

# Diagnostica autoadattativa di sistemi autoregressivi: applicazione all'impianto di raffreddamento di un autoveicolo

Fabio Peterle

14 aprile 2015



# Indice

<b>1</b>	<b>Premessa</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Introduzione</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Stato dell'arte</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Principio di funzionamento dell'impianto di raffreddamento degli autoveicoli</b>	<b>17</b>
4.1	Introduzione . . . . .	17
4.2	Circuito di raffreddamento . . . . .	17
4.3	Individuazione delle relazioni causa/effetto del sistema . . .	18
<b>5</b>	<b>Identificazione del sistema di raffreddamento</b>	<b>21</b>
5.1	Introduzione . . . . .	21
5.2	Rilevazione dei dati dal sistema . . . . .	22
5.2.1	Lo standard CAN-bus . . . . .	22
5.2.2	Scelta del periodo di campionamento . . . . .	26
5.2.2.1	Densità spettrale di potenza . . . . .	26
5.2.2.2	Calcolo dello spettro dei segnali estratti dall'autoveicolo . . . . .	28
5.3	Identificazione gray-box: modello in spazio di stato e filtro di Kalman . . . . .	30
5.3.1	Modello fisico . . . . .	30
5.3.2	Diagnostica mediante filtro di Kalman . . . . .	32
5.4	Identificazione black-box mediante modelli ingresso/uscita .	34
5.4.1	Introduzione . . . . .	34
5.4.2	Teoria per l'identificazione di modelli ingresso/uscita	35
5.4.2.1	Modelli ARX, ARMAX e Box-Jenkins . . .	35
5.4.2.2	Calcolo del predittore ad un passo . . . . .	36
5.4.2.3	Errore di predizione e minimizzazione della loss function . . . . .	37
5.4.3	Modelli ottenuti con campionamento a 0.32 secondi	38
5.4.4	Modelli ottenuti con campionamento a 1 secondo . .	42
5.5	Identificazione black-box mediante modelli di stato . . . . .	43
5.5.1	Introduzione . . . . .	43
5.5.2	Cenni all'identificazione su sottospazi . . . . .	44

5.5.3	Aspetti relativi alla determinazione dell'ordine di stato a partire da misure rumorose . . . . .	46
5.5.4	Identificazione di un modello di stato per il sistema di raffreddamento . . . . .	46
5.6	Identificazione black-box di serie temporali . . . . .	49
5.6.1	Introduzione . . . . .	49
5.6.1.1	Identificazione di modelli AR . . . . .	49
5.6.1.2	Identificazione di modelli MA . . . . .	51
5.6.1.3	Identificazione di modelli ARMA . . . . .	52
5.6.1.4	Scelta della classe di modelli per serie temporali . . . . .	53
5.6.1.5	Scelta dell'ordine nei modelli AR: AIC e MDL . . . . .	55
5.6.1.6	Capacità di generalizzazione del modello AR(1) . . . . .	57
5.6.2	Costruzione di modelli per la temperatura del liquido di raffreddamento . . . . .	60
5.6.2.1	Modelli ARMA per la temperatura dell'acqua . . . . .	60
5.6.2.2	Modelli AR per la temperatura dell'acqua . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Diagnostica autoadattativa del sistema di raffreddamento</b>	<b>71</b>
6.1	Introduzione . . . . .	71
6.2	Idee generali nella scelta delle tecniche diagnostiche . . . . .	71
6.2.1	Guasti e variazioni parametriche . . . . .	73
6.2.2	Guasti e perdita di bianchezza . . . . .	75
6.3	Identificazione on-line dei parametri di un modello . . . . .	77
6.3.1	Minimi quadrati ricorsivi . . . . .	77
6.3.2	Minimi quadrati ricorsivi con fattore di oblio . . . . .	81
6.4	Test di bianchezza del residuo di modello . . . . .	84
6.4.1	Test dei cambi di segno . . . . .	84
6.4.2	Test di Anderson . . . . .	85
6.4.3	Test del correlogramma . . . . .	87
6.5	Diagnostica in linea ed autoadattatività . . . . .	88
6.5.1	Strategia a memoria statica . . . . .	89
6.5.2	Strategia a memoria autoadattativa . . . . .	89
6.5.2.1	Bianchezza e derivata del correlogramma . . . . .	91
<b>7</b>	<b>Realizzazione software dell'apparato diagnostico</b>	<b>99</b>
7.1	Introduzione . . . . .	99
7.2	Diagnostica parametrica . . . . .	99
7.2.1	Rimozione della media e calcolo ricorsivo del parametro . . . . .	101
7.2.2	Aggiornamento adattativo del parametro nominale . . . . .	103
7.2.3	Blocco decisionale di diagnosi parametrica . . . . .	103
7.3	Diagnostica di bianchezza . . . . .	104
7.3.1	Calcolo del correlogramma . . . . .	105
7.3.2	Calcolo in linea della derivata del correlogramma . . . . .	106

7.3.3	Aggiornamento adattativo della derivata nominale . . . . .	106
7.3.4	Blocco per la diagnosi di bianchezza . . . . .	107
7.4	Ulteriori elementi della realizzazione software . . . . .	107
7.4.1	Blocco AR_Transient_Neglect . . . . .	107
7.4.2	Blocco Running Detrend . . . . .	108
7.4.3	Blocco RecursiveEstimator . . . . .	108
7.4.4	Blocco SteadyDetection . . . . .	108
7.4.5	Blocco AR_AlfaNom . . . . .	109
7.4.6	Blocco AR_Parameter_Diagnosis . . . . .	109
7.4.7	Blocco AR_CorrelogramDer . . . . .	110
7.4.8	Blocco AR_CorrelogramDerNom . . . . .	110
7.4.9	Blocco AR_Whiteness_Diagnosis . . . . .	110
<b>8</b>	<b>Simulazioni</b>	<b>113</b>
8.1	Introduzione . . . . .	113
8.2	Descrizione dei dati utilizzati nella simulazione . . . . .	113
8.2.1	Storia della temperatura di raffreddamento . . . . .	113
8.2.2	Analisi dei diagrammi velocità-potenza della vettura . . . . .	116
8.3	Simulazione della diagnostica parametrica . . . . .	117
8.4	Simulazione della diagnostica di bianchezza . . . . .	121
8.5	Commento ai risultati ottenuti . . . . .	124
<b>9</b>	<b>Conclusioni e sviluppi futuri</b>	<b>127</b>
<b>10</b>	<b>Appendici</b>	<b>129</b>
10.1	Algoritmo di Durbin-Levinson . . . . .	129
10.2	La distribuzione di probabilità «chi quadro» . . . . .	132



# 1 Premessa

Questa tesi è frutto del periodo che mi ha visto ospite dell'azienda veneziana S.A.T.E. nell'anno accademico 2014/2015.

Il lavoro si inserisce in un progetto di diagnostica per sottosistemi di autoveicoli: nello specifico la tesi affronta il problema della previsione di guasti all'impianto di raffreddamento di una vettura sfruttando tecniche di modellizzazione a scatola nera a partire dai dati acquisiti sul sistema.

Il compimento del presente elaborato ha richiesto molta dedizione, non solo da parte mia, ma anche di chi mi ha seguito passo dopo passo nel corso della permanenza in S.A.T.E., condividendo tempo ed idee. Non si commette allora alcun errore nell'affermare che la tesi che ne è derivata è il risultato della collaborazione tra due «culture»: quella prevalentemente didattico-universitaria di cui sono stato fresco portatore e quella figlia dell'esperienza e della conoscenza pratica, ma anche teorica, di chi mi ha saputo seguire e consigliare. Un interessante gioco di squadra dal quale ho avuto la fortuna di ricevere moltissimo. Spero che questo scritto possa, almeno in parte, saldare il debito di conoscenza maturato in questi mesi.





## 2 Introduzione

Se fino alla prima metà del secolo scorso la grande ambizione delle scienze matematiche in generale, e di quelle ingegneristiche in particolare, era la deduzione di modelli atti a descrivere un qualsivoglia fenomeno reale, dagli anni '70 l'attenzione si è spostata verso un nuovo orizzonte: la diagnostica di sistemi fisici mediante tecniche modellistiche.

Senza ombra di dubbio l'approccio modellistico alla diagnostica dei sistemi (*model-based diagnostic*) si è sviluppato sulla base delle tecniche di identificazione dei modelli allo stato dell'arte.

Pertanto lo studio dell'identificazione dei modelli è servito non solo a dettare le procedure per la «messa in equazioni» dei fenomeni, ma ha rappresentato la concausa nella nascita dell'era moderna della diagnostica.

La stessa nozione di «diagnosi» ha vissuto una graduale evoluzione. In principio intesa come semplice «monitoraggio» del sistema in questione, ben presto ha rinnovato le sue vesti per diventare ambizioso sinonimo di «rilevazione precoce» di guasti. Questa distinzione non riguarda solamente la diversa scala temporale insita nel problema ma trova fondamento nelle complementari tecniche richieste nei due problemi. E' intuitivo pensare che un semplice monitoraggio non chieda altro che una visione esterna del fenomeno sotto controllo; meno banale è invece l'idea alla base di una previsione dei malfunzionamenti in un sistema, la quale necessita di una conoscenza molto più robusta del processo, ossia di una visione interna del fenomeno, capace di condensare in sé tutto quel complesso di relazioni causa-effetto, di parametri e di ritardi intrinseci il cui risultato è appunto la dinamica di processo. Il modo per costruire tale conoscenza è quello di ricavare una rappresentazione matematica (modello) capace di simulare accuratamente il processo su cui la diagnostica deve essere progettata.

In questa tesi verrà preso in considerazione proprio il problema della diagnostica inteso come capacità di prevedere dei malfunzionamenti prima che questi abbiano un carattere irreversibile sul sistema. Il contesto di applicazione è quello dell'impianto di raffreddamento di un autoveicolo.

L'organizzazione della tesi è la seguente. Dopo avere brevemente esaminato le metodologie diagnostiche esistenti in letteratura (capitolo 3), nel capitolo 4 si procederà alla descrizione del sistema di raffreddamento ed all'individuazione delle grandezze fisiche che lo caratterizzano (ingressi/uscita). Il capitolo 5 sarà dedicato alla rappresentazione della dinamica di impianto tramite modelli matematici. In tal senso, all'iniziale speranza di poter spiegare il sistema attraverso le leggi fisiche delle parti costituenti (modello

## 2 Introduzione

fisico o *gray-box*), si sostituirà la consapevolezza che una rappresentazione sintetica, in grado di approssimare il comportamento del processo senza attribuire necessariamente un significato fisico ai parametri del modello, comporta minori difficoltà progettuali (modelli a scatola nera o *black-box*: saranno analizzati grazie al software *Matlab*, modelli ARMAX, di stato, AR e ARMA). Questa fase di modellistica, anche detta processo di *identificazione*, è necessaria per dedurre la classe di rappresentazioni, intesa come il *tipo* e l'*ordine* del modello, maggiormente adatta alla simulazione del sistema di raffreddamento. Per questa scelta ci si baserà su leggi fisiche o, in seguito, su misure precedentemente raccolte dal sistema reale durante alcune sessioni di test. In altri termini la scelta della struttura del modello sarà eseguita off-line.

La trattazione teorica delle (due) tecniche diagnostiche applicate al sistema di refrigerazione sarà oggetto del capitolo 6; in quella sede saranno descritte la *diagnostica parametrica* (nella quale la decisione dello stato di salute dell'impianto si valuta dallo scostamento tra i valori dei parametri del modello stimati nel corso del funzionamento e quelli nominali di buon funzionamento) e la *diagnostica di bianchezza* (per la quale la decisione sullo stato di salute viene basata sulle proprietà statistiche dell'errore tra le misure reali e le simulazioni del modello). Verrà inoltre discussa la possibilità di minimizzare i test off-line per la determinazione dei parametri nominali, rimandando la loro stima ad un contesto on-line parallelo all'azione diagnostica (*autoadattatività* dello schema diagnostico).

Nel capitolo 7 saranno fornite informazioni generali per l'implementazione software delle tecniche di diagnosi (tramite *Simulink*). Queste ultime verranno poi testate sulla storia di un reale impianto di raffreddamento di un autoveicolo, comprensivo di guasti con diversa entità e tipologia (capitolo 8). Lo schema di figura 2.1 mostra il percorso logico affrontato nella tesi.

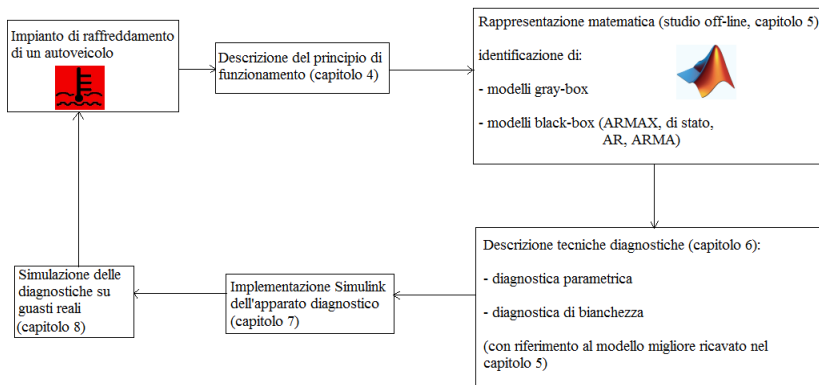


Figura 2.1: Percorso logico della tesi.

## 3 Stato dell'arte

La diagnostica di processi industriali ha assunto un notevole interesse a partire dagli anni '70 quando l'avanzamento nello studio delle tecniche di stima, filtraggio ed identificazione cominciava a consentire una trattazione analitica rigorosa del problema.

Difficile comunque individuare un pioniere di questa materia che rappresenta forse la terza branca dell'automatica, a metà strada tra le questioni inerenti l'identificazione e quelle relative al design del controllo. Se è vero infatti che non può esistere una robusta diagnostica senza il ricorso all'identificazione di un modello statico, dinamico o probabilistico del processo, è altrettanto assodato che il progetto di uno schema di controllo a retroazione non può prescindere da un'accurata analisi delle problematiche inerenti il guasto di attuatori, di componenti del processo e di sensori.

Non è tuttavia errato individuare in R. E. Kalman una figura decisiva nello sviluppo delle tecniche di diagnostica. Il suo apporto alla stima dello stato per processi dinamici descritti in spazio di stato, venne infatti ben presto sfruttato da Deyst e Deckert[1] nel rilevamento di anomalie in sistemi di controllo per ambito aerospaziale. L'idea in sé era quella di modellare i bruschi malfunzionamenti all'attuazione o nei sensori di uscita con delle variazioni nei valori della matrice di stato del processo o con un incremento della varianza del rumore di misura; una stima degli stati e dell'uscita effettuata tramite il filtro di Kalman è poi in grado di catturare gli scostamenti delle variabili dai loro andamenti nominali.

Il principale svantaggio di un simile modo di procedere è però insito nella natura stessa delle equazioni ricorsive del filtro stimatore come già evidenziato da Fagin[2], Tarn e Zaborszky[3] e da Jazwinski[4], i quali provarono come l'usuale filtro di Kalman tenda ad essere, alla lunga, poco reattivo ai nuovi dati e dunque insensibile a quei guasti che si manifestino dopo una lunga storia del processo.

Altra difettosità di una diagnosi basata sul filtro di Kalman è l'impossibilità di dare al guasto una precisa collocazione fisica nel processo, quello che in gergo è noto come problema dell'«isolamento». Furono Beard[5] e Jones[6] a presentare una teoria alternativa a quella di Kalman, applicabile a sistemi lineari e tempo-invarianti scritti in spazio di stato, allo scopo di permettere l'isolamento delle anomalie. Ciò fu possibile grazie all'ideazione di un diverso filtro per la stima dello stato che evidenziasse effetto e direzione di un errore conseguente ad un guasto. Il loro lavoro venne corredato da un esempio in cui il sistema di diagnostica rilevava con esattezza, tra

### 3 Stato dell'arte

i molteplici sensori di uscita, quello affetto da un'anomalia, risaltata nella corrispondente componente del residuo. La maggiore limitazione del metodo di Beard e Jones stava nel ristretto campo di applicabilità del metodo, valido solamente per sistemi lineari e tempo-invarianti, come osservato da Willsky[7].

Un'estensione del metodo a sistemi tempo-varianti fu argomento degli articoli di Davis[8] e di Chien[9], i quali formularono il problema diagnostico in termini probabilistici: il processo da monitorare veniva modellato da un'equazione differenziale stocastica con parametri aleatori e tempo-varianti. La probabilità di guasto era computata in base alla variazione nella distribuzione statistica dei parametri nel tempo.

Di orientazione probabilistica fu anche il lavoro di Mehra e Peschon[10], in cui vengono suggeriti un certo numero di test statistici da applicare alle innovazioni del processo di interesse diagnostico. Tra questi emerge il test «chi-quadro» che deve il suo nome alla distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria legata alle cross-correlazioni del residuo di modello. Una versione modificata del test d'ipotesi «chi-quadro» è implementata in questa tesi allo scopo della previsione di anomalie nel sistema di raffreddamento tramite la tecnica di bianchezza.

Sebbene i test proposti da Mehra e Peschon siano stati catalogati dalla letteratura come semplici «metodi di allarme», utili nell'evidenziare l'insorgere di anomalie ma inadatti all'isolamento delle stesse, la loro semplicità implementativa ne assicura una sempre rinnovata competitività in quelle applicazioni dove una precoce rilevazione di malfunzionamenti è più importante del dare una precisa collocazione fisica al guasto. Qualora invece la questione dell'isolamento rivesta maggiore interesse l'approccio statistico non è sufficiente e deve essere sostituito, o comunque affiancato, da una conoscenza fisica più profonda del processo in essere.

In questa tesi, vista anche la difficile caratterizzazione del sistema e la non completa disponibilità di misure necessarie all'identificazione di modelli fisici, si è preferito intraprendere la via statistica, accontentandosi di uno studio diagnostico privato della possibilità di isolare la causa del malfunzionamento del sistema. Si rimanda il lettore ai testi di Chiang, Russell e Bratz[11] e di Simani[12], o ancora ai numerosi lavori di Isermann[13] (questi ultimi sempre molto attenti alle applicazioni pratiche), per un approfondimento mirato a tecniche in grado di dare un'indicazione fisica delle anomalie in processi industriali. Di stampo statistico, e quindi maggiormente affini al presente lavoro di tesi, sono invece le ricerche di Gray e Markel[14] oltre che di Zhang, Basseville e Benveniste[15, 22], i quali hanno discusso alcune soluzioni basate sulle distanze euclidee tra parametri nominali e reali di modelli a scatola nera, oppure tra le densità spettrali e di probabilità, nominale e reale, del segnale di interesse (distanza di Kullback).

A prescindere tuttavia dalla strategia modellistica scelta o imposta dal contesto, l'intero stato dell'arte è d'accordo nel definire uno schema dia-

agnostico come una connessione in parallelo dell'impianto da monitorare e di un processore che lo simuli, ossia di un modello matematico tale da rappresentare fedelmente la dinamica del processo (figura 3.1).

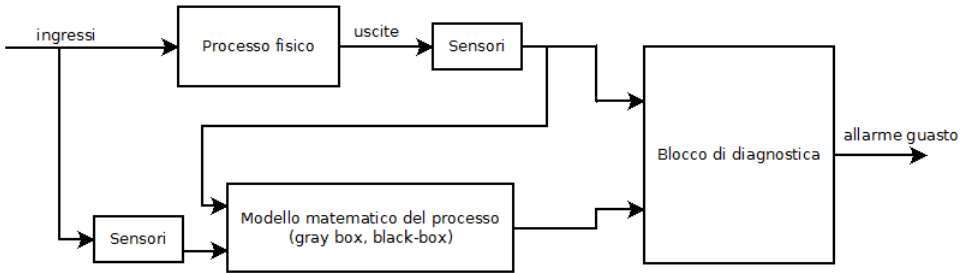


Figura 3.1: Schema diagnostico generale (diagnosi basata sul modello).

Lo scostamento tra la realtà indicata dalle misure raccolte sul campo e quella derivante dalla simulazione del modello è visto come variabile sintomatica della diagnosi. Quali debbano essere nel dettaglio le grandezze da confrontare per formare le variabili sintomatiche è a discrezione del progettista: in letteratura numerosi sono gli esempi in cui il guasto è rilevato semplicemente sulla base dell'entità dell'errore tra uscita reale del sistema e quella simulata dal modello (*entità del residuo*, metodo delle *equazioni di parità*). In quest'ultimo caso, dette rispettivamente  $G_P(s)$  e  $G_M(s)$  le funzioni di trasferimento del processo reale e del modello che lo simula, viene assunta come variabile diagnostica sintomatica il residuo modello-processo definito come  $\varepsilon(s) \triangleq G_P(s) - G_M(s)$ . Durante un corretto funzionamento del sistema, a patto che il modello sia sufficientemente accurato ( $G_P \approx G_M$ ), risulta  $\varepsilon \approx 0$ . Quando sul sistema agiscono dei guasti additivi in ingresso ( $f_u$ ) o in uscita ( $f_y$ , si veda la figura 3.2) l'entità del residuo muta proporzionalmente all'ampiezza del guasto secondo la relazione  $\varepsilon(s) = G_P f_u(s) + f_y(s)$ . Il metodo delle equazioni di parità è dunque indicato per la rilevazione di anomalie di tipo additivo agenti all'ingresso o sui sensori di uscita dell'impianto[13].

Altri lavori in letteratura assumono come sintomatica la variazione dei parametri del modello rispetto al loro andamento nominale; dopo una fase di studio off-line del processo e la determinazione del modello che meglio lo simula (con la memorizzazione di parametri nominali) si stimano nuovamente i parametri, stavolta on-line (*identificazione ricorsiva* [16]), tramite misure raccolte dai sensori di impianto e li si confrontano con i valori nominali. Tale modo di operare consente di rilevare guasti di tipo moltiplicativo, agenti cioè internamente al processo a differenza dagli additivi, ed è noto come metodo di *diagnostica parametrica* (figura 3.3). Spesso il criterio

### 3 Stato dell'arte

adottato per la stima dei parametri, sia nominali (off-line) che ricorsivi, è quello della minimizzazione dello scarto quadratico medio tra misure reali di uscita e quelle simulate o predette dal modello.

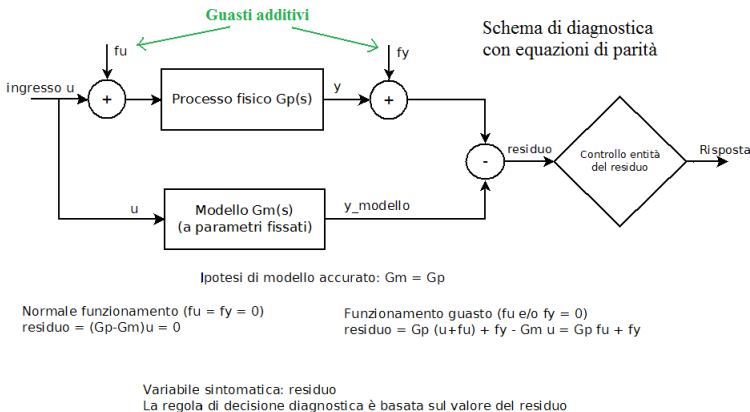


Figura 3.2: Schema diagnostico delle equazioni di parità.

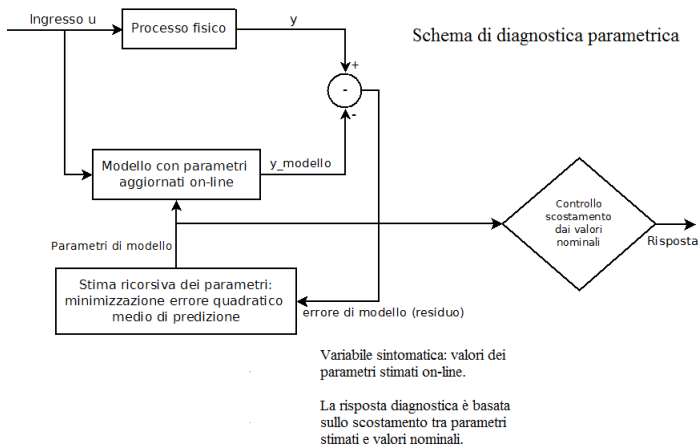


Figura 3.3: Schema di diagnostica parametrica[13].

La trattazione della tesi si inserirà nei contesti appena descritti: per il sistema di raffreddamento, ad una diagnostica di tipo parametrico sarà affiancata una seconda tecnica, basata sul residuo, come quella delle equazioni di parità. Tuttavia, diversamente dalle equazioni di parità, non sarà assunta come sintomatica la semplice entità del residuo bensì le proprietà

statistiche di quest'ultimo: media, varianza o, più in generale, la sua distribuzione di probabilità. L'idea è di andare maggiormente a fondo nell'analisi dell'errore, valutandone la dinamica, non semplicemente l'ampiezza. A tale tecnica sarà dato il nome di *diagnostica di bianchezza*, in accordo con la struttura (bianca) posseduta dal residuo nel caso di una buona modellizzazione del processo reale. Benché in letteratura esistano tecniche basate sull'analisi della distribuzione di probabilità del residuo[10], sarà necessario in questo lavoro adattarele al caso di misure molto imprecise dei sensori di uscita, situazione nella quale si colloca l'impianto di raffreddamento.

Insito nella scelta combinata delle due tecniche per la diagnosi vi è, chiaro, l'intento di rilevare anomalie di diverso tipo, sia moltiplicative che additive.





# 4 Principio di funzionamento dell'impianto di raffreddamento degli autoveicoli

## 4.1 Introduzione

Nel presente capitolo si desidera introdurre molto brevemente il principio di funzionamento del sistema di raffreddamento di un'autovettura, oggetto della diagnostica. In tal modo sarà facilitata una scelta preliminare dei segnali utili alla costruzione dei modelli.

La sezione 4.2 è dedicata ad una rapida descrizione delle componenti dell'impianto di raffreddamento e del modo in cui viene gestito il raffreddamento delle componenti vitali del veicolo. In sezione 4.3 si individuano le variabili fisiche che influenzano il processo di raffreddamento.

## 4.2 Circuito di raffreddamento

La funzione fondamentale dell'impianto di raffreddamento di un autoveicolo è quella di evitare che testata, pistoni, cilindri e le altre parti costitutive il motore, raggiungano temperature troppo elevate; il rischio in quest'ultimo caso è il grippaggio dei pistoni nei cilindri. Nella maggior parte degli autoveicoli il raffreddamento avviene mediante circolazione di un *liquido refrigerante* avente caratteristiche anticorrosive, basso punto di congelamento ed elevata temperatura di ebollizione.

Nel corso dell'utilizzo di un autoveicolo, il motore converte l'energia chimica del carburante producendo calore. Una parte di questo è assorbito dai cilindri e dai pistoni che così vedono incrementata la loro temperatura.

Allo scopo di asportare calore dal motore, i cilindri sono circondati da intercapedini nelle quali circola il liquido refrigerante proveniente dal serbatoio basso del radiatore. Il movimento del liquido verso tutti i cilindri è assicurato dalla spinta di una pompa attivata dall'azione del motore.

Un termostato consente alla sostanza refrigerante il ritorno nel radiatore attraverso l'imbocco superiore, quando essa presenti una temperatura troppo elevata. Nel radiatore il liquido, scorrendo verso il basso, vie-

#### 4 Principio di funzionamento dell'impianto di raffreddamento degli autoveicoli

ne raffreddato dalla corrente d'aria generata dal movimento del veicolo e dall'elettroventilatore comandato dalla valvola termostatica (figura 4.1).

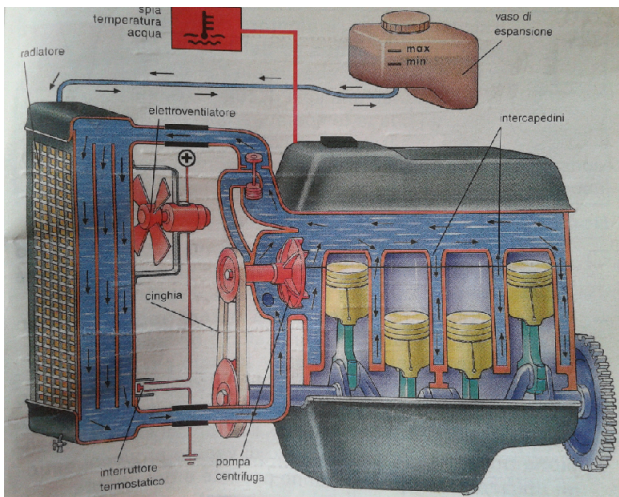


Figura 4.1: Impianto di raffreddamento di un autoveicolo[23].

Può capitare però che l'elevata temperatura del liquido causi un'eccessiva pressione all'imbocco superiore del radiatore, impedendo così al refrigerante di fluire verso il basso. Per questo motivo l'impianto di raffreddamento è dotato di una valvola regolatrice di pressione la cui funzione è mantenere un corretto livello di pressurizzazione nel serbatoio superiore del radiatore, facendolo comunicare con il vaso di espansione (*raffreddamento a circuito sigillato con vaso di espansione*). In tal modo il liquido, dilatato dal calore, viene convogliato al vaso di espansione per poi defluire nuovamente al radiatore quando dotato di una pressione inferiore.

La misura della temperatura del liquido refrigerante viene effettuata tramite un termistore NTC (*Negative Temperature Coefficient*) costruito in materiale semiconduttore. Le letture effettuate dal sensore sono inviate alla centralina elettronica dell'autoveicolo e utilizzate per decidere momento e durata dell'iniezione del carburante nei cilindri.

### 4.3 Individuazione delle relazioni causa/effetto del sistema

La breve descrizione dell'impianto di raffreddamento fatta nella sezione precedente pone in luce la dipendenza della temperatura del liquido refrigerante da altri fattori legati all'utilizzo del veicolo. Ad esempio è chiaro

### 4.3 Individuazione delle relazioni causa/effetto del sistema

che una maggiore velocità comporta un consistente afflusso di aria nel radiatore, con la conseguente diminuzione della temperatura del liquido; alla stessa maniera c'è da aspettarsi un legame tra la temperatura del refrigerante e le temperature del motore (cilindri, pistoni) e dell'ambiente esterno alla vettura con cui è a contatto.

A sua volta la temperatura del motore è determinata dal meccanismo di combustione e dunque da quel complesso di grandezze quali la coppia motrice, il numero di giri motore e la posizione della farfalla (accelerazione impressa al veicolo) che riassumono il funzionamento istantaneo della macchina determinando la quantità di carburante nei cilindri.

Dato che lo scopo della diagnostica è la previsione di malfunzionamenti all'impianto di raffreddamento, è intuitivo considerare come segnale sintomatico di *uscita* la temperatura del liquido refrigerante e come segnali ausiliari in grado di influenzarla, la velocità del veicolo, la temperatura esterna e quella del motore. Tipicamente quest'ultimo dato non è però disponibile e va sostituito da quelle grandezze misurabili che concorrono, come detto, a determinarlo: velocità del motore (giri), coppia motrice e posizione della farfalla.

Nei modelli matematici a scatola nera che saranno presi in considerazione più avanti nella tesi, sarà costume indicare la temperatura del liquido refrigerante, variabile di uscita, con la lettera  $y$ , mentre i cinque ingressi in grado di influenzarla con le lettere  $u_i$   $i = 1, \dots, 5$ . Per maggiori dettagli si veda la tabella 4.1.

Grandezza fisica dell'impianto	Tipo	Simbologia adottata
Velocità	ingresso	$u_1$
Coppia	ingresso	$u_2$
Giri motore	ingresso	$u_3$
Posizione farfalla	ingresso	$u_4$
Temperatura esterna (aria)	ingresso	$u_5$
Temperatura refrigerante (acqua)	uscita	$y$

Tabella 4.1: Simbologia adottata per ingressi e uscita nei modelli black-box.



# 5 Identificazione del sistema di raffreddamento

## 5.1 Introduzione

La messa a punto di un apparato diagnostico *model-based* richiede l'identificazione di un modello matematico per il sistema in questione.

Quest'ultima fase è condotta *off-line*, sulla base di conoscenze fisiche o tramite raccolta di dati sul campo per una successiva elaborazione.

L'obiettivo è l'individuazione della struttura (tipo di modello o *classe*) e della complessità (*ordine*) delle relazioni matematiche atte a rappresentare il sistema. Il valore puntuale dei parametri della rappresentazione matematica può essere invece oggetto di una stima ricorsiva da dati misurati on-line; questa soluzione, anzi, è una delle chiavi per rilevare dei guasti all'impianto.

Vi sono molteplici approcci nel contesto dell'identificazione. Questo capitolo ne introdurrà alcuni richiamandone le idee di fondo e discutendone pregi e difetti generali nonché vantaggi e svantaggi d'uso nel caso di interesse.

In particolare si cercherà dapprima di identificare un modello fisico non lineare per l'impianto di raffreddamento, sfruttando le relazioni causa/effetto individuate nella sezione 4.3, e se ne discuteranno le difficoltà implementative (sezione 5.3). Successivamente, nelle sezioni 5.4 e 5.5, saranno introdotte delle tecniche alternative, quali le black-box ingresso/uscita o a variabili di stato, accettando di rinunciare al significato fisico delle rappresentazioni per ottenere relazioni lineari sottoforma di equazioni alle differenze (modelli ARMAX o in spazio di stato). Infine si valuterà una seconda rappresentazione black-box, priva di variabili in ingresso: i cosiddetti modelli autoregressivi e autoregressivi a media mobile (AR e ARMA), le cui proprietà sono di descrivere il segnale sintomatico semplicemente come combinazione lineare di valori presi dalla sua storia passata (analisi delle serie temporali, sezione 5.6).

L'identificazione dei modelli a scatola nera presentati nella tesi è eseguita sulla base di misure precedentemente raccolte durante il funzionamento del veicolo. Per questo motivo si è scelto di aprire il capitolo con una sezione in cui venga data una concisa descrizione del *sistema di misura* che ha consentito la raccolta di dati, discutendo le problematiche inerenti il tempo

## 5 Identificazione del sistema di raffreddamento

di campionamento ed il grado di accuratezza con il quale i dati sono rilevati (sezione 5.2). Del resto, denominatore comune nella tesi è ridurre l'intero processo di identificazione off-line a quattro fasi, strettamente legate alle misure effettuate sul sistema e applicabili a contesti del tutto generali:

1. Suddivisione delle misure raccolte sul campo in dati di identificazione e di validazione
2. Determinazione di classe, ordine e parametri del modello matematico che meglio spiega i dati di identificazione
3. Test di aderenza del modello sui dati di validazione (fit)
4. Controllo delle caratteristiche statistiche dell'errore di modello (*residuo* o scostamento tra misure reali e valori simulati dal modello) su dati di validazione (*test di bianchezza*).

Una volta determinata la struttura del modello che ben rappresenta il sistema, la fase di diagnostica vera e propria sarà eseguita on-line e prevederà le seguenti fasi:

1. Acquisizione dei dati on-line dal sistema
2. Stima ricorsiva dei parametri del modello (la cui struttura è stata determinata nella fase off-line)
3. Monitoraggio dell'andamento dei parametri stimati nel tempo (*diagnostica parametrica*)
4. Monitoraggio delle caratteristiche statistiche dell'errore di modello (*diagnostica di bianchezza*)

## 5.2 Rilevazione dei dati dal sistema

### 5.2.1 Lo standard CAN-bus

L'acquisizione dei dati costituisce, come detto, il passo base in ogni procedimento di identificazione a scatola nera; non sono tuttavia rari i casi in cui si renda necessario anche per modelli dedotti dalla fisica laddove alcuni dei parametri non siano noti con precisione.

Per quanto riguarda i sistemi automotive, lo standard per l'acquisizione dei dati di bordo è noto come CAN-bus (Controller Area Network bus). Esso definisce i primi due livelli del modello ISO/OSI, dettando le modalità con cui vengono effettuati il controllo del flusso di informazione ed il controllo di errori nei dati (*data link layer*), nonché il modo con cui i segnali sono acquisiti dal campo (*physical layer*).

Tutti i segnali utilizzati per questa tesi sono stati raccolti secondo lo standard CAN-bus nel corso del funzionamento annuale di un autoveicolo e organizzati in sessioni<sup>1</sup> che ne individuano data e durata della rilevazione. Per quanto concerne l'identificazione del modello dai dati ci si è assicurati di utilizzare sessioni che da un lato contenessero un numero sufficientemente alto di dati e dall'altro riferissero a vari periodi nel corso dell'anno; ciò ha mirato a preservare quanto più possibile la natura generale del modello ricavato, «allenandolo» su tipici valori di temperatura esterna.

*Quantità* di dati a disposizione e condizione «atmosferica» in cui vengono raccolti non sono tuttavia gli unici criteri da tenere in considerazione per la scelta dell'insieme dei dati di test. Anche la *qualità* dei dati andrebbe ponderata attentamente. Generalmente, in presenza di ingressi, è consigliabile stimolare il processo mediante segnali sufficientemente irregolari (persistentemente eccitanti) così da avere una sollecitazione frequenziale completa che impedisca di pervenire a modelli troppo specifici. Il rumore bianco, forma d'onda del tutto imprevedibile, è preferibile ad altri come input per sollecitare il sistema (per questo lo si dice *persistentemente eccitante di ogni ordine*). Quando si è tuttavia interessati ad identificare sistemi solo in un certo range di frequenze, l'andamento degli ingressi andrebbe progettato in modo da avere distribuzione in frequenza non nulla perlomeno nell'intervallo di interesse.

Nel contesto dell'identificazione industriale si ha raramente la possibilità di agire a proprio piacimento sul processo e ci si deve adeguare a quelli che sono i dati registrati nel corso di un esperimento senza poter imporre ingressi particolari. Per di più la fase di raccolta dati sul campo assume spesso un carattere economicamente oneroso ed una sua eventuale ripetizione potrebbe essere inaccettabile.

Pur non avendo potuto progettare gli esperimenti sull'impianto di raffreddamento in questione, si ritiene che la lunga storia descritta nelle misure memorizzate sia tale da contemplare un ampio spettro di regimi di funzionamento; ciò risulta chiaro anche da una semplice esamina grafica di una sessione di dati: se questa è sufficientemente lunga in termini di durata della raccolta dati e l'uso che è stato fatto del veicolo ha costretto i segnali di velocità, coppia, giri motore e posizione della farfalla (legata alla posizione del pedale dell'acceleratore) a variare fortemente nel corso della sessione, si può ritenere di essere in presenza di un grado di eccitazione soddisfacente.

