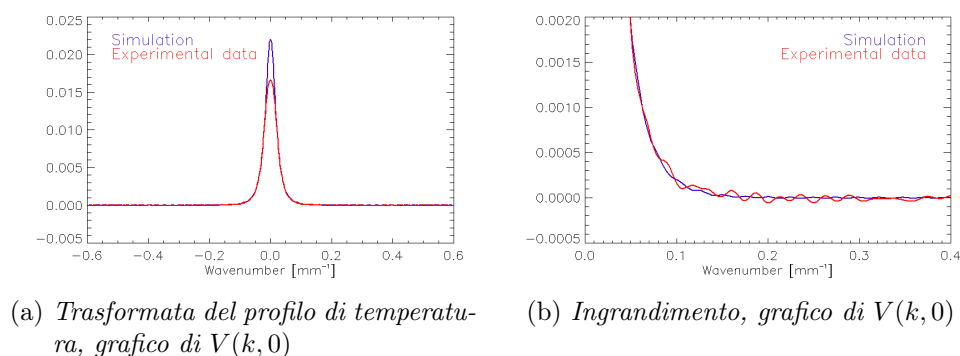


Figura 5.2: Confronto tra la trasformata del profilo di temperatura e la trasformata dell'andamento simulato.

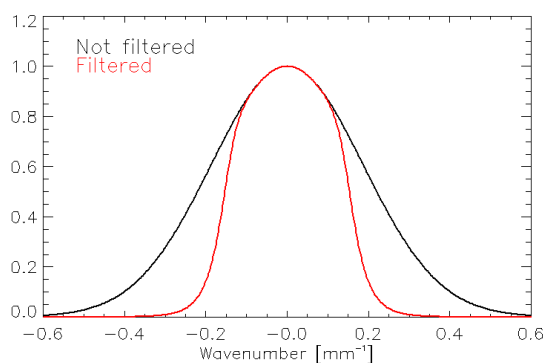


Figura 5.3: La trasformata del profilo del laser proiettata sull'asse k prima e dopo l'applicazione del filtro di Butterworth.

In figura 5.3 è mostrato il confronto tra la simulazione della trasformata del profilo del laser prima e dopo l'applicazione del filtro (un Butterworth di ordine 5), mentre in figura 5.4 è mostrata la ricostruzione ottenuta con l'applicazione del filtro con lunghezza d'onda di taglio $l = 6.55 \text{ mm}$ (alle proiezioni sugli assi è sovrapposto il profilo di temperatura normalizzato al picco della ricostruzione).

5.2 L'esperimento BATMAN

Il calorimetro mini-STRIKE installato in BATMAN è posto ad una distanza di circa 1 m dall'acceleratore; a questa distanza i beamlets sono sovrapposti, e dunque il fascio di ioni negativi si presenta omogeneo [18]. Per riprodurre i beamlets, a circa 1 cm da ciascuna tegola è stata posizionata una maschera in

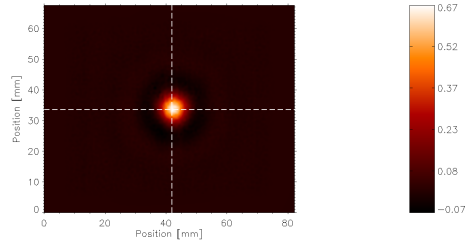
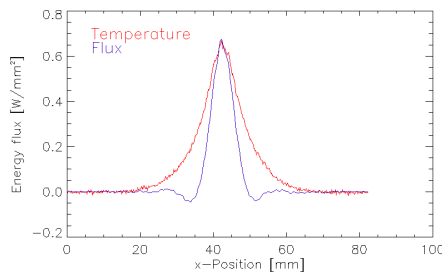
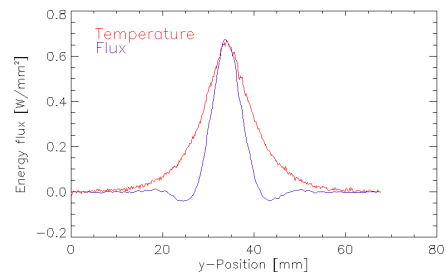
(a) Ricostruzione del flusso di energia
[W/mm²](b) Proiezioni sull'asse x [W/mm²](c) Proiezioni sull'asse y [W/mm²]

