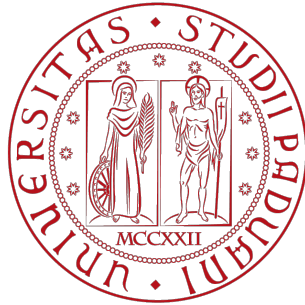


Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Scienze Statistiche
Corso di Laurea Magistrale in
Scienze Statistiche



Modelli statistici per la valutazione del capitale con un'applicazione a Solvency II

Relatore: Prof. Massimiliano Caporin
Dipartimento di Scienze Economiche e Aziendali

Correlatore: Dott.ssa Giorgia Callegaro
Dipartimento di Matematica

Laureando: Mario Namtao Shianti Larcher
Matricola: 1059458

Anno Accademico 2014/2015

Indice

1	Solvency II e il SCR	9
1.1	Il Solvency Capital Requirement	10
1.2	La Standard Formula per il calcolo del SCR	11
1.3	Il modello Delta-Normale di Garbade	13
1.4	Dal modello Delta-Normale alla Standard Formula	15
1.5	I limiti della Standard Formula	16
1.6	Il Modello Interno	17
2	Valutazione Neutrale al Rischio	19
2.1	Il modello del Mercato Finanziario	19
2.2	Misure di Martingala Equivalenti	22
2.3	Prezzaggio Neutrale al Rischio	25
3	Il modello CIR per i tassi di interesse	29
3.1	Le dinamiche dei tassi nel modello CIR	29
3.2	Densità di transizione per il processo CIR	30
3.3	Stima dei parametri del modello CIR	31
3.4	Simulazione del processo CIR	32
4	Il modello HN-GARCH per i prezzi	35
4.1	Il processo HN-GARCH(1, 1)	35
4.2	Stima del modello HN-GARCH(1, 1)	37
5	Metodi di Monte Carlo	39
5.1	Introduzione ai metodi di Monte Carlo	39
5.2	Il metodo delle Variabili Antitetiche	41
5.3	Sequenze di Sobol	43
5.3.1	Discrepanza	43
5.3.2	Sequenze di Van der Corput	45
5.3.3	Sobol	46
5.4	Il metodo LSMC applicato al calcolo del SCR	48

5.4.1	Ambiente matematico	48
5.4.2	Capitale Disponibile	49
5.4.3	Solvency Capital Requirement	52
5.4.4	I Minimi Quadrati di Monte Carlo	52
6	Modelli Additivi Generalizzati	55
6.1	Base B-spline	55
6.2	P-splines	56
6.3	La Cross-Validazione Generalizzata	57
6.4	Base Prodotto Tensoriale	59
7	Applicazione del modello	61
7.1	Descrizione della polizza	61
7.1.1	Caratteristiche di una polizza <i>unit-linked</i>	61
7.1.2	Polizze <i>unit-linked</i> con garanzie finanziarie	62
7.1.3	Descrizione del portafoglio	65
7.2	Simulazione dei fattori di rischio	68
7.2.1	Simulazione dei fattori di sconto v_t	68
7.2.2	Simulazione dei rendimenti ρ_t	70
7.2.3	Simulazione delle percentuali di riscatti l_t	71
7.3	Applicazione del metodo LSMC	71
7.3.1	Generazione degli shock tramite Sobol	72
7.3.2	Costruzione degli scenari per il primo anno tramite Sobol e stima della funzione \widehat{PVFP}_1	73
7.3.3	Costruzione degli scenari per il primo anno sotto la misura P e calcolo dei $\widehat{PVFP}_1^{(k)}$	74
7.3.4	Calcolo del Solvency Capital Requirement	75
7.4	Stima della funzione \widehat{PVFP}	76
7.4.1	I Minimi Quadrati e l'indice C_p di Mallows	78
7.4.2	GAM, prodotto tensoriale e P-splines	80
7.5	Confronto dei modelli e calcolo del SCR	83
7.5.1	Confronto tra Minimi Quadrati e GAM	83
7.5.2	Distribuzione delle perdite e Solvency Capital Requirement	84
A	Teoria della probabilità	91

Introduzione

Nel corso di questa tesi verranno trattate procedure e modelli statistici finalizzati alla valutazione del capitale di un'impresa. Tali metodi possono raggiungere diversi scopi; è possibile utilizzarli per produrre una distribuzione delle possibilità finanziarie future di un'impresa, con forti implicazioni sulla pianificazione degli investimenti, oppure per calcolare un requisito di capitale e, più in generale, per la gestione del rischio. Approfittando dell'attualità del tema, si è scelto di utilizzare il calcolo del *Solvency Capital Requirement*, accantonamento imposto alle imprese assicuratrici dalla direttiva Solvency II, come elemento su cui valutare le tecniche sviluppate.

Nel primo capitolo introdurremo *Solvency II*, descriveremo l'*approccio standard* della direttiva e ne evidenzieremo i fondamenti teorici e le criticità che hanno portato il legislatore a spingere le compagnie assicurative verso l'adozione di un *Modello Interno*. Non ci soffermeremo sugli aspetti legati al diritto o sui dettagli tecnici della direttiva; in generale, ci concentreremo sui metodi statistici che, come detto, hanno una valenza più ampia rispetto all'applicazione scelta.

Nel secondo capitolo ripercorreremo i passaggi principali che portano alla *Formula della Valutazione Neutrale al Rischio*, strumento fondamentale per la valutazione di qualsiasi attività finanziaria e perno attorno a cui costruiremo tutti i nostri processi.

Nel terzo e quarto capitolo presenteremo un modello per i tassi d'interesse (*CIR*) e uno per i rendimenti delle attività finanziarie (il *modello GARCH di Heston e Nandi*). In seguito, utilizzeremo questi processi per generare degli scenari realistici da cui far dipendere lo sviluppo di un fondo legato a un portafoglio di polizze, e per determinare i fattori con cui scontare i flussi monetari futuri.

Nel quinto capitolo svilupperemo alcune tecniche legate ai metodi di Monte Carlo, in particolare tratteremo il *metodo della Variabili Antitetiche* e introdurremo le sequenze a bassa discrepanza, soffermandoci sulle *sequenze di Sobol*. Nella parte finale del capitolo descriveremo il *metodo dei Minimi Quadrati di Monte Carlo* (LSMC), improntandolo direttamente al calcolo del

Solvency Capital Requirement. Tale metodo, sviluppato inizialmente per la valutazione di opzioni americane e proposto da Bauer et al. (2009) come alternativa alla *Solvency Standard Formula*, sarà il canale dove fluiranno tutte le tecniche sviluppate; il proposito di questa tesi è chiarificarne le procedure e, se possibile, migliorarne l'efficacia.

Il sesto capitolo presenta i modelli *GAM*, fermandosi soltanto sugli elementi che verranno utilizzati nel capitolo successivo, come le *P-splines*, i lisciatori *Prodotto Tensoriale* e la *Cross-Validazione Generalizzata*.

Infine, nell'ultimo capitolo verranno applicate le tecniche sviluppate in un caso realistico, tratto da un portafoglio di piani di accumulo di capitale *unit-linked* con garanzia di minimo della compagnia assicurativa Generali Italia (i dettagli di questo portafoglio sono stati ricavati da Manukian, 2012). In questo contesto utilizzeremo i modelli CIR e HN-GARCH per generare le traiettorie per il primo anno dei *fattori di rischio* influenzanti il valore del portafoglio (non sono gli unici che considereremo ma i rimanenti li modelleremo in modo più semplice). Per ogni scenario ottenuto, dall'anno uno per una durata di venti anni, genereremo altre traiettorie *risk-neutral* (si veda il Capitolo 2 per le motivazioni) che utilizzeremo per valutare il *valore attuale dei profitti futuri* nei vari scenari. Sui valori ottenuti calcoleremo, quindi, il requisito di capitale.

Come vedremo (e come noto in letteratura), la presenza della garanzia creerà delle dinamiche tali da invalidare la procedura suggerita da Solvency II in mancanza di un modello interno. Tra le proposte volte a superare questa problematicità, si citano la tecnica dei *Portafogli Replicanti* (Koursaris, 2011c), metodo che cerca di replicare i flussi finanziari di un'impresa attraverso portafogli di attività facilmente prezziabili per poi equipararne i valori; la tecnica *Curve Fitting* (Koursaris, 2011b), metodo che calcola il "valore esatto" per pochi scenari *real-world* per poi interpolare i punti ottenuti; e il *metodo dei Minimi Quadrati di Monte Carlo*, tecnica, come detto, che approfondiremo in questa tesi. Il metodo LSMC è in parte simile alla tecnica curve fitting, se questa genera *pochi* valori *precisi* del capitale di un'impresa per poi interpolarli su tutti gli scenari, il metodo che utilizzeremo genera invece *molti* valori *imprecisi* su cui stimare una funzione di regressione. Secondo Koursaris (2011d), i LSMC sono superiori alla tecnica del curve fitting al fine di calcolare il Solvency Capital Requirement; quest'ultima può essere interpretata in questo contesto come un'applicazione (inefficiente) della prima. La tecnica dei portafogli replicanti è invece stata proposta da Morrison (2008) abbinata, e non in contrapposizione, ai LSMC, utilizzando i portafogli ricavati come *variabili di controllo* nell'omonima tecnica (per approfondimenti si veda Glasserman, 2003). Nel seguito non tratteremo queste possibilità ma ci concentreremo invece sul potenziare il metodo dei minimi quadrati di

Monte Carlo tramite le tecniche già citate, proponendo inoltre l'utilizzo di un modello GAM per la parte di regressione. Tali proposte porteranno a un miglioramento sia rispetto alla *standard formula* di Solvency II che alla versione classica dei minimi quadrati di Monte Carlo.

Capitolo 1

Solvency II e il Solvency Capital Requirement

Solvency II (direttiva 2009/138/EC) è una disposizione dell'Unione europea, rivolta al settore assicurativo, con lo scopo di recepire i cambiamenti avvenuti nelle pratiche di risk management e di allargare lo spettro dei rischi considerati ai fini di copertura. La nuova normativa, con entrata in vigore prevista al 1° gennaio 2016, sostituirà la precedente Solvency I, riforma avviata nella seconda metà degli anni novanta e recepita in due direttive del 2002.

Solvency II, similmente alla regolamentazione bancaria Basilea II, si sviluppa su tre principali pilastri (ANIA, 2013):

Pilastro I	Pilastro II	Pilastro III
Valutazione degli attivi	Poteri e procedure di vigilanza	Obblighi informativi nei confronti della vigilanza
Riserve tecniche	Corporate Governance	Obblighi informativi nei confronti del mercato
Elementi costitutivi	Controllo interno	
Requisiti di capitale	Risk management	

In questa tesi ci concentreremo sul primo pilastro, in particolare studieremo come affinare le procedure per il calcolo del Solvency Capital Requirement, il principale requisito patrimoniale previsto dalla normativa.

1.1 Il Solvency Capital Requirement

Il *Solvency Capital Requirement* (SCR) è definito come il capitale economico che le imprese di assicurazione e riassicurazione devono mantenere, al fine di poter far fronte con una probabilità minima del 99,5% agli impegni che possono emergere nell'arco di un anno. Tale richiesta vuole quindi garantire che l'insolvenza della compagnia si verifichi, al più, una volta ogni duecento anni. In formule,

$$\text{SCR} = \arg \min_x \left\{ P \left(\text{AC}_0 - \frac{\text{AC}_1}{1+i} > x \right) \leq 1 - \alpha \right\}, \quad (1.1)$$

dove i è il tasso di interesse privo di rischio, $\alpha = 0,995$ e il *Capitale Disponibile* (Available Capital, AC) al tempo $t = 0$ e $t = 1$ è definito da

$$\text{AC}_0 = \text{ANAV}_0 + \text{PVFP}_0 - \text{CoC}_0, \quad (1.2)$$

$$\text{AC}_1 = \text{ANAV}_1 + \text{PVFP}_1 + X_1 - \text{CoC}_1. \quad (1.3)$$

Nelle formule sopra, l'ANAV è il *Patrimonio Netto Rettificato* (Adjusted Net Asset Value), derivato dal *Patrimonio Netto* (Net Asset Value, valore delle attività meno valore delle passività), includendo aggiustamento per attività intangibili, guadagni non realizzati, perdite sulle attività e così via; PVFP è il *valore attuale dei profitti futuri* (Present Value of Future Profits), valore attuale del flusso di cassa degli azionisti dovuto al portafoglio in vigore e alle attività a copertura delle passività associate; CoC è il *Costo del Capitale* (Cost-of-Capital charge), somma del costo di attrito del capitale richiesto e del costo dei rischi non immunizzabili (per riferimenti su questi elementi si veda CFO Forum, 2009).

Calcolare il SCR equivale quindi a computare il Valore a Rischio (VaR) al 99,5% della variazione del capitale proprio su un intervallo annuale. Il *Capitale in Eccesso* (Excess Capital) in $t = 0$, d'altra parte, è definito come $\text{AC}_0 - \text{SCR}$ e soddisfa il seguente requisito:

$$P \left(\frac{\text{AC}_1}{1+i} \geq \text{AC}_0 - \text{SCR} \right) \geq \alpha, \quad (1.4)$$

quindi la probabilità (valutata in $t = 0$) che il Capitale Disponibile in $t = 1$ sia maggiore o uguale al Capitale in Eccesso è almeno α (e.g. 99,5%).

1.2 La Standard Formula per il calcolo del SCR

Per il calcolo del Solvency Capital Requirement la direttiva propone una “*standard formula*” di tipo modulare, i rischi considerati vengono definiti attraverso la seguente struttura gerarchica:

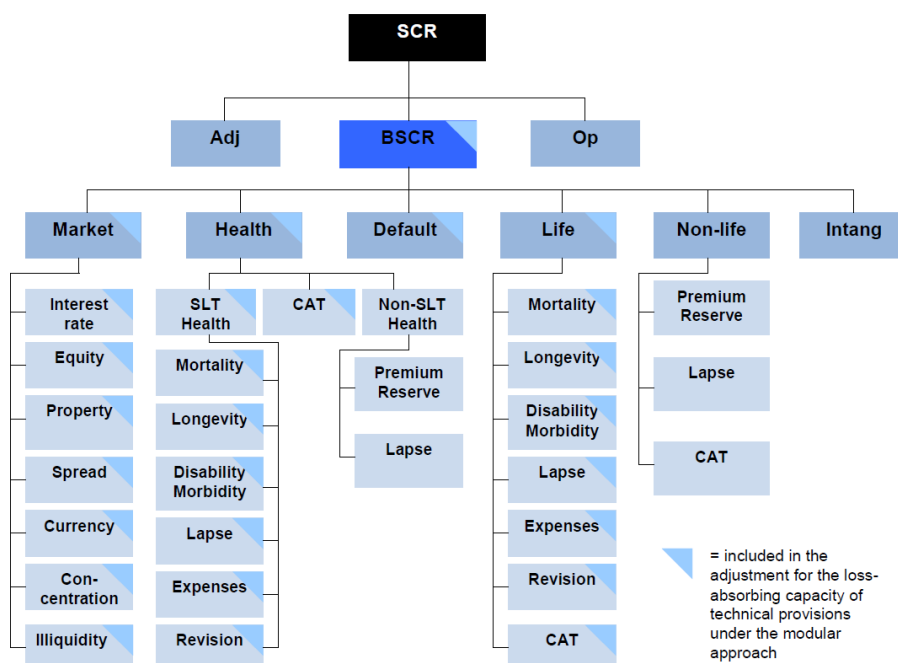


Figura 1.1: Moduli per il calcolo del Solvency Capital Requirement, *fonte: European Commission*.

Il SCR viene calcolato come

$$\text{SCR} = \text{BSCR} + \text{Adj} + \text{SCR}_{Op}, \quad (1.5)$$

dove BSCR sta per *Basic Solvency Capital Requirement*, *Adj* indica l'aggiustamento per capacità di assorbimento di perdite delle riserve tecniche e delle imposte differite e il SCR_{Op} è il requisito di capitale per il *Rischio Operativo* (Operational Risk).

Il BSCR, a sua volta, viene ottenuto aggregando i requisiti di capitale per

le sei categorie maggiori,

SCR_{mkt} = R. di c. per il *Rischio di Mercato* (Market Risk);

SCR_{def} = R. di c. per il *Rischio di Controparte* (Counterparty Default Risk);

SCR_{life} = R. di c. per il *Rischio di Sott. Vita* (Life Underwriting Risk);

SCR_{nl} = R. di c. per il *Rischio di Sott. Non-Vita* (Non-Life Underwriting Risk);

SCR_{health} = R. di c. per il *Rischio Salute* (Health Underwriting Risk);

$SCR_{intangibles}$ = R. di c. per il *Rischio Beni Intangibili* (Intangible Assets Risk).

La formula utilizzata per il suo calcolo è

$$BSCR = \sqrt{\sum_{ij} \rho_{ij} SCR_i SCR_j} + SCR_{intangibles}, \quad (1.6)$$

dove ρ_{ij} indica la correlazione tra il modulo i e il modulo j con gli indici varianti in $\{mkt, def, life, nl, health\}$.

I coefficienti di correlazione sono definiti tramite la seguente tabella:

	Market	Default	Life	Health	Non-life
Market	1	0,25	0,25	0,25	0,25
Default	0,25	1	0,25	0,25	0,25
Life	0,25	0,25	1	0,25	0
Health	0,25	0,25	0,25	1	0
Non-life	0,25	0,25	0	0	1

Tabella 1.1: Matrice di correlazione per il calcolo del SCR, *fonte: European Commission*.

Come già visibile in (1.6), i ρ_{ij} relativi agli *intangible assets* vengono posti dalla direttiva uguali a zero. La scelta è facilmente capibile considerando la definizione di *beni intangibili*. Difficilmente la *reputazione*, la *proprietà intellettuale*, il *know-how* e così via, si possono pensare correlati alle categorie sopra citate. I rischi *non-life*, riguardanti principalmente danni a beni, vengono considerati non correlati con quelli *life*, legati al rischio di morte, e *health*, rischio di malattia. Anche in questo caso, non c'è motivo di credere che i primi siano legato ai secondi. I rimanenti coefficienti in 1.1 sono scelti positivi e pari a 0,25 (esclusi ovviamente quelli sulla diagonale). Tale scelta, come vedremo, è da considerarsi solo indicativa. Le compagnie possono infatti discostarsi da questi valori per meglio cogliere le caratteristiche peculiari di ciascuna, a patto di giustificare adeguatamente ogni deviazione dallo standard.

Allo stesso modo, i singoli requisiti di capitale SCR_i vengono calcolati tramite la formula

$$SCR_i = \sqrt{\sum_{lk} \rho_{ilk} SCR_{il} SCR_{ik}}, \quad (1.7)$$

dove questa volta l e k indicano i sotto-moduli del modulo i e ρ_{ilk} viene definita per ogni i tramite tabelle analoghe alla 1.1. Prediamo ad esempio $i = mkt$. Dalla figura 1.1 vediamo che i sotto-moduli (tra cui variano l e k) sono in questo caso: *Interest rate; Equity; Property; Spread; Currency; Concentration; Illiquidity*. Per ogni macro categoria sono presenti inoltre delle complicazioni specifiche. Utilizzando ancora *Market* a titolo esplicativo, viene richiesto di calcolare il valore dei requisiti in seguito a shock verso l'alto e verso il basso del mercato azionario e dei tassi di interesse, per ogni caso vengono fornite le correlazioni (una matrice per il caso *up* e una per il caso *down*) e gli shock stessi [20].

Essendo lo scopo di questa tesi la ricerca di tecniche statistiche e procedure che migliorino la valutazione dei requisiti di capitale, non ci addentreremo ulteriormente nei dettagli tecnici della direttiva ma piuttosto approfondiremo gli aspetti statistico-matematici che, una volta sviluppati, potranno essere adattati ai vari contesti specifici. Questa considerazione è tanto più motivata data la possibilità prevista dalla direttiva di sviluppare un *modello interno* con caratteristiche diverse rispetto alla *standard formula*, sia nella scelta dei coefficienti di correlazione sia nella struttura della formula (vedi paragrafo 1.6).

1.3 Il modello Delta-Normale di Garbade

La base teorica della *standard formula* è il modello *Delta-Normale* (Delta-Normal) proposto da Garbade nel 1986, tale modello approssima le variazioni di un portafoglio tramite il suo *delta* (gradiente del portafoglio rispetto alle variabili di stato). Le ipotesi di questo metodo, chiamato anche *Covariance Matrix*, possono essere sintetizzate, nel contesto del calcolo del SCR, in questo modo:

1. I rischi considerati seguono una distribuzione normale multivariata (o perlomeno ellittica);
2. le perdite sono funzioni lineari dei rischi.

Come vedremo, tali ipotesi possono risultare così restrittive da compromettere la validità della stima ottenuta, sottostimando, anche sostanzialmente, il requisito di capitale.

Introduciamo quindi il modello Delta-Normale presentando in maniera più rigorosa le sue assunzioni.

- (a) Il vettore dei rendimenti del portafoglio $\mathbf{r}_t = (r_1(t), \dots, r_k(t))^\top$, calcolato rispetto al vettore delle variabili di stato $\mathbf{x}_t = (x_1(t), \dots, x_k(t))^\top$ tramite la formula

$$r_i(t) = \frac{x_i(t) - x_i(t - \Delta t)}{x_i(t - \Delta t)}, \quad (1.8)$$

ha distribuzione normale multivariata di media zero (vettore) e matrice di covarianza costante Σ_r , cioè

$$\mathbf{r}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_r). \quad (1.9)$$

- (b) Sia $P(t, \mathbf{x}_t)$ la funzione rappresentate il valore del portafoglio al tempo t . Tale funzione è derivabile una volta rispetto ad ogni argomento, inoltre, le derivate di ordine superiore al primo sono nulle (linearità).

Date le assunzioni appena fatte, lo sviluppo in serie di Taylor di $P(t, \mathbf{x}_t)$ attorno ad un punto (t_0, \mathbf{x}_0) , si riduce a

$$P(t, \mathbf{x}_t) = P(t_0, \mathbf{x}_0) + P_t(\mathbf{x}_0)(t - t_0) + \mathbf{g}(t_0)^\top (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_0), \quad (1.10)$$

dove $\mathbf{g}(\cdot)$ indica il vettore delle derivate parziali di $P(t, \mathbf{x}_t)$ rispetto a \mathbf{x}_t e $P_t(\cdot)$ la derivata parziale rispetto a t . La variazione del portafoglio $\Delta P(t, \mathbf{x}) = P(t, \mathbf{x}_t) - P(t - \Delta t, \mathbf{x}_{t-\Delta t})$ nell'intervallo Δt è quindi

$$\Delta P(t, \mathbf{x}_t) = P_t(\mathbf{x}_{t-\Delta t})\Delta t + \mathbf{g}(t - \Delta t)^\top \Delta \mathbf{x}. \quad (1.11)$$

Vista l'assunzione sulla distribuzione dei rendimenti e la relazione $\Delta \mathbf{x} = \text{diag}(\mathbf{x}_{t-\Delta t})\mathbf{r}(t)$, la distribuzione di $\Delta \mathbf{x}$ è $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$ dove

$$\Sigma = \text{diag}(\mathbf{x}_{t-\Delta t})\Sigma_r \text{diag}(\mathbf{x}_{t-\Delta t}). \quad (1.12)$$

Sfruttando un noto risultato sulla distribuzione normale e ponendo $t = \Delta t = 1$ (come sarà in seguito), è facile mostrare che

$$\Delta P(1, \mathbf{x}_1) \sim \mathcal{N}(P_t(\mathbf{x}_0), \mathbf{g}(0)^\top \Sigma \mathbf{g}(0)). \quad (1.13)$$

Ricordiamo ora la definizione di Valore a Rischio.

1.4. DAL MODELLO DELTA-NORMALE ALLA STANDARD FORMULA 15

Definizione 1.1 (Valore a Rischio). Il *Valore a Rischio* (Value at Risk) a livello α di una variabile casuale L , *perdita* (loss) del portafoglio, è definito come

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\}.$$

Scrivendo per semplicità di notazione ΔP per $\Delta P(1, \mathbf{x}_1)$, VaR_α per $\text{VaR}_\alpha(-\Delta P)$, P_t per $P_t(\mathbf{x}_0)$ e \mathbf{g} per $\mathbf{g}(0)$, abbiamo che

$$\begin{aligned} P(-\Delta P > \text{VaR}_\alpha) &= 1 - \alpha \\ P\left(\frac{P_t - \Delta P}{\sqrt{\mathbf{g}^\top \Sigma \mathbf{g}}} > \frac{P_t + \text{VaR}_\alpha}{\sqrt{\mathbf{g}^\top \Sigma \mathbf{g}}}\right) &= 1 - \alpha \\ P\left(Z \leq \frac{P_t + \text{VaR}_\alpha}{\sqrt{\mathbf{g}^\top \Sigma \mathbf{g}}}\right) &= \alpha, \end{aligned} \quad (1.14)$$

da cui

$$\text{VaR}_\alpha = -P_t + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\mathbf{g}^\top \Sigma \mathbf{g}}, \quad (1.15)$$

dove Z è una variabile normale standard e $\Phi^{-1}(\cdot)$ è la sua funzione quantile.