La figura 5.1 mostra gli andamenti temporali dei sei segnali rilevati tramite CAN-bus relativamente ad una sessione autunnale di utilizzo dell'autoveicolo: le ampie escursioni dei segnali di ingresso costretti a variare su quasi tutto il range possibile (eccetto naturalmente quello di temperatura

---

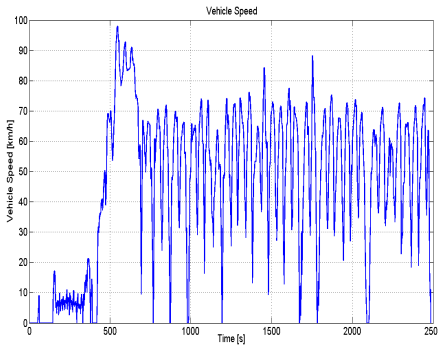
<sup>1</sup>Per sessione si intende l'insieme di dati raccolti nel periodo di tempo che intercorre tra un'accensione ed il successivo spegnimento dell'auto.

## *5 Identificazione del sistema di raffreddamento*

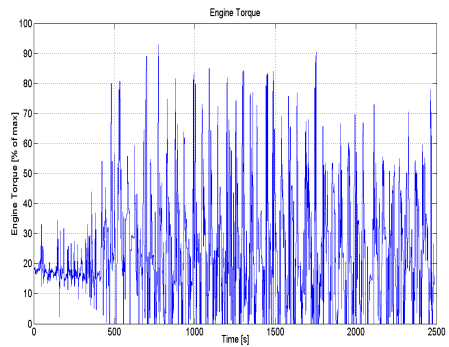
esterna, pressoché costante nel tempo, figura 5.1e) e la lunghezza della storia contemplata nei dati, sufficiente a portare a regime la grandezza di uscita (temperatura del liquido refrigerante, figura 5.1f), consentono di affermare che le condizioni operative osservate ed utilizzate nell'identificazione sono sufficientemente rappresentative.



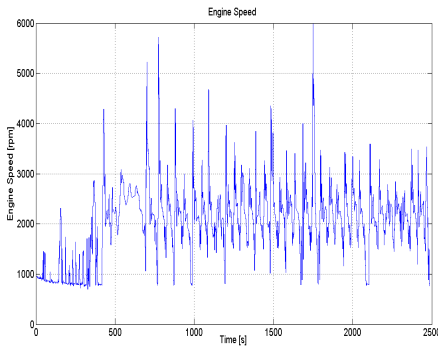
## 5.2 Rilevazione dei dati dal sistema



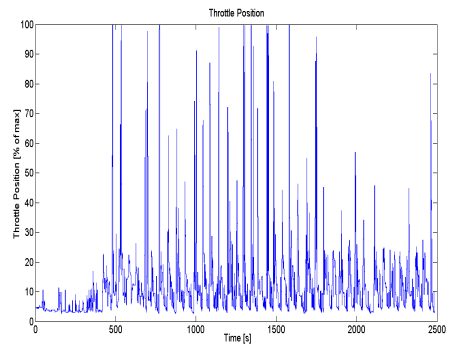
(a) Velocità del veicolo



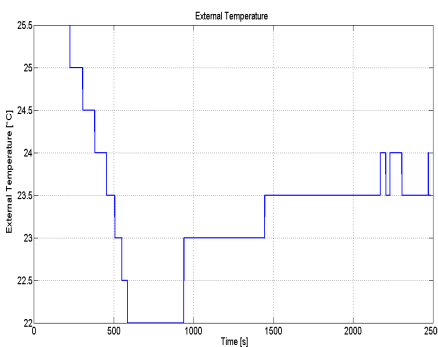
(b) Coppia del motore espressa in % del valore massimo erogabile



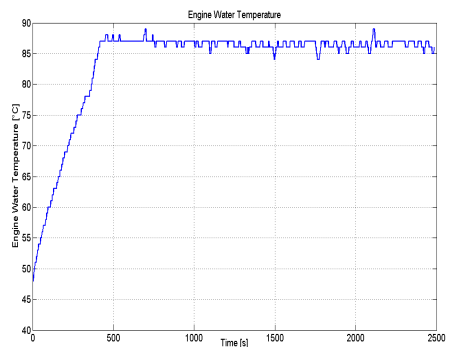
(c) Giri motore



(d) Posizione della farfalla (in % rispetto all'apertura massima)



(e) Temperatura esterna (aria)



(f) Temperatura del liquido refrigerante (acqua)

Figura 5.1: Andamento temporale dei segnali raccolti secondo lo standard CAN-bus per l'identificazione del sistema di raffreddamento (sessione autunnale).

## 5.2.2 Scelta del periodo di campionamento

La tabella 5.1 mostra quali siano stati i parametri utilizzati dal sistema di acquisizione nella discretizzazione dei segnali generati nel corso della guida. In particolare la discretizzazione dell'asse dei tempi avviene con un passo di  $T_s = 10ms$  mentre la livellazione delle misure sottostà ad una quantizzazione specifica del segnale.

Segnale	Unità di misura	Periodo camp. [ms]	Passo di quantizzazione
Velocità veicolo	[ $km/h$ ]	10	0.0625 $km/h$
Coppia motrice	[% of $max$ ]	10	0.392%
Giri motore	[ $rpm$ ]	10	1 $rpm$
Posizione farfalla	[% of $max$ ]	10	0.392%
Temperatura esterna	[ $^{\circ}C$ ]	100	0.5 $^{\circ}C$
Temperatura liquido	[ $^{\circ}C$ ]	10	1 $^{\circ}C$

Tabella 5.1: Segnali acquisiti tramite CAN-bus per l'identificazione dell'impianto di raffreddamento.

Il tempo di campionamento imposto dal CAN-bus risulta inutilmente raffinato per l'impianto di raffreddamento dell'autoveicolo, che di per sé ha un comportamento passa-basso. La natura dei segnali in gioco è tale da consentire maggior flessibilità sul campionamento senza che ciò pregiudichi il contenuto informativo dei dati. Inoltre un campionamento più rado verrebbe incontro a quel bisogno di disporre di dati eccitanti nella sollecitazione del processo. In effetti, se si pensa alla maggior parte dei segnali utilizzati, lentamente tempo varianti, è alquanto inutile usare nel corso dell'identificazione coppie ingresso/uscita distanziate di soli 10ms l'una dall'altra, che risulterebbero il più delle volte identiche tra loro causando una ridondanza d'informazione di effetto per nulla innocuo nel corso della modellizzazione. In altre parole sarebbe come sollecitare il sistema con ingressi costanti su un numero notevole di campioni, finendo con avere un basso indice di eccitazione.

Una via rigorosa da intraprendere in questa scelta del periodo di ricampionamento (sottocampionamento) passa per lo studio delle proprietà spettrali dei segnali raccolti.

### 5.2.2.1 Densità spettrale di potenza

Le caratteristiche spettrali di un dato segnale a tempo discreto  $v(t)$  sono riassunte dalla sua trasformata di Fourier. Quest'ultima parte dal fondamento di poter rappresentare una qualunque forma d'onda come somma di sinusoidi di opportuna ampiezza e frequenza. La più alta di tali frequenze costituisce la banda del segnale che racchiude in sé l'informazione

circa il periodo di campionamento minimo da scegliere per la ricostruzione fedele del segnale, come ben noto dal teorema di Shannon: la frequenza di campionamento deve uguagliare almeno il doppio della banda del segnale.

Pertanto uno degli obiettivi dell'analisi di Fourier è quello di definire dei criteri per la scelta del campionamento; ciò passa inevitabilmente per la stima della banda del segnale e quindi del suo spettro frequenziale. In ambito statistico esiste una seconda definizione di spettro, definita a partire dalle autocorrelazioni della forma d'onda, che si dimostra essere del tutto equivalente all'usuale trasformata di Fourier. Questa seconda definizione va sotto il nome di *densità spettrale di potenza* ed è la trasformata di Fourier della funzione di correlazione del segnale stocastico  $v(t)$ :

$$\Gamma(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau) \exp(-j\omega\tau) \quad \omega \in [-\pi \pi] \quad (5.1)$$

dove

$$\gamma(\tau) \triangleq E[(v(t) - m)(v(t + \tau) - m)]$$

indica la funzione correlazione del segnale e  $m \triangleq E[v(t)]$  il suo valor medio.

L'andamento della quantità (reale e pari) definita dall'eq.(5.1) è utile nel comprendere la distribuzione della variabilità del processo in frequenza. Tuttavia il calcolo esatto richiederebbe una somma di infiniti termini dati da tutte le correlazioni valutate per ogni possibile ritardo  $\tau \in \mathbb{Z}$ , cosa impossibile a livello pratico.

Sono disponibili numerose tecniche di approssimazione orientate alla stima della quantità (5.1). Tali tecniche adattano la formula (5.1) al caso di un numero finito di campioni ( $N < \infty$ ), sostituendola con la stima

$$\hat{\Gamma}_N(\omega) = \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \hat{\gamma}_N(\tau) \exp(-j\omega\tau) \quad (5.2)$$

dove

$$\hat{\gamma}_N(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} v(t) v(t + \tau) \quad -(N-1) \leq \tau \leq (N-1).$$

L'eq. (5.2) definisce il *periodogramma esteso* la cui caratteristica è di tendere, in media, allo spettro vero definito dalla (5.1). Si dimostra però che la stima indotta dal periodogramma esteso presenta delle fluttuazioni permanenti attorno al valore vero di ampiezza non trascurabile, anche per  $N$  molto grande.

Alcuni miglioramenti sono ottenibili con il metodo delle finestrate di *Bartlett*: i campioni del segnale  $\{v(t)\}_{t=1, \dots, N}$  vengono suddivisi in un certo

## 5 Identificazione del sistema di raffreddamento

numero  $r$  di sottosequenze, dotate di  $\bar{N}$  dati ciascuna. Per ognuna delle sottosequenze viene calcolato il periodogramma esteso mediante l'eq. (5.2):

$$\begin{aligned} \{v(1), \dots, v(\bar{N})\} &\Rightarrow \hat{\Gamma}_{\bar{N}}(\omega)_1 \\ \{v(\bar{N} + 1), \dots, v(2\bar{N})\} &\Rightarrow \hat{\Gamma}_{\bar{N}}(\omega)_2 \\ &\vdots \\ \{v((r - 1)\bar{N} + 1), \dots, v(N)\} &\Rightarrow \hat{\Gamma}_{\bar{N}}(\omega)_r; \end{aligned}$$

gli  $r$  periodogrammi così ottenuti sono mediati con l'effetto di smussare molto la stima ottenuta, eliminando il problema delle ampie fluttuazioni:

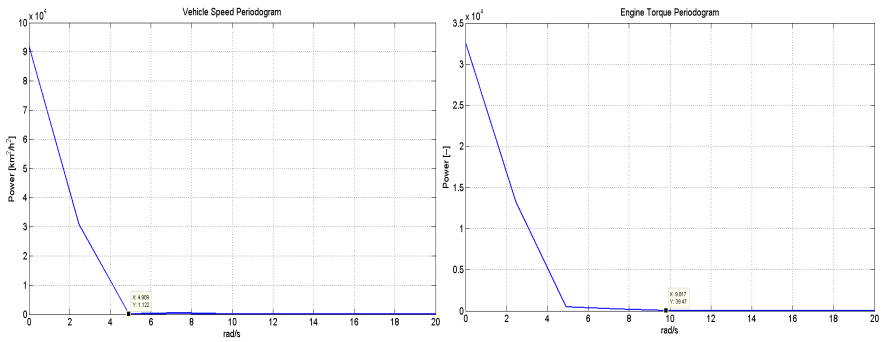
$$\hat{\Gamma}(\omega) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \hat{\Gamma}_{\bar{N}}(\omega)_i.$$

### 5.2.2.2 Calcolo dello spettro dei segnali estratti dall'autoveicolo

La tecnica di Bartlett è stata implementata per stimare la distribuzione spettrale dei segnali di ingresso e uscita dell'impianto di raffreddamento dell'autoveicolo. Come spiegato precedentemente lo scopo ultimo della stima spettrale è la deduzione di un periodo di subcampionamento che, senza comportare perdita di informazione, renda gli input maggiormente eccitanti. Un'analisi spettrale permette di dedurre in primo luogo la banda e, da questa, tramite il teorema del campionamento, un compatibile sottocampionamento. Al termine di questa selezione dei dati il numero di misure risulterà notevolmente ridotto senza importanti conseguenze nel contenuto informativo.

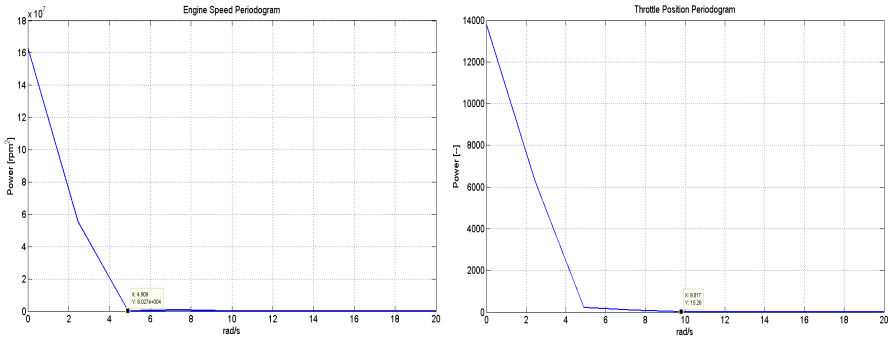
Il risultato della stima spettrale condotta tramite metodo di Bartlett con  $\bar{N} = 256$  è riportato nella figura 5.2 per tutti i segnali di interesse. Essa fa riferimento a dati di guida raccolti in una sessione autunnale, la stessa della figura 5.1; il calcolo dello spettro è eseguito dopo l'eliminazione del transitorio dai segnali.

## 5.2 Rilevazione dei dati dal sistema



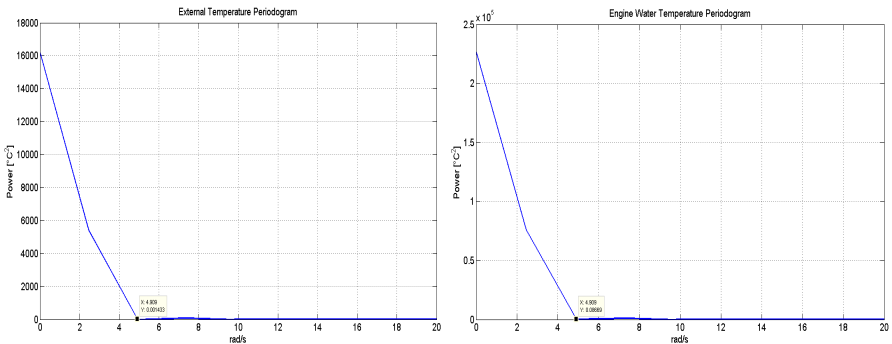
(a) Periodogramma della velocità del veicolo

(b) Periodogramma della coppia motrice



(c) Periodogramma dei giri motore

(d) Periodogramma della posizione della farfalla



(e) Periodogramma della temperatura esterna

(f) Periodogramma della temperatura del liquido refrigerante

Figura 5.2: Periodogrammi dei segnali caratterizzanti il sistema di raffreddamento: le figure sono il risultato di un'elaborazione mediante metodo di Bartlett con finestre da 256 campioni ciascuna. Sull'asse delle ascisse è riportata la pulsazione in rad/s, anziché in rad/periodo di campionamento.

## 5 Identificazione del sistema di raffreddamento

L'esamina grafica dei periodogrammi permette una stima della banda dei segnali rilevati dal CAN-bus ogni  $10ms$ . Come mostra la figura 5.2, i segnali sono tutti a banda limitata e descritti da uno spettro a basse frequenze; i valori di banda dedotti graficamente e quelli di frequenza di subcampionamento sono riportati in tabella 5.2:

Segnale	Banda [ $rad/s$ ]	Banda [ $Hz$ ]	Min. freq. camp. [ $Hz$ ]	Periodo camp. [ $s$ ]
Velocità	4.91	0.78	1.560	0.64
Coppia	9.82	1.56	3.125	0.32
Giri motore	4.91	0.78	1.560	0.64
Posizione farfalla	9.82	1.56	3.125	0.32
Temperatura esterna	4.91	0.78	1.560	0.64
Temperatura liquido	4.91	0.78	1.560	0.64

Tabella 5.2: Bande e massimo periodo di campionamento ammesso per i singoli segnali: la minima frequenza di campionamento è stata calcolata come il doppio della banda (teorema di Shannon).

Il periodo di subcampionamento consigliato per un'identificazione ingresso/uscita è pertanto  $0.32s$ . Come si vedrà nel proseguo, le identificazioni condotte con tale periodo di campionamento non porteranno tuttavia a modelli migliori rispetto a quelli che si possono ottenere aumentando ulteriormente il campionamento fino ad  $1s$ ; la figura 5.2 testimonia che un simile incremento non provoca infatti l'esclusione di componenti armoniche dominanti dai segnali: infatti ad un campionamento di  $1s$  corrisponde una banda di  $3,14 rad/s$  ed il contenuto armonico dominante è concentrato al di sotto di tale pulsazione. Il fatto di aumentare il tempo di campionamento, oltre ad affinare l'eccitazione, permette agli algoritmi di identificazione di lavorare più velocemente, avendo meno dati da considerare.

## 5.3 Identificazione gray-box: modello in spazio di stato e filtro di Kalman

### 5.3.1 Modello fisico

La stretta analogia tra calore e corrente consente di schematizzare gli scambi termici interni ed esterni al motore tramite circuiti elettrici nei quali le resistenze rappresentano la difficoltà che il calore incontra nel suo fluire da un materiale all'altro (resistenza di interfaccia) e le capacità riferiscono alla proprietà del materiale di variare la propria temperatura quando interessato da un flusso di calore. In questo schema equivalente, la temperatura rappresenta l'analogo della tensione elettrica mentre il flusso di calore è assimilabile ad un passaggio di cariche (tabella 5.3).

### 5.3 Identificazione gray-box: modello in spazio di stato e filtro di Kalman

Grandezza termica	Grandezza elettrica
calore	corrente
differenza di temperatura	tensione
capacità termica	capacità elettrica
resistenza termica	resistenza elettrica

Tabella 5.3: Equivalenze tra circuiti termici e reti elettriche.

La rete che descrive il comportamento fisico dell'impianto di raffreddamento è descritta dalla figura 5.3.

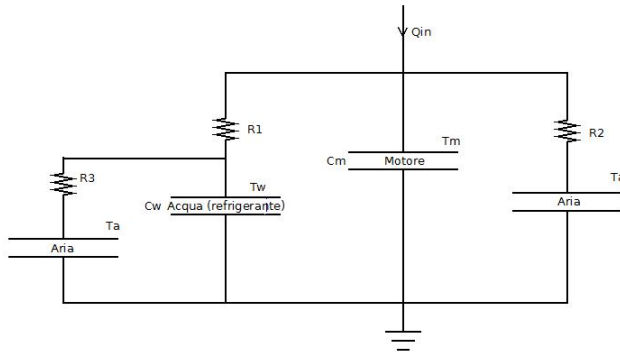


Figura 5.3: Circuito termico dell'impianto di raffreddamento.

Il significato delle grandezze circuitali è riassunto in tabella 5.4.

Simbolo	Descrizione
$Q_{in}$	Calore entrante nel sistema (dovuto alla combustione)
$T_m$	Temperatura del motore
$T_w$	Temperatura del liquido refrigerante
$T_a$	Temperatura dell'aria esterna
$C_m$	Capacità termica del motore
$C_w$	Capacità termica del liquido refrigerante
$R_1$	Resistenza termica dell'interfaccia motore-liquido
$R_2$	Resistenza termica dell'interfaccia motore-aria
$R_3$	Resistenza termica dell'interfaccia liquido-aria

Tabella 5.4: Significato delle grandezze fisiche del circuito termico.

La deduzione dello schema fisico come circuito termico è stata possibile ragionando sul fatto che non tutto il calore entrante generato dalla combustione ( $Q_{in}$ ) viene accumulato sui pistoni e cilindri del motore (capacità

## 5 Identificazione del sistema di raffreddamento

termica  $C_m$ ); una parte di esso viene ceduta al liquido di raffreddamento (attraverso  $R_1$ ) ed una terza percentuale risulterà dispersa in aria grazie all'interfaccia diretta tra motore ed aria ( $R_2$ ). Essendo poi anche il refrigerante a diretto contatto con l'aria, oltre che con il motore, una parte del calore proveniente dall'interfaccia schematizzata da  $R_1$  sarà ceduta all'esterno attraverso la resistenza termica  $R_3$ : la rimanente porzione verrà invece accumulata dal liquido ( $C_w$ ) che vedrà in questo modo modificata la propria temperatura  $T_w$ .

Le equazioni differenziali che regolano la dinamica delle temperature di motore e liquido refrigerante sono infine facilmente ottenibili dall'equivalenza termo-elettrica (tabella 5.3) e dai principi di Kirchhoff:

$$\begin{cases} \frac{dT_m}{dt} = \frac{1}{C_m} \left[ Q_{in} - \frac{T_m - T_w}{R_1} - \frac{T_m - T_a}{R_2} \right] \\ \frac{dT_w}{dt} = \frac{1}{C_w} \left[ \frac{T_m - T_w}{R_1} - \frac{T_w - T_a}{R_3} \right] \end{cases} \quad (5.3)$$

Il sistema (5.3) è già scritto in forma di stato: le variabili interne sono le temperature del motore e dell'acqua<sup>2</sup>, mentre gli ingressi esogeni sono dati dal calore entrante  $Q_{in}$  e dalla temperatura esterna  $T_a$ . A queste equazioni va aggiunta quella di uscita costituita dalla misura della temperatura dell'acqua effettuata da un termistore NTC:

$$y(t) = T_w(t) + v(t)$$

in cui  $v(t)$  indica gli errori di misura propri del sensore.

Non è invece prevista una misura diretta della temperatura del motore.

### 5.3.2 Diagnostica mediante filtro di Kalman

A fini diagnostici, una volta che il sistema sia posto in spazio di stato è immediata l'applicazione di un filtro di Kalman per il monitoraggio delle variabili nel tempo.

Nella sua versione storica, il filtraggio e la predizione «alla Kalman» hanno come obiettivo quello di stimare ricorsivamente lo stato del sistema a partire da misure dell'uscita. Nel caso qui proposto il problema si ricondurrebbe alla stima delle temperature di motore e liquido refrigerante a partire da misure rumorose effettuate su quest'ultima. Così facendo si potrebbe ottenere un'istantanea interna del sistema: verrebbero stimate sia la temperatura del liquido che quella del motore, consentendo un monitoraggio approfondito del sistema.

---

<sup>2</sup>Nel corso della tesi si userà spesso come sinonimo di «liquido refrigerante» o di «liquido di raffreddamento» il termine «acqua». È chiaro che solo i primi due termini sono corretti: la sostanza refrigerante non è, per ovvie caratteristiche, composta solamente da acqua. Tuttavia essa costituisce parte della soluzione liquida usata, ed è consolidato l'uso indistinto del termine «acqua» o di «refrigerante».



### 5.3 Identificazione gray-box: modello in spazio di stato e filtro di Kalman

Osservando tuttavia il sistema (5.3) appaiono ovvie delle difficoltà che sconsigliano questo modo di procedere.

In primo luogo sorge il problema della misura degli ingressi: se in effetti la temperatura esterna  $T_a$  può essere misurata tramite dei sensori, impossibile è avere una conoscenza esatta della quantità di carburante entrante  $Q_{in}$ . Quest'ultimo è infatti il risultato del funzionamento istantaneo della vettura, legato alla posizione della farfalla, alla coppia istantanea erogata, nonché alla velocità del motore. In termini sistemistici  $Q_{in}$  andrebbe pertanto considerato come una terza variabile interna del sistema di raffreddamento legata in maniera non lineare ai nuovi ingressi appena richiamati (posizione farfalla, coppia e giri). In particolare il calore entrante è funzione del *prodotto* tra coppia e giri. Quand'anche quest'ultima fonte di non linearità fosse eliminata considerando come ingresso il prodotto coppia-giri, rimarrebbe valida la dipendenza non lineare di  $Q_{in}$  dalla posizione della farfalla. A questo andrebbe aggiunto poi l'effetto di una *retroazione* dal sensore di temperatura del liquido la cui misura viene sfruttata dalla centralina per regolare l'iniezione stessa del carburante, e dunque  $Q_{in}$ .

Seguendo questa strada il modello con cui simulare il comportamento reale del processo diverrebbe altamente non lineare e si renderebbe necessario un ricorso alla versione *estesa* del filtro di Kalman.

Nasce poi un'altra questione: sebbene la teoria del filtro di Kalman esteso goda oggi di ampia considerazione, resta, ineliminabile, un evidente collo di bottiglia nella sua implementazione ricorsiva: la soluzione dell'equazione alle differenze di Riccati per l'aggiornamento del guadagno del filtro. Non solo: nel sistema (5.3) i parametri  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  non sono realmente noti. Andrebbero stimati al pari delle variabili interne  $T_m$  e  $T_w$  e per la loro stima sarebbe necessario estendere la dimensione dello stato introducendo tre equazioni fittizie rispecchianti la natura incerta dei parametri<sup>3</sup>. L'aumento della dimensione del vettore di stato rappresenterebbe un'ulteriore grado di non linearità e si vedrebbe aggravato quel collo di bottiglia rappresentato dall'equazione ricorsiva di Riccati. In un apparato diagnostico in cui la velocità computazionale è un elemento essenziale queste difficoltà algoritmiche non sono accettabili. Nelle prossime sezioni sarà pertanto abbandonata questa via «fisica» e con essa la possibilità di pervenire ad un preciso isolamento del guasto<sup>4</sup>.

---

<sup>3</sup>Le tre equazioni di stato fittizie da aggiungere sarebbero le seguenti:

$$R_i(t+1) = R_i(t) + v_i(t) \quad i = 1, 2, 3$$

con  $v_i$  termine di rumore usato come dichiarazione di incertezza del parametro  $R_i$ .

<sup>4</sup>In effetti, implementando il filtro esteso di Kalman si potrebbero avere informazioni precise sulla locazione del guasto; ad esempio se l'andamento del parametro  $R_1(t)$  fosse anomalo, sarebbe deducibile una qualche anomalia all'interfaccia tra i cilindri motore ed il liquido refrigerante.

## 5.4 Identificazione black-box mediante modelli ingresso/uscita

### 5.4.1 Introduzione

Il tentativo di estrapolare un modello fisico fatto nella sezione 5.3, seppur rivelatosi inefficiente, ha avuto il merito di porre in evidenza il legame matematico sussistente tra l'oggetto della diagnostica (temperatura del liquido refrigerante) ed una serie di altre grandezze dell'impianto. Quella che ne è complessivamente derivata è un'equazione differenziale non lineare del tipo

$$\frac{dT_w}{dt} = f(\text{giri motore, posizione farfalla, coppia, velocità veicolo, } T_a, T_w).$$

In un procedimento di modellistica basato sulla raccolta di misure dall'impianto, e quindi su un campionamento dei segnali agenti sul sistema, il linguaggio naturale più utile, che rispecchi il campionamento cui è soggetto l'impianto, è tuttavia quello delle equazioni alle differenze. Queste altro non sono che una discretizzazione delle equazioni differenziali e considerano l'evoluzione del sistema avvenire solamente durante gli istanti di campionamento. Così se è vero che le equazioni differenziali sono il linguaggio dei processi fisici a tempo continuo, è altrettanto corretto affermare che i modelli ad equazioni alle differenze sono lo strumento per l'analisi dei medesimi sistemi a segnali campionati.

Il passaggio da un'equazione differenziale alla sua versione alle differenze si effettua approssimando l'operatore di derivata come rapporto incrementale fino ad ottenere un'equazione nella quale il valore futuro dell'uscita incognita resta univocamente determinato dal suo presente e passato nonché dai valori presenti e passati delle variabili *esogene* agenti sull'impianto (ingressi).

Il fatto che i processi a tempo discreto siano generalmente rappresentabili da equazioni alle differenze ha portato alla nascita di tecniche di identificazione aventi l'obiettivo di dedurre i coefficienti (*parametri*) di tali equazioni in modo da spiegare con la migliore precisione possibile i dati rilevati sul sistema. Si dice a tal proposito che queste tecniche sono basate su dati sperimentali e non su un'analisi fisica dell'impianto. I parametri del modello finale non necessariamente hanno un significato fisico ben delineato. Quando questo è il caso si dice di essere in presenza di un'identificazione a scatola nera, o black-box. La nozione «black-box» riflette l'assenza di sfondo fisico nell'equazione alle differenze finale ed è figlia del modo in cui l'identificazione viene condotta: raccolta di dati in ingresso ed uscita e costruzione del modello senza riguardo alla struttura interna del sistema, tenendo conto solo dei ritardi con cui l'ingresso agisce sull'uscita e della presenza di errori di modello e di misura.

## 5.4.2 Teoria per l'identificazione di modelli ingresso/uscita

### 5.4.2.1 Modelli ARX, ARMAX e Box-Jenkins

Nei modelli ingresso/uscita a scatola nera l'andamento dell'uscita viene legato a quello degli ingressi mediante un'equazione alle differenze al cui interno viene precisata sia l'influenza di valori passati di input e output nel determinare il valore attuale dell'uscita che un termine aggiuntivo di errore, utile nel descrivere disturbi e non linearità del processo vero. Nei modelli ARX

$$y(t) = a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) + b_1 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) + \xi(t)$$

il termine di errore  $\xi$  viene scelto come semplice rumore bianco a media nulla; così facendo si sottintende di cogliere con il modello la struttura vera del processo, a meno di disturbi di fondo di carattere totalmente imprevedibile. Il modello ARX è rappresentato in forma operatoriale dall'equazione:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + \xi(t)$$

con

$$A(z^{-1}) = 1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_{n_a} z^{-n_a}$$

e

$$B(z^{-1}) = b_1 + b_2 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b+1}$$

in cui  $z^{-1}$  indica l'operatore di ritardo ad un campione.

In altri tipi di modelli IN/OUT, quali gli ARMAX ed i Box-Jenkins, il termine di errore presenta per contro una struttura «colorata»; in questo caso l'idea è che in uscita non intervengano solo disturbi bianchi, ma errori dovuti al filtraggio di rumori (bianchi) agenti a monte o comunque in qualche altro punto del processo da identificare. Una modellizzazione siffatta ha il vantaggio di conglobare tipiche situazioni reali nelle quali una sorgente di disturbo può agire in qualsiasi punto dell'impianto, non necessariamente nella misura finale. Il rovescio della medaglia è rappresentato dall'elevato onere computazionale richiesto durante l'identificazione.

Il modello ARMAX è rappresentato, in forma operatoriale, dall'eq.(5.4)

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})\xi(t) \quad (5.4)$$

mentre l'ancora più generale Box-Jenkins dall'eq.(5.5)

$$y(t) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})}u(t) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}\xi(t) \quad (5.5)$$

## 5 Identificazione del sistema di raffreddamento

dove  $A, B, C, D, F$  sono polinomi nell'indeterminata  $z^{-1}$  i cui coefficienti costituiscono i parametri da identificare<sup>5</sup>.

Al di là delle differenze analitiche dei vari modelli, il procedimento che porta all'identificazione dei parametri delle equazioni alle differenze fa uso comune dell'*approccio predittivo*. Il modello scelto viene cioè scritto in forma di predittore ottimo ad un passo di campionamento e successivamente vengono computati gli *errori di predizione* tra uscita misurata e quella predetta dal modello. I parametri sono determinati al fine di minimizzare l'errore quadratico medio di predizione (*loss function*).

### 5.4.2.2 Calcolo del predittore ad un passo

Si consideri il modello più generale possibile, descritto operatorialmente dall'equazione alle differenze

$$y(t) = G(z^{-1})u(t-1) + W(z^{-1})\xi(t) \quad (5.6)$$

in cui si è convenuto indicare con  $G$  e  $W$  due funzioni di trasferimento. Questa scrittura contempla sia il caso ARX

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}, \quad W(z^{-1}) = \frac{1}{A(z^{-1})}$$

che il caso ARMAX

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}, \quad W(z^{-1}) = \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

e Box-Jenkins

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})}, \quad W(z^{-1}) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}.$$

Imponendo la limitatezza della quantità  $W(z^{-1})\xi(t)$ , come deve essere quando si vuole che il modello (5.6) definisca in modo sensato il legame ingresso/uscita, ci si può sempre ricondurre ad una riscrittura in cui  $W$  abbia numeratore e denominatore stabili, coprimi, monici e di ugual grado. Si ipotizzi di essere proprio in questa situazione e si dividano ambo i membri dell'eq.(5.6) per  $W$  sommando e sottraendo  $y(t)$ ; si ha allora

$$y(t) = \left[1 - \frac{1}{W(z^{-1})}\right] y(t) + \frac{G(z^{-1})}{W(z^{-1})}u(t-1) + \xi(t)$$

in cui il termine

---

<sup>5</sup>L'operatore  $z^{-1}$  definisce il ritardo ad un passo di campionamento: la scrittura operatoriale  $z^{-1}v(t)$  rappresenta pertanto il valore  $v(t-1)$  del segnale.

#### 5.4 Identificazione black-box mediante modelli ingresso/uscita

$$\left[1 - \frac{1}{W(z^{-1})}\right] y(t)$$

dipende in realtà solo dai valori dell'uscita  $y$  antecedenti il tempo  $t$ . Questo segue dal fatto che la lunga divisione dei polinomi a numeratore e denominatore di  $W$  porta ad avere  $\frac{1}{W(z^{-1})} = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots$  con opportuni  $\alpha_i$ . Di conseguenza

$$\left[1 - \frac{1}{W(z^{-1})}\right] y(t) = (\alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots) y(t)$$

da cui emerge l'indipendenza da  $y(t)$ . Anche il termine

$$\frac{G(z^{-1})}{W(z^{-1})} u(t-1)$$

è funzione di soli valori passati (dell'ingresso stavolta). Rammentando la bianchezza di  $\xi(t)$ , la conoscenza di valori passati di ingressi ed uscita non serve in alcun modo alla sua valutazione; dunque il predittore ottimo ad un passo per il generico modello definito dall'eq.(5.6), è semplicemente

$$\hat{y}(t|t-1) = \left[1 - \frac{1}{W(z^{-1})}\right] y(t) + \frac{G(z^{-1})}{W(z^{-1})} u(t-1). \quad (5.7)$$

##### 5.4.2.3 Errore di predizione e minimizzazione della loss function

L'eq.(5.7) viene utilizzata per costruire gli errori di predizione tra uscita misurata e quella predetta dal modello sulla base di misure passate. L'errore o *residuo* di predizione è definito come

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1)$$

ed un buon criterio nella scelta dei parametri del modello è la minimizzazione della loss function

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t)^2 \quad (5.8)$$

in cui  $N$  rappresenta il numero di misure raccolte sull'impianto per le quali è stato possibile computare l'errore di predizione, mentre  $\theta$  indica il vettore dei parametri del modello (coefficienti dei polinomi) e ricorda come l'indice di costo sia funzione del modello.

Nel caso di modelli ARX, per i quali il predittore (5.7) è lineare nei parametri, l'algoritmo di ottimizzazione della quantità (5.8) non presenta particolari difficoltà e va sotto il nome di metodo dei *minimi quadrati* (Least

Square, LS). Quando invece si passa ad una struttura ARMAX o Box-Jenkins, l'espressione del predittore perde in linearità e la minimizzazione della loss function richiede algoritmi più complessi (ad es. il metodo di Newton della discesa del gradiente).

La bontà di un modello non può però basarsi solamente sulla minimizzazione della (5.8). Avere un errore  $\varepsilon$  basso non è infatti sufficiente. Si pensi[19] al caso di errori bassi ad ogni istante temporale ma di media non nulla; in tale circostanza vi sarebbe un errore sistematico tra realtà e modello e le predizioni risulterebbero dare un valore sempre più alto, o sempre più basso, rispetto alla misura vera. Oppure si guardi al caso di un errore  $\varepsilon$  limitato, di media nulla, ma di segno alterno: agli istanti pari positivo e per i campioni dispari negativo: un simile comportamento non caratterizza un buon modello in quanto esiste una dinamica nel residuo, cioè un legame tra i suoi campioni e si potrebbe, con un diverso modello, arrivare a previsioni più accurate; difatti la conoscenza dell'errore al tempo attuale permetterebbe di avere informazioni aggiuntive sulla dinamica futura del segnale di uscita.

Un modello non solo deve essere caratterizzato da un errore quadratico medio contenuto ma deve presentare in aggiunta un residuo privo di regolarità: affinché ciò accada i suoi campioni devono essere fra loro completamente incorrelati. In termini probabilistici si chiede che il residuo sia un *rumore bianco a media nulla*. Per questo, dopo aver identificato il modello di un sistema, ne va testata l'aderenza a dati possibilmente diversi da quelli utilizzati nella stima e contemporaneamente va effettuato un test di bianchezza sul residuo. Il modo in cui quest'ultima analisi può essere condotta è di verificare se le autocorrelazioni dell'errore di predizione sono pressoché nulle per vari ritardi (*lag*) dei suoi campioni (eccetto il ritardo nullo, che dà la varianza del residuo). Autocorrelazioni nulle significa infatti assenza di legami tra i vari campioni del segnale, condizione equivalente a chiedere una totale imprevedibilità nel suo andamento (bianchezza).

### 5.4.3 Modelli ottenuti con campionamento a 0.32 secondi

Seguendo l'avvertenza di sottocampionare i dati a 0.32 s come suggerito dalla tabella 5.2, si è proceduto all'identificazione di diversi modelli per il sistema di raffreddamento dell'autoveicolo. Nel farlo, come è regola generale in ogni procedimento di stima, si è provveduto a trascurare transitori e trend (media) dai dati. L'eliminazione dei transitori è necessaria per addestrare il modello specificatamente attorno ad un punto di equilibrio del sistema, che tipicamente coincide con il suo funzionamento operativo di regime. L'eliminazione del trend dai dati è necessaria per «amplificare» le variazioni attorno al valor medio in modo da pervenire a modelli capaci di cogliere meglio l'intera escursione del segnale attorno alla media: si pensi ad esempio ad un segnale di temperatura di ampiezza media molto elevata,

#### 5.4 Identificazione black-box mediante modelli ingresso/uscita

capace di variare solamente di qualche grado o decimo di grado: un modello costruito su questi dati originali finirebbe con il considerare costanti tutti i valori misurati visti i lievi scostamenti attorno alla media rispetto all'ampiezza complessiva del segnale. L'operazione di sottrazione della media (*detrend*) ha invece l'effetto di centrare l'intero segnale attorno allo zero risaltando le oscillazioni rispetto alla nuova scala delle ampiezze.

Altra operazione preliminare sui dati è stata quella di dividerli in due insiemi: dati per l'identificazione e dati per la validazione del modello; la prima parte è usata dagli algoritmi di ottimizzazione nel minimizzare la quantità (5.8), ossia per il calcolo dei parametri del modello. Quest'ultimo è stato poi testato sul secondo slot di dati sia per quanto riguarda il fit ai nuovi valori<sup>6</sup>, ossia l'aderenza del modello a misure non utilizzate per l'identificazione, sia per quanto concerne la bianchezza del residuo di predizione.