Figura 5.4: Ricostruzione del profilo del flusso di energia del laser dopo l'applicazione di un filtro di lunghezza d'onda $l = 6.55 \text{ mm}$.

rame fornita di fori di 7 mm di diametro, disposti a scacchiera (una foto del calorimetro mini-STRIKE è mostrata in figura 5.5). La termocamera registra l'evoluzione del profilo di temperatura con una linea di vista inclinata di 50° rispetto alla perpendicolare al piano ortogonale alle tegole (vedi figura 1.9 a pagina 9): le tegole sono quindi viste in prospettiva, con una risoluzione non costante lungo ciascun asse. Prima di poter applicare la tecnica della funzione di trasferimento, è quindi necessario correggere la prospettiva e successivamente interpolare e ricampionare l'immagine originale, ottenendo i fattori di conversione da millimetri a pixel per le due direzioni. In figura 5.6b è mostrato un frame, registrato a $\Delta t = 3 \text{ s}$ dall'inizio dell'impulso, prima e dopo la correzione della prospettiva.

Dopo aver raddrizzato l'immagine, si sono ottenuti i seguenti fattori di conversione da pixel a millimetri: $\chi_x = 0.63 \text{ mm/pixel}$ e $\chi_y = 1.01 \text{ mm/pixel}$. L'immagine è stata quindi tagliata per selezionare una regione interna alla tegola il più possibile priva di segnali spuri (le temperature di oggetti presenti all'interno della camera da vuoto): si è selezionata una regione di dimensione 164×78 , evidenziata dal riquadro bianco in figura 5.6b.

Osservando l'immagine si nota una striscia nera che si sovrappone ad alcuni picchi: è l'immagine termica di una termocoppia. La sua presenza

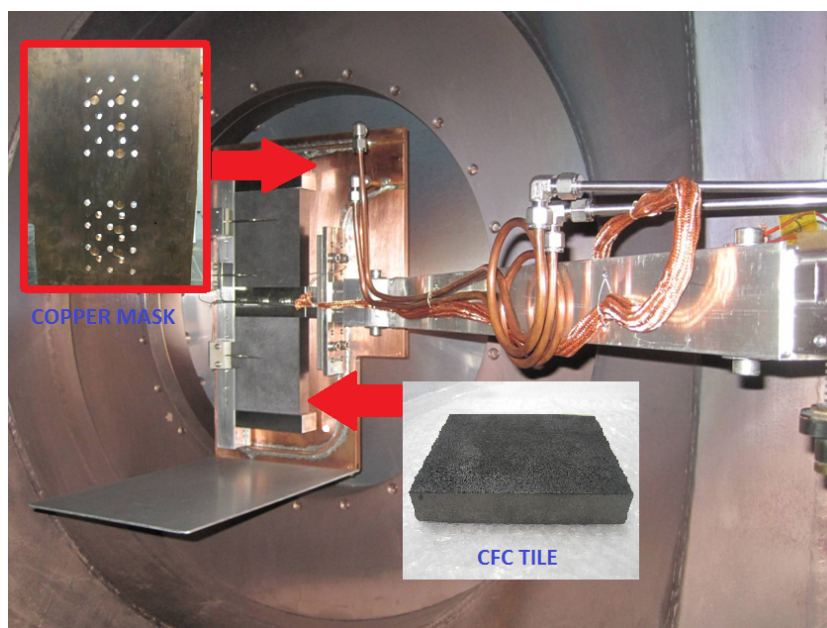


Figura 5.5: Il calorimetro mini-STRIKE.