1.4 Dal modello Delta-Normale alla Standard Formula

Interpretiamo ora \mathbf{x}_t come il vettore dei fattori di rischio e quindi con $P(t, \mathbf{x}_t)$ il valore del capitale netto in funzione degli stessi. Seguendo le indicazioni dalla direttiva, $\alpha = 99,5\%$ e $t = \Delta t = 1$. La variazione di $P(t, \mathbf{x}_t)$ dipende solo dai fattori di rischio, P_t quindi è uguale a zero e il vettore delle derivate parziali $\mathbf{g} = \left(\frac{\partial P(t, \mathbf{x}_t)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial P(t, \mathbf{x}_t)}{\partial x_k}\right)^\top$ rappresenta la variazione del capitale netto su un intervallo annuale dovuta a variazioni di \mathbf{x}_t . Il SCR a un anno è quindi

$$\text{SCR} = \Phi^{-1}(0,995) \sqrt{\mathbf{g}^\top \Sigma \mathbf{g}}. \quad (1.16)$$

La matrice Σ può essere scomposta tramite le matrici R , matrice di correlazione e S matrice diagonale delle varianze, come segue

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \rho_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k1} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_k \end{pmatrix}, \quad \Sigma = SRS. \quad (1.17)$$

La formula (1.16) diventa quindi

$$\begin{aligned} \text{SCR} &= \Phi^{-1}(0,995)\sqrt{\mathbf{g}^\top \mathbf{S} \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{g}} \\ \text{SCR} &= \sqrt{\mathbf{g}^\top \mathbf{S} \Phi^{-1}(0,995) \mathbf{R} \Phi^{-1}(0,995) \mathbf{S} \mathbf{g}} \\ \text{SCR} &= \sqrt{\mathbf{v}^\top \mathbf{R} \mathbf{v}}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

dove $\mathbf{v} = \Phi^{-1}(0,995)\mathbf{S}\mathbf{g}$ rappresenta proprio il vettore dei caricamenti di capitale per ciascun rischio (gli SCR_i). Infatti, avendo ipotizzando $\Delta x_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$, il requisito di capitale ($\alpha = 99,5\%$) per la possibile perdita dovuta a $x_i(t)$, $L_{x_i} = \frac{\partial P(t, \mathbf{x}_t)}{\partial x_i} [x_i(0) - x_i(1)]$, è $\frac{\partial P(t, \mathbf{x}_t)}{\partial x_i} \sigma_i \Phi^{-1}(0,995)$. Per ottenere questo risultato abbiamo usato l'ipotesi che il capitale netto vari linearmente in funzione dei fattori di rischio e che le derivate parziali siano tutte positive, se, ad esempio, la i -esima non lo fosse, basterebbe definire il rischio i come $-x_i(t)$. Sostituendo gli SCR_i alle componenti di \mathbf{v} , la formula (1.18) diventa

$$\text{SCR} = \sqrt{\sum_{ij} \rho_{ij} \text{SCR}_i \text{SCR}_j}, \quad (1.19)$$

che è proprio la *standard formula* della direttiva.

1.5 I limiti della Standard Formula

Abbiamo visto che la formula proposta dalla direttiva si basa su assunzioni riguardanti due tipi di linearità. La prima linearità ipotizzata è quella implicita nell'ipotesi di normalità congiunta dei fattori di rischio, riassunta dal coefficiente di correlazione lineare di Pearson. Questa ipotesi distributiva può risultare troppo stringente. Due distribuzioni con deviazioni standard e coefficienti di correlazione identici possono differire sensibilmente nelle code se una delle due, come spesso accade, include dipendenze di tipo non-lineare.

Il secondo tipo di linearità riguarda il comportamento delle passività in relazione ai fattori di rischio. Tale ipotesi spesso non trova riscontro empirico, molti fattori hanno infatti un impatto non-lineare sulle passività.

L'inadeguatezza di tale assunzione è nota. In un articolo del 2007 che analizza il *Swiss Solvency Test*, analogo della *standard formula*, Cardi e Runak hanno mostrato che questo approccio sottostima significativamente il requisito di capitale per le Assicurazioni Vita (ma fornisce generalmente una buona stima per aziende assicurative generiche). Questa e altre considerazioni hanno portato il regolatore a permettere e incentivare l'utilizzo di un *modello interno* da parte delle compagnie assicurative.

1.6 Il Modello Interno

La direttiva prevede, affianco al modello standard, la possibilità per le imprese di utilizzare un *modello interno*. Esso può discostarsi in tutto o in parte dalla metodologia proposta nella direttiva e deve essere approvato dall'Autorità di Vigilanza posta a controllo della compagnia.

L'approvazione del modello interno è vincolata al superamento di alcuni test riguardanti:

- (*standard di qualità statistica*) qualità delle metodologie utilizzate, delle ipotesi statistiche fatte e così via;
- (*standard di calibrazione*) il SCR calcolato deve essere effettivamente corrispondente al $\text{VaR}_{0,995}$;
- (*assegnazione di profitti e perdite*) si richiede di spiegare come la categorizzazione dei rischi del modello sarà utilizzata per spiegare le cause dei profitti e delle perdite nell'anno di bilancio precedente;
- (*standard di validazione*) la compagnia deve validare il modello e verificarlo ciclicamente, anche comparando i risultati con l'esperienza precedente;
- (*standard di documentazione*) la documentazione fornita a supporto del modello deve essere sufficientemente completa;
- (*verifica dell'utilizzo*) il modello interno deve essere ampiamente utilizzato in tutti i processi di *risk management*, *governance* aziendale e più in generale, in tutti i processi di decisione e di allocazione del capitale.

Nel corso di questa tesi, svilupperemo tecniche e procedure con lo scopo di migliorare la stima del Solvency Capital Requirement nel contesto del *modello interno* previsto dalla direttiva. Valideremo la teoria sviluppata sul caso dato da un portafoglio di piani di accumulo di capitale *unit-linked* con garanzia di minimo, della durata di venti anni e inizio dopo un anno dalla data in cui si vuole calcolare il requisito di capitale. Genereremo quindi degli scenari *real-world* per il primo anno (principalmente tramite i modelli CIR e HN-GARCH) da cui far diramare delle traiettorie *risk-neutral* lunghe venti anni dei fattori di rischio. Grazie ai fondamenti dati dalla teoria della valutazione neutrale al rischio, e utilizzando il metodo dei minimi quadrati di Monte Carlo, calcoleremo infine il Solvency Capital Requirement, prima

con il metodo base e poi utilizzando un modello GAM come sostituto dei minimi quadrati. Confronteremo infine i risultati ottenuti con i due metodi, e paragoneremo i SCR ricavati con il requisito di capitale dato dalla *standard formula*.

Capitolo 2

Valutazione Neutrale al Rischio

La frase “valutazione neutrale al rischio” (risk-neutral valuation), ha in sé una connotazione evocativa. L’idea dietro questa terminologia è che, per dare un valore a un *titolo derivato* o *contratto contingente*, ci si immerga idealmente in una realtà *neutrale al rischio*, cioè in un mondo dove gli investitori sono sempre indifferenti tra il valore atteso di una quantità aleatoria e la quantità aleatoria stessa. In tale realtà inoltre, le dinamiche degli strumenti finanziari sono semplificate dal fatto che il loro rendimento atteso è il tasso di interesse privo di rischio e il prezzo di un contratto contingente non è altro che il suo valore atteso scontato con tale tasso. Questa teoria, nata grazie al contributo fondamentale di Cox e Ross (1975), contiene un risultato sorprendente. Il prezzo ottenuto in tale mondo ideale, sotto alcune condizioni legate ai concetti di *assenza di arbitraggio* e *completezza del mercato*, è “corretto”, nel senso che è lo stesso che si otterrebbe calcolandolo con le dinamiche di quello reale ¹.

2.1 Il modello del Mercato Finanziario

Rappresentiamo matematicamente il *mercato finanziario* $\mathcal{M}(P)$ (in seguito indicato anche solo con \mathcal{M}) tramite lo spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$, dove Ω indica lo *spazio campionario*; \mathcal{F} è una σ -algebra di sottoinsiemi di Ω ; P è la *misura di probabilità del mondo reale* e \mathbb{F} è una *filtrazione* di \mathcal{F} . In tale mercato sono negoziate $d + 1$ *attività finanziarie* (assets)

¹Questo capitolo è tratto principalmente da Bingham e Kiesel (2004), in particolare si segue l’esposizione fatta nel sesto capitolo. Per una trattazione che non faccia uso del concetto di martingala e delle relative “complicazioni” si veda Björk (2009). Per la definizione dei concetti probabilistici si faccia riferimento all’Appendice A.

che possiamo pensare come azioni, obbligazioni, opzioni e così via, la cui evoluzione dei prezzi è definita dai processi stocastici S_0, \dots, S_d . Assumiamo che $S = (S_0, \dots, S_d)$ segua un processo adattato, continuo, strettamente positivo e sia una semi-martingala su $\mathcal{M}(P)$.

Definizione 2.1 (numéraire). Un *numéraire* è un processo di un prezzo $X(t)$ quasi certamente strettamente positivo per ogni $t \in [0, T]$.

Assumiamo che $S_0(t)$ sia un'attività che non paga dividendi che utilizzeremo come *numéraire*. Per aiutare l'immaginazione, si pensi che, storicamente, il *conto di deposito del mercato monetario* (money market account) $B(t) = e^{r(t)}$, con $r(t)$ processo deterministico positivo e $r(0) = 0$, è stato usato come *numéraire*. Il ruolo del *numéraire* sarà in seguito quello di fattore di sconto per il nostro processo.

Definizione 2.2 (strategia di negoziazione). Chiamiamo un processo $\varphi(t)$ a valori in \mathbb{R}^{d+1} , prevedibile e localmente limitato,

$$\varphi(t) = (\varphi_0(t), \dots, \varphi_d(t)), \quad t \in [0, T], \quad (2.1)$$

con

$$\int_0^T E(\varphi_0(t)) dt < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^d \int_0^T E(\varphi_i^2(t)) dt < \infty, \quad (2.2)$$

strategia di negoziazione (trading strategy) o *processo dinamico del portafoglio* (dynamic portfolio process).

Le condizioni (2.2) assicurano che l'integrale stocastico $\int_0^t \varphi(u) dS(u)$ esista. Economicamente, i $\varphi_i(t)$ rappresentano il numero di quote dell'attività i detenute nel portafoglio al tempo t . Tali quote devono essere determinate in base alle informazioni disponibili *prima* del tempo t ; i.e. l'investitore sceglie la composizione del suo portafoglio al tempo t dopo aver osservato i prezzi $S(t-)$. Le componenti $\varphi_i(t)$ possono assumere sia valori positivi che negativi, stiamo quindi implicitamente permettendo la *vendita allo scoperto* (short selling) e assumendo ($\varphi_i(t)$ ha valori in \mathbb{R}) che le attività siano perfettamente divisibili.

Definizione 2.3 (valore, guadagno, autofinanziante).

(i) il valore del portafoglio φ al tempo t è dato dal prodotto scalare

$$V_\varphi(t) = \varphi(t) \cdot S(t) = \sum_{i=0}^d \varphi_i(t) S_i(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.3)$$

Il processo $V_\varphi(t)$ è chiamato il *processo del valore* (value process) o *processo della ricchezza* (wealth process) della strategia di negoziazione φ .

(ii) Il *processo del guadagno* (gain process) $G_\varphi(t)$ è definito da

$$G_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(u) dS(u) = \sum_{i=0}^d \int_0^t \varphi_i(u) dS_i(u). \quad (2.4)$$

(iii) Una strategia di negoziazione φ è chiamata *autofinanziante* se il suo processo del valore $V_\varphi(t)$ soddisfa

$$V_\varphi(t) = V_\varphi(0) + G_\varphi(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.5)$$

Le definizioni appena date, dal punto di vista finanziario, implicano che tutti i cambiamenti nella ricchezza di un portafoglio siano dovuti esclusivamente a guadagni o perdite dello stesso, e non da prelievi o iniezioni di nuovi fondi. Questa impostazione ci aiuterà in seguito a definire matematicamente il concetto di *arbitraggio*.

D'ora in avanti considereremo spesso le versioni *scontate* delle quantità finora trattate. Ricordando la nostra scelta per il *numéraire*, il *processo del prezzo scontato* (discounted price process) è

$$\tilde{S}(t) = \frac{S(t)}{S_0(t)} = (1, \tilde{S}_1(t), \dots, \tilde{S}_d(t)), \quad (2.6)$$

con $\tilde{S}_i(t) = S_i(t)/S_0(t)$, $i = 1, \dots, d$. Chiamiamo quindi *processo del valore scontato*

$$\tilde{V}_\varphi(t) = \frac{V_\varphi(t)}{S_0(t)} = \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^d \varphi_i(t) \tilde{S}_i(t), \quad (2.7)$$

e *processo del guadagno scontato*

$$\tilde{G}_\varphi(t) = \sum_{i=1}^d \int_0^t \varphi_i(u) d\tilde{S}_i(u). \quad (2.8)$$

Notiamo che $\tilde{G}_\varphi(t)$ non dipende dalla quota del *numéraire* detenuta nel portafoglio.

Viene ora da chiedersi se la scelta arbitraria fatta per il *numéraire* sia determinante per le proprietà del portafoglio. Fortunatamente il seguente teorema ci dice che non è così. Per la dimostrazione di questo e degli altri enunciati lasciati senza dimostrazione si rimanda al libro di Bingham e Kiesel.

Teorema 2.1.1 (Teorema della Numéraire Invarianza). *Un portafoglio autofinanziante rimane tale anche in seguito al cambio di numéraire.*

Dal teorema segue direttamente il corollario

Corollario 2.1.2. *Sia φ una strategia di negoziazione. φ è autofinanziata se e solo se*

$$\tilde{V}_\varphi(t) = \tilde{V}_\varphi(0) + \tilde{G}_\varphi(t). \quad (2.9)$$

Ovviamente, essendo il numéraire un processo strettamente positivo, $V_\varphi(t) \geq 0$ se e solo se $\tilde{V}_\varphi(t) \geq 0$.

2.2 Misure di Martingala Equivalenti

Intuitivamente, l'idea di *arbitraggio* che useremo è quella di poter creare ricchezza illimitata attraverso investimenti privi di rischio. Certamente questo non dovrebbe essere possibile in un mercato ben funzionante.

Definizione 2.4 (arbitraggio). Una strategia di negoziazione φ è chiamata un'*opportunità di arbitraggio* se il processo del valore V_φ soddisfa le seguenti condizioni:

$$V_\varphi(0) = 0, \quad P(V_\varphi(T) \geq 0) = 1 \quad \text{e} \quad P(V_\varphi(T) > 0) > 0. \quad (2.10)$$

Come detto a inizio capitolo, per il prezzaggio delle nostre attività, vorremmo passare dal mondo reale a uno "neutrale al rischio". Lo strumento che ci permetterà questo passaggio è il concetto che andiamo ora a definire.

Definizione 2.5 (martingala equivalente). Diciamo che la misura di probabilità Q definita su (Ω, \mathcal{F}) è una *misura di martingala equivalente* (forte) se:

- (i) Q è equivalente a P ;
- (ii) il processo del prezzo scontato \tilde{S} è una Q -martingala locale (martingala).

Chiamiamo l'insieme delle misure di martingala \mathbb{M} .

È lecito chiedersi se esista un modo per determinare se una misura equivalente sia anche una misura di martingala. Il seguente lemma, oltre a rispondere a questo quesito, ci dà un'idea di come debbano essere strutturati i processi in un mondo neutrale al rischio. In tale realtà, la componente di deriva per ogni processo del prezzo deve essere pari al tasso di interesse privo di rischio.

Lemma 2.2.1. *Assumiamo $S_0(t) = B(t) = e^{r(t)}$, allora $Q \sim P$ è una misura di martingala se e solo se ogni processo del prezzo di un'attività S_i ha le dinamiche sotto Q della forma*

$$dS_i(t) = r(t)S_i(t)dt + dM_i(t), \quad (2.11)$$

dove M_i è una Q -martingala locale.

Vogliamo ora mostrare la relazione tra l'esistenza di opportunità di arbitraggio e l'esistenza di misure di martingala equivalenti; per fare questo ci restringeremo a un sottoinsieme delle strategie di negoziazione.

Definizione 2.6 (tame). Un strategia di negoziazione autofinanziante φ è chiamata *tame* (relativamente al numéraire S_0) se

$$\tilde{V}_\varphi(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.12)$$

Chiamiamo Φ l'insieme di tali strategie di negoziazione.

Lemma 2.2.2. *Sia X una martingala (locale) e ξ un processo uniformemente (localmente) limitato e prevedibile. Allora, l'integrale stocastico $\int \xi dX$ è a sua volta una martingala (locale).*

Lemma 2.2.3. *Una martingala locale non negativa X tale che X_0 è integrabile è una supermartingala.*

Proposizione 2.2.4. *Se $\varphi \in \Phi$, $\tilde{V}_\varphi(t)$ è una martingala locale non negativa e anche una supermartingala, sotto ogni $Q \in \mathbb{M}$.*

Dimostrazione. Dato che \tilde{S} è una martingala locale e $\varphi \in \Phi$ è un processo prevedibile e localmente limitato, dal lemma 2.2.2 segue che

$$\tilde{G}_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(u) d\tilde{S}(u)$$

è a sua volta una martingala locale. Essendo $\tilde{V}_\varphi(t) = \tilde{V}_\varphi(0) + \tilde{G}_\varphi(t)$ anche $\tilde{V}_\varphi(t)$ lo è, non negativa dato che φ è tame. Per il lemma 2.2.3 $\tilde{V}_\varphi(t)$ è una supermartingala. \square

Teorema 2.2.5. *Assumiamo che $\mathbb{M} \neq \emptyset$. Allora il modello del mercato finanziario \mathcal{M} non contiene opportunità di arbitraggio in Φ .*

Dimostrazione. Per ogni $\varphi \in \Phi$ e sotto ogni $Q \in \mathbb{M}$, per la Proposizione 2.2.4 $\varphi \in \Phi$ è una supermartingala, cioè

$$E_Q[\tilde{V}_\varphi(t) | \mathcal{F}_u] \leq \tilde{V}_\varphi(u), \quad \text{per ogni } u \leq t \leq T.$$

Per come abbiamo definito un'opportunità di arbitraggio, dobbiamo avere $\tilde{V}_\varphi(0) = V_\varphi(0) = 0$. Dunque

$$E_Q[\tilde{V}_\varphi(t)] \leq 0, \quad \text{per ogni } 0 \leq t \leq T.$$

Dato che φ è tame, $\tilde{V}_\varphi(t) \geq 0$ e, per quanto scritto sopra, $E_Q[\tilde{V}_\varphi(t)] = 0 \quad \forall t \in [0, T]$, in particolare $E_Q[\tilde{V}_\varphi(T)] = 0$. Un'opportunità di arbitraggio deve anche soddisfare $P(V_\varphi(T) \geq 0) = 1$, dato che $Q \sim P$, questo significa che $Q(V_\varphi(T) \geq 0) = 1$. Unendo le due affermazioni abbiamo che

$$Q(V_\varphi(T) > 0) = P(V_\varphi(T) > 0) = 0,$$

dimostrando l'enunciato. \square

Abbiamo visto che l'esistenza di una misura di martingala equivalente garantisce l'assenza di opportunità di arbitraggio nel nostro mercato. Vorremmo ora mostrare che vale il viceversa ma purtroppo la definizione di opportunità di arbitraggio che abbiamo dato non è sufficientemente stringente per questo scopo. Diamo due definizioni preliminari che ci serviranno per definire matematicamente il concetto economico "non ci sono pranzi gratuiti con rischi che svaniscono". In finanza si usa dire che non esiste qualcosa come un "pranzo gratuito" (free lunch), intendendo che i profitti sono sempre collegati ai rischi assunti.

Definizione 2.7 (strategia semplice, δ -ammissibile). Una strategia di negoziazione prevedibile, si dice *semplice* se è un processo rappresentabile come combinazione lineare finita di processi stocastici della forma $\psi \mathbb{1}_{(\tau_1, \tau_2]}(t)$, dove τ_1 e τ_2 sono tempi di arresto e ψ è una variabile casuale \mathcal{F}_{τ_1} -misurabile.

Una strategia semplice è *δ -ammissibile* se il relativo processo del valore $V_\varphi(t)$ rispetta

$$V_\varphi(t) \geq -\delta \quad \forall t \in [0, T].$$

Definiamo quindi il nostro nuovo concetto di "non arbitraggio".

Definizione 2.8 (NFLVR). Un processo di prezzo S soddisfa la condizione *NFLVR* (*no free lunch with vanishing risk*) se, per ogni sequenza $\{\varphi_n\}$ di strategie di negoziazione semplici tali che φ_n è δ -ammissibile e la sequenza δ_n tende a zero, abbiamo che

$$V_{\varphi_n}(T) \rightarrow 0 \quad \text{in probabilità per } n \rightarrow \infty.$$

Possiamo ora enunciare il teorema che lega il concetto di non arbitraggio, nel senso appena descritto, con l'esistenza di una misura di martingala equivalente.

Teorema 2.2.6 (Teorema Fondamentale del Prezzaggio delle Attività). *Per un modello di mercato finanziario \mathcal{M} con prezzi limitati, esiste una misura di martingala equivalente se e solo se la condizione NFLVR è soddisfatta.*

2.3 Prezzaggio Neutrale al Rischio

Assumiamo ora che esista una misura di martingala equivalente forte Q . Per quanto detto nel paragrafo precedente, l'esistenza di tale misura implica che non ci siano opportunità di arbitraggio rispetto alle strategie di negoziazione Φ nel nostro modello del mercato finanziario \mathcal{M} . Restringiamo la nostra attenzione ai contratti contingenti X tali che $X/S_0(T) \in L^1(\mathcal{F}, Q)$.

Definiamo un'ulteriore sottoclasse di strategie di negoziazione:

Definizione 2.9 (Q -ammissibile). Una strategia di negoziazione autofinanziante φ è chiamata Q -ammissibile se il relativo processo del guadagno

$$\tilde{G}_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(u) d\tilde{S}(u)$$

è una Q -martingala. La classe di tutte le strategie di negoziazione Q -ammissibili è denotata con $\Phi(Q)$.

Notiamo ora che la richiesta di avere strategie autofinanzianti non è restrittiva. Siano $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ le quote delle attività S_1, \dots, S_d detenute nel nostro portafoglio. Assumendo che gli integrali $\int_0^t \varphi_i(u) d\tilde{S}_i(u)$, $i = 1, \dots, d$, esistano, possiamo rendere la nostra strategia autofinanziante e con valore iniziale $\tilde{V}_\varphi(0) = v_0$, scegliendo la quota φ_0 dell'attività S_0 (interpretabile come "attività priva di rischio") nel seguente modo

$$\varphi_0(t) = v_0 + \sum_{i=1}^d \int_0^t \varphi_i(u) d\tilde{S}_i(u) - \sum_{i=1}^d \varphi_i(u) \tilde{S}_i(u), \quad t \in [0, T]. \quad (2.13)$$

Dato che \tilde{S} è una martingala (per definizione di Q), per il lemma 2.2.2, $\tilde{G}_\varphi(t)$ lo è a sua volta. Abbiamo quindi che ogni processo $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ sufficientemente integrabile dà luogo a una strategia di negoziazione Q -ammissibile.

Non assumiamo che le strategie di negoziazione ammissibili siano tame. In ogni caso, dato che nella dimostrazione del Teorema 2.2.5 abbiamo usato soltanto il fatto che $\tilde{G}_\varphi(t)$ fosse una supermartingala (e una martingala è anche una supermartingala), possiamo ripetere le stesse argomentazioni per ottenere il seguente teorema.

Teorema 2.3.1. *Il modello del mercato finanziario \mathcal{M} non contiene opportunità di arbitraggio in $\Phi(Q)$.*

Introduciamo ora un altro concetto già anticipato, quello della *completezza*. La seguente definizione ci servirà per assicurarci che, per tutti i contratti contingenti, un prezzo non solo esista, ma sia anche unico.

Definizione 2.10 (ottenibile, strategia replicante, completo). (i) Un contratto contingente X è chiamato *ottenibile* se esiste almeno una strategia di negoziazione ammissibile tale che

$$V_\varphi(T) = X.$$

Chiamiamo tale strategia di negoziazione φ una *strategia replicante* per X .

(ii) Il modello del mercato finanziario \mathcal{M} è detto essere *completo* se ogni contratto contingente è ottenibile.

Abbiamo ora tutti gli ingredienti per enunciare il teorema che sta alla base dei nostri successivi sviluppi. In seguito genereremo degli scenari sotto la misura Q e, tramite il metodo di Monte Carlo, approssimeremo il valore atteso nel seguente teorema con una sommatoria per ottenere il valore di un portafoglio di contratti assicurativi.