La figura 5.4 illustra le prestazioni del modello ARMAX (multi-input)

$$\begin{aligned}
 A(z^{-1})y(t) &= \\
 &= [ B_1(z^{-1}) \quad B_2(z^{-1}) \quad \dots \quad B_5(z^{-1}) ] \begin{bmatrix} u_1(t - n_{k1}) \\ u_2(t - n_{k2}) \\ \vdots \\ u_5(t - n_{k5}) \end{bmatrix} + \\
 &+ C(z^{-1})\xi(t)
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

con gradi dei polinomi  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$ ,  $C(z^{-1})$  e ritardi dell'ingresso ( $n_k = [n_{k1} \quad n_{k2} \quad n_{k3} \quad n_{k4} \quad n_{k5}]$ ) rispettivamente

$$n_a = 2, \quad n_b = [ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 ], \quad n_c = 2, \quad n_k = [ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 ]. \tag{5.10}$$

Qui e nel proseguo, come già descritto in tabella 4.1, si è convenuto indicare con la lettera  $y$  la temperatura del refrigerante (uscita) e con  $u_1, \dots, u_5$ , nell'ordine, i cinque ingressi del sistema: velocità del veicolo, coppia, giri motore, posizione della farfalla e temperatura dell'aria esterna.

La scelta del modello e degli ordini dei polinomi è stata qui compiuta per successivi tentativi: la rappresentazione ARMAX con gli ordini polinomiali definiti in (5.10) si è dimostrato essere il miglior modello in/out in

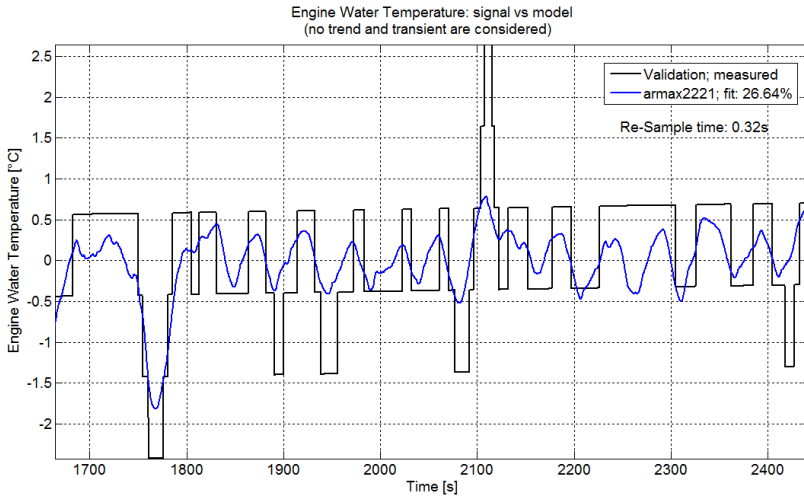
<sup>6</sup>L'indice di aderenza di un modello ai dati, in inglese *fit*, viene calcolato con la formula

$$FIT = 100 \left( 1 - \frac{\|y - \hat{y}\|}{\|y - m_y\|} \right)$$

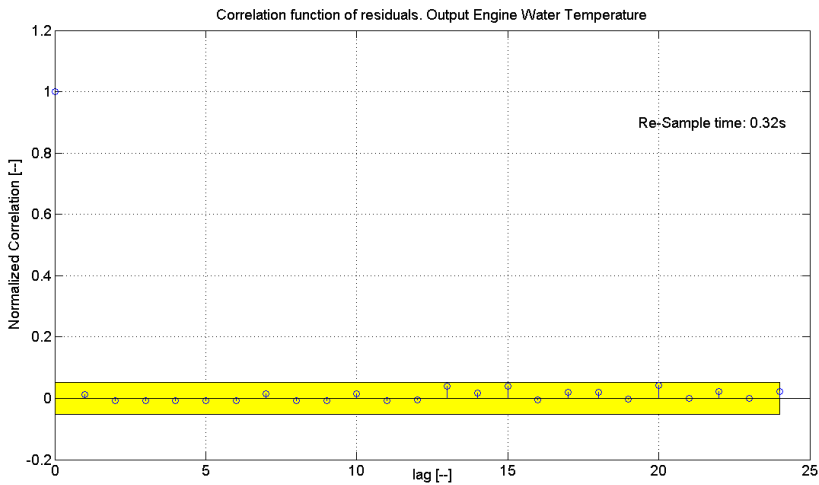
dove  $y$  indica il vettore delle misure di uscita,  $\hat{y}$  il vettore delle predizioni effettuate del modello (predittore ottimo) e  $m_y$  la media campionaria dei dati di uscita.  $\|\cdot\|$  è l'usuale operatore di norma ( $\|v\| = \sqrt{v(1)^2 + \dots + v(N)^2}$ ,  $v(1), \dots, v(N)$  essendo le componenti del vettore  $v$ ).

## 5 Identificazione del sistema di raffreddamento

termini di aderenza ai dati, bianchezza residuale e complessità<sup>7</sup>, nel caso di subcampionamento a 0.32 s.



(a) Confronto tra la temperatura del refrigerante misurata e la predizione del modello.



(b) Bianchezza del residuo di predizione.

Figura 5.4: Prestazioni del modello ARMAX nel caso di sottocampionamento a 0.32 secondi.

<sup>7</sup>Per complessità di un modello si intende il numero di parametri da identificare, coincidente con la somma dei gradi dei vari polinomi dell'equazione alle differenze



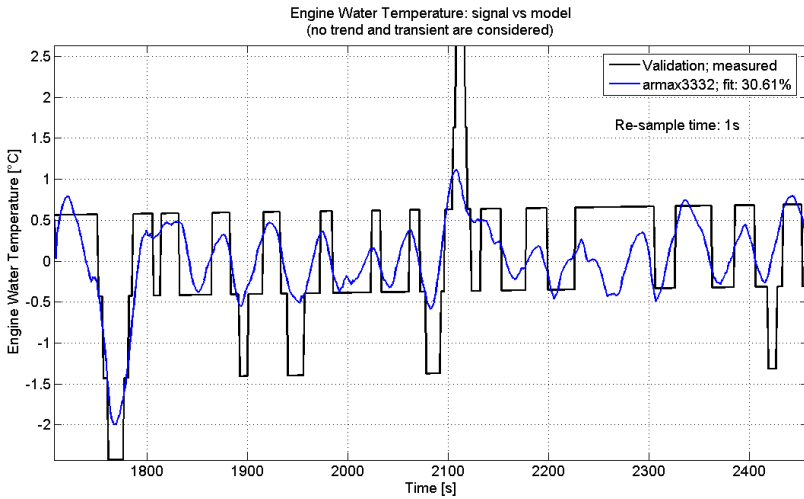
#### 5.4 Identificazione black-box mediante modelli ingresso/uscita

La figura 5.4b mostra come il residuo di predizione del modello presenti ottime caratteristiche di bianchezza, con autocorrelazioni praticamente nulle (cioè all'interno della fascia gialla di tolleranza<sup>8</sup>, rappresentante l'intervallo di confidenza del 99%); allo stesso tempo però, le stime della temperatura del liquido refrigerante si discostano significativamente dalle misure (figura 5.4a).

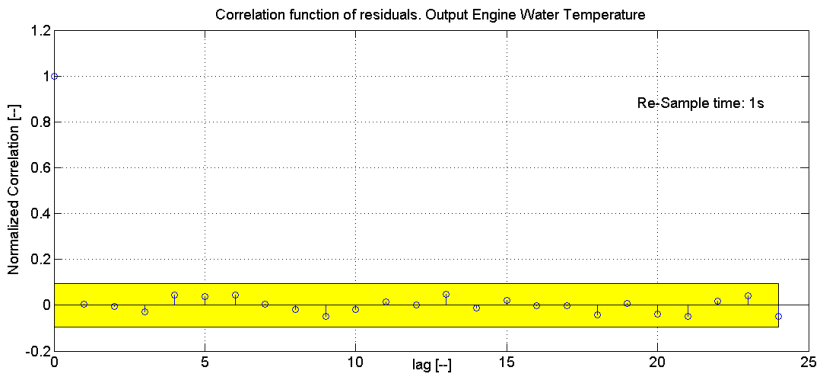
---

<sup>8</sup>Il primo campione di correlazione rappresenta la varianza del residuo, normalizzata per la varianza medesima, come tutti gli altri valori di autocorrelazione: è corretto allora che esso sia esattamente pari ad 1. Sono solamente i restanti campioni a determinare o meno la bianchezza: se tutti giacciono all'interno dell'intervallo di confidenza si può asserire che il residuo è bianco.

### 5.4.4 Modelli ottenuti con campionamento a 1 secondo



(a) Confronto tra la temperatura del refrigerante misurata e la predizione del modello



(b) Bianchezza del residuo di predizione

Figura 5.5: Prestazioni del modello ARMAX nel caso di sovracampionamento a 1 secondo

L'identificazione è stata ripetuta dopo un ulteriore subcampionamento dei dati, passando da 0.32 ad 1 secondo. La figura 5.5 mostra le performance raggiunte dal modello ARMAX (5.9) con i seguenti gradi polinomiali:

$$n_a = 3, \quad n_b = [ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 ], \quad n_c = 3, \quad n_k = [ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 ]$$

dedotti, come in precedenza, per successivi tentativi e da confronti tra modelli di varie classi e ordini.

Come era lecito attendersi, l'ulteriore sottocampionamento dei segnali non degrada le prestazioni; dalla figura 5.5b si nota come la bianchezza sia ancora una volta assicurata mentre l'aderenza ai dati, seppur incrementata, non è soddisfacente (figura 5.5a).

L'invarianza delle prestazioni di modello al variare del subcampionamento da 0.32s a 1s consente di accettare quest'ultimo come *quanto temporale* nella memorizzazione di dati per l'identificazione.

## 5.5 Identificazione black-box mediante modelli di stato

### 5.5.1 Introduzione

I modelli ARX, ARMAX e Box-Jenkins sono delle rappresentazioni «esterne» nelle quali solamente variabili esogene, vale a dire ingressi ed uscite, compaiono nelle equazioni. Questi sono i modelli capostipiti della teoria dell'identificazione, noti fin dai contributi al filtraggio di Wiener, Gauss e di Box e Jenkins. Più recentemente, ed intensivamente negli anni '80, sono stati presentati alla comunità scientifica nuovi metodi di identificazione per modelli a rappresentazione «interna». In questi ultimi si fa ricorso a delle variabili ausiliarie rappresentative del cosiddetto *stato* del modello al fine di descrivere il legame input/output. Quello che ne risulta è il *modello di stato* lineare:

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \quad (5.11)$$

dove lo stato, vettore  $n$  - *dimensionale* con  $n$  detto *ordine* del modello, è indicato con  $x$ ; al solito  $u$  e  $y$  indicano rispettivamente ingresso ed uscita.

Il problema dell'identificazione di modelli di stato[16] è così posto: date delle misure di ingressi e uscite, determinare le matrici  $F$ ,  $G$ ,  $H$  in (5.11) che meglio spieghino i dati raccolti. Il modo in cui tale identificazione è portata a termine differisce notevolmente da quello utilizzato per i modelli ingresso/uscita e prende il nome di *identificazione su sottospazi*.

In questo tipo di identificazione alle incognite matriciali  $F$ ,  $G$ ,  $H$  si aggiunge un altro elemento ignoto: l'ordine  $n$  del modello, a cui sono naturalmente legate le dimensioni delle matrici stesse. Per analogia, nei modelli ingresso/uscita alla stima dei parametri si aggiungono, come elementi ignoti, i ritardi delle equazioni alle differenze (gradi polinomiali).

### 5.5.2 Cenni all'identificazione su sottospazi

Risolvendo (5.11) ricorsivamente si riesce agevolmente a ricondursi alla formula

$$y(t+i) = HF^i x(t) + HF^{i-1}Gu(t) + HF^{i-2}Gu(t+1) + \dots + HGu(t+i-1). \quad (5.12)$$

Definendo

$$Y_r(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t+1) \\ \vdots \\ y(t+r-1) \end{bmatrix} \quad U_r(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ \vdots \\ u(t+r-1) \end{bmatrix}$$

la (5.12) può essere riscritta come

$$Y_r(t) = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{r-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ HG & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ HFG & HG & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ HF^{r-2}G & \dots & & & HG & 0 \end{bmatrix} U_r(t) \quad (5.13)$$

in cui la matrice

$$\mathcal{O}^{(r)} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{r-1} \end{bmatrix}$$

è la matrice di osservabilità a  $r$  passi del modello (5.11). Posto

$$S^{(r)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ HG & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ HFG & HG & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ HF^{r-2}G & \dots & & & HG & 0 \end{bmatrix}$$

la (5.13) diventa

$$Y_r(t) = \mathcal{O}^{(r)}x(t) + S^{(r)}U_r(t) \quad (5.14)$$

nelle incognite  $\mathcal{O}^{(r)}$  e  $S^{(r)}$ .

Noti che siano  $Y_r$ ,  $U_r$  e  $x(t)$ , in linea teorica da quest'ultima equazione si potrebbero determinare le matrici  $F$ ,  $G$  e  $H$ , scopo dell'identificazione.

Tuttavia la (5.14) è un sistema sottodeterminato, con più incognite che equazioni; inoltre la quantità  $x(t)$  è ignota.

Risolvere le sopraccitate questioni di indeterminazione non è però impossibile: è sufficiente definire le matrici:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \dots & y(N-r) \\ y(2) & y(3) & \dots & \cdot \\ y(3) & y(4) & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \dots & \cdot \\ y(r) & y(r+1) & \dots & y(N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u(1) & u(2) & \dots & u(N-r) \\ u(2) & u(3) & \dots & \cdot \\ u(3) & u(4) & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \dots & \cdot \\ u(r) & u(r+1) & \dots & u(N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = [x(1) \quad x(2) \quad \dots \quad x(N-r)]$$

e riscrivere la (5.14) in forma replicata:

$$\mathbf{Y} = \mathcal{O}^{(r)} \mathbf{X} + S^{(r)} \mathbf{U}.$$

Definendo la matrice  $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{U}^T (\mathbf{U}\mathbf{U}^T)^{-1} \mathbf{U}$  con  $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$  supposta invertibile e post-moltiplicandola ai membri della relazione appena ricavata, si ha

$$\mathbf{Y}\mathbf{P} = \mathcal{O}^{(r)} \mathbf{X}\mathbf{P}.$$

Nell'ipotesi  $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$  invertibile si può dimostrare che il numero di colonne linearmente indipendenti di  $\mathcal{O}^{(r)}$  coincide con il numero di colonne indipendenti in  $\mathcal{O}^{(r)} \mathbf{X}\mathbf{P}$  e dunque con quello di  $\mathbf{Y}\mathbf{P}$ . Pertanto si può determinare il *rango numerico* della matrice  $\mathbf{Y}\mathbf{P}$  che coincide con il rango di  $\mathcal{O}^{(r)}$  e dunque con l'ordine  $n$  del modello (da qui il fatto che l'ordine rimane determinato dalle misure). Le  $n$  colonne indipendenti permettono di determinare, a meno di cambi di base, la matrice di osservabilità  $\mathcal{O}^{(n)}$  che sulla prima riga contiene la matrice  $\mathbf{H}$  del modello. La  $\mathbf{F}$  è ricavabile eliminando da  $\mathcal{O}^{(n)}$  la prima riga e aggiungendone una in fondo:

$$\mathcal{O}^{(n)\dagger} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}\mathbf{F} \\ \vdots \\ \mathbf{H}\mathbf{F}^{n-1} \\ \mathbf{H}\mathbf{F}^n \end{bmatrix}$$

per cui risulta  $\mathcal{O}^{(n)\dagger} = \mathcal{O}^{(n)} \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{F} = [\mathcal{O}^{(n)}]^{-1} \mathcal{O}^{(n)\dagger}$ .

La determinazione di  $\mathbf{G}$  è invece un problema di regressione lineare: per  $i = 0$  l'eq.(5.12) può infatti essere scritta come

$$y(t) = \alpha(t) \mathbf{G} + \beta(t) x(1)$$

dove

## 5 Identificazione del sistema di raffreddamento

$$\alpha(t) = Hu(t-1) + HFu(t-2) + \dots + HF^{t-1}u(1)$$

e

$$\beta(t) = HF^{t-1}$$

sono termini a questo punto noti ed il calcolo di  $G$  è ricondotto alla formula dei minimi quadrati.

### 5.5.3 Aspetti relativi alla determinazione dell'ordine di stato a partire da misure rumorose

Nei casi reali, con misure affette da inevitabilmente da disturbi, la matrice  $YP$  presenterà in generale rango pieno e non il desiderato rango  $n$ . Un'applicazione alla lettera dell'identificazione su sottospazi descritta nella sezione precedente porterebbe alla costruzione di modelli di stato di dimensione esagerata che descriverebbero anche la dinamica degli errori di misura (questione della *sovraparametrizzazione*). Per evitare il problema molti software permettono di scomporre la matrice  $YP$  nel prodotto di tre matrici reali secondo la tecnica SVD (Singular Value Decomposition). Di questi tre fattori quello centrale presenta sulla diagonale principale i cosiddetti *valori singolari* della matrice: si tratta di quantità reali non negative, poste in ordine decrescente. Il numero di tali elementi diagonali non nulli si dimostra coincidere con il rango della  $YP$ . Sebbene, come detto, una simile scomposizione porti in generale ad elementi non nulli sull'intera diagonale, è possibile isolare quelli con valore basso rispetto ai rimanenti ed arrivare a definire il *rango numerico* della  $YP$  come il numero di valori singolari «sensibilmente grandi». Il rango numerico è dunque il valore solitamente scelto come ordine del modello di stato.

### 5.5.4 Identificazione di un modello di stato per il sistema di raffreddamento

La tecnica di identificazione su sottospazi è stata testata sul sistema di raffreddamento oggetto della presente tesi, relativamente ad una sessione di dati raccolta in periodo autunnale. Le misure sono state divise in dati per l'identificazione, adoperati per le stime di ordine e matrici, e per la validazione.

La figura 5.6 mostra l'andamento dei valori singolari della matrice  $YP$ , costruita sui dati di identificazione, al variare dell'ordine  $n$  del modello di stato. Benché non sia possibile stabilire una netta linea di separazione, caso frequente nella pratica, una scelta condivisibile per l'ordine è  $n = 3$ ; le prestazioni del relativo modello di stato sono riportate in figura 5.7.

## 5.5 Identificazione black-box mediante modelli di stato

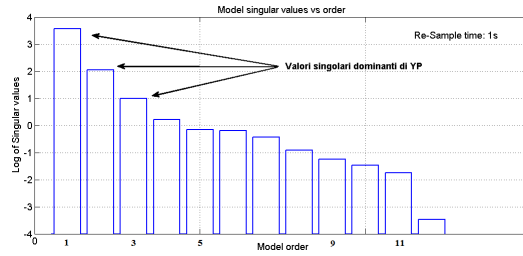
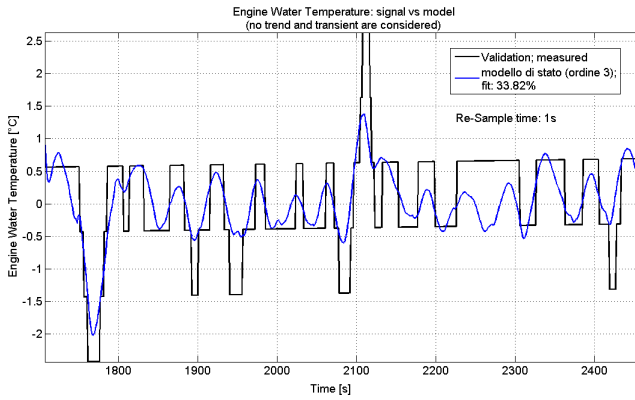
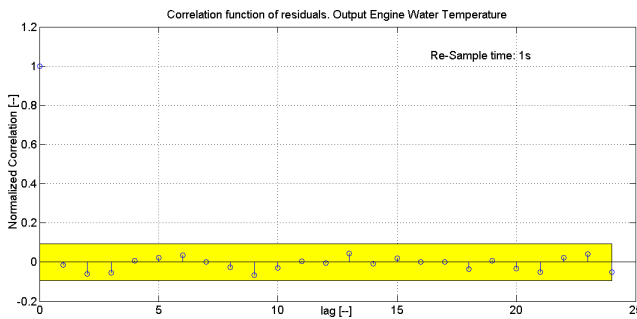


Figura 5.6: Andamento dei valori singolari di  $YP$  relativamente a misure effettuate sul sistema di raffreddamento sottocampionato ad 1 secondo; il grafico è stato ottenuto tramite la funzionalità *nsid* del System Identification Toolbox di Matlab.



(a) Aderenza del modello alle misure reali (private della media) della temperatura del liquido refrigerante.



(b) Test di bianchezza del residuo di predizione.

Figura 5.7: Prestazioni del modello di stato di ordine  $n = 3$  identificato per il sistema di raffreddamento.

## 5 Identificazione del sistema di raffreddamento

Va comunque detto che l'identificazione su sottospazi non permette di ottenere una classe di modelli più ampia rispetto a quanto già non riesca a fare l'approccio input/output privo di stato. Questo è chiaro dalla teoria della realizzazione: ogni sistema lineare scritto in spazio di stato può essere portato in forma ingresso/uscita e, viceversa, esiste sempre una terna  $(F, G, H)$  per cui un processo descritto da un'equazione alle differenze «esogena» possa essere rappresentato in spazio di stato. Alla luce di ciò emerge naturale l'impossibilità di ottenere prestazioni migliori passando da modelli ARX/ARMAX ecc. a rappresentazioni interne: ciò è testimoniato dal comportamento ottenuto nei casi di figura 5.5 e 5.7 per i quali fit e caratteristiche dei residui sono del tutto analoghi.

I tentativi fatti nel modellizzare il sistema di raffreddamento con modelli a scatola nera del tipo ingresso/uscita o in spazio di stato, non hanno portato a risultati del tutto soddisfacenti. Tali modelli riescono a catturare l'intera dinamica del processo (bianchezza dell'errore) ma non mostrano al contempo aderenza ai dati di uscita (fit bassi). Questo fatto è da imputare alla quantizzazione di 1°C introdotta dal sensore di uscita su una temperatura, quella del refrigerante, che varia, almeno a regime, in un range di una decina gradi. Alla natura «livellata» dell'uscita corrisponde una predizione del modello non soggetta allo stesso grado di quantizzazione, perché funzione anche di ingressi misurati con maggior dettaglio: ciò causa aderenze vistosamente basse tra misure e predizioni. Come si vede dalle figure 5.5a e 5.7a, la temperatura stimata simula abbastanza bene l'andamento di quella misurata presentando però un carattere oscillatorio che abbassa il fit. Il fatto che tali oscillazioni non abbiano ampiezze e frequenze regolari e si mantengano alle volte a valori superiori, altre volte a valori inferiori a quelli misurati, fa sì che sia conservata la bianchezza dell'errore di predizione.

Sebbene il modello ingresso/uscita sembri seguire veramente quella che è l'uscita vera<sup>9</sup> dell'impianto, non avendo riscontro pratico nei dati è bene guardare con diffidenza ai risultati ottenuti e cercare, per quanto possibile, un miglior compromesso tra bianchezza e aderenza a quelle che sono misure e non valori virtuali.

L'accettare, in un certo senso, la cattiva risoluzione dello strumento di misura ha portato alla ricerca di modelli diversi dai precedenti, basati solo sul segnale di uscita; dall'identificazione input/output si è così passati all'identificazione della sola serie temporale di uscita, presentata nella prossima sezione. Sulla stima ricorsiva di un modello autoregressivo per la serie temporale di temperatura del liquido refrigerante è stata poi basata la diagnostica dell'impianto di raffreddamento.

---

<sup>9</sup>...che non coincide con quella misurata, affetta da quantizzazione.



## 5.6 Identificazione black-box di serie temporali

### 5.6.1 Introduzione

Il problema dell'identificazione delle serie temporali ha come obiettivo la costruzione di un modello che descriva l'evoluzione temporale della variabile misurata rappresentando il modo con cui le misure passate influenzano quella corrente.

Tra i modelli di serie temporali, in questa tesi si considerano quelli lineari in cui il valore del segnale al tempo  $t$  è combinazione lineare dei suoi campioni ad istanti precedenti. L'unica variabile «esogena» presente in queste rappresentazioni è al solito un termine di disturbo, grazie al quale si accetta il fatto che l'evoluzione non sia puramente deterministica, ovvero una semplice combinazione lineare di valori passati dell'uscita, bensì presenti caratteristiche aleatorie dovute ad errori di non linearità.

L'attenzione è qui rivolta alla classe di modelli autoregressivi (AR), a media mobile (MA) e alla combinazione di questi (modelli ARMA).

Una prima analisi della serie temporale, al fine di dedurre quale *classe* di modelli sia più adatta alla rappresentazione, sarà eseguita tramite l'algoritmo di Durbin-Levinson mentre i metodi di Akaike (AIC, Akaike Information Criterion) e di Kolmogorov sulla minima complessità di descrizione (MDL, Minimum Description Length) rappresentano l'approccio finale nella scelta dell'*ordine* (numero parametri) all'interno della classe selezionata.

#### 5.6.1.1 Identificazione di modelli AR

La struttura dei modelli AR è descritta da un'equazione alle differenze del tipo

$$y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) + \xi(t) \quad (5.15)$$

nella quale il valore attuale dell'uscita  $y(t)$  è legato linearmente al suo passato fino ad un massimo di  $n_a$  passi di campionamento e ad un termine erratico  $\xi(t)$  bianco a media nulla e varianza  $\lambda^2$ .  $n_a$  è l'*ordine* del modello, mentre  $a_1, \dots, a_{n_a}$  sono i *parametri* da identificare; a questi si aggiunge la varianza  $\lambda^2$ . L'eq. (5.15), indicata con la scrittura compatta AR( $n_a$ ), viene anche riscritta come

$$A(z^{-1})y(t) = \xi(t)$$

dove si è posto

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a}.$$

In accordo a tale notazione e all'eq. (5.7), di cui il modello AR è un caso particolare, il predittore ottimo ad un passo è:

## 5 Identificazione del sistema di raffreddamento

$$\hat{y}(t|t-1) = (1 - A(z^{-1}))y(t) = a_1y(t-1) + \dots + a_{n_a}y(t-n_a).$$

Il calcolo dei parametri avviene per mezzo della minimizzazione della loss function

$$J_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t)^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y(t) - \hat{y}(t|t-1))^2$$

sulle  $N$  misure raccolte per l'identificazione. Per farlo si ricorre al cosiddetto *metodo dei minimi quadrati*, di seguito descritto.

Definiti i seguenti vettori di parametri e misure

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n_a} \end{bmatrix}, \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \\ \vdots \\ y(t-n_a) \end{bmatrix}$$

il modello (5.15) è riscrivibile nella forma compatta

$$y(t) = \varphi(t)^T \theta + \xi(t)$$

mentre il predittore diventa

$$\hat{y}(t|t-1) = \varphi(t)^T \theta.$$

Il residuo di predizione si riscrive come

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi(t)^T \theta$$

con  $y(t)$  indicante la misura raccolta al tempo corrente  $t$ .

Anche la loss function è riscrivibile in funzione dei vettori introdotti. Precisamente

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( y(t) - \varphi(t)^T \theta \right)^2.$$

I punti di minimo di questa quantità scalare si ottengono annullandone la derivata rispetto al vettore dei parametri da cui dipende. Ne risulta il sistema di equazioni

$$\left[ \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi(t)^T \right] \theta = \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t)$$

la cui soluzione è unica se e solo se la matrice quadrata

## 5.6 Identificazione black-box di serie temporali

$$S_N = \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi(t)^T$$

è non singolare (*condizione di identificabilità del modello*). Se questa è la situazione, l'unica soluzione è data da

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n_a} \end{bmatrix} = S_N^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t). \quad (5.16)$$

Nel caso di un modello AR di ordine  $n_a = 1$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  e  $S_N$  sono scalari e la (5.16) si riduce a

$$\theta = a_1 = \frac{\sum_{t=1}^N y(t-1) y(t)}{\sum_{t=1}^N y(t-1)^2}. \quad (5.17)$$

Capitolo a parte va aperto per la scelta dell'ordine  $n_a$  del modello. In fin dei conti esso è, come detto, un parametro aggiuntivo ignoto che andrebbe determinato prima di tutti gli altri. Un modo di procedere alla scelta dell'ordine è banalmente quello di identificare diversi modelli di vari ordini e confrontarne le prestazioni su dati di validazione; si parla in questo caso di *cross-validazione*. Negli anni i contributi alla soluzione del problema di scelta dell'ordine si sono comunque susseguiti ed agli studi di Yule, Walker, Durbin e Levinson, si sono presto affiancati quelli di Akaike e Kolmogorov, fautori di due criteri per la determinazione degli ordini ottimali in modelli AR e ARX (anche multi-input).

Così, pur avendo potuto procedere alla ricerca dell'ordine ottimale  $n_a$  mediante cross-validazione, si è qui preferito mantenere uno sfondo di rigosità teorica.

### 5.6.1.2 Identificazione di modelli MA

I modelli MA (media mobile, in inglese Moving Average) rappresentano la serie temporale con un'equazione priva di campioni passati del segnale, dove l'uscita è semplicemente funzione di un rumore bianco a media nulla ( $\xi$ ). In particolare, il valore attuale del segnale è ottenuto come combinazione lineare (media) del valore presente e del passato, fino a  $n_c$  istanti di campionamento, del rumore stesso:

$$y(t) = \xi(t) + c_1 \xi(t-1) + \dots + c_{n_c} \xi(t-n_c). \quad (5.18)$$

L'eq.(5.18) è rappresentabile con la scrittura MA( $n_c$ ) dove  $n_c$  è l'ordine del modello: operatorialmente la (5.18) si riscrive come

## 5 Identificazione del sistema di raffreddamento

$$y(t) = C(z^{-1}) \xi(t)$$

dove  $C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}$ .

Dall'eq.(5.7) il predittore ottimo per il modello MA è definito dall'espressione

$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{C(z^{-1}) - 1}{C(z^{-1})} y(t)$$

non lineare nei parametri  $c_1, \dots, c_{n_c}$ ; la minimizzazione della loss function

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y(t) - \hat{y}(t|t-1))^2$$

diviene così un problema di ottimizzazione non lineare; in particolare non è più valida la formula dei minimi quadrati determinata per gli AR e per la stima parametrica vanno utilizzati metodi iterativi quali quello di Newton sulla discesa del gradiente[16].

La natura bianca di  $\xi$  nel modello (5.18) fa sì che la funzione di correlazione

$$\gamma(\tau) = E[y(t)y(t+\tau)]$$

sia nulla per  $\tau > n_c$ . Un modo per capire se una data serie storica  $\{y(t)\}_{t=1, \dots, N}$  è rappresentabile con un'equazione del tipo (5.18) è allora quello di calcolarne la correlazione campionaria<sup>10</sup>

$$\hat{\gamma}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} y(t)y(t+\tau)$$

per diversi valori interi del lag  $\tau$  e verificare se da un certo ritardo in poi questa si annulla (almeno approssimativamente). Detto  $\tau = n_c$  l'eventuale ultimo campione non nullo di correlazione campionaria, si è nella situazione in cui la serie temporale obbedisce ad un modello MA( $n_c$ ). In caso contrario per il segnale va cercato un modello alternativo, quale l'AR o l'ARMA.

### 5.6.1.3 Identificazione di modelli ARMA

Qualora si decida di rappresentare la serie temporale come combinazioni di alcuni suoi valori passati a cui si sommi un errore colorato, l'equazione alle differenze appropriata è:

---

<sup>10</sup> «Campionaria» nel senso che rappresenta una stima della funzione di correlazione vera, effettuata a partire da un numero finito di campioni del segnale.

$$y(t) = a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) + \xi(t) + c_1 \xi(t-1) + \dots + c_{n_c} \xi(t-n_c) \quad (5.19)$$

che prende il nome di equazione ARMA, avendo, in unione alla parte autoregressiva, una parte di media mobile dell'errore bianco  $\xi(t)$ . La (5.19) è anche indicata come ARMA( $n_a, n_c$ ).

Definiti i polinomi

$$A(z^{-1}) = 1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_{n_a} z^{-n_a}$$

e

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}$$

l'eq.(5.19) può essere riscritta operatorialmente come

$$A(z^{-1}) y(t) = C(z^{-1}) \xi(t).$$

In base all'eq.(5.7) il predittore ottimo ad un passo per modelli ARMA è:

$$C(z^{-1}) \hat{y}(t|t-1) = [C(z^{-1}) - A(z^{-1})] y(t).$$

Come già per il caso MA, il predittore non è lineare nei parametri e ciò complica non poco la minimizzazione della loss function.

Tale difficoltà computazionale fa preferire, in applicazioni destinate ad utilizzo on-line, l'uso di modelli privi di errori colorati.

#### 5.6.1.4 Scelta della classe di modelli per serie temporali

Esistono dei criteri per determinare in via approssimata, a partire dai dati, la famiglia di modelli a cui appartiene una data serie storica. Uno di questi è già stato introdotto nella sottosezione 5.6.1.2 e permette di capire se il segnale sia di natura MA dal calcolo della funzione di autocorrelazione campionaria: nel caso la correlazione della serie divenga pressoché nulla per  $\tau > n_c$ , si è nella situazione di poter rappresentare il processo con un modello MA( $n_c$ ). Non è stato questo il caso della temperatura dell'acqua di raffreddamento del motore, la cui funzione di correlazione non si annulla stabilmente mai (si veda la figura 5.8 dove è riportata tale funzione: dal lag 40 la correlazione torna ad assumere valori non nulli).

È allora esclusa la possibilità che la temperatura del refrigerante sia un processo della classe MA.

## 5 Identificazione del sistema di raffreddamento

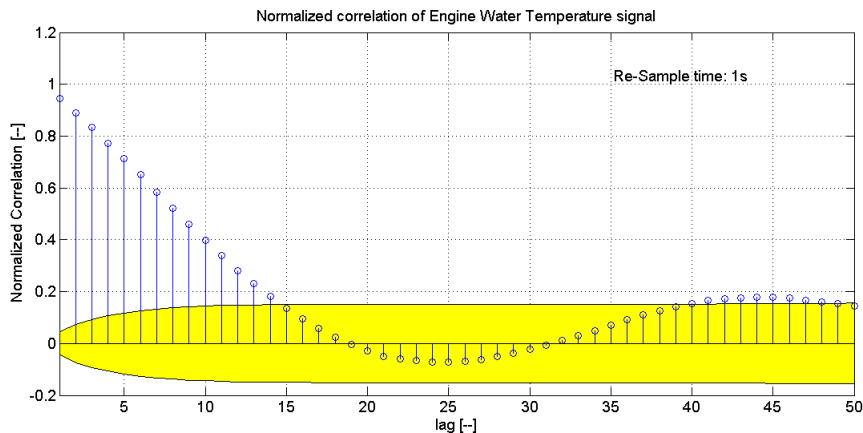


Figura 5.8: Funzione di correlazione (normalizzata per la varianza del segnale) della temperatura di raffreddamento: transitori e trend non sono considerati nel calcolo. La fascia gialla è la tolleranza del calcolo: i campioni giacenti in essa possono considerarsi nulli (dati riferiti alla sessione autunnale).

Un secondo test permette di capire se la serie data sia rappresentabile da un modello AR: si tratta dell'algoritmo di *Durbin-Levinson*. In appendice (sezione 10.1) viene riportata la descrizione integrale dell'algoritmo; qui ci si limita a dire che esso consente di stimare iterativamente i parametri di un modello  $AR(n_a)$  a partire da quelli dell' $AR(n_a - 1)$  e dai valori della correlazione campionaria del segnale. Se da un certo ordine  $n_a + 1$  in poi il parametro  $a_{n_a+1}$  stimato risulta avere valori trascurabili si è in presenza di un processo modellabile con un  $AR(n_a)$ . Una rappresentazione grafica della funzione detta di *correlazione parziale*

$$PARCOR(\tau) = a_{\tau}^{(\tau)} \quad \tau = 1, 2, \dots$$

dove  $a_{\tau}^{(\tau)}$  indica il valore dell'ultimo<sup>11</sup> parametro del  $\tau$ -esimo modello AR identificato, è pertanto sufficiente a cogliere sia l'eventuale natura autoregressiva della serie, che il suo ordine, almeno in modo approssimato. La scelta puntuale dell'ordine  $n_a$  è poi perfezionabile mediante i criteri AIC e MDL discussi nella prossima sottosezione.

L'algoritmo di Durbin-Levinson è stato applicato alla temperatura dell'acqua del motore, con il risvolto di figura (5.9) dalla quale emerge, chiara, la caratteristica autoregressiva del segnale con contributo dominante dato dal coefficiente dell' $AR(1)$ , pressoché unitario. Ciò è in accordo con la natura lentamente tempo-variante del segnale.

<sup>11</sup>il parametro  $a_{\tau}^{(\tau)}$  riferisce al campione di ritardo massimo nel modello di ordine  $\tau$ .

## 5.6 Identificazione black-box di serie temporali

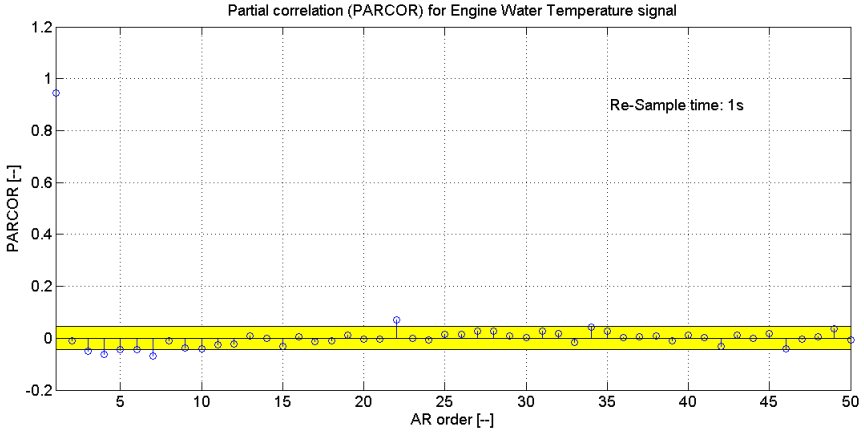


Figura 5.9: Funzione di correlazione parziale della temperatura di raffreddamento al variare dell'ordine del modello autoregressivo. Transitori e trend non sono considerati nel calcolo. La fascia gialla è la tolleranza del calcolo: i campioni giacenti in essa possono considerarsi nulli (dati riferiti alla sessione autunnale).

L'esamina grafica della funzione PARCOR suggerisce per il modello AR un ordine basso, compreso tra 1 e 7; a rigore andrebbe comunque fissato in base all'ultimo campione di PARCOR giacente fuori della fascia gialla di tolleranza (ordine 22). Come detto la determinazione dell'ordine va ultimata ricorrendo ad altri criteri.