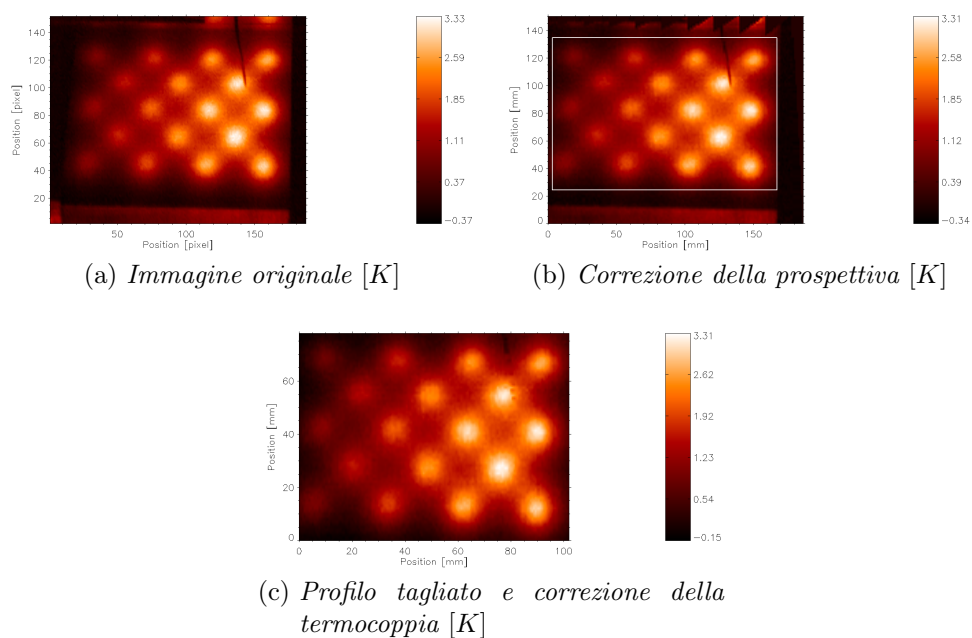


Figura 5.6: Profilo di temperatura di BATMAN a $\Delta t = 3 s$

causa una discontinuità nel profilo di temperatura; per rimuoverla, si sono sostituiti i punti corrispondenti con dei fit effettuati con le spline. Il profilo utilizzato per l'analisi è dunque quello in figura 5.6c.

5.2.1 Analisi

La distanza cui è posta la maschera non è sufficiente per permettere deviazioni significative dei beamlet, che pertanto incidono sulle tegole producendovi un'impronta circolare. L'applicazione del filtro passa-basso, che come visto nel capitolo precedente è necessario quando il segnale è significativo vicino ai bordi e in presenza di rumore, impedisce di ricostruire i bordi netti del cerchio, poiché taglia le armoniche necessarie a riprodurre la discontinuità. Tuttavia, come mostrato nei test precedenti, è possibile riprodurre abbastanza bene larghezza e altezza dei picchi, pur smussando il profilo complessivo.

Il profilo presenta una temperatura massima di $3.3 K$, e il rumore ha un'intensità di circa $0.2 K$, cioè il 6.1% del picco massimo.

Bisogna ora scegliere la dimensione del filtro da applicare per ricostruire il profilo del flusso di energia. Il caso in esame non rientra direttamente in nessuna delle situazioni simulate e descritte nel capitolo precedente, poiché si hanno due risoluzioni diverse per i due assi. Questo problema può essere però superato utilizzando, anziché il filtro di Butterworth circolare descritto dall'equazione 4.2, il filtro di Butterworth ellittico, di equazione

$$B_{el}(k, j) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\left(\frac{k}{\eta_k}\right)^2 + \left(\frac{j}{\eta_j}\right)^2\right)^n}} \quad (5.1)$$

In questo modo è possibile applicare un filtraggio diverso lungo l'asse k e l'asse j .

Sfruttando le simulazioni con rumore al 5% e risoluzione $0.5 mm/pixel$ e $1.0 mm/pixel$, per la direzione x si è scelto $l = 5.3 mm$ (residuo relativo atteso $\bar{R}_{\%} = 8.3\%$), mentre per la direzione y si è scelto $l = 5.00$ (residuo relativo atteso $\bar{R}_{\%} = 6.5\%$). La figura 5.7 presenta le ricostruzioni e le proiezioni sugli assi dei picchi indicati dalle linee tratteggiate (vi si è sovrapposto il profilo di temperatura normalizzato, così da mostrare come i picchi vengano risolti).