Teorema 2.3.2 (Formula della Valutazione Neutrale al Rischio). *Il processo del prezzo di arbitraggio di ogni contratto ottenibile X è dato dalla formula della valutazione neutrale al rischio*

$$\Pi_X(t) = S_0(t)E_Q \left[\frac{X}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.14)$$

Dimostrazione. Essendo X ottenibile, esiste una strategia replicante $\varphi \in \Phi(Q)$ tale che $V_\varphi(T) = X$ e $\Pi_X(t) = V_\varphi(t)$ (potendo replicare X con φ i due devono avere lo stesso valore). Dato che $\varphi \in \Phi(Q)$ il processo del valore scontato $\tilde{V}_\varphi(t)$ è una martingala, e quindi

$$\begin{aligned} \Pi_X(t) &= V_\varphi(t) = S_0(t)\tilde{V}_\varphi(t) \\ &= S_0(t)E_Q \left[\tilde{V}_\varphi(T) \middle| \mathcal{F}_t \right] = S_0(t)E_Q \left[\frac{V_\varphi(T)}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= S_0(t)E_Q \left[\frac{X}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

□

Corollario 2.3.3. *Per ogni coppia di portafogli replicanti $\varphi, \psi \in \Phi(Q)$, abbiamo*

$$V_\varphi(t) = V_\psi(t).$$

Dimostrazione. Per il Teorema 2.3.1 in $\Phi(Q)$ non ci sono opportunità di arbitraggio. Dato che X è replicabile dai portafogli φ e ψ dobbiamo avere $\Pi_X(t) = V_\varphi(t)$ e $\Pi_X(t) = V_\psi(t)$ da cui $V_\varphi(t) = V_\psi(t)$. □

Corollario 2.3.4. *Sia il mercato finanziario \mathcal{M} completo sotto la restrizione che le strategie di negoziazione siano tame, oltre che Q -ammissibili per qualche $Q \in \mathbb{M}$. Allora, per ogni contratto contingente X , il prezzo di arbitraggio $\Pi_X(t)$ esiste ed è unico (non dipende dalla scelta della misura equivalente di martingala Q).*

Dimostrazione. Siano $\varphi_1 \in \Phi(Q_1)$ e $\varphi_2 \in \Phi(Q_2)$ strategie replicanti di X . Abbiamo che

$$\begin{aligned} \Pi_X^{Q_1}(t) &= S_0(t)E_{Q_1} \left[\frac{X}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = V_{\varphi_1}(t) \\ &= V_{\varphi_2}(t) = S_0(t)E_{Q_2} \left[\frac{X}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \Pi_X^{Q_2}(t). \end{aligned}$$

La prima e l'ultima uguaglianza sono un'applicazione del teorema, quella centrale è ricavabile con la stessa argomentazione usata per il corollario precedente sfruttando il fatto che φ_1 e φ_2 siano tame e il Teorema 2.2.5. Le rimanenti uguaglianze seguono dalla definizione di Q_1 -ammissibile e Q_2 -ammissibile come nella dimostrazione del Teorema 2.3.2. \square

Capitolo 3

Il modello di Cox, Ingersoll e Ross per i tassi di interesse

Uno dei modelli più usati per descrivere l'andamento dei tassi di interesse e come punto di partenza per la costruzione di modelli più complessi, è sicuramente quello proposto da Cox, Ingersoll e Ross nel loro articolo (1985) sulla struttura a termine dei tassi di interesse. Il successo del modello è dovuto principalmente alla sua trattabilità analitica e al fatto che garantisca, differenzialmente da altri modelli popolari tra cui quello di Vasicek, la positività dei tassi di interesse (perlomeno prima della discretizzazione).

Nel nostro contesto utilizzeremo il modello CIR per due scopi. Il primo è calcolare il rendimento della parte obbligazionaria di un fondo, collegato al portafoglio di polizze per cui calcoleremo il Solvency Capital Requirement; il secondo è per determinare i fattori di sconto con cui attualizzare i flussi di cassa futuri. Maggiori dettagli verranno dati nell'ultimo capitolo dove applicheremo il modello.

3.1 Le dinamiche dei tassi nel modello CIR

Diamo prima di tutto una definizione di tasso di interesse istantaneo. Come vedremo, essendo questo non osservabile, dovremo affidarci a un suo sostituto quando vorremo stimare i parametri del modello.

Definizione 3.1 (tasso di interesse istantaneo). Il *tasso di interesse istantaneo* (short rate) $r(t)$ è definito come

$$r(t) := \lim_{T \rightarrow t} R(t, T),$$

dove $R(t, T)$ è il tasso di interesse composto continuamente in t per il periodo (t, T) .

Le dinamiche dei tassi di interesse istantanei vengono descritte dal modello CIR attraverso la seguente equazione differenziale stocastica

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma r(t)^{1/2}dW(t), \quad (3.1)$$

con condizione iniziale $r(0) = r_0 > 0$. $W(t)$ è un moto Browniano standard, a è il parametro positivo di “ritorno verso la media”, regolante la velocità con cui $r(t)$ viene spinto verso il parametro positivo di lungo periodo b e σ è il parametro positivo che regola la volatilità.

Se i parametri del processo soddisfano il vincolo (conosciuto come “condizione di Feller”) $2ab > \sigma^2$, non è possibile raggiungere un tasso di interesse nullo. Quest’effetto è dovuto al fatto che, quando il tasso si avvicina a zero, la deviazione standard diventa anch’essa molto piccola rendendo l’evoluzione del processo dominata dalla componente di deriva, la quale spinge il tasso verso l’alto.

In seguito avremo la necessità di simulare delle traiettorie dei tassi secondo dinamiche *neutrali al rischio*. Usualmente, per mantenere una semplice interpretazione del cambio di parametri, e quindi del cambio di misura, il passaggio alle dinamiche neutrali al rischio nel modello CIR avviene in termini di un parametro λ , indipendente dalle traiettorie, detto di *premio al rischio*. Il passaggio tra le due dinamiche avviene tramite le seguenti equazioni

$$a^* = a + \lambda, \quad b^* = \frac{ab}{a + \lambda}, \quad \sigma^* = \sigma, \quad (3.2)$$

dove i parametri con l’asterisco sono quelli del processo neutrale al rischio.

3.2 Densità di transizione per il processo CIR

Come riportato in Glasserman (2003), le densità di transizione per il processo CIR sono note. In particolare, la distribuzione di $r(t)$ dato $r(u)$ per qualche $u < t$ è, a meno di un fattore scalare, una distribuzione chi-quadro non centrale. Una variabile chi-quadro non centrale $\chi_{\nu}^{\prime 2}(\lambda)$ con ν gradi di libertà e parametro di non centralità λ ha distribuzione

$$\begin{aligned} F_{\chi_{\nu}^{\prime 2}(\lambda)}(x) &= P(\chi_{\nu}^{\prime 2}(\lambda) \leq x) \\ &= e^{-\lambda/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}\lambda)^j / j!}{2^{\nu/2} + j\Gamma(\frac{\nu}{2} + j)} \int_0^x z^{\nu/2+j-1} e^{-z/2} dz \end{aligned} \quad (3.3)$$

per ogni $x > 0$. La legge di transizione di $r(t)$ in (3.1) può essere espressa come

$$r(t) = \frac{\sigma^2(1 - e^{-a(t-u)})}{4a} \chi_d'^2 \left(\frac{4ae^{-a(t-u)}}{\sigma^2(1 - e^{-a(t-u)})} r(u) \right), \quad t > u \quad (3.4)$$

dove

$$d = \frac{4ba}{\sigma}.$$

Questo ci dice che, dato $r(u)$, $r(t)$ è distribuito come $\sigma^2(1 - e^{-a(t-u)})/(4a)$ volte una variabile chi-quadro non centrale con d gradi di libertà e parametro di non centralità

$$\lambda = \frac{4ae^{-a(t-u)}}{\sigma^2(1 - e^{-a(t-u)})} r(u) \quad (3.5)$$

o, equivalentemente,

$$P(r(t) \leq x | r(u)) = F_{\chi_d'^2(\lambda)} \left(\frac{4ax}{\sigma^2(1 - e^{-a(t-u)})} \right) \quad (3.6)$$

con d e λ definiti sopra. Derivando infine (3.6) rispetto a x , otteniamo la funzione di densità condizionata per il modello CIR

$$p_{CIR}(x | r(u)) = c p_{\chi_d'^2(\lambda)}(cx) \quad (3.7)$$

dove

$$c = \frac{4a}{\sigma^2(1 - e^{-a(t-u)})}. \quad (3.8)$$

3.3 Stima dei parametri del modello CIR

Abbiamo ora tutti gli ingredienti per stimare, dato un insieme di osservazioni $y_1 \dots y_n$, i parametri del modello CIR. Tra le varie metodologie disponibili in letteratura, è stata scelta la procedura di stima di massima verosimiglianza, per approfondimenti su metodi di stima del modello CIR legati alla massima verosimiglianza si veda Gourieroux e Monfort (2007).

Sia

$$L(\boldsymbol{\theta} | y_1 \dots y_n) = f(y_1 \dots y_n | \boldsymbol{\theta})$$

la funzione di verosimiglianza di $\boldsymbol{\theta} = (a, b, \sigma)$ dato l'insieme di osservazioni $y_1 \dots y_n$ e $f(y_1 \dots y_n | \boldsymbol{\theta})$ la relativa funzione di densità congiunta.

Possiamo fattorizzare la densità congiunta (e quindi la funzione di verosimiglianza) in questo modo

$$f(y_1 \dots y_n | \boldsymbol{\theta}) = f(y_n | y_{n-1} \dots y_1; \boldsymbol{\theta}) f(y_{n-1} | y_{n-2} \dots y_1; \boldsymbol{\theta}) \dots f(y_2 | y_1; \boldsymbol{\theta}) f(y_1 | \boldsymbol{\theta}). \quad (3.9)$$

La funzione di verosimiglianza diventa allora

$$L(\boldsymbol{\theta}|y_1 \dots y_n) = f(y_1|\boldsymbol{\theta}) \prod_{t=2}^n f(y_t|\mathcal{F}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}), \quad (3.10)$$

dove \mathcal{F}_{t-1} è la σ -algebra generata da $\{y_1, y_2, \dots, y_{t-1}\}$. Ai fini della procedura di stima e per n sufficientemente grande, è possibile trascurare il primo termine nella parte di destra di (3.10), così facendo si ottiene la funzione di verosimiglianza approssimata

$$L(\boldsymbol{\theta}|y_1 \dots y_n) \simeq L^a(\boldsymbol{\theta}|y_1 \dots y_n) = \prod_{t=2}^n f(y_t|\mathcal{F}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}). \quad (3.11)$$

Prendendo il logaritmo di L^a otteniamo la log-verosimiglianza approssimata

$$l^a(\boldsymbol{\theta}|y_1 \dots y_n) = \log L^a(\boldsymbol{\theta}|y_1 \dots y_n) = \sum_{t=2}^n \log f(y_t|\mathcal{F}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}). \quad (3.12)$$

Essendo nel nostro caso $f(y_t|\mathcal{F}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = f(y_t|y_{t-1}; \boldsymbol{\theta})$, possiamo sostituire nella (3.12) la densità condizionata (3.7) ottenendo la funzione di log-verosimiglianza approssimata per il modello CIR

$$l_{CIR}(\boldsymbol{\theta}|y_1 \dots y_n) = \sum_{t=2}^n \log(c) + \log p_{\chi_d'^2(\lambda)}(c y_t), \quad (3.13)$$

con c, d definiti nel paragrafo precedente e $\lambda = c e^{-a(t-u)} y_{t-1}$. Lo stimatore di massima verosimiglianza di $\boldsymbol{\theta}$ per il modello CIR è quindi

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{mle} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} l_{CIR}(\boldsymbol{\theta}|y_1 \dots y_n). \quad (3.14)$$

Per quanto concerne la stima del parametro di premio al rischio da utilizzare in (3.2), un approccio comune è quello di sceglierlo tra le stime presenti in letteratura. Anche in questa tesi adotteremo questo approccio, il grado di esattezza della stima di questo parametro non produrrà effetti sensibili sulle analisi future.

3.4 Simulazione del processo CIR

Esistono più metodi per simulare il processo dei tassi istantanei di interesse tramite il modello CIR, ad esempio è possibile farlo sfruttando la formula ricorsiva (3.4) (come in Palloni, 2015) oppure discretizzando il modello in uno

dei molti modi presenti in letteratura, si vedano gli articoli di Alfonsi (2005, 2010) dove vengono studiate le proprietà di vari schemi discretizzazione fino al terzo ordine (l'ordine va interpretato come in uno sviluppo di Taylor). Per questa tesi si è scelto di utilizzare il semplice schema di discretizzazione di Eulero presente in Glasserman. Simulare tramite il modello CIR dopo averlo discretizzato, introduce una distorsione nella distribuzione dei valori ottenuti rispetto a quanto avverrebbe generando dalla vera distribuzione. In aggiunta, questa procedura rende necessario introdurre qualche accortezza dato che la positività dei tassi di interesse non è più garantita (come invece è nel modello non discretizzato). Il motivo per cui si è scelto di utilizzare comunque una tecnica di discretizzazione e non sfruttare la legge di transizione (3.4), è che il primo metodo ha il vantaggio di essere computazionalmente poco dispendioso (fattore rilevante quando l'obiettivo è utilizzare un metodo di tipo Monte Carlo) e permettere inoltre di correlare facilmente il processo CIR ad altri, come faremo nel corso della tesi.

Lo schema di discretizzazione di Eulero dell'Equazione (3.1) che utilizzeremo è il seguente

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + a(b - r(t_i))\Delta t_{i+1} + \sigma\sqrt{|r(t_i)|}\sqrt{\Delta t_{i+1}}Z_{i+1}, \quad (3.15)$$

dove $\Delta t_{i+1} = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, \dots, (n - 1)$ e $r(t_0) > 0$. Come anticipato, dato che la positività dei tassi non è più garantita, è necessario apportare una modifica di qualche tipo allo schema di Eulero standard, il valore assoluto nella parte destra dell'equazione protegge la radice da possibili valori negativi.

Capitolo 4

Il modello GARCH di Heston e Nandi per i prezzi

Il modello HN-GARCH(p, q) è stato proposto nel 1997 nell'articolo di Heston e Nandi sul prezzaggio delle opzioni. Il processo generato rappresenta le dinamiche del prezzo a pronti di un bene la cui varianza segua un processo GARCH. In questa tesi rappresenteremo le dinamiche dei rendimenti di un portafoglio rischioso attraverso il processo HN-GARCH(1, 1), tale processo ha come limite il famoso modello a volatilità stocastica di Heston,

$$\begin{aligned}d\log S(t) &= (r + \lambda v)dt + \sqrt{v}dz \\ dv &= k(\theta - v)dt + \sigma\sqrt{v}dz,\end{aligned}\tag{4.1}$$

unificando così la letteratura sui processi GARCH a tempo discreto con quella dei processi a volatilità stocastica continui nel tempo (per i dettagli si veda l'articolo di Heston e Nandi).

4.1 Il processo HN-GARCH(1, 1)

Heston e Nandi definiscono le dinamiche del processo HN-GARCH(1, 1) per il prezzo a pronti di un bene $S(t)$ attraverso le seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\log S(t) &= \log S(t - \Delta) + r + \lambda h(t) + \sqrt{h(t)}z(t) \\ h(t) &= \omega + \beta h(t - \Delta) + \alpha(z(t - \Delta) - \gamma\sqrt{h(t - \Delta)})^2,\end{aligned}\tag{4.2}$$

con $h(0) = h_0 > 0$. r è il tasso di interesse composto continuamente per l'intervallo Δ ; $z(t)$ è un'innovazione normale standard; $h(t)$ è la varianza condizionale dei log-rendimenti tra $t - \Delta$ e t , nota dato l'insieme delle informazioni al tempo $t - \Delta$. La formula funzionale del premio al rischio per il

modello è $\lambda h(t)$, tale forma previene l'arbitraggio assicurando che quando la varianza è nulla il bene renda il tasso di interesse privo di rischio. Dato che la volatilità è uguale alla radice quadrata di $h(t)$, il rendimento premio per unità di rischio è anch'esso proporzionale alla radice quadrata di $h(t)$, esattamente come nel modello di Cox, Ingersoll e Ross (vedi capitolo precedente). Se β e α del processo tendono a zero, questo diventa equivalente al modello di Black-Scholes osservato ad intervalli discreti.

È possibile osservare $h(t + \Delta)$ al tempo t , come funzione del prezzo a pronti tramite la formula

$$h(t + \Delta) = \omega + \beta h(t) + \alpha \frac{(\log [S(t)/\log S(t - \Delta)] - r - \lambda h(t) - \gamma h(t))^2}{h(t)}, \quad (4.3)$$

dove α determina la curtosi della distribuzione; α pari a zero implica una varianza che cambia nel tempo in modo deterministico. Il parametro γ determina l'asimmetria dell'effetto delle innovazioni $z(t)$; se α e γ sono positivi, un grande valore negativo di $z(t)$ incrementa la varianza più di un grande valore positivo. La varianza $h(t)$ del processo è correlata con il logaritmo dei prezzi $S(t)$ come segue

$$\text{Cov}_{t-\Delta}[h(t + \Delta), \log S(t)] = -2\alpha\gamma h(t), \quad (4.4)$$

di nuovo, dato α positivo, un valore positivo di γ risulta in una correlazione negativa tra rendimenti e varianza. Questo legame è consistente con il postulato di Black (1976); rendimenti e volatilità sono legati, quando i rendimenti salgono la volatilità tende a calare e viceversa, e con l'effetto leva documentato da Christie (1982) e altri; al calare dei prezzi delle attività, cresce il rapporto di indebitamento (*leverage*) delle compagnie, per via dell'aumentare del valore relativo dei debiti rispetto al patrimonio, con il risultato di rendere più rischiose, e quindi più volatili, le loro azioni.

La condizione di stazionarietà per il processo è

Proposizione 4.1.1. *Il processo HN-GARCH(1, 1) è stazionario con media e varianza finite se la seguente condizione è rispettata:*

$$\beta + \alpha\gamma^2 < 1. \quad (4.5)$$

Per il passaggio alle dinamiche neutrali al rischio vale la proposizione

Proposizione 4.1.2. *Il processo risk-neutral ha la stessa forma di (4.2) con λ sostituito da $-1/2$ e γ sostituito da $\gamma^* = \gamma + \lambda + 1/2$.*

4.2 Stima del modello HN-GARCH(1, 1)

Come per il modello CIR, è possibile stimare il modello affidandosi al metodo della massima verosimiglianza. Ponendo $\Delta = 1$ e $\rho(t) = \log [S(t)/S(t-1)]$, la verosimiglianza per il modello HN-GARCH(1, 1) è (Byun, 2011)

$$L(\alpha, \beta, \gamma, \omega, \lambda) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi h(t)}} \exp \left\{ -\frac{[\rho(t) - r - \lambda h(t)]^2}{2h(t)} \right\}, \quad (4.6)$$

e quindi la log-verosimiglianza è

$$l(\alpha, \beta, \gamma, \omega, \lambda) = \log L = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left\{ \log [2\pi h(t)] + \frac{[\rho(t) - r - \lambda h(t)]^2}{h(t)} \right\}. \quad (4.7)$$

La stima dei parametri del modello avviene massimizzando la funzione di log-verosimiglianza; nella nostra applicazione ci affideremo alla funzione *hngarchFit* della libreria R *fOptions*. Essendo il modello già discreto, la simulazione non richiede particolari accortezze se non il porre il valore di $h(0)$ maggiore di zero (è noto che il valore specifico di $h(0)$ non influenza l'andamento della serie, vedi sempre Heston e Nandi) e l'avere un meccanismo per generare innovazioni normali standard.

Capitolo 5

Metodi di Monte Carlo

In questo capitolo tratteremo i metodi di Monte Carlo e alcuni argomenti correlati. Dopo averli introdotti, mostreremo una tecnica per ridurre la varianza delle stime ottenute e descriveremo brevemente cosa sia una sequenza di Sobol. Infine, introdurremo il metodo dei minimi quadrati di Monte Carlo, nell’ottica di applicarlo al calcolo del Solvency Capital Requirement.

In generale, utilizzeremo i metodi di Monte Carlo per stimare il valore atteso all’interno della *Formula della Valutazione Neutrale al Rischio* (Capitolo 2), con cui calcoleremo il valore, per ogni scenario, del portafoglio di polizze in esame nell’ultimo capitolo ¹.

5.1 Introduzione ai metodi di Monte Carlo

I metodi di Monte Carlo sono basati sulla nota analogia tra probabilità e volume. L’idea è quella di calcolare il volume di un insieme interpretandolo come una probabilità. Il passaggio da “volume” a “integrale” è immediato. Nel contesto di questa tesi tale interpretazione probabilistica è naturale, essendo come detto il nostro obiettivo quello di stimare un valore atteso. Vediamo prima però un semplice esempio illustrativo in cui non lo è.

Esempio 5.1.1. Supponiamo di voler calcolare l’integrale della funzione $f(x)$ sull’intervallo $[0, 1]$,

$$\alpha = \int_0^1 f(x) dx.$$

Possiamo rappresentare tale integrale con il valore atteso $E[f(U)]$, con $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$. A questo punto, supponendo di avere un meccanismo per generare

¹Il riferimento principale per questo capitolo, salvo dove scritto diversamente, è il libro di Glasserman (2003).

i numeri casuali U_1, U_2, \dots , indipendentemente e uniformemente su $[0, 1]$, possiamo valutare la funzione f in n di questi punti casuali e prendere la media dei valori ottenuti per ottenere la *stima Monte Carlo* di α

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i). \quad (5.1)$$

Se f è integrabile su $[0, 1]$, allora, per la *legge forte dei grandi numeri*,

$$\hat{\alpha}_n \rightarrow \alpha \quad \text{quasi certamente per } n \rightarrow \infty.$$

Se poi f è anche di quadrato integrabile, grazie al *Teorema del Limite Centrale*, possiamo ottenere una stima della grandezza dell'errore che commetteremo. Ponendo

$$\sigma_f^2 = \int_0^1 (f(x) - \alpha)^2 dx,$$

l'errore della nostra stima, $\epsilon = \hat{\alpha}_n - \alpha$, ha distribuzione

$$\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_f^2/n). \quad (5.2)$$

Inoltre se, come spesso accade, anche σ_f^2 è sconosciuto, possiamo stimarlo tramite

$$\hat{\sigma}_f^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (f(U_i) - \hat{\alpha}_n)^2. \quad (5.3)$$

Come abbiamo detto, l'errore standard è $O(n^{-1/2})$. Questo è un aspetto centrale dei metodi di Monte Carlo perché implica che, per dimezzare l'errore, dobbiamo quadruplicare il numero di punti utilizzati. In contrasto, per la semplice *regola trapezoidale*

$$\alpha \approx \frac{f(0) + f(1)}{2n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f(i/n), \quad (5.4)$$

l'errore è $O(n^{-2})$, perlomeno per f differenziabile due volte. Per questo motivo, Monte Carlo non è un metodo competitivo per calcolare gli integrali monodimensionali. La caratteristica dei metodi di Monte Carlo che li rende validi strumenti per il calcolo di integrali in più dimensioni, è che l'ordine $O(n^{-1/2})$ si preserva anche quando l'integrale è definito su $[0, 1]^d$. Al contrario, l'errore per la regola trapezoidale in d dimensioni è $O(n^{-2/d})$ e questa degenerazione nella velocità di convergenza al crescere della dimensione è una peculiarità comune di tutti i metodi di integrazione deterministici [23].

Nella nostra applicazione, vogliamo calcolare il valore atteso dei profitti futuri di un portafoglio di prodotti assicurativi, con un orizzonte temporale di venti anni, la cui evoluzione dipende da più fattori di rischio. Tale valore deve essere ottenuto per ogni scenario *real-world* considerato per l'anno di partenza del portafoglio, $t = 1$ (ponendoci in $t = 0$). I fondamenti teorici per questo calcolo sono quelli del Capitolo 2, in particolare è centrale la formula del Teorema 2.3.2 sulla valutazione neutrale al rischio. Se volessimo rappresentare il valore atteso in tale formula come un integrale, il numero di dimensioni sarebbe almeno pari al numero di passi temporali per il numero di fattori da cui dipende il valore del portafoglio: decisamente grande a sufficienza per rendere i metodi di Monte Carlo competitivi rispetto ad altri metodi. In realtà, data la natura *traiettoria-dipendente* (path-dependent) del valore del nostro portafoglio, il metodo di Monte Carlo, nella sua forma base, richiede un numero di simulazioni troppo elevato per renderlo computazionalmente praticabile. Questo problema è già stato riscontrato nel prezzaggio delle *opzioni americane*. Una possibile soluzione, che considereremo in seguito, è stata proposta da Longstaff e Schwartz (2001) e prende il nome di *metodo dei Minimi Quadrati di Monte Carlo*.