### 5.6.1.5 Scelta dell'ordine nei modelli AR: AIC e MDL

Il criterio AIC basa la determinazione dell'ordine ottimo di un modello AR/ARX su considerazioni prettamente statistiche; l'ottica è quella di minimizzare la distanza tra la densità di probabilità «vera» dei dati raccolti per l'identificazione e quella generata dal modello stimato. Pertanto dai dati raccolti si cerca di desumere qualche informazione sulla densità di probabilità che li descrive e a questa distribuzione si dà il nome di «probabilità vera». Poi si identificano vari modelli, di vari ordini, e si calcola la densità di probabilità generata da questi: l'ordine ottimo sarà quello il cui modello ha la distribuzione più vicina a quella vera.

Per i modelli AR si dimostra che l'AIC indica come ordine  $n_a$  ottimo quello per cui è minima la quantità:

$$AIC = 2 \frac{n_a}{N} + \ln J_N \quad (5.20)$$

dove  $N$  è il numero di dati di identificazione e  $J_N$  la loss function

$$J_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t)^2$$

calcolata sui dati di identificazione<sup>12</sup>.

Il criterio MDL ha invece come intento quello di trovare il *giusto compromesso* tra l'aderenza del modello ai dati stessi di identificazione ed il numero di parametri. E' chiaro infatti che aumentare il numero di parametri porta a fitting sempre migliori sui dati usati per la stima ma anche all'indesiderata aderenza ai disturbi, spesso smascherata nel corso di test di aderenza su dati diversi (validazione).

Per i modelli AR si dimostra che il criterio MDL indica come ordine  $n_a$  ottimo quello per cui è minima la quantità:

$$MDL = (\ln N) \frac{n_a}{N} + \ln J_N \quad (5.21)$$

dove  $N$  è il numero di dati di identificazione e  $J_N$  la loss function calcolata sui dati di identificazione.

In letteratura[16] è provato come generalmente il criterio MDL porti ad ordini ottimi inferiori rispetto ad AIC.

AIC e MDL sono stati utilizzati per stabilire l'ordine ottimo del modello AR per la temperatura del liquido di raffreddamento del motore: la figura 5.10 mostra la loss function  $J_N$  percentuale del corrispondente modello sui dati di identificazione in funzione dell'ordine. Le barre colorate in blu indicano l'ordine ottimo determinato dai criteri AIC e MDL; la barra rossa riferisce al modello con minima loss function (*best fit*), generalmente portatore di sovraderenza ai dati.

---

<sup>12</sup>Per modelli ARX la 5.20 diventa

$$AIC = 2 \frac{n}{N} + \ln J_N$$

dove  $n = n_a + n_b + n_k$  è stavolta il numero totale dei parametri e ritardi del modello



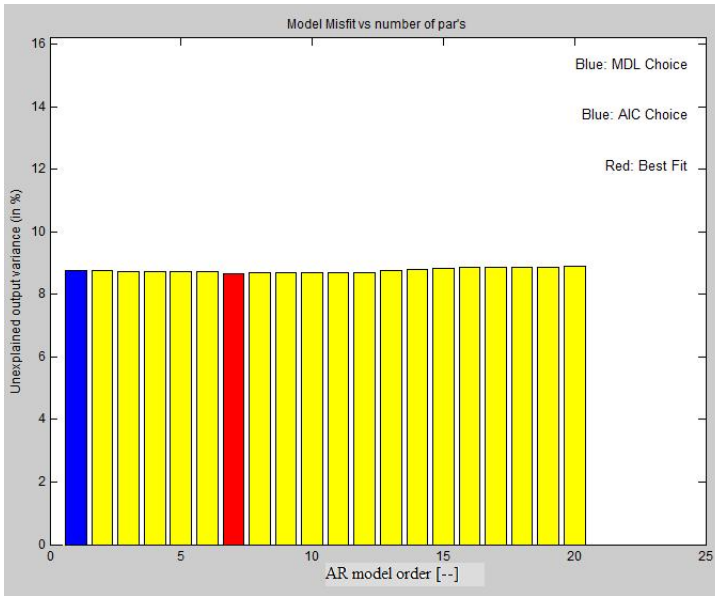


Figura 5.10: Scelta dell'ordine AR per la temperatura del liquido di raffreddamento di un autoveicolo: dati relativi ad una sessione autunnale, campionata ad 1s.

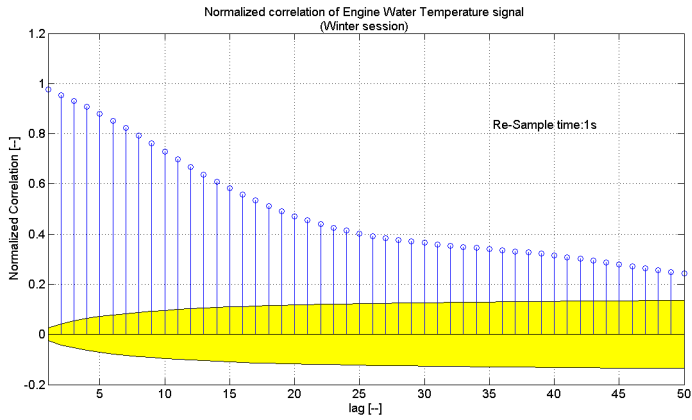
### 5.6.1.6 Capacità di generalizzazione del modello AR(1)

Le tecniche esaminate nelle sottosezioni 5.6.1.4 e 5.6.1.5 per la selezione della classe e dell'ordine del modello sono state testate su una sessione autunnale di utilizzo del veicolo. Al fine di non incorrere in modellistiche troppo specifiche, le conclusioni andrebbero validate su altre sessioni di prova e su altri veicoli così da essere rassicurati sulla *generalità* del modello AR(1).

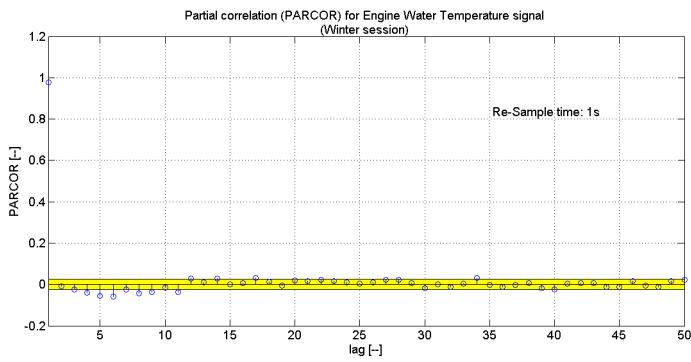
La figura 5.11 mostra la correlazione campionaria normalizzata (5.11a), la PARCOR (5.11b) e la scelta dell'ordine secondo AIC/MDL (5.11c) per una *sessione invernale* di utilizzo della medesima vettura.

La figura 5.12 riporta i tre medesimi grafici relativamente a dati di temperatura del liquido di raffreddamento raccolti su un *secondo autoveicolo*. In entrambi i casi emerge chiara la natura autoregressiva del segnale con ordine che il criterio MDL indica sempre unitario. Nella sessione invernale AIC porta invece ad una stima diversa; il fatto che il suggerimento di ordine unitario ricorra in tutti i casi porta comunque ad adottare l'AR(1) come modello generico, in grado di spiegare la dinamica della temperatura del liquido refrigerante per sessioni e per veicoli differenti.

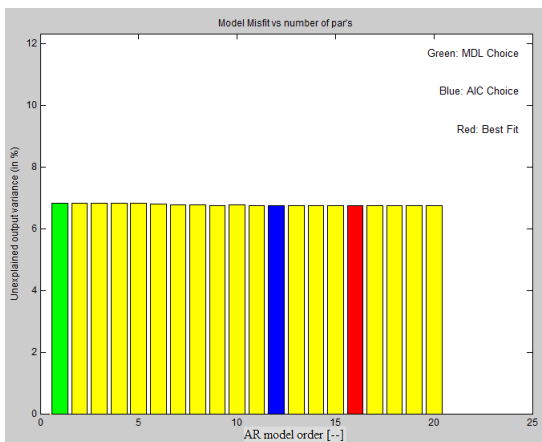
## 5 Identificazione del sistema di raffreddamento



(a) Funzione di correlazione campionaria normalizzata.



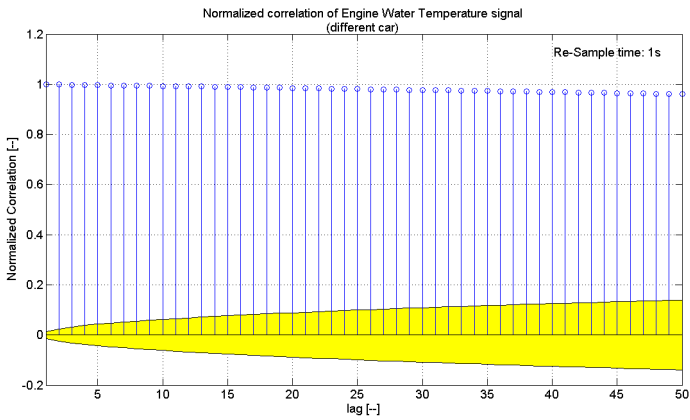
(b) Funzione di correlazione parziale.



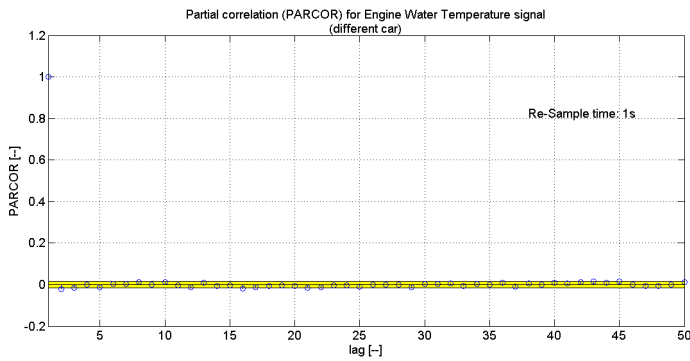
(c) Scelta dell'ordine per modelli AR: criteri MDL, AIC e best fit.

Figura 5.11: Scelta della classe e dell'ordine per una sessione invernale.

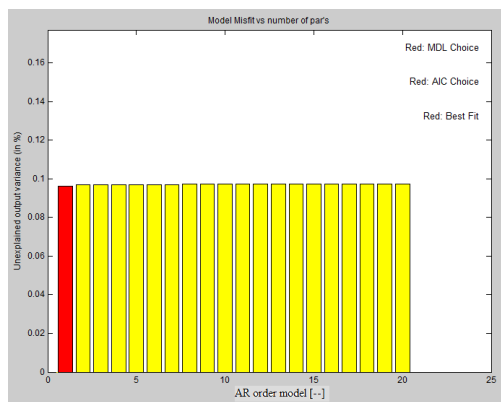
## 5.6 Identificazione black-box di serie temporali



(a) Funzione di correlazione campionaria normalizzata.



(b) Funzione di correlazione parziale.



(c) Scelta dell'ordine per modelli AR: criteri MDL, AIC e best fit.

Figura 5.12: Scelta della classe e dell'ordine per dati rilevati su un secondo autoveicolo.

## 5.6.2 Costruzione di modelli per la temperatura del liquido di raffreddamento

In questa sezione vengono dapprima presentati per completezza dei modelli ARMA per il segnale in questione, in modo da chiarire se sia possibile che l'unione delle classi AR e MA conduca a rappresentazioni migliori di quelle autoregressive. Successivamente verranno discusse le prestazioni dell'AR.

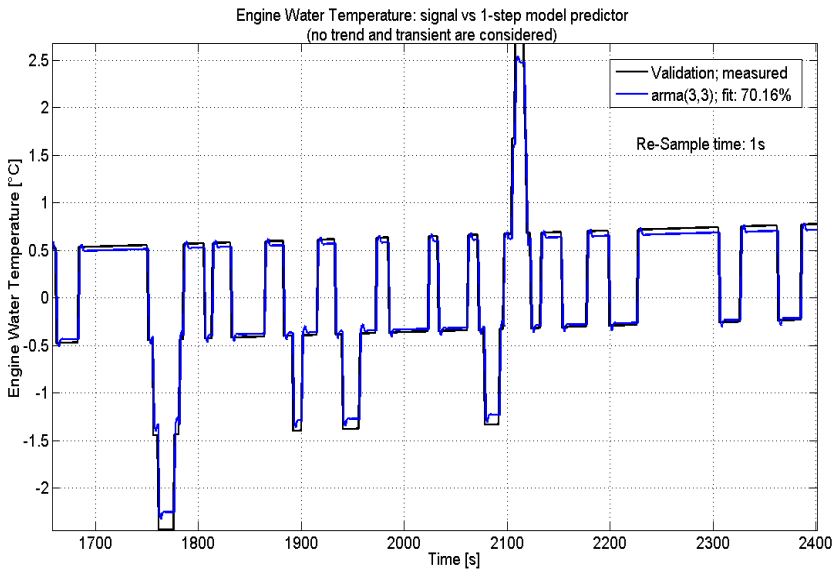
Va detto che rappresentazioni AR e ARMA sussistono per molti processi industriali le cui caratteristiche ad un dato istante temporale sono fortemente dipendenti da quelle relative al passo di campionamento precedente. Nel caso in cui la fisica del sistema conduca poi a dinamiche lentamente tempo-varianti, la parte di modellizzazione autoregressiva avrà come coefficiente dominante quello relativo al termine di ritardo ad un passo, che risulterà sostanzialmente unitario[17].

### 5.6.2.1 Modelli ARMA per la temperatura dell'acqua

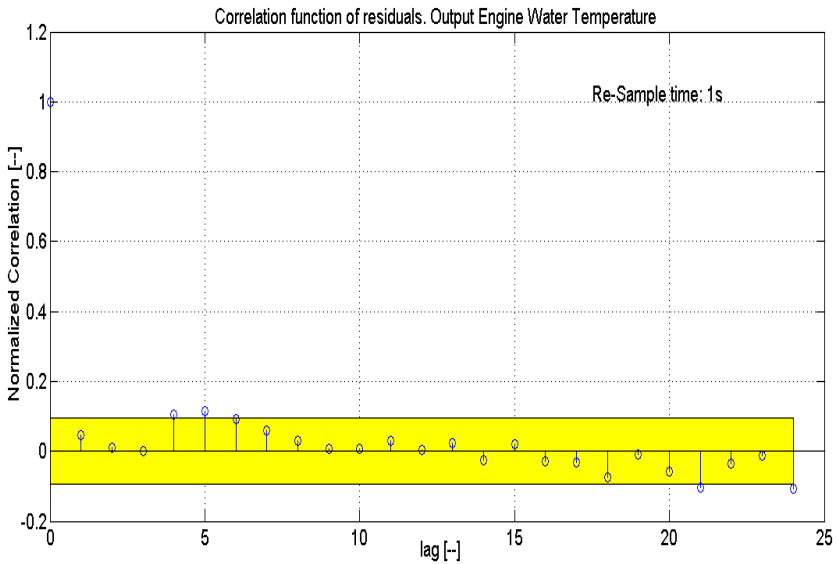
Per la scelta dell'ordine dei modelli ARMA si è proceduto per tentativi successivi con l'ausilio del System Identification Toolbox di Matlab che ha permesso l'esamina di modelli di vari ordini. Nel dettaglio si sono variati parallelamente gli ordini  $n_a$  e  $n_c$  fino ad ottenere prestazioni soddisfacenti in termini di fitting e bianchezza su dati di validazione, con particolare attenzione a non incorrere in problemi di sovrapparametrizzazione. Quando l'esamina dell'aderenza su dati diversi da quelli adoperati per l'identificazione non ha permesso di smascherare un uso eccessivo di parametri, è stata d'aiuto l'analisi della disposizione di zeri e poli della funzione di trasferimento del modello ARMA sul piano complesso. Eventuali «quasi-cancellazioni» tra zeri e poli sono considerati indice di sovrapparametrizzazione dell'equazione. Se questa è la situazione, il ricorso a rappresentazioni con un numero inferiore di coefficienti è consigliato.

Quest'ultimo problema è stato incontrato nel corso della costruzione di un modello ARMA per la temperatura del liquido di raffreddamento, facente riferimento ad un'identificazione relativa ad una sessione autunnale di dati. Un ARMA(3,3) è stato identificato e validato sulla serie temporale. Aderenza e bianchezza residuale sono illustrate in figura 5.13.

## 5.6 Identificazione black-box di serie temporali



(a) Aderenza all'uscita misurata.



(b) Bianchezza dell'errore di predizione.

Figura 5.13: Modello ARMA(3,3): prestazioni in fase di validazione.

## 5 Identificazione del sistema di raffreddamento

Si osservi come questo primo modello per serie temporali presenti aderenze superiori rispetto ai modelli input/output esaminati nelle sezioni 5.4 e 5.5. Si passa, sorprendentemente, da un fitting del 30% dei modelli ARMAX e di stato al 70% dell'ARMA. In effetti un ARMA non introduce alcun termine aggiuntivo al modello rispetto ad un ARMAX e, anzi, risulta privato della parte esogena non prevista per le serie temporali. Dunque sarebbe stato lecito attendersi per l'ARMAX prestazioni migliori rispetto all'ARMA visto l'impiego nell'identificazione di una quantità di informazione più elevata rappresentata dagli ingressi. Che poi tali variabili esogene siano realmente correlate con la temperatura dell'acqua del motore è stato dibattuto nel capitolo 4 e nella sezione 5.3.

Tuttavia il contesto in cui ci si sta muovendo è caratterizzato da un diverso grado di accuratezza nella misura dei segnali raccolti, come ricordato in sezione 5.5.4. Possibile allora che la maggior risoluzione nella misura degli ingressi accompagnata dalla peggior quantizzazione dell'uscita abbia l'effetto di causare aderenze molto basse. Lo stesso problema non è evidenziato nei modelli per serie temporali, privi di variabili esogene. In questi ultimi la predizione della temperatura di uscita è funzione dei soli valori passati della variabile quantizzata: è pertanto presente uniformità tra la risoluzione della predizione e quella dell'uscita misurata.

Nel caso ARMA è leggermente più critica la bianchezza: la figura 5.13b mostra almeno quattro campioni di auto-correlazione del residuo fuori dalla fascia di tolleranza: risultano correlati i campioni di errore distanziati di quattro, cinque, ventuno e di ventiquattro passi di campionamento ( $lag = 4, 5, 21, 24$ )<sup>13</sup>.

Da questo punto di vista sono migliori le caratteristiche dei modelli dotati di ingresso (il lettore confronti la figura 5.13b con le figure 5.5b e 5.7b).

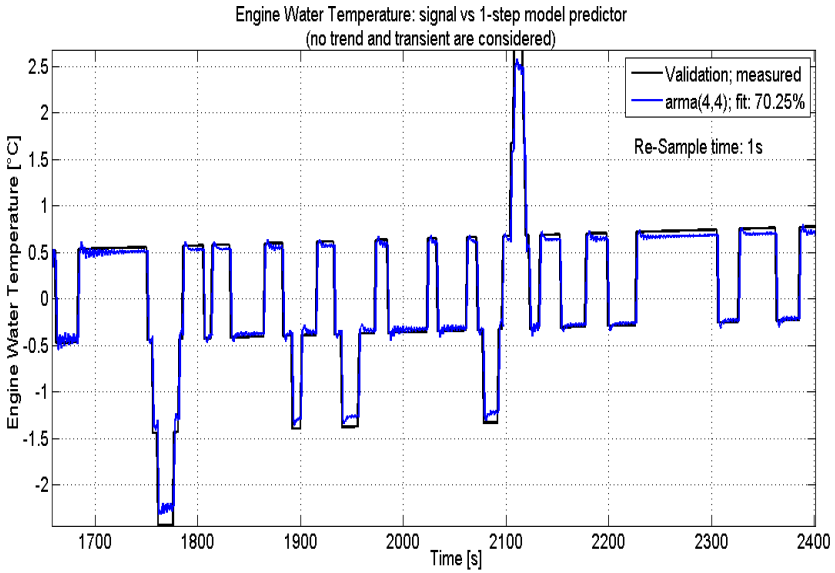
L'accettare una moderata perdita di bianchezza per vedere migliorata la capacità del modello di simulare l'andamento *misurato* dell'uscita (conglobante l'errore di quantizzazione) ha rappresentato un compromesso nell'identificazione del sistema di raffreddamento e nella relativa scelta diagnostica.

Si è provato a migliorare la bianchezza identificando modelli ARMA di ordine superiore. La figura 5.14 mostra il caso ARMA(4,4), relativamente alla temperatura di raffreddamento della sessione autunnale di riferimento.

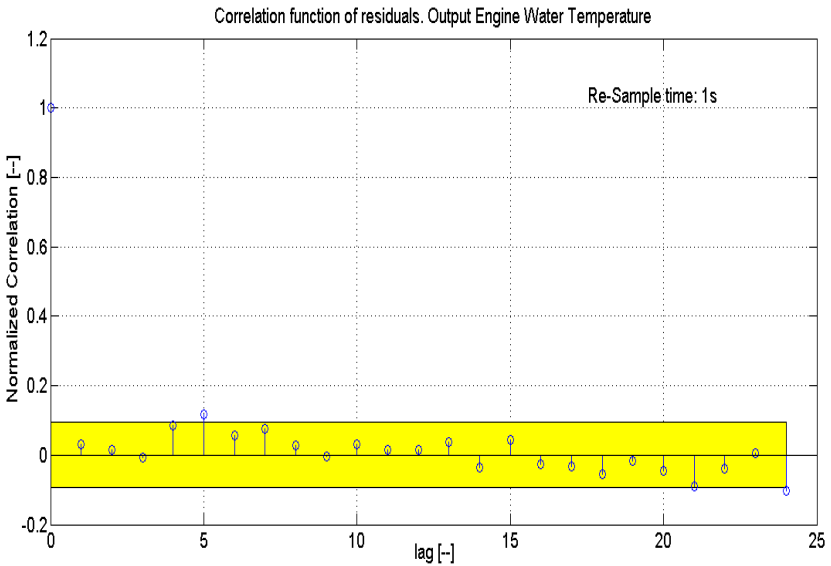
---

<sup>13</sup>Va rammentato il significato del primo ritardo ( $lag = 0$ ): il suo valore di correlazione normalizzata è sempre unitario, rappresentando la varianza del residuo normalizzata per se stessa: è dunque corretto caschi fuori dall'intervallo di confidenza e non va mai annoverato nel test di bianchezza, la quale è una proprietà che riguarda i campioni del residuo valutati ad istanti temporali diversi.

## 5.6 Identificazione black-box di serie temporali



(a) Aderenza del predittore all'uscita misurata.



(b) Bianchezza dell'errore di predizione.

Figura 5.14: Prestazioni del modello ARMA(4,4) in validazione.

## 5 Identificazione del sistema di raffreddamento

L'aumento negli ordini del modello porta ad un grado di bianchezza leggermente migliore: solo due campioni di correlazione cascano ora fuori dalla fascia gialla (figura 5.14b), mentre l'aderenza è rimasta sostanzialmente immutata (70.25% rispetto al 70.16% dell'ARMA(3,3), figura 5.14a). Benché questo comportamento appaia soddisfacente è bene testare a fondo le proprietà del nuovo modello: in particolare per comprendere quanto l'aumento del numero di parametri sia realmente utile è sufficiente calcolare i poli e gli zeri della funzione di trasferimento<sup>14</sup> del modello ARMA(4,4)

$$F.d.t. = \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_4 z^{-4}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_4 z^{-4}}$$

(dove i parametri  $a_1, \dots, a_4, c_1, \dots, c_4$  sono computati dall'algoritmo di minimizzazione della loss function sui dati di identificazione) e disporli sul diagramma complesso di Gauss: il risultato è proposto in figura 5.15.

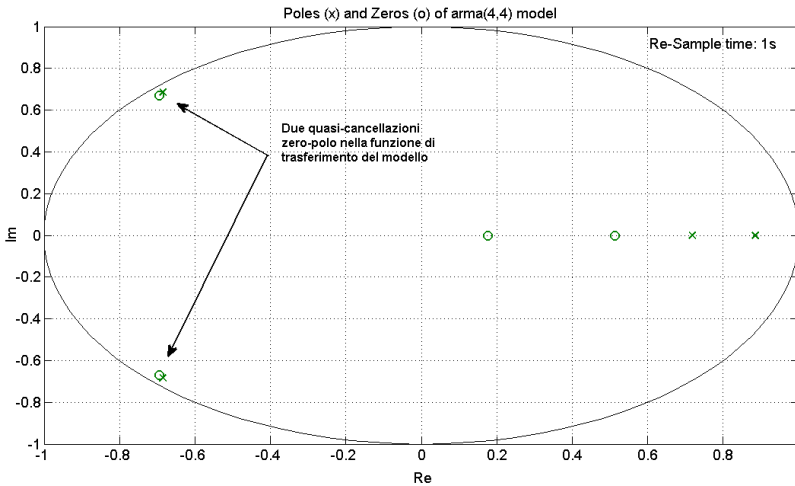


Figura 5.15: Mappa zeri-poli dell'ARMA(4,4).

Sono evidenti due quasi-cancellazioni tra numeratore e denominatore della funzione di trasferimento del modello. Questo comportamento, indice di un numero eccessivo di parametri, solitamente si manifesta con un incremento dell'aderenza ai dati di identificazione (aderenza anche ai disturbi sovrapposti ai dati) ed un decremento del fit di validazione. Non è stato questo il caso; tuttavia è da preferire un modello con un minor numero di parametri, sia per avere ottime proprietà di generalizzazione che in vista di

<sup>14</sup>Sebbene i modelli ARMA, così come gli AR, non siano dotati di ingressi veri e propri, per loro si definisce comunque la funzione di trasferimento come il rapporto tra la serie temporale  $y$  di uscita ed il termine di errore bianco  $\xi$ .



## 5.6 Identificazione black-box di serie temporali

un'implementazione ricorsiva della diagnostica, tanto più efficiente quanto minore è il numero di quantità da stimare.

La figura 5.16 mostra l'assenza di semplificazioni nella funzione di trasferimento dell'ARMA(3,3).

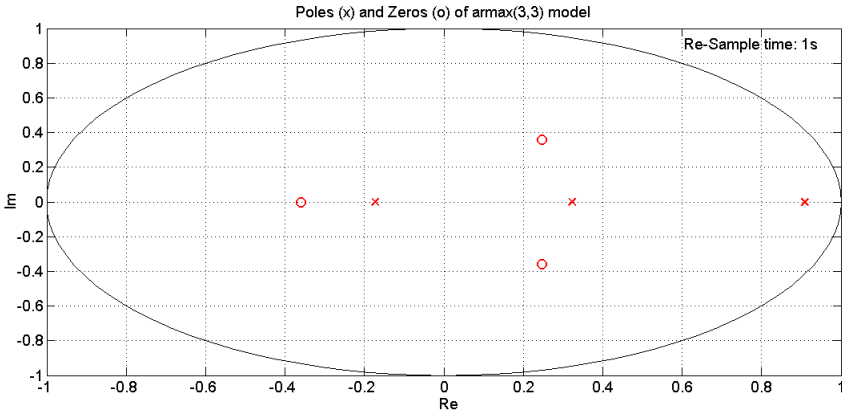


Figura 5.16: Mappa zeri-poli del modello ARMA(3,3).

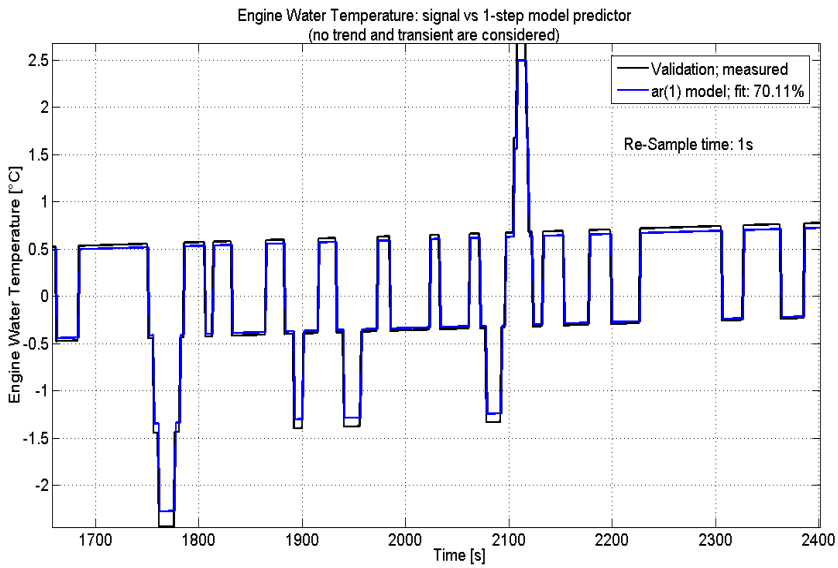
### 5.6.2.2 Modelli AR per la temperatura dell'acqua

Il passaggio da modelli ingresso/uscita a modelli ARMA ha portato a risultati migliori. Sia il fitting alle misure che la bianchezza del residuo si sono rivelati soddisfacenti nel caso ARMA(3,3).

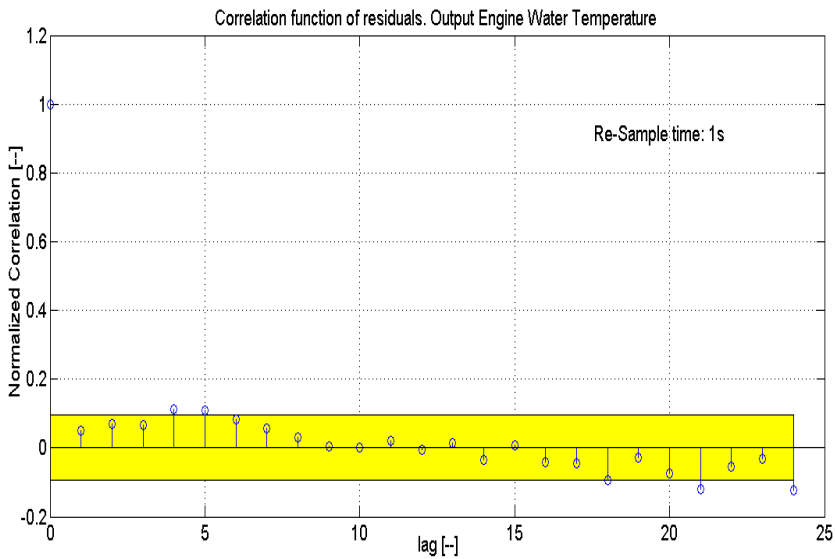
Va però considerato che sebbene il numero totale di parametri da identificare (sei) non sia elevato, il modo in cui il calcolo viene condotto nel caso ARMA è poco efficiente. Infatti il predittore ottimo della serie temporale è una funzione non lineare nei parametri da identificare. Anche quando si considerano modelli di piccola dimensione è generalmente preferibile utilizzare, quando ciò non comporti eccessive perdite in prestazioni, rappresentazioni lineari nell'espressione del predittore. In tal modo l'algoritmo di stima dei parametri diverrebbe molto più semplice (metodo dei minimi quadrati, formula 5.16) e computazionalmente efficiente. Con questo obiettivo, orientato ad avere un apparato diagnostico non oneroso nei calcoli (che andranno eseguiti on-line sull'impianto da monitorare), è stata preferita l'identificazione di modelli AR che riflettono comunque la dinamica caratteristica della temperatura del refrigerante, come provato in sezione 5.6.1.4.

Nelle figure 5.17 e 5.18 si trovano rispettivamente le prestazioni dell'AR(1) consigliato da AIC e da MDL e dell'AR(7) relativo al best fit per l'usuale sessione autunnale.

## 5 Identificazione del sistema di raffreddamento



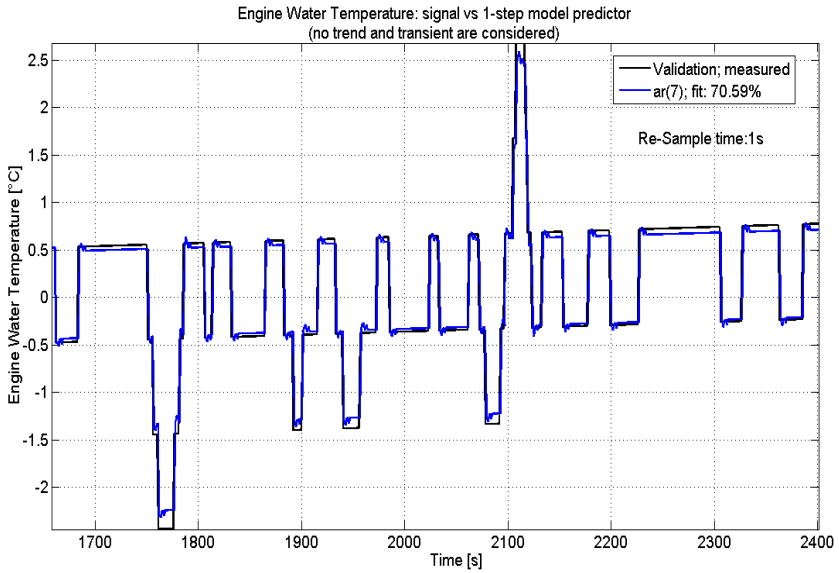
(a) Fitting ai dati di validazione.



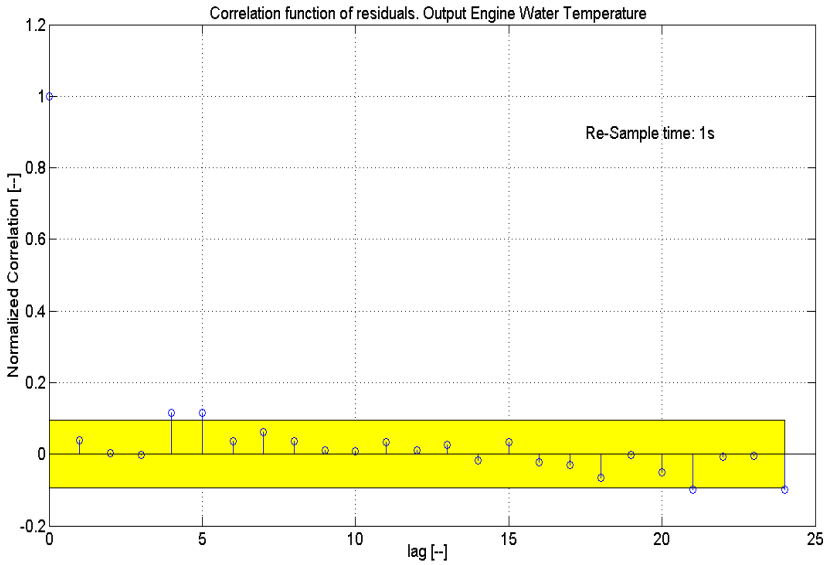
(b) Bianchezza del residuo di modello.

Figura 5.17: Prestazioni del modello AR(1) in validazione.

## 5.6 Identificazione black-box di serie temporali



(a) Fitting alle misure di validazione.



(b) Bianchezza del residuo di modello.

Figura 5.18: Prestazioni modello AR(7) in validazione.

## 5 Identificazione del sistema di raffreddamento

Si osservi l'insorgere di piccole oscillazioni nella predizione effettuata dall'AR(7), in figura 5.18a; ciò non causa perdita di aderenza ma non è un buon comportamento del modello il cui scopo è simulare un segnale di temperatura, difficilmente soggetto a fluttuazioni come quelle evidenziate. Del tutto comparabili sono invece le caratteristiche probabilistiche del residuo di predizione, non completamente bianco (vedere i *lag* numero quattro, cinque, ventuno e ventiquattro, in entrambi i casi delle figure 5.17b e 5.18b) ma accettabile nel compromesso tra aderenza e bianchezza.

D'ora in avanti si farà così riferimento al solo modello AR(1)

$$y(t) = ay(t-1) + \xi(t)$$

per il quale l'identificazione del parametro  $a$  che minimizza l'errore quadratico medio sugli  $N$  dati  $\{y(t)\}_{t=1, \dots, N}$  raccolti è data dalla formula 5.17, ivi riportata:

$$a = \frac{\sum_{t=1}^N y(t-1)y(t)}{\sum_{t=1}^N y(t-1)^2}.$$

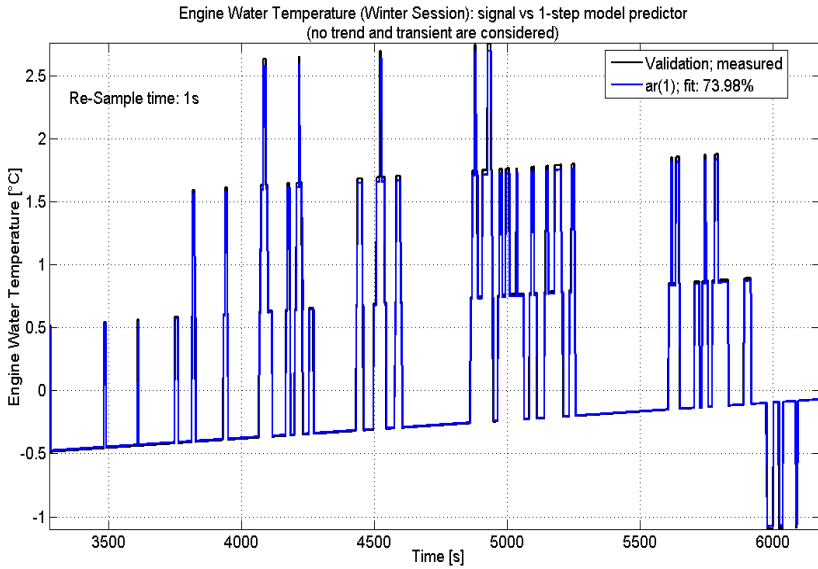
Si assume che, per questo calcolo, alla serie temporale  $\{y(t)\}$  sia stato tolto ogni tipo di trend (media, involuppi lineari o di ordine superiore) così da permettere l'identificazione di un parametro esplicativo dell'intera dinamica del segnale.

Nel caso della sessione autunnale l'identificazione condotta con un numero di dati pari a circa la metà della lunghezza totale della sessione, ha portato al valore parametrico  $a = 0.9322$ .