Per determinare l'ampiezza dell'oscillazione della ricostruzione, così da poterla confrontare con il valore del residuo atteso, si è considerata la regione tra i picchi mostrata nel riquadro bianco presente nell'immagine della ricostruzione, se ne è calcolata la media e si è trovato il residuo medio di tale area, ottenendo $\bar{R} = 0.013 W/mm^2$, che, a fronte di un picco massimo di $0.258 W/mm^2$, porge $\bar{R}_{\%} = 5.0\%$, dello stesso ordine di grandezza dei residui previsti.

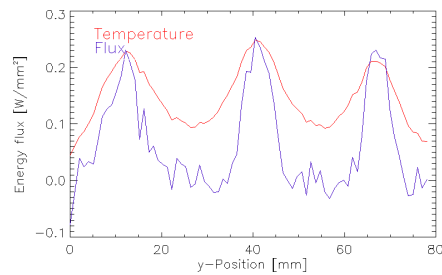
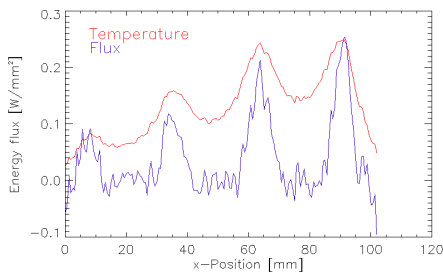
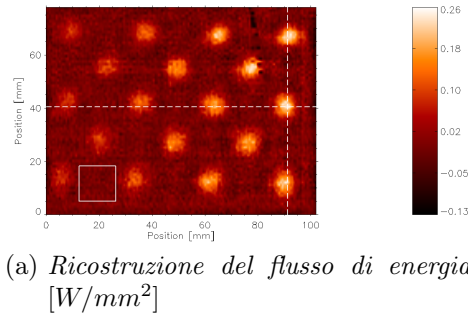


Figura 5.7: Ricostruzione del profilo del flusso di energia di BATMAN a $\Delta t = 3 s$.

In tabella 5.1 sono presentate le stime delle larghezze a mezza altezza per ognuno dei picchi ricostruiti, del loro massimo e del loro integrale (le grandezze sono stimate allo stesso modo delle simulazioni); i picchi sono numerati come mostrato in figura 5.8.

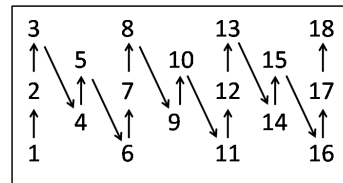


Figura 5.8: Numerazione dei picchi.

Guardando la tabella, si nota che le ampiezze a mezza altezza dei picchi posti sul lato sinistro dell'immagine sono al di sotto del valore atteso di $3.5 mm$, mentre quelli sul lato destro tendono a riprodurre il valore cercato. Questo perché l'energia dei diversi beamlets non è sempre la stessa, come nel caso delle simulazioni, ma significativamente diversa, e in particolare decresce spostandosi verso sinistra nell'immagine; i corrispondenti picchi quindi non avranno un rapporto *rumore/picco* pari al 6.1%, ma molto più alto, e quindi per essere riprodotti correttamente necessiterebbero di un diverso filtraggio (anche non il Butterworth finora usato).

Per provare a rimuovere le oscillazioni, che sono sovrapposte al segnale

Tabella 5.1: Parametri dei picchi della ricostruzione.