Sviluppiamo ora una tecnica per ridurre la costante σ_f^2 nella varianza dell'errore in (5.2). Il tasso di convergenza rimarrà comunque $O(n^{-1/2})$.

5.2 Il metodo delle Variabili Antitetiche

Il metodo delle *variabili antitetiche* (antithetic variates) punta a ridurre la varianza di uno stimatore introducendo una dipendenza negativa tra copie di replicazioni con cui viene effettuata la stima. Quanto segue si estende facilmente a tutte le distribuzioni per cui è utilizzabile il *metodo dell'inversione* (inverse transform method) e a tutte le distribuzioni simmetriche (vedi sempre Glasserman per ulteriori approfondimenti). Noi ci limiteremo alla distribuzione normale standard.

Sia $Z = (Z_1, \dots, Z_n) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I_n)$, con I_n matrice identica $n \times n$. Definiamo la parte simmetrica f_0 e la parte antisimmetrica f_1 di f con

$$f_0(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} \quad \text{e} \quad f_1(z) = \frac{f(z) - f(-z)}{2}, \quad (5.5)$$

ovviamente $f = f_0 + f_1$. Questa decomposizione è ortogonale, nel senso che

$f_0(Z)$ e $f_1(Z)$ sono incorrelati:

$$\begin{aligned} E[f_0(Z)f_1(Z)] &= \frac{1}{4}E[f^2(Z) - f^2(-Z)] \\ &= 0 \quad (Z \text{ e } -Z \text{ hanno la stessa distribuzione}), \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\text{Var}[f(Z)] = \text{Var}[f_0(Z)] + \text{Var}[f_1(Z)]. \quad (5.6)$$

Nel nostro caso, dovremo stimare dei valori attesi del tipo $\alpha = E[f(Z)]$ (uno per ogni scenario *real world*). La dimensione di Z , n , sarà pari al numero di realizzazioni normali necessarie per generare una traiettoria dei fattori di rischio (e quindi dei profitti del portafoglio) da $t = 1$ a $T = 21$. Nella versione base del metodo dei minimi quadrati di Monte Carlo che introdurremo in seguito, la prima stima di α è ottenuta semplicemente ponendo $\hat{\alpha}_{MC_1}(z) = f(z)$, dove z è una (sola) realizzazione del vettore Z (come da nome, la seconda stima è ottenuta con i minimi quadrati). Definiamo lo *stimatore alle variabili antitetiche* come

$$\hat{\alpha}_a(Z) = f_0(Z) = \frac{f(Z) + f(-Z)}{2}. \quad (5.7)$$

Entrambi gli stimatori sono ovviamente non distorti e, per come abbiamo definito $\hat{\alpha}_a$, da (5.6) abbiamo che la varianza di $\hat{\alpha}_a$ è minore o uguale di quella di $\hat{\alpha}_{MC_1}(Z)$. In particolare la varianza è (strettamente) minore se f ha una parte antisimmetrica non nulla, mentre è uguale a quella iniziale se f è simmetrica.

Nella nostra applicazione, f è la funzione che traduce un vettore di realizzazioni z di variabili normali standard nel *valore attuale dei profitti futuri*, indicato con PVFP. Le componenti di z determinano la serie dei tassi e dei rendimenti che a loro volta vengono passate come argomento a f . Supponiamo che z sia una serie di valori positivi, allora la serie dei rendimenti e la serie dei tassi generate da z sono entrambe a valori maggiori di quelle generate da $-z$ (vedi i capitoli 3 e 4 di questa tesi). A seguito di ciò, benché le dinamiche di f siano troppo complesse per descriverne esattamente il comportamento, non c'è motivo di credere che f restituisca lo stesso valore (sia quindi simmetrica) per z e $-z$. Come vedremo nel capitolo finale di questa tesi, f è in realtà piuttosto antisimmetrica rispetto ai valori dei tassi e dei rendimenti (e quindi di z). Avendo escluso la perfetta simmetria di f , per quanto abbiamo mostrato, la varianza dello stimatore $\hat{\alpha}_a$ sarà minore di quella di $\hat{\alpha}_{MC_1}$. Il costo computazionale aggiuntivo del primo stimatore rispetto al secondo è dovuto principalmente al dover valutare una volta in più la funzione f , ipotizziamo che tale costo sia trascurabile rispetto alla riduzione della varianza

ottenuta. Stiamo quindi assumendo che sia più conveniente (si arrivi prima a convergenza) allocare le risorse per la tecnica delle variabili antitetiche piuttosto che utilizzarle per aumentare il numero di scenari.

Riportiamo ora alcuni concetti fondamentali riguardanti le sequenze a bassa discrepanza e, in particolare, quelle di Sobol. In questa tesi utilizzeremo una sequenza di Sobol per generare valori “ben distribuiti” delle variabili al tempo $t = 1$ che influenzano il *valore attuale dei profitti futuri*. In particolare, vogliamo che i valori generati coprano uniformemente lo spazio a cui appartengono i fattori di rischio, in modo da poter stimare meglio la funzione che lega il PVFP agli stessi anche nei punti critici (il requisito di capitale dipende dal comportamento sulle code). Notiamo che valori generati da, ad esempio, una normale, non avrebbero soddisfatto tale richiesta. Per una trattazione completa dell’argomento seguente si rimanda a Niederreiter (1992).

5.3 Sequenze di Sobol

Il nucleo dei metodi di Monte Carlo è la generazione di *numeri pseudo-casuali* (pseudo-random numbers) che abbiano proprietà statistiche il più simili possibile ai valori di una sequenza casuale (vedi il Capitolo 3 di Glasserman). Differentemente, i metodi chiamati *quasi-Monte Carlo* o a *bassa discrepanza* non puntano a mimare la casualità: i punti generati, in questo caso, risultano troppo equamente distribuiti per apparire casuali. Le *sequenze a bassa discrepanza* sono un concetto strettamente legato al metodo quasi-Monte Carlo e stanno a esso come i numeri pseudo-casuali stanno a quello di Monte Carlo. Le *sequenze di Sobol* sono un esempio di sequenze a bassa discrepanza.

5.3.1 Discrepanza

Volendo riempire uniformemente un ipercubo, il primo tentativo potrebbe essere quello di posizionare dei punti x_i su una griglia. Questa soluzione presenta una serie di inconvenienti:

- se il nostro obiettivo è stimare un integrale e l’integrando f è una funzione quasi separabile dei suoi d argomenti, l’informazione contenuta nei valori di f nei n^d nodi della griglia è quasi la stessa di quella contenuta in nd di questi punti;
- una griglia lascia grandi rettangoli in $[0, 1]^d$ senza nessun punto;

- una griglia richiede di specificare il numero totale dei punti in anticipo;
- se si vuole affinare una griglia aggiungendole nuovi punti, il numero di essi cresce molto velocemente.

Per cercare di risolvere questi difetti tentando un'altra via, prima di tutto dobbiamo definire meglio il concetto di uniformità o allontanamento dall'uniformità.

Definizione 5.1 (discrepanza). Data una collezione \mathcal{A} di sottoinsiemi di $[0, 1]^d$ misurabili secondo Lebesgue, la *discrepanza* (discrepancy) dell'insieme di punti $\{x_1, \dots, x_n\}$ relativamente ad \mathcal{A} è

$$D(x_1, \dots, x_n; \mathcal{A}) = \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{\#\{x_i \in A\}}{n} - \text{vol}(A) \right|,$$

dove $\#\{x_i \in A\}$ indica il numero di x_i contenuti in A e $\text{vol}(A)$ il volume (misura) di A .

Chiamiamo tale discrepanza *ordinaria* (ordinary discrepancy) se \mathcal{A} è la collezione di tutti i rettangoli in $[0, 1]^d$ della forma

$$\prod_{j=1}^d [u_j, v_j), \quad 0 \leq u_j < v_j \leq 1, \quad (5.8)$$

la chiamiamo invece *discrepanza stella* (star discrepancy) se ci restringiamo ai rettangoli della forma

$$\prod_{j=1}^d [0, u_j), \quad 0 \leq u_j \leq 1. \quad (5.9)$$

Indicando con D^* la discrepanza stella e con D quella ordinaria, abbiamo che (vedi Niederreiter, 1992)

$$D^*(x_1, \dots, x_n) \leq D(x_1, \dots, x_n) \leq 2^d D^*(x_1, \dots, x_n), \quad (5.10)$$

quindi, per d fissato, le due quantità hanno lo stesso ordine di grandezza. Per $d = 1$ vale inoltre la relazione

$$D(x_1, \dots, x_n) \geq D^*(x_1, \dots, x_n) \geq \frac{c \log n}{n}. \quad (5.11)$$

Per d maggiore di 1 non esiste un risultato analogo ma, secondo Niederreiter, è "ampiamente ritenuto" che qualsiasi insieme di punti $x_1 \dots x_n$ soddisfi

$$D^*(x_1, \dots, x_n) \geq \frac{c_d (\log n)^{d-1}}{n} \quad (5.12)$$

e che i primi n elementi di qualsiasi sequenza x_1, x_2, \dots soddisfino

$$D^*(x_1, \dots, x_n) \geq \frac{c'_d (\log n)^d}{n} \quad (5.13)$$

per costanti c_d, c'_d dipendenti solamente dalla dimensione d .

Definizione 5.2 (bassa discrepanza). Chiamiamo a *bassa discrepanza* (low-discrepancy) i metodi per cui la discrepanza stella è dell'ordine di $O((\log n)^d/n)$.

Nonostante qualsiasi potenza di $\log n$ diventi trascurabile relativamente a n , questa proprietà asintotica può non valere per valori realistici di n se d è grande. Non esiste una scelta concorde sul valore massimo che d dovrebbe assumere per poter ancora utilizzare questi metodi; alcuni autori fissano un limite massimo di 40 dimensioni, altri di 12 o 15. Di fatto in molte applicazioni finanziarie recenti, il metodo quasi-Monte Carlo viene trovato efficace anche per dimensioni molto maggiori [23].

5.3.2 Sequenze di Van der Corput

Introduciamo una classe specifica di sequenze a bassa discrepanza monodimensionali chiamate *sequenze di Van der Corput* (Van der Corput sequences). Tale esempio ci servirà sia per illustrare l'idea generale di discrepanza sia come elemento su cui costruire le sequenze di Sobol.

Per *base* intendiamo un intero $b \geq 2$. Ogni intero positivo k ha un'unica rappresentazione (chiamata la sua *espansione in base b*) come combinazione lineare di potenze non negative di b con coefficienti in $\{0, 1, \dots, b-1\}$. Scriviamo tale espansione come

$$k = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(k) b^j, \quad (5.14)$$

con tutti i coefficienti $a_j(k)$, tranne un numero finito, uguali a zero. La *funzione radice inversa* (radical inverse function) ψ_b mappa ogni k in un punto di $[0, 1)$ nel modo

$$\psi_b(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j(k)}{b^{j+1}}. \quad (5.15)$$

La *sequenza di Van der Corput in base b* è

$$0 = \psi_b(0), \psi_b(1), \psi_b(2), \dots \quad (5.16)$$

Se $b = 2$, i primi otto valori della sequenza sono

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}. \quad (5.17)$$

Come visibile in questo esempio, man mano che nuovi punti vengono aggiunti alla sequenza, questi si dispongono alternandosi alla sinistra e alla destra di $1/2$. Quelli che appaiono alla sinistra di $1/2$ a loro volta si posizionano a lati alterni di $1/4$ e lo stesso vale per quelli di destra rispetto a $3/4$. La proprietà si ripete al crescere della serie; la sequenza di Van der Corput quindi inserisce nuovi valori in un modo massimamente bilanciato. Sempre da Niederreiter abbiamo il seguente teorema, che giustifica l'utilizzo delle sequenze appena esposte.

Teorema 5.3.1. *Tutte le sequenze di Van der Corput sono sequenze a bassa discrepanza.*

5.3.3 Sobol

Diamo alcune definizioni preliminari (il riferimento per quanto segue è sempre Glasserman più i riferimenti che daremo alla fine).

Definizione 5.3 (*b*-ary scatola). Una *b*-ary scatola (box) o *intervallo elementare in base b* (elementary interval in base *b*), con $b \geq 2$ intero, è un sottoinsieme di $[0, 1]^d$ della forma

$$\prod_{i=1}^d \left[\frac{a_i}{b^{j_i}}, \frac{a_i + 1}{b^{j_i}} \right), \quad (5.18)$$

con $j_i \in \{0, 1, \dots\}$ e $a_i \in \{0, 1, \dots, b^{j_i} - 1\}$. Il volume di una *b*-ary scatola è $1/b^{j_1 + \dots + j_d}$.

Definizione 5.4 (*(t, m, d)*-rete). Per t, m, d interi, $0 \leq t \leq m$, una *(t, m, d)*-rete (net) in base b è un insieme di b^m punti in $[0, 1]^d$ con la proprietà che esattamente b^t punti cadano in ogni *b*-ary scatola di volume b^{t-m} . La frazione di punti che cadono nella scatola, b^t/b^m , è quindi pari al volume della stessa.

Definizione 5.5 (*(t, d)*-sequenza). Una sequenza di punti x_1, x_2, \dots in $[0, 1]^d$ è una *(t, d)*-sequenza (sequence) in base b se per ogni $m > t$ ogni segmento $\{x_i : jb^m < i \leq (j+1)b^m\}$, $j = 0, 1, \dots$, è una *(t, m, d)*-rete in base b .

Dalle definizioni è chiaro che più piccolo è il valore di t maggiore è il grado di uniformità (anche piccole scatole *b*-ary contengono il giusto numero di punti). Allo stesso modo, ceteris paribus, una base b piccola è preferibile, dato che le proprietà di uniformità della *(t, m, d)*-rete e della *(t, d)*-sequenza sono esibite in insiemi di b^m punti.

Le *sequenze di Sobol* (Sobol sequences) sono un esempio (il primo) di (t, d) -sequenza, dove t dipende da d . Tale proprietà, a differenza di quanto accade per altre sequenze a bassa discrepanza, vale anche in base 2 per ogni d ; lavorare in base 2 porta vantaggi computazionali attraverso operazioni a livello di bit. Come per altri metodi, le sequenze di Sobol risultano da permutazioni di segmenti della sequenza di Van der Corput. Accenniamo la costruzione di una coordinata x_k della sequenza di Sobol, le altre coordinate seguono la stessa costruzione solo con *generatori* diversi.

Consideriamo la matrice generatrice (generator matrix) triangolare superiore V_k , le cui colonne sono l'espansione binaria di un insieme di *numeri di direzione* (direction numbers) v_1, \dots, v_{r_k} . Pensiamo a r_k come il numero di termini dell'espansione binaria di k .

Sia $(a_0(k), \dots, a_{r_k-1}(k))^T$ il vettore dei coefficienti della rappresentazione binaria di k , quindi

$$k = a_0(k) + 2a_1(k) + \dots + 2^{r_k-1}a_{r_k-1}(k). \quad (5.19)$$

Sia

$$\begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_{r_k}(k) \end{pmatrix} = V_k \begin{pmatrix} a_0(k) \\ a_1(k) \\ \vdots \\ a_{r_k-1}(k) \end{pmatrix} \pmod{2}; \quad (5.20)$$

allora $y_1(k), \dots, y_{r_k}(k)$ sono i coefficienti dell'espansione binaria del k -esimo punto della sequenza di Sobol in base 2, cioè

$$x_k = \frac{y_1(k)}{2} + \frac{y_2(k)}{2^2} + \dots + \frac{y_{r_k}(k)}{2^{r_k}}. \quad (5.21)$$

Se le matrici V_k sono matrici identiche, questa procedura porta alla sequenza di Van der Corput.

È chiaro, da quanto appena visto, che la scelta delle matrici generatrici ha un ruolo fondamentale. Risulta inoltre che l'Equazione (5.20) è più convenientemente formulata attraverso l'utilizzo dell'*operatore somma binaria* (binary addition) \oplus , implementato attraverso l'operatore bit a bit XOR. Per questi e altri approfondimenti si rimanda a Sobol (1967) e Niederreiter (1992).

5.4 Il metodo dei Minimi Quadrati di Monte Carlo applicato al calcolo del Solvency Capital Requirement

Il metodo dei *Minimi Quadrati di Monte Carlo* (Least-Squares Monte Carlo, LSMC) è stato proposto per la prima volta da Longstaff e Schwartz (2001) come soluzione al problema della valutazione di *opzioni americane* (American options). Sia il prezzo di tali opzioni che la valutazione del capitale di un'azienda, dipendono dalle realizzazioni in tutti gli istanti temporali fino a scadenza dei processi che ne influenzano i valori. Ci troviamo di fronte a un problema computazionale dovuto a *processi stocastici annidati* (nested stochastic problem) dove il metodo di Monte Carlo, nella sua forma base, risulta computazionalmente troppo oneroso per essere applicato.

Illustriamo ora il metodo dei minimi quadrati di Monte Carlo applicandolo direttamente alla valutazione del Solvency Capital Requirement. La trattazione seguente si rifà a quella di Bauer et al. (2009) adattandola al nostro contesto e inserendovi le tecniche esposte in questo capitolo (variabili antitetiche e sequenze di Sobol).

5.4.1 Ambiente matematico

Assumiamo che gli investitori possano negoziare continuamente in un mercato finanziario senza attrito e sia T ($= 21$ anni nel nostro caso) la scadenza della polizza a più lungo termine nel portafoglio dell'assicuratore. Come in precedenza, $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ è uno spazio di probabilità filtrato, completo e dove tutte le quantità rilevanti esistono, con P misura del mondo reale e Q misura neutrale al rischio. L'incertezza rispetto ai profitti futuri della compagnia dipende da vari fattori di rischio; nella nostra applicazione questi saranno:

- tassi di interesse;
- rendimenti azionari;
- percentuale di riscatti.

Introduciamo il *processo di stato* (state process) markoviano d -dimensionale $Y = (Y_t)_{t \in [0, T]} = (Y_{1,t}, \dots, Y_{d,t})_{t \in [0, T]}$, supponiamo che ogni attività rischiosa nel mercato possa essere espressa in termini di Y . Assumiamo esista un processo localmente privo di rischio $(B_t)_{t \in [0, T]}$ con $B_t = \exp \left\{ \int_0^t r_u du \right\}$ (conto bancario), dove $r_t = r(Y_t)$ è il tasso istantaneo di interesse privo di rischio

al tempo t . In particolare, prendiamo per garantite tutte le ipotesi fatte nel Capitolo 2 e che quindi si possa utilizzare la formula per la valutazione neutrale al rischio del Teorema 2.3.2. Infine, assumiamo che esistano dei funzionali f_1, \dots, f_T che derivino i profitti futuri al tempo t dallo sviluppo del mercato finanziario fino al tempo t ($t = 1, \dots, T$). Modelliamo i *profitti futuri* (future profits) con la sequenza di variabili casuali X_1, \dots, X_T dove $X_t = f_t(Y_s, s \in [0, t])$.

5.4.2 Capitale Disponibile

Riprendiamo la definizione di Capitale Disponibile data nel Capitolo 1.

Il *Capitale Disponibile* (Available Capital, AC) al tempo $t = 0$ e $t = 1$ è definito da

$$AC_0 = ANAV_0 + PVFP_0 - CoC_0, \quad (5.22)$$

$$AC_1 = ANAV_1 + PVFP_1 + X_1 - CoC_1, \quad (5.23)$$

dove l'ANAV è il *Patrimonio Netto Rettificato* (Adjusted Net Asset Value), derivato dal *Patrimonio Netto* (Net Asset Value, valore delle attività meno valore delle passività), includendo aggiustamento per attività intangibili, guadagni non realizzati, perdite sulle attività e così via; PVFP è il *valore attuale dei profitti futuri* (Present Value of Future Profits), valore attuale del flusso di cassa degli azionisti dovuto al portafoglio in vigore e alle attività a copertura delle passività associate; CoC è il *Costo del Capitale* (Cost-of-Capital charge), somma del costo di attrito del capitale richiesto e del costo dei rischi non immunizzabili (per riferimenti su questi elementi si veda CFO Forum, 2009).

Per semplicità, non considereremo l'ANAV e il CoC nel calcolo del Capitale Disponibile: tali quantità vengono derivate attraverso procedure che vanno al di là degli scopi di questa tesi per cui questa scelta non ne influenza le conclusioni. A seguito della semplificazione effettuata, AC_0 e AC_1 diventano pari a

$$AC_0 = PVFP_0, \quad (5.24)$$

$$AC_1 = PVFP_1 + X_1. \quad (5.25)$$

Definiamo la *perdita attesa* a un anno, valutata in $t = 0$, come

$$L = AC_0 - \frac{AC_1}{1+i}; \quad (5.26)$$

si noti che, per come è stata definita, un valore positivo di L indica effettivamente una perdita, mentre, se L è negativo, il capitale sta aumentando.

Il SCR è quindi (vedi Capitolo 1)

$$\text{SCR} = \arg \min_x \{P(L > x) \leq 1 - \alpha\}, \quad (5.27)$$

ovvero cerchiamo un x tale che la probabilità di subire una perdita maggiore del Solvency Capital Requirement x deve essere inferiore o uguale a $1 - \alpha$, con $\alpha = 99,5\%$ (valore scelto dalla direttiva).

Capitale Disponibile in $t = 0$

Utilizzando la formula per la valutazione neutrale al rischio del Teorema 2.3.2 (il numéraire S_0 in questo caso è B), possiamo determinare il PVFP in $t = 0$ come valore atteso sotto la misura neutrale al rischio Q dei profitti futuri X_t scontati tramite B_t^{-1} :

$$\text{PVFP}_0 = E_Q \left[\sum_{t=1}^T \exp \left\{ - \int_0^t r_u \, du \right\} X_t \right]. \quad (5.28)$$

Nella maggior parte dei casi, il PVFP_0 non può essere calcolato per via analitica, il motivo principale è la complessità delle interazioni tra lo sviluppo delle variabili del mercato finanziario Y_t e i profitti degli azionisti X_t (ricordiamo che $r_t = r(Y_t)$ e $X_t = f_t(Y_s, s \in [0, t])$).

Supponiamo di essere in grado di simulare K_0 traiettorie del processo di stato (d -dimensionale) da cui dipendono le nostre variabili, $(Y_t^{(k)})_{t \in [0, T]}$, $k = 1, \dots, K_0$. Per il Capitolo 2, tale simulazione deve avvenire sotto la misura neutrale al rischio Q (si vedano i Capitoli 3 e 4 per quando tra le componenti degli $Y^{(k)}$ ci sono il processo dei tassi d'interesse e dei rendimenti azionari). Utilizzando gli strumenti sviluppati in questo capitolo, una possibile stima di PVFP_0 è

$$\widetilde{\text{PVFP}}_0(K_0) = \frac{1}{K_0} \sum_{k=1}^{K_0} \sum_{t=1}^T \exp \left\{ - \int_0^t r_u^{(k)} \, du \right\} X_t^{(k)}, \quad (5.29)$$

dove $r_t^{(k)}$ e $X_t^{(k)}$ sono rispettivamente il tasso istantaneo d'interesse privo di rischio e il profitto, al tempo t nella traiettoria k (sotto Q). La stima del Capitale Disponibile in $t = 0$ è allora

$$\widetilde{\text{AC}}_0 = \widetilde{\text{PVFP}}_0. \quad (5.30)$$

Capitale Disponibile in $t = 1$

Per il calcolo del Solvency Capital Requirement, oltre al Capitale Disponibile in $t = 0$, dobbiamo valutare la distribuzione (sotto la misura P) del Capitale Disponibile in $t = 1$. Sempre grazie al Teorema 2.3.2 abbiamo che

$$\text{PVFP}_1 = E_Q \left[\sum_{t=2}^T \exp \left\{ - \int_1^t r_u \, du \right\} X_t \middle| Y_s, s \in [0, 1] \right]. \quad (5.31)$$

Nella pratica, il PVFP_1 non dipende da tutta la storia del mercato finanziario fino al tempo 1. Sia (Y_1, D_1) , dove $D_1 = (D_1^{(1)}, \dots, D_1^{(m)})$, una collezione finita di variabili di stato Markoviane contenenti tutta l'informazione necessaria per la proiezione dei flussi di cassa. Il PVFP_1 dipende dalla storia del mercato finanziario prima del tempo 1 solo attraverso D_1 . Possiamo pensare ai D_1^i come a contratti rappresentativi della situazione finanziaria dell'azienda, per approfondimenti si veda Bauer et al. (2008).