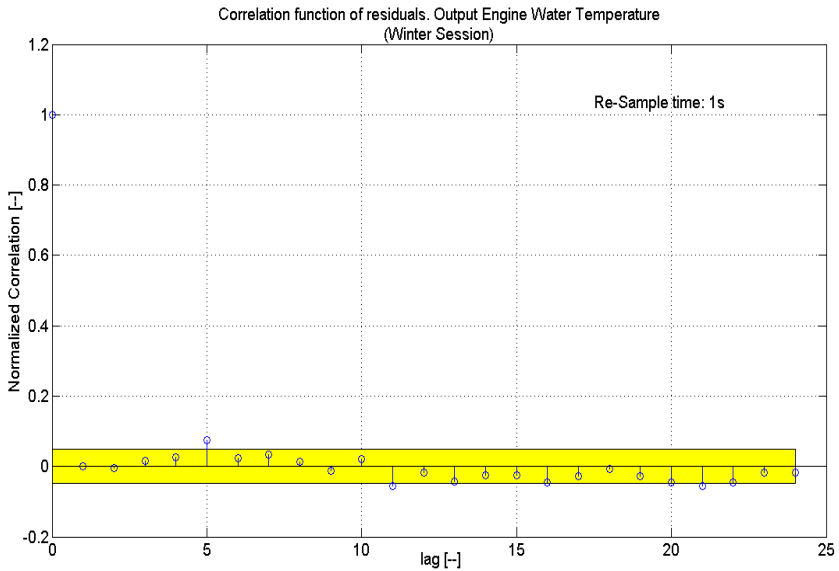
La modellistica AR(1) è stata validata su sessioni diverse. La figura 5.19 mostra le prestazioni del modello AR(1) nel caso di una sessione raccolta in periodo invernale per il medesimo autoveicolo, per la quale si stima un valore parametrico  $a = 0.9811$ . In figura 5.20 le analoghe prestazioni dell'AR(1) per il sistema di raffreddamento di un secondo veicolo (valore identificato  $a = 0.9993$ ). In entrambi i casi aderenza e residui presentano un comportamento soddisfacente; le prestazioni risultano migliori per il secondo autoveicolo (aderenza al 97%, residuo bianco).

L'elevato ordine di generalizzazione assicurato dal modello AR(1), unitamente alla sua affidabilità computazionale, ne consentono così l'utilizzo per la diagnostica del sistema di raffreddamento, discussa nel capitolo 6. Notare però che la validità della rappresentazione AR(1) per diverse sessioni e veicoli non implica un valore univoco del parametro. L'impossibilità di definire a priori (off-line) il parametro di modello (*parametro nominale* o di buon funzionamento) ha portato alla necessità di identificarlo in linea durante il processo diagnostico (strategia *autoadattativa*).

## 5.6 Identificazione black-box di serie temporali



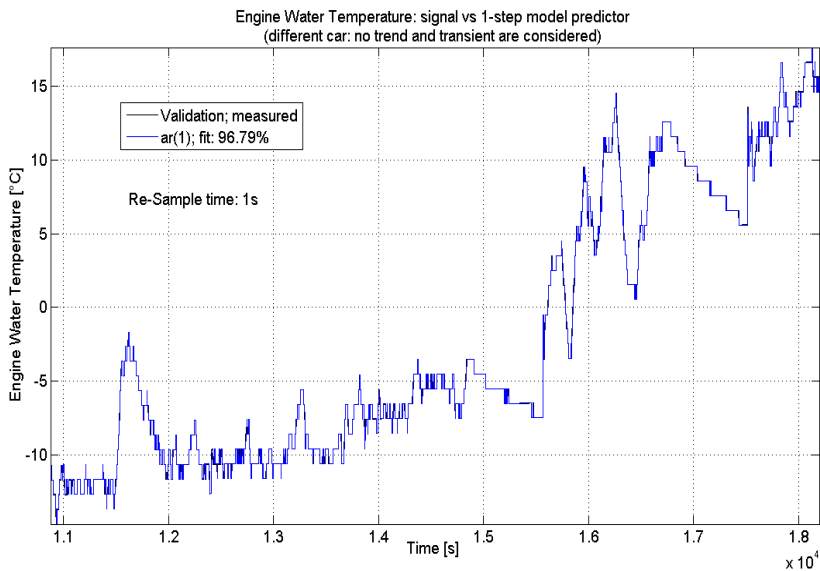
(a) Aderenza del modello alle misure della temperatura del liquido refrigerante.



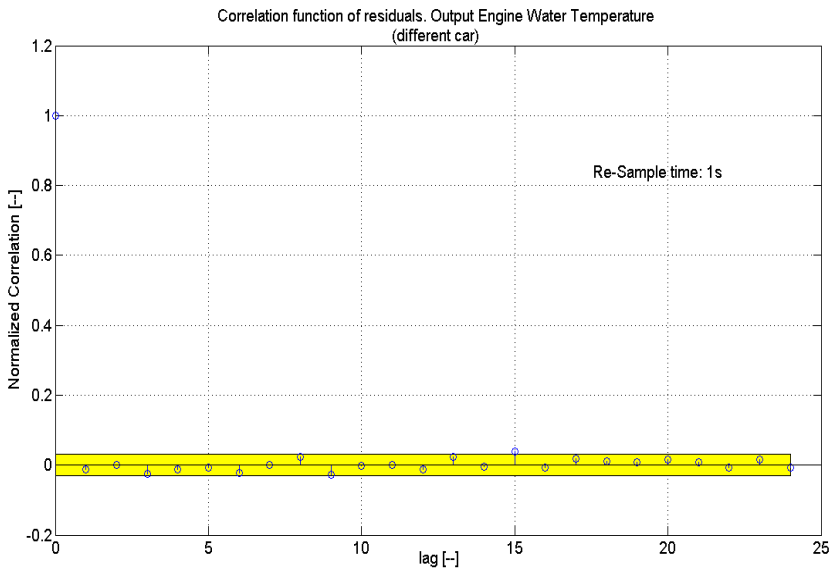
(b) Bianchezza del residuo di predizione.

Figura 5.19: Prestazioni del predittore AR(1) in validazione: dati raccolti in una sessione invernale.

## 5 Identificazione del sistema di raffreddamento



(a) Aderenza del modello alle misure della temperatura del liquido refrigerante.



(b) Bianchezza del residuo di predizione.

Figura 5.20: Prestazioni del predittore AR(1) in validazione: dati raccolti su un secondo veicolo.

# 6 Diagnostica autoadattativa del sistema di raffreddamento

## 6.1 Introduzione

Nel precedente capitolo si è trattato il problema della determinazione della struttura e ordine di un modello matematico per l'impianto di raffreddamento. Tale studio era indispensabile ai fini di una diagnostica model-based dove il comportamento normale o guasto del processo è valutato in termini di obbedienza ad un modello matematico di riferimento.

In questo capitolo verranno presentati i metodi per la stima dei parametri del modello a partire da misure raccolte on-line sull'impianto (*minimi quadrati ricorsivi*, sezione 6.3) e le due tecniche per il rilevamento di anomalie che saranno poi testate sul sistema di raffreddamento.

Tali tecniche basano la segnalazione di guasti sulla variazione dei parametri identificati on-line rispetto al loro valore nominale (*diagnostica parametrica*, sezione 6.3) e sul cambiamento nella distribuzione statistica del residuo di modello (*diagnostica di bianchezza*; alcuni test di bianchezza saranno proposti in sezione 6.4). A causa dell'imprecisione causata dalla quantizzazione delle misure, sarà necessario modificare i test di bianchezza esistenti allo stato dell'arte adattandoli al caso in questione. Ciò verrà discusso in sezione 6.5 assieme all'autoadattatività con cui vengono identificati on-line i valori nominali utili nella decisione diagnostica.

La prossima sezione traccia invece quelle che sono state le idee di fondo che hanno portato alla scelta delle due tecniche diagnostiche, motivandole con semplici esempi che evidenziano l'effetto dei guasti nel contenuto spettrale di un segnale e nella bianchezza del relativo modello.

## 6.2 Idee generali nella scelta delle tecniche diagnostiche

In letteratura gli studi in materia di diagnostica sono ben delineati e godono oramai di rigorosa classificazione ([13] e [18]). Tuttavia nella maggior parte dei casi l'ipotesi di partenza per il design dei sistemi diagnostici è la conoscenza accurata della fisica del processo da monitorare. Questo viene descritto con una relazione differenziale/alle differenze del tipo ingresso-

## 6 Diagnostica autoadattativa del sistema di raffreddamento

uscita in cui i *parametri* del modello hanno un preciso significato fisico e vi è una sostanziale facilità nel determinare le fasce di tolleranza entro cui essi sono liberi di variare nel corso del funzionamento nominale del sistema. Tipicamente l'apparato diagnostico si limita a stimare in tempo reale dalle misure ingresso-uscita il valore di questi parametri testandone l'appartenenza o meno all'intervallo di tolleranza; un'indicazione di malfunzionamento è data qualora i valori si allontanino troppo, ed eventualmente per troppo tempo, dalla conoscenza nominale dell'impianto.

A questo tipo di diagnostica viene solitamente affiancato il metodo delle *equazioni di parità*: il sistema ed il suo modello vengono fatti funzionare in parallelo, alimentati dai medesimi ingressi; le uscite prodotte, quelle misurate dai sensori e quelle frutto dell'elaborazione matematica del modello, sono fra loro confrontate: alla differenza, idealmente nulla nel caso di buon funzionamento, si dà il nome di *residuo*. Valori non nulli residuo stanno ad indicare una qualche anomalia nell'impianto.

Seppur nel presente lavoro di tesi non sia stato possibile seguire l'approccio fisico, si è comunque deciso di intraprendere una via analoga: un uso cioè combinato di due tipi di diagnostica: una «*parametrica*»<sup>1</sup> riguardante il monitoraggio del coefficiente  $a$  nel modello AR(1) individuato per la temperatura del refrigerante ed una basata sulle *caratteristiche probabilistiche del residuo (bianchezza)*, anziché sulla sua entità. Questa idea è giustificata dal fatto che un modello autoregressivo di ordine  $n_a = 1$

$$y(t) = ay(t-1) + \xi(t) \quad (6.1)$$

è univocamente determinato da due entità:

1. il valore del parametro  $a$  del modello
2. la dinamica dell'errore di modello  $\xi$  (media, varianza e, più in generale, le sue proprietà statistiche).

Quando un modello cessa di essere una rappresentazione fedele della realtà, ad esempio per via di un guasto che ha mutato l'impianto e dunque le misure su di esso raccolte, ci si aspetta che una almeno delle entità ora richiamate, se non entrambe, venga meno all'andamento nominale registrato nella fase in cui la rappresentazione matematica e la realtà erano conformi.

In sezione 6.2.1 si riflette sul particolare significato che ha una variazione nel parametro  $a$  nel processo AR(1) (6.1) mentre nella sezione 6.2.2 sono discusse le caratteristiche statistiche dell'errore di modello.

---

<sup>1</sup>Naturalmente tale diagnosi parametrica sarà lontana dal possedere un significato fisico per i parametri.



### 6.2.1 Guasti e variazioni parametriche

Nel caso in cui nel modello (6.1)  $a$  assuma valori vicini all'unità, l'evoluzione libera dell'uscita  $y$  è pressoché costante e tutto il carattere dinamico è ereditato dal termine incerto  $\xi$ . Qualora quest'ultimo sia di lieve entità, la dinamica si sviluppa in un intorno della condizione iniziale.

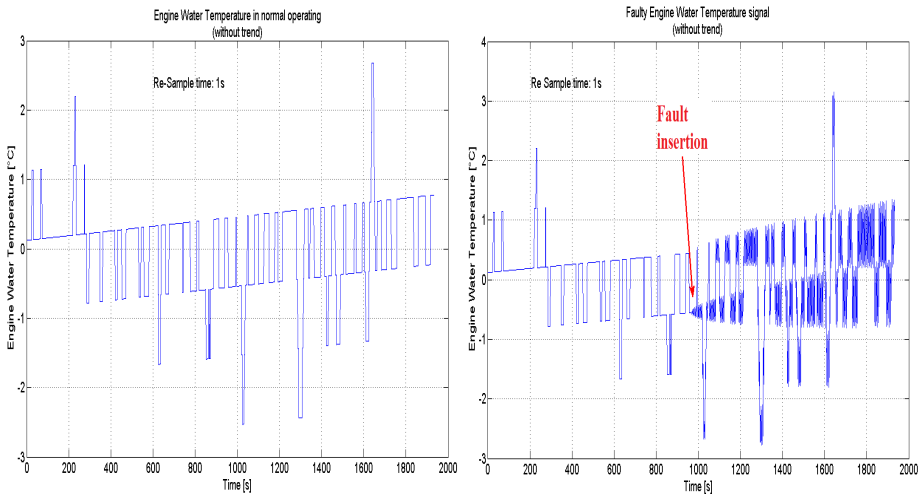
Quando invece il valore parametrico è ridotto, vicino allo zero, il processo perde la memoria sulla condizione iniziale (la parte libera si esaurisce velocemente) e l'uscita ricalca, a regime, l'andamento del termine erratico  $\xi(t)$ . Supponendo  $\xi$  rumore bianco di varianza limitata, nei due casi  $a \rightarrow 1$  e  $a \rightarrow 0$  il contenuto spettrale dell'uscita sarà completamente diverso. Per un parametro approssimabile ad 1 lo spettro del segnale  $y$  risulta avere supporto solo alle basse frequenze mentre nel secondo caso si registra uno spettro continuo, «denso», com'è appunto quello di un segnale bianco.

Si può allora affermare che il valore di un parametro in un processo, oltre che caratterizzarne la stabilità, ha forte influenza sul contenuto spettrale del segnale e quindi sulla sua dinamica: a valori unitari di  $a$  corrispondono dinamiche lente mentre a valori vicini allo zero sono associate variazioni brusche.

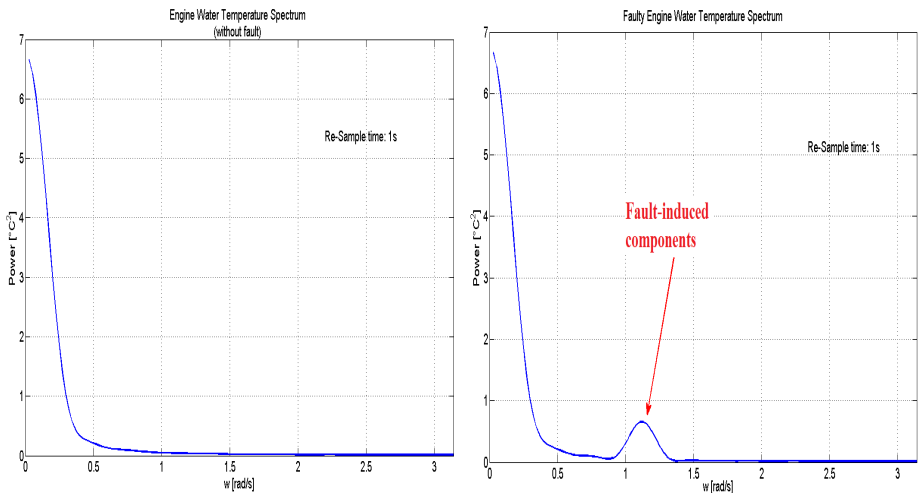
Benché la natura e ancor più gli effetti di un guasto siano di difficile catalogazione, non è sbagliato immaginare il loro fisico manifestarsi come un cambiamento nel contenuto spettrale del segnale e dunque come una variazione parametrica nel modello AR che lo rappresenta.

In figura 6.1a viene proposto un andamento caratteristico del segnale di temperatura del liquido refrigerante del motore; in figura 6.1b l'analogo andamento è riportato nel caso di inserzione di un guasto artificiale a metà sessione. Corrispondentemente le figure 6.1c e 6.1d mostrano come l'insorgere della particolare anomalia muti la densità spettrale di potenza del segnale. Questo esempio sarà ripreso in seguito all'introduzione del metodo dei minimi quadrati ricorsivi per evidenziare come cambi l'andamento del parametro del modello in seguito al guasto che ha mutato lo spettro. Per il momento è sufficiente associare la possibile insorgenza di un guasto ad un cambiamento nel contenuto spettrale del segnale; conseguenza di quest'ultimo evento è, come detto, la modifica dei parametri che spiegano l'evoluzione del segnale tramite un modello alle differenze.

## 6 Diagnostica autoadattativa del sistema di raffreddamento



- (a) Temperatura del liquido refrigerante durante un normale funzionamento. (b) Temperatura del liquido refrigerante in presenza di un guasto aleatorio armonico di ampiezza tempo-variante, agente dal tempo  $t = 966$  s.



- (c) Densità spettrale del segnale di temperatura in normale funzionamento. (d) Densità spettrale del segnale di temperatura in presenza del guasto.

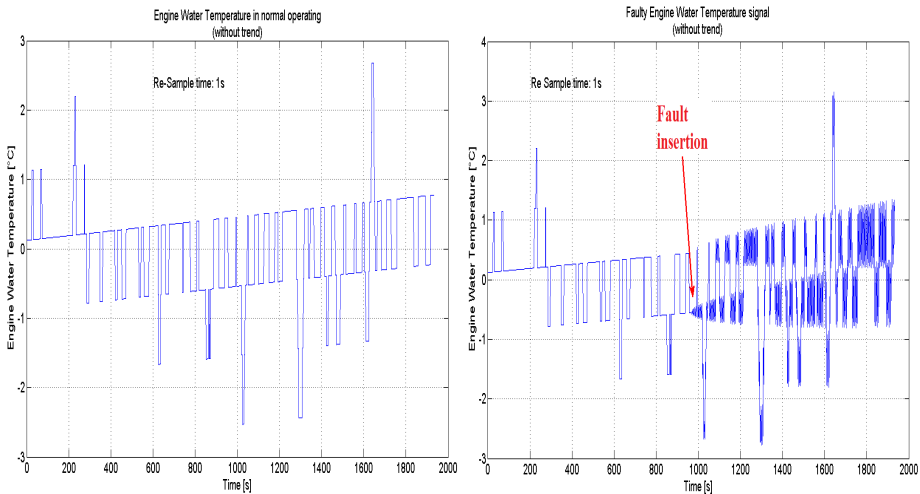
Figura 6.1: Normale funzionamento e guasto: andamenti dei segnali nel tempo e relative densità spettrali.

### 6.2.2 Guasti e perdita di bianchezza

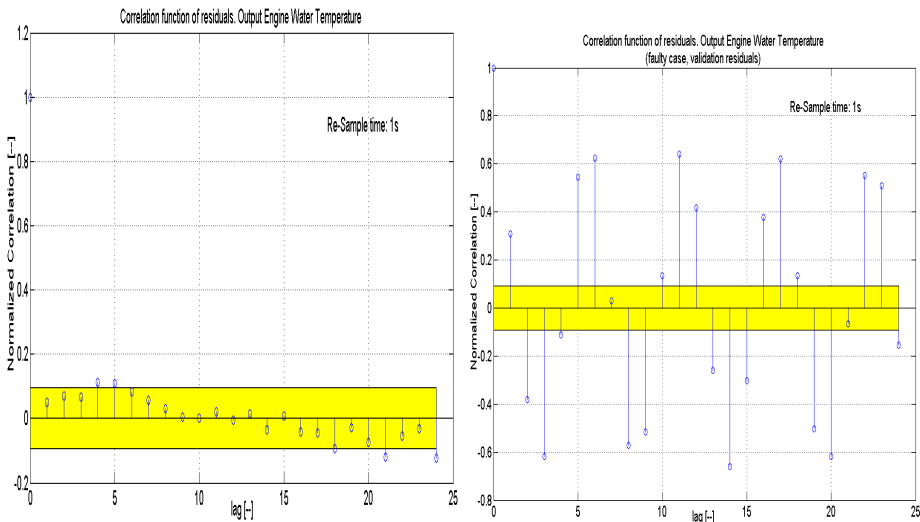
Oltre al parametro del modello autoregressivo, ai fini diagnostici può essere utile considerare come sintomatica la distribuzione di probabilità del residuo sfruttando dei test di bianchezza allo scopo di rilevare l'insorgere di differenze tra modello e dati reali. L'idea è che quando un'anomalia vada ad interessare l'impianto di raffreddamento, il modello non riesca più a simulare correttamente la temperatura del liquido misurata e nasca una qualche «regolarità» nella dinamica del residuo con conseguente perdita di bianchezza. Tale «regolarità comportamentale» può manifestarsi in varie forme, ad esempio in lunghi intervalli temporali nei quali l'errore  $\varepsilon$  si trova ad assumere valori di segno costante (è il caso di guasti che comportano lente derive, da cui l'insorgere di un errore sistematico), oppure in situazioni, causate tipicamente da anomalie «intermittenti», nelle quali il residuo è forzato a variare periodicamente ampiezza e segno.

La figura 6.2d mostra come la bianchezza residuale del modello AR(1) venga completamente perduta nel corso di un guasto artificiale indotto sulla temperatura di raffreddamento (il caso di normale funzionamento è riportato in figura 6.2c; l'andamento nel tempo della temperatura, senza e con il guasto, è riproposto nelle figure 6.2a e 6.2b).

## 6 Diagnostica autoadattativa del sistema di raffreddamento



(a) Temperatura del liquido refrigerante durante un normale funzionamento. (b) Temperatura del liquido refrigerante in presenza di un guasto aleatorio armonico di ampiezza tempo-variante, agente dal tempo  $t = 966$  s.



(c) Bianchezza dei residui del modello AR(1) nel corso di un normale funzionamento. (d) Perdita di bianchezza del modello AR(1) nel caso di validazione su dati guasti.

Figura 6.2: Confronto di bianchezza per i casi di normale funzionamento e di guasto alla temperatura dell'acqua.

Come appare chiaro dall'applicazione del guasto artificiale, un check di bianchezza può aiutare a cogliere l'anomalia nel segnale; una seconda possibile scelta diagnostica, da affiancare alla diagnosi parametrica, è allora quella di considerare l'implementazione on-line di un test di bianchezza da eseguire sui residui.

A tal proposito vengono ora introdotti sia alcuni dei metodi più utilizzati in letteratura al fine di stimare on-line i parametri di un modello che dei metodi per testare la bianchezza di una sequenza di dati  $\{\varepsilon(t)\}_{t=1,\dots,N}$  disponibile in seguito a delle misure<sup>2</sup>.

## 6.3 Identificazione on-line dei parametri di un modello

### 6.3.1 Minimi quadrati ricorsivi

Nell'idea della diagnosi parametrica è indispensabile un algoritmo ricorsivo che consenta di identificare il modello dell'impianto a partire da misure raccolte in linea per poi confrontarlo con i parametri nominali. Lo studio di queste procedure ricorsive è oggetto dell'*identificazione adattativa*[16].

Negli studi preliminari per l'identificazione di un modello a scatola nera condotti nelle sezioni 5.4 e 5.6, la determinazione dei parametri veniva fatta off-line tramite il metodo dei minimi quadrati.

Per l'identificazione on-line è invece necessaria una versione iterativa dei minimi quadrati per la quale, anziché l'usuale loss function, venga minimizzata la quantità

$$J = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \varepsilon(i)^2 = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (y(i) - \hat{y}(i|i-1))^2 \quad (6.2)$$

con  $t$  ad indicare l'istante temporale corrente. L'espressione base dei minimi quadrati per modelli AR di ordine generico  $n_a$  (formula (5.16)) diventa così nel caso ricorsivo

$$\theta_t = S(t)^{-1} \sum_{i=1}^t \varphi(i) y(i) \quad (6.3)$$

---

<sup>2</sup>Ad un generico tempo  $t$  dal sensore di uscita si legge la misura  $y(t)$ . Questa è confrontata con la predizione del modello AR(1)

$$\hat{y}(t|t-1) = ay(t-1)$$

eseguita sulla base della misura precedente. In questo modo viene formato il residuo  $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1)$ .

## 6 Diagnostica autoadattativa del sistema di raffreddamento

dove la matrice

$$S(t) = \sum_{i=1}^t \varphi(i) \varphi(i)^T$$

sostituisce  $S_N$ ;  $\varphi(i)$  è il vettore delle misure passate, con riferimento all'istante  $i$

$$\varphi(i) = \begin{bmatrix} y(i-1) \\ y(i-2) \\ \vdots \\ y(i-n_a) \end{bmatrix}$$

mentre

$$\theta_t = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n_a} \end{pmatrix}$$

è il vettore dei parametri da identificare nel modello.

Benché (6.3) sia già un'espressione adattativa, la sua implementazione richiede la memorizzazione di una crescente quantità di misure e l'inversione di una matrice di dimensione pari al numero di parametri da identificare<sup>3</sup>. È necessario ricavarne una forma adatta ad una realizzazione algoritmica.

Peraltro, sussistendo l'identità

$$\sum_{i=1}^t \varphi(i) y(i) = \sum_{i=1}^{t-1} \varphi(i) y(i) + \varphi(t) y(t)$$

e riscrivendo la (6.3) al tempo  $t-1$

$$\sum_{i=1}^{t-1} \varphi(i) y(i) = S(t-1) \theta_{t-1},$$

si trova per sostituzione

$$\sum_{i=1}^t \varphi(i) y(i) = S(t-1) \theta_{t-1} + \varphi(t) y(t). \quad (6.4)$$

Siccome vale

$$S(t) = S(t-1) + \varphi(t) \varphi(t)^T$$

---

<sup>3</sup>Questo fatto non rappresenta un problema per modelli di basse dimensioni, come l'AR(1) trattato nella tesi; resta tuttavia il problema dell'aggiornamento del parametro, il quale richiederebbe una quantità crescente di memoria.

### 6.3 Identificazione on-line dei parametri di un modello

la (6.4) è riscrivibile come

$$\sum_{i=1}^t \varphi(i) y(i) = \left[ S(t) - \varphi(t) \varphi(t)^T \right] \theta_{t-1} + \varphi(t) y(t)$$

che sostituita nell'eq. (6.3) porge la ricorsione

$$\theta_t = \theta_{t-1} + K(t) \varepsilon(t)$$

$$K(t) = S(t)^{-1} \varphi(t)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi(t)^T \theta_{t-1}$$

$$S(t) = S(t-1) + \varphi(t) \varphi(t)^T .$$

Quanto ottenuto è più vicino ad una forma implementabile senza il ricorso ad una quantità crescente di memoria. Rimane però la questione relativa all'inversione della matrice  $S(t)$  ad ogni istante temporale. Ricordando il lemma dell'inversione di matrice<sup>4</sup>, vale

$$S(t)^{-1} = S(t-1)^{-1} + S(t-1)^{-1} \varphi(t) \left[ 1 + \varphi(t)^T S(t-1)^{-1} \varphi(t) \right]^{-1} \varphi(t)^T S(t-1)^{-1}$$

e posto  $V(t) = S(t)^{-1}$  la precedente ricorsione è riscrivibile nella forma

$$\theta_t = \theta_{t-1} + K(t) \varepsilon(t) \tag{6.5}$$

$$K(t) = V(t) \varphi(t)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi(t)^T \theta_{t-1}$$

$$V(t) = V(t-1) - \beta_{t-1}^{-1} V(t-1) \varphi(t) \varphi(t)^T V(t-1)$$

$$\beta_{t-1} = 1 + \varphi(t)^T V(t-1) \varphi(t)$$

in cui non compare più l'inversione di una matrice ma solo di uno scalare<sup>5</sup>. Come in ogni espressione ricorsiva è richiesta un'inizializzazione: le grandezze da inizializzare sono il vettore dei parametri e la matrice  $V$ .

<sup>4</sup>Date le matrici  $F, G, H, K$  con  $F, H, F + GHK$  invertibili, vale  $(F + GHK)^{-1} = F - F^{-1}G(H^{-1} + KF^{-1}G)^{-1}KF^{-1}$ . Nel caso in esame si prendano  $F = S(t-1)$ ,  $G = \varphi(t)$ ,  $H = 1$ ,  $K = \varphi(t)^T$ .

<sup>5</sup>Questo sono le equazioni ricorsive utilizzate dal software Matlab-Simulink per l'identificazione adattativa di modelli autoregressivi di ordine qualsiasi.

L'algoritmo vale anche per modelli ARX, avendo la cura di allargare il vettore  $\varphi$  per comprendere le misure degli ingressi.

## 6 Diagnostica autoadattativa del sistema di raffreddamento

Quando non vi sia conoscenza a priori è costume adottare l'inizializzazione convenzionale

$$\begin{cases} V(0) = \alpha I \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$$

con  $\alpha > 0$ . Un valore elevato per  $\alpha$  equivale ad assumere molto incerta l'inizializzazione del parametro; la stima si allontanerà rapidamente dal valore iniziale. Viceversa un valore  $\alpha$  prossimo allo zero equivale ad una dichiarazione di scarsa incertezza sul parametro<sup>6</sup>: la stima sarà dunque molto influenzata dalla condizione iniziale. In qualunque caso ci si aspetta il convergere del parametro ricorsivo al valore parametrico identificabile con un approccio off-line sulle medesime misure. La figura 6.3 mostra l'andamento del parametro  $a$  del modello AR(1) identificato ricorsivamente (curva blu) sul sistema di raffreddamento contro il suo valore costante stimato off-line (linea rossa). Si fa riferimento alla sessione autunnale di utilizzo dell'auto; l'inizializzazione dell'algoritmo adattativo è stata fatta con  $\alpha = 1$  e  $\theta_0 = 0$ .

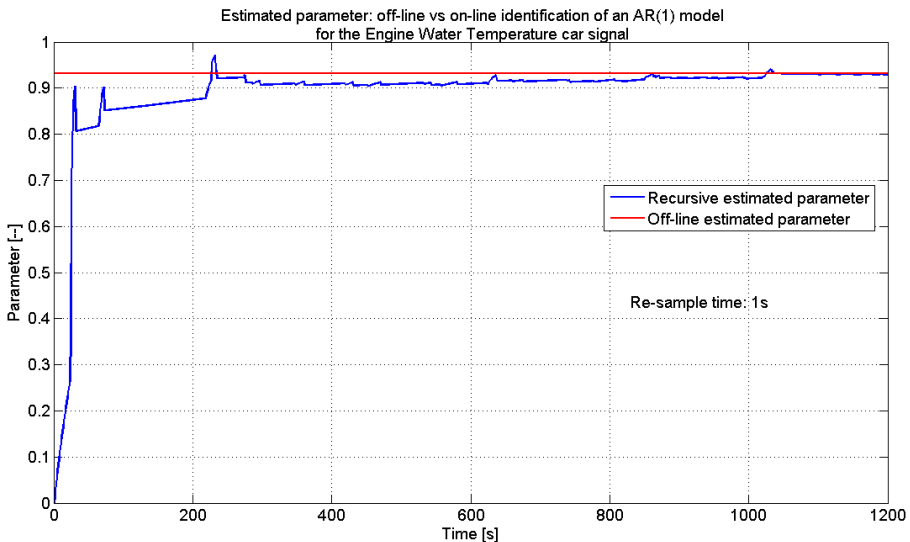


Figura 6.3: Identificazioni off-line e on-line del modello AR(1) per la temperatura del refrigerante nel motore; la stima on-line è inizializzata a  $\theta_0 = 0$  e ad  $\alpha = 1$ .

<sup>6</sup>Si dimostra che la matrice  $V(t)$  è proporzionale alla matrice varianza del vettore parametrico  $\theta_t$



### 6.3.2 Minimi quadrati ricorsivi con fattore di oblio

Ci si chiede quanto un'identificazione svolta con il metodo ricorsivo esaminato nella sezione precedente sia in grado di evidenziare un guasto all'impianto il cui effetto è la modifica dei valori parametrici nel modello. Questo problema è riconducibile alla questione dell'inseguimento di parametri tempo-varianti ed è cruciale ogni qualvolta sia necessario sviluppare il controllo di un impianto soggetto a variare le proprie caratteristiche nel tempo o a seconda delle condizioni operative[16].

Riprendendo l'espressione adattativa dei minimi quadrati per modelli AR si nota come il «guadagno» della ricorsione

$$K(t) = S(t)^{-1} \varphi(t) = V(t) \varphi(t)$$

tenda alla matrice nulla con l'avanzare del tempo a causa della natura monotona non decrescente della matrice  $S(t)$  :

$$S(t) = S(t-1) + \varphi(t) \varphi(t)^T .$$

Questo comportamento rende l'aggiornamento del parametro insensibile a lungo andare alle nuove misure (si veda l'eq.6.5); difficilmente pertanto una variazione del processo che si manifesta dopo una lunga storia di funzionamento può essere colta dall'andamento parametrico, poco reattivo ai nuovi dati.

Una soluzione consiste nel modificare la loss function introducendo un fattore moltiplicativo che dia maggior peso alle misure recenti: in luogo della (6.2) si definisce

$$J = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \mu^{t-i} \varepsilon(i)^2$$

dove  $\mu \in (0, 1)$  è detto *fattore di oblio*<sup>7</sup> (in inglese forgetting factor). Così facendo il valore della cifra di merito  $J$  è maggiormente influenzato dagli ultimi dati: il campione di residuo al tempo corrente  $t$  avrà peso  $\mu$ , quello al tempo  $t-1$   $\mu^2 < \mu$  ecc.

Il numero di campioni pesati in maniera non trascurabile nel computo di  $J$  è pari alla costante di tempo dell'esponenziale  $\mu^{t-i}$ , cioè a  $1/(1-\mu)$ . Calcoli analoghi a quelli della sezione 6.3.1 per la minimizzazione ricorsiva della nuova loss function, portano alla forma ricorsiva

$$\theta_t = \theta_{t-1} + K(t) \varepsilon(t)$$

$$K(t) = V(t) \varphi(t)$$

<sup>7</sup>Nel caso  $\mu = 1$  si ricade nella vecchia definizione di loss function, e dunque nell'usuale algoritmo ricorsivo dei minimi quadrati

## 6 Diagnostica autoadattativa del sistema di raffreddamento

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi(t)^T \theta_{t-1}$$

$$V(t) = \frac{V(t-1)}{\mu} - \beta_{t-1}^{-1} V(t-1) \varphi(t) \varphi(t)^T V(t-1)$$

$$\beta_{t-1} = \mu + \varphi(t)^T V(t-1) \varphi(t)$$

dove al solito  $V(t) = S(t)^{-1}$ ; l'aggiornamento della matrice  $S$  è modificato in:

$$S(t) = \mu S(t-1) + \varphi(t) \varphi(t)^T. \quad (6.6)$$

Con l'introduzione del fattore di oblio la matrice  $S$  non risulta più divergere<sup>8</sup>; conseguentemente il guadagno  $K(t)$  si mantiene diverso dalla matrice nulla anche per  $t \rightarrow \infty$  ed una rinnovata reattività ai dati è assicurata nell'aggiornamento dei parametri.

L'algoritmo con oblio è pertanto una possibile soluzione al problema della diagnostica parametrica. L'arbitrarietà di  $\mu$  va però studiata attentamente nel design: se da un lato valori bassi consentono un più rapido inseguimento delle caratteristiche dell'impianto, dall'altro causano l'aumento della varianza delle stime visto il basso numero di dati pesati nell'identificazione.

In figura 6.4b viene proposto l'andamento del parametro  $a$  del modello AR(1) nel caso di un guasto artificialmente immesso nel segnale di temperatura dell'acqua (figura 6.4a). Diversi fattori di oblio sono confrontati: da osservare come per valori di  $\mu$  inferiori il parametro recursivo stimato sia più distanziato dal valore nominale di buon funzionamento, cogliendo maggiormente l'azione del guasto. Al contempo le stime presentano però pronunciate oscillazioni<sup>9</sup>.

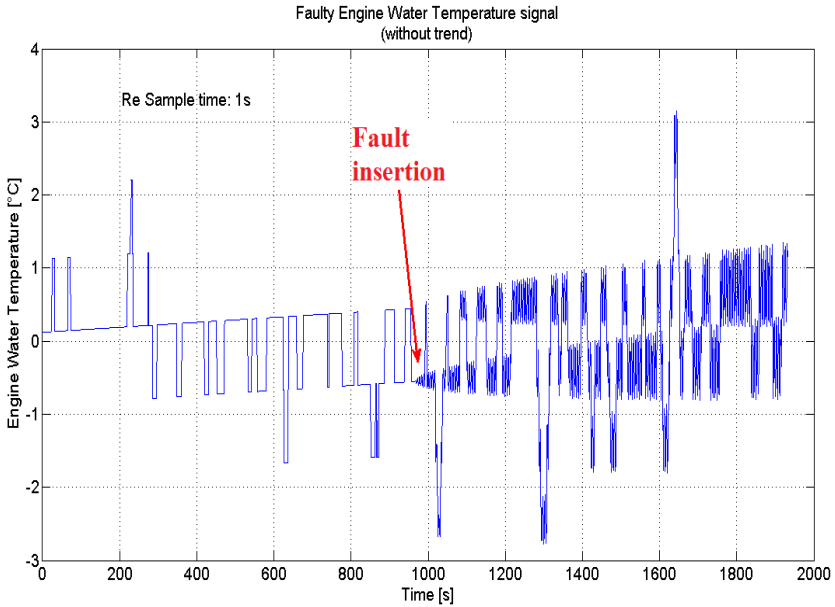
La figura 6.4 conferma così come l'azione di un guasto possa manifestarsi in una deviazione del parametro ricorsivo dall'andamento nominale, come era stato anticipato in sottosezione 6.2.1 discutendo il contenuto spettrale del segnale prima e dopo di un guasto.

---

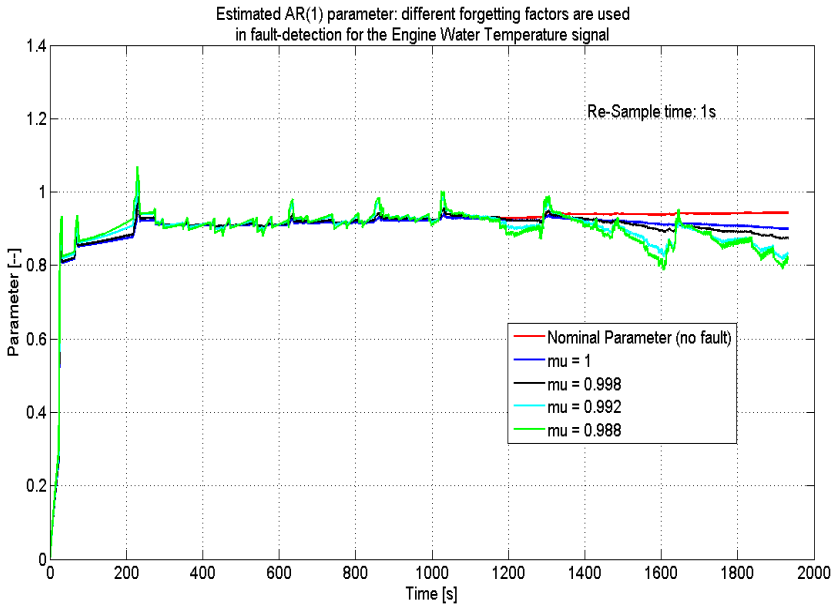
<sup>8</sup>L'evoluzione libera della soluzione dell'eq. (6.6) tende infatti a zero per  $\mu < 1$

<sup>9</sup>Un tale andamento oscillatorio può portare alla segnalazione di anomalie quando in realtà non ce ne siano.

### 6.3 Identificazione on-line dei parametri di un modello



- (a) Temperatura del liquido di raffreddamento, privata della media: un guasto armonico aleatorio di ampiezza tempo-variante è sovrapposto al segnale a partire dal tempo  $t_{FAULT} = 966$  s.



- (b) Parametro nominale (stimato ricorsivamente durante il buon funzionamento, curva rossa) e parametri stimati con algoritmo di oblio sul segnale guasto; in blu l'esito del metodo privo di oblio ( $\mu = 1$ ).

Figura 6.4: Guasto artificiale e prestazioni dell'identificazione adattativa per diversi fattori di oblio.