Picco	HW _x [mm]	HW _y [mm]	Max [W/mm ²]	Integrale [W]
1	1.3 ± 0.6	1 ± 1	0.113	4.28
2	1.3 ± 0.6	2 ± 1	0.146	8.69
3	3.8 ± 0.6	3 ± 1	0.223	15.03
4	3.1 ± 0.6	3 ± 1	0.258	17.37
5	1.3 ± 0.6	2 ± 1	0.130	8.11
6	1.3 ± 0.6	2 ± 1	0.208	10.31
7	1.3 ± 0.6	4 ± 1	0.210	15.56
8	1.3 ± 0.6	2 ± 1	0.103	6.16
9	3.1 ± 0.6	3 ± 1	0.160	10.23
10	3.8 ± 0.6	3 ± 1	0.213	14.38
11	2.5 ± 0.6	4 ± 1	0.254	17.60
12	3.8 ± 0.6	1 ± 1	0.131	7.24
13	1.3 ± 0.6	1 ± 1	0.182	10.78
14	3.8 ± 0.6	3 ± 1	0.240	14.33
15	1.3 ± 0.6	3 ± 1	0.120	5.83
16	3.8 ± 0.6	3 ± 1	0.145	9.64
17	2.5 ± 0.6	1 ± 1	0.232	12.82
18	3.1 ± 0.6	3 ± 1	0.255	16.43
Potenza totale:				204.77

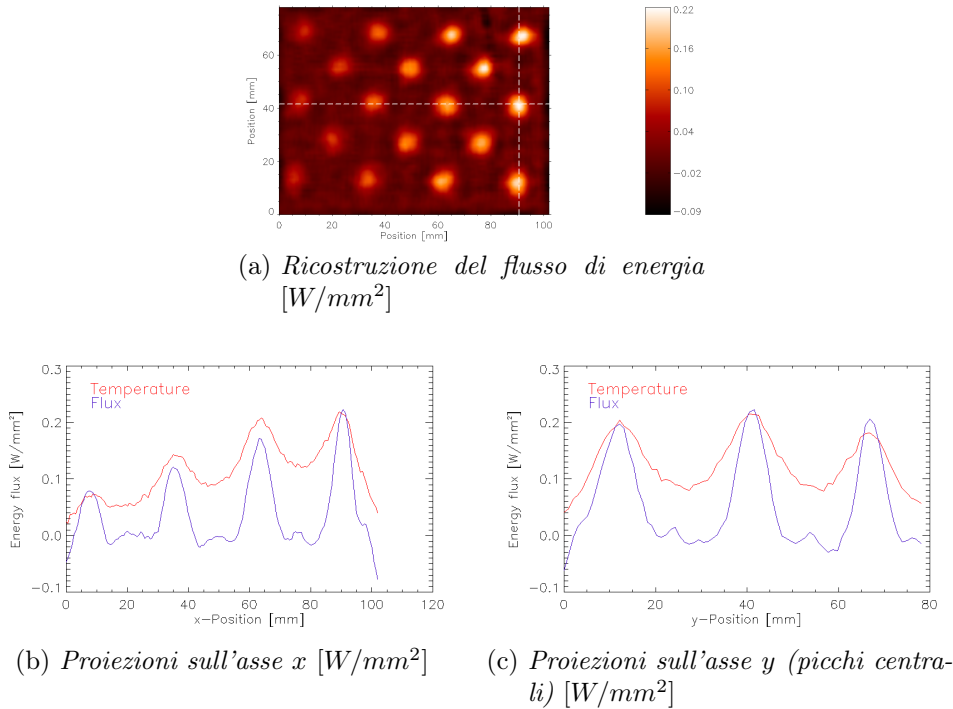


Figura 5.9: Ricostruzione del profilo del flusso di energia di BATMAN a $\Delta t = 3 s$ dopo lo smoothing.

reale, si è provato ad effettuare uno smoothing sulla matrice ricostruita, su $3.1 mm$ lungo l'asse x ($5 pixel$), e su $3.0 mm$ lungo l'asse y ($3 pixel$). I risultati sono riportati in tabella 5.2 e in figura 5.9

Con l'applicazione dello smoothing le misure dell'ampiezza a mezza altezza sono significativamente migliorate; per quanto riguarda i picchi, sono tagliati rispetto alla ricostruzione precedente tra il 10 e il 17%. L'integrale di ogni picco presenta delle variazioni sia positive che negative, con variazione media $+1\%$, cioè molto ridotta. Questo risultato giustifica l'utilizzo dello smoothing: poiché l'integrale non ha risentito eccessivamente dell'ulteriore operazione, significa che l'andamento frastagliato era dovuto a delle oscillazioni a media nulla sovrapposte al segnale, che sono state ridotte sufficientemente con l'applicazione dello smoothing.