Poniamo di generare N possibili scenari per $t = 1$ sotto la misura del mondo reale P . Siano $(Y_1^{(i)}, D_1^{(i)})$, $i \in \{1, \dots, N\}$, i valori delle relative variabili di stato influenzanti il PVFP_1 , allora il valore del PVFP in $t = 1$ per lo scenario i è

$$\text{PVFP}_1^{(i)} = E_Q \left[\sum_{t=2}^T \exp \left\{ - \int_1^t r_u \, du \right\} X_t \middle| (Y_1, D_1) = (Y_1^{(i)}, D_1^{(i)}) \right]. \quad (5.32)$$

Con la stessa logica utilizzata per PVFP_0 , possiamo stimare $\text{PVFP}_1^{(i)}$, $i \in \{1, \dots, N\}$, come

$$\widetilde{\text{PVFP}}_1^{(i)}(K_1^{(i)}) = \frac{1}{K_1^{(i)}} \sum_{k=1}^{K_1^{(i)}} \sum_{t=2}^T \exp \left\{ - \int_1^t r_u^{(i,k)} \, du \right\} X_t^{(i,k)}. \quad (5.33)$$

$K_1^{(i)}$ può variare con i per rispondere al fatto che, a seconda dello scenario, potrebbero essere necessarie più o meno simulazioni per ottenere risultati accettabili.

La stima di AC_1 per lo scenario i è quindi

$$\widetilde{\text{AC}}_1^{(i)} = \widetilde{\text{PVFP}}_1^{(i)} + X_1^{(i)}. \quad (5.34)$$

5.4.3 Solvency Capital Requirement

Dall'Equazione (5.27), segue che il SCR è pari all' α -esimo quantile della variabile casuale $L = AC_0 - \frac{AC_1}{1+i}$. Visto che AC_0 è approssimato dallo stimatore non distorto \widetilde{AC}_0 e i è noto in $t = 0$, abbiamo che

$$\begin{aligned} P\left(\widetilde{AC}_0 - \frac{AC_1}{1+i} \leq \widetilde{SCR}\right) &= \alpha \\ P\left(-AC_1 \leq (\widetilde{SCR} - \widetilde{AC}_0)(1+i)\right) &= \alpha. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Indicando con q_α il quantile α -esimo di $-AC_1$, risulta allora

$$\widetilde{SCR} = \widetilde{AC}_0 + \frac{q_\alpha}{1+i}. \quad (5.36)$$

La quantità q_α non è nota e va quindi stimata. Poniamo di avere N realizzazioni stimate della variabile casuale $Z = -AC_1$: $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_N$; indichiamo con $\tilde{z}_{(1)}, \dots, \tilde{z}_{(N)}$ le corrispondenti statistiche ordinate. Una possibile stima di q_α è

$$\tilde{q}_\alpha = \tilde{z}_a, \quad a = \lfloor N\alpha + 0,5 \rfloor, \quad (5.37)$$

la stima di SCR diventa quindi

$$\widetilde{SCR} = \widetilde{AC}_0 + \frac{\tilde{q}_\alpha}{1+i}. \quad (5.38)$$

La procedura appena tracciata presenta un problema di tipo computazionale dato dalla stima dei $PVFP_1^{(i)}$. Poniamo di voler generare N scenari per il primo anno sotto la misura del mondo reale P . Per stimare i $PVFP_1^{(i)}$, $i \in \{1, \dots, N\}$, dobbiamo generare NK_1 traiettorie sotto la misura neutrale al rischio Q ($K_1^i = K_1$ per semplicità), ciascuna lunga $T - 1$ anni. In molte applicazioni realistiche, per ottenere stime affidabili, N e K_1 sono rispettivamente dell'ordine di 10^4 e 10^3 , NK_1 è quindi dell'ordine di 10^7 (Morrison, 2009). Per ogni scenario, la situazione finanziaria dell'assicuratore è spesso sintetizzata tramite un numero di polizze rappresentative o *punti del modello* (model points), tipicamente varianti tra le 10 000 e le 100 000 unità [35]. Seguendo questa strada dovremmo quindi calcolare 100 000 punti su 10 milioni di scenari, una prospettiva generalmente considerata computazionalmente impossibile date le attuali tecnologie informatiche.

5.4.4 I Minimi Quadrati di Monte Carlo

Illustriamo ora un metodo che punta a ridurre l'onere computazionale ponendo $K_1 = 1$ (o 2 se si utilizza il metodo delle variabili antitetiche).

Sia $\{e_k(Y_1, D_1)\}_{k \in \{1, \dots, M\}}$ un insieme finito di *funzioni base* (basis functions). Una prima approssimazione per $PVFP_1$ è

$$PVFP_1 \approx \widehat{PVFP}_1^{(M)}(Y_1, D_1) = \sum_{k=1}^M \alpha_k e_k(Y_1, D_1), \quad (5.39)$$

assumendo che la sequenza $\{e_k(Y_1, D_1)\}_{k \geq 1}$ sia linearmente indipendente e completa nello spazio di Hilbert $L^2(\Omega, \sigma(Y_1, D_1), P)$. Generiamo ora N traiettorie $(Y_t^{(1)}, D_t^{(1)}), \dots, (Y_t^{(N)}, D_t^{(N)})$, $t \in (0, T]$; nella nostra applicazione useremo Sobol per le traiettorie fino al tempo $t = 1$ mentre per $t \in (1, T]$ le genereremo sotto la misura neutrale al rischio. La scelta di utilizzare Sobol per il primo periodo invece della misura del mondo reale P (che utilizzeremo in un secondo momento), è motivata dal voler stimare il più correttamente possibile $\widehat{PVFP}_1^{(M)}$ persino per valori estremi di (Y_1, D_1) . Grazie alla proprietà delle sequenze di Sobol di riempire uniformemente lo spazio, abbiamo la garanzia che la nostra stima sarà ugualmente precisa anche nelle code (dove viene calcolato il SCR).

Calcoliamo il valore scontato del flusso di cassa generato sotto la traiettoria i -esima in $t = 1$,

$$PV_1^{(i)} = \sum_{t=2}^T \exp \left\{ - \int_1^t r_u^{(i)} du \right\} X_t^{(i)}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (5.40)$$

Possiamo vedere $PV_1^{(i)}$ come una stima (molto imprecisa) di $PVFP_1^{(i)}$; nella nostra applicazione miglioreremo anche questa valutazione preliminare utilizzando il metodo delle variabili antitetiche, al posto di $PV_1^{(i)}$ avremo quindi $PV_1^{a(i)} = \frac{PV_1^{(i)} + PV_1^{(i_a)}}{2}$, dove i_a indica la traiettoria antitetica a i .

Abbiamo ora tutti gli elementi per stimare α con il metodo dei minimi quadrati:

$$\hat{\alpha}^{(N)} = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^M} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[PV_1^{(i)} - \sum_{k=1}^M \alpha_k e_k(Y_1^{(i)}, D_1^{(i)}) \right]^2 \right\}; \quad (5.41)$$

sostituendo α con $\hat{\alpha}^{(N)}$, otteniamo quindi la seconda approssimazione di $PVFP_1$,

$$\text{PVFP}_1 \approx \widehat{\text{PVFP}}_1^{(M)}(Y_1, D_1) \quad (5.42)$$

$$\approx \widehat{\text{PVFP}}_1^{(M,N)}(Y_1, D_1) = \sum_{k=1}^M \hat{\alpha}_k^{(N)} e_k(Y_1, D_1). \quad (5.43)$$

Per stimare AC_1 , generiamo altre N traiettorie di (Y_t, D_t) , $t \in (0, 1]$, questa volta sotto la misura del mondo reale P . La stima ai Minimi Quadrati di Monte Carlo di AC_1 per la traiettoria (*real-world*) i è

$$\widehat{\text{AC}}_1^{(i)} = \widehat{\text{PVFP}}_1^{(M,N)}(Y_1^{(i)}, D_1^{(i)}) + X_1^{(i)} \quad (5.44)$$

e la stima del SCR è, come in precedenza,

$$\widehat{\text{SCR}} = \widetilde{\text{AC}}_0 + \frac{\hat{q}_\alpha}{1+i}, \quad (5.45)$$

dove questa volta q_α è stato stimato a partire dagli $\widehat{\text{AC}}_1^{(i)}$.

Capitolo 6

Modelli Additivi Generalizzati

La semplicità e la facilità di interpretazione dei risultati nel contesto dei minimi quadrati, rende tale metodo un valido strumento, purtroppo però a volte tale semplicità non è sufficiente per ottenere risultati accettabili. Illustriamo ora una via che ci porterà a stimare correttamente i $PVFP_1^{(i)}$ (e quindi il SCR) anche in presenza di dinamiche non lineari dovute a forme di garanzia o meccaniche di portafoglio. Il riferimento per quanto segue è il libro di Wood (2006).

Un *modello additivo generalizzato* (generalized additive model, GAM) è un modello lineare generalizzato con un predittore lineare coinvolgente una somma di funzioni lisce delle covariate. In generale la struttura del modello è quindi del tipo

$$g(\mu_i) = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta} + f_1(x_{1i}) + f_1(x_{2i}) + f_1(x_{3i}, x_{4i}) + \dots \quad (6.1)$$

con

$$\mu_i = E(Y_i) \quad \text{e} \quad Y_i \sim \text{qualche distribuzione della famiglia esponenziale.}$$

In seguito ci concentreremo su quello che è chiamato *modello additivo* (additive model), cioè al caso in cui $g(\cdot)$ è l'identità e la distribuzione degli Y_i è la normale. Useremo il nome GAM anche per questo modello.

6.1 Base B-spline

Limitandoci per ora a funzioni in una sola variabile x e scegliamo $k+m+1$ *nod*i (knots) nello spazio di appartenenza di x , $x_1 < x_2 < \dots < x_{k+m+1}$, dove l'intervallo su cui valuteremo la funzione è $[x_{m+2}, x_k]$ (il significato di m e k sarà chiaro in seguito).

Definizione 6.1 (base B-spline). Una *base B-spline* (B-spline basis) è definita ricorsivamente nel seguente modo:

$$B_i^m(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+m+1} - x_i} B_i^{m-1}(x) + \frac{x_{i+m+2} - x}{x_{i+m+2} - x_{i+1}} B_{i+1}^{m-1}(x) \quad i = 1, \dots, k$$

e

$$B_i^{-1} = \begin{cases} 1 & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Definiamo quindi una funzione $f(x)$ che chiamiamo *B-spline* di ordine $m + 1$ e rango k , come

$$f(x) = \sum_{i=1}^k B_i^m(x) \beta_i, \quad (6.2)$$

dove i B_i^m sono gli elementi di una base B-spline.

Le B-spline di ordine m sono una rappresentazione più stabile delle spline polinomiali di ordine $m + 1$. Tra queste le più famose sono le *spline cubiche* ($m + 1 = 3$, cubic spline),

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \beta_j + \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \beta_{j+1} + \\ & \frac{1}{6} \left[\frac{(x_{j+1} - x)^3}{x_{j+1} - x_j} - (x_{j+1} - x_j)(x_{j+1} - x) \right] \delta_j + \\ & \frac{1}{6} \left[\frac{(x - x_j)^3}{x_{j+1} - x_j} - (x_{j+1} - x_j)(x - x_j) \right] \delta_{j+1}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

se

$$x_j \leq x \leq x_{j+1}$$

dove $\beta_j = f(x_j)$ e $\delta_j = f''(x_j)$. Una spline polinomiale di ordine $m + 1$ è costruita in modo tale che sia continua e abbia derivate continue fino all'ordine m (2 per le spline cubiche) nei nodi scelti, e sia un polinomio di grado $m + 1$ tra essi.

6.2 P-splines

Le *P-splines* sono dei *lisciatori* (smoothers) di rango basso k che utilizzano le basi B-spline. Definite solitamente su nodi equispaziati, le P-splines applicano una *penalità differenza* (difference penalty) direttamente ai parametri β_i per controllare il *grado di tortuosità* (wiggliness) della funzione.

Supponiamo di voler penalizzare la differenza al quadrato tra valori adiacenti di β_i , allora la penalità sarà

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{k-1} (\beta_{i+1} - \beta_i)^2 \quad (6.4)$$

scrivibile anche come

$$\mathcal{P} = \boldsymbol{\beta}^\top \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{D} \boldsymbol{\beta}. \quad (6.5)$$

La penalità applicata è detta di *ordine 1*, da $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_1^\top$ con \mathbf{D}_1 operatore matriciale *differenza prima*,

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

È possibile definire penalità di ordine maggiore aumentando l'ordine della differenza.

La stima del vettore $\boldsymbol{\beta}$ si ottiene quindi minimizzando

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{B}\boldsymbol{\beta}\|^2 + \lambda \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{D} \boldsymbol{\beta} \quad (6.7)$$

dove la prima parte regola il grado di adattamento ai dati mentre la seconda penalizza la tortuosità della curva. La stima di $\boldsymbol{\beta}$ è quindi

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{B}^\top \mathbf{B} + \lambda \mathbf{D})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{y}. \quad (6.8)$$

In questo caso, l'*ordine della penalità* utilizzato è 1.

6.3 La Cross-Validazione Generalizzata

Prima di poter effettivamente stimare β , dobbiamo decidere quanto vogliamo penalizzare la tortuosità a discapito del grado di adattamento. Il parametro che regola questa relazione è il *parametro di liscio* (smoothing parameters) λ .

Definizione 6.2 (cross-validazione). La funzione *cross-validazione* (cross validation, CV) è definita come

$$V_0(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{\mu}_i^{[-i]}(\lambda)]^2$$

dove $\hat{\mu}_i^{[-i]}$ è la stima di $E(y_i)$ ottenuta su tutti i dati eccetto y_i .

Sia

$$A(\lambda) = B(B^\top B + \lambda D)^{-1} B^\top \quad (6.9)$$

la *matrice di influenza* (influence matrix) del modello considerato. Si può far vedere che

$$V_0(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{\mu}_i(\lambda))^2}{(1 - A_{ii}(\lambda))^2} \quad (6.10)$$

dove gli A_{ii} sono gli elementi sulla diagonale di A determinanti l'*influenza* (leverage) dell'osservazione i -esima. Vale inoltre la proprietà asintotica

$$E(V_0) \approx \text{MSE}_{\hat{y}} + \sigma^2, \quad (6.11)$$

dove $\text{MSE}_{\hat{y}}$ è l'*errore quadratico medio* (mean squared error) del predittore,

$$\text{MSE}_{\hat{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2, \quad (6.12)$$

e σ^2 è la varianza degli y_i . Un primo modo per scegliere λ è quindi

$$\lambda_{\text{CV}} = \arg \min_{\lambda} \{V_0(\lambda)\}. \quad (6.13)$$

Benché la CV sia un criterio ragionevole, soffre di due svantaggi. Il primo è che in modelli additivi con molti parametri di lisciamiento può diventare computazionalmente troppo oneroso, il secondo è che presenta un problema di *invarianza*. Sia Q una matrice ortogonale, l'inferenza su $\boldsymbol{\beta}$ dato

$$\|\mathbf{y} - B\boldsymbol{\beta}\|^2 + \lambda\boldsymbol{\beta}^\top D\boldsymbol{\beta} \quad (6.14)$$

o

$$\|Q\mathbf{y} - QB\boldsymbol{\beta}\|^2 + \lambda\boldsymbol{\beta}^\top D\boldsymbol{\beta}, \quad (6.15)$$

è la stessa, ma i due obiettivi non portano generalmente allo stesso valore della CV.

Vista questa spiacevole mancanza di invarianza alle rotazioni, una possibilità è quella di scegliere cosa sia per noi una “buona” e una “cattiva” rotazione e definire il nostro criterio di conseguenza. Se i valori A_{ii} sulla diagonale della matrice di influenza A sono molto differenti tra loro, questo vuol dire che alcuni punti hanno un *leverage* molto alto e portano la CV a essere determinata solo da essi. Scegliamo quindi una rotazione Q tale da rendere tutti gli A_{ii} uguali in modulo. Visto che

$$\text{tr}(QAQ^\top) = \text{tr}(AQ^\top Q) = \text{tr}(A), \quad (6.16)$$

gli elementi sulla diagonale di

$$A_Q(\lambda) = QA(\lambda)Q^\top, \quad (6.17)$$

avendo tutti lo stesso valore per definizione, devono essere pari a $\text{tr}(A)/n$. Utilizzando A_Q al posto di A nella definizione di cross-validazione, otteniamo la GCV.

Definizione 6.3 (cross-validazione generalizzata). La funzione *cross-validazione generalizzata* (generalized cross validation, GCV) è definita come

$$V(\lambda) = \frac{n\|\mathbf{y} - \hat{\mu}(\lambda)\|^2}{[n - \text{tr}(A(\lambda))]^2}.$$

Si noti che non è necessario effettuare davvero la rotazione per utilizzare la GCV, questo criterio è anzi invariante rispetto a rotazioni e, dato che la GCV non è altro che la CV sul problema ruotato, condivide le proprietà di quest’ultima. Il criterio che utilizzeremo per la scelta di λ è quindi

$$\lambda_{\text{GCV}} = \arg \min_{\lambda} \{V(\lambda)\}. \quad (6.18)$$

6.4 Base Prodotto Tensoriale

Illustriamo ora una base con cui è possibile costruire funzioni lisce di un numero qualsiasi di covariate. Il metodo seguente presuppone di avere già una base e dei funzionali misuranti il grado di tortuosità delle funzioni di lisciamiento marginali, per questi scopi useremo le P-splines costruite su basi B-spline.

Supponiamo di avere tre funzioni lisce (la generalizzazione per dimensioni maggiori è immediata),

$$f_x(x) = \sum_{i=1}^{k_1} \beta_i B_i(x), \quad f_y(y) = \sum_{j=1}^{k_2} \gamma_j C_j(y), \quad f_z(z) = \sum_{k=1}^{k_3} \delta_k D_k(z), \quad (6.19)$$

con β_i , γ_j e δ_k parametri e $B_i(x)$, $C_j(y)$ e $D_k(z)$ funzioni base. Volendo convertire la funzione liscia di x , f_x , in una funzione liscia di x e y , è necessario che f_x vari lisciamamente con y . Una possibilità è definire i β_i come

$$\beta_i = \beta_i(z) = \sum_{j=1} \gamma_{ij} C_j(y), \quad (6.20)$$

da cui deriva immediatamente

$$f_{xy}(x, y) = \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \gamma_{ij} C_j(y) B_i(x). \quad (6.21)$$

Con lo stesso ragionamento, facendo variare lisciamamente f_{xy} con z , possiamo ottenere anche

$$f_{xyz}(x, y, z) = \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{k=1}^{k_3} \beta_{ijk} D_k(z) C_j(y) B_i(x). \quad (6.22)$$

Si può far vedere che, ordinando appropriatamente i β_{ijk} nel vettore $\boldsymbol{\beta}$, la matrice del modello X, valutante il lisciamiento *prodotto tensoriale* (tensor product) rispetto alle relative osservazioni, può essere messa in relazione facilmente con le matrici dei modelli marginali, B_x , C_y e D_z . Sia \mathbf{x}_i l' i -esima colonna di X,

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{d}_i, \quad (6.23)$$

dove \otimes indica il *prodotto di Kroneker* (da cui il nome *base prodotto tensoriale*).

Supponiamo ora di avere dei funzionali misuranti la tortuosità di f_x , f_y e f_z ,

$$J_x(f_x) = \boldsymbol{\beta}^\top D_x \boldsymbol{\beta}, \quad J_y(f_y) = \boldsymbol{\gamma}^\top D_y \boldsymbol{\gamma}, \quad J_z(f_z) = \boldsymbol{\delta}^\top D_z \boldsymbol{\delta}. \quad (6.24)$$

Una misura naturale della tortuosità di f_{xyz} è allora

$$J(f_{xyz}) = \lambda_x \int_{y,z} J_x(f_{x|yz}) dydz + \lambda_y \int_{x,z} J_y(f_{y|xz}) dx dz + \lambda_z \int_{x,y} J_z(f_{z|xy}) dx dy, \quad (6.25)$$

dove $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)^\top$ è il vettore che controlla il grado di tortuosità nelle varie direzioni. Come già detto, il parametro di lisciamiento $\boldsymbol{\lambda}$ va scelto, è possibile a questo scopo estendere le metodologie già illustrate (si rimanda a Wood (2006) per i dettagli).

Capitolo 7

Applicazione a un portafoglio di piani di accumulo di capitale *unit-linked* con garanzia di minimo

Il caso in cui applicheremo i modelli sviluppati nei capitoli precedenti è tratto dal Capitolo 4 di Manukian (2012), ispirato a sua volta a un reale portafoglio di Generali Italia S.p.A.

7.1 Descrizione della polizza

Consideriamo un piano assicurativo di accumulo di capitale *unit-linked* con rendimento minimo garantito del 2,5%. Tale prodotto è caratterizzato da una forte dipendenza dall'andamento del mercato e dal numero di riscatti che, assieme alla garanzia, producono dinamiche non lineari del PVFP. L'aspettativa è che la distribuzione della *perdita attesa* a un anno abbia code più pesanti rispetto a quelle della distribuzione normale, rendendo quindi non affidabile la stima del SCR prodotta dalla *standard formula*.

7.1.1 Caratteristiche di una polizza *unit-linked*

La caratteristica principale di una polizza *unit-linked*, salvo la presenza di qualche forma di garanzia, è che il rischio finanziario è a carico interamente o quasi del contraente. La copertura sottostante è solitamente mista; il premio è investito in un fondo di riferimento, selezionato dal contraente tra un insieme di fondi offerti dall'assicuratore. I portafogli d'investimento pro-

posti coprono diversi profili, in modo da rispondere alle diverse propensioni al rischio di ciascuno. Il contraente può avere la facoltà di cambiare il proprio profilo dietro al pagamento di una quota (*switching fee*) o gratuitamente; in determinati istanti, se nel contratto è prevista tale opzione (*switching option*). Il fondo accumulato con l'incasso dei premi è detto *policy fund* o *policy account*. I benefici vengono definiti in termini di valore del fondo all'epoca del pagamento, nello specifico:

- il *beneficio a scadenza* (maturity benefit) è il valore corrente del fondo collegato con la polizza alla scadenza;
- il *beneficio caso morte* (death benefit) è il valore corrente del fondo collegato con la polizza nell'istante della morte dell'assicurato; tale valore è incrementato da una quantità non negativa rappresentante la somma sotto rischio;
- il *valore di riscatto* (surrender value) è il valore corrente del fondo collegato con la polizza all'epoca del riscatto, al netto della penale di riscatto.

Come già anticipato, essendo i benefici derivanti dal valore del fondo collegato alla polizza (ignoto al momento della sottoscrizione), il rischio è principalmente a carico dell'assicurato. Il nome "*unit-linked*" deriva dal fatto che il loro valore è strettamente connesso a quello delle quote dei fondi in cui il denaro è investito, i cosiddetti *fondi interni*.

7.1.2 Polizze *unit-linked* con garanzie finanziarie

Per limitare il rischio a carico del contraente trasferendone una parte all'assicuratore, alcune polizze *unit-linked* inseriscono delle garanzie finanziarie che si traducono in prestazioni minime garantite. Chiamiamo B_t la generica prestazione erogata in t e sia m la scadenza della polizza. B_t è un *beneficio caso morte* o *riscatto* se $t \in \{1, \dots, m-1\}$, mentre, se $t = m$, si tratta di un *beneficio a scadenza*. Nel nostro caso di studio, la garanzia non si applica in caso di riscatto; il pagamento del premio per questa polizza è posticipato, inizia quindi in $t = 2$ e, prima del periodo di copertura (entro la fine dell'anno $t = 0$), l'assicurato deve versare una quota iniziale per entrare nel fondo. La durata della polizza è di $m = 20$ anni.

Rimandiamo alla Tabella 7.1 per le definizioni dei simboli che seguiranno.