## 6.4 Test di bianchezza del residuo di modello

Nell'idea della diagnosi di bianchezza è indispensabile un algoritmo (da eseguire on-line) che consenta il calcolo del grado di bianchezza del residuo di modello, allarmando quando quest'ultimo venga a degradare. Tra i numerosi test di bianchezza presenti in letteratura, questo capitolo ne presenterà i più indicati ad un'implementazione on-line.

### 6.4.1 Test dei cambi di segno

Si supponga di voler dimostrare la bianchezza di una sequenza  $\{\varepsilon(t)\}_{t=1, \dots, N}$ .

Qualora la successione sia davvero rappresentativa di un rumore bianco ci si attende che i suoi campioni cambino di segno *in media* una volta ogni due<sup>10</sup> e che le probabilità

$$P(\varepsilon(t) < 0), P(\varepsilon(t) > 0)$$

siano uguali e pari a  $\frac{1}{2}$ .

Posto

$$s_t = \begin{cases} 1 & \text{se } \varepsilon(t) \varepsilon(t+1) \leq 0 \\ 0 & \text{se } \varepsilon(t) \varepsilon(t+1) > 0, \end{cases}$$

sotto ipotesi di bianchezza si dimostra che il *numero di cambi di segno* presente negli  $N$  campioni di  $\varepsilon$ , calcolabile come:

$$c_N = \sum_{t=1}^{N-1} s_t$$

è, per  $N \rightarrow \infty$ , una variabile aleatoria<sup>11</sup> gaussiana di media  $\frac{N}{2}$  e varianza  $\frac{N}{4}$ ; in simboli

$$c_N \sim AsG\left(\frac{N}{2}, \frac{N}{4}\right).$$

Segue facilmente che la variabile aleatoria

$$z_N = \frac{c_N - \frac{N}{2}}{\frac{\sqrt{N}}{2}}$$

è asintoticamente distribuita come una gaussiana standard; in simboli  $z_N \sim AsG(0, 1)$ .

<sup>10</sup>Si ponga l'accento sulla locuzione «in media» la quale vuole intendere sia un'assenza di costanza nel segno che la mancanza di regolarità nella sua variazione.

<sup>11</sup>L'aleatorietà di  $c_N$  è ereditata da  $\varepsilon$

## 6.4 Test di bianchezza del residuo di modello

Si può implementare il test di bianchezza del residuo fissando un livello di confidenza  $\alpha$  (es.  $\alpha = 0.05 = 5\%$ ) e cercando sulle tabelle della gaussiana standard il valore  $z_\alpha$  per cui

$$P(|z_N| > z_\alpha) = \alpha.$$

Una volta ricavata la quantità  $z_\alpha$  si accetta l'ipotesi di bianchezza per  $\varepsilon$  se

$$z_N = \frac{c_N - \frac{N}{2}}{\frac{\sqrt{N}}{2}} \leq z_\alpha$$

e la si rifiuta altrimenti.

Il test appena introdotto, per quanto semplice e facilmente implementabile on-line, non risulta affidabile: la sua risposta si basa su un'analisi del numero di variazioni di segno della sequenza; il concetto di bianchezza viene ridotto ad un test di segni che non sempre fornisce risposte corrette relativamente l'incorrelazione tra campioni. In particolare si dimostra che il test tende a dichiarare bianchezza anche in casi in cui essa è in verità assente.

### 6.4.2 Test di Anderson

Il test di bianchezza più usato<sup>12</sup> è quello di Anderson[16]. Esso opera dallo studio della correlazione della sequenza di dati  $\{\varepsilon(t)\}_{t=1, \dots, N}$ .

Supposto di avere un numero sufficientemente alto di campioni, il test richiede il calcolo di alcuni valori della correlazione campionaria:

$$\hat{\gamma}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} \varepsilon(t) \varepsilon(t+\tau) \quad \tau \in \{1, 2, 3, \dots\}, \quad (6.7)$$

stima della covarianza vera<sup>13</sup>, ossia del grado di dipendenza, tra  $\varepsilon(t)$  e  $\varepsilon(t+\tau)$ . Il test computa anche una stima della varianza

$$\hat{\gamma}(0) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t)^2$$

---

<sup>12</sup>Il software Matlab implementa un test di Anderson nella funzione «resid» che produce il grafico della correlazione normalizzata.

<sup>13</sup>Nel linguaggio comune i termini «correlazione» e «covarianza» sono spesso usati come sinonimi. In realtà mentre la covarianza è da intendersi come una definizione generale, valida per segnali di media qualsiasi, la correlazione ne rappresenta un sottocaso: il caso di covarianza calcolata per una sequenza avente media nulla. Dato che il residuo  $\varepsilon$  di un accurato modello è necessariamente un segnale a media nulla, per esso vale l'uso indistinto del termine covarianza o correlazione nell'indicare la quantità  $\gamma(\tau) \triangleq E[\varepsilon(t)\varepsilon(t+\tau)]$

## 6 Diagnostica autoadattativa del sistema di raffreddamento

utile per definire la *funzione di covarianza campionaria normalizzata*

$$\hat{\rho}(\tau) = \frac{\hat{\gamma}(\tau)}{\hat{\gamma}(0)} \quad \tau \in \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (6.8)$$

Per questa funzione vale il prossimo teorema:

**Teorema 1.** *Sotto ipotesi di bianchezza della sequenza  $\{\varepsilon(t)\}_{t=1, \dots, N}$ , la funzione di covarianza campionaria normalizzata 6.8 è asintoticamente ( $N \rightarrow \infty$ ) distribuita come una variabile aleatoria Gaussiana di media nulla e varianza  $1/N$ . Ciò comporta, per la variabile normalizzata  $\sqrt{N}\hat{\rho}(\tau)$ , una distribuzione asintotica normale standard:*

$$\sqrt{N}\hat{\rho}(\tau) \sim \text{AsG}(0, 1).$$

Inoltre  $\hat{\rho}(i)$  e  $\hat{\rho}(j)$  sono incorrelati per  $i \neq j$ .

Il teorema suggerisce il modo per l'implementazione del test: si fissa un livello di confidenza  $\alpha$  (es. 0.05) e dalla tabella della Gaussiana standard si determina il valore di  $\beta$  per il quale le code della gaussiana esterne all'intervallo  $[-\beta, \beta]$  sottendono un'area  $\alpha$  (figura 6.5; nel caso  $\alpha = 0.05$  risulta  $\beta = 1.96$ ).

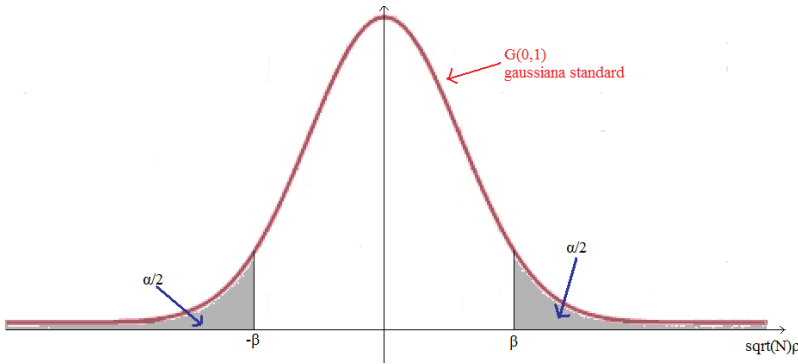


Figura 6.5: Gaussiana standard per il test di Anderson

Si computa poi la  $\hat{\rho}(\tau)$  per un certo numero  $n$  di lag ( $\tau = 1, 2, \dots, n$ ) contando quante realizzazioni di  $\sqrt{N}\hat{\rho}(\tau)$  cadono fuori da  $[-\beta, \beta]$ . Se tale numero è inferiore al livello di confidenza percentuale (5% di  $n$  in questo caso), l'ipotesi di bianchezza viene accettata, altrimenti rifiutata.

Il test di Anderson, come già quello dei segni, ben si presta ad un'implementazione on-line. Un'idea in tal senso potrebbe essere quella di eseguirlo su delle «finestre» di campioni raccolti, fissando il numero di dati  $N$  (lunghezza della finestra) ed il numero di realizzazioni  $n$  della covarianza campionaria da computare all'interno di ciascuna finestra. Al termine di ogni

finestratura il test presenta il suo responso booleano; sarebbe così garantito un continuo monitoraggio della bianchezza del modello e quindi dello stato dell'impianto. L'ampiezza  $N$  delle finestre andrebbe però ponderata con cura: non troppo grande per non avere un apparato diagnostico lento ma neppure breve, pena la non sussistenza del teorema 1 (che parte da ipotesi di *asintoticità*).

### 6.4.3 Test del correlogramma

Un terzo test statistico di bianchezza è quello introdotto in campo economico da G.M. Ljung e da G.E.P. Box e noto come «test del correlogramma»[20].

Esso venne esteso all'ambito ingegneristico, con particolare attenzione alla diagnostica, dai contributi di Mehra e Peschon[10], Willsky, Deyst e Crawford[21].

L'impostazione è analoga ai precedenti: si tratta di un test d'ipotesi derivato da un teorema asintotico che detta la distribuzione di una opportuna variabile aleatoria costruibile dai dati disponibili.

Nel dettaglio sia  $\{\varepsilon(t)\}_{t=1, \dots, N}$  la sequenza di campioni di cui si vuole valutare la bianchezza; da questa si costruisca la quantità *vettoriale*

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{N} \sum_{t=m+1}^N \varepsilon(t) \begin{pmatrix} \varepsilon(t-1) \\ \varepsilon(t-2) \\ \vdots \\ \varepsilon(t-m) \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

le cui  $m$  componenti sono le correlazioni campionarie del residuo a  $1, 2, \dots, m$  passi di ritardo, e la varianza campionaria

$$\hat{\gamma}(0) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t)^2. \quad (6.10)$$

Affinché la quantità (6.9) sia una buona approssimazione della correlazione vettoriale vera si richiede che  $N$  sia sufficientemente maggiore del lag massimo  $m$  fissato; solitamente si fissa almeno  $N = 20m$ . Per quanto riguarda il valore da attribuire a  $m$  si è provato che fissandolo nell'intervallo  $[5, 10]$  si perviene ad un grado di conoscenza della correlazione sufficiente a studiarne le caratteristiche di bianchezza.

Da (6.9) e (6.10) si definisca il vettore di covarianza campionaria normalizzata

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\gamma}(0)}.$$

Quando la successione  $\{\varepsilon\}$  ha caratteristiche di bianchezza è logico attendersi per le  $m$  componenti di  $\hat{\gamma}$  e  $\hat{\rho}$  dei valori tendenti allo zero vista

l'assente o comunque scarsa correlazione tra i campioni. Per lo stesso motivo la grandezza scalare  $\hat{\rho}^T \hat{\rho}$  deve assumere valori molto bassi, tanto più quanto  $N$  è crescente: ciò comporta che la quantità scalare

$$N \hat{\rho}^T \hat{\rho} \tag{6.11}$$

debba essere un valore *limitato*. A tal proposito vale il seguente

**Teorema 2.** *Sotto ipotesi di bianchezza della successione di campioni  $\{\varepsilon(t)\}$ , la variabile aleatoria definita in (6.12) risulta asintoticamente distribuita come una variabile  $\chi^2(m)$  («variabile chi quadro ad  $m$  gradi di libertà»); in simboli*

$$N \hat{\rho}^T \hat{\rho} \sim As \chi^2(m).$$

La variabile «chi-quadro» è tabulata in letteratura e l'implementazione del test del correlogramma si riduce, come nel test di Anderson, allo scegliere un livello di significatività  $\alpha$ , ad esempio 95%, e nel cercare dalla tabella di  $\chi^2(m)$  il valore  $z_\alpha$  per cui

$$P(N \hat{\rho}^T \hat{\rho} < z_\alpha) = \alpha.$$

La regola di decisione è così definita: se  $N \hat{\rho}^T \hat{\rho} < z_\alpha$  si accetta l'ipotesi di bianchezza, altrimenti la si respinge.

Per l'implementazione ricorsiva di questa regola si può procedere in questo modo: dopo avere fissato  $m$  e noto che sia un sufficiente numero di campioni passati (di modo che la quantità (6.9) possa essere calcolata senza ambiguità), si costruisca ricorsivamente lo scalare  $N \hat{\rho}^T \hat{\rho}$  ( $N$  è in tal caso un contatore da incrementare all'arrivo di un nuovo campione di  $\varepsilon$ ) e se ne monitori la limitatezza relativamente al livello  $z_\alpha$ .

Per una breve descrizione della variabile  $\chi^2$  si rimanda all'appendice (sezione 10.2).

Una versione modificata del test del correlogramma è stata realizzata in questa tesi. Le scelte ed i dettagli implementativi verranno descritti in sezione 7.3.

## 6.5 Diagnostica in linea ed autoadattatività

La maggior parte degli apparati diagnostici è pensata per lavorare on-line, raccogliendo informazioni dall'impianto e fornendo continuamente indicazioni relative al suo funzionamento. Affinché una valutazione dello stato di salute del sistema sia possibile, l'apparato diagnostico deve conoscere quello che è il normale funzionamento dell'impianto (funzionamento *norminale*); confrontando il comportamento attuale con quello atteso sarebbe poi in grado di fornire informazioni sullo stato del processo.



Un adeguato sistema per il rilevamento di guasti deve comporsi allora di due entità: una adibita all'aggiornamento continuo del comportamento del modello dell'impianto in virtù delle misure raccolte on-line ed una dotata di memoria su quelle che sono le caratteristiche nominali, o di buon funzionamento, del processo. Vi sono fundamentalmente due strategie per creare questa memoria: una di carattere statico ed una di impronta *adattativa*[16].

### 6.5.1 Strategia a memoria statica

L'approccio più semplice alla diagnostica on-line è osservare il funzionamento del processo per un certo intervallo di tempo supposto di normale funzionamento e identificare i parametri di un accurato modello matematico (parametri nominali). Questa fase può essere condotta off-line, da cui il nome di strategia a memoria statica. L'implementazione della diagnosi consiste nell'identificare nuovamente i parametri del modello matematico, stavolta on-line, confrontandoli con quelli nominali valutati, una volta per tutte, off-line.

Tale strategia è poco generale; porta infatti ad apparati diagnostici costruiti su misura per l'impianto in questione, difficilmente generalizzabili ad altri prototipi del medesimo processo per i quali si renderebbe necessaria una nuova, apposita, fase off-line per la determinazione dei nuovi parametri nominali<sup>14</sup>.

### 6.5.2 Strategia a memoria autoadattativa

Una differente strategia, detta a memoria *autoadattativa*, è stata presa in considerazione nella tesi. In essa la parte nominale non è memorizzata una volta per tutte: l'apparato diagnostico è pensato per imparare dalle misure raccolte on-line<sup>15</sup>, provvedendo alla costruzione della propria conoscenza nominale del fenomeno fisico. In tale maniera il modello nominale è formato in linea senza la necessità di fissare a priori valori puntuali del parametro di buon funzionamento. Questo non significa che l'analisi di tipo off-line fatta nel capitolo 5 sia ridondante; è stata invece utile, come più volte rimarcato, nell'individuare la classe e l'ordine del modello con cui descrivere l'impianto di raffreddamento (AR(1)).

---

<sup>14</sup>Impianti di raffreddamento di veicoli differenti possiedono caratteristiche diverse e spesso ciò si manifesta in valori distinti per il parametro  $a$  del modello AR(1). Inoltre uno stesso veicolo nel tempo può, non necessariamente a causa di guasti (ad esempio naturale e lento invecchiamento), vedere variare gradualmente le sue caratteristiche nel tempo (parametro lentamente tempo variante); sarebbe pertanto impossibile fissare a priori un valore unico di parametro di «buon funzionamento». Si veda a tal proposito anche la sottosezione 5.6.2.2.

<sup>15</sup>Dall'attitudine all'apprendimento on-line deriva il termine «adattativo» o «autoadattativo» .

## 6 Diagnostica autoadattativa del sistema di raffreddamento

Il carattere innovativo della strategia adattativa sta nell'identificare direttamente on-line il valore nominale del parametro: in questo modo l'unica informazione a priori necessaria alla diagnostica è la natura della rappresentazione (AR) ed il relativo ordine (1), di validità comunque generale per un ampio spettro di autoveicoli (si veda la sottosezione 5.6.1.6).

È peraltro chiaro il rischio di un simile approccio: senza i dovuti accorgimenti la conoscenza nominale viene aggiornata anche in presenza di malfunzionamenti rendendo impossibile la rilevazione di guasti.

Nella tesi si è accettato questo rischio e si è così intrapresa la strategia a memoria adattativa, progettata tramite seguenti passi:

1. raccolta on-line delle misure della temperatura di raffreddamento
2. stima ricorsiva del parametro  $a$  del modello AR(1) tramite minimi quadrati ricorsivi con fattore di oblio
3. calcolo on-line del parametro nominale  $a_{NOM}(t)$  dai valori puntuali  $a(t)$
4. confronto continuo tra gli andamenti di  $a(t)$  e  $a_{NOM}(t)$ : forti scostamenti sono indice di malfunzionamento
5. calcolo del residuo  $\varepsilon(t) = y(t) - a_{NOM}(t)y(t-1)$  tra modello nominale e misure reali
6. calcolo del grado di bianchezza di  $\varepsilon$  tramite test del correlogramma: perdita di bianchezza è indice di malfunzionamento

Il calcolo del parametro nominale (fase 3) è stato eseguito tramite *media continua* dei valori ricorsivi:

$$\begin{cases} M(t+1) = M(t) + 1 \\ a_{NOM}(t) = \frac{a_{NOM}(t-1)}{M(t-1)} + \frac{1}{M(t)} a(t) \end{cases}$$

dove  $M$  indica il contatore del numero di misure raccolte. Tale aggiornamento deve essere disabilitato in presenza di valori anomali di  $a(t)$ .

La risposta della diagnostica parametrica (fase 4) è del tipo:

$$\begin{cases} \text{Guasto se} & a(t) \notin [a_{NOM}(t) - \delta, a_{NOM}(t) + \delta] \\ \text{Normale se} & a(t) \in [a_{NOM}(t) - \delta, a_{NOM}(t) + \delta] \end{cases}$$

Il calcolo del residuo (fase 5) deve essere effettuato tramite il parametro nominale  $a_{NOM}$  e non attraverso il valore  $a(t)$  che viene stimato anche nel corso di un guasto. In tal modo si è assicurati sul fatto che il residuo  $\varepsilon$  è bianco durante un normale funzionamento e che tale caratteristica è persa quando la dinamica delle misure  $y(t)$  devia dall'andamento nominale.

Nel caso sperimentale trattato dalla tesi l'implementazione del test del correlogramma (fase 6), così come è descritto in sottosezione 6.4.3, non porta a risultati soddisfacenti. Ciò è principalmente dovuto alla cattiva quantizzazione della temperatura di raffreddamento che rende impossibile la presenza di rigorosa bianchezza nel residuo del modello AR(1), peraltro già evidenziata dall'analisi off-line dalla figura 5.17b. Infatti nei lunghi tratti a misura costante dovuti alla quantizzazione la predizione del modello si mantiene in valore assoluto al di sotto del segnale misurato; viene così a sussistere un legame di segno non casuale tra campioni successivi del residuo che rende impossibile l'esatta presenza di bianchezza, anche quando il modello è identificato correttamente (figura 6.6b). Dunque, per adattare il criterio al caso in questione, si è scelto di non basare la decisione sulla bianchezza sul semplice valore del correlogramma, come suggerito dal test. È stato piuttosto considerato sintomatico il valore della *derivata del correlogramma*. La giustificazione di tale scelta è data nella prossima sottosezione.

### 6.5.2.1 Bianchezza e derivata del correlogramma

La definizione del correlogramma, reperibile in sottosezione 6.4.3, è qui riportata per comodità:

$$\text{correlogramma} \triangleq N \hat{\boldsymbol{\rho}}^T \hat{\boldsymbol{\rho}} \quad (6.12)$$

dove:

- $N$  è la numerosità campionaria del residuo e va incrementata, in un calcolo on-line, di un'unità ad ogni misura ricevuta (essa rappresenta il secondo ingresso del blocco che calcola il correlogramma).
- $\hat{\boldsymbol{\rho}}$  è il vettore di covarianza campionaria normalizzata  $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\hat{\boldsymbol{\gamma}}}{\hat{\gamma}(0)}$ , con

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{1}{N} \sum_{t=m+1}^N \varepsilon(t) \begin{pmatrix} \varepsilon(t-1) \\ \varepsilon(t-2) \\ \vdots \\ \varepsilon(t-m) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\gamma}(0) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t)^2$$

rispettivamente vettore di correlazione (ad 1, 2, ...,  $m$  passi) e varianza campionarie del residuo.

Come detto, nella sua versione naturale il test del correlogramma per la bianchezza si limita a controllare l'entità della quantità scalare positiva (6.12) dichiarando valida l'ipotesi di bianchezza nel caso essa non superi una data soglia, definita nella tabella «chi quadro» a seconda del livello di significatività desiderato e del numero di ritardi  $m$  (gradi di libertà della variabile aleatoria «chi quadro»).

## 6 Diagnostica autoadattativa del sistema di raffreddamento

Nel caso considerato nella tesi è stato necessario realizzarne tuttavia una versione modificata che, anziché considerare sintomatica l'ampiezza del correlogramma (6.12), ne considerasse la *derivata*. Questo modo di procedere è dettato fondamentalmente da due non idealità presenti nel sistema complessivo, la seconda delle quali conseguenza della prima:

1. errore di quantizzazione generato dal sensore NTC nella misura della temperatura di raffreddamento (1°C di risoluzione)
2. non perfetta bianchezza del residuo del modello universale AR(1) scelto per modellizzare il segnale di temperatura di un impianto di raffreddamento generico (si vedano, nell'analisi off-line, le figure 5.17b, 5.19b, 5.20b nelle quali vi è sempre qualche campione di correlazione non contenuto nella fascia gialla). Quest'ultima non idealità può essere dovuta sia al modello scelto che al sensore, il quale introduce con la quantizzazione delle regolarità di segno nell'errore tra misura e predizione.

In presenza di tali non idealità l'usuale criterio teorico del correlogramma non avrebbe mai potuto dichiarare bianchezza.

A tal proposito si consideri il prossimo

### **Esempio.** *Correlogramma in presenza di quantizzazione*

Si consideri un processo fisico campionato descritto dalla legge dinamica *vera*

$$y(t) = 0.98 y(t-1) + \xi(t) \quad t = 1, 2, \dots$$

con  $\xi$  rumore bianco a media nulla e varianza unitaria.

Il modello scelto per rappresentare il processo è un AR(1) con predittore

$$\hat{y}(t|t-1) = 0.98 y(t-1)$$

dove al parametro è stato fatto corrispondere proprio il suo valore vero (identificazione ideale: la famiglia di modelli scelta, l'ordine ed il valore parametrico sono tutti corretti). In questo caso il residuo di predizione

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1) = \xi(t)$$

è naturalmente bianco ed il correlogramma (6.12) è distribuito come una variabile «chi quadro» ad  $m$  gradi di libertà. Nell'esempio si è posto  $m = 10$ , stesso valore che sarà usato nell'implementazione diagnostica vera e propria per l'impianto di raffreddamento.

La figura 6.6a testimonia la bianchezza del correlogramma, vincolato, almeno a regime, a rimanere al di sotto del livello di significatività al 95%

(cui corrisponde il valore 18.307, si veda la tabella della variabile «chi-quadro» in appendice).

Il calcolo del correlogramma è stato poi ripetuto mantenendo inalterati processo e modello ed inserendo una quantizzazione pari ad un decimo dell'ampiezza totale del segnale sulla misura di  $y^{16}$ . Così facendo la predizione viene effettuata tramite una misura quantizzata dell'uscita ( $y_q$ ) anziché con il valore corretto<sup>17</sup>

$$\hat{y}(t|t-1) = 0.98 y_q(t-1) \quad y_q \neq y \quad (6.13)$$

e nel nuovo residuo

$$\varepsilon(t) = y_q(t) - \hat{y}(t|t-1)$$

può venire meno la bianchezza. Infatti nel caso di lunghi tratti in cui la misura è mantenuta costante per effetto della quantizzazione, (cioè  $y_q(t) = y_q(t-1)$ ) la predizione (6.13) si mantiene in valore assoluto al di sotto del segnale misurato  $y_q(t)$ . Viene così a sussistere una costanza di segno nel residuo di predizione, ossia una correlazione tra i suoi campioni adiacenti. La bianchezza non può esistere e l'andamento del correlogramma non è più limitato (figura 6.6b).

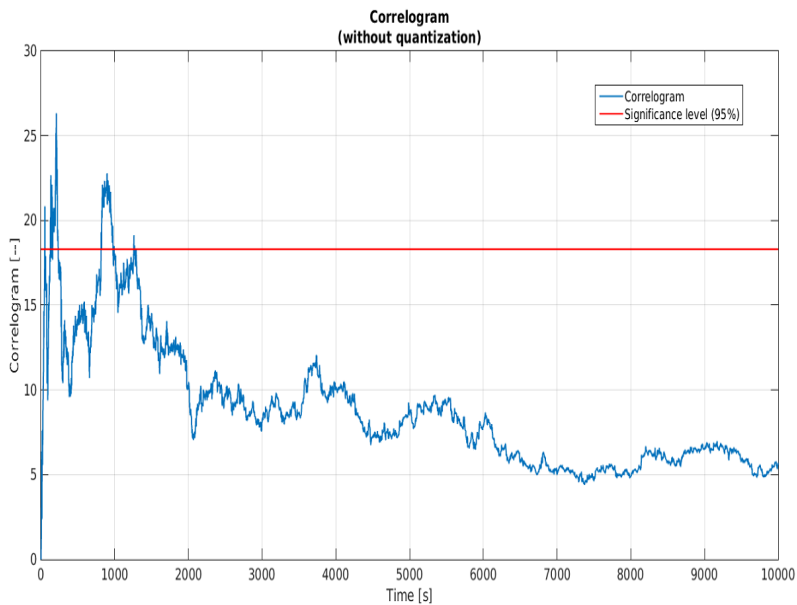
□

---

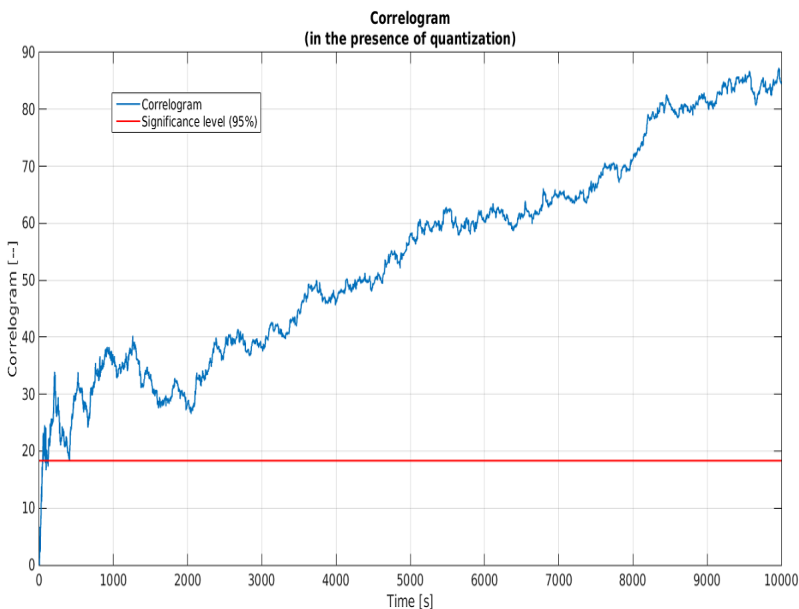
<sup>16</sup>Una situazione simile è presente nella misura della temperatura del refrigerante che a regime oscilla in un range di 10 °C con quantizzazione del sensore pari ad 1°C.

<sup>17</sup>Il predittore usa nell'elaborazione della predizione le *misure* che gli sono passate dal campo, soggette stavolta alla quantizzazione. I valori veri di  $y$  sono ignoti.

## 6 Diagnostica autoadattativa del sistema di raffreddamento



(a) Correlogramma in assenza di quantizzazione nelle misure.



(b) Correlogramma in presenza di una quantizzazione pari ad  $1/10$  dell'escursione del segnale.

Figura 6.6: Andamento del correlogramma: la quantizzazione è assente in figura 6.6a, presente e pari a circa  $1/10$  dell'escursione del segnale in figura 6.6b. L'esempio fa riferimento al processo  $y(t) = 0.98y(t-1) + \xi(t)$  modellato correttamente con un AR(1) (predittore  $\hat{y}(t|t-1) = 0.98y(t-1)$ ).

## 6.5 Diagnostica in linea ed autoadattatività

In un'applicazione influenzata da cattiva quantizzazione, come quella oggetto della tesi, l'andamento standard del correlogramma (6.12) va pertanto inteso come quello di una funzione crescente.

Nel corso di un guasto subentrano poi altri fattori in grado di modificare l'andamento del correlogramma; il modello nominale non riesce più a spiegare le misure ed il residuo tende ad assumere ulteriori caratteristiche colorate.

Per rendersene conto è sufficiente considerare nuovamente l'esempio precedente con misure quantizzate ed immaginare che intervenga un guasto al processo tale da mutare la dinamica originaria espressa da:

$$y(t) = 0.98y(t-1) + \xi(t) \quad t = 1, 2, \dots \quad (6.14)$$

nella nuova legge:

$$y(t) = 0.94y(t-1) + \xi(t) \quad t = 1, 2, \dots; \quad (6.15)$$

rimane invece inalterato il modello predittore

$$\hat{y}(t|t-1) = 0.98y(t-1) \quad (6.16)$$

lontano stavolta dal rappresentare la realtà.

La figura 6.7 mostra come sia notevolmente diverso il tasso di crescita del correlogramma nel caso di normale funzionamento (processo 6.14 con modello 6.16) rispetto alla situazione di guasto (processo 6.15 con modello 6.16). In particolare nel corso del guasto il correlogramma cresce molto più rapidamente.

Una possibile variabile sintomatica per la diagnostica di bianchezza in presenza di cattive quantizzazioni dell'uscita può dunque essere la derivata del correlogramma. Valori elevati di quest'ultima sono da intendersi indice di perdita di bianchezza nel residuo, e dunque di guasto al sistema originale.

## 6 Diagnostica autoadattativa del sistema di raffreddamento

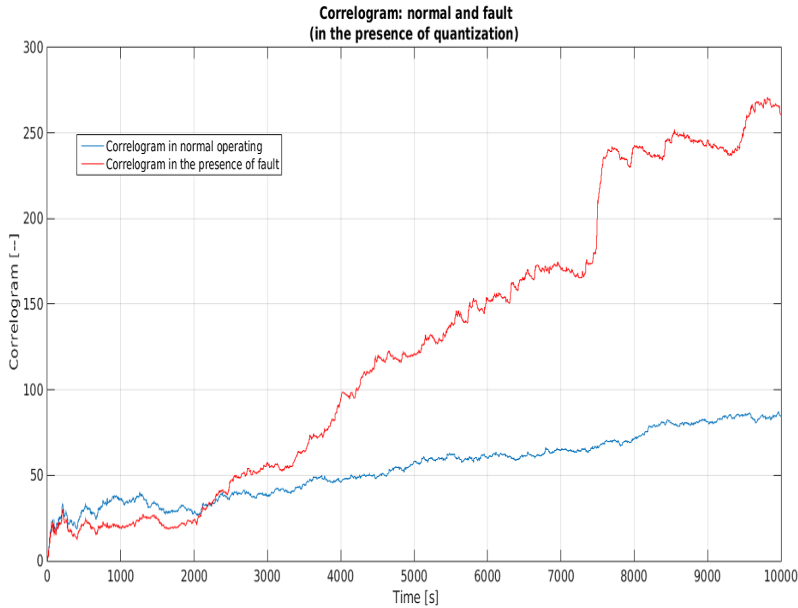


Figura 6.7: Quantizzazione delle misure: diversa crescita del correlogramma in presenza di normale funzionamento (processo  $y(t) = 0.98 y(t-1) + \xi(t)$ ) e di guasto (processo  $y(t) = 0.94 y(t-1) + \xi(t)$ ). Il predittore usato in entrambi i casi è  $\hat{y}(t|t-1) = 0.98 y(t-1)$ .

Quanto è necessario in questa nuova ottica di bianchezza è allora la stima di un valore nominale della derivata da confrontare, istante per istante, con un valore puntuale della derivata del correlogramma adottando come regola di decisione diagnostica la seguente:

$$\begin{cases} \text{Guasto se} & der(t) \notin [der_{NOM}(t) - \delta, der_{NOM}(t) + \delta] \\ \text{Normale se} & der(t) \in [der_{NOM}(t) - \delta, der_{NOM}(t) + \delta] \end{cases}$$

con  $der$  e  $der_{NOM}$  ad indicare rispettivamente derivata puntuale e nominale del correlogramma  $N\hat{\rho}^T\hat{\rho}$ :

$$der(t) \triangleq \frac{d}{dt} (N\hat{\rho}^T\hat{\rho})$$

mentre la *derivata nominale* è calcolata come *media continua* dei valori storici della derivata puntuale (come già per il parametro nominale, tecnica con memoria autoadattativa).

$$\begin{cases} M(t+1) = M(t) + 1 \\ der_{NOM}(t) = \frac{der_{NOM}(t-1)}{M(t-1)} + \frac{1}{M(t)} der(t) \end{cases}$$



## 6.5 Diagnostica in linea ed autoadattatività

In questo modo non è necessario definire off-line il valore nominale di buon comportamento della derivata.

In conformità al caso parametrico, nella diagnostica di bianchezza la computazione della derivata nominale va disabilitata in presenza di valori anomali della derivata puntuale.

Nel prossimo capitolo verrà descritto il modo in cui le regole diagnostiche discusse siano state implementate tramite software Simulink nel corso dell'attività di tesi. A seguire, il capitolo delle simulazioni illustrerà le performance delle diagnostiche parametrica e di bianchezza per il caso del sistema di raffreddamento di un veicolo.



# 7 Realizzazione software dell'apparato diagnostico

## 7.1 Introduzione

L'implementazione software delle tecniche diagnostiche è stata condotta in ambiente Simulink.

Il tempo di campionamento dell'intera realizzazione Simulink è stato fissato a  $T_s = 1s$ , in conformità con l'analisi modellistica condotta nel capitolo 5. Il segnale di input dello schema è la temperatura del liquido refrigerante raccolta dal sensore di misura e soggetta alla quantizzazione di  $1^\circ\text{C}$ .

L'apparato diagnostico è stato suddiviso in due blocchi macroscopici adibiti rispettivamente al monitoraggio dell'andamento del parametro dell'AR(1) e alla realizzazione di un test di bianchezza del residuo di predizione: nel seguito tali entità macroscopiche saranno denominate rispettivamente blocco di *diagnostica parametrica* (parameter diagnostic) e blocco della *diagnostica di bianchezza* (whiteness diagnostic).

Le due diagnostiche non sono totalmente slegate: mentre quella parametrica possiede vita propria, la realizzazione del test di bianchezza necessita del valore del parametro nominale adattativo computato dal blocco di diagnosi parametrica. Per il resto i blocchi sono speculari e hanno come input le misure raccolte on-line per la temperatura del liquido refrigerante e come output delle indicazioni sullo stato di salute dell'impianto.

Nella sezione 7.2 sarà discussa la realizzazione Simulink della diagnostica parametrica mentre la descrizione della diagnostica di bianchezza, basata sul correlogramma, sarà oggetto della sezione 7.3.

Il capitolo si chiuderà con una breve descrizione delle funzionalità svolte dai blocchi Simulink impiegati e dei valori dei parametri e delle soglie fissate nelle regole di decisione durante le simulazioni.

## 7.2 Diagnostica parametrica

La realizzazione Simulink della diagnostica parametrica è illustrata in figura 7.1. Lo scopo di tale struttura è di effettuare un continuo check del parametro del modello AR(1) in modo da stabilire se vi sia o meno un'anomalia all'impianto rilevabile dall'andamento parametrico.

## 7 Realizzazione software dell'apparato diagnostico

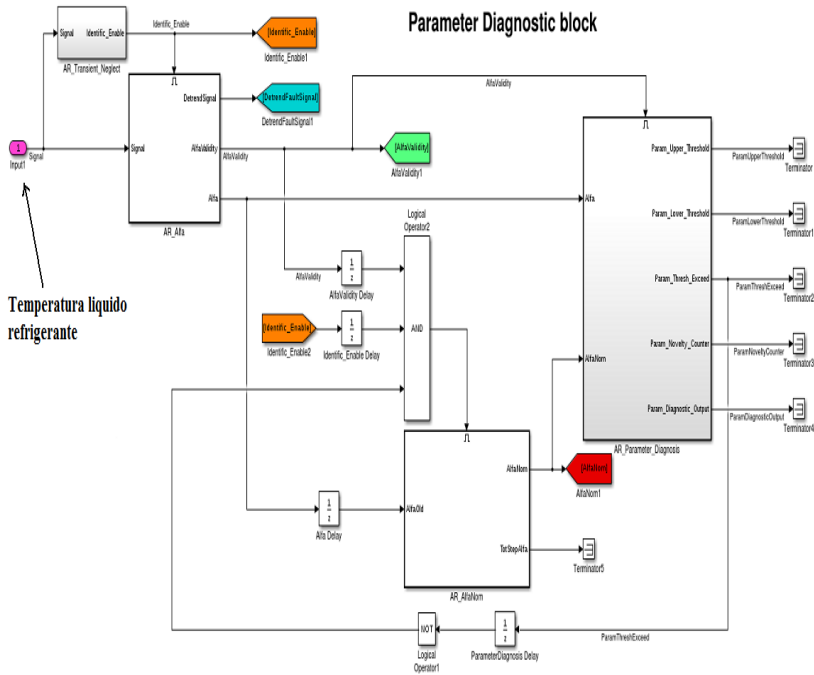


Figura 7.1: Blocco Simulink per la diagnostica parametrica.

L'identificazione del modello AR(1) a partire dal segnale richiede l'eliminazione del transitorio iniziale e la depurazione della media dalla temperatura. In un qualsiasi procedimento di diagnostica basata sul modello entrambe le operazioni devono essere eseguite on-line. Il sottoblocco denominato *AR\_Transient\_Neglect* (in alto a sinistra nella figura 7.1) cura l'esclusione del transitorio dal segnale di temperatura abilitando il funzionamento del successivo sottoblocco (*AR\_Alfa*) solo a transitorio esaurito. All'interno di quest'ultimo è realizzata l'operazione di detrend (rimozione della media), indispensabile nel processo di stima parametrica e l'identificazione stessa del modello AR(1) tramite minimi quadrati ricorsivi con fattore di oblio.

In uscita da *AR\_Alfa* vi è il valore del parametro  $a(t)$  (nello schema Simulink indicato con il nome *Alfa*) del modello autoregressivo. Questo è utilizzato da altri due sottoblocchi: *AR\_AlfaNom* e *AR\_Parameter\_Diagnosis*, adibiti rispettivamente alla determinazione del parametro nominale e all'implementazione della regola di decisione diagnostica.