Tabella 5.2: Parametri dei picchi della ricostruzione dopo l'applicazione dello smoothing (le percentuali tra parentesi indicano il rapporto con la ricostruzione senza smoothing).

Picco	HW _x [mm]	HW _y [mm]	Max [W/mm ²]	Integrale [W]
1	3.2 ± 0.6	4 ± 1	0.083 (73%)	4.47 (104%)
2	3.8 ± 0.6	4 ± 1	0.118 (80%)	10.59 (122%)
3	3.8 ± 0.6	4 ± 1	0.173 (78%)	14.81 (99%)
4	3.8 ± 0.6	4 ± 1	0.203 (79%)	17.17 (99%)
5	3.2 ± 0.6	4 ± 1	0.098 (76%)	8.01 (99%)
6	3.2 ± 0.6	3 ± 1	0.151 (73%)	11.26 (109%)
7	3.8 ± 0.6	4 ± 1	0.169 (81%)	15.64 (101%)
8	3.2 ± 0.6	3 ± 1	0.087 (85%)	6.07 (99%)
9	3.8 ± 0.6	4 ± 1	0.125 (78%)	9.97 (97%)
10	4.4 ± 0.6	4 ± 1	0.171 (80%)	14.60 (101%)
11	3.2 ± 0.6	4 ± 1	0.223 (88%)	16.92 (96%)
12	3.8 ± 0.6	3 ± 1	0.099 (75%)	6.77 (94%)
13	4.4 ± 0.6	4 ± 1	0.150 (82%)	11.61 (108%)
14	3.2 ± 0.6	3 ± 1	0.216 (90%)	14.26 (100%)
15	3.2 ± 0.6	3 ± 1	0.085 (70%)	5.72 (98%)
16	4.4 ± 0.6	3 ± 1	0.124 (86%)	9.30 (97%)
17	3.8 ± 0.6	3 ± 1	0.200 (86%)	13.02 (102%)
18	3.8 ± 0.6	3 ± 1	0.218 (85%)	15.62 (95%)
Potenza totale:				205.81 (101%)

Capitolo 6

Conclusioni

ITER è un progetto internazionale con lo scopo di verificare la fattibilità tecnologica di un reattore a fusione nucleare, confinando un plasma in configurazione Tokamak. Le temperature necessarie per le reazioni di fusione tra nuclei di deuterio e trizio sono raggiunte anche grazie a degli iniettori di neutri ad alta energia, originati dalla neutralizzazione di ioni negativi accelerati. A Padova, presso il consorzio RFX, è in costruzione la test facility SPIDER, sorgente di ioni negativi in grado di accelerarli fino a 100 keV .

Una delle diagnostiche che saranno installate su SPIDER è il calorimetro STRIKE, le cui componenti principali sono 16 tegole in materiale composito in fibra di carbonio (CFC), caratterizzate da un'alta conducibilità in direzione ortogonale alle facce maggiori delle tegole, sulle quali collidere il fascio di ioni negativi. Una termocamera registra il profilo di temperatura sul retro delle tegole.

Al momento si utilizzano le temperature misurate sul retro delle tegole come indicatori del profilo del flusso di energia incidente sul fronte. In questa tesi si è analizzato l'impiego della tecnica della funzione di trasferimento per l'analisi dei dati ottenuti dalle misure della termocamera, intendendo migliorare l'impiego delle misure di temperatura, ricavando direttamente il profilo del flusso di energia incidente sul fronte. Inoltre, il metodo è molto vantaggioso in termini del tempo necessario ad analizzare grosse moli di dati rispetto a metodi più lenti come i fit.