Simbolo	Descrizione	Formula
p	premio annuo	25 000 €
P_0	versamento iniziale	250 000 €
i^a	tasso di interesse <i>risk-free</i> in $t = 0$	4,0%
r_g	tasso minimo garantito	2,5%
s^a	tasso di acquisizione (caricamento su p)	15%
s^m	tasso di amministrazione	0,02%
s^g	tasso di gestione del fondo	0,2%
G_t	valore della garanzia in t	vedi eq. (7.1)
G_{t+1-}	valore della garanzia alla fine dell'anno t	$G_t(1 + r_g)(1 - s^g)$
ρ_t	rendimento del fondo nell'anno t	
F_t	valore del fondo in t	vedi eq. (7.2)
F_{t+1-}	valore del fondo alla fine dell'anno t	$F_t(1 + \rho_t)(1 - s^g)$
B_t^R	valore prestazione caso riscatto in $t + 0,5$	$F_t[(1 + \rho_t)(1 - s^g)]^{0,5}$
B_t^M	valore prestazione caso morte in $t + 0,5$	$\max\{B_t^R, G_t[(1 + r_g)(1 - s^g)]^{0,5}\}$
B_t^S	valore prestazione a scadenza	$\max\{F_{t+1-}, G_{t+1-}\}$
q_{x+t}	prob. di morire in $[t, t + 1)$ avendo x anni	
l_t	percentuale di polizze riscattate in t	5%
N_t^M	numero di morti nell'anno t	$N_{t-1}q_{x+t}$
N_t^R	numero di riscatti nell'anno t	$(N_{t-1} - N_t^M)l_t$
N_t	numero di polizze alla fine dell'anno t	$N_{t-1} - N_t^M - N_t^R$
r_t	tasso istantaneo di interesse <i>risk-free</i> in t	
v_t	fattore di sconto <i>risk-free</i> da t a 1	$\exp\left\{-\int_1^t r_u du\right\}$
P_t	montepremi in t	$N_{t-1}p$
L_t	caricamento sui premi	$P_t s^a$
V_{t+1-}	riserve alla fine dell'anno t	$N_t F_{t+1-}$
V_t	riserve all'inizio dell'anno t	$V_{(t-1)+1-}$
fee_t	spese di gestione in t	$V_{t+1-} \frac{s^g}{1-s^g}$
adm_t	spese di amministrazione in t	$V_{t+1-} s^m$
U_t^R	prestazioni per riscatto in t	$N_t^R B_t^R$
U_t^M	prestazioni per uscite caso morte in t	$N_t^M B_t^M$
U_t^S	prestazioni per uscite a scadenza	$N_m B_t^S$
I_t	proventi da investimento in t	$(V_t + P_t - L_t)\rho_t$ $- (U_t^M + U_t^R)(\sqrt{1 + \rho_t} - 1)$
Entrata Lorda $_t$		$fee_t + P_t + V_t + I_t$
Uscita Lorda $_t$		$U_t^R + U_t^M + U_t^S + adm_t + V_{t+1-}$
Flusso Netto $_t$		Entrata Lorda $_t$ - Uscita Lorda $_t$
PVFP $_1$	valore attuale dei profitti futuri in $t = 1$	$\sum_{t=1}^m v_t \text{Flusso Netto}_t$

Tabella 7.1: Definizione dei simboli utilizzati e delle relative formule di calcolo.

La garanzia G_t nel caso morte, $t \in \{1, \dots, m-1\}$, o scadenza, $t = m$, è uguale all'ammontare iniziale del fondo p_0 più i premi p versati fino al tempo t , capitalizzati tramite il tasso minimo garantito r_g , al netto delle spese di gestione e delle spese di acquisizione dei premi, $G_t = F_t = p_0$ se $t = 1$, altrimenti, per $t \in \{2, \dots, m\}$

$$G_t = p_0 [(1 + r_g)(1 - s^g)]^{t-1} + \sum_{i=2}^t p (1 - s^a) [(1 - s^g)(1 + r_g)]^{t-i}, \quad (7.1)$$

$$F_t = p_0 \prod_{i=1}^{t-1} [(1 + \rho_i)(1 - s^g)] + p (1 - s^a) \left[\sum_{i=2}^{t-1} \prod_{j=i}^{t-1} (1 + \rho_j)(1 - s^g) + 1 \right]. \quad (7.2)$$

Esprimendo i valori monetari in migliaia di euro, un possibile schema di flussi legato a una polizza è

t	p	ρ_t	G_t	G_{t+1-}	F_t	F_{t+1-}	B_t^M	B_t^R	B^S
0	-	-	-	250	-	250	-	-	-
1	-	-1,3%	250	256	250	246	253	248	-
2	25	6,7%	277	283	267	285	280	276	-
3	25	6,2%	305	312	307	326	316	316	-
4	25	3,8%	333	340	347	360	353	353	-
5	25	4,7%	362	370	381	399	390	390	-
6	25	4,3%	391	400	420	439	429	429	-
7	25	4,4%	422	431	460	480	469	469	-
8	25	2,9%	452	463	502	516	508	508	-
9	25	7,3%	484	495	537	576	556	556	-
10	25	6,4%	516	528	598	636	616	616	-
11	25	3,6%	550	562	657	681	668	668	-
12	25	9,5%	583	597	702	769	734	734	-
13	25	5,4%	618	632	790	833	810	810	-
14	25	8,8%	653	668	854	930	890	890	-
15	25	5,7%	690	706	951	1006	977	977	-
16	25	5,5%	727	743	1027	1083	1054	1054	-
17	25	9,2%	765	782	1105	1206	1153	1153	-
18	25	7,1%	804	822	1227	1314	1268	1268	-
19	25	3,7%	843	863	1335	1384	1358	1358	-
20	25	5,0%	884	904	1405	1476	1439	1439	1476

7.1.3 Descrizione del portafoglio

Elenchiamo alcune assunzioni preliminari:

- l'età d'ingresso dei contraenti è 40 anni;
- la probabilità condizionata q_{x+t} di morire entro l'anno t (della polizza) per un soggetto di età $40+t$ è tratta dalla tavola di mortalità SIM 1992 (Istat); il numero di morti N_t^M è stato posto pari alla realizzazione di una variabile casuale binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ con $n = N_{t-1}$ e $p = q_{x+t}$;
- ogni anno (pre-shock) il 5% degli assicurati riscatta la polizza;
- il portafoglio è composto da 1 000 polizze;
- la durata del periodo di copertura è $m = 20$ anni;
- il fondo collegato alle polizze è composto per il 20% da titoli azionari e per l'80% da titoli obbligazionari;
- le prestazioni caso morte B_t^M e riscatto B_t^R vengono erogate a metà dell'anno t .

Vediamo un possibile sviluppo del portafoglio e il relativo PVFP₁. Le serie ρ_t e v_t sono state generate sotto la misura neutrale al rischio Q , nei modi che chiariremo in seguito.

CAPITOLO 7. APPLICAZIONE DEL MODELLO

t	q_{t+1}	l_t	N_t^M	N_t^R	N_t	P_t	L_t	V_t	V_{t+1}	fee _t	adm _t	U_t^M	U_t^R	U^S	I_t
0	-	-	-	-	-	-	-	-	250000	-	-	-	-	-	-
1	0,19%	5%	4	50	946	-	-	250000	232897	467	47	1011	12404	-	-3227
2	0,21%	5%	0	47	899	23650	3548	232897	256603	514	51	0	12973	-	16590
3	0,23%	5%	0	45	854	22475	3371	256603	278128	557	56	0	14207	-	16644
4	0,25%	5%	3	43	808	21350	3202	278128	290954	583	58	1059	15183	-	10937
5	0,27%	5%	1	40	767	20200	3030	290954	306159	614	61	390	15590	-	14031
6	0,30%	5%	0	38	729	19175	2876	306159	319774	641	64	0	16302	-	13635
7	0,35%	5%	1	36	692	18225	2734	319774	332342	666	66	469	16902	-	14466
8	0,38%	5%	0	35	657	17300	2595	332342	338986	679	68	0	17786	-	9744
9	0,42%	5%	0	33	624	16425	2464	338986	359662	721	72	0	18345	-	25078
10	0,46%	5%	1	31	592	15600	2340	359662	376529	755	75	616	19093	-	23336
11	0,50%	5%	2	30	560	14800	2220	376529	381306	764	76	1337	20050	-	13605
12	0,55%	5%	4	28	528	14000	2100	381306	405891	813	81	2936	20551	-	36196
13	0,62%	5%	0	26	502	13200	1980	405891	418160	838	84	0	21070	-	22140
14	0,69%	5%	1	25	476	12550	1882	418160	442545	887	89	890	22257	-	36889
15	0,78%	5%	3	24	449	11900	1785	442545	451497	905	90	2931	23446	-	25241
16	0,87%	5%	1	22	426	11225	1684	451497	461532	925	92	1054	23181	-	24753
17	0,97%	5%	0	21	405	10650	1598	461532	488328	979	98	0	24212	-	41980
18	1,08%	5%	1	20	384	10125	1519	488328	504582	1011	101	1268	25370	-	34314
19	1,21%	5%	0	19	365	9600	1440	504582	505227	1012	101	0	25805	-	18316
20	1,34%	5%	2	18	345	9125	1369	505227	509268	1021	102	2878	25900	509268	25093

t	v_t	Entrata Lorda _t	Uscita Lorda _t	Flusso Netto _t	PVFP ₁
0	-	-	-	-	
1	96%	247 240	246 359	881	
2	92%	273 651	269 627	4 024	
3	86%	296 279	292 391	3 888	
4	81%	310 999	307 255	3 744	
5	77%	325 799	322 200	3 599	
6	73%	339 610	336 140	3 470	
7	69%	353 131	349 780	3 351	
8	66%	360 065	356 840	3 225	
9	62%	381 210	378 078	3 132	
10	59%	399 353	396 313	3 040	
11	56%	405 698	402 769	2 930	
12	53%	432 316	429 459	2 857	
13	50%	442 070	439 314	2 756	
14	46%	468 486	465 781	2 705	
15	43%	480 591	477 964	2 627	
16	40%	488 400	485 859	2 541	
17	37%	515 141	512 637	2 504	
18	34%	533 778	531 321	2 457	
19	32%	533 510	531 133	2 378	
20	30%	540 465	538 148	2 317	

35 509

7.2 Simulazione dei fattori di rischio

Illustriamo ora le procedure utilizzate per simulare i fattori di sconto v , i rendimenti del fondo ρ e le percentuali di riscatto l . Le scelte sotto riportate riguardo alla stima dei modelli CIR e HN-GARCH sono da considerarsi solo indicative; il valore specifico dei parametri non inciderà sulla valutazione delle metodologie proposte. In altri termini, non siamo interessati a validare le procedure di stima dei processi dei fattori di rischio o come questi sono modellati, tali propositi vanno oltre le possibilità di questa tesi e richiederebbero una trattazione altrettanto corposa. Il nostro obiettivo principale è quello di verificare l'efficacia del metodo LSMC e delle tecniche con cui cercheremo di migliorarlo. Il giudizio sui metodi proposti non deve dipendere dal valore specifico dei parametri nei modelli utilizzati per la generazione degli scenari, altrimenti la validità dei risultati ottenuti cesserebbe alla prima variazione del contesto economico (e quindi dei parametri dei processi che lo rappresentano).

Nel seguito utilizzeremo la convenzione 1 anno = 252 giorni lavorativi.

7.2.1 Simulazione dei fattori di sconto v_t

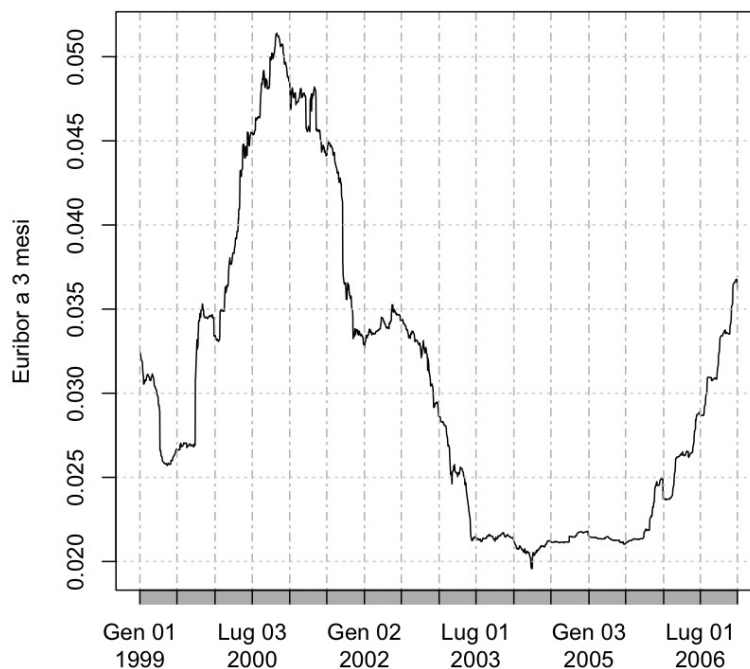


Figura 7.1: Serie dell'Euribor a 3 mesi, *dati: European Money Markets Institute.*

Per generare i *fattori di sconto* (discount factor) v_t , che utilizzeremo per attualizzare i flussi di cassa dall'anno t all'anno 1, e i rendimenti obbligazionari o_t , è stato utilizzato il modello CIR del Capitolo 3 (a cui si rimanda per i dettagli tecnici). I parametri del modello sono stati scelti vicini a quelli stimati sulla serie giornaliera dal 01/01/1999 al 29/12/2006 dell'Euribor a tre mesi; per approfondimenti sulla bontà e sulle motivazioni di tale scelta si rimanda a Palloni (2015).

Il modello utilizzato per i tassi istantanei è quindi

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma r_t^{1/2} dW_t, \quad (7.3)$$

con $a = 0,4$, $b = 0,03$, e $\sigma = 0,02$. Ricordiamo la relativa discretizzazione di Eulero

$$r_i = r_{i-1} + a(b - r_{i-1})\Delta + \sigma\sqrt{|r_{i-1}|}\sqrt{\Delta}w_{i+1} \quad (7.4)$$

$i = 1, \dots, 252(m+1)$, $w_{i+1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ i.i.d., dove abbiamo posto $\Delta = 1/252$ e $r_0 = 0,036$ (valore dell'Euribor il 29/12/2006). La condizione di Feller, $2ab > \sigma^2$, risulta soddisfatta:

$$2ab = 0,024 > 0,0004 = \sigma^2, \quad (7.5)$$

il processo (non discretizzato), quindi, non tocca mai lo zero. Per simulare sotto la misura neutrale al rischio Q , per i da 253 a $252(m+1)$, i parametri del modello sono stati trasformati tramite l'Equazione (3.2); il parametro di premio al rischio λ , posto pari a $-0,2304$, è stato preso da Barbarin e Devolder (2005).

Il passaggio dagli r_i ai v_t si ottiene tramite la relazione

$$v_t = \exp \left\{ - \int_1^t r_u du \right\}, \quad (7.6)$$

che discretizzata diventa $v_1 = 1$ per $t = 1$ e

$$v_t = \exp \left\{ - \frac{1}{252} \sum_{i=253}^{252t} r_i \right\}, \quad (7.7)$$

per $t \in \{2, \dots, m\}$. La sommatoria all'interno dell'esponenziale in (7.7) non è altro che la somma di Riemann (il cui limite è l'integrale in (7.6)) dall'inizio dell'anno 1 (253-esimo giorno, t parte da zero) alla fine dell'anno $t-1$ (giorno $252t$ -esimo) dove il delta temporale tra gli r_i è fisso e pari a $\Delta = 1/252$.

Per calcolare la serie ρ_t , avremo bisogno anche della serie dei rendimenti o_t (semplici) della parte obbligazionaria del fondo, $t \in \{1, \dots, m\}$. Poniamo gli o_t pari a

$$o_t = \exp \left\{ \int_t^{t+1} r_u du \right\} - 1, \quad (7.8)$$

che calcoliamo come

$$o_t = \exp \left\{ \frac{1}{252} \sum_{i=252t+1}^{252(t+1)} r_i \right\} - 1. \quad (7.9)$$

7.2.2 Simulazione dei rendimenti ρ_t

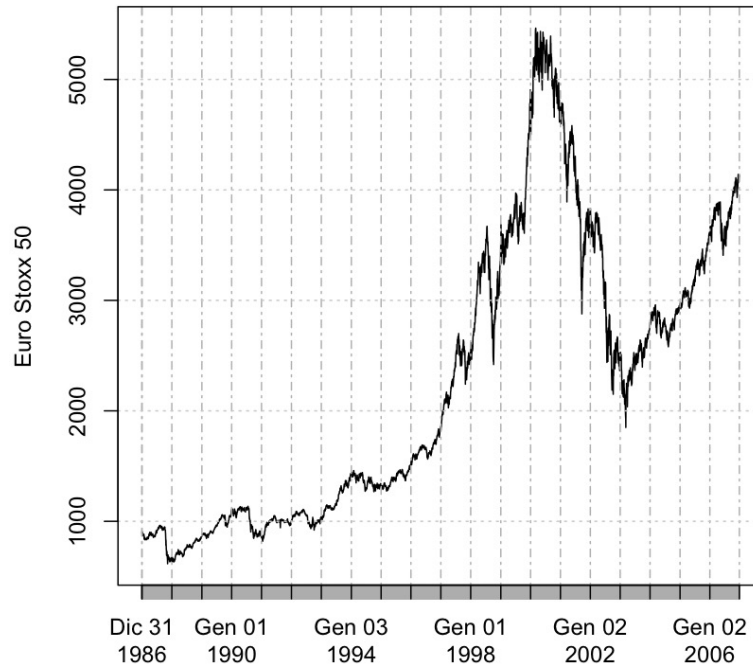


Figura 7.2: Serie dell'Euro Stoxx 50, dati: Yahoo Finanza.

Per simulare i *rendimenti del fondo* (fund returns) ρ_t , dobbiamo prima simulare i rendimenti a_t della parte azionaria del fondo. Gli a_t sono stati generati tramite il modello HN-GARCH(1, 1) del Capitolo 4, dove i parametri sono stati stimati sulla serie giornaliera Euro Stoxx 50 per il periodo dal 01/01/1986 al 31/12/2006. Rispetto al modello CIR, si è scelto di utilizzare un arco temporale più lungo vista la maggiore stabilità della serie Euro Stoxx 50 rispetto a quella dell'Euribor e per coerenza con con la lunghezza della serie da simulare (che copre $m + 1 = 21$ anni). Gli a_t sono calcolati come

$$a_t = \exp \{ \log S_{252t} - \log S_{252(t-1)} \} - 1, \quad t = 1, \dots, m, \quad (7.10)$$

dove il modello utilizzato per generare i $\log S_k$ è

$$\log S_i = \log S_{i-1} + \mu + \lambda h_i + \sqrt{h_i} z_i \quad (7.11)$$

$$h_i = \omega + \beta h_{i-1} + \alpha (z_{i-1} - \gamma \sqrt{h_{i-1}})^2, \quad (7.12)$$

con $i = 1, \dots, 252(m+1)$; $\lambda = 1,47$; $\omega = 0$; $\alpha = 4 \cdot 10^{-6}$; $\beta = 0,88$; $\gamma = 140$; $\mu = i^a/252$ (vedremo in seguito da dove deriva la scelta $i^a = 0,4\%$ per il tasso *risk-free* annuo) e $S_0 = 4120$ (valore del Euro Stoxx 50 il 31/12/2006). Per correlare la serie dei log-rendimenti $\log(S_i/S_{i-1})$ a quella dei tassi r_i , gli z_i sono stati posti pari a

$$z_i = \delta z_i^* + \sqrt{1 - \delta^2} w_i, \quad (7.13)$$

dove $z_i^* \sim \mathcal{N}(0, 1)$ i.i.d., w_i sono gli stessi utilizzati per (7.4) e la correlazione δ è stata posta pari a 0,15 come in Barbarin e Devolder.

Il passaggio alla misura Q avviene tramite la Proposizione 4.1.2 del Capitolo 4.

Ottenuti gli o_t e gli a_t , i rendimenti ρ_t del fondo, $t \in \{1, \dots, m\}$, sono

$$\rho_t = 0,8o_t + 0,2a_t. \quad (7.14)$$

7.2.3 Simulazione delle percentuali di riscatti l_t

Le *percentuali di riscatti* (lapse) l_t non sono state modellate; per studiare l'impatto di una variazione in questo fattore di rischio si supporrà soltanto che uno shock ϵ nella percentuale di riscatti al tempo $t = 1$, $l_1^{sh} = 5\% (1 + \epsilon)$, si propaghi come

$$l_t^{sh} = 5\% \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right), \quad (7.15)$$

per $t \in \{2, \dots, m\}$. La forma assunta è la stessa utilizzata in Manukian (2012), il suo scopo è solo quello di estendere l'effetto degli shock applicati in $t = 1$ in modo da studiarne l'impatto. In ulteriori studi anche questo fattore di rischio andrebbe modellato più adeguatamente.

7.3 Applicazione del metodo dei Minimi Quadrati di Monte Carlo

Illustriamo i passaggi che seguiremo nell'applicazione del metodo LSMC e degli altri modelli studiati.

7.3.1 Generazione degli shock tramite Sobol

Come prima cosa, simuleremo $N = 25000$ punti $\mathbf{s}^{(1)}, \dots, \mathbf{s}^{(N)}$ dell'ipercubo $[-1, 1]^4$ tramite trasformazione di una sequenza di Sobol $\mathbf{s}^{*(1)}, \dots, \mathbf{s}^{*(N)}$ su $[0, 1]^4$:

$$\mathbf{s}^{(k)} = 2(\mathbf{s}^{*(k)} - 0,5), \quad k = 1, \dots, N. \quad (7.16)$$

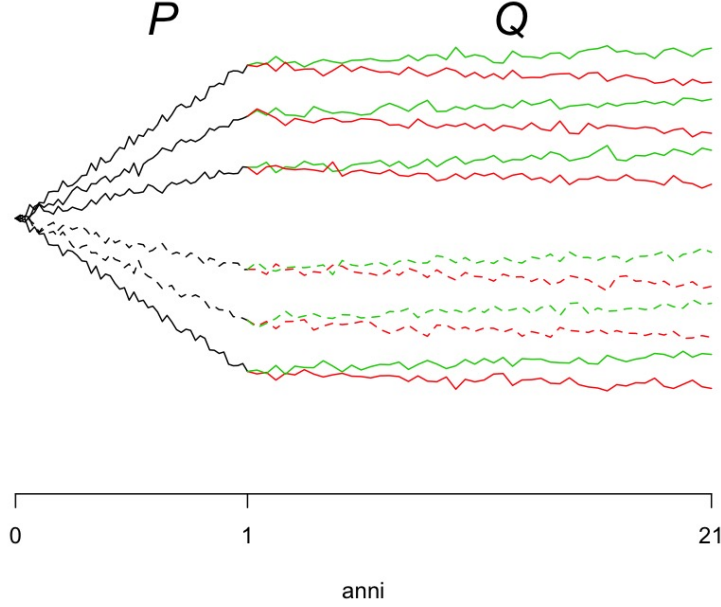


Figura 7.3: Traiettorie sotto la misura *real-world* P (nere) e traiettorie antitetiche sotto la misura *risk-neutral* Q (verdi e rosse).

La funzione che utilizzeremo per generare gli $\mathbf{s}^{*(k)}$ è *sobol* del pacchetto R *randtoolbox*. Ogni punto $\mathbf{s}^{(k)}$ è composto da quattro coordinate $s_j^{(k)}$, $j = 1, \dots, 4$, che diventeranno gli shock applicati al parametro b del modello CIR, a μ del modello HN-GARCH(1, 1), alla percentuale di riscatti l_t e al valore del tasso di interesse istantaneo r_t in $t = 1$ ¹. Al valore di $\log S_1$ non è stato applicato nessuno shock; la serie dei rendimenti, per come abbiamo definito il modello, è insensibile a variazioni del valore iniziale (la serie dei rendimenti parte da $t = 1$). Abbiamo quindi, per $k = 1, \dots, N$:

$$b^{s(k)} = 0,03(1 + s_1^{(k)}); \quad (7.17)$$

$$\mu^{s(k)} = \mu(1 + s_2^{(k)}) = \frac{0,04}{252}(1 + s_2^{(k)}); \quad (7.18)$$

$$l_1^{s(k)} = 5\%(1 + s_3^{(k)}), \quad l_t^{s(k)} = 5\% \left(1 + \frac{s_3^{(k)}}{2} \right) \quad t = 2, \dots, 20; \quad (7.19)$$

$$r_1^{s(k)} = 0,036(1 + s_4^{(k)}); \quad (7.20)$$

l'apice "s" sta per "Sobol".

¹Si utilizzeranno in modo intercambiabile le notazioni r_1 e r_{252} per indicare lo stesso oggetto, l'unità temporale sarà chiara dal contesto. Lo stesso per le altre variabili.

7.3.2 Costruzione degli scenari per il primo anno tramite Sobol e stima della funzione $\widehat{\text{PVFP}}_1$

Sia $\widehat{\text{PVFP}}_1(s_1, s_2, s_3, s_4)$ la funzione che lega il PVFP_1 agli scostamenti percentuali tra il tempo $t = 0$ e il tempo $t = 1$ dei parametri del modello. Per ogni $k = 1, \dots, N$, genereremo sotto Q due traiettorie antitetiche k e k^a , dall'anno 1 all'anno $m + 1$, sia per i tassi istantanei $r_t^{s(k)}$ che per i log-prezzi $\log S_t^{s(k)}$ (correlando le due serie nel modo già spiegato). Utilizzando la convenzione 1 anno = 252 giorni lavorativi come fatto finora, questo vuol dire generare $2 \cdot N \cdot 252 \cdot m = 252 \cdot 10^6$ valori per i tassi e altrettanti per i prezzi; ricordiamo che essendo metà delle traiettorie antitetiche, il numero di realizzazioni normali standard necessario per produrre le serie è dimezzato. A questo punto, generiamo N serie delle percentuali di riscatto $l_t^{s(k)}$, $t = 1, \dots, m$; per le scelte fatte in precedenza, dato $l_1^{s(k)}$, lo sviluppo di $l_t^{s(k)}$ da $t = 2$ a $t = m$ è deterministico.