### 7.2.1 Rimozione della media e calcolo ricorsivo del parametro

All'ingresso di *AR\_Alfa*, come detto, è posto il segnale di temperatura privato del transitorio. Prima operazione interna ad *AR\_Alfa* è l'eliminazione della media (blocco *Running Detrend*); quest'operazione è eseguita su un flusso di dati raccolti mano a mano ed è pertanto chiara la possibilità che la forma del segnale privato del valor medio in linea sia diversa dall'analogia versione off-line, dove la media è computata con una conoscenza dell'intera storia del segnale.

Il segnale ottenuto è privo di transitorio e media, dunque pronto per il processo di identificazione effettuato dal blocco di libreria *RecursiveEstimator*, sempre all'interno di *AR\_Alfa*. Questo esegue, passo dopo passo, la stima del parametro  $a$  del modello AR(1)

$$y(t) = ay(t-1) + \xi(t)$$

a partire dalle misure del segnale a media nulla. La tecnica è quella dei minimi quadrati ricorsivi con fattore di oblio (sottosezione 6.3.2). Per le simulazioni è stato scelto di «pesare» le ultime 500 misure nella minimizzazione della loss function, cui corrisponde un fattore di oblio  $\mu = 0.998$ ; l'inizializzazione dell'algoritmo è stata fatta in modo non convenzionale, ponendo

$$\begin{cases} V(0) &= 1 \\ a_0 &= 0.98 \end{cases}$$

Il valore iniziale del parametro è stato fissato in base alla conoscenza a priori maturata nel corso delle identificazioni off-line (si veda la sottosezione 5.6.2.2 per alcuni tipici valori del parametro  $a$ ).

L'andamento del parametro  $a(t)$  può presentare inizialmente delle pronunciate fluttuazioni che poi si esauriscono a regime; in vista del calcolo del parametro nominale è necessario rilevare l'inizio di tale fase di regime: a riguardo è stato predisposto il blocco *SteadyDetection* che riceve in ingresso il parametro e fornisce in uscita un'indicazione di tipo booleano (*AlfaValidity*) sull'esaurimento o meno delle ampie fluttuazioni nella stima.

I sottoblocchi costituenti *AR\_Alfa* sono schematicamente illustrati in figura 7.2.

## 7 Realizzazione software dell'apparato diagnostico

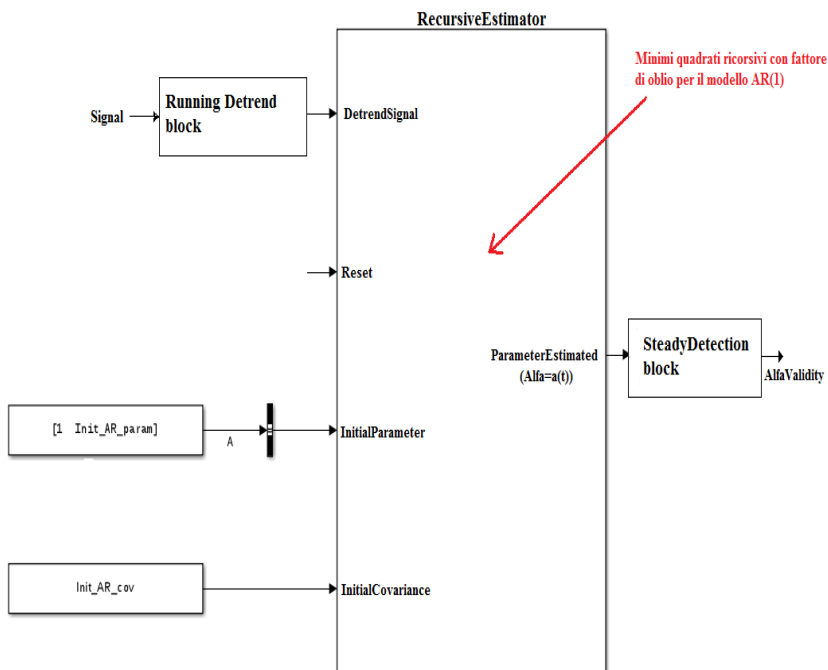


Figura 7.2: Interno di *AR\_Alfa*: sottoblocchi per rimozione della media (*RunningDetrend*), per l'identificazione ricorsiva (*RecursiveEstimator*) e per la rilevazione della stabilizzazione nell'andamento del parametro (*SteadyDetection*).

### 7.2.2 Aggiornamento adattativo del parametro nominale

Una volta raggiunta la condizione di regime sul parametro (*AlfaValidity = True*) si è assicurati sul fatto che l'andamento della stima è assestato in una certa fascia e che gli eventuali transitori dovuti all'inizializzazione dei minimi quadrati sono esauriti. A questo punto può iniziare la computazione del parametro nominale  $a_{NOM}(t)$ , indicato nello schema Simulink con il nome *AlfaNom*. Esso è calcolato all'interno del blocco *AR\_AlfaNom* come una media continua dei valori del parametro  $a(t)$  ricorsivamente identificato, secondo la legge:

$$\begin{cases} M(t+1) = M(t) + 1 \\ a_{NOM}(t) = \frac{a_{NOM}(t-1)}{M(t-1)} + \frac{1}{M(t)} a(t) \end{cases} \quad (7.1)$$

in cui  $M$  funge da contatore dei campioni considerati nel computo della media.

Così facendo l'aggiornamento della conoscenza nominale avviene più lentamente dell'identificazione ed il parametro nominale presenta una dinamica regolare, non soggetta, almeno alla lunga, alle oscillazioni di  $a(t)$  generate dal fattore di oblio (presenti anche a regime). Tale aggiornamento è disabilitato ogni qualvolta vi è ragione di credere vi sia una qualche anomalia all'impianto (si veda la linea di retroazione in figura 7.1).

### 7.2.3 Blocco decisionale di diagnosi parametrica

Il parametro corrente  $a(t)$  e quello nominale  $a_{NOM}(t)$  fungono da input per l'ultimo blocco della diagnostica parametrica, denominato *AR\_Parameter\_Diagnosis* in figura 7.1. Ad ogni passo di campionamento al suo interno è testata l'appartenenza di  $a(t)$  ad un intorno percentuale del parametro nominale ( $\pm 1\%$  del valore nominale); l'aggiornamento di  $a_{NOM}$  è interrotto appena  $a$  giace al di fuori delle soglie di tolleranza (*ParamThreshExceed = 1*) e riprende quando il parametro torna a valori accettabili (*ParamThreshExceed = 0*). Il numero di volte in cui vengono violate le soglie è una variabile sintomatica per la diagnosi.

L'implementazione interna al blocco *AR\_Parameter\_Diagnosis* è illustrata in figura 7.3.

## 7 Realizzazione software dell'apparato diagnostico

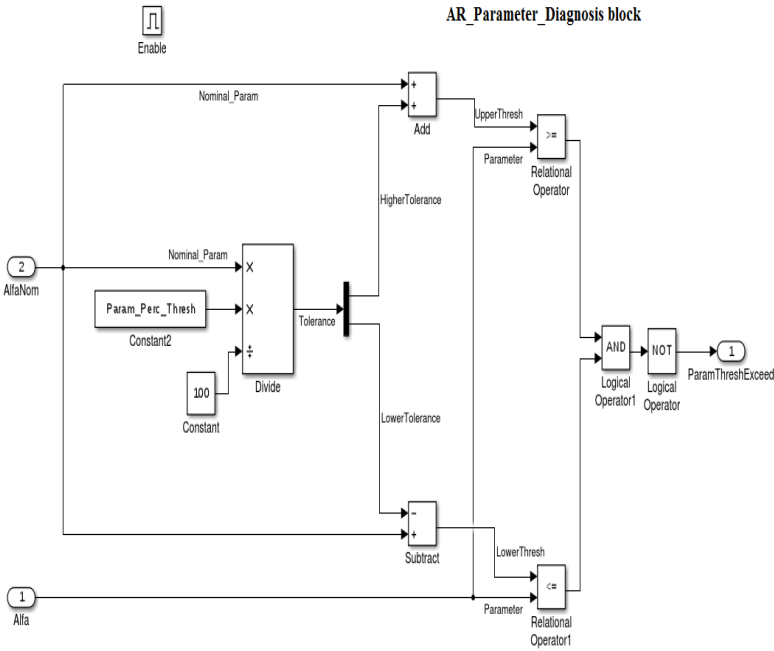


Figura 7.3: Blocco di decisione per la diagnostica parametrica (*AR\_Parameter\_Diagnosis*).

### 7.3 Diagnostica di bianchezza

La realizzazione Simulink della diagnostica di bianchezza è illustrata in figura 7.4. Lo scopo di tale struttura è di effettuare un continuo check delle caratteristiche probabilistiche del residuo di predizione del modello AR(1) *nominale*. Come ribadito più volte, è lecito attendersi che durante un normale funzionamento del sistema il modello nominale presenti un errore di predizione bianco e che tale caratteristica possa essere perduta nel corso di un'anomalia.

Tra i test di bianchezza presenti in letteratura si è scelto di implementare quello del *correlogramma*, definito nella sottosezione 6.4.3.



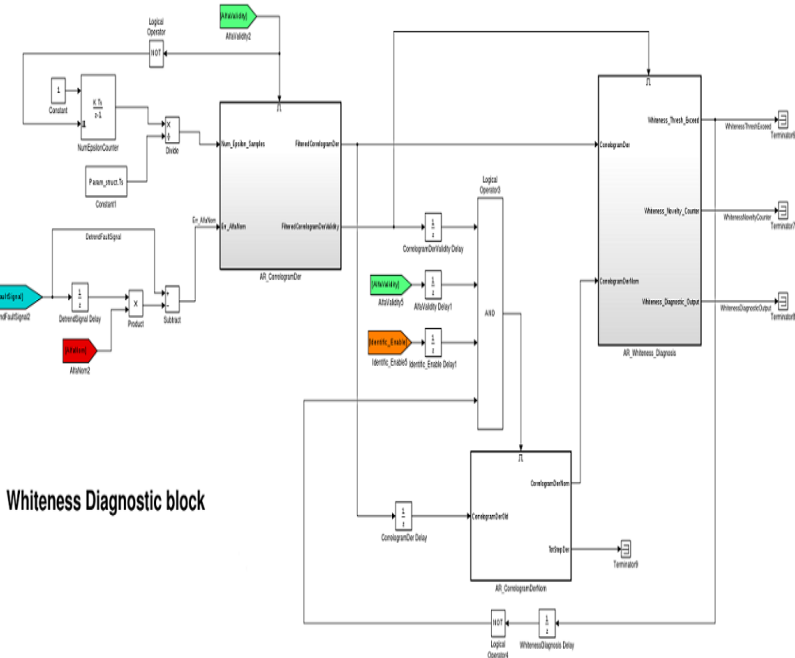


Figura 7.4: Blocco Simulink per la diagnostica di bianchezza.

### 7.3.1 Calcolo del correlogramma

Il test di bianchezza va effettuato sull'errore tra misura e predizione nominale e non tra misura e la previsione che sarebbe condotta con il valore parametrico  $a(t)$  identificato al tempo corrente (che potrebbe essere stato stimato da misure guaste).

Il modello nominale fa riferimento al parametro nominale computato con la formula (7.1); il relativo predittore ottimo è:

$$\hat{y}(t|t-1) = a_{NOM}(t-1)y(t-1)$$

mentre il residuo di modello di cui testare la bianchezza è definito da:

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1) = y(t) - a_{NOM}(t-1)y(t-1). \quad (7.2)$$

Al solito si è scelta la lettera  $y$  per indicare la *misura* della temperatura del liquido refrigerante già privata di transitorio e media e con  $\hat{y}$  la stima effettuata dal modello nominale. Il calcolo del residuo secondo la formula (7.2) viene effettuato nella parte sinistra dello schema Simulink di figura 7.4.  $\varepsilon$  rappresenta uno degli ingressi del blocco *AR\_CorrelogramDer* adibito al calcolo del correlogramma.

### 7.3.2 Calcolo in linea della derivata del correlogramma

All'interno del blocco *AR\_CorrelogramDer* (figura 7.5) viene dapprima computata la quantità (6.12) e ne viene effettuata poi la *derivata* discreta. Un filtraggio della forma d'onda del correlogramma è necessario per smussarne le irregolarità e non incorrere in problemi di indeterminatezza nella derivata. E' impiegato a tal motivo un filtro a media mobile avente funzione di trasferimento

$$\frac{1}{M} \frac{z^M - 1}{z^M - z^{M-1}}$$

con  $M$ , ordine del filtro, fissato a 300.

Un secondo filtro, identico al precedente, è utilizzato per regolarizzare la forma della derivata ottenuta.

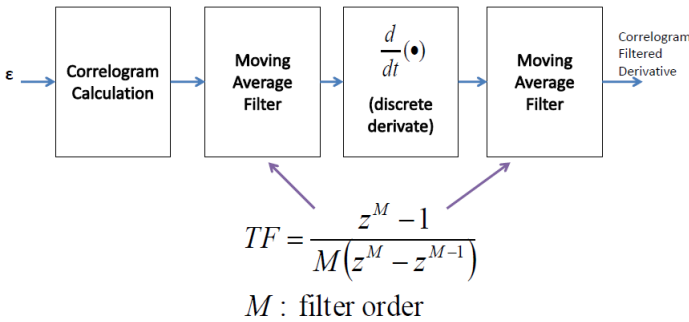


Figura 7.5: Operazioni eseguite all'interno di *AR\_Correlogram\_Der*.

### 7.3.3 Aggiornamento adattativo della derivata nominale

La diagnostica di bianchezza si basa sul confronto tra la derivata puntuale del correlogramma e la derivata nominale di buon funzionamento. La derivata nominale viene computata come media continua della puntuale internamente al blocco *AR\_CorrelogramDerNom*, analogamente a quanto veniva fatto per il parametro nominale nel blocco di diagnostica parametrica:

$$\begin{cases} M(t+1) = M(t) + 1 \\ der_{NOM}(t) = \frac{der_{NOM}(t-1)}{M(t-1)} + \frac{1}{M(t)} der(t) \end{cases}$$

in cui  $M$  funge da contatore dei campioni considerati nel computo della media, e  $der$  è la derivata puntuale filtrata del correlogramma.

In questa maniera, come detto in sottosezione 6.5.2.1, anche la derivata nominale è il risultato di un'operazione adattativa e non necessita di essere specificata a priori.

### 7.3.4 Blocco per la diagnosi di bianchezza

Il blocco *AR\_Whiteness\_Diagnosis* (sulla destra di figura 7.4) riceve in ingresso i valori di derivata puntuale e nominale del correlogramma. Il rilevamento di anomalie avviene tramite confronto di queste due grandezze; quando lo scostamento tra la derivata del correlogramma e la nominale supera una certa soglia si ha un'indicazione di anomalia e la variabile booleana *WhitenessDiagnosticOutput* viene ad assumere il valore *True*. Il numero di volte in cui viene violata la soglia è una variabile sintomatica per la diagnosi.

A differenza della diagnostica parametrica, nel check di bianchezza basato sulla derivata della quantità (6.12) non ha senso definire una soglia inferiore per l'andamento della derivata<sup>1</sup>. Tuttavia, per impedire l'aggiornamento della derivata nominale su valori troppo negativi della puntuale, è stata predisposta una soglia negativa limite; valori di derivata inferiori a quest'ultima non hanno contribuito al computo della nominale al pari di quelli superiori alla soglia limite positiva. Questo è il significato della retroazione dal blocco *AR\_Whiteness\_Diagnosis* al blocco *AR\_CorrelogramDerNom* presente in figura (7.4).

## 7.4 Ulteriori elementi della realizzazione software

Vengono di seguito elencati i più significativi blocchi Simulink implementati nel lavoro; sono specificate le relative funzionalità, gli ingressi richiesti e le uscite prodotte, oltre che eventuali parametri o soglie impiegati al loro interno.

### 7.4.1 Blocco *AR\_Transient\_Neglect*

**FUNZIONE:** rilevazione dell'esaurimento del transitorio nel segnale di temperatura.

**INGRESSO:** segnale di temperatura del liquido refrigerante (grezzo).

**USCITA:** indicazione booleana relativamente all'esaurimento o meno della fase di transitorio: *Identific\_Enable = False* se il transitorio non è ancora esaurito, *Identific\_Enable = True* se il transitorio è esaurito.

**CRITERIO:** confronto tra campioni ritardati del segnale: se il loro scostamento si mantiene inferiore ad una determinata soglia per un certo numero di passi di campionamento, il transitorio è dichiarato esaurito.

---

<sup>1</sup>Derivata negativa significa correlogramma decrescente, comportamento del tutto accettabile; la variabile sintomatica è il tasso di crescita del correlogramma, non di decrescita.

### 7.4.2 Blocco Running Detrend

FUNZIONE: rimozione della media dal segnale di temperatura.

INGRESSO: segnale di temperatura del liquido refrigerante (privato del transitorio).

USCITA: segnale di temperatura a media nulla.

ABILITAZIONI/DISABILITAZIONI: il blocco viene abilitato all'esaurimento del transitorio del segnale di temperatura.

### 7.4.3 Blocco RecursiveEstimator

FUNZIONE: identificazione ricorsiva del parametro del modello AR(1) a partire dalle misure.

INGRESSO: segnale di temperatura del liquido refrigerante privato di transitorio e media.

USCITA: parametro  $a(t)$  ricorsivamente identificato.

CRITERIO: minimi quadrati ricorsivi con fattore di oblio.

INIZIALIZZAZIONE: l'esecuzione del metodo dei minimi quadrati richiede la specifica di tre quantità: *fattore di oblio*  $\mu$  (o, equivalentemente, il numero di misure da pesare nella loss function), *parametro iniziale*  $a_0 \triangleq a(0)$  e *varianza iniziale* della stima parametrica  $V(0)$ . Nel lavoro si sono fissati i valori:

$$\begin{aligned}n^{\circ} \text{ misure da pesare} &= 200 \Rightarrow \mu = 0.998 \\ a_0 &= 0.98 \\ V(0) &= 1\end{aligned}$$

ABILITAZIONI/DISABILITAZIONI: il blocco viene abilitato all'esaurimento del transitorio del segnale di temperatura.

### 7.4.4 Blocco SteadyDetection

FUNZIONE: determinazione della situazione di regime del parametro  $a(t)$  (fine del transitorio dell'identificazione).

INGRESSO: parametro  $a(t)$  identificato dal blocco *RecursiveEstimator*.

USCITA: indicazione booleana (*AlfaValidity*) sul raggiungimento del regime nell'andamento del parametro  $a(t)$ .

CRITERIO: confronto tra  $a(t)$  e  $a(t-1)$ ; se la differenza assoluta tra i due valori si mantiene inferiore ad una fissata soglia per un numero di passi sufficientemente alto, è decretata la stabilizzazione nell'andamento parametrico.

VALORI SOGLIE: detta *DifferenceThreshold* la soglia sullo scostamento tra  $a(t)$  e  $a(t-1)$  e *NumStepThreshold* il numero minimo di passi conse-

cutivi di campionamento per cui deve valere la disequaglianza di stabilizzazione

$$|a(t) - a(t-1)| < \textit{DifferenceThreshold},$$

nel lavoro si è posto

$$\begin{aligned} \textit{DifferenceThreshold} &= 4 \cdot 10^{-3} \\ \textit{NumStepThreshold} &= 240. \end{aligned}$$

ABILITAZIONI/DISABILITAZIONI: il blocco viene abilitato all'esaurimento del transitorio del segnale di temperatura.

### 7.4.5 Blocco AR\_AlfaNom

FUNZIONE: calcolo adattativo del parametro nominale.

INGRESSO: parametro  $a(t)$ .

USCITA: parametro nominale  $a_{NOM}$ .

CRITERIO: media continua dei valori del parametro ricorsivamente identificato  $a(t)$ .

ABILITAZIONI/DISABILITAZIONI: il blocco viene abilitato all'esaurimento del transitorio nell'andamento di  $a(t)$ , cioè quando  $\textit{AlfaValidity} = \textit{True}$ . Il blocco è disabilitato in presenza di valori anomali di  $a(t)$  (retroazione dalla diagnosi parametrica). Questo al fine di non aggiornare il nominale con valori guasti del parametro identificato.

### 7.4.6 Blocco AR\_Parameter\_Diagnosis

FUNZIONE: rilevazione di anomalie nel segnale della temperatura del refrigerante dal valore del parametro  $a(t)$  del modello AR(1).

INGRESSI: parametro corrente  $a(t)$  e parametro nominale adattativo.

USCITA: indicazione booleana sullo stato del parametro.

CRITERIO: verifica dell'appartenenza o meno del parametro corrente  $a(t)$  ad un intervallo di tolleranza definito su un intorno del parametro nominale.

VALORI SOGLIE: la fascia entro cui deve stare  $a(t)$  durante un normale funzionamento è determinata da un valore di soglia superiore e da un valore di soglia inferiore del parametro nominale, in maniera simmetrica:

$$\begin{aligned} \textit{UpperThreshold} &= a_{NOM} + (1\% \textit{ di } a_{NOM}) \\ \textit{LowerThreshold} &= a_{NOM} - (1\% \textit{ di } a_{NOM}) \end{aligned}$$

da cui il criterio decisionale:

$$\textit{ParamThreshExceed} = \textit{False} \textit{ if } a(t) \in [\textit{UpperThreshold}, \textit{LowerThreshold}]$$

$$\textit{ParamThreshExceed} = \textit{True} \textit{ if } a(t) \notin [\textit{UpperThreshold}, \textit{LowerThreshold}].$$

$\textit{ParamThreshExceed} = \textit{False}$  indica un normale valore del parametro ricorsivamente identificato,  $\textit{ParamThreshExceed} = \textit{True}$  è indice di anomalia.

ABILITAZIONI/DISABILITAZIONI: il blocco viene abilitato all'esaurimento del transitorio nell'andamento di  $a(t)$ , cioè quando  $AlfaValidity = True$ .

### 7.4.7 Blocco AR\_CorrelogramDer

FUNZIONE: calcolo della derivata del correlogramma.

INGRESSO: residuo di predizione del modello nominale:

$$\varepsilon(t) \triangleq y(t) - a_{NOM}y(t-1).$$

USCITA: derivata puntuale del correlogramma (filtrato).

CRITERIO: calcolo del correlogramma  $N\hat{\rho}^T\hat{\rho}$  del residuo di predizione e filtraggio a media mobile. Determinazione della derivata discreta del correlogramma filtrato.

PARAMETRI UTILIZZATI: numero di gradi di libertà nel calcolo del correlogramma e ordine del filtro a media mobile, fissati rispettivamente ai valori

$$\begin{aligned} m &= 10 \\ M &= 300. \end{aligned}$$

ABILITAZIONI/DISABILITAZIONI: il blocco viene abilitato ad esaurimento del transitorio di  $a(t)$  ( $AlfaValidity = True$ ).

### 7.4.8 Blocco AR\_CorrelogramDerNom

FUNZIONE: calcolo adattativo della derivata nominale  $der_{NOM}(t)$  del correlogramma.

INGRESSO: derivata puntuale  $der(t)$  del correlogramma.

USCITA: derivata nominale del correlogramma.

CRITERIO: media continua dei valori di derivata puntuale.

ABILITAZIONI/DISABILITAZIONI: il blocco viene abilitato all'esaurimento del transitorio nell'andamento di  $a(t)$ , cioè quando  $AlfaValidity = True$ .

Il blocco è disabilitato in presenza di valori positivi elevati o di valori fortemente negativi della derivata puntuale.

### 7.4.9 Blocco AR\_Whiteness\_Diagnosis

FUNZIONE: rilevazione di anomalie nel segnale della temperatura del refrigerante sulla base di perdita di bianchezza del modello AR(1).

INGRESSI: derivata puntuale e derivata nominale adattativa.

USCITA: indicazione booleana sullo stato della bianchezza.

CRITERIO: verifica del valore della derivata del correlogramma

VALORI SOGLIE: la fascia entro cui deve stare la derivata puntuale del correlogramma durante un normale funzionamento è determinata da un valore di soglia superiore della nominale:

## 7.4 Ulteriori elementi della realizzazione software

$$UpperThreshold = der_{NOM} + (400\% \text{ di } der_{NOM})$$

da cui il criterio decisionale:

$$WhitenessDiagnosticOutput = False \text{ if } der(t) \leq UpperThreshold$$

$$WhitenessDiagnosticOutput = True \text{ if } der(t) > UpperThreshold.$$

$WhitenessDiagnosticOutput = False$  indica un normale valore del parametro ricorsivamente identificato,  $WhitenessDiagnosticOutput = True$  è indice di anomalia.

Un limite negativo della derivata è introdotto al fine di disabilitare l'aggiornamento di  $der_{NOM}$  nel caso in cui il correlogramma presenti delle fasi di decrescita a pendenza sostenuta:

$$LowerThreshold = der_{NOM} - (250\% \text{ di } der_{NOM})$$

ABILITAZIONI/DISABILITAZIONI: il blocco viene abilitato dopo il calcolo della derivata puntuale del correlogramma filtrato.





# 8 Simulazioni

## 8.1 Introduzione

Entrambi gli approcci diagnostici, parametrico e di bianchezza, sono stati testati su una storia temporale della temperatura di raffreddamento comprensiva di regimi di normale funzionamento e di guasti relativamente ad un secondo autoveicolo, diverso da quello utilizzato per la fase di studio off-line.

Nella sezione 8.2 verrà presentata la storia del sistema di raffreddamento su cui le tecniche diagnostiche sono state testate e sarà condotta un'analisi relativamente all'uso che è stato fatto del veicolo nel corso delle varie sessioni di guida (diagrammi velocità-potenza).

Successivamente saranno riportati i risultati delle simulazioni della diagnostica parametrica (sezione 8.3) e di quella di bianchezza (sezione 8.4).

Un commento ai risultati ottenuti sarà infine oggetto della sezione 8.5.

## 8.2 Descrizione dei dati utilizzati nella simulazione

### 8.2.1 Storia della temperatura di raffreddamento

La simulazione riferisce a circa 27000 Km percorsi dalla vettura nel corso di 71 sessioni di raccolta dati<sup>1</sup>. La figura 8.1 riporta la storia completa del segnale di temperatura misurato.

---

<sup>1</sup>Per *sessione* è da intendersi il periodo che intercorre tra l'accensione ed il seguente spegnimento dell'auto

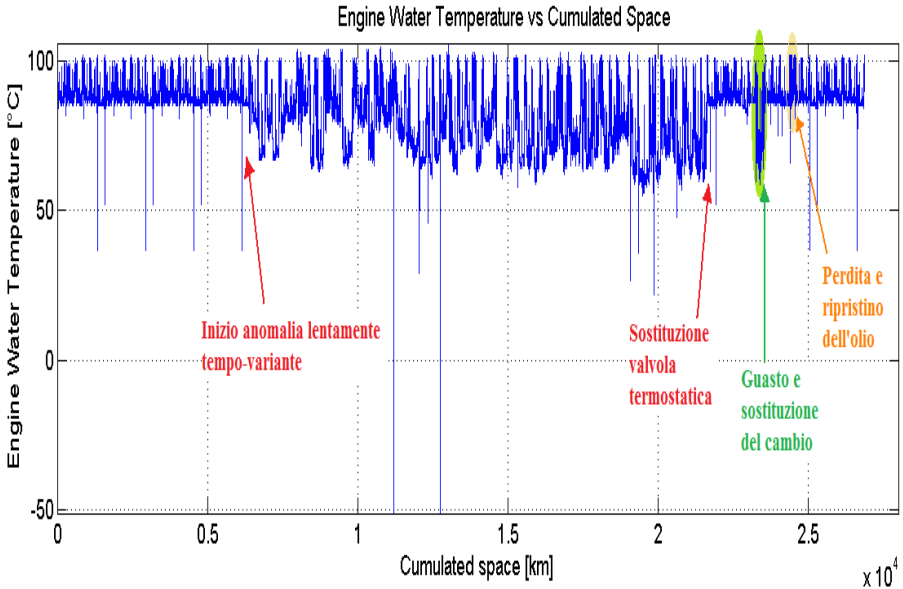


Figura 8.1: Andamento della temperatura del liquido di raffreddamento in funzione dei chilometri percorsi dal veicolo. Storia comprensiva di regimi di normale funzionamento e di guasti.

Ad una fase iniziale di normale funzionamento nella quale gli algoritmi diagnostici costruiscono la loro conoscenza nominale (parametro nominale e derivata nominale), segue un lungo periodo di anomalia *lentamente tempo-variante* che si conclude con la sostituzione della valvola termostatica. In seguito alla riparazione si registra però un secondo guasto dovuto al cambio. Con la sostituzione di quest'ultimo si ha una nuova fase di normale funzionamento, seguita da una terza anomalia causata dalla perdita di olio nel motore. Da ultimo vi è un nuovo regime di corretto funzionamento. Le tre anomalie hanno tutte effetto sul sistema di raffreddamento del veicolo:

1. Il malfunzionamento della valvola termostatica provoca una cattiva circolazione del liquido refrigerante tra le intercapedini dei cilindri ed il radiatore dove viene raffreddato: l'anomalia comincia all'incirca al chilometro 6500 e si manifesta in una diversa escursione del segnale lungo la parte centrale della simulazione (dove la temperatura non varia più, a regime, solamente tra 85°C e 100°C ma si trova ad assumere valori mediamente inferiori). Il guidatore viene ad accorgersi del guasto al chilometro 21000 e solo a tal punto procede alla sostituzione della valvola difettosa.

## 8.2 Descrizione dei dati utilizzati nella simulazione

- Il successivo malfunzionamento riguarda il cambio e si manifesta approssimativamente dal chilometro 23300; in corrispondenza si assiste ad un nuovo abbassamento della temperatura del liquido refrigerante. In realtà il guasto al cambio è lo stadio ultimo di una evoluzione che dettagliati rapporti tecnici sulla vettura indicano cominciare con una perdita di olio. Quest'ultimo, mescolandosi al refrigerante dotato di una temperatura superiore, lo raffredda. Al contempo la perdita dell'olio provoca il guasto al cambio. Pertanto non è pienamente corretto affermare che l'anomalia alla temperatura di raffreddamento sia causata da quella del cambio, essendo entrambe delle manifestazioni finali della perdita di olio. Tuttavia per distinguere questo malfunzionamento dal successivo, si è preferito indicare l'evento anomalo occorso all'impianto di raffreddamento come dovuto al guasto del cambio.
- L'olio ha importanti effetti nell'asportazione del calore dal motore ed una perdita ha effetto sull'andamento della temperatura di raffreddamento: nel caso della simulazione la perdita dell'olio avviene tra il chilometro 24360 ed il chilometro 24600 e in tale fase si assiste ad un andamento brusco della temperatura.

La figura 8.2 mostra come sono distribuite durata e lunghezza delle 71 singole sessioni che compongono la simulazione complessiva (figure sulla sinistra) e come durata e lunghezza cumulate crescono in funzione delle sessioni (figure sulla destra).

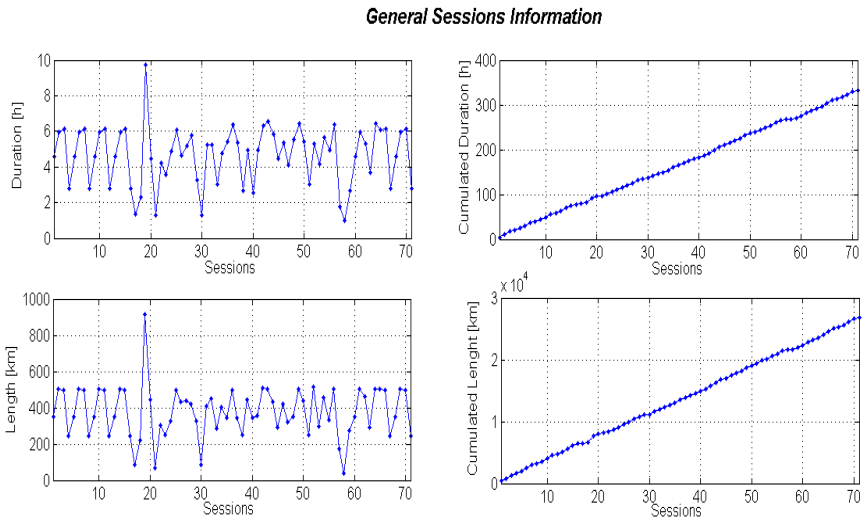


Figura 8.2: Informazioni generali su durata e lunghezza delle singole sessioni e sulla crescita di durata e lunghezza cumulate.

## 8.2.2 Analisi dei diagrammi velocità-potenza della vettura

Un approccio diagnostico basato solamente sul segnale di uscita e privo di variabili esogene di ingresso non dà alcuna informazione sulla condizione operativa del sistema.

Lo scopo della prossima figura 8.3 è quello di mostrare come le varie sessioni usate nella simulazione siano caratterizzate da condizioni operative simili tra loro, determinabili dall'analisi del grafico velocità-potenza.

La potenza (normalizzata per la massa) cui fanno riferimento le figure è calcolata come prodotto di velocità ed accelerazione longitudinale del veicolo. Si tratta pertanto del solo contributo inerziale, l'unico calcolabile dai dati rilevati.

La potenza è legata al *calore* sprigionato dal motore durante una fase di accelerazione o di frenatura e contribuisce a mutare la temperatura del liquido di raffreddamento. Quest'ultima è influenzata anche dalla velocità del veicolo, avente un effetto di raffreddamento per il liquido presente nel radiatore. Un diagramma velocità-potenza risulta dunque caratteristico nell'individuazione delle condizioni operative del veicolo, con particolare attenzione al sistema di raffreddamento.

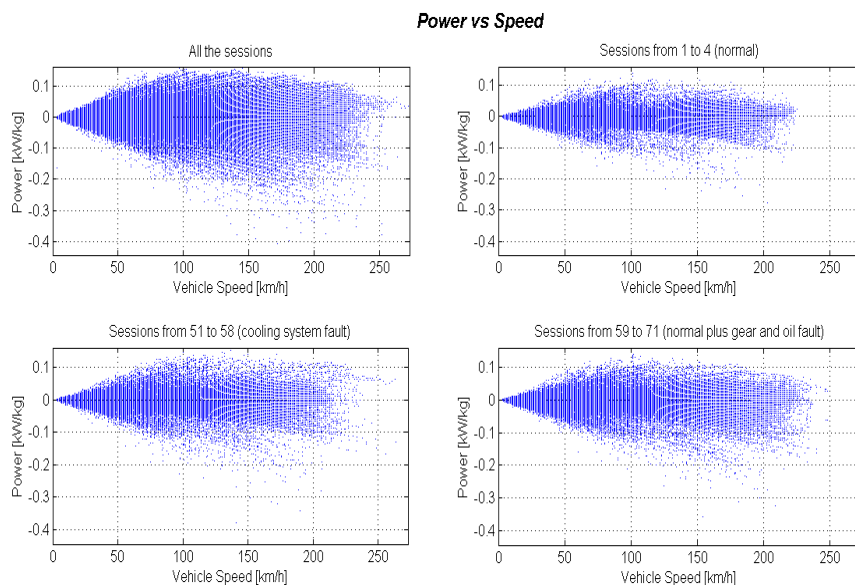


Figura 8.3: Diagrammi velocità-potenza della simulazione.

Il fatto che la distribuzione del funzionamento sia uniforme tanto in una fase iniziale di normale funzionamento (figura in alto a destra) che nel corso del guasto alla valvola termostatica (figura in basso a sinistra) e nell'ultima

fase comprensiva sia di normale funzionamento che di guasti al cambio e alla lubrificazione (figura in basso a destra), dimostra che le sessioni analizzate sono equivalenti dal punto di vista operativo e che le anomalie rilevabili sono effettivamente fonte di guasto (e non causate da cambiamenti delle condizioni operative).

### 8.3 Simulazione della diagnostica parametrica

La figura 8.4 riporta l'andamento completo del parametro  $a(t)$  ricorsivamente identificato in funzione dello spazio complessivo percorso dal veicolo. Sullo stesso grafico sono presenti l'andamento del parametro nominale calcolato in linea come media continua del parametro puntuale e le soglie (fissate empiricamente a  $\pm 1\%$  del nominale) entro cui deve stare il parametro durante un normale funzionamento. L'andamento irregolare del parametro è da imputare alla presenza del fattore di oblio utilizzato per l'identificazione, oltre che ai transitori della stima.

Si osservi come nel corso delle sessioni in cui si manifesta il primo guasto (lentamente tempo-variante) il parametro muta effettivamente il proprio andamento medio, incrementando (parte centrale della figura 8.4); corrispondentemente però si assiste ad un innalzamento del valore nominale e di conseguenza ad un aggiustamento delle soglie di tollerabilità, il cui effetto è di nascondere l'andamento anomalo del parametro.

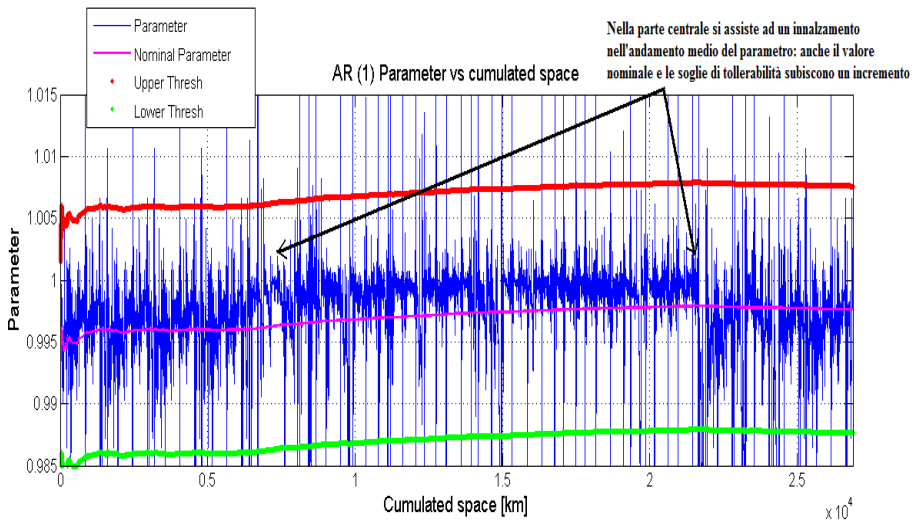


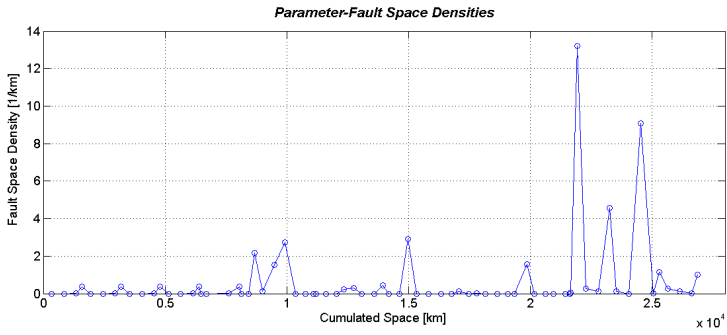
Figura 8.4: Andamento del parametro del modello AR(1) identificato on-line in funzione dello spazio percorso dal veicolo lungo l'intera simulazione.