Presso il consorzio RFX le tegole sono state sottoposte a sollecitazioni di potenza il più possibile puntiformi mediante un raggio laser di potenza variabile tra 20 e 100 W modellizzato da un profilo gaussiano, e si è misurato il profilo di temperatura sul lato opposto, così da ottenere una misura sperimentale della risposta all'impulso. Questi test hanno permesso di determinare la funzione di *antitrasferimento* (l'inverso della funzione di trasferimento) caratteristica di una tegola, cioè la funzione nello spazio di Fourier dei numeri

d'onda che moltiplicata per la trasformata del profilo di temperatura su una faccia della tegola (uscita del sistema) restituisce la trasformata del profilo del flusso di energia che collide sulla faccia opposta producendo la variazione di temperatura (ingresso del sistema).

Nella tesi, dopo aver sviluppato il formalismo per descrivere il problema sulla base della trasformata di Fourier, si è verificato che gli esperimenti considerati rientrassero nell'ambito di validità di un'approssimazione lineare, condizione necessaria per l'applicazione della tecnica. È stata quindi definita la procedura di calcolo della funzione di antitrasferimento, determinata ad un istante fissato dall'inizio dell'impulso e su due dimensioni spaziali (è stato inoltre posto il problema dell'inclusione del tempo nella funzione di antitrasferimento). Si è poi descritto l'utilizzo della trasformata di Fourier discreta, discutendo le condizioni ottimali d'impiego per il caso considerato, descrivendo i possibili problemi e proponendo le soluzioni (come ad esempio la tecnica dell'*overturning* per ridurre gli effetti del leakage).

La tecnica della funzione di trasferimento è stata poi applicata a dei profili di temperatura simulati, così da evidenziare i limiti del metodo e cercare di ottimizzarlo; in seguito è stato aggiunto un rumore bianco di diversa ampiezza, mostrandone gli effetti e impiegando un filtro passa-basso per risolverli. Si è quindi cercato un metodo per determinare la migliore lunghezza d'onda su cui filtrare.

Per finire, si è applicato il metodo a due casi reali: prima al profilo di temperatura dei test con il laser, mostrando che il flusso di energia viene adeguatamente ricostruito all'interno dei vincoli imposti dal filtraggio adottato, poi al profilo di temperatura del calorimetro mini-STRIKE, versione ridotta di STRIKE installata nella test facility BATMAN presso il laboratorio IPP a Garching (Germania), e costituita da due tegole in CFC; per ricostruire il profilo del flusso di energia incidente sul fronte si sono sfruttati i risultati delle simulazioni.

6.1 Risultati e prospettive future

Questa tesi ha mostrato pregi e difetti della tecnica della funzione di trasferimento: grazie alle simulazioni si è osservato che, adeguando i filtri impiegati, è possibile avere delle buone ricostruzioni di larghezza e intensità del profilo del flusso di energia, nonostante la presenza di rumore. L'utilizzo di un filtro passa-basso costringe però a smussare l'andamento ricostruito, impedendo la ricostruzione di profili con i bordi troppo ripidi.

È quindi necessario uno studio sulla miglior tecnica di filtraggio da utilizzare per la ricostruzione, stabilendo se non sia meglio cercare di rimuovere

il rumore prima dell'applicazione del filtro passa-basso, così da limitarne l'utilità alla sola riduzione dei fenomeni di leakage; questi ultimi potrebbero essere a loro volta ridotti studiando gli effetti della tecnica dell'overtuning, introdotta in questa tesi, e cercando di ottimizzarla per il caso considerato.

Un'altra questione riguarda lo studio a tempo fissato, il quale presuppone che sia i profili impiegati per il calcolo della funzione di antitrasferimento che il profilo da analizzare presentino lo stesso andamento temporale. Eventuali variazioni nel tempo dei fasci incidenti sulle tegole non sono quindi riproducibili con questo metodo.

Il passo successivo è dunque lo sviluppo della teoria necessaria all'inclusione del tempo nella funzione di antitrasferimento, per esempio concentrandosi sul metodo di inversione della trasformata della funzione θ di Heaviside, permettendo l'applicazione di questa nuova funzione tridimensionale ad un'intera collezione di misure successive di una termocamera. Il metodo dovrà quindi essere adeguato per l'applicazione ai dati di STRIKE, stabilendo le condizioni migliori in termini di tempo impiegato e qualità della ricostruzione.