Sia $\text{PVFP}_1(\mathbf{v}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{l})$ la funzione che data la serie dei fattori di sconto \mathbf{v} , dei rendimenti del fondo $\boldsymbol{\rho}$ e delle percentuali di riscatto \mathbf{l} , restituisce il valore del PVFP_1 secondo il meccanismo descritto nella sezione 7.1. Date le serie degli $r_t^{s(k)}$ e dei $\log S_t^{s(k)}$, abbiamo già mostrato come ricavare $\mathbf{v}^{s(k)}$ e $\boldsymbol{\rho}^{s(k)}$; la stima preliminare del PVFP_1 nello scenario k -esimo è allora

$$\text{PVFP}_1^{s(k)} = \frac{\text{PVFP}_1(\mathbf{v}^{s(k)}, \boldsymbol{\rho}^{s(k)}, \mathbf{l}^{s(k)}) + \text{PVFP}_1(\mathbf{v}^{s(k^a)}, \boldsymbol{\rho}^{s(k^a)}, \mathbf{l}^{s(k)})}{2}. \quad (7.21)$$

Data la matrice degli shock $\mathcal{S} = \{s_{kj} = s_j^{(k)}\}_{k=1, \dots, N, j=1, \dots, 4}$ e la serie $\text{PVFP}_1^{s^1}, \dots, \text{PVFP}_1^{s^N}$, possiamo infine stimare i parametri della funzione $\widehat{\text{PVFP}}_1(s_1, s_2, s_3, s_4)$ nel modo previsto per la forma funzionale scelta (tratteremo in seguito alcune possibilità).

7.3.3 Costruzione degli scenari per il primo anno sotto la misura P e calcolo dei $\widehat{\text{PVFP}}_1^{(k)}$

I $\text{PVFP}_1^{(k)}$ appena generati non sono distribuiti realisticamente: sia i valori iniziali in $t = 1$ dei modelli, che gli shock applicati ai parametri, sono stati generati cercando di riempire uniformemente l'area $\pm 100\%$ dei rispettivi valori in $t = 0$. Per ottenere dei valori credibili, generiamo di nuovo N traiettorie per t da 0 a 1, questa volta sotto la misura del mondo reale P , ottenendo quindi dei nuovi $r_1^{(k)}$ (e $\log S_1^{(k)}$, il cui valore come abbiamo detto non è rilevante). Posizioniamoci ora idealmente alla fine del primo anno, in $t = 1$; in seguito all'arrivo di nuova informazione, dobbiamo aggiornare

i parametri dei nostri modelli prima di stimare il valore attuale dei nostri profitti futuri. Poniamo che la nostra ipotesi sullo shock \mathbf{n} che colpirà in $t = 1$ il vettore dei parametri $(b, \mu, l_1)^\top$ sia che $\mathbf{n} \sim \mathcal{TN}_3(\mathbf{0}, \Sigma, -\mathbf{1}, \mathbf{1})$ dove \mathcal{TN} indica la normale multivariata troncata; assumiamo per semplicità di non attenderci variazioni negli altri parametri dei modelli. Siano quindi $\mathbf{n}^{(k)} = (n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, n_3^{(k)})^\top \sim \mathcal{TN}_3(\mathbf{0}, \Sigma, -\mathbf{1}, \mathbf{1})$, $k = 1, \dots, N$, i.i.d. con

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & 0 \\ \rho_{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (7.22)$$

definiamo i parametri della k -esima traiettoria come

$$b^{(k)} = 0,03(1 + n_1^{(k)}); \quad (7.23)$$

$$\mu^{(k)} = \mu(1 + n_1^{(k)}) = \frac{0,04}{252}(1 + n_1^{(k)}); \quad (7.24)$$

$$l_1^{(k)} = 5\%(1 + n_3^{(k)}), \quad l_t^{(k)} = 5\% \left(1 + \frac{n_3^{(k)}}{2}\right) \quad t = 2, \dots, 20. \quad (7.25)$$

La scelta di utilizzare la normale troncata è dovuta al fatto che valori negativi di b , μ e l sono non sensati o difficilmente spiegabili. Il parametro b rappresenta il valore di lungo periodo dei tassi d'interesse istantanei privi di rischio, un valore negativo implicherebbe che gli agenti sono disposti a pagare per il denaro che depositano (e non viceversa), lo stesso per μ che nel modello HN-GARCH ha il ruolo del tasso *risk-free* giornaliero. Riguardo a l , un valore negativo corrisponderebbe a un aumento delle polizze, noi ipotizziamo che si possa sottoscrivere la polizza solo in $t = 0$ (o che il requisito di capitale che stiamo calcolando riguardi solo le polizze scritte in quel periodo). Si è assunto inoltre che shock positivi e negativi siano equiprobabili. Per mantenere la maggior parte della massa probabilistica in $[-1, 1]^3$ nella normale non troncata di media $\mathbf{0}$ e matrice di covarianza Σ (in modo che la troncatura non abbia troppo effetto) è stato scelto $\sigma^2 = 0,1$. Per costruzione, abbiamo correlato gli shock applicati al parametro b del modello CIR con quelli applicati a μ del modello HN-GARCH(1, 1). La correlazione è stata posta pari a $\rho_{12} = 0,5$, valore indicato dalla direttiva come correlazione tra i moduli *Interest* e *Equity* (vedi E. C., 2010). In un'applicazione reale, questo parametro, come altri che abbiamo preso per buoni, andrebbe stimato. In questo esempio continueremo a concentrarci sulla procedura per arrivare a una stima corretta del SCR più che sui valori numerici dei singoli parametri.

La stima del PVFP₁ per lo scenario *real-world* k è

$$\widehat{\text{PVFP}}_1^{(k)} = \widehat{\text{PVFP}}_1(n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, n_3^{(k)}, n_4^{(k)}), \quad (7.26)$$

dove $\widehat{\text{PVFP}}$ è la funzione stimata in precedenza (sugli scenari Sobol) e $n_4^{(k)}$ è definito da

$$n_4^{(k)} = \frac{r_1^{(k)}}{r_0} - 1 = \frac{r_1^{(k)}}{0,036} - 1. \quad (7.27)$$

7.3.4 Calcolo del Solvency Capital Requirement

Ottenuti N valori per il PVFP_1 distribuiti realisticamente, $\widehat{\text{PVFP}}_1^{(1)}, \dots, \widehat{\text{PVFP}}_1^{(N)}$, visto che il profitto tra $t = 0$ e $t = 1$, $X_1^{(k)}$, è nullo per tutti gli scenari (la nostra valutazione è fatta in $t = 0$ ma le polizze partono da $t = 1$), abbiamo

$$\widehat{\text{AC}}_1^{(k)} = \widehat{\text{PVFP}}_1^{(k)}. \quad (7.28)$$

Generiamo ora per $t \in [0, m + 1)$, sotto la misura Q , $2N$ traiettorie dei fattori di rischio (per ogni traiettoria un'altra antitetica); ai parametri dei modelli per $t > 1$ sono stati applicati gli shock $n_j^{(k)}$ prima del passaggio da P a Q . Come in precedenza otteniamo i $\mathbf{v}^{(k)}$, $\boldsymbol{\rho}^{(k)}$ e $\mathbf{l}^{(k)}$, calcoliamo inoltre anche

$$v_0^{(k)} = \exp \left\{ -\frac{1}{252} \sum_{i=1}^{252} r_i^{Q(k)} \right\}. \quad (7.29)$$

Stimiamo quindi AC_0 come

$$\widehat{\text{AC}}_0 = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N v_0^{(k)} \text{PVFP}_1(\mathbf{v}^{(k)}, \boldsymbol{\rho}^{(k)}, \mathbf{l}^{(k)}) + v_0^{(k^a)} \text{PVFP}_1(\mathbf{v}^{(k^a)}, \boldsymbol{\rho}^{(k^a)}, \mathbf{l}^{(k^a)}). \quad (7.30)$$

Stimiamo il quantile \hat{q}_α della distribuzione di $-\text{AC}_1$ tramite gli $\widehat{\text{AC}}_1^{(k)}$ come mostrato nel Capitolo 5 (o con un'altra procedura dal risultato analogo). La stima del SCR è

$$\widehat{\text{SCR}} = \widehat{\text{AC}}_0 + \frac{\hat{q}_\alpha}{1 + i^a}, \quad (7.31)$$

dove il tasso di interesse privo di rischio per il primo anno, $i^a = 4,0\%$, è noto in $t = 0$. Per ottenere un valore coerente di i^a rispetto ai parametri scelti per il modello CIR, i^a è stato posto pari a

$$i^a = \frac{1}{\hat{B}_0} - 1; \quad (7.32)$$

con

$$\hat{B}_0 = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N (v_0^{(k)} + v_0^{(k^a)}) \quad (7.33)$$

stima *risk-neutral* del prezzo in $t = 0$ di un'attività priva di rischio B_t che paga 1 in $t = 1$.

7.4 Stima della funzione \widehat{PVFP}

Nei passaggi appena tracciati, non abbiamo spiegato come stimare effettivamente la funzione $\widehat{PVFP}(s_1, s_2, s_3, s_4)$ che lega il valore degli shock al valore dei profitti futuri del relativo scenario. Adottiamo inizialmente l'approccio classico (*Minimi Quadrati* di Monte Carlo) per poi proporre un'alternativa.

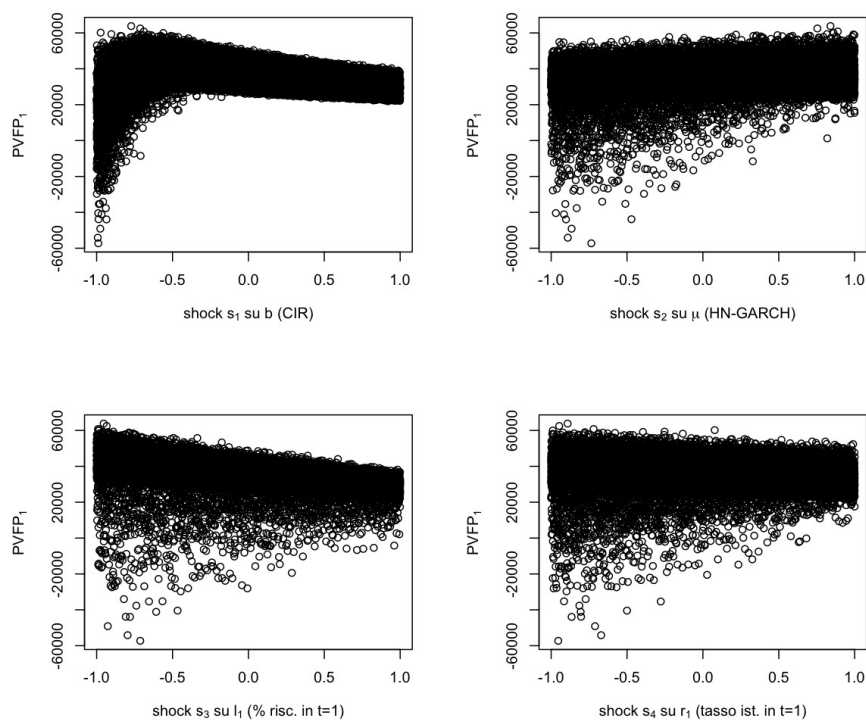


Figura 7.4: Valore del $PVFP_1$ per le N traiettorie in $[1, m + 1)$ dopo l'applicazione degli shock di Sobol.

7.4.1 I Minimi Quadrati e l'indice C_p di Mallows

Ipotizziamo per il momento che il $PVFP_1$ segua il semplice modello lineare

$$PVFP_1 = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta} + \epsilon. \quad (7.34)$$

Avendo già ottenuto N realizzazioni $PVFP_1^{s_1}, \dots, PVFP_1^{s_N}$ della variabile dipendente al variare del vettore degli shock di Sobol $(s_1, s_2, s_3, s_4)^\top$, non ci resta che scegliere le variabili esplicative prima di procedere alla stima di $\boldsymbol{\beta}$. Il criterio di selezione scelto è l'indice C_p di Mallows, già utilizzato da Bauer et al. (2009) (per l'implementazione in R e un breve sunto teorico si veda Geyer (2003)).

Definiamo l'indice C_p di Mallows come

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{RSS_p}{\hat{\sigma}^2} + 2p - N \\ &= \frac{RSS_p - RSS_k}{\hat{\sigma}^2} + p - (k - p) \\ &= (k - p)(F_{k-p, N-k} - 1) - p, \end{aligned} \quad (7.35)$$

dove RSS_p è la somma dei quadrati dei residui per un modello con p predittori (compresa l'intercetta, se presente), $\hat{\sigma}^2 = RSS_k/(N - k)$ è la stima della varianza dell'errore per il modello maggiore (con k predittori), e $F_{k-p, N-k}$ è la statistica F per il test F che confronta i due modelli. La statistica F è circa uno se il modello minore è corretto, in tal caso $C_p \approx p$, la vicinanza di C_p a p è quindi il criterio di selezione tra i modelli considerati.

Prima di poter implementare la selezione tramite l'indice C_p di Mallows, che effettueremo tramite la funzione *leaps* dell'omonima libreria R, dobbiamo scegliere i predittori del modello maggiore. Similmente a Bauer et al. (2009), ma con una variabile in più, sono stati scelti:

$$\begin{aligned} & s_i, \quad i = 1, \dots, 4 \\ & s_i s_j, \quad i = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, i \\ & s_i s_j s_l, \quad i = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, i, \quad l = 1, \dots, j \\ & s_i s_j s_l s_m, \quad i = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, i, \quad l = 1, \dots, j, \quad m = 1, \dots, l, \end{aligned}$$

per un totale di $k = 58$ predittori più l'intercetta. La selezione finale comprende $p = 38$ predittori più l'intercetta, i valori stimati delle componenti di $\boldsymbol{\beta}$ sono visibili nella Tabella 7.2. L' R^2 corretto per il modello è pari a 85,8%. La validità della selezione tramite l'indice C_p di Mallows, come già osservato in Bauer et al. (2009), è compromessa quando la varianza σ^2 non è costante. Osservando i grafici riportati, sembra che questa dipenda dal valore delle

x	β	x	β	x	β
1	35 660	$s_1 : s_4$	3 252	$s_1 : s_4^2$	2 062
s_1	-14 173	$s_2 : s_3$	-1 569	$s_2 : s_4^2$	315
s_2	-550	$s_2 : s_1^2$	11 066	$s_3 : s_4^2$	461
s_3	-9 074	$s_3 : s_1^2$	6 773	$s_1 : s_4^3$	-579
s_4	-5 493	$s_4 : s_1^2$	11 037	$s_3 : s_4^3$	-746
s_1^2	8 284	$s_2 : s_1^3$	-12 966	$s_1^2 : s_2^2$	-2 023
s_3^2	1 270	$s_3 : s_1^3$	-10 641	$s_1^2 : s_3^2$	-1 367
s_4^2	325	$s_4 : s_1^3$	-13 729	$s_1^2 : s_4^2$	-2 910
s_1^3	19 481	$s_1 : s_2^2$	1 617	$s_1 : s_2 : s_3$	3 482
s_4^3	263	$s_3 : s_2^2$	322	$s_1 : s_2 : s_4$	4 296
s_1^4	-21 261	$s_4 : s_2^2$	-2 617	$s_1 : s_3 : s_4$	3 015
$s_1 : s_2$	1 003	$s_1 : s_3^2$	274	$s_2 : s_3 : s_4$	869
$s_1 : s_3$	5 213	$s_4 : s_3^2$	344	$s_1 : s_2 : s_3 : s_4$	-2 045

Tabella 7.2: Parametri stimati per i predittori selezionati tramite l'indice C_p di Mallows.

variabili esplicative. Come vedremo nel confronto finale, il modello appena stimato sbaglia particolarmente nelle code della distribuzione, quando i valori degli shock sono in modulo vicini a 1 e il $PVFP_1$ diventa negativo.

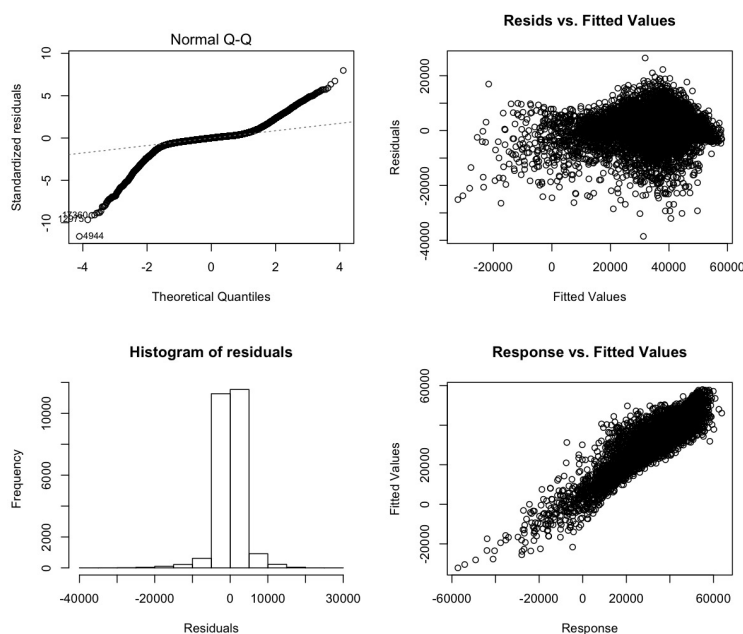


Figura 7.5: Alcuni grafici diagnostici del modello (7.34).

7.4.2 GAM, prodotto tensoriale e P-splines

Utilizziamo gli strumenti del Capitolo 6 e la libreria R *mgcv* per cercare di migliorare la stima del $PVFP_1$. Il modello stimato tramite la funzione *gam* è

$$\begin{aligned} \widehat{PVFP}_1(s_1, s_2, s_3, s_4) = & \beta_0 + \text{ti}(s_1, k = 12) + s_2 + s_3 + s_4 + \\ & \text{ti}(s_1, s_2) + \text{ti}(s_1, s_3) + \text{ti}(s_1, s_4) + \\ & \text{ti}(s_2, s_3) + \text{ti}(s_2, s_4) + \text{ti}(s_3, s_4) + \\ & \text{ti}(s_1, s_2, s_3) + \text{ti}(s_1, s_2, s_4) + \text{ti}(s_1, s_3, s_4) + \\ & s_2 : s_3 : s_4 + s_1 : s_2 : s_3 : s_4, \end{aligned} \quad (7.36)$$

dove gli elementi $\text{ti}(\cdot)$ indicano le interazioni *prodotto tensoriale* costruiti sulle *P-splines*. Le P-splines utilizzate sono di ordine $m = 2$ (simili quindi alle spline polinomiali di ordine $m + 1 = 3$, *cubiche*) e la penalità utilizzata è di secondo ordine (si sono quindi mantenute le impostazioni di default). Benché a determinare la tortuosità delle funzioni sia la GCV, $k - 1$, dove k è la dimensione della base, pone un limite verso l'alto ai gradi di libertà; il “-1” è dovuto al vincolo di identificabilità. Per ogni $\text{ti}(\cdot)$ k è posto pari a 5^d , dove d è il numero di argomenti di $\text{ti}(\cdot)$, ad eccezione della base di $\text{ti}(s_1)$ che è stata incrementata a 12 dopo l'analisi del modello tramite la funzione *gam.check*. Parametri, *gradi di libertà stimati* (estimated degrees of freedom, edf) e *p-value* per i vari termini sono riportati nella Tabella 7.3. Gli edf danno un'indicazione sulla tortuosità della funzione stimata, più bassi sono, più la funzione è liscia. I *nodi* su cui sono calcolati i $\text{ti}(\cdot)$ sono stati scelti equispaziati, come consigliato da Wood (2006) per le P-splines. I p-value ottenuti derivano da un'approssimazione di un test di Wald e vanno considerati con cautela, soprattutto considerando che né l'ipotesi di normalità né quella di omoschedasticità sono rispettate (come visibile dai grafici riportati). L' R^2 corretto per il modello è pari a 89,1%.

Di seguito alcuni grafici del modello.

x	β	p-value	ti	edf	p-value
1	34 000	$< 2 \cdot 10^{-16}$	ti(s_1)	10,9	$< 2 \cdot 10^{-16}$
s_2	3 246	$< 2 \cdot 10^{-16}$	ti(s_1, s_2)	15,2	$< 2 \cdot 10^{-16}$
s_3	-6 552	$< 2 \cdot 10^{-16}$	ti(s_1, s_3)	15,0	$< 2 \cdot 10^{-16}$
s_4	-1 654	$< 2 \cdot 10^{-16}$	ti(s_1, s_4)	12,0	$< 2 \cdot 10^{-16}$
$s_2 : s_3 : s_4$	904	$< 2 \cdot 10^{-16}$	ti(s_2, s_3)	3,4	$< 2 \cdot 10^{-16}$
$s_1 : s_2 : s_3 : s_4$	-2 109	$< 2 \cdot 10^{-16}$	ti(s_2, s_4)	4,1	$< 2 \cdot 10^{-16}$
			ti(s_3, s_4)	8,8	$4 \cdot 10^{-8}$
			ti(s_1, s_2, s_3)	7,9	$< 2 \cdot 10^{-16}$
			ti(s_1, s_2, s_4)	30,9	$< 2 \cdot 10^{-16}$
			ti(s_1, s_3, s_4)	45,5	$< 2 \cdot 10^{-16}$

Tabella 7.3: Parametri, gradi di libertà e p-value stimati, modello (7.36).

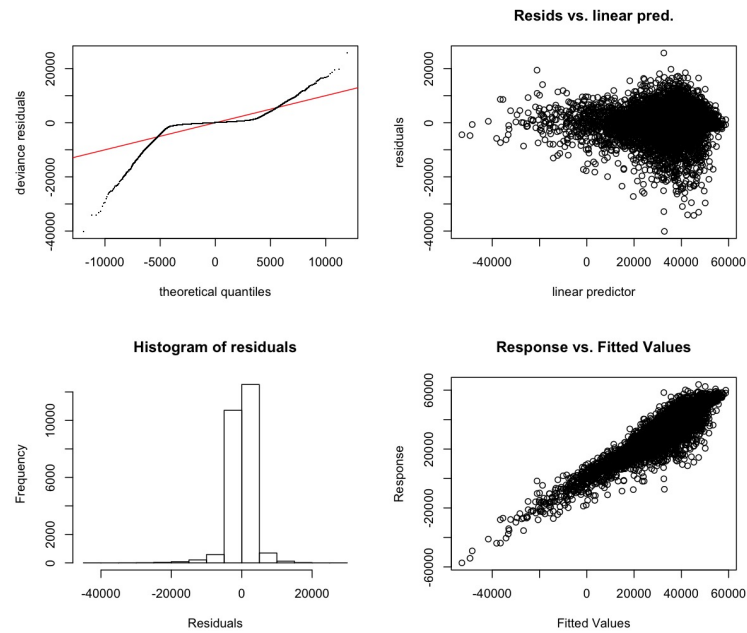


Figura 7.6: Alcuni grafici diagnostici del modello (7.36).

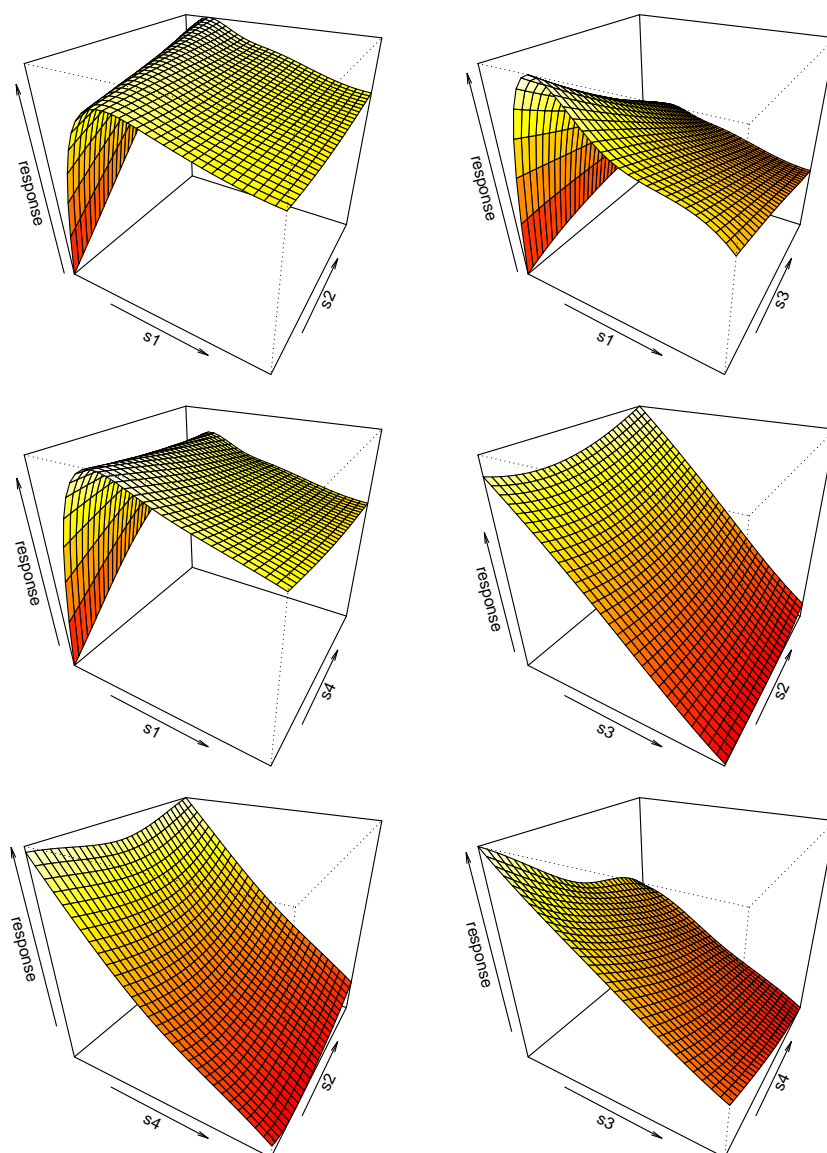


Figura 7.7: Effetti stimati degli shock combinati sul \widehat{PVFP}_1 , modello (7.36).