## 8 Simulazioni

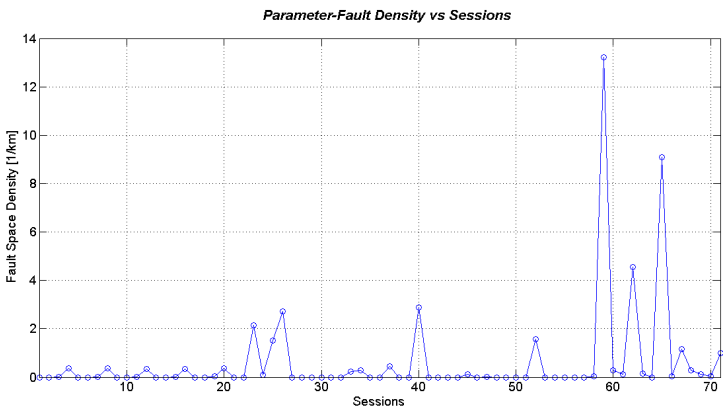
In figura 8.5 viene illustrato l'andamento della densità di guasto parametrico per chilometro in funzione dello spazio percorso (figura 8.5a) e del numero di sessione (figura 8.5b). Viene inoltre evidenziato sullo stesso grafico l'andamento completo della temperatura in funzione dello spazio percorso e la densità di guasto sul parametro (figura 8.5c). Il calcolo del numero di guasti parametrici per chilometro è stato effettuato dalla variabile booleana *ParamThreshExceed*, posta in uscita dal blocco di diagnosi parametrica (si veda la sottosezione 7.4.6).

Dalla figura 8.5 si nota l'incapacità della diagnosi parametrica di segnalare *con continuità* l'anomalia lentamente tempo-variante. Un picco nella densità di guasto si verifica ad avvenuta riparazione della valvola termostatica quando il sistema torna bruscamente a condizioni di normale funzionamento, viste come una novità dal parametro che si era adattato ad un diverso funzionamento. Nel caso dei guasti maggiormente bruschi al cambio ed all'olio la diagnostica parametrica mostra prontezza di segnalazione e discreta capacità previsionale (il picco nella densità di guasto avviene con circa 300 Km di anticipo rispetto al momento della riparazione del cambio e 70 Km prima del ripristino dell'olio motore, come evidenziato dalla figura 8.6).

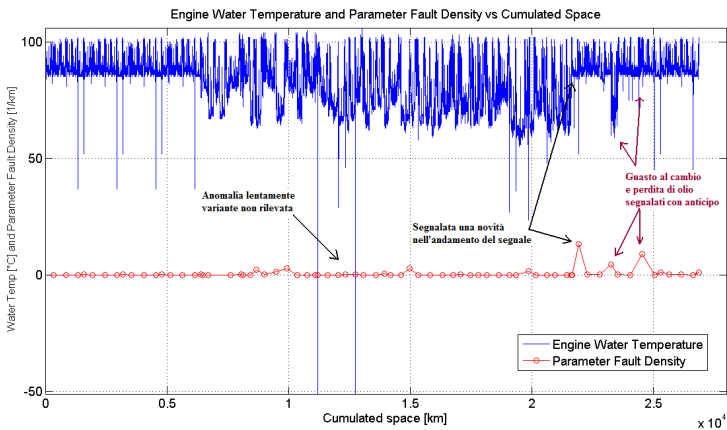
### 8.3 Simulazione della diagnostica parametrica



(a) Densità di guasto parametrico in funzione dello spazio percorso.



(b) Densità di guasto parametrico in funzione del numero di sessione.



(c) Densità di guasto parametrico e storia completa della temperatura di raffreddamento.

Figura 8.5: Prestazioni della diagnosi basata sul parametro del modello AR(1).

## 8 Simulazioni

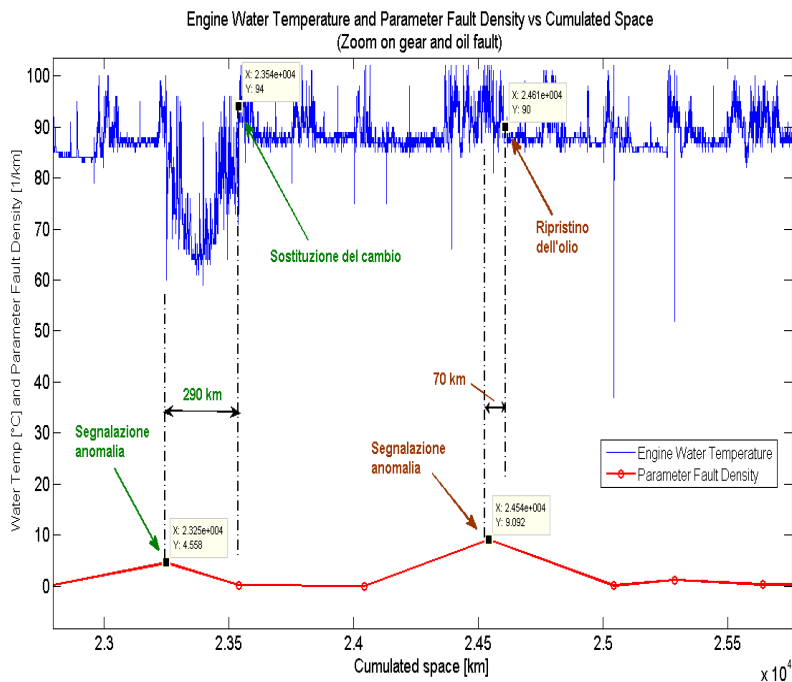


Figura 8.6: Capacità previsionale della diagnostica parametrica nel caso del guasto al cambio e della perdita di olio.



## 8.4 Simulazione della diagnostica di bianchezza

La figura 8.7 riporta l'andamento completo della derivata del correlogramma del residuo di modello nominale in funzione dello spazio percorso. Sullo stesso grafico sono presenti l'andamento della derivata nominale calcolata in linea come media continua e la soglia superiore (fissata empiricamente al 400% del valore di derivata nominale) entro cui deve stare il parametro durante un normale funzionamento.

Si osservi che sia nel corso della lenta degradazione della valvola termostatica che durante l'anomalia del cambio, il tasso di superamento della soglia risulta crescere; corrispondentemente si assiste ad un innalzamento dell'andamento della derivata nominale e di conseguenza ad un incremento della soglia di tollerabilità.

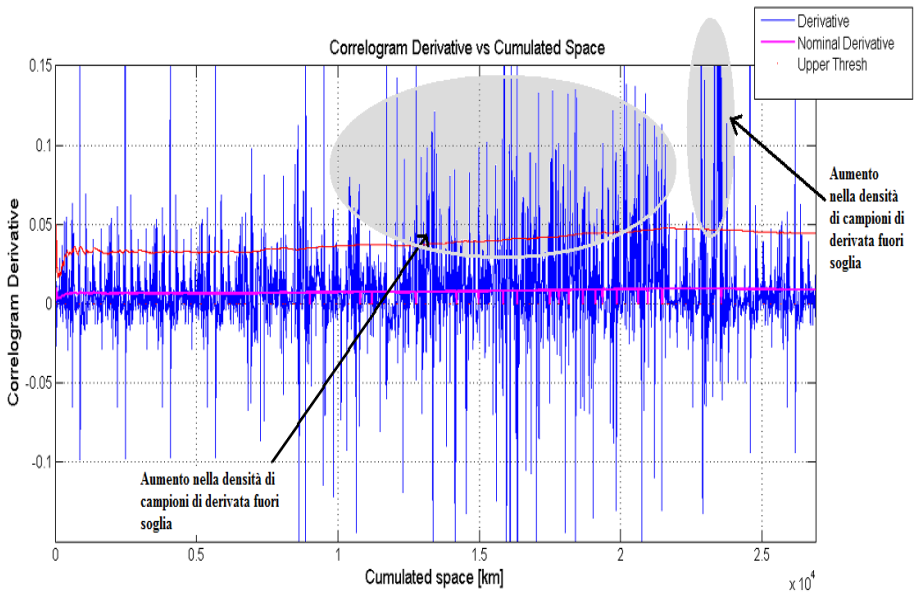


Figura 8.7: Andamento della derivata del correlogramma del residuo dei predizione in funzione dello spazio percorso dal veicolo lungo l'intera simulazione.

In figura 8.8 è proposto l'esito della diagnostica di bianchezza basata sul test della derivata del correlogramma. Vengono presentati l'andamento del numero di guasti in bianchezza per chilometro come funzione dello spazio percorso (figura 8.8a) e del numero di sessione (figura 8.8b). Viene inoltre proposto su uno stesso grafico l'andamento completo della temperatura

## 8 Simulazioni

in funzione dello spazio percorso e la densità di guasto in bianchezza per chilometro (figura 8.8c). Il numero di guasti è stato valutato dalla variabile booleana *WhitenessDiagnosticOutput*, uscita del blocco di diagnostica di bianchezza nell'implementazione Simulink<sup>2</sup>.

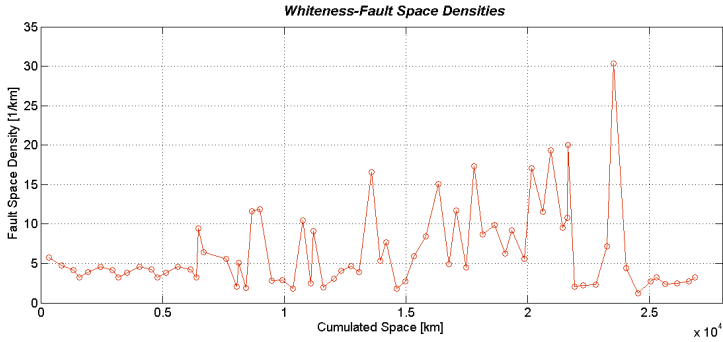
Dalla figura 8.8c si nota come, a differenza della parametrica, la diagnostica di bianchezza riesca a segnalare *con continuità* l'anomalia lentamente tempo-variante e nessun picco nella densità di guasto si verifichi ad avvenuta riparazione della valvola termostatica quando il sistema torna bruscamente a condizioni di normale funzionamento. Il guasto al cambio è ancora una volta segnalato anticipatamente, seppur in maniera meno evidente rispetto al caso parametrico; la figura 8.9 mostra infatti come la densità di guasto segnalata dalla diagnostica di bianchezza cominci leggermente a crescere prima della rottura del cambio ma presenti un massimo solo al momento dell'evento distruttivo.

Sempre con riferimento alla figura 8.9 è evidente la mancata segnalazione della perdita dell'olio da parte della tecnica di bianchezza, difetto non presente nel caso parametrico.

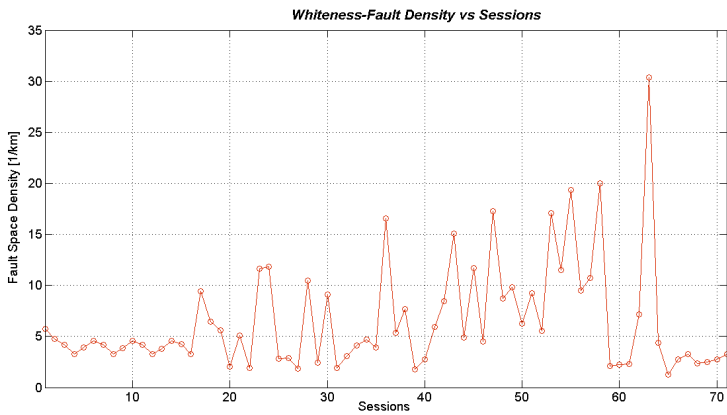
---

<sup>2</sup>A differenza di *WhitenessThreshExceed*, usata per abilitare o meno l'aggiornamento della derivata nominale, *WhitenessDiagnosticOutput* non considera come anomale le derivate al di sotto della soglia negativa, che non rappresentano un malfunzionamento.

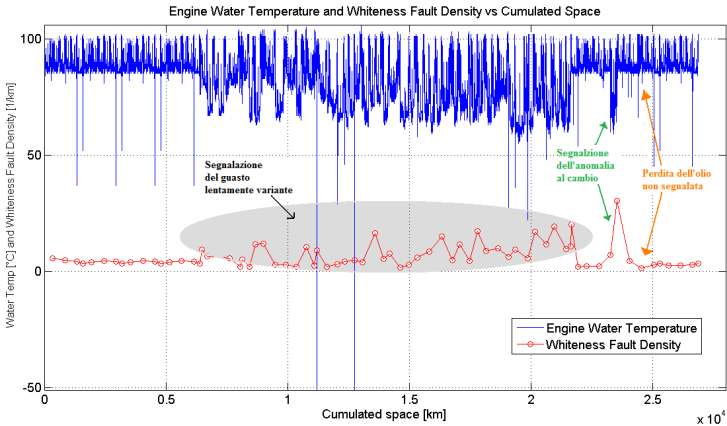
## 8.4 Simulazione della diagnostica di bianchezza



(a) Densità di guasto in bianchezza in funzione dello spazio percorso.



(b) Densità di guasto in bianchezza in funzione del numero di sessione.



(c) Densità di guasto di bianchezza e storia completa della temperatura di raffreddamento.

Figura 8.8: Prestazioni della diagnosi basata sulla bianchezza (test della derivata del correlogramma).

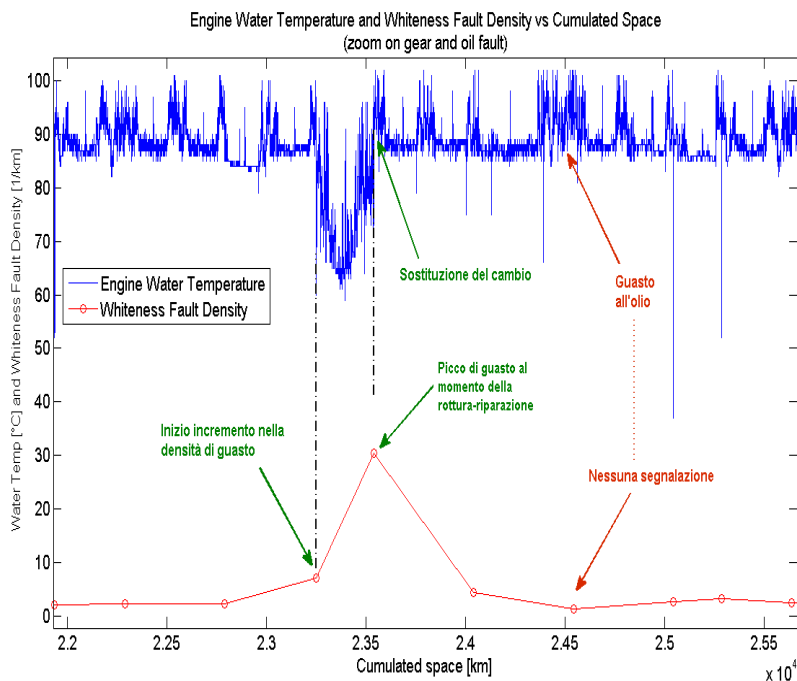


Figura 8.9: Capacità previsionale della diagnostica di bianchezza (derivata del correlogramma) nel caso del guasto al cambio e della perdita di olio.

## 8.5 Commento ai risultati ottenuti

Come testimoniato dalle simulazioni, la diagnostica basata sul parametro non ha presentato buona capacità previsionale dell'anomalia lentamente tempo-variante alla valvola termostatica, mentre meglio ha saputo fare nel caso dei guasti improvvisi al cambio e all'olio.

L'impossibilità nel rilevare delle lente anomalie al sistema è dovuta all'inquinamento del valore nominale del parametro con valori stimati durante la condizione di guasto, quando queste si manifestano lentamente. Si nota comunque la possibilità di rilevare con questo metodo delle *novità* improvvisi nella natura del segnale: ciò avviene ad esempio subito dopo la sostituzione della valvola termostatica (figura 8.5c) quando il sistema muta bruscamente le proprie caratteristiche tornando ad assumere il normale funzionamento: nel corso dell'azione della lenta anomalia il parametro nominale viene inquinato da valori stimati durante la condizione di guasto, portandosi ad un nuovo valore; in seguito alla riparazione vengono mutate rapidamente le caratteristiche del sistema ed il parametro identificato viene a discostarsi dal valore nominale maturato nella precedente fase.

Migliori prestazioni sono state invece ottenute con la diagnostica di bianchezza: in corrispondenza dell'anomalia lentamente tempo-variante causata dalla valvola termostatica si osserva un incremento nella derivata del correlogramma e conseguentemente un aumento della densità di guasto in bianchezza. Anche il secondo malfunzionamento, relativo al cambio, viene segnalato correttamente.

Il terzo guasto (perdita dell'olio, di natura improvvisa) è tuttavia rilevato solamente dalla diagnosi parametrica. Questo fatto evidenzia la complementare attitudine delle tecniche diagnostiche proposte: alla capacità di rilevare guasti improvvisi da parte della parametrica, si affianca la possibilità di catturare lente degradazioni del sistema da parte del test di bianchezza. Un uso congiunto delle due tecniche permette di allargare il numero e la tipologia delle anomalie rilevabili.



## 9 Conclusioni e sviluppi futuri

L'analisi di tecniche diagnostiche per la previsione di guasti in sistemi di svariata natura è argomento centrale nel recente sviluppo dell'automazione. In questa tesi sono state presentate due soluzioni affini alle tecniche di identificazione: una di diagnostica parametrica ed una basata sulla bianchezza del residuo di modello.

Tali tecniche sono state applicate ad un contesto concreto: il rilevamento di anomalie sul sistema di raffreddamento di un autoveicolo.

Per quest'ultimo si è cercato dapprima un modello a sfondo fisico ma vista la complessità delle relazioni causa-effetto emerse si è preferito percorrere la via dell'identificazione a scatola nera. Modelli ARMAX ed in spazio di stato hanno rappresentato i tentativi del tipo ingresso/uscita: alle loro ottime caratteristiche di bianchezza residuale si è contrapposta una pessima aderenza ai dati misurati dovuta probabilmente alla quantizzazione cui è sottoposta la misura della temperatura del refrigerante.

Trattando la sola temperatura di uscita come una serie temporale si sono ottenuti modelli con aderenza elevata e con residui di modello accettabili, seppur non dotati di totale bianchezza. Tra le famiglie ARMA e AR è stata selezionata la seconda, il cui procedimento per l'identificazione dei parametri è computazionalmente meno oneroso. L'applicazione dei criteri MDL/AIC per la scelta dell'ordine ha individuato infine nel modello AR(1) il candidato alla rappresentazione del segnale di temperatura del refrigerante.

L'apparato diagnostico è stato costruito considerando come variabili sintomatiche il parametro e la bianchezza residuale del modello AR(1) operante parallelamente al processo. Per quanto concerne il test di bianchezza è stato adottato il criterio del correlogramma, modificato per tenere in considerazione la cattiva quantizzazione del segnale di uscita e la non perfetta bianchezza del modello (criterio della derivata del correlogramma). Parametro e correlogramma sono stati calcolati on-line; l'identificazione parametrica è stata condotta tramite l'efficiente metodo dei minimi quadrati ricorsivi: l'introduzione del fattore di oblio è stata necessaria per rendere la stima maggiormente reattiva alle misure recenti.

L'esito diagnostico è stato definito dall'appartenenza o meno di parametro e derivata del correlogramma ad un range di tollerabilità stabilito tramite dei valori nominali. Tuttavia nessuna conoscenza a priori è stata richiesta per i valori nominali del parametro e della derivata che sono stati costruiti on-line (autoadattatività della diagnostica).

## 9 Conclusioni e sviluppi futuri

Entrambe le tecniche sono state valutate su una lunga storia di funzionamento di una vettura, completa di regimi di normale funzionamento e di fasi di guasto con influenza sull'impianto di raffreddamento. La diagnostica basata sul parametro ha saputo cogliere guasti improvvisi ma non ha mostrato capacità previsionale dell'anomalia lentamente tempo-variante.

Complementari prestazioni sono state ottenute con la diagnostica di bianchezza basata sulla derivata del correlogramma, in grado di segnalare anticipatamente l'anomalia lentamente variante, ma non il terzo, brusco, malfunzionamento.

Si è potuto così concludere come un uso congiunto delle due tecniche possa permettere un'estensione nella tipologia delle anomalie rilevabili.

Altro irrobustimento possibile è quello di affiancare al correlogramma altri criteri di bianchezza, quali il test dei cambi di segno ed il test di Anderson, proposti nelle sottosezioni 6.4.1 e 6.4.2. Come per il correlogramma, l'implementazione di questi test deve però tenere conto della quantizzazione presente nell'operazione di misura sul campo.

Qualora si fosse in presenza di un più accurato livello di conoscenza della temperatura di raffreddamento, una rivalutazione dei modelli del tipo ingresso/uscita (ARMAX, modelli di stato) sarebbe d'obbligo e rappresenterebbe un approccio decisamente più robusto rispetto a quello della serie temporale.

La soluzione proposta detta anche un metodo con cui è possibile costruire on-line i valori nominali utili alla diagnosi: questo modo di procedere porta tuttavia ad ambiguità nel caso in cui la conoscenza nominale venga costruita su dati fin dall'inizio guasti: l'apprendimento necessita cioè di una fase iniziale di buon funzionamento del sistema pena la taratura su valori nominali che non rappresentano il corretto funzionamento. Questa problematica si ritrova in ogni approccio mirato all'autoadattatività ed è spesso responsabile della mancata segnalazione di anomalie lentamente varianti, come accade con evidenza nella diagnosi parametrica dell'esempio. Il fatto che la bianchezza abbia risentito in minor modo di tale problema è probabilmente dovuto ai valori molto elevati assunti dalla derivata puntuale del correlogramma nella fase di guasto lentamente variante; valori, questi, che sono stati tali da superare il contemporaneo innalzamento subito dalla soglia nominale (cosa che non avveniva nel caso parametrico).



# 10 Appendici

## 10.1 Algoritmo di Durbin-Levinson

Oltre al metodo dei minimi quadrati per il calcolo dei parametri  $a_i$  di un modello AR( $n_a$ )

$$y(t) = a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) + \xi(t)$$

vi è un secondo algoritmo noto come ricorsione di Durbin-Levinson[16]. Questo consente di stimare i coefficienti di un AR( $n_a + 1$ ) a partire dai coefficienti del modello AR( $n_a$ ); anziché utilizzare metodi di ottimizzazione, il calcolo fa uso delle correlazioni campionarie stimabili dalla sequenza di dati assegnata.

L'algoritmo parte dal problema dell'identificazione del modello AR(1)

$$y(t) = a_1 y(t-1) + \xi(t)$$

dove  $\xi$  è un rumore bianco di media nulla e varianza  $\lambda^2$  ignota al pari di  $a_1$ .

Moltiplicando ambo i membri per  $y(t-\tau)$  e applicando il valore atteso, si ottengono le equazioni, dette di Yule-Walker,

$$\gamma(0) = a_1 \gamma(1) + \lambda^2 \tag{10.1}$$

$$\gamma(\tau) = a_1 \gamma(\tau-1) \quad \tau \neq 0 \tag{10.2}$$

con  $\gamma$  ad indicare la funzione di correlazione della sequenza di misure  $\{y\}_{t=1,2,\dots}$ :

$$\gamma(\tau) \triangleq E[y(t)y(t+\tau)]$$

La funzione  $\gamma$  può essere stimata a partire da un numero finito di dati della serie temporale  $\{y(t)\}_{t=1,\dots,N}$  mediante la formula della correlazione campionaria

$$\hat{\gamma}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} y(t)y(t+\tau) \quad \tau = 0, 1, 2, \dots \tag{10.3}$$

e sostituita all'autocorrelazione vera  $\gamma$ .

Da (10.1) e (10.2) si ottengono così le stime parametriche del modello:

$$a_1 = \frac{\hat{\gamma}(\tau)}{\hat{\gamma}(\tau-1)}$$

$$\lambda^2 = \hat{\gamma}(0) - a_1 \hat{\gamma}(1).$$

Nel calcolo del parametro  $a_1$  è opportuno usare  $\tau = 1$ ; infatti la formula (10.3) mostra che il grado di affidabilità delle stime della correlazione è tanto migliore quanto  $\tau$  è contenuto, perché più dati sono adoperati nel calcolo. Pertanto si ha:

$$a_1 = \frac{\hat{\gamma}(1)}{\hat{\gamma}(0)}$$

$$\lambda^2 = \hat{\gamma}(0) - \frac{\hat{\gamma}(1)^2}{\hat{\gamma}(0)}.$$

Si passi a considerare l'AR(2):

$$y(t) = A_1 y(t-1) + A_2 y(t-2) + \xi(t)$$

con  $\xi$  rumore bianco di media nulla e varianza  $\Lambda^2$ . Moltiplicando i due membri per  $y(t-\tau)$ , passando al valore atteso e ricordando la parità della funzione di autocorrelazione, si ottengono le nuove equazioni di Yule-Walker<sup>1</sup>:

$$\gamma(0) = A_1 \gamma(1) + A_2 \gamma(2) + \Lambda^2 \quad (10.4)$$

$$\gamma(1) = A_1 \gamma(0) + A_2 \gamma(1) \quad (10.5)$$

$$\gamma(2) = A_1 \gamma(1) + A_2 \gamma(0) \quad (10.6)$$

che consentono la determinazione dei parametri  $A_1$ ,  $A_2$  e  $\Lambda^2$  del modello AR(2) dalla stima di tre campioni di correlazione.

Ricordando le precedenti formule di Yule-Walker per l'AR(1)

$$\gamma(0) = a_1 \gamma(1) + \lambda^2 \quad (10.7)$$

$$\gamma(1) = a_1 \gamma(0) \quad (10.8)$$

e che i campioni di correlazione sono gli stessi dipendendo solo dalla sequenza di misure, confrontando le (10.8) e (10.5) si trova

$$A_1 = a_1 - A_2 \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} \quad (10.9)$$

---

<sup>1</sup>In generale  $\gamma(\tau) = A_1 \gamma(\tau-1) + A_2 \gamma(\tau-2)$  per  $\tau \geq 2$

mentre da (10.7) e (10.4)

$$a_1\gamma(1) + \lambda^2 = A_1\gamma(1) + A_2\gamma(2) + \Lambda^2. \quad (10.10)$$

Sostituendo la (10.9) nella (10.10) si determina la varianza dell'errore del modello AR(2):

$$\Lambda^2 = \lambda^2 - A_2 \left[ \gamma(2) - \frac{\gamma(1)^2}{\gamma(0)} \right].$$

Sostituendo la (10.9) nella (10.6) e ricordando che  $a_1 = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)}$  si trova

$$\gamma(2) - \frac{\gamma(1)^2}{\gamma(0)} = A_2 \left[ \gamma(0) - \frac{\gamma(1)^2}{\gamma(0)} \right]$$

nella quale il termine tra parentesi quadre è la varianza  $\lambda^2$  dell'errore di modello AR(1), come si può facilmente ricavare dalle eq. (10.7) e (10.8). Riassumendo, sussistono le relazioni:

$$A_2 = \frac{1}{\lambda^2} [\gamma(2) - a_1\gamma(1)]$$

$$A_1 = a_1 - A_2 \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)}$$

$$\Lambda^2 = \lambda^2 [1 - A_2^2]$$

che permettono di calcolare i parametri di un modello AR(2) a partire da quelli dell'AR(1) precedentemente identificato. Al solito, la funzione di correlazione  $\gamma$  è sostituibile dalla sua stima  $\hat{\gamma}$ .

Le formule sono generalizzabili per il calcolo dei parametri di un AR( $n_a + 1$ ) a partire da quelli dell'AR( $n_a$ ): detti  $a_i^{(n_a+1)}$   $i = 1, 2, \dots, n_a + 1$  i coefficienti dell'AR( $n_a + 1$ ) e  $\lambda_{(n_a+1)}^2$  la relativa varianza d'errore ed indicati con  $a_i^{(n_a)}$   $i = 1, 2, \dots, n_a$  e con  $\lambda_{(n_a)}^2$  gli analoghi parametri dell'AR( $n_a$ ), si dimostrano valere le formule ricorsive:

$$a_{n_a+1}^{(n_a+1)} = \frac{1}{\lambda_{(n_a)}^2} \left[ \gamma(n_a + 1) - \sum_{i=1}^{n_a} a_i^{(n_a)} \gamma(n_a + 1 - i) \right] \quad (10.11)$$

$$a_i^{(n_a+1)} = a_i^{(n_a)} - a_{n_a+1}^{(n_a+1)} a_{n_a+1-i}^{(n_a)}$$

$$\lambda_{(n_a+1)}^2 = \lambda_{(n_a)}^2 \left[ 1 - \left( a_{n_a+1}^{(n_a+1)} \right)^2 \right].$$

L'algoritmo di Durbin-Levinson è sfruttato per stabilire se una data serie temporale  $\{y\}$  è rappresentabile con un modello autoregressivo.

Detti  $a_\tau^{(\tau)}$  gli ultimi coefficienti dei vari modelli  $AR(\tau)$ ,  $\tau = 1, 2, \dots$  calcolati con le iterazioni dell'algoritmo (eq. (10.11)), si definisce la funzione di correlazione parziale

$$PARCOR(\tau) \triangleq a_\tau^{(\tau)}$$

e se ne traccia l'andamento al variare dell'ordine  $\tau = 1, 2, \dots$  del modello: se il processo vero che genera la successione dei dati è un  $AR(n_a)$ , risulterà  $PARCOR(\tau) = 0$  per  $\tau > n_a$ .

## 10.2 La distribuzione di probabilità «chi quadro»

La distribuzione  $\chi^2(m)$  (chi-quadro) descrive le caratteristiche probabilistiche di una variabile  $x^2$  ottenuta come somma dei quadrati di  $m$  variabili aleatorie indipendenti<sup>2</sup>  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  dotate di distribuzione gaussiana standard ( $x_t \sim G(0, 1)$   $t = 1, \dots, m$ ):

$$x^2 = \sum_{t=1}^m x_t^2$$

il numero  $m$  rappresenta i gradi di libertà della variabile aleatoria.

Si può dimostrare che la densità di probabilità della variabile  $x^2$  è data dalla funzione

$$P(x \leq x^2 < x + dx) \triangleq f_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases} \quad (10.12)$$

in cui<sup>3</sup>

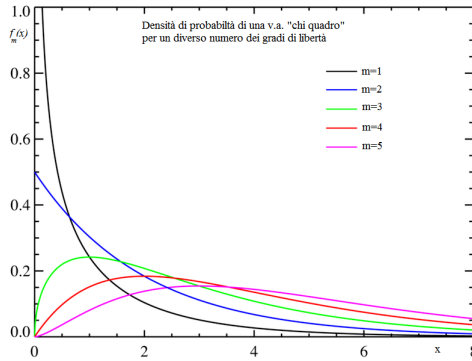
$$\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(m-2)!!}{2^{\frac{m-1}{2}}}$$

L'andamento grafico della funzione  $f_m(x)$  per diversi valori di  $m$  è proposto in figura 10.1a.

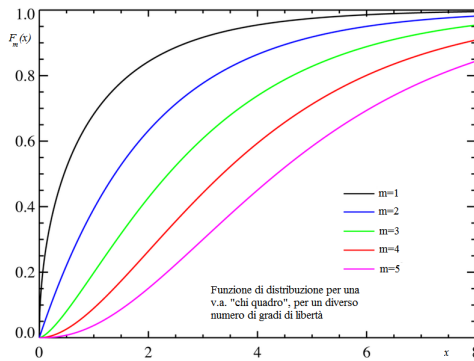
<sup>2</sup>Nel caso di variabili gaussiane indipendenza ed incorrelazione sono equivalenti

<sup>3</sup>!! è il semifattoriale, definito per un generico intero  $n$  come  $n!! = n(n-2)(n-4)\dots 1$

## 10.2 La distribuzione di probabilità «chi quadro»



(a) Densità di probabilità della variabile aleatoria chi quadro



(b) Distribuzione della v.a. chi quadro

Figura 10.1: Densità e distribuzione di una v.a. «chi quadro»

La funzione distribuzione di una variabile aleatoria distribuita come  $\chi^2(m)$  è definita dall'integrale della 10.12 e si dimostra risultare

$$P(x^2 \leq x) \triangleq F_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^x t^{\frac{m}{2}-1} e^{-t} dt & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

il cui andamento grafico, per vari gradi di libertà, si trova in figura 10.1b.

Media e varianza della variabile aleatoria  $x^2 \sim \chi^2(m)$  sono rispettivamente

$$E[x^2] = m$$

e

$$\text{var}(x^2) = 2m.$$

## 10 Appendici

I valori assunti dalla distribuzione di probabilità  $\chi^2$  sono tabulati in letteratura. La tabella 10.1 mostra un estratto dei valori critici più comunemente utilizzati; in corrispondenza del numero di gradi di libertà  $m$ , posto sulle righe, e dei valori del livello di significatività  $\alpha$ , sulle colonne, si trova il valore critico  $z_\alpha$  tale per cui  $P(x^2 < z_\alpha)$ .

$m \setminus \alpha$	0.8	0.9	0.95	0.99	0.999
4	5.989	7.779	9.488	13.277	18.467
5	7.289	9.236	11.070	15.086	20.515
6	8.558	10.645	12.592	16.812	22.458
7	9.803	12.017	14.067	18.475	24.322
8	11.030	13.362	15.507	20.090	26.124
9	12.242	14.684	16.919	21.666	27.877
10	13.442	15.987	18.307	23.209	29.588

Tabella 10.1: Valori critici di una v.a. «chi quadro» per diversi valori di significatività e per un diverso numero di gradi di libertà

Così la v.a. chi quadro ottenuta dalla somma dei quadrati di  $m = 10$  v.a. gaussiane standard incorrelate, quali i campioni di una sequenza bianca normalizzata valutati per  $m$  diversi ritardi temporali, ha con probabilità  $\alpha = 0.95$  (95%) valore inferiore a  $z_\alpha = 18.307$ , come desumibile dall'estratto di tabella 10.1.

Quando sia data una sequenza gaussiana standard bianca  $\{\varepsilon(t)\}_{t=1,\dots,N}$  sussiste la distribuzione  $\chi^2(m)$  sia per la quantità

$$\sum_{t=1}^m \varepsilon(t)^2$$

che per la quantità

$$N\hat{\rho}^T \hat{\rho}$$

in cui si sia posto

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{N} \sum_{t=m+1}^N \varepsilon(t) \begin{pmatrix} \varepsilon(t-1) \\ \varepsilon(t-2) \\ \vdots \\ \varepsilon(t-m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}(1) \\ \hat{\gamma}(2) \\ \vdots \\ \hat{\gamma}(m) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\gamma}(0) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t)^2$$

e infine

10.2 La distribuzione di probabilità «chi quadro»

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\gamma}(0)}.$$

L'ultimo fatto segue dalla struttura dello scalare  $N\hat{\rho}^T\hat{\rho}$ , somma di quadrati di v.a. che si dimostrano essere incorrelate e distribuite come una Gaussiana standard:

$$N\hat{\rho}^T\hat{\rho} = \left(\sqrt{N}\hat{\rho}\right)^T \left(\sqrt{N}\hat{\rho}\right) = \sum_{\tau=1}^m \left(\sqrt{N}\hat{\rho}(\tau)\right)^2$$

con

$$\sqrt{N}\hat{\rho}(\tau) \sim AsG(0,1) \quad \tau = 1, \dots, m$$





# Bibliografia

- [1] J.J.Deyst and J.C.Deckert: «RCS jet failure identification for the space shuttle», Proc. IFAC 75, Cambridge, MA, August 1975.
- [2] S.L.Fagin: «Recursive linear regression theory, optimal filter theory, and error analyses of optimal systems», IEEE Int. Conv. Record, March 1964.
- [3] T.J.Tarn and J.Zaborszky: «A practical nondiverging filter», AIAA Jl 8, 1970.
- [4] A.H.Jazwinski: «Limited memory optimal filtering», IEEE Trans. Aut. Control, 1968.
- [5] R.V.Beard: «Failure Accommodation in Linear Systems Through Self-Reorganization», Man Vehicle Laboratory, Cambridge, MA, February 1971.
- [6] H.L.Jones: «Failure Detection in linear systems», Ph.D. Thesis, Dept of Aeronautics and Astronautics, M.I.T., Cambridge, MA, September 1973.
- [7] A.S.Willsky: «A Survey of Design Methods for Failure Detection in Dynamic Systems», Pergamon Press, May 1976.
- [8] M.H.A.Davis: «The application of nonlinear filtering to fault detection in linear systems», IEEE Trans. Aut. Control, April 1975.
- [9] T.T.Chien: «An Adaptive Technique for a Redundant-Sensor Navigation System», Draper Labs., Cambridge, MA, February 1972.
- [10] R.K.Mehra and J.Peschon: «An innovations approach to fault detection and diagnosis in dynamic systems», Automatica.
- [11] L.H.Chiang, E.L.Russel and R.D.Bratz: «Fault Detection and Diagnosis in Industrial Systems», Springer, 2000.

## Bibliografia

- [12] S.Simani: «Model-based fault diagnosis in dynamic systems using identification techniques», Ph.D. Thesis, Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia.
- [13] R.Isermann: «Model-based fault-detection and diagnosis-status and applications», Institute of Automatic Control, Darmstadt, Germany, 2004.
- [14] A.H.Gray and J.D.Markel: «Distance measures for speech processing», IEEE Trans. Acoust. Speech. Sig. Process, 1976.
- [15] M.Basseville and A.Benveniste: «Spectral Detection of abrupt changes in spectral characteristics of digital signals», IEEE Trans. Inf. theory, 1983.
- [16] S.Bittanti: «Identificazione dei Modelli e Sistemi Adattativi», Pitagora Editrice Bologna, 2004.
- [17] C.Brighenti and M.A.Sanz-Bobi: «Auto-Regressive Processes Explained by Self-Organized Maps: Application to the Detection of Abnormal Behavior in Industrial Processes», IEEE, 2011.
- [18] C.Brighenti: «Anomaly detection techniques for industrial processes: State-of-the-Art and Application», 2010.
- [19] S.Bittanti: «Teoria della Predizione e del Filtraggio», Pitagora Editrice Bologna, 2004.
- [20] G.Picci: «Identificazione di Sistemi Dinamici», Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione dell'Università degli Studi di Padova, Italy, 2013.
- [21] A.S.Willsky, J.J.Deyst and B.S.Crawford: «Two self test methods applied to an inertial system problem», July 1975.
- [22] Q.Zhang, M.Basseville and A.Benveniste: «Early warning of slight changes in systems and plants with application to condition based maintenance», IRISA, Campus de Beaulieu, Rennes Cédex, France, July 1992.
- [23] L.Bottoli, S.Bottoli: «La patente di guida: organi di raffreddamento», Edizioni Bocca, 2006.