Bibliografia

- [1] P. Agostinetti et al. «Physics and engineering design of the accelerator and electron dump for SPIDER». In: *Nuclear Fusion* 51, 063004 (2011).
- [2] I. Amidror. *Mastering the Discrete Fourier Transform in One Two or Several Dimensions*. Springer, 2013.
- [3] M. Bacal et al. «Basic processes of negative hydrogen ion production and destruction in sources and beams (invited)». In: *Rev. Sci. Instrum.* 46.6 (1996), pp. 1138–1143.
- [4] M. Bacal et al. «Physics aspects of negative ion sources». In: *Nuclear Fusion* 46.6 (2006), S250–S259. URL: <http://stacks.iop.org/0029-5515/46/i=6/a=S05>.
- [5] C. Bonacina, A. Cavallini e L. Mattarolo. *Trasmissione del calore*. Cleup, 1990.
- [6] M. A. Brown e R. C. Semelka. *MRI: Basic Principles and Applications*. John Wiley & Sons, 2011.
- [7] H. S. Carslaw e J. C. Jaeger. *Conduction of heat in solids (second edition)*. Clarendon Press, 1959.
- [8] S. Cristofaro. «Caratterizzazione Numerica e Sperimentale di Tegole di CFC Soggette a Impulsi Laser di Potenza». Tesi di laurea. Università degli Studi di Padova, 2011/2012.
- [9] S. Cristofaro. «Characterisation of the BATMAN beam properties by H_{α} -Doppler shift spectroscopy and mini-STRIKE calorimeter». Tesi di laurea. Università degli Studi di Padova, 2013/2014.
- [10] A. Cupido e C. Concetti. *Elettronica industriale*. Vol. 1, Teoria dei controlli automatici. Cupido, 1983.
- [11] *Exelis, Visual Information Solutions*. URL: <http://www.exelisvis.com/>.

- [12] R. S. Hemsworth, A. Tanga e V. Antoni. «Status of the ITER neutral beam injection system». In: *Rev. Sci. Instrum.* 79 (2008), p. 02C109.
- [13] *Iter, the way to energy*. URL: <http://www.iter.org/>.
- [14] Mitsuru Kikuchi, Karl Lackner e Quang Minh Tran, cur. *Fusion Physics*. IAEA International Atomic Energy Agency, 2012.
- [15] E. Oran Brigham. *The fast Fourier transform and its applications*. Prentice-Hall, 1988.
- [16] R. Pasqualotto. «STRIKE Thermography. Technical specifications». In: *Report RFX SPIDER-TN-109 rev. 1* (2011).
- [17] A. Rizzolo et al. «Design and analyses of a one-dimensional CFC calorimeter for SPIDER beam characterisation». In: *Fusion Engineering and Design* 85 (2010), pp. 2268–2273.
- [18] G. Serianni et al. «First negative ion beam measurement by the Short-Time Retractable Instrumented Kalorimeter Experiment (STRIKE)». In: *Rev. Sci. Instrum.* (2014), 02A736.
- [19] G. Serianni et al. «Negative Ion Beam Characterisation in BATMAN by mini-STRIKE: Improved Design and New Measurements». In: *AIP Conference Proceedings* (2014), Pubblicazione accettata.
- [20] G. Serianni et al. «Thermal Simulations of STRIKE tiles for the assessment of the CFC prototypes and of the configuration for SPIDER». In: *AIP Conference Proceedings 1515* (2013), pp. 579–586.
- [21] C. C. Smith, J. F. Dahl e R. J. Thornhill. «The Duality of Leakage and Aliasing and Improved Digital Spectral Analysis Techniques». In: *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control* 118(4) (1996), pp. 741–747.
- [22] P. Sonato et al. «Status of PRIMA, the test facility for ITER neutral beam injectors». In: *AIP Conference Proceedings 1515* (2013), pp. 549–558.