7.5 Confronto dei modelli e calcolo del SCR

7.5.1 Confronto tra Minimi Quadrati e GAM

Verifichiamo i modelli su alcuni punti per cui abbiamo calcolato il “vero” valore del $PVFP_1$. Per ogni combinazione degli shock sono state generate 5 000 traiettorie sotto la misura Q (2 500 + 2 500 antitetiche), il *vero* valore del $PVFP_1$ per ogni combinazione è quindi la media dei 5 000 valori ottenuti. Questo numero di traiettorie è stato trovato sufficiente per ottenere stime affidabili (come già accennato, spesso ne vengono utilizzate 1 000).

s_1	s_2	s_3	s_4	$PVFP_1$	\widehat{PVFP}_1^{MQ}	\widehat{PVFP}_1^{GAM}	diff. MQ	diff. GAM
95%	95%	95%	95%	22 508	22 441	22 344	-67	-163
95%	95%	95%	0%	24 804	23 444	24 850	-1 359	46
95%	95%	0%	95%	26 925	25 371	28 341	-1 554	1 416
95%	0%	95%	95%	22 199	20 644	22 233	-1 556	34
0%	95%	95%	95%	26 752	20 776	28 091	-5 975	1 339
95%	95%	-95%	-95%	40 088	36 906	39 308	-3 182	-780
95%	0%	0%	0%	29 323	29 058	29 076	-265	-247
0%	95%	0%	0%	36 440	35 138	37 194	-1 302	754
0%	0%	95%	0%	29 368	28 186	28 723	-1 181	-645
0%	0%	0%	95%	32 160	30 960	32 506	-1 200	346
50%	50%	50%	50%	27 637	29 218	27 535	1 581	-102
50%	0%	0%	0%	32 090	31 751	31 951	-339	-139
0%	50%	0%	0%	36 187	35 385	36 215	-802	27
0%	0%	50%	0%	32 235	31 441	31 760	-794	-475
0%	0%	0%	50%	33 875	33 028	33 964	-848	89
25%	25%	25%	25%	31 348	30 194	31 389	-1 153	41
25%	0%	0%	0%	33 891	32 856	33 622	-1 035	-269
0%	25%	0%	0%	36 049	35 523	35 849	-526	-200
0%	0%	25%	0%	33 997	33 471	33 669	-525	-328
0%	0%	0%	25%	34 879	34 311	34 734	-567	-145
0%	0%	0%	0%	35 920	35 660	35 625	-260	-295
0%	0%	0%	-25%	36 997	37 050	36 731	53	-266
0%	0%	-25%	0%	37 924	38 008	37 553	85	-370
0%	-25%	0%	0%	35 795	35 798	35 554	3	-241
-25%	0%	0%	0%	38 204	39 334	38 125	1 130	-79
-25%	-25%	-25%	-25%	41 481	42 797	41 819	1 317	339
0%	0%	0%	-50%	38 105	38 455	38 033	350	-72
0%	0%	-50%	0%	40 074	40 515	39 424	441	-650
0%	-50%	0%	0%	35 670	35 935	35 638	265	-32
-50%	0%	0%	0%	40 369	41 054	40 278	684	-91
-50%	-50%	-50%	-50%	44 610	42 174	44 478	-2 436	-132
0%	0%	0%	-95%	40 198	40 947	40 723	749	525
0%	0%	-95%	0%	44 374	45 427	42 594	1 053	-1 780
0%	-95%	0%	0%	35 449	36 183	36 187	734	738
-95%	0%	0%	0%	22 141	22 580	21 889	439	-252
-95%	-95%	95%	95%	19 020	16 512	20 736	-2 508	1 715
0%	-95%	-95%	-95%	49 082	45 675	49 466	-3 407	384
-95%	0%	-95%	-95%	-14 695	889	-14 303	15 584	392
-95%	-95%	0%	-95%	-22 568	-22 193	-23 879	375	-1 311
-95%	-95%	-95%	0%	-16 346	-5 104	-13 943	11 242	2 404
-95%	-95%	-95%	-95%	-58 004	-33 939	-55 988	24 065	2 016

Tabella 7.4: Confronto delle stime dei $PVFP_1$ tramite MQ e GAM rispetto ai *veri* valori.

Come visibile dalla Tabella 7.4, sia i minimi quadrati che il modello GAM stimano correttamente il $PVFP_1$ per shock medio-piccoli; lo stesso non vale in presenza di forti shock negativi (vedi l'ultima riga della tabella dove il modello MQ sbaglia di 24 065 contro 2 016 del modello GAM). Questo è vero soprattutto se ad assumere un valore negativo in modulo vicino a 1 è s_1 , shock applicato al parametro b del modello CIR (che influisce sia sul rendimento della parte obbligazionaria che sul fattore di sconto).

7.5.2 Distribuzione delle perdite e Solvency Capital Requirement

Applicando le procedure descritte, otteniamo la stima del capitale disponibile al tempo $t = 0$ (continuiamo a esprimere i valori in migliaia di euro):

$$\widehat{AC}_0 = 33\,952. \quad (7.37)$$

Ricordando che abbiamo chiamato n gli shock *real-world*, possiamo stimare le perdite $L(n_1, n_2, n_3, n_4)$ valutate in $t = 0$ come

$$L(n_1, n_2, n_3, n_4) = \widehat{AC}_0 - \frac{\widehat{PVFP}_1(n_1, n_2, n_3, n_4)}{1 + 0,04}, \quad (7.38)$$

la stima del SCR è quindi il quantile al 99,5% delle perdite L . I valori ottenuti utilizzando i minimi quadrati e il modello GAM sono:

$$SCR^{MQ} = 8\,474; \quad (7.39)$$

$$SCR^{GAM} = 8\,308. \quad (7.40)$$

Anche se il modello MQ non fornisce sempre la stima corretta, le stime del SCR ottenute come i due modelli sono molto simili. In questo caso, il vantaggio del modello GAM è quello di rappresentare più correttamente la distribuzione delle perdite, mentre ai fini del calcolo del requisito di capitale i due modelli danno un risultato analogo (questa vicinanza però potrebbe essere soltanto una coincidenza).

Utilizzando il modello MQ, possiamo ricostruire le perdite in $t = 0$ per i vari shock con un approccio simile a quello della *standard formula* della direttiva. Ad esempio, il requisito per il primo fattore di rischio è il quantile al 99,5% delle perdite calcolate come

$$L_1(n_1, n_2, n_3, n_4) = \widehat{AC}_0 - \frac{\widehat{PVFP}_1(n_1, 0, 0, 0)}{1 + 0,04}. \quad (7.41)$$

I SCR ottenuti per i singoli fattori di rischio sono:

$$\text{SCR}_1 = 4\,923; \quad (7.42)$$

$$\text{SCR}_2 = 88; \quad (7.43)$$

$$\text{SCR}_3 = 5\,850; \quad (7.44)$$

$$\text{SCR}_4 = -531. \quad (7.45)$$

Visto che lo shock s_2 incide solo sulla deriva del processo utilizzato per determinare i rendimenti azionari e visto che questi pesano solo per il 20% del rendimento del fondo, non stupisce il valore modesto del SCR_2 . Il valore negativo di SCR_4 dà l'indicazione che, se gli altri fattori di rischio non variano, il valore assunto da r_t in $t = 1$, nel 99,5% dei casi non determina una perdita. La formula aggregativa del Capitolo 1 assumeva implicitamente che i SCR marginali fossero *centrati*, ovvero che la perdita media dovuta ai singoli fattori di rischio fosse zero. Se così non fosse, la formula da utilizzare diventerebbe (vedi sempre Bauer et al., 2009)

$$\text{SCR}^{sf} = \sum_{i=1}^d \mu_i + \sqrt{\sum_{i,j=1,\dots,d} \rho_{ij} (\text{SCR}_i - \mu_i)(\text{SCR}_j - \mu_j)}, \quad (7.46)$$

dove $\mu_i = E(L_i)$. Nel nostro caso i μ_i sono

$$\mu_1 = -546; \quad (7.47)$$

$$\mu_2 = -335; \quad (7.48)$$

$$\mu_3 = -455; \quad (7.49)$$

$$\mu_4 = -628. \quad (7.50)$$

Data la scelta in linea con la direttiva di $\rho_{12} = 0,5$ fatta in precedenza (usato per generare gli shock) e avendo posto pari a zero gli altri ρ_{ij} , il SCR secondo la formula aggregativa di Solvency II è

$$\begin{aligned} \text{SCR}^{sf} &= \sum_{i=1}^4 \mu_i + \sqrt{\sum_{i=1}^4 (\text{SCR}_i - \mu_i)^2 + 2\rho_{12} (\text{SCR}_1 - \mu_1)(\text{SCR}_2 - \mu_2)} \\ &= 6\,531; \quad \text{abbiamo quindi che} \end{aligned} \quad (7.51)$$

la *standard formula* sottostima di più del 20% il requisito di capitale.

Data l'assunzione di normalità congiunta degli shock e linearità (o quasi) del loro effetto sull' AC_1 alla base della *standard formula*, la distribuzione implicita per perdite del portafoglio L^{sf} è anch'essa normale. Avendo

$$\mu_L = \sum_{i=1}^4 \mu_i \quad (7.52)$$

e risolvendo l'uguaglianza

$$SCR^{sf} = q_L(99,5\%) = \mu_L + \sigma_L \Phi^{-1}(99,5\%) \quad (7.53)$$

per σ_L (Φ^{-1} quantile della normale standard), abbiamo che le perdite L^{sf} sono distribuite come

$$\begin{aligned} L^{sf} &\sim \mathcal{N}\left(\mu_L, \left[\frac{SCR^{sf} - \mu_L}{\Phi^{-1}(99,5\%)}\right]^2\right) \\ &\sim \mathcal{N}(-1964, 3298^2). \end{aligned} \quad (7.54)$$

Mostriamo infine graficamente le tre distribuzioni e i relativi requisiti di capitale.

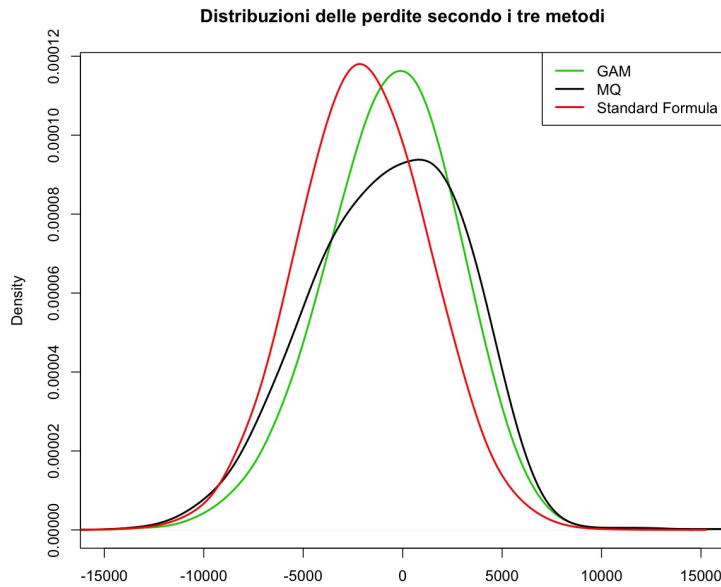


Figura 7.8: Distribuzioni delle perdite ottenute con il modello GAM, MQ e *standard formula*.

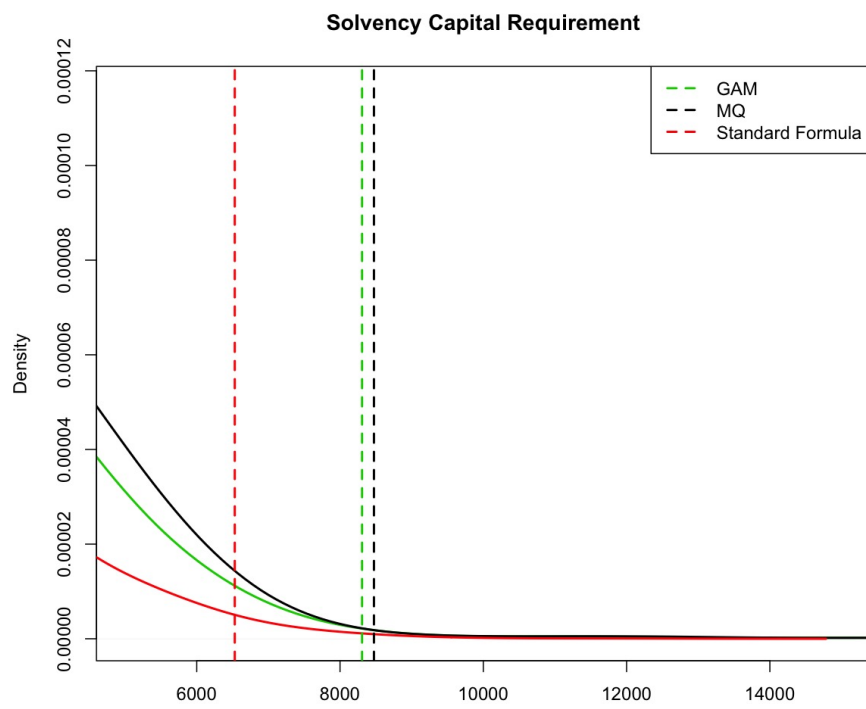


Figura 7.9: Ingrandimento sulle code destre delle distribuzioni e relativi Solvency Capital Requirement.

Conclusioni

In questa tesi abbiamo sviluppato il metodo dei minimi quadrati di Monte Carlo nel contesto di Solvency II, innestandolo con tecniche volte a migliorarne l'efficacia. Abbiamo concluso confermando l'inaffidabilità della *standard formula* in presenza di dinamiche fortemente non lineari come quelle indotte da una garanzia di minimo. L'uso dei modelli GAM sembrerebbe dare risultati positivi e aumentare la precisione con cui viene valutata la distribuzione dei profitti futuri. In particolare, i lisciatori prodotto tensoriale sembrano essere un modo efficace per trattare dinamiche complesse di più variabili mantenendo comunque basso l'onere computazionale. Prima di trarre conclusioni definitive tuttavia, il modello di regressione e le procedure utilizzate andrebbero valutate in un contesto più fedele alla realtà; a questo proposito l'approssimazione che si è fatta degli scenari possibili è da considerarsi solo finalizzata a descrivere il modello proposto: in un'applicazione lavorativa sia le procedure di stima che la scelta dei processi andrebbero approfondite e ampliate.

I possibili sviluppi futuri del metodo LSMC in questo contesto potrebbero procedere su più fronti; attingendo alle tecniche legate ai metodi di Monte Carlo, alle tecniche di riduzione della varianza e alla generazione dei numeri casuali. A questo proposito si potrebbe cercare una configurazione ottimale nella distribuzione degli shock che qui abbiamo generato (uniformemente) con Sobol. Visto che la variabilità aumenta sulle code e visto che queste sono di grande interesse, è sensato studiare distribuzioni non uniformi degli shock da utilizzare per la stima della funzione che li lega ai profitti futuri. Allo stesso scopo, si può migliorare la precisione delle stime per ogni scenario critico aumentando selettivamente le traiettorie *risk-neutral* (invece di generare solo due traiettorie antitetiche per punto).

Infine, una seconda via potrebbe essere quella di approfondire gli aspetti legati al metodo di regressione da utilizzare, in questo contesto l'approccio GAM ha ampi margini di sviluppo. Tenendo sempre a mente che potrebbero essere computazionalmente non fattibili, in casi come quello riscontrato dove la varianza sembra dipendere dalle variabili esplicative, i modelli

GAMLSS (Generalized Additive Model for Location, Scale and Shape, Rigby e Stasinopoulos, 2001) potrebbero rappresentare uno sviluppo promettente.

Appendice A

Teoria della probabilità

Definizione A.1 (filtrazione). Sia (Ω, \mathcal{F}, P) uno spazio di probabilità completo. Una famiglia di sotto- σ -algebre di \mathcal{F} , $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, tale che $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ per $0 \leq s < t < \infty$ si dice *filtrazione* di \mathcal{F} .

Definizione A.2 (base stocastica). Chiamiamo la quaterna $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ *base stocastica* (o *spazio di probabilità filtrato*).

Assumiamo che le seguenti condizioni siano soddisfatte:

- a. \mathcal{F}_0 contiene tutti gli insiemi P -nulli di \mathcal{F} ;
- b. \mathbb{F} è *continua a destra*, i.e. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$.

Definizione A.3 (processo stocastico). Un *processo stocastico* è una famiglia di variabili casuali $X = \{X(t)\}_{t \geq 0}$ definita su $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$.

Diciamo che X è *adattato* se $X(t) \in \mathcal{F}_t$ (i.e. se $X(t)$ è \mathcal{F}_t -misurabile) per ogni t .

Definizione A.4 (martingala). Un processo stocastico $X = \{X(t)\}_{0 \leq t < \infty}$ è una *martingala* relativamente a (\mathbb{F}, P) se

- (i) X è adattato a \mathbb{F} ;
- (ii) $E|X(t)| < \infty$ per ogni $0 \leq t < \infty$;
- (iii) $E[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s)$ $P - q.c.$ ($0 \leq s \leq t$).

X è una *supermartingala* se al posto di (iii) abbiamo

$$E[X(t)|\mathcal{F}_s] \leq X(s) \quad P - q.c. \quad (0 \leq s \leq t)$$

mentre è una *submartingala* se

$$E[X(t)|\mathcal{F}_s] \geq X(s) \quad P - q.c. \quad (0 \leq s \leq t).$$

Definizione A.5 (variazione finita). Una funzione f è a *variazione finita* se l'estremo superiore della sua variazione $\sum_i |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$ su tutte le partizioni x_i è finita.

Definizione A.6 (tempo d'arresto). Una variabile casuale $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ è un *tempo d'arresto* se $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ per ogni $t \geq 0$.

Definizione A.7 (martingala locale). Per $X = \{X(t)\}$ processo stocastico e τ tempo d'arresto, chiamiamo X^τ il processo X *arrestato* a τ ,

$$X^\tau = X_{t \wedge \tau}.$$

Se X è un processo e $\{\tau_n\}$ una sequenza crescente di tempi d'arresto, chiamiamo X una *martingala locale* se $\{X^{\tau_n}\} = \{X_{t \wedge \tau_n}\}$ è una martingala.

Definizione A.8 (semi-martingala). Un processo $X = \{X_t\}$ adattato, *càdlàg* (*continu à droite, limite à gauche*, continuo a destra e limitato a sinistra), è una *semi-martingala* se può essere decomposto come

$$X_t = X_0 + N_t + A_t,$$

con N martingala locale e A processo a variazione localmente finita.

Bibliografia

- [1] Alfonsi, A. (2005) *On the discretization schemes for the CIR (and Bessel squared) processes*. Monte Carlo Methods and Applications, Vol. 11, No. 4, pp. 355-467.
- [2] Alfonsi, A. (2010) *High order discretization schemes for the CIR process: application to Affine Term Structure and Heston models*. Mathematics of Computation, American Mathematical Society, 79 (269), pp. 209-237.
- [3] ANIA (2013) *Solvency II: origine, struttura e sviluppo*.
- [4] Barbarin, J., P. Devolder (2005) *Risk measure and fair valuation of an investment guarantee in life insurance*, Insurance: Mathematics and Economics, 37:297–323.
- [5] Bauer, D., R. Kiesel, A. Kling e J. Ruß (2006) *Risk-neutral valuation of participating life insurance contracts*, Insurance: Mathematics and Economics, 39:171–183.
- [6] Bauer, D., D. Bergmann e R. Kiesel (2008) *On the risk-neutral valuation of life insurance contracts with numerical methods in view*, Working Paper, Georgia State University e Ulm University.
- [7] Bauer, D., D. Bergmann e A. Reuss (2009) *Solvency II and Nested Simulations – a Least-Squares Monte Carlo Approach*, Georgia State University e Ulm University.
- [8] Bingham, N.H. e R. Kiesel (2004) *Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives*, 2nd Edition.
- [9] Björk, T. (2009) *Arbitrage Theory in Continuous Time* third edition.
- [10] Black, F. (1976) *Studies of Stock Price Volatility Changes*, Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistic Section, 177-181.

- [11] Brigo, D. e F. Mercurio (2007) *Interest rate model. Theory and Practice with smile, inflation and credit*, Springer.
- [12] Byun, S.J. (2011) *A Study on Heston-Nandi GARCH Option Pricing Model*, KAIST Business School, Korea.
- [13] Cardi, G.G. e R. Rusnak (2007) *When the SST Standard Model Underestimates Market Risk*, Bern.
- [14] CEIOPS (2010) *CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: SCR STANDARD FORMULA*, Article 111(d), Correlations.
- [15] CFO Forum (2009) *Market Consistent Embedded Value Principles*, www.cfoforum.nl.
- [16] Cox, J.C. e S.A. Ross (1975) *The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes*, Journal of Financial Economics 3 145-166.
- [17] Cox, J.C., J.E. Ingersoll e S.A. Ross (1985) *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica 53: 385-407. doi:10.2307/1911242.
- [18] Christie, A. (1982) *The Stochastic Behaviour of Common Stock Variances: Leverage and Interest Rate Effects*, Journal of Financial Economics, 10, 407-432.
- [19] European Money Markets Institute (EMMI), <http://www.emmi-benchmarks.eu/>.
- [20] European Commission (2010) *QIS5 Technical Specifications*.
- [21] Garbade, K. (1986) *Assessing Risk and Capital Adequacy for Treasury Securities*, Topics in Money and Securities Markets, Bankers Trust.
- [22] Geyer, C.J. (2003) *Model Selection in R*.
- [23] Glasserman, P. (2003) *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer-Verlag.
- [24] Gouriéroux, C. e A., Monfort (2007) *Estimation of the Historical Mean-Reverting Parameter in the CIR Model*.
- [25] Heston, S.L. e S. Nandi (1997) *A Closed-Form GARCH Option Pricing Model*, Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper 97-9.

- [26] Hull, J. (2015) *Opzioni, Futures e altri Derivati*, Nona Edizione, Pearson.
- [27] Istituto nazionale di statistica (Istat), <http://www.istat.it>.
- [28] Kousaris, A.J. (2011a) *Calculating the Solvency Capital Requirement*, barrie+hibbert.
- [29] Kousaris, A.J. (2011b) *Improving capital approximation using the curve-fitting approach*, barrie+hibbert.
- [30] Kousaris, A.J. (2011c) *A primer in replicating portfolios*, barrie+hibbert.
- [31] Kousaris, A.J. (2011d) *A comparison between curve fitting and least squares Monte Carlo techniques*, barrie+hibbert.
- [32] Longstaff, F.A. e E.S. Schwartz (2001) *Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach*, The Review of Financial Studies, Vol. 14. No. 1, pp. 113-147.
- [33] Manukian, A.V. (2012) *Approccio stocastico alla modellizzazione del requisito di capitale in ottica Solvency II*, Tesi di Laurea Magistrale, Università degli Studi di Trieste.
- [34] Morrison, S. (2008) *Replicating Portfolios for Economic Capital: Replication or Approximation?*, barrie+hibbert.
- [35] Morrison, S. (2009) *Nested Simulation for Economic Capital*, barrie+hibbert.
- [36] Niederreiter, H. (1992) *Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- [37] Palloni, A. (2015) *Short rate models: un confronto empirico tra modelli alternativi*, Tesi di Laurea Magistrale, Università degli Studi di Padova.
- [38] Rigby, R.A. e Stasinopoulos, D.M. (2001) *The GAMLSS project: a flexible approach to statistical modelling*, Klein, B. and Korsholm, L. (eds.), New Trends in Statistical Modelling: Proceedings of the 16th International Workshop on Statistical Modelling, pp. 249-256, Odense, Denmark.

- [39] Sobol, I.M. (1967) *On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals*, URSS Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics (English translation) 16:1332-1337.
- [40] Wood, S.N. (2006) *Generalized Additive Models: An Introduction with R*, Chapman & Hall/CRC.
- [41] Yahoo Finanza, <https://it.finance.yahoo.com/>.